Développements

Pierre Monmarché

18 mai 2011

Table des matières

La liste des leçons potentiellement concernées n'est pas forcément exhaustive ; je mets en général celles où j'utilisais moi-même ce développement. Évidemment la pertinence dépend aussi de votre plan de leçon. Les développements marquées d'une étoile ont été moins relus que les autres (ce qui ne veut pas nécessairement dire que les autres sont corrects).

1 Théorèmes de Sylow

Cours d'algèbre, Perrin

Leçons potentiellement concernées :
– 101 : groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
– 104 : groupes finis. Exemples et applications.

Théorème. *Si p premier divise $|G| = n$ alors G possède des p-Sylow, ils sont conjugués, un p-sous-groupe de G est toujours inclus dans l'un d'eux, et leur nombre n_p divise n et est égal à 1 modulo p.*

Existence d'un p-Sylow :

Lemme 1. *$H \leq G$, S p-Sylow de G, alors $\exists a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p-Sylow de H.*

Démo du lemme : H agit par translation sur G/S, le stabilisateur de aS est $aSa^{-1} \cap H$, la formule des classes donne :

$$p \nmid |G/S| = \sum_{orb} \frac{|H|}{|aSa^{-1} \cap H|}$$

Donc l'un des $aSa^{-1} \cap H$ est d'indice dans H non divisible par p : c'est un p-Sylow de H.

Démo du Théorème : Cayley injecte G dans Σ_G qui s'injecte dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ par $\sigma \mapsto u_\sigma$ défini par $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$
Or $GL_n(\mathbb{F}_p)$ (d'ordre $(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1})$, en comptant les bases) a un p-Sylow : les matrices triangulaires supérieures avec des 1 en diagonale (d'ordre $p * p^2 * \cdots * p^{n-1}$)

inclusion et conjugué :

Si H est un p-groupe, le p-Sylow $aSa^{-1} \cap H$ de H est H lui-même, donc $H \subset aSa^{-1}$ et si H était un p-Sylow il y a égalité. Ceci entraîne que $n_p | n$ (orbite).

égalité modulo :

Un p-Sylow S agit par conjugaison sur X les p-Sylow. On a $n_p := |X| = |X^S|[p]$.
Supposons qu'un autre p-Sylow $T \neq S$ soit fixé par S, U le sous-groupe de G engendré par S et T (qui en sont des p-Sylows) : S normalise T donc $T \triangleleft U$ et donc c'est l'unique p-Sylow.

Groupe simple d'ordre 63

$63 = 3^2 * 7$, $n_7 | 9$ et $= 1[7]$ donc il n'y a qu'un 7-Sylow, distingué.

Remarques :

2 Isomètries du cube et du tétraèdre

Thème de géomètrie pour l'agrégation, Alessandri

Leçons potentiellement concernées :
– 101 : groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
– 105 : groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
– 108 : exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
– 135 : isomètries d'un espace affine euclidienne de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimension 2 ou 3.
– 141 : utilisation des groupes en géomètrie.

Théorème. *Iso(Δ) $\simeq \mathfrak{S}_4$ et Iso(C)$\simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Le tétraèdre :

Les isometries agissent sur les sommets du tétraèdre, ce qui donne un morphisme d'Iso(Δ) dans $\mathfrak{S}_4$. Celui est injectif car les isometries conservent les barycentres, et surjectif car l'image contient les permutations (symètrie par un plan médiateur).

La composition par une isometrie indirecte fournit une bijection entre les déplacements et les anti-déplacements, donc les déplacements sont d'indice 2 dans Iso(Δ), or le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$ est $\mathfrak{A}_4$ (car d'indice 2 $\Rightarrow$ distingué, on a donc un morphisme dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, déterminé par l'image d'une transposition puisqu'elles sont conjuguées, soit le trivial soit la signature...) donc $\text{Iso}^+(\Delta) \simeq \mathfrak{A}_4$.

Le cube :

Les isometries agissent sur les 4 grandes diagonales du cube, le morphisme ϕ est surjectif (symètrie t par rapport au plan engendré par 2 de ces diagonales - d'ailleurs ce sont des déplacements, ϕ est donc surjectif depuis $Iso^+(C)$) mais pas injectif : soit $f \neq id$ dans son noyau (qui fixe donc chaque diagonale dans sa globalité), soit A un sommet non fixé, B un de ses voisins, l'image de B est voisine de celle de A or ce n'est pas le cas de B donc c'est l'autre point de la diagonale. Donc $f = s_O$ la symètrie de centre O (centre du cube). Par contre ϕ est injectif depuis $Iso^+(C)$, qui est donc isomorphe à $\mathfrak{S}_4$

s_O commute avec tous les autres éléments d'Iso(C) : en effet, ceux-ci conservent les grandes diagonales, et s_O échangent les deux sommets d'une même grande diagonale.

Ainsi le sous-groupe $Iso^+(C)$, d'indice 2, est distingué, $< s_0 > \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'est également (noyau de ϕ), leur intersection est l'identité et leur produit (question de cardinalité, ou mieux, par ϕ) est Iso(C), donc Iso(C)$\simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarques :

Montrer que s_O commute n'est pas nécessaire. Il faut évidemment faire plein de dessins.

3 Facteurs invariants

Les Matrices, Denis Serre

Leçons potentiellement concernées :
- 101 : groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 111 : anneaux principaux. Applications.
- 119 : exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 124 : polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 140 : systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

Remarques :

À la réflexion, autant l'idée de l'algorithme est relativement simple, autant connaître par cœur les bons coefficients (ou les retrouver en un éclair) s'avère délicat. Et pourtant dans certaines leçons c'est bien cette partie du développement qu'il convient de faire.

4 Groupes d'ordre 12

Théorie des groupes, Delcourt (p.98)

Leçons potentiellement concernées :
- 103 : exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
- 104 : groupes finis. Exemples et applications.
- 145 : méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement (boff...)

Théorème. *à isomorphismes près les seuls groupes d'ordre 12 sont :* $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$, $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$, A_4, $\mathbb{D}_{12}$ *ou* $\mathcal{T}$

Soit G un groupe d'ordre 12. S'il est commutatif, la structure des groupes abélien de type fini et le théorème chinois indiquent qu'il est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$ ou à $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$

Supposons maintenant que G n'est pas abélien. Soit H un 3-Sylow, G agit par translation sur G/H. Si $g \in G$ est dans le noyau de l'action, g fixe notamment la classe du neutre, autrement dit H, donc le noyau est inclus dans H et peut être soit trivial, soit H. Dans le premier cas, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ (car $|G/H| = 4$) d'ordre 12. Un tel sous-groupe est distingué car d'indice 2, contient un élément d'ordre 3 c'est-à-dire un 3-cycles, et comme ceux-ci sont conjugués il les contient tous. $\mathfrak{A}_4$ est engendré par les 3-cycles et de cardinal 12 donc $G \simeq \mathfrak{A}_4$.

Dans le second cas $H \lhd G$ et il n'y a alors qu'un seul 3-Sylow, donc deux éléments d'ordre 3. Soit g l'un d'eux. Son orbite par conjugaison est de taille 1 ou 2, égale à l'indice de son centralisateur qui est donc de cardinal pair et contient un élément h d'ordre 2. h et g commutent donc $x := gh$ est d'ordre 6. De plus $\langle x \rangle$ est d'indice 2, il est donc distingué.

Supposons qu'il existe y un autre élément d'ordre 2 que x^3. On a $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = e$, $\langle x \rangle \lhd G$ et, par cardinalité, $\langle x \rangle \langle y \rangle = G$, donc $G \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \rtimes_\phi \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$. Le morphisme trivial donne le produit direct et le seul autre automorphisme de $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ est $1 \mapsto 5 = -1$. Le produit semi-direct obtenu est isomorphe à $\mathbb{D}_{12}$ (x est la rotation, y la réflexion)

Si un tel y n'existe pas, les éléments de $G \setminus \langle x \rangle$ sont d'ordre 4 ou 6. En fait 6 est exclus : si $o(z) = 6$ alors $z^3 = x^3$ et $o(z^2) = 3$ donc $z^2 = x^2$ ou $x^4 \Rightarrow z = x$ ou x^{-1}. Soit b d'ordre 4, $o(b^2) = 2$ donc $b^2 = x^3$ et $o(bxb^{-1}) = 6$ donc $bxb^{-1} = x$ ou x^{-1}, le premier étant exclus sinon x et b commuteraient et G serait abélien, G est isomorphe au groupe dicyclique $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \langle x, z | x^6 = e, z^2 = x^3, zxz^{-1} = x^{-1} \rangle$$

Remarques :

En fait il n'est pas besoin de supposer que G n'est pas abélien ; simplement on retrouve les deux cas abéliens au fil de l'étude. Dès qu'on a un élément x d'ordre 6 remarquons qu'il suffit d'exhiber un élément y n'étant pas dans $< x >$ et, de façon ensembliste, $G =< x > \cup y < x >$. Il n'y a donc plus qu'à savoir comment multiplier x et y et on connait totalement le groupe.

5 Simplicité du groupe alterné

Algèbre Corporelle, Chambert-Loir (p.104), mais en fait un peu partout, le Delcourt, le Perrin...

Leçons potentiellement concernées :
- 102 : exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
- 104 : groupes finis. Exemples et applications.
- 105 : groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 108 : exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Simplicité de A_5

Les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans A_5, de même que ceux d'ordre 3 et 5. Pour les deux derniers, c'est le fait que les p-Sylow sont conjugués. Quant aux éléments d'ordre 2 de A_5, ce sont des doubles transpositions. Soient $s_1 = (a, b)(c, d)(e)$ et $s_2 = (a', b')(c', d')(e')$ deux d'entre eux, et soit σ une permutation qui envoit a sur a', b sur b' et e sur e'. On peut alors envoyer $\{c, d\}$ sur $\{c', d'\}$ de sorte que $\sigma \in A_5$, et $\sigma s_1 \sigma^{-1} = s_2$. Ceci indique qu'un sous-groupe distingué qui contient un élément d'ordre p les contient tous.

A_5 possède :
- $(5-1)! = 24$ 5-cycles (ses éléments d'ordre 5)
- $2\binom{5}{3} = 20$ 3-cycles (ses éléments d'ordre 3)
- $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$ éléments d'ordre 2.

Un sous-groupe distingué, dont le cardinal divise 60, doit nécessairement comporter, en plus du neutre, plusieurs types d'éléments. Donc son cardinal est supérieur à 36 autrement dit c'est A_5 tout entier, qui se révèle donc simple.

$n \geq 5$ quelconque

On va se ramener au cas $n = 5$ par une permutation du sous-groupe n'agissant que sur 5 éléments.

Soient $H \lhd A_n$, $\sigma \in H \setminus \{e\}$ et soit $a \in [|1, n|]$ tel que $b = \sigma(a) \neq a$, enfin soit $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$ et $\tau = (a, c, b)$. On a

$$\begin{aligned} \rho &= (\tau\sigma\tau^{-1})\sigma^{-1} \in H \\ &= \tau(\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}) \\ &= (acb)(\sigma(a)\sigma(c)\sigma(b)) \end{aligned}$$

Ainsi $|supp(\rho)| \leq 5$, et $\rho(b) \neq b$ donc $\rho \neq e$. Soit $F \subset [|1, n|]$ de cardinal 5 contenant $supp(\rho)$. Considérons le morphisme i d'injection de A_5 dans A_n qui envoit s sur la permutation de A_n agissant sur F comme s et étant l'identité sur son complémentaire. La pré-image de H par i est distinguée dans A_5 et non réduit à $\{e\}$ donc égal à A_5. Elle contient en particulier un 3-cycle, donc H contient un 3-cycle et les contient tous puisque ceux-ci sont conjugués dans A_n. Or A_n est engendré par les 3-cycles, et finalement $H = A_n$.

Remarques :

$A_2 = \{e\}$ et $A_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont simples, mais le groupe de Klein (les doubles transpositions) est distingué dans A_4.

6 Lie-Kolchin*

Algèbre corporelle,

Leçons potentiellement concernées :
- 103 : exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
- 107 : représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-ev
- 125 : sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 128 : endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 204 : connexité. Exemples et applications

Théorème (Lie-Kolchin)**.** *Tout sous-groupe connexe et résoluble de $Gl_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un groupe de matrices triangulaires*

Lemme 2. *Une famille de matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux est simultanèment triangulable*

Démo : Par récurrence sur n ; un élément qui n'est pas une homothétie a des sous-espaces propres stables par les autres.

Lemme 3. *Si G est un sous-groupe connexe de $GL_n(\mathbb{C})$, son groupe dérivé l'est également.*

Démo : Notons $S_m = \{g_1 ... g_m / g_i$ commutateurs$\}$. Par continuité de $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-2}$ et du produit, chaque S_m est connexe, et ils ont I_n en commun donc $\cup S_m = D(G)$ est connexe.

Démo du Théorème : On montre le résultat par récurrence sur n (il est vrai pour $n = 1$).

Si un sev V non trivial est stabilisé par tous les éléments de G, dans une base de V et d'un supplémentaire ceux-ci s'écrivent $\left(\begin{smallmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{smallmatrix}\right)$. L'image par le morphisme de groupe de G dans $GL(V)$ donné par $g \mapsto g_1$ est un sous groupe résoluble connexe de $GL(V)$, on a donc par récurrence une base de V où tous les g_1 sont triangulaires, de même pour les g_2, ce qui règle la question.

Montrons que, lorsqu'il n'y a pas de tel sev, alors $n = 1$. Raisonnons sur $\inf\{m / D^m(G) = I_n\}$.

Si $m = 1$, G est abélien, et d'après le premier lemme on dispose d'une base dans laquelle les éléments de G sont triangulaires : le premier vecteur est stable par G, donc est l'espace tout entier : $n = 1$.

Pour $m > 1$, notons $H = D^{m-1}(G)$. $H \lhd G$ et est commutatif - et donc triangulaire dans une certaine base. Soit V le sev engendré par les vecteurs qui sont propres pour tous les éléments de H (différent de $\{0\}$ car il contient le premier élément de la base), montrons qu'il est stable par G : si $h \in H$, $g \in G$ et v,

$$h(g(v)) = gg^{-1}hg(v)$$

$g^{-1}hg \in H$ donc $\exists\lambda$ tel que $g^{-1}hg(v) = \lambda v$ et ainsi $h(g(v)) = \lambda g(v)$, autrement dit $g(v) \in V\ \forall g \in G$. Puisqu'aucun sev non trivial n'est stable par G, $V = \mathbb{C}^n$ et H est diagonal dans une base adapté.

Montrons que H est dans le centre de G : soit $h \in H$, $g \in G$, $g^{-1}hg$ est une matrice diagonale ayant les mêmes valeurs propres que h, il n'y a qu'un nombre fini de telles matrices. Or par continuité de $g \mapsto g^{-1}hg$, l'orbite de h par conjugaison est connexe. Un ensemble fini connexe de $GL_n(\mathbb{C})$ ne peut être qu'un seul élément, autrement dit $< h > \lhd G$, et au final $H \subset Z(G)$.

En conséquence, un sous-espace propre d'un élément de H est stable par tout élément de g et donc égal à $\mathbb{C}^n$ tout entier, les éléments de H sont ainsi des homothéties $\lambda_h I_n$. Le déterminant d'un élément étant 1, les λ_h sont des racines $n^{ième}$ de l'unité. H est donc un sous-groupe fini et connexe, donc il est réduit à I_n, ce qui est une contradiction avec la minimalité de m.

Remarques :

Ce développement s'est fait une petite réputation dans la promo rennaise d'agrégatifs 2011 le jour où j'ai passé une quarantaine de minutes (raconte la légende) à le mener jusqu'au bout. Je n'y touchai donc plus pendant la majeur partie de l'année, et ne me suis rendu compte qu'à la fin que, finalement, c'était un développement normal. Après l'avoir un tout petit poil bossé, il tenait en 12 minutes. Notez qu'il y a une “erreur” dans la rédaction du Chambert-Loir, il annonce une récurrence dont l'hypothèse n'est jamais utilisée.

7 Burnside

Thèmes de géomètrie pour l'agrégation, Alessandri

Leçons potentiellement concernées :
- 106 : groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-goupes de GL(E). Applications.
- 107 : représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-ev.
- 128 : endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 149 : représentation de groupes finis de petits cardinal (mouaif...)

Lemme 4. *N nilpotent* $\Leftrightarrow\ tr(N^k) = 0\ \forall k$

- $\Rightarrow$ soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que PNP^{-1} soit triangulaire strictement supérieure, les PN^kP^{-1} le sont également donc de traces nulles (ou bien un nilpotent n'a que zéro comme valeur propre donc sa trace est nulle et les puissances sont encore nilpotentes...)
- $\Leftarrow$ par l'absurde notons $(\lambda_i, n_i)_{i=1\ldots p}$ les valeurs propres non nulles de N et leurs multiplicités. Ces dernières sont solutions du système
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k z_i = 0$$
C'est un système de Vandermonde inversible (prendre $1 \leq k \leq p$) donc $\forall i\ n_i = 0$, impossible !

Théorème (Burnside). *un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini ($\exists e \in \mathbb{N}^*, G^e = \{I\}$) est fini (et réciproquement bien entendu)*

Soient $(C_k)_k$ des éléments de G formant une base de $vect(G)$, on note $\tau(A) = (tr(AC_k))_k$ pour $A \in G$. On va montrer que τ ne prend qu'un ensemble fini de valeurs et est injective, ce qui concluera.

- Puisque $X^e - I$ annule G, les valeurs propres des éléments de G sont des racines $e^{ième}$ de l'unité ; il n'y a donc qu'un nombre fini de traces possibles pour les éléments de G, donc $\tau(G)$ est fini.
- Soient $A, B \in G$ telles que $\tau(A) = \tau(B)$. Par linéarité, $\forall M \in G$ on a $tr(AM) = tr(BM)$, et ainsi
$$tr((AB^{-1})^k) = tr(AB^{-1}(AB^{-1})^{k-1}) = tr(BB^{-1}(AB^{-1})^{k-1}) = tr((AB^{-1})^{k-1}) = \cdots = tr(I) = n$$
Posons $N = AB^{-1} - I$ et remarquons que montrer l'injectivité de τ c'est montrer la nullité de N. Les éléments de G, annulés par $X^e - I$, sont diagonalisable, c'est donc le cas de AB^{-1} et avec elle de N ; ne reste qu'à tirer la nilpotence de N du lemme précédent :
$$tr(N^k) = \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} tr((AB^{-1})^l) = n \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l} = n(1-1)^k = 0$$

Remarques :

On peut formuler le théorème dans le langage des représentations. Un groupe d'exposant fini n'est pas forcément fini (par exemple $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$), même s'il est de type fini (contre-exemple construit en 1975).

8 L'enveloppe convexe du groupe orthogonal

Thèmes de géomètrie pour l'agrégation, Alessandri et Oraux X-ENS, algèbre 1, Francinou, Gianela, Nicolas

Leçons potentiellement concernées :
– 106 : groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupe de GL(E). Applications.
– 132 : formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
– 137 : barycentres dans un espace affine de dimension finie. Convexité. Applications.
– 202 : exemples de parties denses et applications (. . .)

Théorème. *$\mathcal{O}(n)$ est l'ensemble des points extremaux de $\mathcal{B}$ la boule unité euclidienne.*

– $A \in \mathcal{B}$ est extrèmal $\Rightarrow ||A|| = 1$, sinon $A = \frac{1}{||A||}A + (1 - \frac{1}{||A||})A$ (et $0 = I + (-I)$).

– Si $R \in \mathcal{O}(n) = \lambda A + (1-\lambda)B$ avec A et $B \in \mathcal{B}$, alors $\forall X \in \mathbb{R}^n$,

$$||X||^2 = ||RX||^2 = \lambda^2||AX||^2 + (1-\lambda)^2||BX||^2 + 2\lambda(1-\lambda) < AX, BX > \leq ||X||^2$$

Donc l'inégalité est une égalité, aussi $||AX|| = ||X|| = ||BX||$ et AX et BX sont positivement liés (égalité dans Cauchy-Schwarz). On a donc, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $AX = BX$ donc $A = B = R$.

– Soit A extrèmal, considérons une suite A_p d'inversible convergeant vers A ; les A_p admettent une décomposition polaire $S_p\Omega_p$ (où $S_p \in \mathcal{S}^{++}$ et $\Omega_p \in \mathcal{O}(n)$). La compacité de $\mathcal{O}(n)$ fournit une sous-suite Ω_{p_k} convergeante, et conséquemment $S_{p_k} = A^t\Omega_{p_k} \to A^t\Omega = S$ ($S \in \overline{\mathcal{S}^{++}} = \mathcal{S}^+$). Reste à voir que S est l'identité.
Diagonalisable en base orthonormale, $S =^t \Theta diag(d_1, \ldots, d_n)\Theta$ avec $\Theta \in \mathcal{O}(n)$ et les $d_i \geq 0$. A étant dans $\mathcal{B}$, $d_i \leq 1$. Supposons que l'un d'entre eux (par exemple d_1) soit strictement inférieur à 1, du coup

$$A = \frac{1}{2}\left({}^t\Theta \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \Theta\Omega\right) + \frac{1}{2}\left({}^t\Theta \begin{pmatrix} 2d_1 - 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \Theta\Omega\right)$$

Chacune de ces matrices étant dans $\mathcal{B}$ car de valeurs propres de module < 1.

Théorème. *L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ est la boule unité euclidienne.*

On pourrait invoquer qu'un ensemble convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Krein-Milman), mais on va plutôt passer par ce résultat :

Lemme 5. *les formes linéaires de $\mathcal{M}_n$ sont les $X \mapsto Tr(AX) := f_A(X)$ où $A \in \mathcal{M}_n$.*

L'application $A \mapsto f_A$ étant clairement linéaire, pour des raisons de dimensions il suffit d'en montrer l'injectivité. Soit $A \in Kerf$, considérons la base (E_{ij}) de $\mathcal{M}_n$ et rappelons que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. On a, $\forall i_0, j_0$,

$$0 = Tr(AE_{i_0j_0}) = Tr(\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}E_{i_0j_0}) = \sum_i a_{ii_0}Tr(E_{ij_0}) = a_{i_0j_0}$$

Ce qui conclut le lemme. On dit maintenant qu'un point et un convexe sont séparés par une forme linéaire et que $\mathcal{O}(n)$ (et donc son enveloppe) est symètrique par rapport à 0 ; ainsi

$$M \in conv(\mathcal{O}(n)) \Leftrightarrow \phi(M) \leq \sup_{\mathcal{O}(n)} \phi(Q)\ \forall \phi \in \mathcal{M}'_n \Leftrightarrow Tr(AM) \leq \sup_{\mathcal{O}(n)} Tr(AQ)\ \forall A \in M_n$$

Considérons là-encore $A = \Omega S$, soit (e_i) une base orthonormée de vecteurs propres de S,

$$\sup_{\mathcal{O}(n)} Tr(AQ) \geq Tr(A\Omega^{-1}) = Tr(\Omega^{-1}A) = Tr(S) = \sum ||Se_i||$$

D'autre part

$$Tr(AM) = Tr(MA) = \sum_i < MAe_i, e_i >= \sum_i < Ae_i,^t Me_i >\leq \sum_i ||Ae_i||||M||||e_i||$$

L'inégalité étant celle de Cauchy-Schwarz. Enfin $M \in \mathcal{B}$ et (e_i) est orthonormale donc

$$Tr(AM) \leq \sum_i ||Ae_i|| = \sum_i ||Se_i|| \leq \sup_{\mathcal{O}(n)} Tr(AQ)$$

Ce qui achève la bête.

Remarques :

La version des oraux X-ENS est bien pour la leçon 132. Dans la version d'Alessandri, le premier point est en fait inutile.

9 Transvections

Cours d'algèbre, Perrin puis oraux XENS, algèbre 2, Francinou Gianella Nicolas

Leçons potentiellement concernées :
– 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension E, sous-groupe de GL(E). Applications.
– 108 : exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
– 132 : formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

Théorème. *Soit u dont les points fixes sont un hyperplan H (d'équation $f \in E^*$, c-à-d $Kerf = H$), alors sont équivalents :*

1. $\det u = \lambda \neq 1$
2. *u diagonalisable et a une valeur propre $\lambda \neq 1$.*
3. $Im(u - Id) \not\subseteq H$
4. *dans une base adaptée, la matrice de u est $diag(1, \dots, 1, \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.*

De plus la négation de ces propositions est équivalente à :

$4'-$ $\quad$ *$\exists a \in H \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in E$ $u(x) = x + f(x)a$.*

$5'-$ $\quad$ *dans une base adaptée, u n'a que des 1 en diagonale, et un 1 au bas de la surdiagonale.*

Dans le premier cas, on dit que u est une dilatation, dans le second une transvection.

$1 \Leftrightarrow 2$: le déterminant est le produit des valeurs propres, et on a déjà un sous-espace propre de dimension n-1. Soit il y a une autre vp que 1 (et u est diagonalisable), soit non (et non).

$2 \Leftrightarrow 3$: un vecteur propre x pour λ est dans $Im(u - Id)$ (car $u(x) - x = (\lambda - 1)x$) et non dans H. Si u n'a pas d'autre valeur propre que 1 alors $(X - 1)^2$ annule u, ce qui donne la contraposée.

$3 \Leftrightarrow 4$: en prenant $e_1, \dots, e_{n-1}$ une base de H, en ajoutant un vecteur propre pour λ c'est bon. Et réciproquement si on a une telle matrice, on a bien $detu = \lambda$.

$3^c \Rightarrow 4'$: Soit x_0 tel que $f(x_0) = 1$, considérons $a = u(x_0) - x_0 \in Im(u - Id) \subset H$ mais $x_0 \notin H$ donc $a \neq 0$. Enfin, u et $Id + fa$ coincident sur H et x_0.

$4' \Rightarrow 5'$: prenons $e_{n-1} = a$ et complètons avec $e_1, \dots, e_{n-2}$ en une base de H, ne reste qu'à prendre e_n tel que $f(e_n) = 1$. Enfin cette forme de matrice donne directement $\det u = 1$ (et donc $5' \Rightarrow 1^c$).

Théorème. *Les transvections engendrent SL(E), en ajoutant les dilatations on engendre GL(E).*

On vérifie qu'en multipliant à droite (respectivement gauche) par la transvection $T_{ij}(\lambda) := Id + \lambda E_{ij}$ on effectue $C_j \to C_j + \lambda C_i$ (resp. $L_i \to L_i + \lambda L_j$). Reste à voir que la multiplication à droite (gauche) par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ intervertie les lignes colonnes (lignes) i et j (en en multipliant une par -1). Le pivot de Gauss transforme une matrice $A \in GL(E)$ en la matrice $diag(1, \dots, 1, \det A)$, ce qui conclue.

Remarques :

Dans la leçon 108 il faudrait peut-être s'attarder plutôt sur le pivot de Gauss. Mais du coup il faut être au clair sur les différents coefficients qui interviennent à chaque étape.

10 Chevalley-Warning

Cours d'arithmétique, Serre.

Leçons potentiellement concernées :
– 109 : anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
– 110 : nombres premiers. Applications.
– 112 : corps finis. Applications.
– 117 : algèbre de polynômes à n indéterminées. Polynômes symètriques. Applications.

Théorème. *Soient $f_i \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $\sum deg(f_i) < n$, notons $V = \{f_i = 0\ \forall i\}$, alors $card(V) = 0[p]$ (où $q = p^\alpha$).*

Notons $P = \prod_i (1 - f_i^{q-1})$, si $x \in V$ alors $P(x) = 1$ et d'autre part si $x \notin V$ alors pour un certain i $f_i(x) \neq 0$ donc $f_i^{q-1}(x) = 1$ et $P(x) = 0$. On a donc montré que P est la fonction indicatrice de V, du coup, en notant $S(f) = \sum_{x \in \mathbb{F}} f(x)$, on cherche $card(V) = S(P)$.

Or $deg(P) < n(q-1)$, il suffit de montrer que $S(X_1^{u_1} \ldots X_n^{u_n}) = 0$ si $\sum u_i < n(q-1)$. C'est en fait le cas dès qu'un des $u_i < q - 1$ car

$$S(X_1^{u_1} \ldots X_n^{u_n}) = \sum_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}^n} x_1^{u_1} \ldots x_n^{u_n} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{F}} x^{u_i} = \prod_{i=1}^{n} S(X^{u_i})$$

et par le résultat suivant :

Lemme 6. *Soit $u \in \mathbb{N}$, alors $S(X^u) = -1$ si $u \geq 1$ et $q - 1|u$, 0 sinon.*

– si $u = 0$, tous les termes sont des 1, donc $S(X^u) = q = 0$.

– si $u \geq 1$ est divisible par $q - 1$ alors $\forall x \neq 0$ on a $x^u = 1$, donc $S(X^u) = q - 1 = -1$.

– sinon, $\mathbb{F}^*$ étant cyclique, il existe un $y \in \mathbb{F}^*$ tel que $y^u \neq 1$. $S(X^u) = \sum x^u = \sum (yx)^u = y^u S(X)$ donc $S(X^u) = 0$.

Corollaire. *Si $\sum deg(f_i) < n$ et que les f_i n'ont pas de terme constant, alors ils ont un zéro commun non trivial.*

Remarques :

Notons que la définition de S n'est pas très rigoureuse, car elle change d'ensemble de départ au fur et à mesure de la démonstration (il faut voir ça comme une intégrale). Remarquons également que le second cas du lemme n'est pas utile pour le théorème même.

11 Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

Les maths en tête, algèbre, Gourdon

Leçons potentiellement concernées :
– 109 : anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
– 110 : Nombres premiers. Applications (boff...).
– 112 : corps finis. Applications (éventuellement).
– 113 : groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.
– 116 : polynômes irrdéuctibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Théorème. Φ_n *est irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$.

Lemme 7. *Pour P$\in \mathbb{Z}[X]$, notons $c(P)$ le pgcd des coefficient de P. Alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$.*

Soit p premier, notons $\overline{P}$ la classe de P dans l'intègre $\mathbb{F}_p[X]$. Si $p|c(PQ)$ alors $\overline{PQ} = 0$ donc $\overline{P} = 0$ ou $\overline{Q} = 0$, autrement dit $p|c(P)$ ou $c(Q)$. Ainsi, $c(PQ) > 1 \Rightarrow c(P)c(Q) > 1$ et donc, par contraposée, $c(P/c(P))c(Q/c(Q)) = 1$ donc $c(PQ/c(P)c(Q)) = 1$, autrement dit $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Lemme 8. *Si $A \in \mathbb{Z}[X]$ est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il l'est dans $\mathbb{Z}[X]$.*

On généralise le contenu sur $\mathbb{Q}[X]$ par $c(P/n) = c(P)/n$ (où $P \in \mathbb{Z}[X]$). On a toujours $c(PQ) = c(P)c(Q)$ (car $c(nmPQ) = c(nP)c(nQ)$) et lorsque $c(P) \in \mathbb{Z}$, en considérant $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nP \in \mathbb{Z}[X]$, on a $c(nP) = nc(P)$, donc les coefficients de nP sont tous divisibles par n, autrement dit $P \in \mathbb{Z}[X]$.
Soient $B,\ C \in \mathbb{Q}[X]$ non constants tels que $BC = A$. Ainsi $c(A) = c(B)c(C)$ et $A = c(A)\frac{B}{c(B)}\frac{C}{c(C)}$ ce qui est une décomposition dans $\mathbb{Z}[X]$ puisque $c(\frac{B}{c(B)}) = 1$.

Passons à la preuve du théorème : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ (par récurrence sur n, $c(\phi_n) = 1$ puisque le produit des Φ_d, $d|n$ donne $X^n - 1$), une décomposition en irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ fournit donc une décomposition dans $\mathbb{Z}[X]$, notée $\Phi_n = F_1, \dots, F_r$, avec les F_i unitaires (car Φ_n l'est). Considérons u une racine complexe de F_1, c'est une racine de Φ_n donc une racine primitive n^{ième} de l'unité et si p est un premier ne divisant pas n, u^p l'est également donc est racine de F_j pour un certain j. Montrons que $j = 1$

$F_j(u^p) = 0 = F_1(u)$ (non premiers entre eux) et F_1 irréductible $\Rightarrow F_1(X)|F_j(X^p)$ dans$\mathbb{Q}$ donc dans $\mathbb{Z}$

Ainsi $\overline{F_1}|\overline{F_j(X^p)} = (\overline{F_j})^p$ car le Fràbenius est un morphisme d'anneau dans $\mathbb{F}_p$ (ou récurrence sur le degré et binôme de Newton). si $1 \neq j$, en considérant $\overline{P}$ un facteur irréductible de $\overline{F_1}$, on aurait $\overline{P}^2|\overline{\Phi_d}|X^n - \overline{1}$. Or ceci est impossible car $X^n - 1$ n'a pas de racine double dans la clotàre algébrique de $\mathbb{F}_p$, puisque il n'y partage pas de racine avec sa dérivée $\overline{n}X^{n-1}$.

On a donc montré que pour tout p premier ne divisant pas n, u^p est racine de F_1, on va montrer que c'est en fait le cas pour tout k premier avec n. Faisons-le par récurrence sur s où $k = p_1 \dots p_s$: $k \wedge n = 1 \Rightarrow p_1 \dots p_{s-1} \wedge n = 1$ donc $F_1(u^{p_1 \cdots p_{s-1}}) = 0$. Mais alors, en remplaçant u par $u^{p_1 \cdots p_{s-1}}$ et puisque $p_s \wedge n = 1$, $F_1((u^{p_1 \cdots p_{s-1}})^{p_s}) = 0$. Finalement toute racine primitive $n^{ième}$ de l'unité est racine de F_1, qui se retrouve égal à Φ_n, qui s'avère irréductible.

Remarques :

Avec le lemme 2, on n'est pas loin d'avoir montré que les irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$ sont les irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$ primitifs (c'est-à-dire de contenu 1).

12 Polygônes réguliers constructibles

Alèbre corporelle, Chambert-Loir

Leçons potentiellement concernées :
– 110 : nombres premiers. Applications.
– 113 : groupes des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.
– 115 : polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et Applications.
– 139 : applications des nombres complexes à la gémètrie.
– 141 : utilisation des groupes en géomètrie.
– 144 : problème d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

Théorème (Gauss). *Le polygône régulier à n côtés P_n est constructible ssi $n = 2^k p_1, \dots, p_s$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat ($2^k + 1$, et donc nécessairement $2^{2^b} + 1$) distincts.*

Notons $\mathcal{P} = \{n,\ P_n$ constructible$\} = \{n, e^{2i\pi/n}$ constructible$\}$. Si $n \in \mathcal{P}$ alors $2n$ aussi : on trace la bissectrice de l'angle, ou encore la médiatrice à un côté. D'autre part un diviseur ≥ 3 de n est dans $\mathcal{P}$, puisqu'il suffit de relier entre eux un sous-ensemble des points de P_n. Enfin, si $n \wedge m = 1,\ n,\ m\ \in \mathcal{P}$ alors $mn \in \mathcal{P}$ car $um + vn = 1$ ($u,\ v \in \mathbb{Z}$) et ainsi $e^{2i\pi/(nm)} = (e^{2i\pi/n})^u(e^{2i\pi/m})^v$. Finalement, il s'agit de montrer que les nombres premiers dans $\mathcal{P}$ sont exactement les premiers de Fermat, et que leurs puissances n'y sont pas.

Or $e^{2i\pi/p^\alpha}$ est annulé par le polynômes cyclotomique Φ_{p^α} qui est irréductible, c'est donc son polynôme minimal et il est de degré $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$. D'après le théorème de Wantzel, le degré d'un constructible est nécessairement une puissance de 2, donc $\alpha = 1$ et $p = 2^k + 1$.

Rappelons pourquoi k est nécessairement une puissance de 2, en écrivant $k = 2^b a$ (a impair). Alors

$$2^k + 1 = \big(2^{2^b}\big)^a + 1 = 1 - \big(-2^{2^b}\big)^a = (1 + 2^{2^b}) \sum_{i=0}^{k-1} (-2^{2^b})^i$$

On a donc montré que $n \in \mathcal{P}$ est nécessairement de la forme annoncée. Reste à voir que pour un premier de Fermat p, $e^{2i\pi/p}$ est constructible, c'est-à-dire, d'après de théorème de Wantzel, qu'il existe une tour d'extension $L_0 = \mathbb{Q} \subset \cdots \subset L_n = \mathbb{Q}[e^{2i\pi/p}]$ avec $[L_i : L_{i-1}] = 2$.

Or le polynôme minimal de $e^{2i\pi/p}$ est Φ_p, dont les racines sont les puissances de $e^{2i\pi/p}$ et sont en particulier dans $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/p}]$ qui est donc l'extension de décomposition de l'irréductible Φ_p donc galoisienne, de groupe de Galois $G = \big(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\big)^*$. Celui-ci est d'ordre $p - 1 = 2$. En prenant ω un générateur de G, alors les groupes G_i des puissance 2^i-ièmes de ω vérifient $1 = G_p \subset \cdots \subset G_1$ avec $(G_{i+1} : G_i) = 2$ (remarque : une telle suite de groupes distingués existerait dans un p-groupe quelconque). Par correspondance de Galois, les éléments de $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/p}]$ fixés par G_i sont des extensions L_i successives de $\mathbb{Q}$ avec $[L_i : L_{i-1}] = (G_i : G_{i-1}) = 2$, ce qui achève la démonstration.

Remarques :

13 Élément primitif*

Théorie de Galois, Jean-Pierre Escofier

Leçons potentiellement concernées :
- 116 : polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 120 : dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Ici on considère des sous corps de $\mathbb{C}$ mais ce résultat se généralise pour des corps de caractéristique nulle, et encore plus généralement aux extensions séparables.

Lemme 9. *Soient $\sigma : L \to \mathbb{C}$ un plongement (morphisme d'anneau ; partant d'un corps, c'est injectif) et a algebrique sur L de degré n. Il y a exactement n plongements de $L[a]$ dans $\mathbb{C}$ prolongeant σ.*

Un tel plongement τ est entièrement determiné par b l'image de a (puisque les puissances de a engendrent $L[a]$ comme L-ev).

$$\tau(P(a)) = \tau(\sum_{i=0}^{n} x_i a^i) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(x_i) b^i = P^\sigma(b)$$

Ainsi μ_a^σ annule b. Or ce polynôme est irréductible sur $\sigma(L)$, car $\sigma : L[X] \to \sigma(L)[X]$ est un isomorphisme, et ainsi

$$\mu_a^\sigma = ST \Rightarrow \mu_a = S^{\sigma^{-1}} T^{\sigma^{-1}} \Rightarrow S^{\sigma^{-1}} \text{ ou } T^{\sigma^{-1}} \text{ inversible} \Rightarrow S \text{ ou } T \text{ inversible}$$

Donc μ_a^σ est le polynôme annulateur de b ; il est donc séparable (s'il avait une racine double, il en serait le polynôme annulateur - par irréductibilité- mais elle serait annulée par le polynôme dérivé ce qui remettrait en cause cette minimalité).

Il y a donc exactement n racines (en fait, pour celà, pas besoin d'être un sous-corps de $\mathbb{C}$: il suffit que l'extension soit séparable), et donc autant de morphismes prolongeant σ.

Lemme 10. *Si M est une extension de L de degré n et σ un plongement de L dans $\mathbb{C}$, il y a exactement n plongements de M dans $\mathbb{C}$ prolongeant σ*

On le montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $M = L$, c'est bon. Si $n > 1$, prenons $a \in M \setminus L$, il est algébrique sur L de degré $r > 1$. D'après le lemme 1 il y a r prolongements τ de $L[a]$ dans $\mathbb{C}$ prolongeant σ. Si $r = n$ le problème est réglé et sinon, notant $s = [M : L[a]] < n$, par récurrence pour chacun de ces τ il y a s plongements de M dans $\mathbb{C}$ qui prolongent τ. Les plongements de M dans $\mathbb{C}$ prolongeant σ sont donc au nombre de $sr = [M : L[a]][L[a] : L] = [M : L] = n$, ce qui conclut.

Lemme 11. *Si k est un corps infini, V un k-ev et $H_1, \ldots, H_r$ un nombre fini de sous-espaces stricts, alors $V \neq \bigcup H_i$.*

Montrons-le par récurrence sur r. C'est clair pour $r = 1$. Si $r > 1$, par hypothèse de récurence $\exists x \notin \bigcup_{i \leq r-1} H_i$; soit $y \notin H_r$, alors la droite $x + (y - x)k$ est infini, en particulier, si on avait $V = \bigcup H_i$, un H_j en contiendrait deux éléments donc la contiendrait entièrement. C'est impossible vu le choix de x et y.

Théorème. *Soit K un sous corps de $\mathbb{C}$, L une extension de K de degré n, alors il existe $a \in L$ tel que $L = K[a]$ (autrement dit toute extension finie de K est monogène).*

En notant $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les K-homomorphismes de L dans $\mathbb{C}$, par le lemme 3 on a $L \neq \bigcup_{i \neq j} ker(\sigma_i - \sigma_j)$, autrement dit on peut trouver $a \in L$ ayant des images distinctes par les σ_i, qui sont toutes des racines de son polynôme minimal. Celui-ci est donc de degré au moins n, ainsi $L = K[a]$.

Remarques :

Un développement que j'ai laissé tomber au final

14 Carathéodory

Oraux X-ENS, algèbre 3, Francinou, Gianella, Nicolas

Leçons potentiellement concernées :
- 118 : exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.
- 137 : barycentres dans un espace affine euclidien de dimension finie. Convexité. Applications.

Théorème. *$X \subset \mathbb{R}^n$, alors tout point de $\mathcal{C}(X)$ est barycentre de $n + 1$ points. On en déduit que l'enveloppe convexe d'un compact est compact.*

Soit $x = \sum_1^p \lambda_i x_i$, supposons $p > n + 1$ et montrons qu'on peut se débarasser d'un x_i. Par cardinalité, $(x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$ est liée donc $\sum \alpha_i (x_i - x_1) = 0$, notons $\alpha_1 = -\sum \alpha_i$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x = \sum_1^p (\lambda_i + t\alpha_i) x_i$$

En prenant $\tau = \min\{-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\}$ et $\mu_i = \lambda_i + \tau\alpha_i$ on a une combinaison convexe, et on s'est débarassé d'un x_i au moins.

La compacité de $\mathcal{C}(X)$ découle de la compacité du simplexe de $\mathbb{R}^{n+1}$ et de la continuité de

$$\begin{array}{rcl} S^{n+1} \times X^{n+1} & \to & \mathbb{R}^n \\ (\lambda_i) \times (x_i) & \mapsto & \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \end{array}$$

Remarques :

C'est très court. . .parler lentement ne suffit qu'à peine, même en détaillant.

15 Commutant d'un endomorphisme

Oraux X-ENS, algèbre 2, Francinou, Gianella, Nicolas et Les maths en tête, algèbre, Gourdon.

Leçons potentiellement concernées :
- 118 : exemple d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.
- 124 : polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 125 : sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 126 : endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Théorème. *Si les E_λ sont les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable f, la dimension du commutant de f ($\mathcal{C}(f)$) est $\sum_\lambda dim E_\lambda^2$.*

Les sous-espaces propres E_λ sont stables par $g \in \mathcal{C}(f)$ et $g \mapsto (g_{|E_\lambda})_\lambda$ est bijective, donc $dim\mathcal{C}(f) = \sum_\lambda dim E_\lambda^2$. Notons que cette dimension est $\geq n$.

Théorème. *Si f est diagonalisable, son commutant est réduit à $K[f]$ ss'il est dimension n et ssi f est cyclique (autrement dit de polynôme minimal μ_f de degré n).*

$K[f] \simeq \frac{K[X]}{\mu_f}$ est de dimension $deg\mu_f \leq n$ et est inclus dans $\mathcal{C}(f)$.

$$\begin{aligned} dim\mathcal{C}(f) = n &\Rightarrow \forall \lambda dim E_\lambda = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{que des valeurs propres distinctes} \\ &\Leftrightarrow deg\mu_f = n \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}(f) = K[f] \end{aligned}$$

Théorème. *En fait si le commutant est réduit au polynôme, alors f est diagonalisable.*

On va montrer que le commutant est toujours de dimension $\geq n$ (l'égalité imposera que μ_f soit scindé à racines simples toutes distinctes).

Si f est triangulable, A sa matrice triangulaire dans une bonne base, regardons les solutions de $AX - XA = 0$: il y a $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues, autant d'équations mais on peut en enlever n (celles de la diagonale, qui sont des $xa - ax = 0$, triviales), le commutant est donc de dimension au moins n.

Si f n'est pas triangulable sur K, il l'est dans L une extension de décomposition pour μ_f. Si les x_i sont une K-base de L et si $X \in \mathcal{M}_n(L)$ commute avec A, en écrivant $X = \sum x_i Y_i$, les $Y_i \in \mathcal{M}_n(K)$ commutent avec A, le commutant de A dans L est engendré par de tels Y_i qui forment donc un L-ev de dimension $\geq n$ et donc de dimension $\geq n$ sur K.

En particulier :

$$\mathcal{C}(f) = K[f] \Leftrightarrow \mu_A = \chi_A$$

Remarques :

16 Extrema liés

Les maths en tête, analyse, Gourdon

Leçons potentiellement concernées :
- 118 : exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel (éventuellement).
- 120 : dimension d'un espace vectoriel (dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 214 : théorème d'inversion locale, des fonctions implicites. Exemples et applications.
- 217 : sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.
- 219 : problèmes d'extremums.

Théorème. *Si $f, g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, soit $\Gamma = \bigcap\{x \in U, g_i(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en a tel que les formes $dg_1(a), \ldots, dg_r(a)$ soient libres, alors $\exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}^r$ tels que $df(a) = \sum \lambda_i dg_i(a)$*

Remarquons d'abord $r > n = dim(\mathbb{R}^n)'$ impossible, et $r = n$ évident (on a alors une base), supposons $s = n - r \geq 1$ et décomposant $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$, écrivons $a = (\alpha, \beta)$ et $x = (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)$.

La matrice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$ est de rang r on peut donc en extraire une sous-matrice inversible de taille $r \times r$ qui peut être, quitte à renuméroter les variables, $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leq i,j \leq r}$.

Le théorème des fonctions implicites donne un voisinage ouvert U' de α dans $\mathbb{R}^s$, Ω voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U' \to \mathbb{R}^r, \mathcal{C}^1$ tels que

$$g(x,y) = 0,\ x \in U',\ (x,y) \in \Omega \Leftrightarrow (y = \phi(x)).$$

Posons $h(x) = f(x, \phi(x))$, h admet en α un extremum local, ainsi $\forall i \in [|1, s|]$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)$$

D'autre part en dérivant $g_k(x, \phi(x)) = 0$ on obtient $\forall k \in [|1, r|], \forall i \in [|1, s|]$

$$0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a)$$

Autrement dit les s premières colonnes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}.$$

S'expriment en fonction des r derniers, donc $rg(M) \leq r$ et $rg({}^tM) \leq r$ donc les $r+1$ lignes de M sont liées, on dispose de $\mu_0, \dots, \mu_r$ non tous nuls tels que

$$\mu_0 df(a) + \sum \mu_i dg_i(a) = 0$$

Et $\mu_0 \neq 0$ car les dg_i sont libres, ce qui donne le théorème.

Remarques :

C'est peut-être un peu court ! Faut-il prendre son temps ? Ajouter une application ? Pour se rappeler qui inverse quoi comment, on peut se rappeler que plus il y a de contraintes g_i, moins il y a de paramètres.

17 Quelques déterminants classiques

Pas de référence précise ; on trouve ça sur internet...

Leçons potentiellement concernées :
- 119 : exemples d'actions de groupes sur des espaces de matrices.
- 123 : déterminants. Exemples et applications.

Vandermonde

$$\det(a_i^j)_{i,j} = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$$

On fait par récurrence sur la taille du Vandermonde. Considérant le déterminant comme un polynôme de degré n-1, on voit qu'il s'annule sur les autres a_i, ainsi il est divisé par $p(a_n) = (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})$. D'autre part le coefficient est le Vandermonde de taille n-1 (puisque, pour obtenir le terme de plus haut degré, il faut prendre le coeff n,n), ce qui conclue.

On aurait aussi pu, écrivant $p(u) = \sum \alpha_i u^i$, constater que $C_n \leftarrow \sum_{i \leq n_1} \alpha_i C_i$ transforme C_n en la colonne $(0, \dots, 0, p(a_n))$ et conclure.

Cauchy

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}$ tels que $\forall i \ a_i + b_i \neq 0$, alors

$$\det(\frac{1}{a_i + b_j}) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n}(a_i + b_j)}$$

Première méthode : On multiplie la colonne i par $(a_n + b_i)$ (faisant sortir l'inverse de $(a_n + b_1) \dots (a_n + b_n)$ du déterminant), la dernière ligne est remplie de 1. Écrivant

$$\frac{a_n+b_j}{a_i+b_j} = \frac{a_n-a_i}{a_i+b_j} + 1$$

Et en retranchant la dernière ligne aux autres, on constate que le facteur $(a_n - a_i)$ apparaît sur toute la ligne i ; on le sort donc du déterminant. Reste une matrice de coefficients $1/(a_i + b_j)$ sauf la dernière ligne, remplie de 1. En retranchant la dernière colonne aux autres et en développant par rapport à la dernière ligne, on est ramené à une matrice de taille n-1 et de coefficients

$$\frac{1}{a_i+b_j} - \frac{1}{a_i+b_n} = \frac{b_n-b_i}{(a_i+b_j)(a_i+b_n)}$$

Comme $(b_n - b_j)$ est en facteur dans la colonne j et $(a_i + b_n)$ dans la ligne i, on a finalement

$$D_n = \frac{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})(b_n-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})}{(a_n+b_1)\dots(a_n+b_n)(a_1+b_n)\dots(a_{n-1}+b_n)} D_{n-1}$$

On conclue par récurrence.

Seconde méthode : voir ce déterminant comme une fraction rationnelle F de a_n. Supposons les a_i (et les b_j) distincts deux à deux (sinon, le déterminant est nul). En développant par rapport à la dernière ligne on voit que deg(F)≤ -1, et plus précisément $F(X) = P(X)/(X + b_1)\dots(X + b_n)$ avec P polynôme de degré $< n$. Les a_i ne sont pas des pôles de F, et les n-1 premiers annulent P (car on a alors des lignes identiques), donc $P = \lambda \prod_{i<n}(X - a_i)$. Pour trouver λ, multiplions la dernière ligne de la matrice par $(X + b_n)$ (le determinant F l'est donc également). En évaluant en $-b_n$ la dernière ligne est nulle (sauf le dernier coeff), en développant on obtient

$$\lambda = D_{n-1}\frac{(b_n-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})}{(b_n+a_1)\dots(b_n+a_{n-1}}$$

Et l'on conclue encore par récurrence.

Déterminant circulant

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} = a_0A^0 + \dots + a_{n-1}A^{n-1} = P(A)$$

où A est la matrice de l'endomorphisme $e_i \mapsto e_{i-1[n]}$. $Q = X^n - 1$, scindé à racine simple, annule A qui est donc diagonalisable. Plus précisément, $A^0e_1, \dots, A^{n-1}e_1$ est libre donc A n'est pas annulée par un polynôme de degré $< n$, donc Q est son polynôme minimal et A est semblable la matrice diagonale D dont les coeffs sont les racines $n^{ième}$ de l'unité, M est donc semblable à P(D), et finalement

$$\det M = \prod_{k=1}^{n} P(e^{2ik\pi/n})$$

Remarques :

En fait, pour des développements, le mieux est de faire les méthodes avec les manipulations sur les lignes et colonnes.

18 Ellipsoide de John-Loewner

Oraux X-ENS, algèbre 3, Francinou, Gianella, Nicolas.

Leçons potentiellement concernées :
- 123 : déterminants. Exemples et applications.
- 131 : formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 148 : formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
- 203 : utilisation de la notion de compacité.
- 219 : problèmes d'extremums.
- 229 : fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

– 253 : utilisation de la notion de convexité en analyse.

Théorème. *Un compact K d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ est inclus dans un unique ellipsoide centré en 0 de volume minimal.*

Un ellipsoide est un $\{q(x) \leq 1\}$ où q définie positive ($\in$ II^{++}) $= \sum a_i x_i^2$ dans une base orthonormée (notons que $det(p) = det(O^t diag(a_i) O) = a_1 \dots a_n$)

$$Vol(q) = \iint \dots \int_{\sum a_i x_i^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} Vol(B_n)$$

On va maximiser le déterminant sur le compact convexe non vide $A = \{q \in \mathcal{Q}^+ | \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$ dans $\mathcal{Q}^+$ muni de $||q|| = \sup_{B_n} |q(x)|$.

Existence

Si $q_n \in A \to q$,

$$||q_n(x) - q(x)|| \leq ||q_n - q|| \, ||x||^2 \to 0 \text{ donc } q(x) \leq 1$$

Donc A fermé. Soit $B(a,r)$ une boule incluse dans K, si $||x|| \leq r$ alors $x + a \in K$, par Minkowski on obtient

$$\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$

Donc, si $||x|| \leq 1$, $q(x) \leq \frac{4}{r^2}$: A est borné, donc compact. Ainsi le continu $\det$ atteint sur A son max en un certainq_0.

K étant borné $\subset B(0,M)$, $\frac{||x||^2}{M} \in A \cap \mathcal{Q}^{++}$, de déterminant > 0. Donc $\det q_0 > 0$ce max est > 0 et ainsi $q_0 \in \mathcal{Q}^{++}$.

Unicité

Si $q, q' \in A$,

$$[\lambda q + (1-\lambda) q'](x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geq 0 \ \forall x \text{ et } \leq 1 \ \forall x \in K$$

Donc A convexe. L'unicité s'obtient en regardant $\frac{q_0 + q_1}{2}$ et grâce au lemme suivant :

Lemme 12. *Si $A \neq B \in \mathcal{Q}^{++}$, $det(\lambda A + (1-\lambda) B > det(A)^\lambda det(B)^{1-\lambda}$*

Démonstration : On diagonalise simulanèment $A = PP^t$ et $B = P diag(\beta_i) P^t$, on es ramené à montrer $det(\lambda I + (1-\lambda) diag(\beta_i)) > det(diag(\beta_i))^{1-\lambda}$ or, en sommant des inégalités de stricte concavité de ln,

$$\sum_i ln(\lambda + (1-\lambda)\beta_i) > (1-\lambda) \sum_i ln \beta_i$$

Remarques :

On se convainc que le volume minimal dépend de façon continue de translations de K. Ainsi, par compacité, on peut modifier le centre de l'ellipsoide et trouver un ellipsoide contenant K de volume minimum parmis tous les ellipsoides contenant K, et pas seulement ceux centrés en 0.

19 Décomposition de Dunford

Oraux X-ENS algèbre tome 2, Francinou, Gianella, Nicolas.

Leçons potentiellement concernées :
– 124 : polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
– 126 : endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
– 127 : exponentielle de matrices. Applications.

Théorème. *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est somme unique d'une diagonalisable et d'une nilpotente commutants, qui sont des polynômes en A.*

D est simplement l'endomorphisme dont les restrictions à chaque C_λ sous-espace caractéristique est λI. Les C_λ sont stables par $N = A - D$ et par définition sur C_λ on a $(A - \lambda I)^m = 0$, et la restriction de N à C_λ commute avec celle de D (qui est une homothétie).

$$D = \sum_{\sigma(A)} \lambda \pi_\lambda$$

Où π_λ est le projecteur sur C_λ parrallèlement aux autres C_μ. Or c'est un polynôme en A (Bezout sur χ donne $UP_\lambda(A) + VQ(A) = I$, $\pi_\lambda = UP_\lambda$)

L'unicité s'en suit : Si D' et N' conviennent alors D' commute avec A donc avec les polynômes de A, par exemple D, ainsi D et D' sont simultanèment diagonalisables, donc $D - D'$ est diagonalisable. De même N et N' commutent donc $N - N'$ est nilpotente, la seule matrice diagonalisable nilpotente est la matrice nulle.

Applications

A diagonalisable $\Rightarrow e^A$ diagonalisable, et, D et N commutant, $e^A = e^D e^N = e^D(I + NP(N))$ est diagonalisable si $e^N = I$ donc $N = 0$ (en trigonalisant $P(N)$, on n'a que des 1 sur la diagonale, c'est inversible).

Ainsi les solutions de $e^X = I$ sont les matrices diagonalisables dont les valeurs propres sont des $ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Remarques :

On n'a pas besoin d'être dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit d'être trigonalisable (autrement dit de polynôme caractéristique scindé). Il paraît Dunford ne sert pas à grand-chose, parce que Jordan est plus précis, ou parce qu'il suffit souvent de décomposer A sur ses sous-espaces caractéristique, par exemple pour montrer que $e^{tA} \to 0$ si $\sigma(A) \subset \{Re(z) < 0\}$…Mais justement c'est un très bon exemple où Jordan est moins pratique que Dunford (il faut faire un changement de base…) et où décomposer A est moins élégant (après tout, c'est le travail qu'on fait en amont dans Dunford ; quel intérêt à-t-on à revenir à des choses plus élémentaires ? Alors qu'on est en train de faire des équations différentielles ?). Notons qu'en plus il existe une manière algorithmique de trouver la décomposition de Dunford (ceci dit je ne sais pas si c'est tellement utilisé). Enfin, une question usuelle est de donner la décomposition de Dunford d'une matrice…qui en fait est diagonalisable.

20 Diagonalisation des endomorphismes symètriques, normaux

Les Matrices, Serre

Leçons potentiellement concernées :
- 119 : exemples d'actions de groupes sur des espaces de matrices.
- 126 : endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 130 : matrices symètriques réelles, matrices hermitienne.
- 131 : formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 133 : endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel de dimension finie.
- 148 : formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Théorème. *Les endomorphismes normaux dans $\mathbb{C}$ et les symètriques dans $\mathbb{R}$ sont diagonalisables en base orthonormés, les endomorphismes normaux dans $\mathbb{R}$ ont en général des blocs* $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Lemme 13. *Si $u \in S_n$ ou H_n alors $\sigma(u) \subset \mathbb{R}$. En particulier les symètriques sont trigonalisables.*

Si $MX = \lambda X$ $(X \neq 0)$ alors $X^* M = \bar{\lambda} X$ ainsi $\lambda X^* X = X^*(MX) = (X^* M)X = \bar{\lambda} X^* X$, or $X^* X = \sum |x_i|^2 > 0$ donc $\lambda = \bar{\lambda}$.

Lemme 14. *Deux endomorphismes trigonalisables commutant ont un vecteur propre commun.*

Soit λ une valeur propre de u, le sous-espace propre F correspondant est stable par v :

$$u(v(x)) \;=\; v(u(x)) \;=\; v(\lambda x) \;=\; \lambda v(x)$$

$v_{|F}$ est toujours triangulable (son polynôme caractéristique divise celui de v, scindé) donc possède un vecteur propre, qui est également propre pour u.

Démontrons le théorème : considérons d'abord le cas où u est trigonalisable (notamment donc dans $\mathbb{C}$ ou pour les symètriques) ; u^* l'est également, d'après le lemme précédent ils ont un vecteur propre commun x. Notons $H = x^\perp = \{< x, y >= 0\}$, il est stable par u^* (car x propre pour u) et donc, symètriquement, par u. Enfin $(u_{|H})^* = (u^*)_{|H}$ donc $u_{|H}$ est normal. On conclue par récurrence sur la dimension de l'espace, puisque pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer.

Maintenant, que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$ lorsqu'un endomorphisme normal n'a pas que de valeurs propres réelles ? Il a bien un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ commun à $u^* = u^t$. Si les parties réelle et imaginaire de x étaient colinéaires on aurait $x = (1+i\mu)y$ avec y réel, ainsi $u(1+i\mu)y = \lambda(1+i\mu)y$, donc $u(y) = \lambda y$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Du coup $Re(x)$ et $Im(x)$ engendrent un plan P qui est stable par u et u^* (car $\bar{x}$ est également vecteur propre commun), donc $P^\perp$ de même. Par récurrence on décompose l'espace en plans stables. La forme des blocs vient de la condition pour u et u^* de commuter : si on note $(a, b; c, d)$ la matrice de $u_{|P}$, on a nécessairement $b^2 = c^2$, l'égalité est impossible (sinon aurait un vecteur propre) et $(a - d)(b - c) = 0$ donc $a = d$, ce qui conclut.

Quelles conséquences cela a-t-il sur les formes quadratiques ? En notant M la matrice (symètrique ou hermitienne) de la forme Q, on a une $\Theta \in O(n)$ telle que $\Theta^{-1}M\Theta = \Theta^* M\Theta$ est diagonale, donc dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel), $Q(x) = \sum a_i x^i$. Selon qu'on soit dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, en remplaçant les vecteurs e_j de la base par $\sqrt{a_j}e_j$ ou $\sqrt{|a_j|}e_j$, on trouve que la classe d'équivalence (rappel : $Q(x) = q(u(x))$ où$u \in GL(E)$) ss'ils ont même rang dans $\mathbb{C}$, même signature $\mathbb{R}$ (caractérisée par le nombre de valeurs propres strictement positives/négatives).

Remarques :

On choisit selon la leçon ce que l'on veut démontrer. On peut préciser la forme des blocs si la matrice est orthogonale.

21 Stabilité de Lyapunov

Petit guide de calcul différentiel, Rouvière

Leçons potentiellement concernées :
– 127 : exponentielle de matrices. Applications.
– 220 : équation différentielle $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.
– 221 : équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Théorème. *Considérons la solution de l'équation $y'(t) = f(y), y(0) = x$, où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$, $f(0) = 0$ et $Df(0) := A$ n'a que des valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif.*

Soit z la solution du linéarisé $y' = Ay, y(0) = x$, alors $z(t) = e^{tA}x$ de norme $\leq P(|t|)\big(\sum e^{\lambda_i t}\big)||x|| \leq Ce^{-\lambda t}||x|| \to 0$ où $0 > \lambda > min(Re(\lambda_i))$ et P un polynôme (on décompose x sur les sous-espaces caractéristiques, $e^{tA}x_j = e^{t\lambda_j}e^{t(A-\lambda_j I)}x_j$).

$$b(x, y) := \int_0^\infty (e^{tA}x.e^{tA}y)dt,$$

bien définie par Cauchy-Schwarz et la décroissance exponentielle, est une forme bilinéaire symètrique, définie positive. Notons q la forme quadratique associée et $||x||_q = \sqrt{q(x)}$. On a $q'(x).y = 2b(x, y)$, d'où

$$gradq(x).Ax = \int_0^\infty 2(e^{tA}x).(e^{tA}Ax)dt = \int_0^\infty \partial_t(e^{tA}x)^2 dt = lim\big[||e^{tA}x||^2\big]_0^T = -||x||^2$$

autrement dit, Ax est dirigé vers l'intérieur de l'ellipsoide défini par q (la courbe de niveau $\{q = q(x)\}$). Notons $r(y) = f(y) - Ay$ (où y est la solution de l'équation), on a

$$q(y)' = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)).$$

Par Cauchy-Schwarz on a $|b(y, r(y))| \leq ||y||_q.||r(y)||_q$. Or r est C^1 et $Dr(0) = 0$ donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $q(y) < \alpha \Rightarrow ||Dr(y)||_q < \varepsilon$ (continuité en 0 pour la norme $||.||_q$). Les accroissements finis donnent alors $||r(y)||_q = ||r(y) - r(0)||_q \leq \varepsilon ||y||_q$.

D'autre part par équivalence des normes on dispose de C tel que $Cq(y) \leq ||y||^2$. Au final, pour $q(y) \leq \alpha$,

$$q(y)' = -||y||^2 + 2b(y, r(y)) \leq -(C - 2\varepsilon)q(y)$$

et $\beta := C - 2\varepsilon > 0$ pour ε assez petit. Si $q(x) < \alpha$, soit t_1 le premier temps où $q(y(t)) \geq \alpha$, on aurait $q(y(t))'_{|t_1} < 0$ contredisant la minimalité de t_1, donc $\forall t \leq 0,\ q(y(t)) \leq \alpha$

$$\left(e^{\beta t} q(y)\right)' = e^{\beta t}(q(y)' + \beta q(y)) \leq 0$$

Ainsi $\forall t \leq 0,\ q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$ (au passage ceci donne l'existence pour tout temps de y), d'où la convergence exponentielle de y vers 0.

Remarques :

Un petit dessin de l'ellipsoide avec $gradq(x)$ et Ax est de bon ton. Il est en fait plus élégant pour démontrer que $z(t)$ converge vers 0 d'utiliser la décomposition de Dunford.

22 Morse

Petit guide de calcul différentiel, Rouvière

Leçons potentiellement concernées :
- 130 : Matrices symètriques réelles, matrices hermitiennes.
- 148 : formes quadratiques réelles. Exemples et applications (éventuellement. . .).
- 214 : théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
- 215 : applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- 217 : sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.
- 218 : applications des formules de Taylor.

Théorème. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^3$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Si 0 est une point critique non dégénéré (c'est-à-dire $Df(0) = 0$ et l'hessienne $D^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$), alors il existe un difféomorphisme ϕ entre deux voisinages de l'origine, $\mathcal{C}^1$ tel que $\phi(0) = 0$ et*

$$f(x) - f(0) = \phi_1^2(x) + \cdots + \phi_p^2(x) - \phi_{p+1}^2(x) - \cdots - \phi_n^2(x)$$

Taylor avec reste intégrable donne $f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)^t x D^2 f(tx) x dt := {}^t x Q(x) x$. f étant $\mathcal{C}^3$, Q est $\mathcal{C}^1$; $Q(x)$ est symétrique inversible, le lemme ci-dessous donne $x \mapsto M(x)$, $\mathcal{C}^1$ telle que dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$,

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(X)$$

Or $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$ donc, par un changement de coordonnée $M(x)x = P\phi(x)$, on obtient

$${}^t(M(x)x) Q(0) M(x) x = \phi_1^2(x) + \cdots + \phi_p^2(x) - \phi_{p+1}^2(x) - \cdots - \phi_n^2(x)$$

Enfin, la différentielle à l'origine de $\phi(x) = P^{-1} M(x) x$ est $P^{-1} M(0)$ (écrire tout simplement un développement en 0) inversible donc par le théorème d'inversion locale, ϕ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 15. *Soit A matrice symétrique inversible, alors pour un voisinage V de A dans S on a une application M, $\mathcal{C}^1$ de V dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall B \in V,\ B = {}^t M(B) A_0 M(B)$*

Posons $\psi(M) = {}^t M A_0 M$ ($\mathcal{C}^1$ car polynomiale), on a $\psi(I + H) - \psi(I) = {}^t(A_0 H) + A_0 H + O(||H||^2)$ donc $D\psi(I)H = {}^t(A_0 H) + A_0 H$, surjective ($D\psi(I)H = A$ a pour solution $\frac{1}{2} A_0^{-1} A$) donc en restreignant ψ à un supplémentaire du noyau de $D\psi(I)$, la nouvelle différentielle est inversible, l'inversion locale donne le résultat.

Remarques :

L'hypothèse C^3 n'est pas nécessaire (elle l'est pour cette démonstration). Une application possible est la position d'une sous-variété par rapport à son hyperespace tangent (est-on dessus, dessous ?), sachant qu'on peut ne le faire qu'avec la formule de Taylor. Le lemme de Morse est l'un des premiers résultats de la théorie du même nom qui permet de tirer des informations sur la topologie d'une variété à partir d'une fonction extérieure (la hauteur, ou la distance à un point par exemple), en particulier d'en trouver la caractéristique d'Euler (voir par exemple Berger-Gostiaux géomètrie différentielle, variétés, courbes et surfaces ou, pour aller plus loin, Milnor théorie de Morse)

23 Classification des quadriques

Géomètrie, Audin

Leçons potentiellement concernées :
- 101 : groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 131 : formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 136 : coniques. Applications.
- 148 : formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

On notera $E = \mathbb{R}^2$. Par définition, une quadrique C est le lieu des points M annulant $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$, où q et L sont des formes respectivement quadratiques et linéaires. Peut-on, en changeant de base, se débarasser de la partie linéaire ? Si $f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + c'$, alors $f(\Omega - \overrightarrow{\Omega M}) = f(M)$, autrement dit Ω est un centre de symétrie de C (et réciproquement, si on est centre de symétrie, la partie linéaire est nuelle). Si Ω est unique, on dit que C est une quadrique à centre. Montrons que ceci est équivalent à la non dégénérescence de q :

$$\begin{aligned} f(M) &= q(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) + L(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) + c \\ &= q(\overrightarrow{\Omega M}) + L(\overrightarrow{O\Omega}) + c + q(\overrightarrow{O\Omega}) + L(\overrightarrow{\Omega M}) + 2\phi(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{\Omega M}) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $u = \overrightarrow{O\Omega}$, Ω est un centre si et seulement si $\phi(u, x) = -\frac{1}{2}L(x)$ pour tout vecteur x du plan. Notons $\bar{\phi} \ : \ E \to E^*$ qui à u associe $\phi(u, .)$.

$$\exists! \text{ centre } \Omega \Leftrightarrow \bar{\phi} \text{ injective} \Leftrightarrow \text{q non dégénérée}$$

Montrons maintenant que les seuls quadriques propres à centre sont les hyperboles et les ellipses. D'après le théorème de diagonalisation simultanée on dispose d'une base orthonormale, et orthogonale pour q. Dans un repère d'origine le centre et avec un telle base, l'équation de C s'écrit $ax^2 + by^2 + c = 0$, avec a et b non nuls. La forme quadratique homogène associée est $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, elle est dégénérée si et seulement si c est nul. Dans le cas contraire on peut diviser par c et, selon le signe des coefficients, on a soit l'ensemble vide, soit une ellipse, soit une hyperbole. Si $c = 0$, on a deux équations possibles selon le signe des coefficients :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ ou } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

La première donne le point Ω (ellipse dégénérée), la seconde deux droites sécantes (hyperbole dégénérée ; asymptote de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$).

Maintenant, si la quadrique n'est pas à centre, q est de rang 1, donc dans une base orthonormale l'équation de la quadrique est

$$aY^2 + \lambda X + \mu Y + \gamma = 0 = a(Y + \frac{\mu}{2a})^2 + \lambda X + c - \frac{\mu^2}{4a} = ay^2 + \lambda x + c$$

Le repère est toujours orthonormé, on a juste fait un changement d'origine. La forme homogénéisée est $ay^2 + \lambda xz + cz^2$, qui est dégénérée si et seulement si λ est nul (ceci se lit sur sa matrice). Dans le cas contraire, on peut intégrer la partie constante dans la partie linéaire et on a l'équation d'une parabole. Si $\lambda = 0$, l'équation est donc $y^2 = -c/a$, selon le signe du coefficient on obtient deux droites parallèles, une droite double (c=0) ou l'ensemble vide.

Remarques :

Dans la leçon 101, on préciser que les isométries agissent fidèlement sur les bases orthonormées et qu'ainsi l'orbite d'une quadrique est caractérisée par son équation dans une base orthonormée.

24 Ellipse de Steiner

internet (dynamaths)

Leçons potentiellement concernées :
- 136 : coniques. Applications.
- 139 : applications des nombres complexes à la géométrie.
- 144 : problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

Théorème. *Soit ABC un triangle et a, b, c les affixes de ses sommets. On appelle ellipse de Steiner l'ellipse tangente à chacun des côtés en leur milieu (c'est également l'ellipse inscrite d'aire maximale). Alors les foyers de l'ellipse ont pour affixe les racines de la dérivée du polynôme $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$.*

Ce résultat est facile dans le cas du triangle équilatéral $(1, j, j^2)$: en effet l'ellipse de Steiner est alors le cercle inscrit centré en 0 avec qui les foyers sont confondus. D'autre part $P(X) = X^3 - 1$ de dérivé $3X^2$ dont 0 est racine double. On va pour l'instant supposer que l'origine est le centre O du triangle.

Lemme 16. *Il existe un unique couple $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ tels que ABC soit l'image de $(1, j, j^2)$ par la transformation $\varphi : z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$.*

En effet α et β conviennent ssi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a \\ \alpha j + \beta j^2 &= b \\ \alpha j^2 + \beta j &= c \end{aligned}$$

Puisque le repère est centré en le centre du triangle, $a + b + c = 0$, et d'autre part $1 + j + j^2 = 0$, ainsi la somme des trois équations est nulles, elles sont donc liées. D'autre part $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc le système d'équation également, d'où le résultat. Notons que si α ou β est nul, le triangle est équilatéral.

Montrons que les racines de P' sont les racines carrées de $\alpha\beta$: $P(X) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$, et

$$(ab + bc + ca) \ = \ (\alpha+\beta)(\alpha j + \beta j^2) + (\alpha j + \beta j^2)(\alpha j^2 + \beta j) + (\alpha j^2 + \beta j)(\alpha + \beta) = -3\alpha\beta$$

Au final $P'(X) = 3X^2 - 3\alpha\beta$. Reste à voir que ces racines sont bien les affixes des foyers de l'ellipse. Notons $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, $\beta = |\beta| e^{i\omega}$. Le cercle de Steiner de $(1, j, j^2)$ est paramétré par $\frac{1}{2}e^{it}$, l'ellipse de ABC l'est donc par $\frac{1}{2}(\alpha e^{it} + \beta e^{-it})$.

$$\frac{1}{2}(\alpha e^{it} + \beta e^{-it}) = \frac{1}{2}(|\alpha| e^{it + i\theta} + |\beta| e^{-it + i\omega}) = \frac{e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}}{2}(|\alpha| e^{it + i\frac{\theta-\omega}{2}} + |\beta| e^{-it - \frac{\theta-\omega}{2}})$$

Autrement dit si l'on tourne le repère initial d'un angle $\frac{\theta+\omega}{2}$, l'ellipse est paramétrée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\cos(\frac{\theta-\omega}{2} + t) = \lambda \cos(\frac{\theta-\omega}{2} + t) \\ y(t) &= \frac{|\alpha| - |\beta|}{2}\sin(\frac{\theta-\omega}{2} + t) = \mu \sin(\frac{\theta-\omega}{2} + t) \end{aligned}$$

Et on a dans ce repère l'équation cartésienne de l'ellipse

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = 1$$

Donc l'axe de l'ellipse (auquel appartiennent les foyers) est dirigé par $e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$, ne reste qu'à déterminer la distance c des foyers à O que l'on peut retrouver sur cette figure :

$2OM = 2\lambda = FM + F'M = FN + F'N = 2FN$ et $FN^2 = c^2 + \mu^2$, conclusion $c^2 = \lambda^2 - \mu^2 = \cdots = |\alpha\beta|$ et les affixes des F et F' sont $\pm\sqrt{|\alpha\beta|}e^{i\frac{\theta+\omega}{2}}$ qui sont biens les racines carrées de $\alpha\beta$.

Était-il restrictif de fixer l'origine en O ? Si O est d'affixe p, posons $Q(X) = (X-(a+p))(X-(b+p))(X-(c+p)) = P(X-p)$. Alors $Q'(X) = P'(X-p)$. Les foyers de l'ellipse sont d'afixe $p \pm \sqrt{\alpha\beta}$...et ce sont bien les racines de Q' !

Remarques :

Je remarque après coup qu'on ne peut écrire l'équation cartésienne de l'ellipse si $\mu = 0$ (ellipse plate...) mais mais le raisonnement suivant convient. Et, de même qu'à la fin on a montré qu'une translation ne changeait rien, en fait le même argument montre que plus généralement une similitude directe $z \mapsto \gamma z + \tau$ ne change rien. On récupère donc les triangles équilatéraux.

25 Jordan*

Thèmes d'analyse pour l'agrégation, calcul différentiel, Gonnord-Tosel

Leçons potentiellement concernées :
- 139 : applications des nombres complexes à la géométrie.
- 203 : utilisation de la notion de compacité.
- 204 : connexité. Exemples et applications.
- 216 : étude métrique de courbes.

Théorème (Jordan). *Si Γ est la courbe d'une fonction $\mathcal{C}^1$ "sans point double" alors $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ a exactement deux composantes connexes.*

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = 0, |\gamma'| = 1, \gamma'(0) = 1$, et surtout $\exists L/(\gamma(s) = \gamma(t) \Leftrightarrow s - t \in L\mathbb{Z})$. Soit Γ sa courbe. Pour $\delta > 0$ notons $\gamma_\delta^\pm(t) = \gamma(t) \pm i\delta\gamma'(t)$ et $z_\delta^\pm$ la valeur en 0, on va montrer que γ_δ ne rencontre par Γ pour δ assez petit, puis que tout point est dans la même composante connexe qu'un $z_\delta^\pm$, et enfin qu'ils ne sont pas dans la même.

- Soit $\eta \in]0, L/2[$ tel que $|s-t| < \eta \Rightarrow |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < 1$ (continuité périodique, Heine), on a alors par les accroissements finis
$$|s-t| < \eta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(s) - (t-s)\gamma'(t)| < |t-s|$$
Par compacité, continuité, périodicité, on a aussi $\alpha > 0$ tel que $\forall s, t$,
$$(\forall n \in \mathbb{Z},\ |s-t+nL| \geq \eta) \Rightarrow |\gamma(s) - \gamma(t)| \geq \alpha$$
Soit $\delta < \alpha$ et supposons $\gamma(t) = \gamma_\delta^+(s)$. Alors en particulier $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \alpha$ donc $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $|s-t+nL| < \eta$, on peut même, par périodicité de γ, prendre $n = 0$. Du coup,
$$|\gamma(t) - \gamma(s) - (t-s)\gamma'(t)| < |t-s|,$$
c'est-à-dire $|\gamma'(s)(i\delta - t + s)| < |t-s|$ ou $|i\delta - t + s| < |t-s|$, impossible ! On raisonne pareil pour γ_δ^-.
- Soit $z \notin \Gamma$, $\phi(t) = |z - \gamma(t)|^2$ atteint son min en t_1, et $\phi'(t_1) = 0$ montre que la droite $(z, \gamma(t_1))$ est dirigée par $i\gamma'(t_1)$ (dérivation d'un produit scalaire), $[z, \gamma(t_1)[$ ne contient aucun point de Γ, l'un des segments $[z, \gamma_\delta^\pm(t_1)]$ fait de même, en passant par ce segment puis γ_δ^+ on joint z à $z_\delta^\pm$ dans $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.
- pour $z \notin \Gamma$ rappelons que $Ind\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$ est dans $\mathbb{Z}$ (on pose $F(s) = exp(\int_{-L/2}^{s} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$, alors $\frac{F}{\gamma - z}$ a une dérivée nulle donc $F(L/2) = 1$). On a
$$Ind_\gamma(z_\delta^+) - Ind_\gamma(z_\delta^-) = \frac{\delta}{\pi}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \delta^2}dt$$
- S'il n'y avait qu'une composante connexe, l'indice serait constant ce qui n'est pas le cas, et il y en a au plus 2 d'après le premier point. Une seule des composantes est non bornée (enfermer Γ dans un disque D, $\mathbb{C}\setminus D$ est connexe) et l'indice vaut 0 sur celle-ci ($|z| \to +\infty$), il vaut donc ± 1 sur l'autre.

Remarques :

Visuel donc intéressant, mais long ; envisager peut-être de n'en faire que la moitié (à choisir selon la leçon).

26 Espace de sobolev*

Analyse fonctionnelle, Brezi

Leçons potentiellement concernées :
– 201 : espaces de fonctions : exemples et applications.
– 205 : espaces complets. Exemples et applications.
– 213 : espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
– 228 : continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
– 234 : espaces $L^p,\ 1 \leq p \leq +\infty$.
– 255 : dérivation au sens des distributions. Exemples et applications.
Soit $I =]a, b[$ borné, notons $= \{u \in L^2(I)/\exists v \in L^2(I), \forall \phi \in \mathcal{D}(I), \int_I u\phi' = -\int_I g\phi\}$ (on notera $u' = v$) que l'on muni du produit scalaire $\int_I uv + \int_I u'v'$. Nous allons montrer que c'est un Hilbert qui s'injecte dans $L^2(I)$ et $\mathcal{C}(I)$, cette injection étant compacte lorsque I est borné.

Complétude :

Si u_n est de Cauchy dans , u_n et u'_n le sont dans $L^2(I)$ donc converge vers u et v. De plus $\int u_n\phi' = -\int u'_n\phi$ pour $\phi \in \mathcal{D}(I)$, donc $v = u'$ et $u_n \to u$ dans .

Représentant continu :

Soit $u \in$, posons $v(x) = \int_a^x u'$, v est continu ($u \in L^2 \Rightarrow L^1_{loc}$), soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\int_I v\phi' = \iint_{I^2} 1_{x\geq t} u'(t)\phi'(x)dtdx = \int_I u'(t) \int_I 1_{x\geq t}\phi'(x)dx\ dt = \int_I u'\phi$$

Ainsi u et v ont même dérivée, et on conclut moyennant le

Lemme 17. *Une distribution f de dérivée nulle est égale à une constante (p.p.).*

En effet, si $\psi \in \mathcal{D}(I)$ d'intégrale 1, $\forall w \in \mathcal{D}(I)$, $w - \psi \int w$ est d'intégrale nulle donc a une primitive ϕ dans $D(I)$, donc en la testant contre f, on obtient que $f - (\int f\psi) = 0$ p.p.

Remarquons qu'on a $u = \int u'$.

Compacité des injections :

On va montrer que la boule unité pour $||.||$ est précompacte pour $||.||_\infty$ par Ascoli :
– l'équicontinuité s'obtient par

$$|u(x) - u(y)| \leq \Big| \int_x^y u'(t)dt\Big| \leq ||u'||_2\sqrt{|x-y|}$$

– la borne ponctuelle est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dy = \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big(\int_y^x u'(t)dt - u(y)\Big)dy$$

Cauchy-Schwartz conclut :

$$|u(x)| \leq ||u'||_2 + \frac{1}{\sqrt{b-a}}||u||_2 \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

Remarques :

27 dual de L^p pour $1 < p < 2$

Éléments d'analyse pour l'agrégation, Zuily-Quéffelec

Leçons potentiellement concernées :
- 201 : espaces de fonctions : exemples et applications.
- 205 : espaces complets. Exemples et applications.
- 208 : espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 213 : espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 234 : espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème. *Si* $1 \leq p < +\infty$ *alors* $g \mapsto < g, . > := L_g$ *de* L^q *dans* $(L^p)'$ *est une isomètrie linéaire surjective.*

On suppose le résultat connu pour les Hilbert (donc L^2) et on ne va le démontrer que pour $1 < p < 2$.

Isométrie :

Hàlder donne $|L_g(f)| \leq ||f||_p ||g||_q$ donc $L_g \in (L^p)'$ et $||L_g|| \leq ||g||_q$, reste à montrer l'égalité des normes : posons $f = sign(g)g^{q-1}$ on a $||f||_p = \big(\int |g|^q \big)^{\frac{1}{p}}$ et $|L_g(f)| = ||f||_p ||g||_q$

Surjectivité :

Soit $l \in (L^p)'$, sa restriction ϕ à L^2 est dans $(L^2)'$

$$||\phi(f) \leq ||l||.||f||_p \leq ||l||.||f||_2 \text{ (pour } ||f||_p \leq ||f||_2\text{, c'est Hàlder avec } \frac{p}{2} + \frac{1}{r} = 1 \text{ car } |f|^p \in L^{\frac{2}{p}})$$

$\phi =< g, . >_{L^2}$, reste à voir que $g \in L^q$ et que cette égalité se généralise à tout $f \in L^p$. Prenons $f_n = sign(g)|g|^{q-1}\chi_{|g|<n}$

$$\int fg = \int_{|g|<n} |g|^q \leq ||l||.||f||_p = ||l||\Big(\int_{|g|<n} |g|^q \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Donc $\big(\int_{|g|<n} |g|^q \big)^{\frac{1}{q}} \leq ||l||$ et Beppo Levi donne $g \in L^q$. Par densité de L^2 dans L^p et continuité de l et L_g, on en déduit l'égalité pour tout f, autrement dit $l = L_g$.

Remarques :

le résultat est en fait vrai pour $p \neq \infty$ (L^1 n'est pas un dual). Par contre L est toujours une isomètrie : la démonstration ci-dessus marche pour $1 < p < \infty$. Pour $p = \infty$ il faut prendre la suite minimisante $f_n = sign(g)\chi_{[-n,n]}$. Pour $p = 1$, $q = \infty$, on a $\forall n$ un ensemble K_n de mesure non nulle tel que $\forall x \in K_n$, $g(x) \geq ||g||_\infty - \frac{1}{n}$, il faut prendre $f_n = sign(g)\chi_{K_n}$.

28 Cauchy-lipschitz linéaire*

Petit guide du calcul différentiel, Rouvière

Leçons potentiellement concernées :
- 206 : théorème de point fixe. Exemple et applications.
- 221 : équations différentielles linéaires, système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Dans les grandes lignes : On écrit l'équation sous forme intégrale, on regarde l'opérateur T qui a une fonction f associe $t \mapsto y_0 + \int_0^t Af(u)du$, on itère T, on majore $|T(f) - T(g)|(t)$ par récurrence en gardant t (ça fait apparaître du t^n), une itéré assez grande de T est contractante donc possède un point fixe qui est du coup également point fixe de T.

Remarques :

Cette démo marche en fait pour les globalement lipschitziennes, mais le cas linéaire se marriait mieux avec mes autres développements.

29 Espérance conditionnelle*

Revuz ou plutôt Barbe-Ledoux

Leçons potentiellement concernées :
– 202 : exemples de parties denses et applications
– 207 : prolongement de fonctions. Exemples et applications.
– 234 : espaces L^p, $1 \geq p \geq +\infty$.

Définition. *Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et si $\mathcal{B}$ est une sous-tribue de $\mathcal{A}$ alors $\exists!$ v.a. (notée) $\mathcal{B}$-mesurable telle que $\forall B \in$ on ait $\int_B = \int_B X$ -*

Pour l'unicité, si Y_1 et Y_2 conviennent, alors $\{Y_1 \leq Y_2\} \in$, donc $\int_B (Y_1 - Y_2) = 0$ donc $(Y_1 - Y_2)^+ = 0$ p.s., et ainsi par symétrie $Y_1 = Y_2$ p.s. Pour l'existence, on procède en trois étapes :
– $X \in L^2$:
  $L^2(\Omega, , \mathbb{P})$ (classes ayant un représentant -mesurable) est un sous-espace fermé de l'Hilbert $L^2(\Omega, , \mathbb{P})$ (car une convergence L^2 donne une extraction convergeant p.s., et la limite p.s. d'un -mesurable l'est également). Un représentant -mesurable de la projection de X sur ce sous-espace convient

– $X \in L^1_+$:
  $X_n = X \wedge n \in L^2$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{B}) \geq 0$ (en effet, $X \geq 0$ entraîne ≥ 0, en regardant $B = \{\leq 0\}$). Par convergence monotone, la suite $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{B})$ converge p.s. et, puisqu(elle est bornée dans L^1 par $\mathbb{E}(X)$ la limite - notons-la - est dans L^1. Par convergence monotone encore $\int_B X_n \nearrow \int_B X$ donc convient.

– $X \in L^1$
  $X = X^+ - X^-$, posons $= \mathbb{E}(X^+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{B})$, par linéarité cela convient.

Proposition. – *Si $\mathcal{C} \subset\subset \mathcal{A}$ alors $\mathbb{E}(|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C})$*
– *Si $X \perp \mathcal{B}$ alors $= \mathbb{E}(X)$*
– *Si Y est -mesurable alors $\mathbb{E}(XY|) = Y$*

Remarques :

Développement vraisemblablement trop court...

30 Brouwer en dimension 2

Petit guide de calcul différentiel, Rouvière

Leçons potentiellement concernées :
– 204 : connexité. Exemples et applications.
– 206 : théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Théorème. *Toute application continue du disque unité de $\mathbb{C}$ dans lui-même admet un point fixe (c'est en fait vraie pour la boule unité de $\mathbb{R}^n$).*

Rétraction

Si une tel f existait, construisons une rétraction continue de la boule vers la sphère : soit $\phi(z)$ l'intersection de la sphère avec la demi-droite issue de $f(z)$ passant par z, on a $\phi(z) - f(z) = \lambda(z)(z - f(z))$ avec $\lambda(z)$ l'unique racine positive du polynôme de degré 2 donné par $||\phi(z)||^2 = 1$, donc ϕ est continue et sa restriction à la sphère S est l'identité. Il y a plusieurs moyens de montrer la non-existence d'une telle rétraction G :

Par homotopie

On considère les chemins $\gamma_s(t) = G(se^{2i\pi t})$ sur S, $\gamma_0(t) = G(0)$ et $\gamma_1(t) = e^{2i\pi t}$ sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mais l'indice de 0 est différent, c'est impossible (Théorème de Cauchy).

Par relèvement exponentielle

Plus généralement une fonction f continue de D dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à S est impaire s'annule ; sinon on pourrait la relever en $f = e^g$ avec g continue de D dans $\mathbb{C}$, or $\forall z \in S$ on aurait $-1 = e^{g(z)-g(-z)}$ donc, par connexité de S^1 il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall z \in S^1,\ g(z) - g(-z) = (2k+1)i\pi$$

C'est contradictoire avec l'imparité de $g(z) - g(-z)$. Notons tout de même que ce résultat repose sur le fait que le groupe multplicatif $\mathcal{C}_K$ des fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$ ne s'annulant pas est égal au sous-groupe $\mathcal{E}_K$ des exponentielles de fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$. On peut le montrer par ce lemme :

Lemme 18. *Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe contenant un voisinage de e, alors H est ouvert et fermé (en particulier contient la composante connexe de e).*

$\mathcal{E}_K$ est un voisinage de 1 : si $||f-1|| < 1$, alors $f = e^{L(f)} \in \mathcal{E}_K$ où L est la détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Maintenant, si K est étoilé par rapport à 0, alors $f_t(z) = f(tz)$ relie f à $f(0)$, et un chemin relie $f(0)$ à 1 dans $\mathbb{C}^*$ donc $\mathcal{C}_K$ est connexe.

Pour aller plus loin

Le résultat est alors vrai pour toute partie homéomorphe à la boule unité, par exemple un convexe compact (on se place dans le sev dans lequel cette partie C est d'intérieur non vide, on considère la jauge $\rho(x) = \inf\{t/x \in tC\}$, positivement homogène et sous-linéaire, $\frac{\rho(x)}{||x||}$ est bornée en 0 car $x \in tC \Rightarrow ||x|| \leq |t| diam(C)$ donc $\phi(x) = \frac{\rho(x)}{||x||}x$ est continue, envoit C sur B, est injective (homogénéité) et surjective (réciproque : $y \mapsto \frac{||y||}{\rho(y)}y$ continue)

Cela permet de montrer le théorème de point fixe de Schauder (X partie fermé convexe non vide, $F : X \mapsto X$ telle que $F(X)$ soit relativement comapct, alors F a un point fixe) [et je crois - à vérifer - que c'est ainsi (et avec Ascoli ?) que l'on montre Cauchy-Peano]

Remarques :

Régler l'affaire par homotopie rend le développement bien trop court, ou alors il faut prendre son temps sur l'existence de la rétraction.

31 Sarkowski

Oraux X-ENS, algèbre 1, Francinou, Gianella, Nicolas

Leçons potentiellement concernées :
- 204 : connexité. Exemples et applications.
- 206 : théorèmes de point fixe. Exemple et applications.
- 224 : comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
- 225 : comportement asymptotique d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

Théorème. *Soit I un intervalle borné (segment) de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ continue, si f admet un point 3-périodique alors elle admet un point n-périodique $\forall n \in \mathbb{N}$*

Lemme 19. *Si K segment $\subset f(I)$ (ce que l'on notera $I \to K$, I "recouvre" K) alors $\exists L$ segment $\subset I$ tel que $K = f(L)$.*

Notons $K = [f(a), f(b)]$, si par exemple $a < b$, $[u, v]$ convient avec

$$v = \min\{x \in [a, b], f(x) = f(b)\}$$
$$u = \max\{x \in [a, v], f(x) = f(a)\}$$

Lemme 20. *Si $\exists\ I_0, \dots, I_{n-1}$ segments $\subset I$ tels que $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ alors f^n admet un point fixe x_0 tel que $\forall k,\ f^k(x_0) \in I_k$.*

Pour $n = 1,\ I_0 \subset f(I_0)$ donc $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ tels que $f(\alpha) = a,\ f(\beta) = b$, $f - id$ change de signe entre α et β donc f admet un point fixe sur I_0.

Pour le cas général, d'après le lemme,
- $\exists J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$
- $\exists J_2 \subset J_1$ tel que $f^2(J_2) = I_2$ (car $I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1)$)
  ...
- $\exists J_n \subset J_{n-1}$ tel que $f^n(J_n) = I_0$

D'après le cas $n = 1$, f^n a un point fixe dans J_n, dont l'itéré k est bien dans chaque I_k.

Maintenant soit a un point de période 3 de f, notons $b = f(a)$ et $c = f^2(a)$, ce sont aussi des points 3-périodique, on peut donc toujours se ramener à l'un des deux cas suivants (en prenant pour a le plus petit des trois) :
- $\underline{a < b < c}$: Posons $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$, on a alors $I_1 \to I_1$, $I_0 \to I_1$ et $I_1 \to I_0$ donc, en considérant les chaînes $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_0$ on obtient des points n-périodiques pour n quelconque.
- $\underline{a < c < b}$: Même chose avec $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$.

Remarques :

On peut éventuellement préciser la fonction f dans la notation $I \to K$ (on recouvre par f, ou f^2, etc.).

32 Fonctions implicites*

Petit guide de calcul différentiel, Rouvière

Leçons potentiellement concernées :
- 206 : théorèmes de point fixe. Exemple et applications.
- 214 : théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
- 215 : applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- 217 : sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples (pourquoi pas ?)

Théorème. *Soit U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$ nulle et de différentielle selon la seconde variable inversible à l'origine. Alors $\exists r, s > 0,\ \phi \in C^1\big(B(0, r),\ B(0, s)\big)$ telle que*

$$x \in B(0, r),\ y \in B(0, s),\ f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in B(0, r), y = \phi(x)$$

À x fixé notons $A = D_y f(0, 0)$ et $F_x(y) = y - A^{-1} f(x, y)$ (on va faire une sorte de méthode de Newton). Alors $DF_x(y) = I - A^{-1} D_y f(x, y)$ est continue en (x, y) et s'annule en 0. Soit $\varepsilon > 0$, prenons $r,\ s > 0$ tels que $||x|| \le r$ et $||y|| \le s$ entraîne $||DF_x(y)|| \le \varepsilon$ (et r et s assez petits pour rester ans U). Ainsi, par les accroissements finis, F_x est localement contractante et

$$||F_x(y)|| \le ||F_x(0)|| + ||F_x(0) - F_x(y)|| \le ||A^{-1} f(x, 0)|| + \varepsilon ||y||$$

Et pour r assez petit, $||A^{-1}||.||f(x, 0)|| \le (1 - \varepsilon)s$, ainsi $F_x(y) \in B(0, s)$, fermé dans un Banach donc complet. Son point fixe $\phi(x)$ vérifie $f(x, \phi(x)) = 0$ et, si un y vérifie la même chose, il est point fixe de F_x, par unicité on a l'équivalence du théorème. Reste à étudier la régularité de ϕ.

Si $y = \phi(x)$ et $y_0 = \phi(x_0)$,

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= F_x(y) - F_{x_0}(y_0) \pm F_x(y_0) \\
&= F_x(y) - F_x(y_0) - A^{-1}\big(f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\big) \\
||y - y_0|| &\le \varepsilon ||y - y_0|| + ||A^{-1}|| \sup_{||x|| \le r} ||D_x f(x, y_0)||.||x - x_0|| \\
||\phi(x) - \phi(x_0)|| &\le \frac{C}{1 - \varepsilon} ||x - x_0||
\end{aligned}$$

ϕ est donc lipschitzienne sur $B(0,r)$.

Enfin sur $B(0,r) \times B(0,s)$, $||I - A^{-1}D_y f(x,y)|| \leq \varepsilon < 1$ donc $D_y f(x,y) \in GL_p(\mathbb{R})$.

$$0 = f(x,y) - f(x_0,y_0) = D_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + D_y f(x_0,y_0)(y-y_0) + (||x-x_0|| + ||y-y_0||)\varepsilon(x,y)$$

Et $||y-y_0|| \leq L||x-x_0||$, du coup

$$D_y f(x_0,y_0)(y-y_0) = -Dxf(x_0,y_0)(x-x_0) + ||x-x_0||\varepsilon(x)$$

Et

$$y - y_0 = \phi(x) - \phi(x_0) = -D_y f(x_0,y_0)^{-1} D_x f(x_0,y_0)(x-x-x_0) + ||x-x_0||\varepsilon(x)$$

Finalement ϕ est différentiable en x_0 et sa différentielle est continue.

Remarques :

Les notations "y pour la seconde variable" et "$y = \phi(x)$" portent à confusion...

33 Borel

Éléments d'analyse pour l'agrégation, Zuily-Quéffelec

Leçons potentiellement concernées :
- 207 : prolongement de fonctions. Exemples et applications.
- 228 : continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exmples.
- 241 : suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 243 : convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications (mouais...)
- 245 : fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ (c'est un peu osé...)

Théorème. *Pour toute suite $(a_n)_\mathbb{N}$ de $\mathbb{C}$ il existe f $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall k,\ f^{(k)}(0) = a_k$.*

Soit ϕ $\mathcal{C}^\infty$ égale à 1 pour $|x| < \frac{1}{2}$ et nulle pour $|x| > 1$ (partant de $e^{-\frac{1}{x(x-1)}}$ qu'on intègre : on a un palier infini, on multiplie par la même fonction réfléchie et translatée, on dilate et on translate). Posons $M_n = \sup_{j \leq n} \sup_\mathbb{R} |\phi^{(j)}(x)|$ et

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \phi(\lambda_n x)$$

Par Leibniz on a alors, pour $k \leq n-1$,

$$\begin{aligned}
f_n^{(k)}(x) &= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{a_n}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \phi^{(k-p)}(\lambda_n x) \\
|f_n^{(k)}(x)| &\leq \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{a_n}{(n-p)!} \lambda_n^{k-n} M_n \text{ (car } \lambda_n|x| \leq 1 \text{ sur le support de } \phi) \\
&\leq \frac{M_n}{\lambda_n} |a_n| \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{1}{(n-p)!} \text{ (si } \lambda_n \geq 1)
\end{aligned}$$

En prenant $\lambda_n \geq max\big(1, 2^n M_n |a_n| \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{1}{(n-p)!}\big)$ on obtient $\forall 0 \leq k \leq n-1$

$$\sup_\mathbb{R} |f^{(k)}| \leq 2^{-n}$$

Soit f la somme, $\forall k$ $f = \sum_0^k f_n + \sum_{k+1}^{+\infty} f_n$ est la somme d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et d'une fonction $\mathcal{C}^k$ (par la majoration uniforme des dérivées k^{ieme}) donc est $\mathcal{C}^\infty$. De plus,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n!} \left(x^n \phi(\lambda_n x)\right)^{(k)} + \sum_{n \geq k+1} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{a_n}{(n-p)!} x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \phi^{(k-p)}(\lambda_n x)$$

La deuxième somme se factorise par x donc est nulle en 0. Dans les $k-1$ premiers termes, ϕ n'apparaît qu'avec des dérivées supérieures à 1 or celles-ci sont nulles en 0 (fonction palier), le seul terme non nul de la suite, en 0, est le k^{ieme} :

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \frac{a_k}{k!} \left(x^k \phi(\lambda_k x)\right)^{(k)} \\ &= \frac{a_k}{k!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{k!}{(k-p)!} x^{n-p} \lambda_k^{k-p} \phi^{(k-p)}(\lambda_k x)_{|x=0} \\ &= a_k \end{aligned}$$

Remarques :

On n'est pas obligé d'invoquer ce lemme pour dire que les fonctions C^∞ ne sont pas toutes analytique : un brave $e^{\frac{1}{|x-1|}}$ prolongé par 0 suffit bien.

34 Quadrature de Gauss

Analyse numérique et équations différentielles, Demailly

Leçons potentiellement concernées :
- 213 : espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 236 : illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 238 : méthodes de calcul approché d'intégrale et d'une solution d'une équation différentielle.

Théorème. *$\exists!(x_j)$ et (λ_j) tels que la méthode $\int fw \approx \sum \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre $2l+1$. Les $x_j \in]\alpha, \beta[$ et sont racines du $(l+1)^{eme}$ polynôme orthogonal pour le poids w.*

Analyse

Si on a une telle méthode, posons $\pi_{l+1}(x) = \prod_0^l (x - x_j)$, alors $\forall p \in \mathcal{P}_l, deg(p\pi_{l+1}) \leq 2l+1$ donc

$$\int p\pi_{l+1} w = \sum \lambda_j p(x_j) \pi_{l+1}(x_j) = 0$$

Donc π_{l+1} est orthogonal à $\mathcal{P}_l$, et est de plus unitaire de degré $l+1$, c'est donc le $(l+1)^{eme}$ plynôme orthogonal pour w. En considérant les interpolateurs $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, de degré l, on a l'expression des λ_j donc leur unicité.

Synthèse

Soit π_{l+1} le $(l+1)^{eme}$ plynôme orthogonal, (x_j) ses racines et $\lambda_j = \int L_j w$, soit $f \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$, son interpolation de Lagrange est

$$p_l(x) = \sum_{j=0}^{l} f(x_j) L_j(x)$$

$$\int_\alpha^\beta p_l(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j)$$

Si $f \in \mathcal{P}_{2l+1}$, la division euclidienne par π_{l+1} donne $f = q\pi_{l+1} + r$ avec $deg(q), deg(r) \leq l$. Par orthogonalité, $\int q\pi_{l+1} = 0$. r est égal à son interpolateur de degré l donc la méthode est exacte pour lui, et $f(x_j) = r(x_j)$ donc la méthode est au moins d'ordre $2l+1$.

Erreur

Théorème. *Pour $f \in \mathcal{C}^{2l+2}$ alors $\exists \xi \in]\alpha, \beta[$ tel que $E(f) := \int fw - \sum \lambda_j f(x_j) = \frac{f^{(2l+2)(\xi)}}{(2l+2)!} ||\pi_{l+1}||_{2,w}$.*

l'application $\mathbb{R}_{2l+1}[X] \to \mathbb{R}^{2l+2}$ qui à P associe $(P(x_j), P'(x_j))$ est linéaire injective donc surjective, soit $H \in \mathbb{R}_{2l+1}[X]$ ayant même valeur et même dérivé que f sur les x_j, la méthode est exacte pour H donc $E(f) = \int (f - H)w$.

Soit $x \notin \{x_j\}$, posons $\phi_x(t) = f(t) - H(t) - k_x \pi_{l+1}^2(t)$ avec k_x tel que $\phi_x(x) = 0$. ϕ s'annule en les x_j et en x donc ϕ' s'annule sur $l+1$ points intermédiaires (Rolle), et d'autre part s'annule sur les x_j donc sur $2l+2$ points, ainsi $\phi^{(2l+2)}$ s'annule en un certain c_x, et $k_x = \frac{f^{(2l+2)}(c_x)}{(2l+2)!}$. En réinjectant cette valeur dans la définition de $\phi(x)$ et en notant m et M l'inf et le sup de $f^{(2l+2)}$ on a

$$\frac{m}{(2l+2)!}\pi_{l+1}^2(x) \leq f(x) - H(x) \leq \frac{M}{(2l+2)!}\pi_{l+1}^2(x)$$

Et par les valeurs intermédiaires on trouve ξ qui réalise l'égalité.

Remarques :

35 Inégalité isopérimètrique

Éléments d'analyse pour l'agrégation, Zuily, Quéffélec

Leçons potentiellement concernées :
- 216 : étude métrique de courbes. Exemples.
- 246 : série de Fourrier. Exemples et applications.

Théorème. *Si Γ est une courbe de Jordan (c-à-d compacte fermée sans point double) $\mathcal{C}^1$ de longueur L autour d'une surface S alors $L^2 \geq 4\pi S$ et l'égalité n'est réalisée que dans le cas d'un cercle.*

Vue l'action d'une homothétie sur les longueurs et les surfaces, L^2 et S sont homogènes, on peut donc supposer $L = 1$. Paramétrons Γ par sa longueur d'arc $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ avec $|\gamma'(t)| = 1$.

On admettra la formule de Green-Rieman :

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

En particulier si $Q(x,y) = x/2$ et $P(x,y) = -y/2$ on a $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, et ainsi (en orientant γ positivement)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt = \frac{1}{2} Im \int_0^1 \gamma'(t)\bar{\gamma}(t)dt$$

On dispose de ses coefficients de Fourrier $c_n = \int_0^1 e^{-2i\pi ns}\gamma(s)ds$ et de ceux de sa dérivée $c'_n = 2i\pi n c_n$. Parseval indique que $||\gamma'||_2 = ||c'_n||_2$, autrement dit

$$L^2 = 1 = L = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c'_n|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 n^2 |c_n|^2$$

Et d'autre part

$$\int_0^1 \gamma'(t)\bar{\gamma}(t)dt = <\gamma'(t), \gamma(t)> = \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_n \bar{c}_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2\pi n |c_n|^2$$

Ainsi

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n)|c_n|^2 \geq 0$$

Et l'égalité n'a lieu qu'à la condition $c_n = 0$ pour $n \neq 0$ et 1. Or $\gamma(s) = c_0 + c_1 e^{2i\pi s}$ est l'équation d'un cercle.

Remarques :

Un peu court, paraît-il. Autant en profiter pour soigner l'introduction de la surface (ici, mon début de rédaction n'est pas très joli). On pourrait expliciter les changements de paramètrage. On peut par exemple refaire le changement de variable pour retomber sur le paramétrage par longueur d'arc ($s = \int_0^t |\gamma'(u)|du$ est de dérivée strictement positive, on en prend l'inverse). On peut aussi redémontrer $c_n' = 2i\pi n c_n$ (simple intégration par partie).

36 Méthode de Laplace*

Petit guide de calcul différentiel, Rouvière ou plutôt Éléments d'analyse pour l'agrégation, Zuily-Queffelec

Leçons potentiellement concernées :
- 218 : application des formules de Taylor.
- 239 : fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

On étudie le comportement asymptotique de $F(t) = \int_a^b e^{-t\phi(x)} f(x)dx$ quand $t \to +\infty$, où $I =]a, b[$ est borné ou non, $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ telle que

1. ϕ a un unique maximum en $x_0 \in \mathring{I}$ (on pourrait en fait prendre I fermé et le minimum de ϕ à une des extrémités) avec $f(x_0) \neq 0$.

2. $\exists t_0$ tel que $e^{-t_0\phi} f$ intégrable sur I (c'est alors vrai $\forall t \geq t_0$, car $|e^{-t\phi(x)} f(x)| \leq e^{-(t-t_0)\phi(x_0)} |e^{-t_0\phi(x)} f(x)|$)

La formule de Taylor avec reste intégrable fournit $\psi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0)^2\psi(x)$ (avec $\psi(x_0) = \frac{1}{2}\phi''(x_0)$). Soit δ assez petit pour que $]x_0 \pm \delta[\subset I$ et tel que si $|x - x_0| < \delta$ on ait :

1. $\psi(x) < 0$ (possible car $\psi(x_0) < 0$)
2. $\frac{d}{dx}\left((x - x_0)\sqrt{-\psi(x)}\right) \neq 0$ (possible car $\sqrt{\phi(x_0) - \phi(x)} = \frac{(x-x_0)}{\sqrt{2}}\sqrt{-\phi''(x_0)} + o(|x - x_0|)$ et sa dérivée en x_0 est donc $\sqrt{-\psi(x_0)} \neq 0$) - c'est donc localement un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty$ à support dans $]x_0 \pm \delta[$ égale à 1 sur $]x_0 \pm \frac{\delta}{2}[$ et comprise entre 0 et 1, décomposons F en

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\phi(x)}\theta(x)f(x)dx + \int_a^b e^{-t\phi(x)}(1 - \theta(x))f(x)dx := F_1(t) + F_2(t)$$

F_2 :

Sur le support de $1-\theta$ on a soit $\phi(x_0)-\phi(x) \geq \phi(x_0)-\phi(x_0-\delta) > 0$ soit $\phi(x_0)-\phi(x) \geq \phi(x_0)-\phi(x_0+\delta) > 0$ autrement dit $\phi(x_0) - \phi(x) \geq \mu > 0$. Alors pour $t > t_0$ on a $t\phi(x) \leq t_0\phi(x) + (t - t_0)\phi(x_0) - (t - t_0)\mu$ et

$$|F_2(t)| \leq e^{(t-t_0)(\phi(x_0)-\mu)} \int_{\mathbb{R}} e^{t_0\phi(x)}|f(x)|dx \to 0$$

Plus précisément on a $e^{-t\phi(x_0)}F_2(t)$ à décroissance exponentielle.

F_1 :

Sur le support de θ on peut faire le changement de variable $z = (x - x_0)\sqrt{-\psi(x)}$, on a alors

$$F_1(t) = e^{t\phi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-tz^2} h(z)dz$$

où $h(z) = \theta(x(z))f(x(z))x'(z)$ est continue à support compact, un nouveau changement $\sqrt{t}z = y$ donne

$$F_1(t) = e^{t\phi(x_0)}t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{y^2} h(\frac{y}{\sqrt{t}})dy$$

$e^{y^2}h(\frac{y}{\sqrt{t}}) \to e^{y^2}h(0)$ et est dominé par $e^{y^2}||h||_\infty$ Donc

$$F_1(t)e^{-t\phi(x_0)}t^{\frac{1}{2}} \to \sqrt{\pi}h(0)$$

Or $h(0) = f(x_0)(-\frac{1}{2}\phi''(x_0))^{-\frac{1}{2}}$ et finalement

$$F(t) \sim F_1(t) \sim e^{t\phi(x_0)}t^{-\frac{1}{2}}f(x_0)\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\phi''(x_0)|}}$$

Application : Stirling

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = t \int_0^{+\infty} (yt)^t e^{-yt} dy = te^{tlogt} \int_0^{+\infty} e^{t(\log y - y)} dy \sim \sqrt{2\pi} t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t}$$

Remarques :

37 Une Équation de distribution

Eléments De Distributions Et D'équations Aux Dérivées Partielles , Zuily et Analyse fonctionnelle, exercices corrigés
Lacombe - Massat

Leçons potentiellement concernées :
- 218 : applications des formules de Taylor.
- 254 : espace de Schwartz et distributions tempérées.
- 255 : dérivation au sens des distributions. Exemples et applications.

Proposition. *Les solutions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $(x-x_0)^\alpha u = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de dérivés du dirac en x_0 jusqu'à la $\alpha^{iéme}$ exclue.*

Par le théorème d'Hadamard,

$$(x-x_0)^\alpha u = 0 \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) / \phi(x_0) = \cdots = \phi^{(\alpha-1)}(x_0) = 0, \ < u, \phi >= 0.$$

Cette condition sur ϕ est en particulier vérifiée si le support de ϕ est dans $\mathbb{R} \backslash \{x_0\}$, donc $supp(u) \subset \{x_0\}$, et ainsi u est d'ordre fini que l'on notera N.

Lemme 21. *Pour u distribution quelconque, si $supp(u) \cap supp(\phi) = \emptyset$ alors $< u, \phi >= 0$.*

Par définition du support, si $x \notin supp(u)$ il possède un voisinage V_x tel que $< u, \psi >= 0 \ \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(V_x)$. Par compacité on dispose de $x_1, \ldots, x_p$ tels que $supp(\phi) \subset \bigcup_1^p V_{x_i}$. Considérons $(\chi_i)_1^p$ une partition de l'unité associée ($\chi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(V_{x_i})$ et, pour $x \in supp(\phi)$, $\sum_i \chi_i(x) = 1$), on a bien

$$< u, \phi >=< u, \sum \chi_i \phi >= \sum < u, \chi_i \phi >= 0$$

Lemme 22. *Si u est d'ordre N et de support $\{x_0\}$ et que $\phi(x_0) = \cdots = \phi^{(N)}(x_0) = 0$ alors $< u, \phi >= 0$.* [1]

Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$ égal à 1 sur $x_0 + [-1,1]$ et à 0 en-dehors de $x_0 + [-2,2]$, notons $\chi_n(x-x_0) = \chi(n(x-x_0))$. Pour tout n, $supp(1-\chi_n) \cap supp(u) = \emptyset$ donc $< u, \phi >=< u, \chi_n \phi >$; ne reste qu'à montrer que cette valeur est arbitrairement petite. Notons $||.||_n$ la norme infinie sur $x_0 + [-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}]$ et $||f||_{(p)} = \sup_{i \leq p} ||\partial^i f||_\infty$.

$$\begin{aligned} | < u, \phi \chi_n > | &\leq C \sum_{k=0}^N ||\partial^k (\phi \chi_n)||_n \\ &\leq C \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} ||\partial^{k-i}(\chi_n)||_n ||\partial^i(\phi)||_n \end{aligned}$$

Or $||\partial^{k-i}(\chi_n)||_n = n^{k-i} ||\partial^{k-i}(\chi)||_n \leq n^{k-i} ||\partial^{k-i}(\chi)||_\infty$ et d'autre part, par les accroissements finis, $||\partial^i(\phi)||_n \leq \frac{2}{n} ||\partial^{i+1}(\phi)||_n \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{N+1-i} ||\partial^{N+1}(\phi)||_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{N+1-i} ||\partial^{N+1}(\phi)||_\infty$, ainsi

$$\begin{aligned} | < u, \phi \chi_n > | &\leq C ||\phi||_{(N+1)} ||\chi||_{(N)} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (\frac{2}{n})^{N+1-i} n^{k-i} \\ &\leq \frac{C'}{n} \to 0 \end{aligned}$$

Proposition.

$$supp(u) = \{x_0\} \Rightarrow u = \sum_{i=0}^N a_i \delta_{x_0}^{(i)}$$

1. Il suffirait que le support de u soit compacte et que N premières dérivées de ϕ s'annulent sur ce support.

Posant, pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ quelconque, $\psi(x) = \chi(x) \times \left[\phi(x) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!}\partial^k\phi(x_0)(x-x_0)^k\right]$ (le χ est là pour assurer un support compact), le lemme 2 donne $< u, \psi >= 0$ et, à nouveau par $supp(1-\chi)\cap supp(u) = \emptyset$, on obtient

$$< u, \phi >=< u, \chi\phi >=< u, \chi(x)\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}\partial^k\phi(x_0)(x-x_0)^k >= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}\partial^k\phi(x_0) < u, \chi(x)(x-x_0)^k >= \sum_{k=0}^N a_k < \delta_{x_0}^{(k)}, \phi >$$

Ce qui termine l'analyse. En synthèse il faut voir quelles dérivées de dirac sont solutions (l'ensemble des solutions est un espace vectoriel). Les $\delta^{(i)}$ pour $i < \alpha$ le sont clairement, les dérivées supérieures ne le sont pas :

$$< (x-x_0)^\alpha\delta_{x_0}^{(\alpha+p)}, \chi(x)(x-x_0)^p >=< \delta_{x_0}^{(\alpha+p)}, \chi(x)(x-x_0)^{\alpha+p} >= (\alpha+p)! \neq 0$$

Remarques :

Ce développement construit de toutes pièces (pour rajouter des formules de Taylor, via le lemme d'Hadamard) ne se trouve a priori pas tel quel dans les livres. Le résultat théorique central que l'on y trouvera est le fait que les distributions à supports ponctuels sont les dérivés du dirac. Le lemme 2 serait en fait vrai pour un support compact (pas forcément ponctuel), la même démo serait vrai si ce n'est qu'il faut construire une partition de l'unité dont on contrôle les dérivés pour remplacer χ_n (c'est ce que fait Zuily je crois). Une manière de rédiger est de résoudre complètement l'équation en admettant les 2 lemmes puis de démontrer ceux-ci (on peut admettre le premier pour gagner du temps).

38 Lotka-Volterra

Analyse 3, Chambert-Loir

Leçons potentiellement concernées :
- 220 : équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

On étudie le système proie-prédateur

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x(t_0), y(t_0) > 0 \end{cases}$$

On va montrer que les solutions restent positives et sont périodiques.

Supposons que $x(s) = 0$, alors par Cauchy-Lipschitz $\forall t,\ x(t) = 0, y(t) = y(s)e^{-c(t-s)}$ ce qui est impossible puisque $x(t_0) > 0$. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier : en effet, $x' < ax$ donc $0 < x < x(t_0)e^{a(t-t_0)}$ ne peut exploser en temps fini, et $y' < dxy$ donc $0 < y < y(t_0)e^{d\int x}$ non plus.

$(\mathbb{R}_+^*)^2$ est divisé en 4 ouverts selon les signes de $a - by$ et $c - dx$ dans lesquelles les composantes de la solution sont monotones. On va montrer qu'on ne reste jamais indéfiniment dans une zone. Supposons que (x_0, y_0) est dans l'une de ces parties et que les solutions y restent :
- $\{a - by > 0\} \times \{c - dx > 0\}$: x croît et y décroît, ils ont des limites $x_1 \in [0, \frac{c}{d}]$ et $y_1 \in [0, y_0]$, ainsi x' et y' ont une limite, celle-ci est nécessairement 0 (puisque x et y sont bornés). En replaçant ceci dans l'équation, on obtient que $x_1 = \frac{c}{d}$ et $y_1 = \frac{a}{b}$ ce qui contredit $y_0 < \frac{a}{b}$. Donc pour un certain t_1 on a $x(t_1) = \frac{c}{d}$ et $y(t_1) < \frac{a}{b}$ donc $x'(t_1) > 0$ et $y'(t_1) = 0$, on passe donc dans...
- $\{a - by > 0\} \times \{c - dx < 0\}$, où x et y sont croissantes, y converge donc $\ln y$ converge. Or sa dérivée $\frac{y'}{y} = -c + dx \geq -c + dx_0 > 0$, c'est une contradiction avec le fait que lny est borné. Donc en un temps t_2 on a $y(t_2) = \frac{a}{b}$, on passe dans...
- $\{a - by < 0\} \times \{c - dx < 0\}$ que l'on traite de même pour arriver à
- $\{a - by > 0\} \times \{c - dx > 0\}$ qui nous ramène à la première phase

Pour conclure, posons

$$H(t) = by + dx - a\ln y - c\ln x$$

On a

$$H'(t) = b(-cy + dxy) + d(ax - bxy) - a(-c + dx) - c(a - by) = 0$$

H est donc une intégrale première de l'équation. $y \mapsto H(\frac{c}{d}, y)$ a pour dérivée $b - \frac{a}{y}$ donc est stricement croissante sur $[\frac{a}{b}, +\infty[$ (donc injective), elle prend dans cette partie du plan la valeur $H(x_0, y_0)$ en un unique point $H(\frac{c}{d}, \eta)$ par lequel repasse donc la trajectoire qui, par Cauchy-Lipschitz, est donc périodique.

On peut éventuellement calculer les valeurs moyennes de x et y : on a $\int_0^T \frac{y'}{y} = \ln \frac{y(T)}{y_0} = 0$, ainsi $-c + dx$ est de moyenne nulle, et de même on a que la valeur moyenne de y est $\frac{a}{b}$ (on note que rajouter un $-\varepsilon x$ et $-\varepsilon y$ à l'équation augmente la valeur de x et diminue celle de y ; autrement dit la chasse favorise la proie...)

Remarques :

On n'a pas le temps de détailler l'étude des 4 cas ; montrer en amont que les solutions sont bornées peut simplifier celle-ci. (j'ai déjà vu cette rédaction, je ne sais plus trop où ; essayer le site dynamaths).

39 L'équation de la chaleur*

Pas vraiment de références (pas trop cherché non plus...)

Leçons potentiellement concernées :
- 221 : équations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
- 254 : espace de Schwartz et distributions tempérées.
- 256 : transformation de Fourrier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$.

On chercher dans $S'(\mathbb{R}^{d+1})$ une solution au problème (sens ? Valeur ponctuelle ?) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Notons $\hat{f} = \mathcal{F}_x(f)$ et considérons u une solution. Il s'agit de montrer que $\hat{u}$ est solution d'une équation linéaire. Or

$$\mathcal{F}_x(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(y, t) = -y^2 \hat{u}(y, t)$$

et

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}_x(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}), \phi > &= < \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \mathcal{F}_x(\phi) > \\ &= < u, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{F}_x(\phi) > \\ &= < u, \mathcal{F}_x(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}) > \end{aligned}$$

En effet $\phi \in S(\mathbb{R}^{d+1})$, on peut donc dériver sous l'intégrale (sa dérivée seconde en temps est $\mathcal{C}^\infty$, dominé à l'infini par x^{-2}). Ainsi $\hat{u}$ est solution de l'équation $(\partial_t^2 + y^2)\hat{u} = 0$, donc on connaît exactement les solutions (hypoellipticité des opérateurs différentiels à coefficient constant en dimension 1) :

$$\hat{u}(y, t) = \cos(yt)\hat{u}_0(y) + \frac{\sin(yt)}{y}\hat{u}_1(y, t)$$

Or le sinus cardinal est la transformé de Fourrier de la fonction caractéristique $\frac{1}{2}\chi_{[-t,t]}$ (on l'écrit...). Et, si on calcule la transformée de Fourrier du dirac en t,

$$< \delta_t, \mathcal{F}_x(\phi) >= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-itx}\phi(x, t)dx =< y \mapsto e^{-iyt}, \phi >$$

Ainsi $\mathcal{F}_x^{-1}(cos(yt)) = \frac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t})$. Ainsi, si u est solution, alors

$$u = \frac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t}) * u_0 + \frac{1}{2}\chi_{[-t,t]} * u_1$$

Reste à voir que cette expression définit bel et bien une solution, et à l'expliciter.

Remarques :

Vous l'aurez compris, une rédaction pas terminée...Se contenter de la dimension 1 ?

40 Galton-Watson

Promenades aléatoires, Benaim, El Karoui

Leçons potentiellement concernées :
- 224 : comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples. (en forçant un peu...)
- 226 : comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$.
- 242 : utilisation en probabilités de la transformation de Fourrier ou Laplace et du produit de convolution.
- 249 : suites de variables de Bernoulli indépendantes.

$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i^n$ où les ξ_i^n sont iid intégrables à valeur dans $\mathbb{N}$, et $X_0 = 1$. C'est une chaîne de Markov dont 0 est l'unique état récurrent. Notons G la fonction génératrice des ξ_i.

$$G(z) = \mathbb{E}(z^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

On a la relation de récurrence

$$G_{X_{n+1}}(z) = \mathbb{E}(z^{X_{n+1}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(z^{X_{n+1}}|X_n)) = \mathbb{E}(G(z)^{X_n}) = G_{X_n}(G(z))$$

De plus $X_0 = 1 \Rightarrow G_{X_0} = z$ donc $G_{Z_n}(z) = G^n(z)$ (G appliqué n fois). Puisque les ξ sont intégrables, on voit par récurrence que

$$\mathbb{E}(X_n) = G'_{X_n}(1) = G'(1)G'_{n-1}(G(1)) = \mathbb{E}(\xi)G'_{n-1}(1) = \mathbb{E}(\xi)^n.$$

Théorème. *Si $\mathbb{E}(\xi) \leq 1$ (cas (sous-)critique), la population s'éteint presque sàrement, et si $\mathbb{E}(\xi) > 1$ (cas sur-critique) elle s'éteint avec une probabilité π où $\pi \in [0, 1[$ est tel que $G(\pi) = \pi$.*

Notons $\pi_n = \mathbb{P}(X_n = 0) = G_{Z_n}(0)$. On cherche $\pi = \lim \uparrow \pi_n$.

$z \mapsto G(z)$ est croissante convexe car

$$G'(z) = \mathbb{E}(\xi z^{\xi-1}) \text{ et } G''(z) = \mathbb{E}(\xi(\xi-1)z^{\xi-2})$$

sont des espérances de v.a. réelles discrètes positives. De plus, $G(1) = 1$. Excluons le cas $G(0) = 0$ (il ne peut y avoir explosion), on a alors une disjonction de cas :

- cas sous-critique : Si $G'(1) \leq 1$, alors $z \leq G(z)$ sur $[0, 1]$ et ainsi $G_{X_n}(z) \leq G_{X_{n+1}}(z)$, la limite croissante des G_{X_n}, inférieure à 1, est un point fixe de G donc ne peut être que 1. En particulier $G_{X_n}(0) \to 1$.

- cas sur-critique : Soit $\pi \in [0, 1[$ le point fixe de G (cf graphique, et y revenir plus tard), selon que $z \leq \pi$ ou $z \geq \pi$ on a $z \leq G(z) \leq \pi$ ou $z \geq G(z) \geq \pi$, donc $G_{X_n}(z)$ croît ou décroît vers π, donc $G_{X_n} \to \pi$.

Remarques :

à la fin, les arguments par le dessin se formalise en supposant qu'on a une (ou plus d'une intersection) et en remettant en cause la convexité.

41 Fonctions à variation bornées*

Maths en tête, analyse, Gourdon.

Leçons potentiellement concernées :
– 229 : fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
On montre la relation de Chasles, l'inclusion des $\mathcal{C}^1$, l'équivalence à être différence de deux fonctions croissante, le fait d'être réglé et enfin on donne un contre-exemple continu.

$$\bigvee_a^b f := \sup_{\sigma \in sub[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

Si $\sigma \in sub(I)$ alors $a < (\sigma) < b \in sub[a,b]$ donc $f_{|I}$ à variation bornée. On a clairement $\bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f \leq \bigvee_x^z f$, et pour $\sigma \in sub[x,z]$ on ajoute le point y et $\bigvee_{\sigma_1} f + \bigvee_{\sigma_2} f \geq \bigvee_\sigma f$ d'où la réciproque.

Si g est $\mathcal{C}^1$, elle est à variation bornée car

$$|g(x_{i+1} - g(x_i)| = |\int_{x_i}^{x_{i+1}} g'| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |g'|$$

$$\bigvee_a^b \leq \int_a^b |g'|$$

Il y a en fait égalité : par les accroissements finis, pour des $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$Var_\sigma g = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)|g'(\theta_i)| \to \int_a^b |g'| \text{ (quand le pas tend vers 0)}$$

Une fonction croissante est à variation bornée car $Var_\sigma f = f(b) - f(a)$ et la différence de deux fonctions à variation bornée l'est de même. D'après précédemment,

$$g : x \mapsto \bigvee_a^x$$

est croissante, posons $h = f - g$, alors h est croissante car $\forall x < y$

$$h(y) - h(x) = \bigvee_x^y -\big(f(y) - f(x)\big) \geq 0 \text{ (subdivision triviale)}$$

Une fonction monotone est réglée et la différence de fonctions monotones est réglée. Pour un contre-exemple, considérons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ et $f(x) = x\cos(\frac{1}{x})$, soit σ_n

$$0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} \cdots < \frac{1}{2\pi}$$

$$Var_{\sigma_n} f = \sum_{i=0}^{n-1} |\frac{cos((i+1)\pi)}{(i+1)\pi} - \frac{cos(i\pi)}{i\pi}| = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i}) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{i+1} \to +\infty$$

Remarques :

Rien à dire…

42 Ruine du joueur*

Probabilités 2, Ouvrard

Leçons potentiellement concernées :
– 235 : suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
– 249 : suites de variables de Bernoulli indépendantes.
Le joueur et la banque ont respectivement une fortune a et b. Combien de temps vont-ils jouer avant la ruine de l'un des deux, et quelle est la probabilité ρ que le joueur sorte gagnant ?
Soient $(Y_n)_\mathbb{N}$ i.i.d. de loi $p\delta_{-1} + q\delta_1$, $S_n = a + \sum_1^n Y_j$, $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = oua + b\}$ (c'est un temps d'arrêt). Si $p = q = \frac{1}{2}$ (resp. <, >), S_n est une martingale (resp. sur, sous)

Si $p < q$

$X_n = S_n - n(p-q)$ est alors une martingale, au temps d'arrêt borné $T \wedge n$ on a

$$a = \mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}\big[S_{T\wedge n} - (T\wedge n)(p-q)\big]$$

Or $\forall n$, $0 \leq S_{T\wedge n} \leq a+b$ donc $0 \leq (p-q)\mathbb{E}\big[T\wedge n\big] \leq b$

$S_{n\wedge T}$ est borné donc converge p.s., or S_n ne converge nulle part ($|S_{n+1} - S_n| = 1$) donc T est p.s. fini. Par Beppo Levi on a $\mathbb{E}T = \lim_n \nearrow \mathbb{E}\big[T\wedge n\big]$. $S_{T\wedge n}$ converge alors p.s. (et donc L^1 car $S_{n\wedge T} \in L^\infty$) vers S_T, et on a

$$(p-q)\mathbb{E}T = \mathbb{E}S_T - a := (a+b)\rho - a$$

Soit $s > 0$, posons $U_n = s^{S_n}$, on a $\mathbb{E}\big(U_n|\mathcal{F}_{\setminus -1}\big) = U_{n-1}(sp + \frac{1}{s}q)$, c'est donc une martingale si s est racine de $s^2p - s + q = 0$, c'est-à-dire pour $s = 1$ ou $s = \frac{q}{p}$. Pour $s = \frac{p}{q} < 1$, la martingale est non constante comprise entre 0 et 1, donc $U_{T\wedge n}$ est borné dans L^∞, en particulier équi-intégrable et converge ainsi p.s. et dans L^1 vers U_T, d'espérance $(1-\rho) + \rho(\frac{q}{p})^{a+b}$

D'autre part

$$(\frac{q}{p})^a = \mathbb{E}U_0 = \mathbb{E}U_{T\wedge n} \to \mathbb{E}U_T$$

Ce qui fournit finalement :

$$\rho = \frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}} \text{ et } \mathbb{E}T = \frac{1}{p-q}\Big[\frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}} - a\Big]$$

Si $p = q = \frac{1}{2}$

(S_n) est une martingale dans L^2 donc son carré est une sous-martingale.

$$\mathbb{E}\big(Y_n^2|\mathcal{F}\big) = 1$$

Ainsi $S_n^2 - n$ est une martingale, et on a $\forall n$

$$a^2 = \mathbb{E}S_0^2 = \mathbb{E}\big[S_{T\wedge n}^2 - T\wedge n\big]$$

$S_{T\wedge n}^2 \leq (a+b)^2$ et Beppo-Levi donnent à nouveau que T est intégrable -en particulier presque sàrement fini - ainsi $S_{T\wedge n}$ (bornée dans L^∞) converge p.s., dans L^1 et L^2 vers S_T. On a alors

$$a = \mathbb{E}S_0 = \mathbb{E}S_{T\wedge n} \to \mathbb{E}S_T := (a+b)\rho$$

Donc $\rho = \frac{a}{a+b}$, et d'autre part

$$a^2 = \mathbb{E}\big[S_T^2 - T\big]$$

Donc

$$(a+b)^2\rho = \mathbb{E}T = \mathbb{E}S_T^2 - a^2$$

On obtient ainsi

$$\mathbb{E}T = ab$$

Remarques :

43 Loi forte des grands nombres

Probabilités, Ouvrard

Leçons potentiellement concernées :
- 230 : séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples (mouaif. . .)
- 235 : suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
- 238 : méthodes de calcul approché d'intégrables et d'une solution d'une équation différentielle.
- 241 : suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples (éventuellement. . .)
- 250 : loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.

– 251 : indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Théorème. *Si les X_n sont indépendants L^2 tels que $\mathbb{E}X_n \to m$ et $\sum \frac{1}{j^2}\sigma^2_{X_j} < \infty$, alors la moyenne empirique $\bar{X}_n$ converge p.s. (et dans L^2) vers m (on admettra le lemme de Cesàro et l'inégalité de Kolmogorov).*

Les $Y_n = \frac{X_n - \mathbb{E}X_n}{n}$ sont indépendantes centrées de variance $\frac{\sigma^2_{X_n}}{n^2}$, donc $\sum \sigma^2_{Y_n} < \infty$, ce qui, par le lemme 1 ci-après, donne la convergence p.s. (et L^2) de la série de terme général Y_n. Le lemme de Kronecker (plus bas) avec $b_n = n$ conclue (d'après le lemme de Cesàro, $\mathbb{E}\bar{X}_n \to m$).

Lemme 23. *Si les Y_n sont réels centrés indépendants L^2 avec $\sum \sigma^2_{Y_n} < \infty$ alors la série $\sum Y_n$ converge p.s. (et dans L^2).*

Soit $m \geq 1$, notons

$$S_m = \sum_{j=1}^{m} Y_j \ , \ A_m = \sup_{k\geq 1} |S_{m+k} - S_m| \text{ et } A = \inf_{m\geq 1} A_m$$

Le critère de Cauchy indique $\{\sum Y_n \text{converge}\} = \{A = 0\}$. D'autre part $\{A \neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1}\{A > \frac{1}{n}\}$ et $\{A > \frac{1}{n}\} \subset \{A_m > \frac{1}{n}\}$, ainsi

$$\{A \neq 0\} \subset \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\{A_m > \frac{1}{n}\}$$

Continuons : $\sup_{k\geq 1}|S_{m+k} - S_m| = \lim_r \nearrow \sup_{1\leq k\leq r}|S_{m+k} - S_m|$, ainsi

$$\{A_m > \frac{1}{n}\} = \bigcup_{r\geq 1}\{\sup_{1\leq k\leq r}|S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n}\}$$

Et par l'inégalité de Kolmogorov (qui généralise Tchebitchev, et se démontre en partitionnant Ω selon le premier indice k qui met l'inégalité en défaut)

$$\mathbb{P}\big(\sup_{1\leq k\leq r}|S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n}\big) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{m+r} \sigma^2_{Y_j}$$

Entraînant

$$\mathbb{P}(A_m > \frac{1}{n}) = \lim_r \mathbb{P}\big(\sup_{k\geq r}|S_{m+k} - S_m|\big) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \sigma^2_{Y_j}$$

Et finalement

$$0 \leq \mathbb{P}\big(\bigcap_{p\geq 1}(A_p > \frac{1}{n})\big) \leq \mathbb{P}(A_m > \frac{1}{n}) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \sigma^2_{X_j} \to_{m\to 0} 0$$

Concluant enfin d'un $\mathbb{P}(A \neq 0) = 0$.

Lemme 24 (de Kronecker)**.** *Si la série de terme x_n est convergente (de somme S) et si $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante tendant vers l'infini, alors $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^n b_j x_j \to 0$.*

Posant $S_n = \sum_{j=1}^n x_j - S$, on a $S_n \to 0$ et, par une transformation d'Abel $x_n = S_n - S_{n-1}$,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \frac{1}{b_n}\Big[\sum_{j=1}^{N} b_j x_j + S_n b_n - b_N S_{N-1} - \sum_{j=N}^{n-1} S_j(b_{j+1} - b_j)\Big]$$

Les trois premiers termes convergent vers 0 avec n, en fixant d'autre part N assez grand on a $|S_n| < \varepsilon$ pour $n \geq N$ et le dernier terme est ainsi majoré par $\varepsilon\frac{b_n - b_N}{b_n}$, ce qui conclue.

Remarques :

On n'utilise ni ne démontre la convergence L^2.

44 Noyau de Féjer

Éléments d'analyse pour l'agrégation, Zuily, Queffélec.

Leçons potentiellement concernées :
- 235 : suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
- 240 : transformation de Fourrier, produit de convolution. Application.
- 241 : suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 246 : séries de Fourrier. Exemples et applications.

$D_n = \sum_{-n}^{n} e_j$, $K_n = \frac{D_0+\cdots+D_{n-1}}{n}$, $\sigma_n(f) = f * K_n$.

Théorème. *Si $f \in \mathcal{C}$ (sur le tore) alors $||\sigma_n(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$ et $||\sigma_n(f) - f||_\infty \to 0$.*
Si $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$ alors $||\sigma_n(f)||_p \leq ||f||_p$ et $||\sigma_n(f) - f||_p \to 0$.

K_n est une approximation de l'unité positive

Lemme 25. $||K_n||_1 = 1$ *et* $K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{sin(nx/2)}{sin(x/2)}\right)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} nK_n(x) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j} e^{ikx} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{ijx}\sum_{k=0}^{2j} e^{ikx} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{ijx}\frac{e^{i(2j+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{sin((j+1/2)x)}{sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{sin(x/2)} Im\Big(\sum_{j=0}^{n-1} e^{i(j+1/2)x}\Big) = \frac{1}{sin(x/2)} Im\Big(e^{ix/2}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\Big) = \frac{sin(nx/2)}{sin^2(x/2)} Im\big(e^{inx/2}\big) = \frac{sin^2(nx/2)}{sin^2(x/2)} \end{aligned}$$

Puisque $Kn \geq 0$, $||K_n||_1 = c_0(K_n) = \frac{c_0(D_0)+\cdots+c_0(D_{n-1})}{n} = 1$.

f continue

Soit $\delta > 0$ et $\omega(\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)|, |u - v| < \delta\}$. On a d'abord $||\sigma_n(f)||_\infty = ||f * K_n||\infty \leq ||f||_\infty.||K_n||_1 \leq ||f||_\infty$, puis

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n(f)(x)| &= |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x-t)]K_n(t)dt| \leq \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{|t|<\delta}|\ldots|dt + \int_{\delta<|t|<\pi}|\ldots|dt \\ &\leq \omega(\delta)||K_n||_1 + \frac{2||f||_\infty}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} K_n(t)dt \leq \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{nsin^2(\delta/2)} \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{lim}||\sigma_n - f||_\infty \leq \omega(\delta) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ (uniforme continuité de f), ce qui conclut.

$f \in L^p$

Jensen (pourquoi avais-je marqué Hàlder ? Je ne me rappelle plus de ce qu'écrivent Zuily et Quéffelec), pour la proba K_n (f est K_n-intégrable puisque K_n est bornée), donne

$$|\sigma_n(f)(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p K_n(t)dt$$

On intègre en x, et par Fubini

$$\begin{aligned} ||\sigma_n(f)||_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p dxdt \\ &= ||K_n||_1||f||_p^p = ||f||_p^p \end{aligned}$$

Le même calcul donne

$$||f-\sigma_n(f)||_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|^p dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)||f-\tau_{-t}f||_p^p dt = (||f-\tau_x f||_p^p * K_n)(0)$$

Ce qui, d'après le paragrape précédent, converge vers $||f - \tau_x f||_p^p(0) = 0$.

Remarques :

Comme chaque fois avec Fourrier, se méfier des conventions prises (ci-dessus on travaille sur le tore) et des π qui traîne à droite à gauche (ou non) en conséquence.

45 Polya

Promenades aléatoires, Bénaim, El Karoui.

Leçons potentiellement concernées :
– 145 : méthode combinatoire, problèmes de dénombrement (bof. . .)
– 236 : illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonction d'une ou plusieurs variables réelles. (mouais. . .)
– 242 : utilisation en probabilités de la transformée de Fourrier ou de Laplace et du produit de convolution.
– 249 : suites de variables de Bernoulli indépendantes.
– 251 : indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Théorème. *En dimension 1 et 2 la marche aléatoire est récurrente, en dimension supérieure transiente.*

$X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$ où les θ_i sont iid uniformes sur $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$.

Rappel. *x est récurrent ssi $\sum \mathbb{P}^k(x, x) = \infty$*

d=1

en comptant les chemins possibles, $\mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$, par Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$) on obtient $\mathbb{P}(X_{2k} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ donc la somme diverge.

d=2

Notons $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2)$, alors $U_k = \theta_k^1 + \theta_k^2$ et $V_k = \theta_k^1 - \theta_k^2$ sont indépendantes de même loi de Rademacher (démo : distinction de cas, faire un tableau, par exemple $e_1 \to U_k = 1 = V_k$). Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \mathbb{P}(X_{2k}^1 = 0 = X_{2k}^2) = \mathbb{P}(X_{2k}^1 + X_{2k}^2 = 0, X_{2k}^1 - X_{2k}^2 = 0)\\ &= \mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_{2k} = 0)\mathbb{P}(V_1 + \cdots + V_{2k} = 0) \sim \frac{1}{\pi k}\end{aligned}$$

Ce qui donne là encore la divergence de la série.

Cas général

Commençons par remarquer que la parité de la sommes des coordonnées de X_n change à chaque étape, donc $X_n = 0$ n'est possible que pour n pair.

Considérons la fonction caractéristique des θ_i : $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{i<t,\theta_i>}) = \frac{1}{d}(\cos(t_1) + \cdots + \cos(t_d))$

Lemme 26.

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{dt}{1 - \phi^2(t)}$$

Posons $I_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i<x,t>}dt$, Fubini donne $I_d(x) = \prod_1^d I_1(x_j) = \delta_{x=(0,\dots,0)}$. Soit $\phi_n(t) = \mathbb{E}(e^{i<t,X_n>}$, d'après Fubini ;

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \phi_n(t)dt = \mathbb{E}(I_d(X_n)) = \mathbb{P}(X_n = (0, \dots, 0)$$

Les θ_i étant indépendants, $\phi_n(t) = \prod_1^n \phi_{\theta_j}(t) = \phi(t)^n$, ainsi (en utilisant encore Fubini, pour des fonctions positives),

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\geq 0}\int_{[-\pi,\pi]^d} \phi^{2k}(t)dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{dt}{1 - \phi^2(t)}$$

Lemme 27. *$\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{dt}{1-\phi^2(t)}$ est fini pour $d \geq 3$.*

Sur $[-\pi,\pi]^d$, $1-\phi^2(t)$ s'annule en $(0,\ldots,0)$ et $\pm(\pi,\ldots,\pi)$, il suffit de voir qu'en ces points l'intégrande est équivalente à une fonction intégrable. Elle est en ces points respectivement équivalente à $\frac{d}{||t||^2}$, $\frac{d}{||t-\pi||^2}$ et $\frac{d}{||t+\pi||^2}$. On peut alors par les coordonnées sphèriques $t = r\alpha$, $r \geq 0$ et $\alpha \in S^{d-1}$, on a alors une constante C_d

$$\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{||t||^2} = \int_0^\varepsilon \int S^{d-1} \frac{1}{r^2} C_d r^{d-1} dr d\alpha = C_d \int_0^\varepsilon r^{d-3} dr$$

Ce qui est fini pour $d \geq 3$. Toutefois il est plus simple de montrer que $\frac{1}{||t||_\infty^2}$ est intégrable en 0 (la norme étant équivalente, cela conclue). En découpant la boule pour $||.||_\infty$ selon quelle coordonnée est le maximum (les cas d'égalités sont de mesure nulle), on revient à intégrer $\frac{1}{x^2}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques

En fait, mieux vaut ne faire que le cas général (sauf pour du dénombrement...), et ne poser la définition de I_d qu'après le début du calcul de l'intégrale de phi_n au lieu de la catapulter.

46 Inversion de Fourrier

Analyse pour l'agrégation, Zuily-Queffélec

Leçons potentiellement concernées :
- 236 : illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
- 239 : fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et Applications.
- 240 : transformationn de Fourrier, produit de convolution. Exemples et applications.
- 247 : exemples de problèmes d'interversion de limites.
- 254 : espace de Schwartz et distributions tempérées.
- 256 : transformation de Fourrier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 28. *Pour $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ où $\lambda > 0$, on a $\hat{f}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{t^2}{4\lambda}}$*

Commençons avec $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-itx-x^2} dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+\frac{it}{2})^2 - \frac{t^2}{4}} dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{\mathbb{R}+\frac{it}{2}} e^{-z^2} dz \\
&= e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat et dont on se convainc en intégrant sur un rectangle $[-R,R] \cap [R, R+\frac{it}{2}] \cap [R+\frac{it}{2}, -R++\frac{it}{2}] \cap [-R+\frac{it}{2}, -R]$, R tendant vers l'infini. Notons qu'on peut démontrer la même chose en étudiant l'équation différentielle vérifiée par $\hat{f}$. Enfin, si $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-itx-\lambda x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}u-u^2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \widehat{e^{-x^2}}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)
\end{aligned}$$

Théorème. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt$.*

On ne peut pas directement inverser l'ordre d'intégration, il faut donc réécrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)dt$$

Ce qui est vrai par convergence dominée ($|e^{itx-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)| \leq |\hat{f}(t)| \in L^1$) et maintenant

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|e^{it(x-y)-\varepsilon t^2}f(y)|dy\Big)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}||f||_1 dt < +\infty$$

Donc, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-it(y-x)-\varepsilon t^2}dt\Big)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon}}dy \ \text{ (d'après le lemme)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}u)e^{-u^2}du \\
&\to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-u^2}du = f(x) \ \text{ (convergence dominée)}
\end{aligned}$$

Remarques :

En fait, dans le premier lemme, mieux vaut directement faire le calcul avec λ. Dans la leçon 236 (calcul d'intégral), on peut même rajouter au début l'intégrale de la gaussienne (par exemple avec le changement en coordonnées polaires).

47 Développement dyadique et suites i.i.d.

Probabilités 2, Ouvrard

Leçons potentiellement concernées :
- 249 : suites de variables de Bernoulli indépendantes.
- 251 : indépendance d'événements et de variables aléatoires.

Théorème. *Il existe des suites i.i.d. pour toute loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.*

La construction de la mesure de Lebesgue λ donne une réalisation de loi uniforme sur $[0,1]$. à partir de celle-ci on construit une infinité de suites indépendantes de Bernoulli indépendantes, on en déduit la même chose pour la loi uniforme et enfin pour toute loi. On fini par montrer l'existence de mesures ne chargeant aucun point mais étrangères à λ.

Des suites i.i.d. de Bernoulli et d'uniformes

Soit $X \sim U[0,1]$, soit D_n le $n^{\text{ème}}$ terme du développement dyadique de X (bien défini si $X(\omega)$ n'est pas un rationel dyadique c'est-à-dire un $\frac{p}{2^q}$, qui sont de mesure de Lebesgue nulle). Considérons un n-uplet $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et notons

$$I_\varepsilon^n = \Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{2^j}, \sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}\Big]$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{n}(D_j = \varepsilon_j)\Big) = \lambda(I_\varepsilon^n) = \frac{1}{2^n}$$

Et donc

$$\mathbb{P}(D_j = 1) = \sum_{\varepsilon/\varepsilon_j=1}\lambda(I_\varepsilon^n) = \frac{1}{2}$$

Et ainsi

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{j=1}^{n}(D_j=\varepsilon_j)\big)=\prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(D_j=\varepsilon_j)$$

n étant arbitraire, on a bien $(D_n)_{\mathbb{N}} \sim^{\perp} \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Soit $\phi : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijective, posons $Y_j=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k}D_{\phi_j(k)}$ La loi de Y_j est égale à la loi uniforme sur le π-système des intervalles dyadiques (qui engendre la tribue des boreliens) et Y_j est mesurable par rapport à la tribue engendrée par les $D_{\phi_j(k)}$ qui sont indépendants des $D_{\phi_i(k)}$ pour $i\neq j$, donc les (Y_j) sont indépendants.

Des suites indépendantes de lois quelconques

Soit μ une loi, F sa fonction de répartition, considérons son inverse généralisée G définie par $G(x)=\inf\{y/F(y)\leq x\}$. On a alors

$$y\leq G(x)\Leftrightarrow F(y)\leq x$$

En effet, le sens direct découle de la définition de G et de la croissance de F, la réciproque de croissance et de la continuité à droite de F (et donc $F(G(x))=x$). Ainsi, si $X\simeq U[0,1]$,

$$\mathbb{P}(G(X)\leq y)=\mathbb{P}(X\leq F(y))=F(y)$$

Donc $G(X)$ a pour fonction de répartition F, autrement dit suit la loi μ.

De singulières mesures

Soit $(Y_n)_{\mathbb{N}}\sim^{\perp}\mathcal{B}(p)$ et $X=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2^n}Y_n$, alors

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}_X(\{\omega\}) & = & \mathbb{P}_X(\forall n, D_n=\omega_n)\\ & \leq & \mathbb{P}_X(D_1=\omega_1\dots D_n=\omega_n)\\ & \leq & \max(p,1-p)^n\to 0\end{array}$$

D'autre part, d'après la loi des grands nombres, l'évènement $\frac{1}{n}(D_1+\cdots+D_n)\to p$ est de probabilité 1 si les $D_i\sim\mathcal{B}(p)$ et de probabilité 0 si les $D_i\sim\mathcal{B}(r)$ avec $r\neq p$.

Soit F la fonction de répartition de X, soit $0\leq x<\frac{1}{2^n}$, on a

$$\begin{array}{rcl}F(\frac{1}{2^n}+x) & = & \mathbb{P}_X(\omega\leq\frac{1}{2^n}+x)\\ & = & \mathbb{P}_X\big(\forall i\in[|1,n-1|], D_j(\omega)=0 \text{ et } x\geq\sum_{k\geq n}\frac{1}{2^k}D_k(\omega)\big)\\ & = & \frac{1}{2^{n-1}}\mathbb{P}_X\big(2^{n-1}x\geq\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k}D_k(\omega)\big)\\ & = & \frac{1}{2^{n-1}}F(2^{n-1}x)\end{array}$$

Autrement dit, F est fractale.

Remarques :

Développement créé de toutes pièces qui s'avère bien calibré. Je ne l'ai pas encore relu en détail. Notons qu'une fois des variables aléatoires sur $\mathbb{R}$ définies, on peut faire de même sur $\mathbb{R}^n$ (même si la loi n'est pas une loi produit : on conditionne) et même sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

48 Test du chi-2

Cours de statistique mathématique, Monfort (mais sàrement dans plein d'autres choses)

Leçons potentiellement concernées :
- 250 : loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.
- 251 : indépendance d'évènements et de variables aléatoires. Exemples.

– 252 : loi binomiale, loi de Poisson (éventuellement…)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ réalisations indépendantes d'une loi $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ sur $\{1, \ldots, m\}$, on veut savoir si $\Pi = P = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Posons $N_i(n) = |\{1 \leq k \leq n, X_k = i\}|$ et $N(n) = (N_i(n))$, alors $N(n)$ suit une loi multinomiale de paramètre $(n, \pi_1, \ldots, \pi_m)$: si $\sum n_i = n$,

$$\mathbb{P}(N_1(n) = n_1, \ldots, N_m(n) = n_m) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} \pi_1^{n_1} \ldots \pi_m^{n_m}$$

Posons $D_n = \sum_{i=1}^m \frac{(N_i(n) - n\pi_i)^2}{n\pi_i}$, on va montrer le

Théorème. *(de Karl-Pearson)* $D_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(m-1)$

$D_n = f(\frac{N(n) - n\Pi}{\sqrt{n}})$ où $f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{\pi}$ est continue, la loi limite de D_n est l'image par f de celle de $\frac{N(n)-n\Pi}{\sqrt{n}}$

$N(n) = \sum_1^n Y(k)$ où $Y(k) = (1_i(X_k))_i$ sont i.i.d (comme les X_i), d'espérance Π, reste à voir leur variance :

$$\begin{aligned} cov(Y_i(k), Y_j(k)) &= \mathbb{E}(1_i(X_k) - \pi_i)(1_j(X_k) - \pi_j) \\ &= \mathbb{E}(1_i(X_k)1_j(X_k)) - \pi_i\pi_j \\ &= \delta_{ij}\pi_i - \pi_i\pi_j \end{aligned}$$

ainsi $var(Y(k)) = \Delta_\Pi - \Pi\Pi^t$ (où $\Delta_\Pi = diag(\Pi)$) et $\frac{N(n)-n\Pi}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, var(Y))$.

Soit $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ suivant la loi $N(0, cov(Y))$,

$$f(Z) = \sum_{i=1}^m \frac{Z_i^2}{\pi_i} = \sum_{i=1}^m U_i^2 = ||U||^2$$

Le vecteur U suit la loi $N(0, I - \sqrt{\Pi}\sqrt{\Pi}^t)$ (où $\sqrt{\Pi} = (\sqrt{\pi_i})$), et $\forall A \in \mathcal{O}(m)$, $||AU||^2 = ||U||^2 = f(Z)$. La loi de AU est $N(0, I - (A\sqrt{\Pi})(A\sqrt{\Pi})^t)$, en prenant A tel que $A\sqrt{\Pi} = (0, \ldots, 0, 1)$ (possibles puisque $||\sqrt{\Pi}|| = 1$), cette loi est $N(0, diag(1, \ldots, 1, 0)$ et $f(Z) = ||AU||^2$ suit une loi $\chi^2(m-1)$.

Le test en lui-même

D'autre part, si $\Pi \neq P$, la loi forte des grands nombre indique $\frac{1}{n}N(n) \xrightarrow{p.s.} \Pi$ et ainsi

$$D_n(P) = n \sum_{i=1}^m \left[\frac{N_i(n)}{n} - p_i\right]^2 \xrightarrow{p.s.} +\infty$$

Prenons comme hypothèses $H_0 : \Pi = P$, et $H_1 : \Pi \neq P$, soit $R_n = \{D_n(P) > c\}$. D'après le théorème de Pearson, si on prend c le quantile $1 - \alpha$ de la loi $\chi^2(m-1)$, sous H_0 on a $\mathbb{P}(R_n) \to \alpha$.

De plus la puissance converge vers 1, puisque sous H_1, $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(+\infty > \chi^2(m-1)) = 1$.

Remarques :

Ce test, qui se généralise pour une famille de loi indexée par un paramètre (on remplace p dans $\pi(p)$ par un estimateur), permet également de tester l'indépendance de variables (en vérifiant que la loi est une loi produit). Pour des probabilités continues, on se ramène à une probabilité discrète en partitionnant l'espace en un nombre fini de classes. Avec le recul, on peut améliorer les notations prises dans cette rédaction. On n'a pas vraiment le temps de présenter le test après le théorème.