La tortue et Achille

Laurent Claessens

1er octobre 2016

1 La flèche d'Achille

C'est un grand classique que je donne ici juste comme introduction pour montrer que des série infinies peuvent donner des nombres finis de manière tout à fait intuitive.

Achille tire une flèche vers un arbre situé à $10m$ de lui. Disons que la flèche avance à une vitesse constante de $1m/s$ [1]. C'est tout à fait claire que la flèche mettra $10s$ pour toucher l'arbre.

Les générations futures seront peut-être choquées que l'on prenne de pareils exemples où l'on abime des arbres pour les besoins de la science. Ne peut-on pas simplement considérer une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, et remarquer que $f(t) = 10$ si et seulement si $t = 10$? C'est quand même plus moral ! Attendons la suite : plus tard, on va voir qu'Achille va même piétiner une tortue innocente pour le besoin de montrer une formule mathématique inutile et que l'on a l'audace de qualifier d' « amusante » ! Quoi ? ! ? On peut s'amuser en faisant souffrir des animaux ? C'est bien ça la science et ça l'a toujours été : que de la cruauté et aucune utilité pour le bien être des gens ! L'humanité ne sera heureuse que quand le dernier scientifique sera mort dans l'explosion de sa dernière bombe atomique ou en avalant son dernier OGM [2] !

Revenons à notre flèche [3]. En $5s$, elle aura parcouru la moitié de son chemin. On le note :

$$\text{temps} = 5s +$$

Reste $5m$ à faire. En $2.5s$, elle aura fait la moitié de ce chemin chemin, soit $2.5m = \frac{10}{4}m$. On le note :

$$m^2 dkfl$$

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s +$$

Reste $2.5m$ à faire. La moitié de ce trajet, soit $\frac{10}{8}m$, est parcouru en $\frac{10}{8}s$; on le note encore, mais c'est la dernière fois !

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s + \frac{10}{8}s +$$

En continuant ainsi à regarder la flèche qui parcourt des demi-trajets puis des demi de demi-trajets et encore des demi de demi de demi-trajets, et en sachant que le temps total est $10s$, on trouve :

1. Ces chiffres ne sont pas crédibles ? Peu d'importance : on est là pour faire des maths, et pour dire que les maths sont tout à fait inutiles en physique, quoi que amusantes.
2. Ah ces OGM ; encore un de ces méfaits majeurs de la science moderne qui n'a et n'aura jamais aucune application bénéfique !
3. Bel exemple : une arme destinée à tuer.

$$10\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\right)=10.$$

On doit donc croire que la somme jusqu'à l'infini des inverse des puissances de deux vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

Ça peut être démontré à la loyale sans faire de mal à la nature [4].

2 La tortue et Achille

Maintenant qu'on est convaincu que des sommes infinies peuvent représenter des nombres tout à fait normaux, passons à un truc plus marrant.

Achille, qui marche peinard à $10m/heure$, part avec $1m$ d'avance sur une tortue qui avance à $1m/heure$. Le temps que la tortue arrive au point de départ d'Achille, Achille aura parcouru $10m$, et le temps que la tortue mettra pour arriver à ce point, eh bien pas de bol pour elle, Achille sera déjà plus là : il sera à $100m$. Si la tortue tient bon pendant un temps infini, et si l'on est confiant en le genre de raisonnements faits à la section 1, elle rattrapera Achille dans

$$1m+10m+100m+1000m+\dots$$

Autant dire que ça ne risque pas d'arriver. Et pourtant, mettons en équations : $x_{Achille}(t)=1+10t$, $x_{tortue}(t)=t$. Égalisons : $1+10t=t$, c'est vrai pour $t=-1/9$. Physiquement, c'est une situation logique. Peut-on en déduire une égalité mathématique du style de

$$1+10+100+1000+\dots=-\frac{1}{9}\ ???$$

Là où les choses deviennent jolies, c'est quand on cherche à voir ce que peut bien être la valeur d'un hypothétique $x=1+10+100+1000+\dots$. En effet, logiquement on devrait avoir

$$\begin{aligned}\frac{x}{10}&=\frac{1}{10}+1+10+100+\dots\\&=\frac{1}{10}+x.\end{aligned}$$

Reste à résoudre l'équation du premier degré : $\frac{x}{10}=x+\frac{1}{10}$. Ais-je besoin de donner la solution ?

Si quelqu'un sait comment on fait pour définir *pour de vrai* dans le sens mathématique le plus pur la série $\sum_{k=0}^{\infty}10^k$, je suis bien intéressé.

Je sais déjà comment on fait pour obtenir $1+2+3+4+\dots=-1/12$ (mais là, c'est pas pour les enfants).

4. Et quoi ? Le papier gaspillé à faire ces calculs inutiles, il ne vient pas d'arbres ? Comme quoi, les scientifiques ne pensent jamais aux conséquences de leurs actes ; pas étonnant qu'ils aient provoqués tant de catastrophes et de guerres !