

La tortue et Achille

Laurent Claessens

25 mars 2016

1 La flèche d'Achille

C'est un grand classique que je donne ici juste comme introduction pour montrer que des séries infinies peuvent donner des nombres finis de manière tout à fait intuitive.

Achille tire une flèche vers un arbre situé à $10m$ de lui. Disons que la flèche avance à une vitesse constante de $1m/s$ ¹. C'est tout à fait claire que la flèche mettra $10s$ pour toucher l'arbre.

Les générations futures seront peut-être choquées que l'on prenne de pareils exemples où l'on abime des arbres pour les besoins de la science. Ne peut-on pas simplement considérer une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, et remarquer que $f(t) = 10$ si et seulement si $t = 10$? C'est quand même plus moral! Attendons la suite : plus tard, on va voir qu'Achille va même piétiner une tortue innocente pour le besoin de montrer une formule mathématique inutile et que l'on a l'audace de qualifier d' « amusante »! Quoi?!? On peut s'amuser en faisant souffrir des animaux? C'est bien ça la science et ça l'a toujours été : que de la cruauté et aucune utilité pour le bien être des gens! L'humanité ne sera heureuse que quand le dernier scientifique sera mort dans l'explosion de sa dernière bombe atomique ou en avançant son dernier OGM²!

Revenons à notre flèche³. En $5s$, elle aura parcouru la moitié de son chemin. On le note :

$$\text{temps} = 5s +$$

Reste $5m$ à faire. En $2.5s$, elle aura fait la moitié de ce chemin, soit $2.5m = \frac{10}{4}m$. On le note :

$$m^2dkfl$$

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s +$$

Reste $2.5m$ à faire. La moitié de ce trajet, soit $\frac{10}{8}m$, est parcouru en $\frac{10}{8}s$; on le note encore, mais c'est la dernière fois!

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s + \frac{10}{8}s +$$

En continuant ainsi à regarder la flèche qui parcourt des demi-trajets puis des demi de demi-trajets et encore des demi de demi de demi-trajets, et en sachant que le temps total est $10s$, on trouve :

1. Ces chiffres ne sont pas crédibles? Peu d'importance : on est là pour faire des maths, et pour dire que les maths sont tout à fait inutiles en physique, quoi que amusantes.

2. Ah ces OGM; encore un de ces méfaits majeurs de la science moderne qui n'a et n'aura jamais aucune application bénéfique!

3. Bel exemple : une arme destinée à tuer.

$$10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) = 10.$$

On doit donc croire que la somme jusqu'à l'infini des inverse des puissances de deux vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Ça peut être démontré à la loyale sans faire de mal à la nature⁴.

2 La tortue et Achille

Maintenant qu'on est convaincu que des sommes infinies peuvent représenter des nombres tout à fait normaux, passons à un truc plus marrant.

Achille, qui marche peïnard à $10m/heure$, part avec $1m$ d'avance sur une tortue qui avance à $1m/heure$. Le temps que la tortue arrive au point de départ d'Achille, Achille aura parcouru $10m$, et le temps que la tortue mettra pour arriver à ce point, eh bien pas de bol pour elle, Achille sera déjà plus là : il sera à $100m$. Si la tortue tient bon pendant un temps infini, et si l'on est confiant en le genre de raisonnements faits à la section 1, elle rattrapera Achille dans

$$1m + 10m + 100m + 1000m + \dots$$

Autant dire que ça ne risque pas d'arriver. Et pourtant, mettons en équations : $x_{Achille}(t) = 1 + 10t$, $x_{tortue}(t) = t$. Égalisons : $1 + 10t = t$, c'est vrai pour $t = -1/9$. Physiquement, c'est une situation logique. Peut-on en déduire une égalité mathématique du style de

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \dots = -\frac{1}{9} ???$$

Là où les choses deviennent jolies, c'est quand on cherche à voir ce que peut bien être la valeur d'un hypothétique $x = 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$. En effet, logiquement on devrait avoir

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} &= \frac{1}{10} + 1 + 10 + 100 + \dots \\ &= \frac{1}{10} + x. \end{aligned}$$

Reste à résoudre l'équation du premier degré : $\frac{x}{10} = x + \frac{1}{10}$. Ais-je besoin de donner la solution ?

Si quelqu'un sait comment on fait pour définir *pour de vrai* dans le sens mathématique le plus pur la série $\sum_{k=0}^{\infty} 10^k$, je suis bien intéressé.

Je sais déjà comment on fait pour obtenir $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ (mais là, c'est pas pour les enfants).

4. Et quoi ? Le papier gaspillé à faire ces calculs inutiles, il ne vient pas d'arbres ? Comme quoi, les scientifiques ne pensent jamais aux conséquences de leurs actes ; pas étonnant qu'ils aient provoqués tant de catastrophes et de guerres !