Le Frido 2019,
volume 2
Laurent Claessens

Plusieurs extensions et versions de ce livre.

1. La version courante, régulièrement mise à jour et qui deviendra petit à petit le Frido 2020. Téléchargeable sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf`

2. La version la plus complète, contenant des exercices ainsi que de la mathématique de niveau recherche sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/giulietta.pdf`

3. Et bien entendu les sources LaTeX

   `https://github.com/LaurentClaessens/mazhe`

Copyright 2011-2019 Laurent Claessens, Carlotta Donadello, Lilian Besson, Bertrand Desmons, and many other contributors. A complete list could be retrieved from the git log.
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled "GNU Free Documentation License".

(c) 2015 David Revoy pour les illustrations de couverture CC-BY,
`https://www.peppercarrot.com/`

ISBN : 979-10-97085-19-3

Chapitre 13

Analyse réelle

13.1 Intervalles

Définition 13.1 (Intervalle)**.**
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un ***intervalle*** *si pour tout $a, b \in I$ nous avons $t \in I$ dès que $a \leqslant t \leqslant b$.*

Un intervalle est ***ouvert*** *s'il est de la forme $]a, b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Un intervalle est* ***fermé*** *s'il est de la forme $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.*

Remarque 13.2.
L'ensemble $\mathbb{R}$ ne contient pas $-\infty$ et $-\infty$. L'intervalle $[-\infty, 5]$ par exemple, n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

Exemple 13.3

(1) Les ensembles $]3, 7[$ et $]-\infty, \pi[$ sont des intervalles ouverts.

(2) Les ensembles $[10, 15]$ et $[-1, +\infty[$ sont des intervalles fermés.

(3) L'ensemble $]-4, -2[\cup]2, 9[$ n'est pas un intervalle (il y a un « trou » entre -2 et 2).

(4) L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle ; par convention, il est à la fois ouvert et fermé.

Un intervalle peut n'être ni ouvert ni fermé ; par exemple $]4, 8]$. Cet intervalle est « ouvert en 4 et fermé en 8 » . △

Définition 13.4 (Fonction, domaine, image, graphe)**.**
Soient X et Y deux ensembles. Une ***fonction*** *f définie sur X et à valeurs dans Y est une correspondance qui associe à chaque élément x dans X* **au plus** *un élément y dans Y. On écrit $y = f(x)$.*

— *La partie de X qui contient tous les x sur lesquels f peut opérer est dite* ***domaine*** *de f. Le domaine de f est indiqué par* Domaine f.

— *L'élément de $y \in Y$ associé par f à un élément $x \in$ Domaine f (c'est-à-dire $f(x) = y$) est appellé* ***image*** *de x par f. L'****image*** *de la fonction f est la partie de Y qui contient les images de tous les éléments de* Domaine f. *L'image de f est indiquée par $\Im f$.*

— *Le* ***graphe*** *de f est l'ensemble de toutes les couples $(x, f(x))$ pour $x \in$ Domaine f. Le graphe de f est une partie de l'ensemble noté $X \times Y$ et il est indiqué par* Graph f. *Dans ce cours $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, donc le graphe de f est contenu dans le plan cartésien.*

Définition 13.5 (Fonction croissante, décroissante et monotone)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

(1) Le fonction f est ***croissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \leqslant f(y)$. Elle est* strictement *croissante si $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$.*

(2) *Le fonction f est* ***décroissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \geqslant f(y)$. Elle est* strictement *décroissante si $f(x) > f(y)$ dès que $x < y$.*

(3) *La fonction f est dite* ***monotone*** *sur I si elle est soit croissante soit décroissante sur I.*

Exemple 13.6
La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. Elle n'est par contre ni croissante ni décroissante sur l'intervalle $[-4, 3]$. △

13.2 Application réciproque

13.2.1 Définitions

Les définitions d'injection, surjection, bijection et d'application réciproque sont les définitions 7.75 et 7.76.

Exemple 13.7

(1) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ parce qu'il n'existe aucun x tel que $x^2 = -1$.

(2) La fonction
$$\begin{aligned} f\colon [0, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{13.1}$$
est une bijection. Notez que c'est la même fonction que celle de l'exemple précédent. Seul l'intervalle sur laquelle nous nous plaçons a changé.

(3) La fonction
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [0, \infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{13.2}$$
n'est pas une bijections parce qu'il existe plusieurs x pour lesquels $f(x) = 4$.

(4) Nous verrons un peu plus tard (13.310) que l'application
$$\begin{aligned} f\colon [0, \infty[&\to [0, \infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{13.3}$$
est une bijection.

En conclusion : il est très important de préciser les domaines des fonctions considérées. △

Remarque 13.8.
Dire que la fonction $f\colon I \to J$ est bijective, c'est dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x peut être résolue de façon univoque pour tout $y \in J$.

Remarque 13.9.
Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective.

Exemple 13.10
Trouvons la fonction réciproque de la fonction affine $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. Si $y \in \mathbb{R}$ le nombre $f^{-1}(y)$ est la valeur de x pour laquelle $f(x) = y$. Il s'agit donc de résoudre
$$3x - 2 = y \tag{13.4}$$
par rapport à x. La solution est $x = \frac{y+2}{3}$ et donc nous écrivons
$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}. \tag{13.5}$$

Notons que dans les calculs, il est plus simple d'écrire « y » que « x » la variable de la fonction réciproque. Il est néanmoins (très) recommandé de nommer « x » la variable dans la réponse finale. Dans notre cas nous concluons donc

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}. \tag{13.6}$$

△

13.2.2 Graphe de la fonction réciproque

Par définition le graphe de la fonction f est l'ensemble des points de la forme (x, y) vérifiant $y = f(x)$. Afin de déterminer le graphe de la bijection réciproque nous pouvons faire le raisonnement suivant.

Le point (x_0, y_0) est sur le graphe de f

⇔

La relation $f(x_0) = y_0$ est vérifiée

⇔

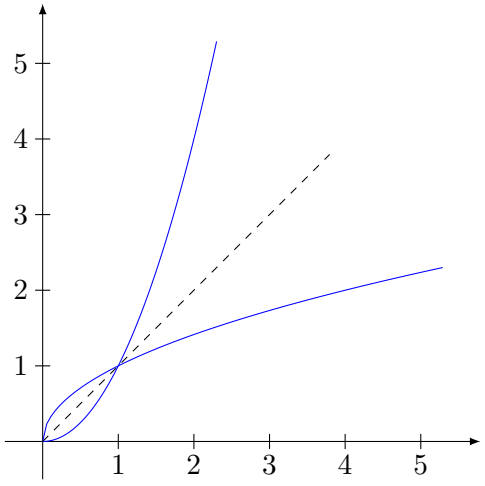
La relation $x_0 = f^{-1}(y_0)$ est vérifiée

⇔

Le point (y_0, x_0) est sur le graphe de f^{-1}.

À retenir 13.11
Dans un repère orthonormal, le graphe de la bijection réciproque est obtenu à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le dessin suivant montre le cas de la courbe de la fonction carré comparé à celle de la racine carrée.



13.3 Limite de fonctions

13.3.1 Définition

La définition générale de la limite est 7.62. Dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle peut s'écrire de façon plus efficace. La proposition suivante montre comment fonctionne la limite pour une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.

Proposition 13.12 (Caractérisation de la limite)**.**
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet la limite ℓ pour $x \to a$ si et seulement si il existe un réel ℓ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{13.7}$$

Démonstration. Il s'agit de montrer l'équivalence avec la définition 7.62. Nous allons faire un usage intensif de la remarque 7.89(3).

Sens direct Soient $\epsilon > 0$ et $V = B(\ell, \epsilon)$. Alors il existe un voisinage W de a dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f\big(W\backslash\{a\}\big) \subset V. \tag{13.8}$$

Soit δ tel que $B(a, \delta) \subset W$. Nous avons encore

$$f\big(B(a, \delta)\backslash\{a\}\big) \subset V. \tag{13.9}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Cela signifie $x \in B(a, \delta)\backslash\{a\}$. Pour un tel x nous avons donc $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Dans l'autre sens Soient un voisinage V de ℓ et $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset V$. Nous considérons δ tel que $0 < |x - a| < \delta$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

Avec tout cela nous posons $W = B(x, \delta)$, et nous avons

$$f\big(W\backslash\{a\}\big) \subset B(\ell, \alpha) \subset V. \tag{13.10}$$

□

Si aucun nombre ℓ ne vérifie la condition de la définition, alors on dit que la fonction n'admet pas de limite en a. Lorsque f possède la limite ℓ en a, nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell. \tag{13.11}$$

La proposition suivante a déjà été démontrée dans la proposition 7.65. Nous en donnons ici une démonstration adaptée au cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 13.13.
Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Si a est un point d'accumulation de D et s'il existe une limite de f en a, alors il en existe une seule.

Démonstration. Nous prouvons qu'il ne peut pas exister deux nombres $\ell \neq \ell'$ vérifiant tout les deux la condition (13.7).

Soient ℓ et ℓ' deux limites de f au point a. Par définition, pour tout ε nous avons des nombres δ et δ' tels que

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon \\ |x - a| < \delta' &\Rightarrow \big|f(x) - \ell'\big| < \varepsilon \end{aligned} \tag{13.12}$$

Pour fixer les idées, supposons que $\delta < \delta'$ (le cas $\delta \geqslant \delta'$ se traite de la même manière).

Étant donné que a est un point d'accumulation du domaine D de f, il existe un $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta$. Évidemment, nous avons aussi $|x - a| < \delta'$. Les conditions (13.12) signifient alors que ce x vérifie en même temps

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon, \tag{13.13}$$

et

$$|f(x) - \ell'| < \varepsilon. \tag{13.14}$$

Afin de prouver que $\ell = \ell'$, nous allons maintenant calculer $|\ell - \ell'|$ et montrer que cette distance est plus petite que tout nombre. Nous avons (voir remarque 13.14)

$$|\ell - \ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| < \varepsilon + \varepsilon. \tag{13.15}$$

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$$|\ell - \ell'| < 2\varepsilon, \tag{13.16}$$

et donc $|\ell - \ell'| = 0$, ce qui signifie que $\ell = \ell'$. □

Remarque 13.14.
Les inégalités (13.15) utilisent deux techniques très classiques en analyse qu'il convient d'avoir bien compris. La première est de faire

$$|A - B| = |A - C + C - B|. \tag{13.17}$$

Il s'agit d'ajouter $-C + C$ dans la norme. Évidemment, cela ne change rien.

La seconde technique est l'inégalité

$$|A + B| \leqslant |A| + |B|. \tag{13.18}$$

Exemple 13.15
Considérons la fonction $f(x) = 2x$, et calculons la limite $\lim_{x\to 3} f(x)$. Vu que $f(3) = 6$, nous nous attendons à avoir $\ell = 6$. C'est ce que nous allons prouver maintenant. Pour chaque $\varepsilon > 0$ nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $|x - 3| < \delta$ implique $|f(x) - 6| < \varepsilon$. En remplaçant $f(x)$ par sa valeur en fonction de x et avec quelques manipulations nous trouvons :

$$\begin{aligned} |f(x) - 6| &< \varepsilon \\ |2x - 6| &< \varepsilon \\ 2|x - 3| &< \varepsilon \\ |x - 3| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{13.19}$$

Donc dès que $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$, nous avons $|f(x) - 6| < \varepsilon$. Nous posons donc $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Plus généralement, nous avons $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$, et cela se prouve en étudiant $|f(x) - 2a|$ exactement de la même manière. △

13.3.2 Quelque règles de calcul

Proposition 13.16.
La limite est une opération linéaire, c'est-à-dire que si f et g sont des fonctions qui admettent des limites en a et si λ est un nombre réel,

(1) $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x)$,

(2) $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

En combinant les deux propriétés de la proposition 13.16, nous pouvons écrire

$$\lim_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x). \tag{13.20}$$

pour toutes fonctions f et g admettant une limite en a et pour tout réels λ et μ.

En plus d'être linéaire, la limite possède les deux propriétés suivantes.

Proposition 13.17.
Si f et g sont deux fonctions qui admettent une limite en a, alors

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x). \tag{13.21}$$

Si de plus $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, *alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}. \tag{13.22}$$

Théorème 13.18.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \tag{13.23}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda b \tag{13.24}$$

pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Afin de prouver la propriété (13.24), il faut trouver un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta, a+\delta]$, on ait $|(\lambda f)(x) - \lambda b| \leqslant \epsilon$. Cette dernière inégalité est équivalente à $|\lambda||f(x) - b| \leqslant \epsilon$. Nous devons donc trouver un δ tel que

$$|f(x) - b| \leqslant \frac{\epsilon}{|\lambda|}. \tag{13.25}$$

soit vraie pour tout x dans $[a-\delta, a+\delta]$. Mais l'hypothèse (13.23) dit précisément qu'il existe un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta, a+\delta]$ on ait cette inégalité. □

Théorème 13.19.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \tag{13.26a}$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = b_2, \tag{13.26b}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b_1 + b_2. \tag{13.27}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe δ_1 tel que

$$|f(x) - b_1| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \tag{13.28}$$

dès que $|x-a| \leqslant \delta_1$. Il existe aussi δ_2 tel que

$$|g(x) - b_2| \leqslant \frac{\epsilon}{2}. \tag{13.29}$$

dès que $|x-a| \leqslant \delta_2$. Tu notes l'astuce de prendre $\epsilon/2$ dans la définition de limite pour f et g. Maintenant, ce qu'on voudrait c'est un δ tel que l'on ait $|(f+g)(x)-(b_1+b_2)| \leqslant \epsilon$ dès que $|x-a| \leqslant \delta$. Moi je dit que $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ fonctionne. En effet, en utilisant l'inégalité $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, nous trouvons :

$$|(f+g)(x) - (b_1+b_2)| = |(f(x)-b_1) + (g(x)-b_2)| \leqslant |f(x)-b_1| + |g(x)-b_2|. \tag{13.30}$$

Comme on suppose que $|x-a| \leqslant \delta$, on a évidemment $|x-a| \leqslant \delta_1$, et donc l'équation (13.28) tient. Mais si $|x-a| \leqslant \delta$, on a aussi $|x-a| \leqslant \delta_2$, et donc l'équation (13.28) tient également. Chacun des deux termes de (13.30) est donc plus petits que $\epsilon/2$, et donc le tout est plus petit que ϵ, ce qu'il fallait montrer.

□

Voici une formule qui résume la linéarité de la limite :

$$\lim_{x\to a}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x). \tag{13.31}$$

Proposition 13.20 ([173])**.**
Soient des fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \neq 0$. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}. \tag{13.32}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell|}. \tag{13.33}$$

Soit s, un minorant de $|g(x)|$ sur un voisinage de a ; vu que la limite en a est $\ell' \neq 0$, nous pouvons prendre par exemple $s = \ell'/2 : |g(x)| > \ell'/2$ sur $B(a, \delta)$ dès que δ est assez petit. Nous considérons $x \in B(a, \delta)$. Avec cela nous avons :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell|} \tag{13.34a}$$

$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|}\left(\frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|\ell'|}\right) \tag{13.34b}$$

$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell' f(x) - \ell\ell'| + |\ell\ell' - g(x)\ell|\big) \tag{13.34c}$$

$$= \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell'||f(x) - \ell| + |\ell||\ell' - g(x)|\big). \tag{13.34d}$$

Soient $\epsilon > 0$ et δ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|g(x) - \ell'| < \epsilon$ pour tout $x \in B(a, \delta)$. Avec cela nous avons

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| \leqslant \frac{2}{|\ell'|^2\big(|\ell'| + |\ell|\big)}\epsilon. \tag{13.35}$$

D'où la limite attendue. □

Lemme 13.21.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, *alors il existe un* $\delta > 0$ *et un* $M > 0$ *tels que*

$$(|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Ce que signifie ce lemme, c'est que quand la fonction f admet une limite finie en un point, alors il est possible de majorer la fonction sur un intervalle autour du point.

Démonstration. Cela va être démontré par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de δ ni de M qui vérifient la condition. Dans ce cas, pour tout δ et pour tout M, il existe un x tel que $|x - a| \leqslant \delta$ et $|f(x)| > M$. Cela est valable pour tout M, donc prenons par exemple $b + 1000$. Donc

$$\forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } |x - a| \leqslant \delta \text{ et } |f(x)| > b + 1000. \tag{13.36}$$

Cela signifie qu'aucun δ ne peut convenir dans la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ce qui contredit les hypothèses. □

Dans le même ordre d'idée, on peut prouver que si la limite de la fonction en un point est positive, alors elle est positive autour ce ce point. Plus précisément, nous avons la

Proposition 13.22.
Si f *est une fonction telle que* $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, *alors il existe un voisinage de* a *sur lequel* f *est positive.*

Démonstration. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = y_0$. Par la définition de la limite fait que si pour tout x dans un voisinage autour de a, on ait $|f(x) - a| < \epsilon$. Cela est valable pour tout ϵ, pourvu que le voisinage soit assez petit. Si je choisis un voisinage pour lequel $|f(x) - a| < \frac{y_0}{2}$, alors sur ce voisinage, f est positive. □

Théorème 13.23.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = b_2, \tag{13.37}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = b_1 b_2. \tag{13.38}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, et tentons de trouver un δ tel que $|f(x)g(x) - b_1b_2| \leqslant \epsilon$ dès que $|x - a| \leqslant \delta$. Nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - b_1b_2| &= |f(x)g(x) - b_1b_2 + f(x)b_2 - f(x)b_2| \\ &= \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big) + b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &\leqslant \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big)\big| + \big|b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &= |f(x)||g(x) - b_2| + |b_2||f(x) - b_1|. \end{aligned} \tag{13.39}$$

À la première ligne se trouve la subtilité de la démonstration : on ajoute et on enlève [1] $f(x)b_2$. Maintenant nous savons par le lemme 13.21 que pour un certain δ_1, la quantité $|f(x)|$ peut être majoré par un certain M dès que $|x-a| \leqslant \delta_1$. Prenons donc un tel δ_1 et supposons que $|x-a| \leqslant \delta_1$. Nous savons aussi que pour n'importe quel choix de ϵ_2 et ϵ_3, il existe des nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x) - b_1| \leqslant \epsilon_2$ et $|g(x) - b_1| \leqslant \epsilon_3$ dès que $|x - a| \leqslant \delta_2$ et $|x - a| \leqslant \delta_3$. Dans ces conditions, la dernière expression (13.39) se réduit à

$$|f(x)g(x) - b_1b_2| \leqslant M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3. \tag{13.40}$$

Pour terminer la preuve, il suffit de choisir ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leqslant \epsilon$, et puis prendre $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Remettons les choses dans l'ordre. L'on se donne ϵ au départ. La première chose est de trouver un δ_1 qui permet de majorer $|f(x)|$ par M selon le lemme 13.21, et puis choisissons ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leqslant \epsilon$. Ensuite nous prenons, en vertu des hypothèses de limites pour f et g, les nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x) - b_1| \leqslant \epsilon_2$ et $|g(x) - b_2| \leqslant \epsilon_3$ dès que $|x - a| \leqslant \delta_2$ et $|x - a| \leqslant \delta_3$.

Si avec tout ça on prend $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, alors la majoration et les deux inégalités sont valables en même temps et au final

$$|f(x)g(x) - b_1b_2| \leqslant M\epsilon_2 + b_2\epsilon_3 \leqslant \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver.

□

À l'aide de ces petits résultats, nous pouvons déjà calculer pas mal de limites. Nous pouvons déjà par exemple calculer les limites de tous les polynômes en tous les nombres réels. En effet, nous savons la limite de la fonction $f(x) = x$. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est rien d'autre que le produit de f par elle-même. Donc

$$\lim_{x\to a} x^2 = \big(\lim_{x\to a} x\big) \cdot \big(\lim_{x\to a} x\big) = a^2.$$

De la même façon, nous trouvons facilement que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n. \tag{13.41}$$

13.3.3 Limite en l'infini

Non, sur $\mathbb{R}$ nous n'allons pas ajouter ∞ avec la topologie d'Alexandrov de la définition 7.61. Nous n'allons pas considérer $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Définition 13.24 (Droite réelle achevée[196])**.**
Nous considérons l'ensemble

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \tag{13.42}$$

où $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des éléments de $\mathbb{R}$.

Nous mettons sur $\bar{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre en prenant celle de $\mathbb{R}$ à laquelle nous ajoutons les règles

(1) $-\infty < x$ pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(2) $+\infty > x$ pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

1. Comme exercice, tu peux essayer de refaire la démonstration en ajoutant et enlevant $g(x)b_1$ à la place.

Nous mettons une topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ en donnant la base[2] *suivante :*

— $]a, b[$,

— $]a, +\infty]$,

— $[-\infty, b[$

pour tout réels a et b.

13.25.
En principe, la notation « ∞ » est réservée à l'infini du compactifié d'Alexandrov, et pour les infinis de la droite réelle achevée, il faudrait bien écrire « $+\infty$ » et « $-\infty$ ». Cependant, nous allons souvent écrire $\lim_{x\to\infty}$ au lieu de $\lim_{x\to+\infty}$.

Lemme 13.26.
La topologie sur $\mathbb{R}$ induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$ est la topologie usuelle.

Lemme 13.27.
Si $n \geqslant 1$ nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \tag{13.43}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{13.44}$$

Démonstration. Si V est un voisinage de $+\infty$, alors nous devons montrer qu'il existe un voisinage W de $+\infty$ tel que $x^n \in V$ pour tout $x \in W$.

Un ouvert est une union d'éléments de la base de topologie[3] ; en regardant la liste donnée dans la définition 7.55, nous voyons que V contient au moins une partie de la forme $]R, +\infty]$. Nous supposons que $R > 1$.

Si $x > R > 1$, alors nous avons $x^n > x$ et donc

$$x^n > x > R, \tag{13.45}$$

ce qui signifie $x \in V$.

En prenant $W =]R, +\infty]$, nous avons bien $W^n \subset V$. Cela prouve (13.43).

En ce qui concerne la seconde limite, la démonstration est du même type. Remarquez seulement que vous n'avez pas formellement le droit d'utiliser la proposition 13.20 en invoquant $\frac{1}{+\infty} = 0$. □

13.3.4 Limite en des nombres

Nous posons la définition suivante.

Définition 13.28.
*Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on dit que la fonction f **tend vers l'infini quand** x **tend vers** a si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \text{ tel que } (|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M \text{ quand } x \in \operatorname{dom} f.$$

Cela signifie que l'on demande que dès que x est assez proche de a (c'est-à-dire dès que $|x-a| \leqslant \delta$), alors $f(x)$ est plus grand que M, et que l'on peut trouver un δ qui fait ça pour n'importe quel M. Une autre façon de le dire est que pour toute hauteur M, on peut trouver un intervalle de largeur δ autour de a[4] tel que sur cet intervalle, la fonction f est toujours plus grande que M.

Montrons sur un dessin pourquoi je disais que la fonction $x \to 1/x$ n'est pas de ce type.

Le problème est qu'il n'existe par exemple aucun intervalle autour de 0 sur lequel f serait toujours plus grande que 10. En effet n'importe quel intervalle autour de 0 contient au moins un nombre négatif. Or quand x est négatif, f n'est certainement pas plus grande que 10. Nous y reviendrons.

2. Base de topologie, définition 7.54.
3. C'est la proposition 7.55.
4. C'est-à-dire un intervalle de la forme $[a - \delta, a + \delta]$.

Pour l'instant, montrons que la fonction $f(x) = 1/x^2$ est une fonction qui vérifie la définition 13.28. Avant de prendre n'importe quel M, prenons par exemple 100. Nous avons besoin d'un intervalle autour de zéro sur lequel f est toujours plus grande que 100. C'est vite vu que $f(0.1) = f(-0.1) = 100$, donc l'intervalle $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ est le bon. Partout dans cet intervalle, f est plus grande que 100. Partout ? Ben non : en $x = 0$, la fonction n'est même pas définie, donc c'est un peu dur de dire qu'elle est plus grande que 100. C'est pour cela que nous avons ajouté la condition « quand $x \in \operatorname{dom} f$ » dans la définition de la limite.

Prenons maintenant un $M \in \mathbb{R}$ arbitraire, et trouvons un intervalle autour de 0 sur lequel f est toujours plus grande que M. La réponse est évidemment l'intervalle de largeur $1/\sqrt{M}$, c'est-à-dire

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right].$$

13.3.5 Limites quand tout va bien

D'abord définissons ce qu'on entend par la limite d'une fonction en un point quand il n'y a aucun infini en jeu.

Définition 13.29.
On dit que la fonction f ***tend vers*** *b* ***quand*** *x* ***tend vers*** *a si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{ tel que } (|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - b| \leqslant \epsilon \text{ quand } x \in \operatorname{dom} f.$$

Dans ce cas, nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{13.46}$$

Commençons par un exemple très simple : prouvons que $\lim_{x\to 0} x = 0$. C'est donc $a = b = 0$ dans la définition. Prenons $\epsilon > 0$, et trouvons un intervalle autour de zéro tel que partout dans l'intervalle, $x \leqslant \epsilon$. Bon ben c'est clair que $\delta = \epsilon$ fonctionne.

Plus compliqué maintenant, mais toujours sans surprises.

Proposition 13.30.

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On veut un intervalle de largeur δ autour de zéro tel que x^2 soit plus petit que ϵ sur cet intervalle. Cette fois-ci, le δ qui fonctionne est $\delta = \sqrt{\epsilon}$. En effet un élément de l'intervalle $[-\delta, \delta]$ est un r de valeur absolue plus petite ou égale à δ :

$$|r| \leqslant \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

En prenant le carré de cette inégalité on a :

$$r^2 \leqslant \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

Calculer et prouver des valeurs de limites, mêmes très simples, devient vite de l'arrachage de cheveux à essayer de trouver le bon δ en fonction de ϵ si on n'a pas quelques théorèmes généraux. Heureusement nous en avons déjà quelque uns : 13.16, 13.17, 13.18, 13.19, 13.20.

Proposition 13.31 ([1])**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue dont la variable y varie dans un compact I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{y \in I} f(x, y) \end{aligned} \tag{13.47}$$

est continue.

Démonstration. Soit x_0 fixé. Prouvons que d est continue en x_0. Nous notons y_0 la valeur de y qui réalise le maximum (par le théorème 8.35 et le fait que les fonctions projection soient continues, lemme 7.82). Soit aussi $\epsilon > 0$ tellement fixé que même avec un tourne vis hydraulique, il ne bougerait pas. Nous considérons δ tel que si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leqslant \delta$ alors $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\| < \epsilon$.

Si $|x-x_0| < \delta$ alors pour y assez proche de y_0 nous avons $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leqslant \delta$, et donc $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\| \leqslant \epsilon$. Cela montre qu'il existe δ tel que $|x-x_0| \leqslant \delta$ implique $d(x) \geqslant d(x_0)-\epsilon$.

Nous devons encore trouver un δ tel que si $|x-x_0| \leqslant \delta$ alors $d(x) \leqslant d(x_0)+\epsilon$. Supposons que non. Alors pour tout δ il existe un x tel que $|x-x_0| \leqslant \delta$ et $d(x) > d(x_0)+\epsilon$. Cela nous donne une suite $x_i \to x_0$.

Pour chaque x_i nous notons y_i la valeur de y qui réalise le supremum correspondant. La suite (y_i) étant contenue dans un compact nous supposons prendre une sous-suite de (x_i) telle que la suite (y_i) converge. Nous nommons a la limite (et non y_0 parce que nous ne savons pas si $y_i \to y_0$). Pour chaque i nous avons

$$f(x_i,y_i) > \sup_{y\in I} f(x_0,y) + \epsilon. \tag{13.48}$$

En prenant la limite et en utilisant la continuité de f,

$$f(x_0,a) > \sup_{y\in I} f(x_0,y) + \epsilon, \tag{13.49}$$

ce qui est impossible. □

13.3.6 Limites de fonctions

Définition 13.32.
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point d'accumulation de D. On dit que f possède une ***limite*** *s'il existe un élément $\ell \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon. \tag{13.50}$$

Pour une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, la définition est la même, sauf que nous remplaçons la valeur absolue par la norme dans $\mathbb{R}^n$. Nous disons donc que ℓ est la limite de f lorsque x tend vers a, et nous notons $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$0 < \|x-a\|_{\mathbb{R}^m} < \delta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon. \tag{13.51}$$

Remarque 13.33.
Dans l'équation (13.51), nous avons explicitement écrit les normes $\|.\|_{\mathbb{R}^m}$ et $\|.\|_{\mathbb{R}^n}$. Dans la suite nous allons le plus souvent noter $\|.\|$ sans plus de précision. Il est important de faire l'exercice de bien comprendre à chaque fois de quelle norme nous parlons.

Remarque 13.34.
Il est important de remarquer à quel point les définitions 13.32, et les caractérisations 11.210, 13.12 sont analogues. En réalité, la définition fondamentale est la définition de la limite dans les espaces vectoriels normés ; les deux autres sont des cas particuliers, adaptés à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^m$. Il en sera de même pour les définitions de fonctions continues : il y aura une définition pour la continuité de fonctions entre espaces vectoriels normés, et ensuite une définition pour les fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui en sera un cas particulier.

Tentons de comprendre ce que signifie qu'un nombre ℓ *ne soit pas* la limite de f lorsque $x \to a$. Il s'agit d'inverser la condition (13.50). Le nombre ℓ n'est pas une limite de f pour $x \to a$ lorsque

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x \text{ tel que } 0 < \|x-a\| < \delta \text{ et } \|f(x)-\ell\| > \varepsilon, \tag{13.52}$$

c'est-à-dire qu'il existe un certain seuil ε tel qu'on a beau s'approcher aussi proche qu'on veut de a (distance δ), on trouvera toujours un x tel que $f(x)$ n'est pas ε-proche de ℓ.

Lemme 13.35 (Unicité de la limite)**.**
Si ℓ et ℓ' sont deux limites de $f(x)$ lorsque x tend vers a, alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous considérons δ tel que $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$ pour tout x tel que $\|x-a\| < \delta$. De la même manière, nous prenons δ' tel que $\|x-a\| < \delta'$ implique $\|f(x)-\ell'\| < \varepsilon$. Pour les x tels que $\|x-a\|$ est plus petit que δ et δ' en même temps, nous avons

$$\|\ell - \ell'\| = \|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\| \leqslant \|\ell - f(x)\| + \|f(x) - \ell'\| < 2\varepsilon, \tag{13.53}$$

et donc $\|\ell - \ell'\| = 0$ parce que c'est plus petit que 2ε pour tout ε. □

13.3.7 Limite à gauche et à droite

Si a est à l'intérieur du domaine de f, nous savons ce que signifie $\lim_{x\to a} f(x)$. Nous donnons également une définition des limites à gauche et à droite.

Définition 13.36.
*Soient $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si $a \in \mathrm{Adh}(D)$ nous définissons la **limite à droite** de f en a par*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} \tilde{f}(x) \tag{13.54}$$

où $\tilde{f}$ est la fonction f restreinte à $D \cap \{x \text{ tel que } x > a\}$. La limite (13.54) est souvent écrite sous la forme condensée

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x). \tag{13.55}$$

Pour la limite à gauche c'est un peu la même chose :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x). \tag{13.56}$$

Proposition 13.37 ([197])**.**
Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$. Si $a \in \mathrm{Adh}(D)$ alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont égales. Dans ce cas nous avons égalité :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x). \tag{13.57}$$

13.38.
Quelque remarques à propos de la proposition 13.37.

(1) Cette proposition ne se généralise pas du tout aux dimensions supérieures. Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, il ne faudrait pas croire que si les limites suivant toutes les directions existent alors la limite existe.

(2) Cette proposition est souvent utilisée pour calculer des limites dans lesquelles arrivent des valeurs absolues. Par exemple durant la démonstration de la proposition 13.273.

13.4 Limite en compactifié d'Alexandrov

Nous considérons l'espace topologique localement compact $\mathbb{R}$, et son compactifié d'Alexandrov défini en 7.61. Nous avons donc un point supplémentaire noté ∞. Ce point n'est ni du côté des grands nombres positifs, ni du côté des grands nombres négatifs. Il n'est ni $+\infty$ ni $-\infty$.

Proposition 13.39.
Dans cet espace topologique $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty. \tag{13.58}$$

Démonstration. Soit un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{R}}$. Il s'écrit $V = K^c \cup \{\infty\}$ pour un certain compact de $\mathbb{R}$. Le théorème 8.9 nous assure que K est borné. Donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Pour $x \in B(0, 1/R)$ nous avons

$$|\frac{1}{x}| > R, \tag{13.59}$$

et donc $1/x \in K^c$. Donc aussi $\frac{1}{x} \in V$. □

De la même façon, dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nous avons

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty. \tag{13.60}$$

13.40.
Je vous laisse deviner la topologie à considérer sur $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans cet espace topologique la limite $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

13.5 Continuité

13.41.
Nous allons considérer trois approches différentes de la continuité. La première sera de définir la continuité de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ au moyen du critère usuel. Ensuite, nous définiront la continuité des applications entre n'importe quels espaces métriques, et nous montrerons que les deux définitions sont équivalentes dans le cas des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Enfin, un peu plus tard nous verrons que la continuité peut également être vue en termes de limites. Encore une fois nous verrons que dans le cas de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ cette troisième approche est équivalentes aux deux premières.

La définition de fonction continue est la définition 7.66. Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle devient ceci.

Proposition 13.42.
*La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **continue en** a si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{ tel que } \big(|x - a| \leqslant \delta\big) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon. \tag{13.61}$$

Nous allons maintenant étudier quelques conséquences de la continuité sur $\mathbb{R}$.

(1) D'abord on voit que la continuité n'a été définie qu'en un point. On peut dire que la fonction f est continue *en tel point donné*, mais nous n'avons pas dit ce qu'est une fonction continue *dans son ensemble.*

(2) Le théorème 7.69 nous précise que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

(3) Comme la définition de f continue en a fait intervenir $f(x)$ pour tous les x pas trop loin de a, il faut au moins déjà que f soit définie sur ces x. En d'autres termes, dire que f est continue en a demande que f existe sur un intervalle autour de a.
Ceci couplé à la définition précédente laisse penser qu'il est surtout intéressant d'étudier les fonctions qui sont continues sur un intervalle.

(4) L'intuition comme quoi une fonction continue doit pouvoir être tracée sans lever la main correspond aux fonctions continues sur des intervalles. Au moins sur l'intervalle où elle est continue, elle est traçable en un morceau.

Exemple 13.43
Il est très possible d'être continue en un seul point. Par exemple la fonction

$$f(x) = x(1 - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)) \tag{13.62}$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. △

Proposition 13.44.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point $a \in \mathbb{R}$ et si $f(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas.

Démonstration. Si f s'annulait sur tout voisinage de a (mais pas ne a lui-même), nous aurions, pour tout n un réel

$$x_n \in B\big(a, \frac{1}{n}\big)\backslash\{a\} \tag{13.63}$$

tel que $f(x_n) = 0$. Cela donnerait une suite $x_n \to a$ avec $f(x_n) \to 0$, ce qui contredit la continuité de f en a en vertu de la proposition 7.749.10 sur la continuité séquentielle en un point. □

Notons que ce résultat se généralise beaucoup : si f est continue et pas égale à r en a, alors elle continue à n'être pas égale à r dans un voisinage de a.

13.5.1 Opération sur la continuité

Nous allons démontrer maintenant une série de petits résultats qui permettent de simplifier la démonstration de la continuité de fonctions.

Théorème 13.45.
Si la fonction f est continue au point a, alors la fonction λf est également continue en a.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous avons besoin d'un $\delta > 0$ tel que pour chaque x à moins de δ de a, la fonction λf soit à moins de ϵ de $(\lambda f)(a) = \lambda f(a)$. Étant donné que la fonction f est continue en a, on sait déjà qu'il existe un δ_1 (nous notons δ_1 afin de ne pas confondre ce nombre dont on est sûr de l'existence avec le δ que nous sommes en train de chercher) tel que

$$(|x - a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$

Hélas, ce δ_1 n'est pas celui qu'il faut faut parce que nous travaillons avec λf au lieu de f, ce qui fait qu'au lieu d'avoir $|f(x) - f(a)|$, nous avons $|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(a)|$. Ce que δ_1 fait avec (λf), c'est

$$(|x - a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1.$$

Ce que nous apprend la continuité de f, c'est que pour chaque choix de ϵ_1, on a un δ_1 qui fait cette implication. Comme cela est vrai pour chaque choix de ϵ_1, essayons avec $\epsilon_1 = \epsilon/|\lambda|$ pour voir ce que ça donne. Nous avons donc un δ_1 qui fait

$$(|x - a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1 = \epsilon.$$

Ce δ_1 est celui qu'on cherchait. □

Théorème 13.46.
Si f et g sont deux fonctions continues en a, alors la fonction $f + g$ est également continue en a.

Démonstration. La continuité des fonctions f et g au point a fait en sorte que pour tout choix de ϵ_1 et ϵ_2, il existe δ_1 et δ_2 tels que

$$(|x - a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$

et

$$(|x - a| \leqslant \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon_2.$$

La quantité que nous souhaitons analyser est $|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)|$. Tout le jeu de la démonstration de la continuité est de triturer cette expression pour en tirer quelque chose en termes de ϵ_1 et ϵ_2. Si nous supposons avoir pris $|x - a|$ plus petit en même temps que δ_1 et que δ_2, nous avons

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon_1 + \epsilon_2$$

en utilisant la formule générale $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Maintenant si on choisit ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1+\epsilon_2 < \epsilon$, et les δ_1, δ_2 correspondants, on a

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leqslant \epsilon,$$

pourvu que $|x-a|$ soit plus petit que δ_1 et δ_2. Le bon δ à prendre est donc le minimum de δ_1 et δ_2 qui eux-mêmes sont donnés par un choix de ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leqslant \epsilon$. □

Pour résumer ces deux théorèmes, on dit que si f et g sont continues en a, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est également continue en a pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Parmi les propriétés immédiates de la continuité d'une fonction, nous avons ceci qui est souvent bien utile.

Corollaire 13.47.
Si la fonction f est continue en a et si $f(a) > 0$, alors f est positive sur un intervalle autour de a.

Démonstration. Prenons $\epsilon < f(a)$ et voyons[5] ce que la continuité de f en a nous offre : il existe un δ tel que

$$(|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon < f(a).$$

Nous en retenons que sur un intervalle (de largeur δ), nous avons $|f(x) - f(a)| \leqslant f(a)$. Par hypothèse, $f(a) > 0$, donc si $f(x) < 0$, alors la différence $f(x) - f(a)$ donne un nombre encore plus négatif que $-f(a)$, c'est-à-dire que $|f(x) - f(a)| > f(a)$, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. D'où la conclusion que $f(x) > 0$. □

13.5.2 La fonction la moins continue du monde

Parmi les exemples un peu sales de fonctions non continues, il y a celle-ci :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, et[6] $\chi_{\mathbb{Q}}(\pi) = \chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) = 0$. Malgré que $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, il n'existe *aucun* voisinage de 1 sur lequel la fonction reste proche de 1, parce que tout voisinage va contenir au moins un irrationnel. À chaque millimètre, cette fonction fait une infinité de bonds !

Cette fonction n'est donc continue nulle part.

À partir de là, nous pouvons construire la fonction suivante qui n'est continue qu'en un point :

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est continue en zéro. En effet, prenons $\delta > 0$; il nous faut un ϵ tel que $|x| \leqslant \epsilon$ implique $f(x) \leqslant \delta$ parce que $f(0) = 0$. Bon ben prendre simplement $\epsilon = \delta$ nous contente. Cette fonction est donc très facilement continue en zéro.

Et pourtant, dès que l'on s'écarte un tant soit peu de zéro, elle fait des bons une infinité de fois par millionième de millimètre ! Cette fonction est donc la plus discontinue du monde en tous les points saut un (zéro) où elle est une fonction continue !

13.5.3 Approche topologique

Nous avons vu que sur tout ensemble métrique, nous pouvons définir ce qu'est un ouvert : c'est un ensemble qui contient une boule ouverte autour de chacun de ses points. Quand on est dans un ensemble ouvert, on peut toujours un peu se déplacer sans sortir de l'ensemble.

Le théorème suivant est une très importante caractérisation des fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) en termes de topologie, c'est-à-dire en termes d'ouverts.

5. ici, nous insistons sur le fait que nous prenons ϵ *strictement* plus petit que $f(a)$.

6. Pour prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est pas trop compliqué, mais pour prouver que π ne l'est pas non plus, il faudra encore manger de la soupe.

Théorème 13.48.
Si I est un intervalle ouvert contenu dans $\operatorname{dom} f$*, alors f est continue sur I si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$, l'image inverse $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.*

Par abus de langage, nous exprimons souvent cette condition par « une fonction est continue si et seulement si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert ».

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons transformer le critère de continuité en termes de boules ouvertes, et ensuite, nous passerons à la démonstration proprement dite. Le critère de continuité de f au point x dit que

$$\forall \delta > 0, \exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } \big(|x-a| < \epsilon\big) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta. \tag{13.64}$$

Cette condition peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } a \in B(x,\epsilon) \Rightarrow f(a) \in B\big(f(x),\delta\big),$$

ou encore

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } f\big(B(x,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x),\delta\big). \tag{13.65}$$

Jusque ici, nous n'avons fait que du jeu de notations. Nous avons exprimé en termes de topologie des inégalités analytiques. La condition (13.65) est le plus souvent utilisée comme définition de la continuité d'une fonction en x, lorsque le contexte ne demande pas de définitions plus générales. Si tel est le choix, il faut pouvoir retrouver (13.64) à partir de (13.65).

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème.

D'abord, supposons que f est continue sur I, et prenons $\mathcal{O}$, un ouvert quelconque. Le but est de prouver que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela, nous prenons un point $x_0 \in f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ et nous allons trouver un ouvert autour ce point contenu dans $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$. Nous écrivons $y_0 = f(x_0)$. évidemment, $y_0 \in \mathcal{O}$, donc on a une boule autour de y_0 qui est contenue dans $\mathcal{O}$, soit donc $\delta > 0$ tel que

$$B(y_0,\delta) \subset \mathcal{O}.$$

Par hypothèse, f est continue en x_0, et nous pouvons donc y appliquer le critère (13.65). Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big) \subset \mathcal{O}.$$

Cela prouve que $B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}(\mathcal{O})$.

Dans l'autre sens, maintenant. Nous prenons $x_0 \in I$ et nous voulons prouver que f est continue en x_0, c'est-à-dire que pour tout δ nous cherchons un ϵ tel que $f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big)$. Oui, mais $B\big(f(x_0),\delta\big)$ est ouverte, donc par hypothèse, $f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big)$ est ouvert, inclus dans I et contient x_0. Donc il existe un ϵ tel que

$$B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big),$$

et donc tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big),$$

ce qu'il fallait prouver. □

Lemme 13.49.
L'image d'un ensemble connexe par une fonction continue est connexe.

Démonstration. Nous allons encore faire la contraposée. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(A)$ ne soit pas connexe. Nous allons prouver que A elle-même n'est pas connexe. Dire que $f(A)$ n'est pas connexe, c'est dire qu'il existe $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, deux ouverts disjoints qui recouvrent $f(A)$. Je prétends que $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ sont ouverts, disjoints et qu'ils recouvrent A.

— Ces deux ensembles sont ouverts parce qu'ils sont images inverses d'ouverts par une fonction continue (théorème 13.48).

— Si $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)$, alors $f(x) \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont disjoints. Il n'y a donc pas d'éléments dans l'intersection de $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et de $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$.

— Si $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ne recouvrent pas A, il existe un x dans A qui n'est dans aucun des deux. Dans ce cas, $f(x)$ est dans $f(A)$, mais n'est ni dans $\mathcal{O}_1$, ni dans $\mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que ces deux derniers recouvrent $f(A)$.

Nous déduisons que A n'est pas connexe. Et donc le lemme. □

Théorème 13.50 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$, et supposons que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout y tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, il existe un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. Nous savons que $[a,b]$ est connexe parce que c'est un intervalle (proposition 8.34). Donc $f\big([a,b]\big)$ est connexe (lemme 13.49) et donc est un intervalle (à nouveau la proposition 8.34). Étant donné que $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle, il contient toutes les valeurs intermédiaires entre n'importe quels deux de ses éléments. En particulier toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. □

Corollaire 13.51.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soient I un intervalle, $\alpha < \beta \in f(I)$ et $\gamma \in]\alpha,\beta[$. Nous considérons $a,b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires 13.50, il existe $t \in]a,b[$ tel que $f(t) = \gamma$. Par conséquent $\gamma \in f(I)$. □

Corollaire-définition 13.52 (Existence de la racine carrée)**.**
Si $x \geqslant 0$ alors il existe un unique $y \geqslant 0$ tel que $y^2 = x$. Ce nombre est noté $\sqrt{x}$ et est nommé ***racine carrée*** *de x.*

Démonstration. La fonction $f\colon t \mapsto t^2$ est continue et strictement croissante. Nous avons $f(0) = 0$ et[7] $f(x+1) > x$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 13.50 nous assure qu'il existe un unique $y \in [0, x+1]$ tel que $f(y) = x$. □

13.5.4 Continuité de la racine carrée, invitation à la topologie induite

Pourquoi nous intéresser particulièrement à cette fonction ? Parce qu'elle a une sale condition d'existence : son domaine de définition n'est pas ouvert. Or dans tous les théorèmes de continuité d'approche topologique que nous avons vus, nous avons donné des conditions *pour tout ouvert*. Nous nous attendons donc a avoir des difficultés avec la continuité de $\sqrt{x}$ en zéro.

Prenons I, n'importe quel intervalle ouvert dans $\mathbb{R}^+$, et voyons que la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{13.66}$$

est continue sur I. Remarque déjà que si I est un ouvert dans $\mathbb{R}^+$, il ne peut pas contenir zéro. Avant de nous lancer dans notre propos, nous prouvons un lemme qui fera tout le travail[8].

Lemme 13.53.
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert dans $\mathbb{R}^+$. Alors $\mathcal{O}^2 = \{x^2 \text{ tel que } x \in \mathcal{O}\}$ est également ouvert .

Démonstration. Un élément de $\mathcal{O}^2$ s'écrit sous la forme x^2 pour un certain $x \in \mathcal{O}$. Le but est de trouver un ouvert autour de x^2 qui soit contenu dans $\mathcal{O}^2$. Étant donné que $\mathcal{O}$ est ouvert, on a une boule centrée en x contenue dans $\mathcal{O}$. Nous appelons δ le rayon de cette boule :

$$B(x,\delta) \subset \mathcal{O}.$$

7. Faites deux cas suivant $x \geqslant 1$ ou non si vous le voulez, moi je prends $x+1$.
8. C'est toujours ingrat d'être un lemme : on fait tout le travail et c'est toujours le théorème qui est nommé.

Étant donné que cet ensemble est connexe, nous savons par le lemme 13.49 que $B(x,\delta)^2$ est également connexe (parce que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue). Son plus grand élément est $(x+\delta)^2 = x^2 + \delta^2 + 2x\delta > x^2 + \delta^2$, et son plus petit élément est $(x-\delta)^2 = x^2 + \delta^2 - 2x\delta$.

Ce qui serait pas mal, c'est que ces deux bornes entourent x^2 ; de cette façon elles définiraient un ouvert autour de x^2 qui soit dans $\mathcal{O}^2$. Hélas, c'est pas gagné que $x^2 + \delta^2 - 2x\delta$ soit plus petit que x^2.

Heureusement, en fait c'est vrai parce que d'une part, du fait que $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^+$, on a $x > 0$, et d'autre part, pour que $\mathcal{O}$ soit positif, il faut que $\delta < x$. Donc on a évidemment que $\delta < 2x$, et donc que

$$x^2 + \delta^2 - 2x\delta = x^2 + \delta \underbrace{(\delta - 2x)}_{<0} < x^2.$$

Donc nous avons fini : l'ensemble

$$B(x,\delta)^2 =]x^2 + \delta^2 - 2x\delta, x^2 + \delta^2 + 2x\delta[\subset \mathcal{O}^2$$

est un intervalle qui contient x^2, et donc qui contient une boule ouverte centrée en x^2.

□

Maintenant nous pouvons nous attaquer à la continuité de la racine carrée sur tout ouvert positif en utilisant le théorème 13.48. Soit $\mathcal{O}$ n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}$, et prouvons que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Par définition,

$$f|_I^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in I \text{ tel que } \sqrt{x} \in \mathcal{O}\}. \tag{13.67}$$

Maintenant c'est un tout petit effort que de remarquer que $f|_I^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^2 \cap I$. De là, on a gagné parce que $\mathcal{O}^2$ et I sont des ouverts. Or l'intersection de deux ouverts est ouvert.

Nous n'en avons pas fini avec la fonction $\sqrt{x}$. Nous avons la continuité de la racine carrée pour tous les réels strictement positifs. Il reste à pouvoir dire que la fonction est continue en zéro malgré qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de zéro.

Il est possible de dire que la racine carrée est continue en 0, malgré qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de 0...en tout cas pas un ouvert au sens que tu as en tête. Nous allons rentabiliser un bon coup notre travail sur les espaces métriques.

Nous pouvons définir la notion de boule ouverte sur n'importe quel espace métrique A en disant que

$$B(x,r) = \{y \in A \text{ tel que } d(x,y) < r\}.$$

Définition 13.54.
*Soit $f\colon A \to B$, une application entre deux espaces métriques. Nous disons que f est **continue** au point $a \in A$ si $\forall \delta > 0$, $\exists \epsilon > 0$ tel que*

$$f\big(B(a,\epsilon)\big) \subset B\big(f(a),\delta\big). \tag{13.68}$$

Tu reconnais évidemment la condition (13.65). Nous l'avons juste recopiée. Tu remarqueras cependant que cette définition généralise immensément la continuité que l'on avait travaillé à propos des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Maintenant tu peux prendre n'importe quel espace métrique et c'est bon.

Nous n'allons pas faire un tour complet des conséquences et exemples de cette définition. Au lieu de cela, nous allons juste montrer en quoi cette définition règle le problème de la continuité de la racine carrée en zéro.

La fonction que nous regardons est

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{13.69}$$

Mais cette fois, nous ne la voyons pas comme étant une fonction dont le domaine est une partie de $\mathbb{R}$, mais comme fonction dont le domaine est $\mathbb{R}^+$ vu comme un espace métrique en soi. Quelles

sont les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^+$ autour de zéro ? Réponse : la boule ouverte de rayon r autour de zéro dans $\mathbb{R}^+$ est :

$$B(0,r)_{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } d(x,0) < r\} = [0,r[.$$

Cet intervalle est un ouvert. Aussi incroyable que cela puisse paraitre !

Testons la continuité de la racine carrée en zéro dans ce contexte. Il s'agit de prendre $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^+$ et $a = 0$ dans la définition 13.54. Nous avons que $B(\sqrt{0},\delta) = B(0,\delta) = [0,\delta[$ pour la topologie de $\mathbb{R}^+$.

Il s'agit maintenant de trouver un ϵ tel que $f\big(B(0,\epsilon)\big) \subset [0,\delta[$. Par définition, nous avons que

$$f\big(B(0,\epsilon)\big) = [0,\sqrt{\epsilon}[,$$

le problème revient dont à trouver ϵ tel que $\sqrt{\epsilon} \leqslant \delta$. Prendre $\epsilon < \delta^2$ fait l'affaire.

Donc voilà. Au sens de la topologie propre à $\mathbb{R}^+$, nous pouvons dire que la fonction racine carrée est partout continue.

13.5.5 Prolongement par continuité

13.5.5.1 Discussion avec mon ordinateur

Voici un extrait de ce peut donner Sage. Nous lui donnons la fonction

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8}. \tag{13.70}$$

Cette fonction est faite exprès pour que le dénominateur s'annule en -4. En fait $3x^2+10x-8 = (x+4)(3x-2)$, et la fraction peut se simplifier en

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}. \tag{13.71}$$

Et avec cela nous écririons $f(-4) = -\frac{1}{14}$. Voyons comment cela passe dans Sage.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 5.2, Release Date: 2012-07-25                         |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.        |
| Type "help()" for help.                                            |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=(x+4)/(3*x**2+10*x-8)
sage: f(-4)
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
ValueError: power::eval(): division by zero
```

Il produit donc une erreur de division par zéro. Cela n'est pas étonnant. Pourtant si on lui demande, il est capable de simplifier. En effet :

```
sage: f.simplify_full()
x |--> 1/(3*x - 2)
sage: f.simplify_full()(-4)
-1/14
```

Nous considérons la question suivante : étant donné une fonction f définie sur $I\backslash\{x_0\}$, est-il possible de définir f en x_0 de telles façon à ce qu'elle soit continue ?

Exemple 13.55
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{13.72}$$

n'est pas définie pour $x = 0$ et il n'y a pas moyen de définir $f(0)$ de telle sorte que f soit continue parce que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. △

13.5.5.2 Limite et prolongement

Reprenons l'exemple de la fonction (13.70) que mon ordinateur refusait de calculer en zéro :

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8} = \frac{x+4}{(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right)}. \tag{13.73}$$

Cette fonction a une condition d'existence en $x = -4$. Et pourtant, tant que $x \neq 4$, cela a un sens de simplifier les $(x+4)$ et d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{x-\frac{2}{3}} = \frac{3}{3x-2}.$$

Étant donné que pour toute valeur de x différente de -4, la fonction f s'exprime de cette façon, nous avons que

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \left(\frac{3}{3x-2}\right).$$

Oui, mais la fonction[9] $g(x) = 3/(3x-2)$ est continue en -4 et donc sa limite vaut sa valeur. Nous en déduisons que

$$\lim_{x\to -4} f(x) = -\frac{3}{14}.$$

Que dire maintenant de la fonction ainsi définie ?

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -4 \\ -3/14 & \text{si } x = -4. \end{cases} \tag{13.74}$$

Cette fonction est continue en -4 parce qu'elle y est égale à sa limite. Les étapes suivies pour obtenir ce résultat sont :

— Repérer un point où la fonction n'existe pas,

— calculer la limite de la fonction en ce point, et en particulier vérifier que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas,

— définir une nouvelle fonction qui vaut partout la même chose que la fonction originale, sauf au point considéré où l'on met la valeur de la limite.

C'est ce qu'on appelle **prolonger la fonction par continuité** parce que la fonction résultante est continue. La prolongation de f par continuité est donc en général définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \\ \lim_{y\to x} f(y) & \text{si } f(x) \end{cases} \tag{13.75}$$

Dans le cas que nous regardions,

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8},$$

le prolongement par continuité est donné par

$$\tilde{f} = \frac{3}{3x-2}. \tag{13.76}$$

Remarquons que cette fonction n'est toujours pas définie en $x = 2/3$.

9. Cette fonction g n'est pas f parce que g a en plus l'avantage d'être définie en -4.

13.5.6 Prolongement par continuité

Proposition-définition 13.56 (Prolongement par continuité).
Soit $f\colon I\backslash\{x_0\}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned}&\tilde{f}\colon I\to\mathbb{R}\\&\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & si\ x\neq x_0\\ \ell & si\ x=x_0\end{cases}\end{aligned}\tag{13.77}$$

*est une fonction continue sur I et est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.*

Vous noterez que dans cet énoncé nous demandons $\ell\in\mathbb{R}$. Les cas $\ell=\pm\infty$ sont donc exclus.

13.57.
Le lemme 13.71 donnera un autre gros morceau de prolongement par continuité. Là, ce ne sera pas juste une valeur qui manquera, mais carrément la majorité des valeurs ; mais par contre, ce ne sera pas vraiment de la prolongation par continuité, mais de la prolongation par Cauchy-continuité.

Exemple 13.58
La fonction

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}\backslash\{-3,2\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)}\end{aligned}\tag{13.78}$$

admet pour limite $\lim_{x\to-3} f(x)=\frac{4}{5}$. Son prolongement par continuité en $x=-3$ est donné par

$$\tilde{f}(x)=\frac{x-1}{x-2}.\tag{13.79}$$

Notons que les fonctions f et $\tilde{f}$ ne sont pas identiques : l'une est définie pour $x=-3$ et l'autre pas. Lorsqu'on fait le calcul

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x-1}{x-2},\tag{13.80}$$

la simplification n'est pas du tout un acte anodin. Le dernier signe « = » est discutable parce que les deux dernières expressions ne sont pas égales pour tout x ; elles ne sont égales « que » pour les x pour lesquels les deux expressions existent. △

Les fonctions trigonométriques donneront quelques exemples intéressants de prolongements par continuité. Voir l'exemple 19.202. Et une avec la fonction logarithme dans l'exemple 16.82.

13.5.7 Théorème de la bijection

Proposition 13.59.
Une fonction monotone et surjective d'un intervalle I sur un autre intervalle J est continue sur I.

Proposition 13.60.
Soient $f\colon I\to J$ une bijection et $f^{-1}\colon J\to I$ sa réciproque. Alors pour tout $x_0\in I$ nous avons

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big)=x_0\tag{13.81}$$

et pour tout $y_0\in J$ nous avons

$$f\big(f^{-1}(y_0)\big)=y_0.\tag{13.82}$$

Démonstration. Nous prouvons la relation (13.81) et nous laissons (13.82) comme exercice au lecteur.

Soit $x_0 \in I$. Posons $y_0 = f(x_0)$. La définition de l'application réciproque est que pour $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$. Donc $f^{-1}(y_0)$ est l'unique élément de I dont l'image est y_0. C'est donc x_0 et nous avons $f^{-1}(y_0) = x_0$, c'est-à-dire

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0. \tag{13.83}$$

□

Théorème 13.61 (Théorème de la bijection)**.**
Soit I un intervalle et f une fonction continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

(1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;

(2) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est bijective

(3) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est strictement monotone de même sens que f ;

(4) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire que $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue.

Démonstration. Prouvons les choses point par point.

(1) Supposons pour fixer les idées que f est monotone croissante [10].
Soient $a < b$ dans $f(I)$. Par définition il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $a = f(x_1)$ et $b = f(x_2)$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ et vérifie $f(x_1) < f(x_2)$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 13.50 nous dit que pour tout t dans $[f(x_2), f(x_2)]$, il existe un $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = t$. Cela montre que toutes les valeurs intermédiaires entre a et b sont atteintes par f et donc que $f(I)$ est un intervalle.

(2) Nous prouvons maintenant que f est bijective en prouvant séparément qu'elle est surjective et injective.

f est surjective Une fonction est toujours surjective depuis un intervalle I vers l'ensemble $\Im f$.

f est injective Soit $x \neq y$ dans I ; pour fixer les idées nous supposons que $x < y$. La stricte monotonie de f implique que $f(x) < f(y)$ ou que $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$.

La fonction f est donc bijective.

(3) Comme d'accoutumée nous supposons que f est croissante. Soient $y_1 < y_2$ dans $f(I)$; nous devons prouver que $f^{-1}(y_1) \leqslant f^{-1}(y_2)$. Pour cela nous considérons les nombres $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Nous allons en prouver la contraposée en supposant que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. En appliquant f (qui est croissante) à cette dernière inégalité il vient

$$f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y_2)\big), \tag{13.84}$$

ce qui signifie

$$y_1 \geqslant y_2 \tag{13.85}$$

par l'équation (13.82).

(4) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est une fonction monotone et surjective, donc continue par la proposition 13.59.

□

10. Traitez en tant qu'exercice le cas où f est décroissante.

Exemple 13.62
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon [2,3] &\to [4,9] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{13.86}$$

est une bijection. Sa réciproque est la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon [4,9] &\to [2,3] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{13.87}$$

△

13.6 Limite et continuité

Voir les remarques dans l'index thématique 16 pour comprendre la place et la portée de ce qui va venir à propos de limite et de continuité.

Théorème 13.63 (Limite et continuité)**.**
La fonction f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est continue en a, et nous prouvons que $\lim_{x\to a} f(x) = a$. Soit $\epsilon > 0$; ce qu'il nous faut c'est un δ tel que $|x-a| \leqslant \delta$ implique $|f(x)-f(a)| \leqslant \epsilon$. La caractérisation 13.42 de la continuité donne l'existence d'un δ comme il nous faut.

Dans l'autre sens, c'est-à-dire prouver que f est continue au point a sous l'hypothèse que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la preuve se fait de la même façon. □

Nous en déduisons que si nous voulons gagner quelque chose à parler de limites, il faut prendre des fonctions non continues. En effet, si une fonction est continue en un point, la limite ne donne aucune nouvelle information que la valeur de la fonction elle-même en ce point.

Prenons une fonction qui fait un saut. Pour se fixer les idées, prenons celle-ci :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]\infty, 2[\\ x/2 & \text{si } x \in [2, \infty[\end{cases} \tag{13.88}$$

Essayons de trouver la limite de cette fonction lorsque x tend vers 2. Étant donné que f n'est pas continue en 2, nous savons déjà que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$. Donc ce n'est pas 1. Cette limite ne peut pas valoir 4 non plus parce que si je prends n'importe quel ϵ, la valeur de $f(2+\epsilon)$ est très proche de 2, et donc ne peut pas s'approcher de 4. En fait, tu peux facilement vérifier que *aucun nombre ne vérifie la condition de limite pour f en* 2. Nous disons que la limite n'existe pas.

Il ne faudrait pas en déduire trop vite que si une fonction n'est pas continue en a, alors la limite $x \to a$ n'existe pas. Ce que dit le théorème 13.63 est que si une fonction n'est pas continue en a, alors sa limite (si elle existe) ne vaut pas $f(a)$.

Exemple 13.64(Un exemple de continuité Thème 16)
Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{13.89}$$

Cette fonction n'est pas continue en $x = 0$, et pourtant la limite existe : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Faisons cela en détail pour nous assurer de ce qu'il se passe.

Considérons l'ouvert $]3, 5[$. L'image réciproque de cet ouvert par f est la partie $]3, 5[\cup \{0\}$ qui n'est pas ouvert. Donc la fonction f n'est pas continue comme fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Considérons pour comprendre la restriction $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$. L'image inverse de $]3, 5[$ par cette fonction est $\{0\}$ qui n'est pas un ouvert.

Plus généralement tant qu'on considère des restrictions de f sur des parties contenant un voisinage de 0, la fonction ne peut pas être continue [11].

Voyons ce qui en est de la continuité ponctuelle de f en $x = 0$. La définition 7.66 est celle de la continuité en un point ; elle dit que f sera continue en 0 si $f(0) = 4$ est une limite de f. Nous voila parti vers la définition 7.62.

Soit le voisinage $V =]3, 5[$ de $f(0)$. Quel que soit le voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $W \subset B(0, \epsilon)$. Nous avons alors

$$f\big(W\backslash\{a\}\big) \subset f\big(B(0,\epsilon)\backslash\{0\}\big). \tag{13.90}$$

Mais le nombre $\epsilon/2$ fait partie de $f\big(B(0,\epsilon)\backslash\{0\}\big)$ et n'est pas dans V. Donc $f(0)$ n'est pas une limite de f en zéro. Cette fonction n'est donc pas continue en zéro. △

Exemple 13.65(Même exemple, limite)
Nous avons vu que, pour la fonction (13.89), le nombre 4 n'est pas une limite de f en zéro. Nous montrons à présent que 0 est une limite (et même la seule par la proposition 7.65 que nous ne rappelleront plus à chaque fois) de f.

Montrons que 0 est une limite de f en zéro, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Nous suivant la définition 7.62. Soit un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe δ tel que $B(0, \delta) \subset V$. En posant $\epsilon = \delta$ et en définissant $W = B(0, \epsilon)$ nous avons

$$f\big(B(0,\epsilon)\backslash\{0\}\big) = B(0,\epsilon)\backslash\{0\} \subset B(0,\delta) \subset V. \tag{13.91}$$

Donc 0 est une limite de f en zéro. △

Nous avons déjà vu par le corollaire 8.37 qu'une suite croissante et bornée était convergente. Il en va de même pour les fonctions.

Proposition 13.66 ([1])**.**
Si la fonction réelle $f\colon I = [a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante et bornée, alors la limite

$$\lim_{x\to b} f(x) \tag{13.92}$$

existe et est finie.

Démonstration. Commençons par prouver que si (x_n) est une suite dans I convergent vers b, alors $f(x_n)$ est une suite convergente. Dans un second temps nous allons prouver que si (x_n) et (x'_n) sont deux suites qui convergent vers b, alors les suites convergentes $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ convergent vers la même limite. Alors le critère séquentiel de la limite d'une fonction conclura (proposition 9.9).

Nous pouvons extraire de x_n une sous-suite croissante $(x_{\alpha(n)})$. Alors la suite $f\big(x_{\alpha(n)}\big)$ est une suite croissante et majorée, donc convergente par le corollaire 8.37 [12]. Nommons ℓ la limite et montrons qu'elle est aussi limite de f sur la suite originale.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe K tel que si $n > K$ alors $\big|f\big(x_{\alpha(n)}\big) - \ell\big| < \epsilon$. Soit K' tel que pour tout $n > K'$ nous ayons $x_n > x_{\alpha(K')}$. Cela est possible parce que la suite est bornée par b et converge vers b : il suffit de prendre K' de telle sorte que $|x_n - b| \leqslant |x_{\alpha(n)} - b|$. Si $n > K'$ alors $x_n > x_{\alpha(K)}$ et

$$f(x_n) \geqslant f(x_{\alpha(n)}) \geqslant \ell - \epsilon; \tag{13.93}$$

en résumé si $n > K$ alors $|f(x_n) - \ell| < \epsilon$. Cela prouve que $f(x_n) \to \ell$.

Soit maintenant une autre suite (x'_n) qui converge également vers b. Comme nous venons de le voir la suite $f(x'_n)$ est convergente et nous nommons ℓ' la limite. Si nous considérons (x''_n) la suite « alternée » $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots)$ alors nous avons encore une suite qui converge vers b et donc $f(x''_n) \to \ell'$.

Mais étant donné que $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ sont des sous-suites, elles doivent converger vers la même valeur. Donc $\ell = \ell' = \ell''$. □

11. Les plus acharnés se demanderont ce qu'il se passe pour la restriction de f à la partie $\{0\}$ munie de la topologie induite de $\mathbb{R}$.

12. En gros nous sommes en train de dire que toute la théorie des fonctions convexes est un vulgaire corollaire de Bolzano-Weierstrass.

13.6.1 Règles simples de calcul

Les opérations simples passent à la limite, sauf la division pour laquelle il faut faire attention au dénominateur.

Proposition 13.67.
Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$. Alors

(1) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$,

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$,

(3) s'il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Le résultat suivant est pratique pour le calcul des limites.

Proposition 13.68.
Quand la limite existe, nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon),$$

ce qui correspond à un « changement de variables » dans la limite.

Démonstration. Si $A = \lim_{x\to a} f(x)$, par définition,

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists \delta \text{ tel que } |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \epsilon'. \tag{13.94}$$

La seule subtilité de la démonstration est de remarquer que si $|x-a| \leqslant \delta$, alors x peut être écrit sous la forme $x = a+\epsilon$ pour un certain $|\epsilon| \leqslant \delta$. En remplaçant x par $a+\epsilon$ dans la condition 13.94, nous trouvons

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists \delta \text{ tel que } |\epsilon| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x+\epsilon) - A| \leqslant \epsilon', \tag{13.95}$$

ce qui signifie exactement que $\lim_{\epsilon\to 0} f(x+\epsilon) = A$. □

Il y a une petite différence de point de vue entre $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon)$. Dans le premier cas, on considère $f(x)$, et on regarde ce qu'il se passe quand x se rapproche de a, tandis que dans le second, on considère $f(a)$, et on regarde ce qu'il se passe quand on s'éloigne un tout petit peu de a. Dans un cas, on s'approche très près de a, et dans l'autre on s'en éloigne un tout petit peu. Le contenu de la proposition 13.68 est de dire que ces deux points de vue sont équivalents.

13.6.2 Prolongement des rationnels vers les réels

Si $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue pour la topologie induite, est-ce qu'on peut la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? La réponse est hélas non.

Exemple 13.69([198])
Vu que $\sqrt{2}$ est irrationnel[13], ceci définit bien une fonction sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q < \sqrt{2} \\ 1 & \text{si } q > \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned} \tag{13.96}$$

Cela est une fonction continue sur $\mathbb{Q}$. En effet, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $\epsilon > 0$. Nous prenons $\delta > 0$ tel que $\sqrt{2}$ ne soit pas dans $B(q,\delta)$. Alors si $p \in B_{\mathbb{Q}}(q,\delta)$ nous avons $f(q) = f(p)$ et donc

$$|f(p) - f(q)| < \epsilon. \tag{13.97}$$

Il n'est cependant pas possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. △

Pour qu'une fonction sur $\mathbb{Q}$ puisse être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il faut un peu plus que la continuité. Il fait la Cauchy-continuité que nous définissons pas plus tard qu'immédiatement.

13. Proposition 1.87. Le fait que $\sqrt{2}$ existe dans $\mathbb{R}$ est la proposition 1.130.

Définition 13.70 ([198]).
*Soient X et Y deux espaces métriques. Une application $f\colon X \to Y$ est dite **Cauchy-continue** si pour toute suite de Cauchy (x_n) dans X, la suite $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y.*

En terme de prolongement continue, nous avons ce lemme qui demande à une fonction d'être Cauchy continue. Vous pouvez comparer avec le principe de prolongement analytique 18.126 qui donne un énoncé similaire pour un prolongement analytique.

Lemme 13.71 ([1, 199, 200]).
Soit une fonction Cauchy continue[14] *$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.*

(1) La limite $\lim_{q\to x} f(q)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3) Ce prolongement est donné par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{q\to x} f(q) & sinon \end{cases} \tag{13.98}$$

Démonstration. Imprégniez vous bien de la la définition 7.62 de la limite avant de commencer.

Unicité Prouvons rapidement l'unicité avant l'existence parce que c'est facile.

L'unicité du prolongement est la proposition 9.15 à propos de fonctions continues égales sur une partie denses. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, si vous la cherchez est la proposition 8.3.

Candidat limite Soit $x \in \mathbb{R}$. Vu que $x \in \bar{\mathbb{Q}}$, nous pouvons chercher à savoir si $\lim_{q\to x} f(q)$ existe. Si elle existe, elle sera unique.

Soit une suite (q_i) d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x dans $\mathbb{R}$ (i.e. pour la topologie de $\mathbb{R}$). Les nombres réels $f(q_i)$ forment une suite dans $\mathbb{R}$. La suite (q_i) étant convergente, elle est de Cauchy[15].

Vu que f est supposée Cauchy-continue, la suite $\big(f(q_i)\big)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et elle est donc convergente.

C'est bien la limite Nous prouvons à présent que le nombre réel $\lim_{i\to\infty} f(q_i)$ (dont l'existence vient d'être prouvée) vérifie bien la définition de la limite $\lim_{q\to x} f(q)$.

Soit un voisinage V de $\lim f(q_i)$ dans $\mathbb{R}$. Nous devons trouver un voisinage W de x dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f\big(W \cap \mathbb{Q}\backslash\{x\}\big) \subset V. \tag{13.99}$$

Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$ tel que $B\big(\lim f(q_i), \epsilon\big) \subset V$. Vu que f est continue sur $\mathbb{Q}$, il existe δ tel que

$$|p - q| < 2\delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \epsilon. \tag{13.100}$$

Nous posons $W = B(x, \delta)$.

Soit $q \in W \cap \mathbb{Q}\backslash\{x\}$. Nous nous proposons de majorer la quantité $|f(q) - \lim f(q_i)|$ par un multiple de ϵ.

Pour cela nous considérons k suffisamment grand pour que $|f(q_k) - \lim f(q_i)| < \epsilon$. Et de plus, vu que $q_i \to x$ nous considérons k suffisamment grand pour que $|q_k - x| < \delta$. L'indice k est choisi pour vérifier les deux conditions en même temps.

Nous écrivons alors la majoration suivante :

$$|f(q) - \lim f(q_i)| \leqslant |f(q) - f(q_k)| + |f(q_k) + \lim f(q_i)|. \tag{13.101}$$

Le second terme est majoré par ϵ. Pour le premier terme, $q \in B(x, \delta)$ et $q_k \in B(x, \delta)$, donc $|q - q_k| \leqslant 2\delta$, ce qui implique $|f(q) - f(q_k)| < \epsilon$.

Au final, $|f(q) - \lim f(q_i)| \leqslant 2\epsilon$. En reprenant tout le travail avec $\epsilon/2$ au lieu de ϵ nous trouvons $f(q) \in B\big(\lim f(q_i), \epsilon\big) \subset V$.

14. Définition 13.70 ; nous en avons discuté dans l'exemple 13.69.
15. Théorème 9.39(2).

Intermède Jusqu'à présent, nous avons prouvé que

$$\lim_{q\to x} f(q) \tag{13.102}$$

existe et vaut

$$\lim f(q_i) \tag{13.103}$$

lorsque (q_i) est une suite quelconque de rationnels qui converge vers x. Nous l'écrivons pour la référentier plus tard :

$$\lim_{q\to x} f(q) = \lim f(q_i). \tag{13.104}$$

La limite (13.102) est une limit de fonction définie sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ en un pour adhérent à l'ensemble de définition de f. La limite (13.103) est une limite usuelle d'une suite dans $\mathbb{R}$.

Le prolongement Nous posons

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{q\to x} f(q) & \text{sinon} \end{cases} \tag{13.105}$$

et nous allons prouver que $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Continuité Soit $a \in \mathbb{R}$; nous allons montrer la continuité de $\tilde{f}$ en a. Nous fixonx bien entendu $\epsilon > 0$, et nous nous acharnons à majorer la quantité $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)|$.
Vu que f est continue sur $\mathbb{Q}$ nous considérons δ' tel que (dans $\mathbb{Q}$) $0 < |q - q'| < \delta'$ implique $|f(q) - f(q')| < \epsilon$.

$a \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{Q}$ Alors $\tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(a) = f(a)$. Par la continuité de f sur $\mathbb{Q}$, il existe un δ tel que $0 < |x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

$a \in \mathbb{Q}$, x irrationnel Nous considérons une suite de rationnels $q_k \to x$ (vous penserez à l'utilisation du lemme 1.115). Nous avons la majoration

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |\lim_{q\to x} f(q) - f(a)| \leqslant |\lim_{q\to x} f(q) - f(q_k)| + |f(q_k) - f(a)|. \tag{13.106}$$

Nous considérons $\delta < \delta'$ et k suffisament grand pour que $|q_k - x| < \delta' - \delta$. Avec ces choix,

$$|q_k - a| \leqslant |q_k - x| + |x - a| \leqslant \delta'. \tag{13.107}$$

Enfin nous prenons également k suffisament grand pour avoir $|\lim_{q\to x} f(q) - f(q_k)| \leqslant \epsilon$. Les inégalités (13.106) peuvent alors être prolongées pour avoir

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leqslant 2\epsilon. \tag{13.108}$$

a irrationnel, $x \in \mathbb{Q}$ Nous faisons encore la majoration

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |f(x) - \lim_{q\to a} f(q)| \leqslant |f(x) - f(q_k)| + |f(q_k) - \lim_{q\to a} f(a)|. \tag{13.109}$$

Nous prenons $\delta < \delta'/2$ et nous choisissons k assez grand pour que $|q_k - a| < \delta'/2$. De ces choix il ressort que

$$|q_k - x| \leqslant |q_k - a| + |a - x| \leqslant \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta'}{2} \leqslant \delta'. \tag{13.110}$$

Donc $|f(x) - f(q_k)| < \epsilon$. De plus, pour k assez grand, $|f(q_k) - \lim_{q\to a} f(q)| \leqslant \epsilon$.

a et x irrationnels Nous avons

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |\lim_{q\to x} f(q) - \lim_{r\to a} f(r)|, \tag{13.111}$$

et nous considérons des suites de rationnels $q_k \to x$ et $r_i \to a$. De plus nous considérons $\delta < \delta'/4$, et k, i suffisament grands pour avoir $|q_k - x| \leqslant \delta'/4$ et $|r_i - a| < \delta'/4$. Avec tout cela nous avons

$$|q_k - r_i| \leqslant |q_k - x| + |x - a| + |a - r_i| \leqslant 3\delta'/4 < \delta'. \tag{13.112}$$

Enfin, en choisissant i et k de telle sorte à avoir $|\lim_{q\to x} f(q) - f(q_k)| \leqslant \epsilon$ et $|f(r_i) - \lim_{r\to a} f(r)| < \epsilon$ nous avons les majorations

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| &= |\lim_{q\to x} f(q) - \lim_{r\to a} f(r)| && \text{(13.113a)}\\
&\leqslant |\lim_{q\to x} f(x) - f(q_k)| + |f(q_k) - f(r_i)| + |f(r_i) - \lim_{r\to q} f(r)| && \text{(13.113b)}\\
&\leqslant 3\epsilon. && \text{(13.113c)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 13.72.
Soient des fonctions continues $d, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f et g sont égales sur $\mathbb{Q}$, alors elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Sinon nous pouvons utiliser les propriétés fondamentales des réels et de la continuité. Soit $x \in \mathbb{R}$; nous voulons montrer que $f(x) = g(x)$. En prenant par exemple le lemme 1.115, il existe une suite q_i de rationnels telle que $q_i \xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

Par ailleurs, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc en chaque point de $\mathbb{R}$ (théorème 7.69). Par la caractérisation séquentielle 7.74 de la continuité, nous avons

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f(q_i) = \lim_{i\to\infty} g(q_i) = g(x). \tag{13.114}$$

□

Proposition 13.73 ([1])**.**
Soit une fonction strictement croissante $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Alors la prolongation continue $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est également strictement croissante.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Notons $d = y - x$. Nous considérons des suites de rationnels $x_k \to x$ et $y_l \to y$ telles que pour tout k, $x_k \in B(x, d/3)$ et $y_k \in B(y, d/3)$. En particulier, $x_k < y_l$ pour tout k et l.

Soient des rationnels q et q' tels que pour tout k,

$$x_k < q < q' < y_k. \tag{13.115}$$

Pour trouver de tels rationnels, il suffit de les chercher dans $]x + \frac{d}{3}, y - \frac{d}{3}[$. Cet intervalle étant de longueur $d/3$, il contient des rationnels.

Vue la croissance de f sur $\mathbb{Q}$, nous avons, pour tout k :

$$f(x_k) < f(q) < f(q') < f(y_k), \tag{13.116}$$

et à la limite :

$$\tilde{f}(x) \leqslant f(q) < f(q') \leqslant \tilde{f}(y). \tag{13.117}$$

Notez que les inégalités strictes se changent en inégalités larges au passage à la limite. D'où l'utilisé de prendre *deux* rationnels entre x_k et y_k pour maintenir une inégalité stricte entre $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(y)$. □

13.7 Espace des fonctions continues

Définition 13.74.
*Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. L'**oscillation** sur I est le nombre*

$$\omega_f(I) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x). \tag{13.118}$$

Pour chaque x fixé, la fonction

$$x \mapsto \omega_f\big(B(x,\delta)\big) \tag{13.119}$$

est une fonction positive, croissante et a donc une limite (pour $\delta \to 0$). Nous notons $\omega_f(x)$ cette limite qui est l'**oscillation** de f en ce point. Une propriété immédiate est que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega_f(x_0) = 0$.

Lemme 13.75.
L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de fermés.

Démonstration. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Nous avons

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{13.120}$$

Il nous suffit donc de montrer que pour tout ϵ, l'ensemble

$$\{x \text{ tel que } \omega_f(x) < \epsilon\} \tag{13.121}$$

est ouvert. Soit en effet x_0 dans cet ensemble. Il existe δ tel que $\omega_f\big(B(x_0,\delta)\big) < \epsilon$. Si $x \in B(x_0,\delta)$, alors si on choisit δ' tel que $B(x,\delta') \subset B(x_0,\delta)$, nous avons $\omega_f\big(B(x,\delta')\big) < \epsilon$, ce qui justifie que $\omega_f(x) < \epsilon$ et donc que x est également dans l'ensemble considéré. □

Théorème 13.76.
L'ensemble des points de discontinuité d'une limite simple de fonctions continues est de première catégorie.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f. Nous devons écrire l'ensemble des points de discontinuité de f comme une union dénombrable d'ensembles tels que sur tout intervalle I, aucun de ces ensembles n'est dense. Nous savons déjà par le lemme 13.75 que l'ensemble des points de discontinuité de f est donné par

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{13.122}$$

Nous essayons donc de prouver que pour tout ϵ, l'ensemble

$$F = \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \epsilon\} \tag{13.123}$$

est nulle part dense. Soit

$$E_n = \bigcap_{i,j>n} \{x \text{ tel que } |f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon\}. \tag{13.124}$$

Nous montrons que cet ensemble est fermé en étudiant le complémentaire. Soit $x \notin E_n$; alors il existe un couple (i,j) tel que

$$|f_i(x) - f_j(x)| > \epsilon. \tag{13.125}$$

Par continuité, cette inégalité reste valide dans un voisinage de x. Donc il existe un voisinage de x contenu dans $\complement E_n$ et E_n est donc fermé.

De plus nous avons $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$. Ce dernier point est dû au fait que pour tout x, il existe N tel que $i, j > N$ implique $|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \epsilon$. Cela est l'expression du fait que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit I, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous voulons trouver un intervalle $J \subset I$ sur lequel f est continue. Nous écrivons I sous la forme

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap I). \tag{13.126}$$

Tous les ensembles $J_n = E_n \cap I$ ne peuvent être nulle part dense en même temps (à cause du théorème de Baire 9.73). Il existe donc un n tel que J_n contienne un ouvert J. Le but est de montrer que f est continue sur J. Pour ce faire, nous n'allons pas simplement majorer $|f(x) - f(x_0)|$ par ϵ lorsque $|x - x_0|$ est petit. Nous allons majorer l'oscillation de f sur $B(x_0, \delta)$ lorsque δ est petit. Pour cela nous prenons x_0 et x dans J et nous écrivons

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \tag{13.127}$$

À ce niveau nous rappelons que n est fixé par le choix de J, dans lequel ϵ est déjà inclus. Nous choisissons évidemment $|x - x_0| \leqslant \delta$ de telle sorte que le second terme soit plus petit que ϵ en vertu de la continuité de f_n. Pour le premier terme, pour tout $i, j \geqslant n$ nous avons

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon. \tag{13.128}$$

Si nous posons $j = n$ et $i \to \infty$, en tenant compte du fait que $f_i \to f$ simplement,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon. \tag{13.129}$$

Nous avons donc obtenu $|f(x) - f_n(x_0)| \leqslant 2\epsilon$. Cela signifie que dans un voisinage de rayon δ autour de x_0, les valeurs extrêmes prises par $f(x)$ sont $f_n(x_0) \pm 4\epsilon$. Nous avons donc prouvé que pour tout ϵ, il existe δ tel que

$$\omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) \leqslant 4\epsilon. \tag{13.130}$$

De là nous concluons que

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) = 0, \tag{13.131}$$

ce qui signifie que f est continue en x_0. □

Exemple 13.77
Une fonction discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue ailleurs. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \end{cases} \tag{13.132}$$

où par « $x = p/q$ » nous entendons que p/q est la fraction irréductible.

Cette fonction est discontinue sur $\mathbb{Q}$ parce que si $q \in \mathbb{Q}$ alors $f(q) \neq 0$ alors que dans tous voisinage de q il existe un irrationnel sur qui la fonction vaudra zéro.

Montrons que f est continue sur les irrationnels. Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x_0) = 0$. Mais si on prend un voisinage suffisamment petit de x_0, nous pouvons nous arranger pour que tous les rationnels aient un dénominateur arbitrairement grand. En effet si nous nous fixons un premier rayon $r_0 > 0$ alors il existe un nombre fini de fractions de la forme $1, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \ldots, \frac{k}{N}$ dans $B(x_0, r_0)$. Il suffit maintenant de choisir $0 < r \leqslant r_0$ tel que ces fractions soient toutes hors de $B(x_0, r)$. Dans cette boule nous avons $f < \frac{1}{N}$. Du coup f est continue en x_0. △

Définition 13.78 (Point périodique[201])**.**
Soit $f\colon I \to I$ une application d'un ensemble I dans lui-même. Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ alors on dit que x est un point n-périodique.

Lemme 13.79.
Soit I un segment[16] *de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f\colon I \to I$. Si K est un segment fermé avec $K \subset f(I)$ alors il existe un segment fermé $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.*

Démonstration. Mentionnons immédiatement que f est continue sur I qui est compact[17]. Par conséquent tous les nombres dont nous allons parler sont finis parce que f est bornée par le théorème 8.35.

Soit $K = [\alpha, \beta]$. Si $\alpha = \beta$ alors le segment $L = \{a\}$ convient. Nous supposons donc que $\alpha \neq \beta$ et nous considérons $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Vu que $a \neq b$ nous supposons $a < b$ (le cas $a > b$ se traite de façon similaire).

Nous posons

$$A = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) = \alpha\}. \tag{13.133}$$

C'est un ensemble borné par a et b. De plus il est fermé ; ce dernier point n'est pas tout à fait évident parce que f n'est pas définit sur $\mathbb{R}$ mais sur I qui est fermé, le corollaire 13.47 n'est donc pas immédiatement utilisable. Prouvons donc que $Z = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha\}$ est fermé. Si x_0 est hors de Z alors soit x_0 est dans I soit il est hors de I. Dans ce second cas, le complémentaire de I étant ouvert, on a un voisinage de x_0 hors de I et par conséquent hors de Z. Si au contraire $x_0 \in I$ alors il y a (encore) deux cas : soit $x_0 \in \text{Int}(I)$ soit x_0 est sur le bord de I. Dans le premier cas, le théorème des valeurs intermédiaires[18] fonctionne. Pour le second cas, nous supposons $x_0 = \max(I)$ (le cas $x_0 = \min(I)$ est similaire). Le théorème des valeurs intermédiaires dit que sur $[x_0 - \epsilon, x_0]$, $f \neq \alpha$ et en même temps, sur $]x_0, x_0 + \epsilon]$, nous sommes en dehors du domaine. Au final $\{f(x) = \alpha\}$ est fermé et A est alors fermé en tant que intersection de deux fermés.

L'ensemble A étant non vide ($a \in A$), il possède donc un maximum que nous nommons u :

$$u = \max(A). \tag{13.134}$$

Nous posons aussi

$$B = \{x \in [u, b] \text{ tel que } f(x) = \beta\} \tag{13.135}$$

qui est encore fermé, borné et non vide. Nous pouvons donc définir

$$v = \min(B). \tag{13.136}$$

Nous prouvons maintenant que $f\big([u, v]\big) = [\alpha, \beta]$. D'abord $f\big([u, v]\big)$ est un intervalle compact[19] contenant $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$. Par conséquent $[\alpha, \beta] \subset f\big([u, v]\big)$. Pour l'inclusion inverse supposons $t \in [u, v]$ tel que $f(t) > \beta$. Vu que $f(a) = \alpha$ et $\alpha < \beta$ le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in [a, t]$ tel que $f(t_0) = \beta$. Cela donne $t_0 < v$ et donc contredit la minimalité de v dans B. Nous en déduisons que $f\big([u, v]\big)$ ne contient aucun élément plus grand que β. Même jeu pour montrer que ça ne contient aucun élément plus petit que α.

En définitive, le segment $L = [u, v]$ fonctionne. □

Lorsque $I_2 \subset f(I_1)$ nous notons $I_1 \to I_2$ ou, si une ambiguïté est à craindre, $I_1 \xrightarrow{f} I_2$. Cette flèche se lit « recouvre ».

Lemme 13.80 ([168, 201])**.**
Soient les segments $I_0, \dots, I_{n-1}$ tels que nous ayons le cycle

$$I_0 \to I_1 \to \dots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{13.137}$$

Alors f^n admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

Démonstration. Nous prouvons les cas $n = 1$ et $n = 2$ séparément.

16. définition 8.33. Un segment est un intervalle fermé borné.
17. Par le lemme 8.7.
18. Théorème 13.50.
19. Corollaire 13.51 et théorème 7.86.

$\underline{n=1}$ Nous avons $I_0 \to I_0$, c'est-à-dire que $I_0 \subset f(I_0)$. Si $I_0 = [a,b]$ alors nous posons $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ pour certains $\alpha, \beta \in I_0$. Nous posons ensuite $g(x) = f(x) - x$.

Dans un premier temps, $g(\alpha) = a - \alpha \leqslant 0$ parce que $a =\in (I_0)$ et $\alpha \in I_0$. Pour la même raison, $g(\beta) = b - \beta \geqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset I_0$ tel que $g(t_0) = 0$. Nous avons donc $f(t_0) = t_0$.

$\underline{n=2}$ Nous avons $I_0 \to I_1 \to I_0$. Vu que $I_1 \subset f(I_0)$, le lemme 13.79 donne un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mézalors

$$J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1). \tag{13.138}$$

Nous avons donc $J_1 \xrightarrow{f^2} J_1$ et par le cas $n = 1$ traité plus haut, la fonction f^2 a un point fixe x_0 dans J_1. De plus

$$f(x_0) \in f(J_1) = I_1, \tag{13.139}$$

le point x_0 est donc bien celui que nous cherchions.

Cas général. Nous avons

$$I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{13.140}$$

Vu que $I_1 \subset f(I_0)$, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mais

$$I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1), \tag{13.141}$$

donc il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$. En procédant encore longtemps ainsi nous construisons les ensembles $J_1, \ldots, J_{n-1}$ tels que

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0 \tag{13.142}$$

tels que $I_k = f^k(J_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$. La dernière de ces inclusions est $I_{n-1} = f^{n-1}(J_{n-1})$, mais $I_{n-1} \to I_0$, c'est-à-dire que

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1}), \tag{13.143}$$

et il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 \subset f^n(J_n)$. Mais comme $J_n \subset J_0$ nous avons en particulier $J_n \subset f^n(J_n)$.

Cela donne un point fixe $x_0 \in J_n$ pour f^n. Par construction nous avons $J_n \subset J_{n-1} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0$ et donc $x_0 \in J_k$ pour tout k. En particulier

$$f^k(x_0) \in f^k(J_k) = I_k \tag{13.144}$$

pour tout k.

□

Théorème 13.81 (Théorème de Sarkowski[168, 201])**.**
Soit I, un segment de $\mathbb{R}$ et une application continue $f : I \to I$. Si f admet un point 3-périodique, alors f admet des points n-périodiques pour tout $n \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $a \in I$ un point 3-périodique pour f et notons $b = f(a)$, $c = f(b)$. Les points b et c sont également des points 3-périodiques. Quitte à renommer, nous pouvons supposer que a est le plus petit des trois. Il reste deux possibilités : $a < b < c$ et $a < c < b$. Nous traitons d'abord le premier cas.

Supposons $a < b < c$. Nous posons $I_0 = [a,b]$ et $I_1 = [b,c]$. Nous avons immédiatement $I_1 \subset f(I_0)$ et comme $f(b) = c$ et $f(c) = a$, $f(I_1)$ recouvre $[a,c]$ et donc recouvre en même temps I_1 et I_2. Nous avons donc $I_0 \to I_1$, $I_1 \to I_0$ et $I_1 \to I_1$.

$\underline{\textbf{Un point 1-périodique}}$ Nous avons $I_1 \to I_1$ qui prouve que f a un point fixe dans I_1. C'est le cas $n = 1$ du lemme 13.80. Voilà un point 1-périodique.

Un point 2-périodique Nous avons $I_0 \to I_1 \to I_0$. Par conséquent, le lemme 13.80 dit que f^2 a un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f(x_0) \in I_1$. Montrons que $f(x_0) \neq x_0$. Pour avoir $x_0 = f(x_0)$, il faudrait $x_0 \in I_0 \cap I_1 = \{b\}$. Mais b est un point 3-périodique, donc ne vérifiant certainement pas $f^2(b) = b$. Nous en déduisons que $f(x_0) \neq x_0$ et donc que x_0 est 2-périodique.

Un point 3-périodique On en a par hypothèse.

Un point n-périodique pour $n \geqslant 4$ Nous avons le cyle

$$I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \ldots \to I_1}_{\text{n-1}\,fois} \to I_0. \tag{13.145}$$

Le lemme donne alors un point fixe $x \in I_0$ pour f^n tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k = 1, \ldots, n-1$. Est-ce possible que $x = b$? Non parce que $f^2(b) = a \in I_0$ alors que $f^2(x) \in I_1$. Mais $I_0 \cap I_1 = \{b\}$.

Par conséquent la relation $f^k(x) \in I_1$ exclu d'avoir $f^k(x) = x$, et le point x est bien n-périodique.

Passons au cas $a < c < b$. Alors nous posons $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. Encore une fois $f(I_0)$ contient a et b, donc $I_0 \to I_0$ et $I_0 \to I_1$. Mais en même temps $f(I_1)$ contient a et c, donc $I_1 \to I_0$.

Nous pouvons donc refaire comme dans le premier cas, en inversant les rôles de I_0 et I_1. En particulier nous pouvons considérer le cycle

$$I_1 \to I_0 \to I_0 \to \ldots \to I_0 \to I_1. \tag{13.146}$$

□

13.8 Uniforme continuité

Définition 13.82.
*Une partie $A \subset \mathbb{R}^m$ est dite **bornée** s'il existe un $M > 0$ tel que $A \subset B(0, M)$. Le **diamètre** de la partie A est le nombre*

$$\mathrm{Diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\| \in [0, \infty]. \tag{13.147}$$

Lorsque A est borné, il existe un M tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout $x \in A$.

Lemme 13.83.
Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^m$, alors $\mathrm{Diam}(A) = \mathrm{Diam}(\bar{A})$.

Nous n'allons pas donner de démonstrations de ce lemme.

Si (x_n) est une suite et I est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, nous désignons par x_I la suite des éléments x_n tels que $n \in I$. Par exemple la suite $x_{\mathbb{N}}$ est la suite elle-même, la suite $x_{2\mathbb{N}}$ est la suite obtenue en ne prenant que les éléments d'indice pair.

Les suites x_I ainsi construites sont dites des **sous-suites** de la suite (x_n).

Pour une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, la continuité au point a signifie que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{13.148}$$

Le δ qu'il faut choisir dépend évidemment de ε, mais il dépend en général aussi du point a où l'on veut tester la continuité. C'est-à-dire que, étant donné un $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un δ qui fonctionne pour certains points, mais qui ne fonctionne pas pour d'autres points.

Il peut cependant également arriver qu'un même δ fonctionne pour tous les points du domaine. Dans ce cas, nous disons que la fonction est uniformément continue sur le domaine.

Définition 13.84.
*Une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est dite **uniformément continue** sur D si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in D, \|x - y\| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{13.149}$$

Il est intéressant de voir ce que signifie le fait de *ne pas* être uniformément continue sur un domaine D. Il s'agit essentiellement de retourner tous les quantificateurs de la condition (13.149) :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in D \text{ tel que } \|x - y\| < \delta \text{ et } \big|f(x) - f(y)\big| > \varepsilon. \tag{13.150}$$

Dans cette condition, les points x et y peuvent être fonction du δ. L'important est que pour tout δ, on puisse trouver deux points δ-proches dont les images par f ne soient pas ε-proches.

Exemple 13.85
Prenons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, et demandons nous pour quel δ nous sommes sûr d'avoir

$$|f(a+\delta) - f(a)| = \left|\frac{1}{a+\delta} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon. \tag{13.151}$$

Pour simplifier, nous supposons que $a > 0$. Nous calculons

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\delta} &< \varepsilon \\ \frac{\delta}{a(a+\delta)} &< \varepsilon \\ \delta &< \varepsilon a^2 + \varepsilon a \delta \\ \delta(1 - \varepsilon a) &< \varepsilon a^2 \\ \delta &< \frac{\varepsilon a^2}{1 - \varepsilon a}. \end{aligned} \tag{13.152}$$

Notons que, à ε fixé, plus a est petit, plus il faut choisir δ petit. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est donc pas uniformément continue. Cela correspond au fait que, proche de zéro, la fonction monte très vite. Une fonction uniformément continue sera une fonction qui ne montera jamais très vite. △

Proposition 13.86.
Quelques propriétés des fonctions uniformément continues.

(1) Toute application uniformément continue est continue ;

(2) la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue ;

Nous verrons qu'une application lipschitzienne est uniformément continue (proposition 13.259).

Une fonction peut être uniformément continue sur un domaine et pas sur un autre. Le théorème suivant donne une importante indication à ce sujet.

Théorème 13.87 (Heine)**.**
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Une fonction continue $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est uniformément continue sur K.

La démonstration qui suit est valable pour une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et utilise le fait que le produit cartésien de compacts est compact. Dans le cas de fonctions sur $\mathbb{R}$, nous pouvons modifier la démonstration pour ne pas utiliser ce résultat ; voir plus bas.

Démonstration. Nous allons prouver ce théorème par l'absurde. Nous commençons par écrire la condition (13.150) qui exprime que f n'est pas uniformément continue sur le compact K :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in K \text{ tels que } \|x - y\| < \delta \text{ et } \big|f(x) - f(y)\big| > \varepsilon. \tag{13.153}$$

En particulier (en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ pour tout n), pour chaque n nous pouvons trouver x_n et y_n dans K qui vérifient simultanément les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|x_n - y_n\| < \dfrac{1}{n} & \text{(13.154a)} \\ \big|f(x_n) - f(y_n)\big| > \varepsilon. & \text{(13.154b)} \end{cases}$$

Nous insistons que c'est le même ε pour chaque n. L'ensemble K étant compact, l'ensemble $K\times K$ est compact (théorème 9.66) et nous pouvons trouver une sous-suite convergente *du couple* (x_n,y_n) dans $K\times K$. Quitte à passer à ces sous-suites, nous nous supposons que (x_n,y_n) converge dans $K\times K$ et en particulier que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. Étant donné que pour chaque n elles vérifient $\|x_n-y_n\|<\frac{1}{n}$, les limites sont égales :

$$\lim x_n=\lim y_n=x. \tag{13.155}$$

L'ensemble K étant fermé, la limite x est dans K. Par continuité de f, nous avons finalement

$$\lim f(x_n)=\lim f(y_n)=f(x), \tag{13.156}$$

mais alors

$$\lim_{n\to\infty}\big|f(x_n)-f(y_n)\big|=0, \tag{13.157}$$

ce qui est en contradiction avec le choix (13.154b).

Tout ceci prouve que $f(K)$ est bornée supérieurement et que f atteint son supremum (qui est donc un maximum). Le fait que $f(K)$ soit borné inférieurement se prouve en considérant la fonction $-f$ au lieu de f.

□

Remarque 13.88.
Nous pouvons ne pas utiliser le fait que le produit de compacts est compact. Cela est particulièrement commode lorsqu'on considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ parce que dans ce cadre nous ne pouvons pas supposer connue la notion de produit d'espace topologiques.

Pour choisir les sous-suites (x_n) et (y_n), il suffit de prendre une sous-suite convergente de (x_n) et d'invoquer le fait que $\|x_n-y_n\|\leqslant\frac{1}{n}$. Les suites (x_n) et (y_n) étant adjacentes[20], la convergence de (x_n) implique la convergence de (y_n) vers la même limite.

Il est donc un peu superflus de parler de la convergence du couple (x_n,y_n).

Proposition 13.89 (Heine[202])**.**
Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est uniformément continue.

13.9 Fonctions sur un compact

Par le théorème des valeurs intermédiaires 13.50, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, et nous avons l'importante propriété suivante des fonctions continues sur un compact.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 8.35.

Théorème 13.90.
Si f est une fonction continue sur l'intervalle compact $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, son image est également un intervalle compact, et donc est de la forme $[m,M]$. Ceci découle du théorème 7.86 et le corollaire 13.51. Le maximum de f sur $[a,b]$ est la borne M qui est bien dans l'image (parce que $[m,M]$ est fermé). Idem pour le minimum m. □

13.10 Polynômes

L'algèbre des polynômes sur un anneau est définie en 3.145. Si $P\in A[X]$ et si $\alpha\in A$ nous avons également défini l'évaluation de P en α ; c'est la définition 3.147. Dans le cadre de l'analyse, lorsque nous considérons des polynômes, nous allons complètement confondre le polynôme avec la fonction qu'il définit.

20. Définition 8.23.

13.10.1 Polynômes sur les réels

Proposition 13.91.
Tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède une racine réelle.

Démonstration. Nous mettons le plus haut degré en facteur :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n-k}}. \tag{13.158}$$

Le terme $k = 0$ vaut $a_n x^n$ tandis que les autres sont de la forme (à coefficient près) $\frac{1}{x^l}$ pour un $l \geqslant 1$. Lorsque $x \to \infty$, chacun de ces termes s'annule (lemme 13.27). Nous avons donc

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty, \tag{13.159}$$

et de même, n étant impair, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 13.50 nous donne alors l'existence d'un réel sur lequel P s'annule. □

13.10.2 Polynômes sur les complexes

Nous allons parler de comportement asymptotique de polynômes définis sur $\mathbb{C}$. La topologique que nous considérons est celle de la compactification en un point décrite en 7.61.

Le lemme suivant donne une caractérisation de la limite en l'infini dans le compactifié $\hat{\mathbb{C}}$. Dans beaucoup de cas, cette caractérisation est prise comme la définition de la limite. Hélas, dans le Frido nous sommes des extrémistes et nous ne parvenons pas à dire le mot « limite » si il n'y a pas une topologie.

Lemme 13.92 ([1]).
Nous considérons la compatification en un point d'Alexandrov[21]*. Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous avons $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|z| > R$ implique $|f(z)| > M$.*

Démonstration. Souvenons-nous que, en général[22], nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \tag{13.160}$$

si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage W de a tel que $z \in W\backslash\{a\}$ implique $f(z) \in V$.

Précisons encore un point de notation. Si K est une partie de $\mathbb{C}$, nous notons K^c son complémentaire dans $\mathbb{C}$, pas dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Ceci étant dit, nous passons à la preuve.

Sens direct Nous supposons que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Soit $M > 0$; nous considérons le voisinage $V = \overline{B(0,M)}^c \cup \{\infty\}$. Par définition de la limite, il existe un voisinage W de ∞ tel que $z \in W \Rightarrow f(z) \in V\backslash\{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c$. Ce voisinage est de la forme $K^c \cup \{\infty\}$. Vu que K est compact, il est borné et il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$.

Avec tout cela nous avons la chaîne suivante d'implications :

$$|z| > R \Rightarrow z \in K^c \Rightarrow z \in W \Rightarrow f(z) \in V\backslash\{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c \Rightarrow |f(z)| > M. \tag{13.161}$$

C'est bien la propriété que nous voulions.

Sens réciproque Soit un voisinage V de ∞. Nous avons $V = K^c \cup \{\infty\}$ où K est compact dans $\mathbb{C}$. Il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$.

Par hypothèse, il existe R tel que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > M$. Soit $W = \overline{B(0,R)}^c \cup \{\infty\}$. Nous avons la chaîne

$$z \in W \Rightarrow |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M \Rightarrow f(z) \in K^c \Rightarrow f(z) \in V. \tag{13.162}$$

21. Définition 7.61.
22. Définition 7.62.

□

Proposition 13.93 ([1]).
Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \end{aligned} \tag{13.163}$$

où nous sous-entendons que $a_n \neq 0$. La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est équivalente[23] *en l'infini à la fonction*

$$\begin{aligned} w\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^+ \\ z &\mapsto |a_n z^n|. \end{aligned} \tag{13.164}$$

Démonstration. Nous voudrions prouver qu'il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{z\to\infty} \alpha(z) = 0$ et

$$|\sum_{i=0}^{n} a_i z^i| = \big(1 + \alpha(z)\big)|a_n z^n|. \tag{13.165}$$

Nous trouvons une telle fonction en isolant simplement $\alpha(z)$ de cette égalité. Nous trouvons

$$\alpha(z) = |\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a_n} z^{i-n}| - 1. \tag{13.166}$$

Elle vérifie immédiatement (13.165). Le point qui fait intervenir la topologie de est de vérifier que $\lim_{z\to\infty} \alpha(z) = 0$. Le terme $i = 0$ de la somme vaut 1. Il suffit donc de montrer que pour $i \neq 0$ nous avons

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^{n-i}} = 0. \tag{13.167}$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous devons prouver qu'il existe un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$ tel que

$$|\frac{1}{z^{n-i}} - 0| \leqslant \epsilon \tag{13.168}$$

pour tout $z \in V$.

En utilisant la proposition 1.131 nous avons déjà

$$|\frac{1}{z^{n-i}}| = \frac{1}{|z^{n-i}|} = \frac{1}{|z|^{n-i}}. \tag{13.169}$$

Soit $R > 0$ tel que $\frac{1}{R} < \epsilon$. Nous considérons le voisinage $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ de ∞. Dans ce voisinage, nous avons

$$\frac{1}{|z|^{n-i}} \leqslant \frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{R} < \epsilon. \tag{13.170}$$

Et voila. □

Le lemme suivant parle de polynôme sur $\mathbb{C}$. Vous pouvez l'adapter à $\hat{\mathbb{R}}$ et $\bar{\mathbb{R}}$.

Lemme 13.94.
Si $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un polynôme, alors $|P|$ atteint une borne inférieure globale.

Démonstration. Nous savons, par l'équivalence prouvée dans la proposition 13.93 que $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. Soit $a > 0$ dans $\mathbb{R}$. Par le lemme 13.92 il existe un $R > a$ tel que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > |f(a)|$.

La fonction $|P|$ est continue sur le compact $\overline{B(0,R)}$. Soit z_0 le point de minimum[24] de $|P|$ sur $\overline{B(0,R)}$.

23. Définition 7.36.
24. Théorème de Weierstrass 7.99.

Nous devons prouver que z_0 donne même un minimum global. Vu que $a \in \overline{B(0,R)}$ nous avons

$$|f(z_0)| \leqslant |f(a)|. \tag{13.171}$$

Si $z \in \overline{B(0,R)}^c$, nous avons

$$|f(z)| > |f(a)| \geqslant |f(z_0)|. \tag{13.172}$$

Donc ce z_0 est un minimum sur $B(0,R)$ et sur $\overline{B(0,R)}^c$. Bref, un minimum global. □

Lemme 13.95.
Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i. \end{aligned} \tag{13.173}$$

La fonction P est équivalente à $a_0 + a_1 z$ en $z = 0$.

Démonstration. En posant $g(z) = a_0 + a_1 z$, nous devons trouver une fonction α telle que

$$P(z) = \big(1 + \alpha(z)\big)g(z). \tag{13.174}$$

Si $a_0 \neq 0$, il existe un voisinage de $z = 0$ sur lequel la fonction

$$\alpha(z) = \frac{z^2 \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2}}{a_0 + a_1 z} \tag{13.175}$$

existe. Il n'y a aucun problème à ce que $\alpha(z) \to 0$ pour $z \to 0$[25], et un simple calcul[26] donne (13.175).

Si par contre $a_0 = 0$, nous faisons le calcul intermédiaire suivant :

$$\alpha(z)g(z) = P(z) - g(z) = z^2 \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2}, \tag{13.176}$$

et donc, en isolant $\alpha(z)$ et en simplifiant par z, nous voyons que la fonction α définie par

$$\alpha(z) = \frac{z}{a_1} \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2} \tag{13.177}$$

fonctionne. □

Proposition 13.96 ([203, 1])**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) L'équation $z^2 = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

(2) Pour tout l, l'équation $z^{2^l} = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

Nous ne disons pas que ces solutions sont uniques[27]*.*

Démonstration. Pour prouver (1), l'équation $z^2 = a + bi$ a pour solution $\pm\xi$ où

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{13.178}$$

Nous n'avons en fait pas besoin de montrer que $\pm\xi$ sont toutes deux des solutions, ni que ce sont les seules. Un calcul direct montre que $\xi^2 = a + bi$ et nous sommes content.

25. En remarquant toutefois que c'est une limite à deux dimensions. Sachez la définir.
26. En fait, la formule (13.175) est obtenue en isolant $\alpha(z)$ dans (13.174).
27. Comme vous en conviendrez en pensant à $z^2 = 1$ qui a déjà les solutions 1 et -1.

Pour (2), nous faisons une récurrence sur l. Nous savons que

$$z^{2^{k+1}} = (z^{2^k})^2. \tag{13.179}$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^{2^k} = a + bi$; un tel ξ existe par hypothèse de récurrence. Alors si z est tel que $z^2 = \xi$, nous avons

$$z^{2^{k+1}} = a + bi. \tag{13.180}$$

□

Le théorème de d'Alembert possède de nombreuses démonstrations. En voici une qui à ma connaissance est celle demandant le moins d'analyse ; une démonstration à base de théorie de Galois peut être trouvée dans [40, 204]. Si vous lisez ces lignes pour savoir qu'un polynôme de degré n possède au *maximum* n racines, ce n'est pas ici qu'il faut regarder, mais le corollaire 3.178.

Théorème 13.97 (d'Alembert[203])**.**
Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Démonstration. Nous effectuons une preuve tout à la fois par l'absurde et par récurrence en supposant que le polynôme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \end{aligned} \tag{13.181}$$

n'a pas de racines dans $\mathbb{C}$, et que n soit le plus petit entier pour lequel un tel polynôme existe. Nous notons

$$n = 2^k m \tag{13.182}$$

où m est impair.

Le lemme 13.94 donne un point z_0 qui réalise le minimum global de $|f|$ sur $\mathbb{C}$. Nous posons $g(z) = f(z_0 + z)$ et nous définissons ses coefficients A_i par

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i z^i. \tag{13.183}$$

Nous avons $A_n = 1$ et $|A_0| = |f(z_0)|$. Soit A_r le premier à être non nul parmi les A_1, A_2, ...

Si $r < n$ Par hypothèse de récurrence, il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^r = -A_1/A_r$. Nous avons

$$g(t\xi) = A_0 + \frac{-A_r t^r A_0}{A_r} + t^{r+1} \sum_{i=r+1}^{n} A_i \xi^i t^{i-r-1}. \tag{13.184}$$

En notant $P(t)$ le dernier polynôme, nous pouvons écrire cela sous forme compacte :

$$g(t\xi) = A_0 - t^r A_0 + t^{r+1} P(t). \tag{13.185}$$

Vu que

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{r+1}P(t)}{t^r|A_0|} = \lim_{t\to 0} tP(t) = 0, \tag{13.186}$$

il existe $t_0 > 0$ tel que

$$|t_0^{r+1} P(t_0)| < |A_0 t_0 r|. \tag{13.187}$$

Nous choisissons de plus $t_0 < 1$, de telle sorte que $1 - t^r > 0$. Avec cela nous avons

$$|g(t\xi)| \leqslant |A_0|(1 - t^r) + |t^{r+1}P(t)| = |A_0| \underbrace{-t^r|A_0| + |t^{r+1}P(t)|}_{<0} < |A_0|. \tag{13.188}$$

Or $|A_0|$ était un minimum global de $|g|$. Contradiction.

Si $r = n$ Dans ce cas,

$$g(z) = f(z_0 + z) = A_0 + z^n, \tag{13.189}$$

et nous rappelons que $n = 2^k m$ où m est impair. Nous allons trouver une contradiction dans les quatre cas $\operatorname{Re} A_0 > 0$, $\operatorname{Re}(A_0) < 0$, $\operatorname{Im}(A_0) > 0$ et $\operatorname{Im}(A_0) < 0$. Bien entendu ces cas se recouvrent largement, mais en toute généralité, nous avons besoin des quatre.

Si $\operatorname{Re}(A_0) > 0$ La proposition 13.96 nous permet de considérer $v \in \mathbb{C}$ tel que $v^{2^k} = -1$. Nous avons alors

$$g(tv) = A_0 + (tv)^n = A_0 + t^n (v^{2^k})^m = A_0 + t^n (-1)^m = A_0 - t^n \tag{13.190}$$

parce que m est impair. Nous avons $\operatorname{Im}\big(g(tv)\big) = \operatorname{Im}(A_0)$. Si t est assez petit pour que $t^n < |\operatorname{Re}(A_0)|$ nous avons aussi $|\operatorname{Re}\big(g(tv)\big)| < |\operatorname{Re}(A_0)|$. Donc

$$|g(tv)|^2 = |\operatorname{Re}\big(g(tv)\big)|^2 + |\operatorname{Re}\big(g(tv)\big)|^2 < |\operatorname{Re}(A_0)|^2 + |\operatorname{Im}(A_0)|^2 = |A_0|^2. \tag{13.191}$$

Donc $|g(tv)| < |A_0|$. Contradiction.

Si $\operatorname{Re}(A_0) < 0$ Nous prenons $v = 1$, et même histoire.

Si $\operatorname{Im}(A_0) < 0$ Nous prenons $w \in \mathbb{C}$ tel que

$$w^{2^k} = i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{13.192}$$

Là, il y a un peu d'arrachage de cheveux pour bien voir les cas. La difficulté est que les puissances de i alternent entre 1, -1, i et $-i$. Vu que m est impair, nous avons un l tel que $m = 2l + 1$. Nous subdivisons les cas l pair et l impair.

Si l est pair Alors d'une part $\frac{1}{2}(m-1) = l$ est pair et donc

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = 1. \tag{13.193}$$

Et d'autre part, $i^{2l+1} = (-1)^l i = i$. En tout,

$$i^m (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{13.194}$$

Si l est impair Alors $\frac{1}{2}(m-1) = l$ et $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = -1$. Mais en même temps, $i^{2l+1} = -i$, ce qui donne encore une fois

$$i^m (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{13.195}$$

Bref, que l soit pair ou impair, nous avons $i^m (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i$.

Nous avons donc $\operatorname{Re}\big(g(tw)\big) = \operatorname{Re}(A_0)$ et $\operatorname{Im}\big(g(tw)\big) < \operatorname{Im}(A_0)$. Encore contradiction.

Si $\operatorname{Im}(A_0) = 0$ Même chose que ce que nous venons de faire, mais avec

$$w^{2^k} = -i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{13.196}$$

□

Corollaire 13.98.
Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Corollaire 13.99 ([1])**.**
Tout polynôme de degré 3 à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Démonstration. Soient les racines λ_1, λ_2 et λ_3 du polynôme en question. Toutes trois sont dans $\mathbb{C}$. Supposons que λ_1 ne soit pas réelle. Alors λ_2 ou λ_3 doit être égale à $\bar{\lambda}_1$. Disons λ_2. Nous avons donc les racines λ_1, $\bar{\lambda}_1$ et λ_3. Le polynôme se factorise alors en

$$a(X-\lambda_1)(X-\bar{\lambda}_1)(X-\lambda_3). \tag{13.197}$$

Le coefficient a doit être réel parce qu'il est le coefficient du terme en X^3 (réel par hypothèse). Si λ_3 n'est pas réel, alors ce polynôme ne peut pas avoir des coefficients réels. Entre autres parce que terme indépendant est $a|\lambda_1|^2\lambda_3$, qui est réel si et seulement si λ_3 est réel[28]. □

Tant que vous y êtes, vous pouvez voir que le polynôme (13.197) est à coefficient réels si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Exemple 13.100
Toute application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a un vecteur propre. En effet si $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire, son polynôme caractéristique χ_R est de degré 3. Le corollaire 13.99 indique qu'un tel polynôme possède au moins une racine réelle. Une telle racine est une valeur propre de R par le théorème 11.150. △

Définition 13.101.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de χ_u, l'ordre de l'annulation est la ***multiplicité algébrique*** *de la valeur propre λ de u. À ne pas confondre avec la* ***multiplicité géométrique*** *qui sera la dimension de l'espace propre.*

Proposition 13.102.
Un polynôme irréductible à coefficients réels est soit de degré un soit de degré 2 avec un discriminant négatif.

Démonstration. Soit un polynôme P à coefficients réels de degré plus grand que 1. Alors le théorème de d'Alembert-Gauss (théorème 13.97) implique l'existence d'une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est un réel, P est réductible. Si α n'est pas réel, alors conjugué complexe $\bar{\alpha}$ est également une racine. Par conséquent les polynômes $(X-\alpha)$ et $(X-\bar{\alpha})$ divisent P dans $\mathbb{C}[X]$..

Ces deux polynômes sont premiers entre eux parce que

$$a(X-\alpha)+b(X-\bar{\alpha})=0 \tag{13.198}$$

implique $a=b=0$. Par conséquent le produit

$$X^2-(\alpha+\bar{\alpha})X+\alpha\bar{\alpha} \tag{13.199}$$

divise également P. Ce dernier est un polynôme à coefficients réels de degré 2. Donc tout polynôme de degré 3 ou plus est réductible. □

Proposition 13.103.
Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme possède au moins une valeur propre.

Démonstration. Soit un endomorphisme u sur E. Le théorème 11.150 dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique χ_u. Or ce polynôme possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert 13.97. □

13.11 Dérivée : exemples introductifs

13.11.1 La vitesse

Lorsqu'un mobile se déplace à une vitesse variable, nous obtenons la *vitesse instantanée* en calculant une vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus petits. Si le mobile a un mouvement

28. Notez l'utilisation du lemme 1.133.

donné par $x(t)$, la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 5$ sera

$$v_{\text{moy}}(2 \to 5) = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2}.$$

Plus généralement, la vitesse moyenne entre 2 et $2 + \Delta t$ est donnée par

$$v_{\text{moy}}(2 \to 2 + \Delta t) = \frac{x(2 + \Delta t) - x(2)}{\Delta t}.$$

Cela est une fonction de Δt. Oui, mais je te rappelle qu'on a dans l'idée de calculer une vitesse instantanée, c'est-à-dire de voir ce que vaut la vitesse moyenne sur un intervalle très très très très petit. La notion de limite semble toute indiquée pour décrire mathématiquement l'idée physique de vitesse instantanée.

Nous allons dire que la vitesse instantanée d'un mobile est la limite quand Δt tend vers zéro de sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps Δt, ou en formule :

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}. \tag{13.200}$$

13.11.2 La tangente à une courbe

Passons maintenant à tout autre chose, mais toujours dans l'utilisation de la notion de limite pour résoudre des problèmes intéressants. Comment trouver l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$?

Essayons de trouver la tangente au point P donné de la courbe donnée à la figure 13.1.

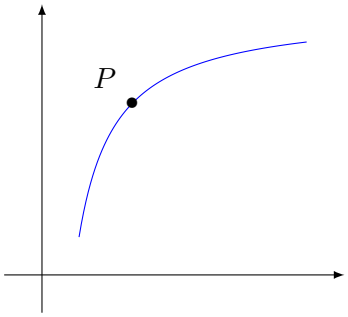


FIGURE 13.1 – Comment trouver la tangente à la courbe au point P ?

La tangente est la droite qui touche la courbe en un seul point sans la traverser. Afin de la construire, nous allons dessiner des droites qui touchent la courbe en P et un autre point Q, et nous allons voir ce qu'il se passe quand Q est très proche de P. Cela donnera une droite qui, certes, touchera la courbe en deux points, mais en deux points *tellement proches que c'est comme si c'étaient les mêmes*. Tu sens que la notion de limite va encore venir.

Nous avons placé le point, sur la figure 13.2, le point P en a et le point Q un peu plus loin x. En d'autres termes leurs coordonnées sont

$$P = \big(a, f(a)\big) \qquad\qquad Q = \big(x, f(x)\big). \tag{13.201}$$

Comme tu devrais le savoir sans même regarder la figure 13.2, le coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points est donné par

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{13.202}$$

et bang ! Encore le même rapport que celui qu'on avait trouvé à l'équation (13.200) en parlant de vitesses. Si tu regardes la figure 13.3, tu verras que réellement en faisant tendre x vers a on obtient la tangente.

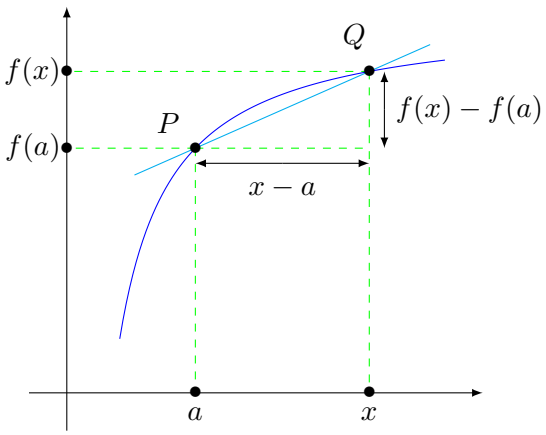


FIGURE 13.2 – Traçons d'abord une corde entre le point P et un point Q un peu plus loin.

13.11.3 L'aire en dessous d'une courbe

Encore un exemple. Nous voudrions bien pouvoir calculer l'aire en dessous d'une courbe. Nous notons $S_f(x)$ l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x, c'est-à-dire l'aire bleue de la figure 13.4.

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x+\Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x+\Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x+\Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \tag{13.203}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S_f(x+\Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \tag{13.204}$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en dessous de f. Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

Nous avons déjà vu que calculer la dérivée d'une fonction n'est pas très compliqué. Aussi étonnant que cela puisse paraitre, il se fait que le processus inverse est très compliqué : il est en général extrêmement difficile (et même souvent impossible) de trouver une fonction dont la dérivée est une fonction donnée.

Une fonction dont la dérivée est la fonction f s'appelle une **primitive** de f, et la fonction qui donne l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x est notée

$$S_f(x) = \int_0^x f(t)dt. \tag{13.205}$$

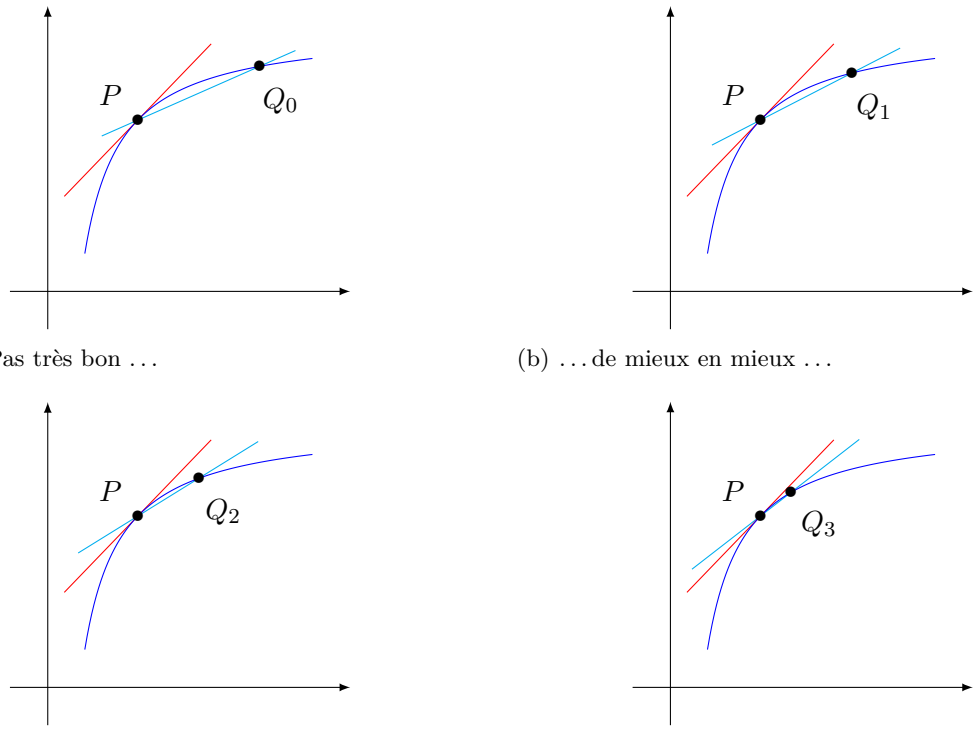
Nous pouvons nous demander si, pour une fonction f donnée, il existe une ou plusieurs primitives, c'est-à-dire s'il existe une ou plusieurs fonctions F telles que $F' = f$. La réponse viendra...

13.12 Dérivation de fonctions réelles

On considère dans la suite une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, où $a \in A \subset \mathbb{R}$; cependant, les notions de continuité et de dérivabilité se généralisent immédiatement au cas de fonctions à valeurs vectorielles ; la notion de continuité se généralise au cas des fonctions à plusieurs variables (la notion de dérivabilité est remplacée par celle de différentiabilité dans ce cadre).

Définition 13.104.
*La fonction f est **dérivable** en a si $a \in \operatorname{int} A$ et si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



(a) Pas très bon ...
(b) ...de mieux en mieux ...
(c) ...de mieux en mieux ...
(d) ...presque parfait

FIGURE 13.3 – Recherche de la tangente par approximations successives.

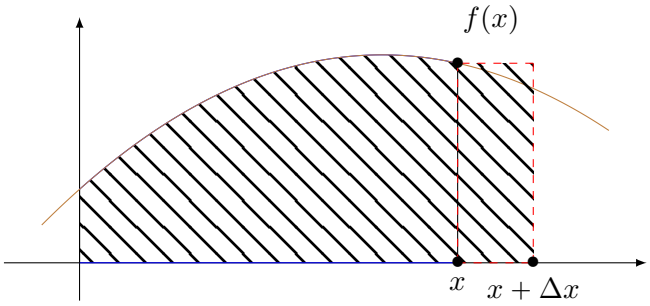


FIGURE 13.4 – L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime l'augmentation de l'aire lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$.

existe. On note alors cette quantité $f'(a)$, c'est le nombre dérivé de f en a. La ***fonction dérivée*** *de f est*

$$\begin{aligned} f' \colon A' &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned} \tag{13.206}$$

définie sur l'ensemble noté A' des points a où f est dérivable.

Exemple 13.105
Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est continue et dérivable. Exceptionnellement (bien qu'on sache que la dérivabilité implique la continuité), montrons ces deux assertions séparément.

Continuité Pour prouver la continuité au point $a \in \mathbb{R}$ nous devons montrer que

$$\lim_{x \to a} x = a \tag{13.207}$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \, |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \epsilon \tag{13.208}$$

ce qui est clair en prenant $\delta = \epsilon$.

Dérivabilité Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons la limite du quotient différentiel

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{x-a}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} 1 = 1 \tag{13.209}$$

ce qui prouve que f est dérivable et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de $\mathbb{R}$.

On a donc montré que la fonction $x \mapsto x$ est continue, dérivable, et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de son domaine.

△

Proposition 13.106.
Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Démonstration. Soit I un intervalle sur lequel la fonction f est dérivable, et soit $x_0 \in I$. Nous allons prouver la continuité de f en x_0. Le fait que la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{13.210}$$

existe implique a fortiori que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0. \tag{13.211}$$

Cela signifie la continuité de f en vertu du critère 13.63. □

Théorème 13.107.
Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Démonstration. Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous supposons que f n'est pas continue en a et nous allons en déduire qu'elle n'est pas non plus dérivable en a. Pour cela nous considérons le lien entre limite et continuité donné dans le théorème 13.63. Nier que f est continue en a revient à dire qu'il existe un voisinage V de $f(a)$ tel que

$$\forall r > 0,\ \exists \epsilon < r \text{ tel que } f(a+\epsilon) \notin V. \tag{13.212}$$

Si $B\big(f(a), R\big) \subset V$ [29], et si $r = 1/n$, nous construisons une suite $\epsilon_n \to 0$ telle que

$$|f(a+\epsilon_n) - f(a)| > R. \tag{13.213}$$

Avec cela nous avons

$$\frac{|f(a+\epsilon_n)-f(a)|}{\epsilon_n} > \frac{R}{\epsilon_n} \to \infty. \tag{13.214}$$

Donc la fonction f ne peut pas être dérivable en a. □

Remarque 13.108.
La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : il existent bien des fonctions qui sont continues à un point x_0 mais qui ne sont pas dérivables en x_0. La fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, par exemple est continue sur tout $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Si f est une fonction dérivable, il peut arriver que la fonction dérivée f' soit elle-même dérivable. Dans ce cas nous notons f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la fonction f'. Cette fonction f'' est la **dérivée seconde** de f. Elle peut encore être dérivable ; dans ce cas nous notons $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite. Nous définissons $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée n^{e}de f. Nous posons évidemment $f^{(0)} = f$.

29. Existence par la définition de la topologie métrique 7.88.

13.12.1 Exemples

Exemple 13.109
Commençons par la fonction $f(x) = x$. Dans ce cas nous avons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1. \tag{13.215}$$

La dérivée est donc 1. △

Proposition 13.110.
La dérivé de la fonction $x \mapsto x$ vaut 1, en notations compactes : $(x)' = 1$.

Démonstration. D'après la définition de la dérivée, si $f(x) = x$, nous avons

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x + \epsilon) - x}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1, \tag{13.216}$$

et c'est déjà fini. □

13.12.1.1 La fonction carré

Prenons ensuite $f(x) = x^2$. En utilisant le produit remarquable $(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$ nous trouvons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a. \tag{13.217}$$

Lorsque $x \to a$, cela devient $2a$. Nous avons par conséquent

$$f'(x) = 2x. \tag{13.218}$$

Lemme 13.111.
Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Démonstration. Utilisons la définition, et remplaçons f par sa valeur :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} && \text{(13.219a)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x + \epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} && \text{(13.219b)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - x^2}{\epsilon} && \text{(13.219c)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon(2x + \epsilon)}{\epsilon} && \text{(13.219d)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} (2x + \epsilon) && \text{(13.219e)}\\
&= 2x, && \text{(13.219f)}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver. □

13.12.1.2 La fonction racine carré

Considérons maintenant la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}\\
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{x})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}.
\end{aligned} \tag{13.220}$$

Lorsque $x \to 0$, nous obtenons

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \tag{13.221}$$

Notons que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ n'existe pas en $x = 0$. En effet elle serait donnée par le quotient

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{13.222}$$

Mais si x devient très petit, la dernière fraction tend vers l'infini.

13.12.2 Interprétation géométrique de la dérivée : tangente

Considérons le **graphe** de la fonction f sur I, c'est-à-dire l'ensemble

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \text{ tel que } x \in I\big\}. \tag{13.223}$$

Le nombre

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{13.224}$$

est la pente de la droite qui joint les points $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(a, f(a)\big)$, voir la figure 13.5.

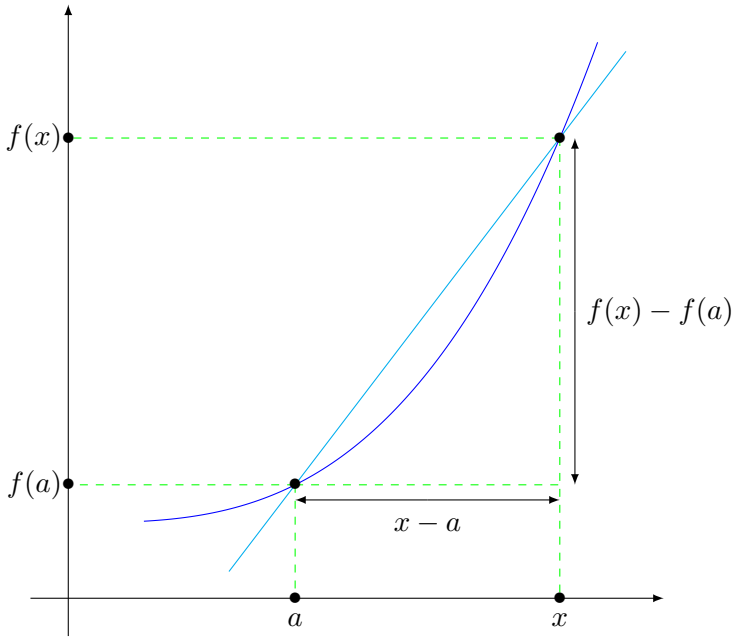


FIGURE 13.5 – Le coefficient directeur de la corde entre a et x.

Étant donné que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $\big(a, f(a)\big)$, l'équation de la tangente est

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \tag{13.225}$$

13.12.3 Interprétation géométrique de la dérivée : approximation affine

Le fait que la fonction f soit dérivable au point $a \in I$ signifie que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \tag{13.226}$$

pour un certain nombre ℓ. Cela peut être récrit sous la forme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell = 0, \tag{13.227}$$

ou encore

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-\ell(x-a)}{x-a}=0. \tag{13.228}$$

Introduisons la fonction

$$\alpha(t)=\frac{f(a+t)-f(a)-t\ell}{t}. \tag{13.229}$$

Cette fonction est faite exprès pour que

$$\alpha(x-a)=\frac{f(x)-f(a)-\ell(x-a)}{x-a}; \tag{13.230}$$

par conséquent $\lim_{x\to a}\alpha(x-a)=0$. Nous récrivons l'équation (13.230) sous la forme

$$f(x)-f(a)-\ell(x-a)=(x-a)\alpha(x-a). \tag{13.231}$$

Le second membre tend vers zéro lorsque x tend vers a avec une « vitesse au carré » : c'est le produit de deux facteurs tous deux tendant vers zéro. Si x n'est pas très loin de a, il n'est donc pas une mauvaise approximation de dire

$$f(x)-f(a)-\ell(x-a)\simeq 0, \tag{13.232}$$

c'est-à-dire

$$f(x)\simeq f(a)+f'(a)(x-a). \tag{13.233}$$

Nous avons retrouvé l'équation (13.225). La manipulation que nous venons de faire revient donc à dire que la fonction f, au voisinage de a, est bien approximée par sa tangente.

L'équation (13.233) peut être aussi écrite sous la forme

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\Delta x \tag{13.234}$$

qui est une approximation d'autant meilleure que Δx est petit.

13.12.4 Développement limité au premier ordre

Si une fonction est dérivable en a alors elle peut être approximée « au premier ordre » par une formule simple qui sera généralisé pour des dérivées d'ordre supérieurs avec les séries de Taylor, théorème 13.359.

Proposition 13.112 (Développement limité au premier ordre)**.**
Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors is existe une fonction $\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\alpha(h) \tag{13.235}$$

et

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0. \tag{13.236}$$

Démonstration. La fonction f étant dérivable en a nous avons l'existence de la limite suivante :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{13.237}$$

ce qui revient à dire qu'en définissant la fonction β par

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\beta(h) \tag{13.238}$$

alors $\beta(h)\to 0$ lorsque $h\to 0$. En multipliant par h et en nommant $\alpha(h)=h\beta(h)$ nous trouvons le résultat :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\alpha(h) \tag{13.239}$$

avec

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\beta(h)=0. \tag{13.240}$$

□

13.13 Règles de calcul

D'abord une dérivée facile, qui sera utile pour démontrer la formule de dérivation d'un quotient.

Lemme 13.113.
Nous avons :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{13.241}$$

Démonstration. En posant $f(x) = 1/x$, nous avons le calcul

$$\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = \frac{\frac{1}{x+\epsilon} - \frac{1}{x}}{\epsilon} = \frac{x - (x+\epsilon)}{\epsilon x(x+\epsilon)} = \frac{-1}{x(x+\epsilon)}. \tag{13.242}$$

Nous trouvons le résultat en passant à la limite et en tenant compte de la proposition 13.20 sur la limite d'un quotient. □

Proposition 13.114 ([205, 206, 207])**.**
Nous avons les règles suivantes.

(1) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ est dérivable en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a). \tag{13.243}$$

(2) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (λf) est dérivable en a et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a). \tag{13.244}$$

(3) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{13.245}$$

Cette formule est appelée ***règle de Leibnitz****.*

(4) Soient deux intervalles I, J dans $\mathbb{R}$. Soient des fonctions $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Soit encore $a \in I$. SI f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{13.246}$$

(5) Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ des fonction sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$; supposons que $g(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{13.247}$$

En particulier, la dérivation est une opération linéaire sur l'espace des fonctions infiniement dérivables.

Démonstration. Point par point.

Pour (1)

Pour (2) Écrivons la définition de la dérivée avec (λf) au lieu de f, et calculons un petit peu :

$$(\lambda f)'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\lambda f)(x+\epsilon) - (\lambda f)(x)}{\epsilon} \tag{13.248a}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\lambda\big(f(x+\epsilon)\big) - \lambda f(x)}{\epsilon} \tag{13.248b}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \lambda \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \tag{13.248c}$$

$$= \lambda \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \tag{13.248d}$$

$$= \lambda f'(x). \tag{13.248e}$$

Pour (3), règle de Leibnitz La définition de la dérivée dit que

$$(fg)'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon}. \tag{13.249}$$

La subtilité est d'ajouter au numérateur la quantité $-f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon)$, ce qui est permis parce que cette quantité est nulle[30]. Le numérateur de (13.249) devient donc

$$\begin{aligned} &f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon) - f(x)g(x) \\ &\qquad = g(x+\epsilon)\big(f(x+\epsilon) - f(x)\big) + f(x)\big(g(x+\epsilon) - g(x)\big), \end{aligned} \tag{13.250}$$

où nous avons effectué deux mises en évidence. Étant donné que nous avons deux termes, nous pouvons couper la limite en deux :

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon)\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \qquad + \lim_{\epsilon\to 0} f(x)\frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \quad + f(x) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{13.251}$$

où nous avons utilisé le théorème 13.23 pour scinder la première limite en deux, ainsi que la propriété (13.24) pour sortir le $f(x)$ de la limite dans le second terme. Maintenant, dans le premier terme, nous avons évidemment[31] $\lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon) = g(x)$. Les limites qui restent sont les définitions classiques des dérivées de f et g au point x :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) - f(x)g'(x), \tag{13.252}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour (4) Nous posons $b = f(a)$ et nous considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} u\colon J &\to \mathbb{R} \\ y \mapsto u(y) &= \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases} \end{aligned} \tag{13.253}$$

Vu que g est dérivable en b, la seconde ligne existe et u est continue en $y = b = f(a)$. C'est la définition de la dérivée.

Mais f est continue en a, donc $u \circ f$ est également continue en a, et nous avons

$$\lim_{x\to a}(u \circ f)(x) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{13.254}$$

En récrivant la définition de u en $f(x)$, l'expression suivante est une fonction continue de x :

$$u\big(f(x)\big) = \begin{cases} \frac{g\big(f(x)\big)-g(b)}{f(x)-b} & \text{si } f(x) \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases} \tag{13.255}$$

Si $f(x) \neq b$ nous avons :

$$g\big(f(x)\big) - g(b) = u\big(f(x)\big)\big(f(x) - b\big). \tag{13.256}$$

Si par contre $f(x) = b$, en réalité, l'égalité (13.256) est encore valable parce qu'elle se résume à $0 = 0$. Nous divisons par $x - a$ et nous avons l'égalité

$$\frac{g\big(f(x)\big) - f\big(f(a)\big)}{x-a} = u\big(f(x)\big)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \tag{13.257}$$

30. Nous avons déjà faut le coup d'ajouter et enlever la même chose durant la démonstration du théorème 13.23. C'est une technique assez courante en analyse.

31. Pas tout à fait évidemment : selon le théorème 13.63, *limite et continuité*, il faut que g soit continue.

qui est valable sur $I\backslash\{a\}$.
Il ne s'agit pas maintenant de prendre la limite $x \to a$ des deux côtés, parce que la limite du membre de gauche est précisément ce que ce théorème s'efforce de prouver exister. Nous montrons que la limite du membre de gauche existe en montrant que celle de droite existe.
D'une part, $u \circ f$ est continue et

$$\lim_{x\to a} u\big(f(x)\big) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{13.258}$$

D'autre par, f est dérivable en a, donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{13.259}$$

Tout cela pour dire qu'à droite, la limite existe et vaut $g'(b)f'(a)$. Donc nous avons l'existence de la limite que nous définissant $(g \circ f)'(a)$, et la valeur

$$\lim_{x\to a} \frac{g\big(f(x)\big) - f\big(f(a)\big)}{x - a} = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{13.260}$$

Le résultat est prouvé.

Pour (5) Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{13.261}$$

La fonction g est dérivable en a, la fonction i est dérivable en $g(a)$. Donc par le théorème de dérivation des fonctions composées[32], la fonction $i \circ f$ est dérivable en a et

$$(i \circ g)'(a) = i'\big(g(a)\big)g'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \tag{13.262}$$

Pour le quotient, nous utilisons la formule de la dérivée du produit sur $\frac{f}{g}(x) = f(x)\frac{1}{g(x)}$ pour dire que f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}, \tag{13.263}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 13.115.
Nous ne pouvons pas dire que la dérivée est une opération linéaire sur l'espace des fonctions dérivables. Certes la proposition 13.114 implique entre autres que l'ensemble des fonctions dérivables est un espace vectoriel. Mais la dérivée d'une fonction dérivable n'est pas spécialement dérivable.

Remarque 13.116.
La formule $(1/u)' = -u'/u^2$ ne peut pas être vue comme un cas particulier de $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}$ (proposition 13.349) parce que cette formule est utilisée dans la démonstration de la formule générale.

Pour les fonctions à valeurs dant $\mathbb{R}^n$, nous posons la définition suivante.

Définition 13.117.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables. Nous définissons la fonction f' par

$$f'(x) = \sum_i f_i'(x)e_i, \tag{13.264}$$

c'est-à-dire une dérivation composante par composante.

32. Proposition 13.114(4).

Cette définition est celle pour une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, et elles est facile. Très différente est la situation d'une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans laquelle il faudra introduire la notion de différentielle [33].

Par rapport à la dérivation, les produits scalaire et vectoriel vérifient une règle de Leibnitz.

Proposition 13.118.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si u et u sont dans $C^1(I, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(u(t) \cdot v(t)\big) &= \big(u'(t) \cdot v(t)\big) + \big(u(t) \cdot v'(t)\big) \\ \frac{d}{dt}\big(u(t) \times v(t)\big) &= \big(u'(t) \times v(t)\big) + \big(u(t) \times v'(t)\big). \end{aligned} \tag{13.265}$$

Nous faisons la preuve pour le produit scalaire ; sans doute que le produit vectoriel sera la même chose.

Démonstration. Nous considérons des fonctions dérivables $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, et nous posons $\varphi(t) = f(t) \cdot g(t)$. En ce qui concerne la dérivée de la fonction $f \cdot g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous devons étudier la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(t+\epsilon) - \varphi(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t+\epsilon) \cdot g(t+\epsilon) - f(t) \cdot g(t)}{\epsilon}. \tag{13.266}$$

La fonction f étant dérivable, la proposition 13.112 nous donne une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(t+\epsilon) = f(t) + \epsilon f'(t) + \epsilon\alpha(\epsilon) \tag{13.267}$$

et $\lim_{\epsilon \to 0} \alpha(\epsilon) = 0$. En substituant cela dans le numérateur de (13.266) nous calculons un peu :

$$\begin{aligned} f(t+\epsilon) \cdot g(t+\epsilon) - f(t) \cdot g(t) &= \big(f(t) + \epsilon f'(t) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \cdot \big(g(t) + \epsilon g'(t) + \epsilon\beta(\epsilon)\big) && \text{(13.268a)} \\ &\quad - f(t) \cdot g(t) && \text{(13.268b)} \\ &= \epsilon f(t) \cdot g'(t) + \epsilon^2 f'(t) \cdot \beta(\epsilon) && \text{(13.268c)} \\ &\quad + \epsilon\alpha(\epsilon) \cdot g(t) + \alpha(\epsilon)\epsilon^2 \cdot g'(t) + \epsilon^2\alpha(\epsilon) \cdot \beta(\epsilon). && \text{(13.268d)} \end{aligned}$$

En divisant cela par ϵ et en prenant la limite $\epsilon \to 0$, et nous reste

$$f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t). \tag{13.269}$$

□

13.13.1 Dérivée de la réciproque

Proposition 13.119 ([208]).
Soit $f\colon I \to J = f(I)$ une fonction bijective, continue et dérivable [34]. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et sa dérivée est donnée par

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{13.270}$$

Démonstration. Pour rappel, une fonction dérivable est toujours continue (proposition 13.106).

Prouvons que f^{-1} est dérivable au point $b = f(a) \in J$. Étant donné que f est dérivable en a, nous avons

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{13.271}$$

Par ailleurs, étant donnée la continuité de f^{-1} donnée par la proposition 13.61(4), nous avons

$$\lim_{\epsilon \to 0} f^{-1}(b+\epsilon) = f^{-1}(b) = a. \tag{13.272}$$

33. Ce sera pour la définition 12.133.
34. Définition 13.104.

Nous pouvons donc remplacer dans (13.271) tous les x par $f^{-1}(b+\epsilon)$ et prendre la limite $\epsilon \to 0$ au lieu de $x \to a$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f\big(f^{-1}(b+\epsilon)\big) - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - a} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{b+\epsilon - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \frac{1}{\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f^{-1}(b+\epsilon)-f^{-1}(b)}{\epsilon}} \\ &= \frac{1}{(f^{-1})'(b)}. \end{aligned} \tag{13.273}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(a) = b$ et $a = f^{-1}(b)$. □

Proposition 13.120 ([209]).
Soit f une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle J (f est alors une bijection de I vers J). Si f' ne s'annule par sur I alors

(1) la fonction f est une bijection de I vers J,
(2) la fonction f^{-1} est dérivable sur J,
(3) et nous avons la formule

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{13.274}$$

13.121.
Très souvent on préfère retenir la formule

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left((f^{-1})(y_0)\right)} \tag{13.275}$$

Elle est très simple à retrouver : il suffit d'écrire

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \tag{13.276}$$

puis de dériver les deux côtés par rapport à x en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big)f'(x) = 1. \tag{13.277}$$

Exemple 13.122(difféomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un ouvert borné)
Nous cherchons à construire une application dérivable et d'inverse dérivable entre $\mathbb{R}$ (en entier) et un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Il serait tentant de prendre l'application arc tangente

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned} \tag{13.278}$$

mais elle ne sera définie que dans le théorème 19.43.

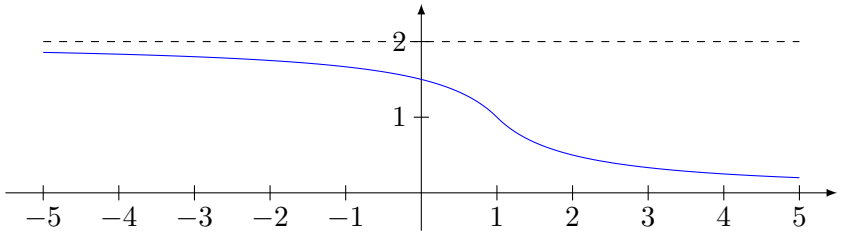
Nous posons

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x-2} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases} \tag{13.279}$$

Cela est continue en $x = 1$: il suffit de calculer les deux valeurs. En ce qui concerne la dérivabilité en $x = 1$, nous devons faire

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(1+\epsilon) - f(1)}{\epsilon}. \tag{13.280}$$

La limite à gauche est égale à la dérivée de $x \mapsto 2 + \frac{1}{x-2}$ en $x = 1$ et la limite à droite est égale à la dérivée de $x \mapsto 1/x$ en $x = 1$. Dans les deux cas nous trouvons -1.



Nous voyons vite que cette fonction est strictement décroissante ; et un calcul de limite nous dit qu'il s'agit d'une bijection dérivable

$$f : \mathbb{R} \to]0, 2[. \tag{13.281}$$

La proposition 13.119 s'applique et la bijection réciproque est également dérivable (donc continue aussi). △

Problèmes et choses à faire

Si vous connaissez un autre exemple, plus simple, de difféomorphisme $f : \mathbb{R} \to]a, b[$, faites-le moi savoir. Ne pas utiliser d'exponentielle (vous pensiez à bricoler quelque chose à partir de la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$?) ni de fonctions trigonométriques.

Exemple 13.123
Nous aimerions donner le logarithme comme exemple, mais l'exponentielle ne sera définie que dans longtemps à partir des séries entières. Allez voir l'exemple 16.64 pour le logarithme comme inverse de l'exponentielle. △

13.14 Dérivation et croissance

Supposons une fonction dont la dérivée est positive. Étant donné que la courbe est « collée » à ses tangentes, tant que les tangentes montent, la fonction monte. Or, une tangente qui monte correspond à une dérivée positive, parce que la dérivée est le coefficient directeur de la tangente.

Ce résultat très intuitif peut être prouvé rigoureusement. C'est la tache à laquelle nous allons nous atteler maintenant.

Proposition 13.124.
Si f et f' sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et si f' est strictement positive sur $[a, b]$, alors f est croissante sur $[a, b]$.

De la même manière, si f' est strictement négative sur $[a, b]$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.

Démonstration. Nous n'allons prouver que la première partie. La seconde partie se prouve en considérant $-f$ et en invoquant alors la première[35]. Prenons x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$. Par hypothèse, pour tout x dans $[x_1, x_2]$, nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{13.282}$$

Maintenant, la proposition 13.22 dit que quand une limite est positive, alors la fonction dans la limite est positive sur un voisinage. En appliquant cette proposition à la fonction

$$r(\epsilon) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \tag{13.283}$$

dont la limite en zéro est positive, nous trouvons que $r(\epsilon) > 0$ pour tout ϵ pas trop éloigné de zéro. En particulier, il existe un $\delta > 0$ tel que $\epsilon < \delta$ implique $r(\epsilon) > 0$; pour un tel ϵ, nous avons donc

$$r(\epsilon) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{13.284}$$

35. Méditer cela.

Étant donné que $\epsilon > 0$, nous avons que $f(x+\epsilon) - f(x) > 0$, c'est-à-dire que f est strictement croissante entre x et $x+\epsilon$.

Jusqu'ici, nous avons prouvé que la fonction f était strictement croissante dans un voisinage autour de chaque point de $[a,b]$. Cela n'est cependant pas encore tout à fait suffisant pour conclure. Ce que nous voudrions faire, c'est de dire, c'est prendre un voisinage $]a,m_1[$ autour de a sur lequel f est croissante. Donc, $f(m_1) > f(a)$. Ensuite, on prend un voisinage $]m_1,m_2[$ de m_1 sur lequel f est croissante. De ce fait, $f(m_2) > f(m_1) > f(a)$. Et ainsi de suite, nous voulons construire des m_3, m_4,... jusqu'à arriver en b. Hélas, rien ne dit que ce processus va fonctionner. Il faut trouver une subtilité. Le problème est que les voisinages sur lesquels la fonction est croissante sont peut-être de plus en plus petits, de telle sorte à ce qu'il faille une infinité d'étapes avant d'arriver à bon port (en b).

Heureusement, nous pouvons drastiquement réduire le nombre d'étapes en nous souvenant du théorème de Borel-Lebesgue 8.6. Nous notons par $\mathcal{O}_x$, un ouvert autour de x tel que f soit strictement croissante sur $\mathcal{O}_x$. Un tel voisinage existe. Cela fait une infinité d'ouverts tels que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} \mathcal{O}_x. \tag{13.285}$$

Ce que le théorème dit, c'est qu'on peut en choisir un nombre fini qui recouvre encore $[a,b]$. Soient $\{\mathcal{O}_{x_1},\dots,\mathcal{O}_{x_n}\}$, les heureux élus, que nous supposons pris dans l'ordre : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Nous avons

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i. \tag{13.286}$$

Quitte à les rajouter à la collection, nous supposons que $x_1 = a$ et que $x_n = b$. Maintenant nous allons choisir encore un sous-ensemble de cette collection d'ouverts. On pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}_{x_1}$. Nous savons que $\mathcal{A}_1$ intersecte au moins un des autres $\mathcal{O}_{x_i}$. Cette affirmation vient du fait que $[a,b]$ est connexe (proposition 8.34), et que si $\mathcal{O}_{x_1}$ n'intersectait personne, alors

$$\mathcal{O}_{x_1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=2}^{n} \mathcal{O}_{x_i} \tag{13.287}$$

forment une partition de $[a,b]$ en deux ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible parce que $[a,b]$ est connexe. Nous nommons $\mathcal{A}_2$, un des ouverts $\mathcal{O}_{x_i}$ qui intersecte $\mathcal{A}_1$. Disons que c'est $\mathcal{O}_k$. Notons que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un intervalle sur lequel f est strictement croissante. En effet, si y_{12} est dans l'intersection, $f(a) < f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1$, et pour tout $x > y_{12}$ dans $\mathcal{A}_2$, $f(x) > f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante dans $\mathcal{A}_2$.

Maintenant, nous éliminons de la liste des $\mathcal{O}_{x_i}$ tous ceux qui sont inclus dans $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Dans ce qu'il reste, il y en a automatiquement un qui intersecte $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, pour la même raison de connexité que celle invoquée plus haut. Nous appelons cet ouvert $\mathcal{A}_3$, et pour la même raison qu'avant, f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

En recommençant suffisamment de fois, nous finissons par devoir prendre un des $\mathcal{O}_{x_i}$ qui contient b, parce qu'au moins un des $\mathcal{O}_{x_i}$ contient b. À ce moment, nous avons fini la démonstration. □

Il est intéressant de noter que ce théorème concerne la croissance d'une fonction sous l'hypothèse que la dérivée est positive. Il nous a fallu très peu de temps, en utilisant la positivité de la dérivée, pour conclure qu'autour de tout point, la fonction était strictement croissante. À partir de là, c'était pour ainsi dire gagné. Mais il a fallu un réel travail de topologie très fine [36] pour conclure. Étonnant qu'une telle quantité de topologie soit nécessaire pour démontrer un résultat essentiellement analytique dont l'hypothèse est qu'une limite est positive, n'est-ce pas ?

Une petite facile, maintenant.

36. et je te rappelle que nous avons utilisé la proposition 8.34, qui elle même était déjà un très gros boulot !

Proposition 13.125.
Si f est croissante sur un intervalle, alors $f' \geqslant 0$ à l'intérieur de cet intervalle, et si f est décroissante sur l'intervalle, alors $f' \leqslant 0$ à l'intérieur de l'intervalle.

Note qu'ici, nous demandons juste la croissance de f, et non sa *stricte* croissance.

Démonstration. Soit f, une fonction croissante sur l'intervalle I, et x un point intérieur de I. La dérivée de f en x vaut

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \tag{13.288}$$

mais, comme f est croissante sur I, nous avons toujours que $f(x+\epsilon) - f(x) \geqslant 0$ quand $\epsilon > 0$, et $f(x+\epsilon) - f(x) \leqslant 0$ quand $\epsilon < 0$, donc cette limite est une limite de nombres positifs ou nuls, qui est donc positive ou nulle. Cela prouve que $f'(x) \geqslant 0$. □

13.14.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 13.126 (Théorème de Rolle[210, 211])**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle compact, soit $[m,M]$ (théorème 7.86). Si $m = M$, alors le théorème est évident : c'est que la fonction est constante, et la dérivée est par conséquent nulle. Supposons que $M > f(a)$ (il se peut que $M = f(a)$, mais alors si f n'est pas constante, il faut avoir $m < f(a)$ et le reste de la preuve peut être adaptée).

Comme M est dans l'image de $[a,b]$ par f, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$. Considérons maintenant la fonction

$$\tau(x) = \frac{f(c+x) - f(c)}{x}. \tag{13.289}$$

Par définition, $\lim_{x\to 0} \tau(x) = f'(c)$. Par hypothèse, si $u < c$,

$$\tau(u-c) = \frac{f(u) - f(c)}{u - c} > 0 \tag{13.290}$$

parce que $u - c < 0$ et $f(u) - f(c) < 0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \tau(x) \geqslant 0$. Nous avons aussi, pour $v > c$,

$$\tau(v-c) = \frac{f(v) - f(c)}{v - c} < 0 \tag{13.291}$$

parce que $v - c > 0$ et $f(v) - f(c) < 0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \tau(x) \leqslant 0$. Mettant les deux ensemble, nous avons $f'(c) = \lim_{x\to 0} \tau(x) = 0$, et c est le point que nous cherchions. □

Voici une généralisation du théorème de Rolle, dans le cas où nous n'aurions pas deux points sur lesquels la fonction est identique, mais deux points en lesquels la limite de la fonction est identique. Typiquement, lorsque les points en question sont $\pm\infty$.

Théorème 13.127 (Généralisation de Rolle[210])**.**
Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit une fonction dérivable $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = \ell \tag{13.292}$$

avec $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $f'(x) = 0$.

Démonstration. Soit un difféomorphisme[37] strictement croissant $\varphi\colon \mathbb{R} \to]\alpha,\beta[$. Pour cela vous pouvez bricoler à partir de l'exemple 13.122. Mais n'utilisez pas la fonction arc tangente, parce qu'elle n'est définie qu'au théorème 19.43.

37. Définition 12.1.

Nous posons $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ et

$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon]a', b'[\to]\alpha, \beta[. \tag{13.293}$$

Cela est une fonction dérivable et continue sur $[a', b']$ en posant $g(a') = g(b') = \varphi(\ell)$.

Donc il existe $c' \in]a', b'[$ tel que $g'(c') = 0$. En posant $c = \varphi^{-1}(c')$ nous avons $c \in]a, b[$ et, en utilisant de nombreuses fois la règle de dérivation des fonctions composées 13.114(4),

$$\begin{aligned} f'(c) &= f'\big(\varphi^{-1}(c')\big) && \text{(13.294a)}\\ &= (\varphi^{-1})'\Big((g \circ \varphi)\big(\varphi^{-1}(c')\big)\Big)(g \circ \varphi)'\big(\varphi^{-1}(c')\big) && \text{(13.294b)}\\ &= (\varphi^{-1})'\big(g(c')\big) \underbrace{g'(c')}_{=0} \varphi'\big(\varphi^{-1}(c')\big) && \text{(13.294c)}\\ &= 0. && \text{(13.294d)} \end{aligned}$$

□

Une autre généralisation de Rolle, avec des dérivées d'ordre supérieur.

Proposition 13.128 ([212]).
Soit un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant a, b ($a \neq b$). Soit une fonction $f \in C^{k+1}(I, \mathbb{R})$. Si $f(a) = f(b)$ et si $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 1, \dots, n$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Démonstration. Le théorème de Rolle 13.126 nous dit qu'il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$. Mais alors $f'(a) = f'(x_1) = 0$, et le théorème de Rolls appliqué à f' donne $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$. Continuant ainsi n fois, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$. □

Le théorème suivant est le théorème des **accroissements finis**.

Théorème 13.129 (Accroissements finis).
Soit f, une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

(1) Il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{13.295}$$

Autrement dit, la tangente en c est parallèle à la corde entre a et b.

(2) Nous avons la majoration

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leqslant \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)||b - a|. \tag{13.296}$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$\tau(x) = f(x) - \big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - a\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\big), \tag{13.297}$$

c'est-à-dire la fonction qui donne la distance entre f et le segment de droite qui lie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Par construction, $\tau(a) - \tau(b) = 0$, donc le théorème de Rolle s'applique à τ pour laquelle il existe donc un $c \in]a, b[$ tel que $\tau'(c) = 0$.

En utilisant les règles de dérivation, nous trouvons que la dérivée de τ vaut

$$\tau'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{13.298}$$

donc dire que $\tau'(c) = 0$ revient à dire que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

La majoration est une conséquence immédiate, parce que le supremum de $|f'(x)|$ est forcément plus grand que $|f'(c)|$. □

Une généralisation pour une fonction sur un intervalle $]a, b[$ où a et b peuvent être infinis.

Théorème 13.130 (Généralisation des accroissements finis).
Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f, g des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.
Si $a = -\infty$:

— *Nous demandons la continuité sur $]-\infty, b]$ et la dérivabilité sur $]-\infty, b[$.*

— *Nous notons $f(a)$ la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, et nous supposons qu'elle est finie.*

Mêmes conventions si $b = +\infty$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{13.299}$$

Démonstration. Nous posons

$$h(t) = \big(g(b) - g(a)\big)f(t) - \big(f(b) - f(a)\big)g(t). \tag{13.300}$$

Nous avons $\lim_{t\to a} h(t) = \lim_{t\to b} h(t)$, de telle sorte que le théorème de Rolle généralisé 13.127 s'applique et il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Pour ce c nous avons

$$0 = h'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c), \tag{13.301}$$

et donc

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{13.302}$$

□

13.14.2 Règle de l'Hospital

Proposition 13.131 (Règle de l'Hospital pour $\frac{0}{0}$[213]).
Soient des fonctions f, g dérivables sur $]a,b[$ et dont la limite en a est nulle. Si g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ et si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \tag{13.303}$$

alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{13.304}$$

Ici $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, et les hypothèses garantissent l'existence de la limite (13.304).

Démonstration. Soit $x \in]a,b[$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $]a,x[$ et continues sur $[a,x]$, de telle sorte que le théorème 13.130 s'applique et nous avons $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\big(f(x) - f(a)\big)g'(c_x) = \big(g(x) - g(a)\big)f'(c_x). \tag{13.305}$$

Nous nous souvenons de ce que signifient les notations dans le théorème : les notations $f(a)$, $f(x)$, $g(a)$ et $g(x)$ désignent en réalité les limites. Donc dans (13.305), nous avons $f(a) = g(a) = 0$.

D'autre part nous avons $g(x) \neq g(a)$, sinon le théorème de Rolle 13.127 annulerait g' quelque part dans $]a,x[$. Nous pouvons donc récrire (13.305) sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{13.306}$$

Mais $\lim_{x\to a^+} c_x = a$ parce que $c_x \in]a,x[$. Donc la limite du membre de droite de (13.306) lorsque $x \to a^+$ existe et vaut ℓ. La même limite à gauche doit alors exister et valoir la même valeur. □

Proposition 13.132 (L'Hospital pur $\frac{\infty}{\infty}$).
Soit f et g deux fonctions

(1) dérivables sur $]a,b[$,

(2) dont les limites en a sont toutes deux ∞,

(3) $g' \neq 0$ *sur* $]a,b[$.

(4)

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}. \tag{13.307}$$

Alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{13.308}$$

Cette dernière égalité signifie « la limite existe et vaut ℓ ».

Démonstration. Soit un intervalle $]x,y[$ strictement inclus dans $]a,b[$ avec $x,y \in \mathbb{R}$. Par le théorème des accroissements finis généralisés 13.130 il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{13.309}$$

Notons que le dénominateur à gauche n'est pas nul à cause de Rolle et de l'hypothèse que g' ne s'annule pas sur $[x,y]$. Nous isolons $f(x)$:

$$f(x) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\Big(g(x)-g(y)\Big) + f(y). \tag{13.310}$$

Avant de diviser par $g(x)$ nous devons prendre quelques précautions. Soit V, un voisinage de ℓ[38]. Vu la limite (13.307), il existe $y \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \in V \tag{13.311}$$

pour tout $t \in]a,y[$. Nous utilisons ici avec subtilité le fait que ces intervalles sont une base de la topologie autour de ∞. Maintenant $f(y)$ et $g(y)$ sont fixés et sont des nombres réels. Vu que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ nous pouvons choisir $r < y$ tel que nous ayons simultanément

(1) $g(x) \neq 0$ sur $]a,r[$,

(2)

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{13.312}$$

et

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{13.313}$$

pour tout $x \in]a,r[$.

Nous sommes maintenant armés de y et r satisfaisant tout cela et nous pouvons traiter avec la formule (13.310) en ne la considérant que pour $x \in]a,r[$. Soit $x \in]a,r[$; il existe $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}. \tag{13.314}$$

Nous avons :

(1) $\lim_{x\to a^+} c_x = a$,

(2)

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \tag{13.315}$$

(3)

$$\lim_{x\to a^+} \left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) = 1, \tag{13.316}$$

38. Vous savez ce que signifie un « voisinage de ∞ » ? Allez voir la sous-section 8.1.12.

(4) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$.

Donc chaque partie du membre de droite de (13.314) a une limite bien déterminée pour $x \to a^+$. Les règles de calcul s'appliquent et nous avons

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \times 1 + 0 = \ell. \tag{13.317}$$

□

13.14.3 Dérivée et primitive

Corollaire 13.133.
Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors f est constante sur $[a,b]$.

Démonstration. Si f n'était pas constante sur $[a,b]$, il existerait un $x_1 \in]a,b[$ tel que $f(a) \neq f(x_1)$, et dans ce cas, il existerait, par le théorème des accroissements finis 13.129, un $c \in]a,x_1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \neq 0, \tag{13.318}$$

ce qui contredirait les hypothèses. □

Corollaire 13.134.
Soient f et g, deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que

$$f'(x) = g'(x) \tag{13.319}$$

pour tout $x \in [a,b]$. Alors existe un réel C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration. Considérons la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$, dont la dérivée est, par hypothèse, nulle. L'annulation de la dérivée entraine par le corollaire 13.134 que h est constante. Si $h(x) = C$, alors $f(x) = g(x) + C$, ce qu'il fallait prouver. □

Définition 13.135.
*Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. La fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans I.*

Exprimé en termes des primitives, le corollaire 13.134 signifie que

Corollaire 13.136.
Si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle, alors il existe une constante C pour laquelle $F(x) = G(x) + C$.

Cela signifie qu'il n'y a, en réalité, pas des milliards de primitives différentes à une fonction. Il y en a essentiellement une seule, et puis les autres, ce sont juste les mêmes, mais décalées d'une constante.

Remarque 13.137.
L'hypothèse de se limiter à un intervalle est importante parce que si on considère la fonction sur deux intervalles disjoints, nous pouvons choisir la constante indépendamment dans l'un et dans l'autre. Par exemple la fonction

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(x) - 7 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{13.320}$$

est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Certains ne s'en privent pas. Le logiciel Sage par exemple fait ceci :

```
sage: f(x)=1/x
sage: F=f.integrate(x)
sage: A=F(x)-F(-x)
sage: A.full_simplify()
I*pi
```

En réalité lorsque $x > 0$, Sage définit $\ln(-x) = \ln(x) + i\pi$. Cela a une certaine logique parce que $\ln(-1) = i\pi$ (du fait que $e^{i\pi} = -1$), mais si on ne le sait pas, ça peut étonner.

13.138.
Il existe plusieurs primitives à une fonction donnée. En physique, la constante arbitraire est souvent fixée par une condition initiale, comme nous le verrons dans la section 43.1.

13.15 Fonctions de plusieurs variables

La physique, et les sciences en général, regorgent de fonctions à plusieurs variables.

Accélération centripète [39] Si une masse m tourne sur un cercle, elle subira une accélération dirigée vers l'intérieur égale à

$$F(v, r) = \frac{mv^2}{r} \tag{13.321}$$

où r est le rayon du cercle et v est la vitesse.

Pression dans un gaz Si on a n moles de gaz dans un volume V a une température T, alors la pression sera donnée par la fonction de trois variables

$$p = \frac{nRT}{V} \tag{13.322}$$

où R est la constante des gaz parfaits.

En mathématique, on peut inventer de nombreuses fonctions de plusieurs variables. La fonction

$$f(x, y) = x^2 + xy\cos(x^2 + y^3) \tag{13.323}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$. La fonction

$$f(x, y, z) = \frac{x + y - 2z}{1 - x^2 - y^2 - z^2} \tag{13.324}$$

est définie sur $\mathbb{R}^3$ moins la sphère unité $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

La plus grande partie de ce cours est consacrée à l'étude des fonctions de plusieurs variables. Nous allons maintenant donner quelques indications sur comment «dessiner» une telle fonction. Vous connaissez déjà la définition de graphe pour une fonction f d'une seule variable à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$. Vous voyez que cet ensemble n'est pas vraiment un gros morceau de $\mathbb{R}^2$ parce que son intérieur est vide : il y a une seule valeur de f qui correspond au point x, donc une boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(x, f(x))$ de n'importe quel rayon contient toujours des points qui ne font pas partie du graphe de f.

Nous voulons donner une définition assez générale pour le graphe d'une fonction

Définition 13.139.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le **graphe** de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme*

$$\operatorname{Graph} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \,|\, y = f(x)\}. \tag{13.325}$$

39. Appelez la « centrifuge » si vous voulez ; ça ne me fait ni chaud ni froid.

Cette définition se spécialise de la façon suivante dans les cas communs. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Le graphe de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ donné par

$$\text{Graph}\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}. \tag{13.326}$$

Et pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\text{Graph}\, f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } z = f(x, y)\}. \tag{13.327}$$

C'est cette définition qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on travaille sur des dessins en trois dimensions.

Si f est une fonction de deux variables indépendantes x et y à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors un point dans le graphe de f est un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$z = f(x, y), \tag{13.328}$$

ou encore, un point de la forme

$$\big(x, y, f(x, y)\big). \tag{13.329}$$

Nous avons parfois besoin de donner des représentations graphiques d'une fonction. Nous pouvons, par exemple, penser à la fonction que associe à un point de la Terre son altitude. Lorsqu'on part pour une promenade en montagne on a envie de connaitre le graphe de cette fonction qui correspond en fait à la surface de la montagne. Bien sur nous ne voulons pas amener avec nous un modèle en 3D de la montagne donc il nous faut une méthode efficace pour projeter le graphe de f sur le plan x-y tout en gardant les informations fondamentales. Pour cela nous avons besoin de deux définitions (à ne pas confondre !)

Définition 13.140.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **z-section** de* Graph f *à la hauteur c est donné par*

$$S_c^z = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x, y) = c\}.$$

Définition 13.141.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **courbe de niveau** de f à la hauteur c est l'ensemble*

$$N_c = \{(x1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x1, \ldots, x_n) = c\}. \tag{13.330}$$

On peut représenter la fonction f d'une façon très précise en traçant quelques-unes de ses courbes de niveau. Dans la suite on pourra considérer aussi les x-sections et les y-sections du graphe d'une fonction de deux variables. La x-section de Graph f à la hauteur a est

$$S_a^x = \{(a, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(a, y) = z\}.$$

Comme vous avez peut être déjà compris, S_a^x est le graphe de la fonction de y qu'on obtient de f en fixant $x = a$. Cette fonction est appelée x-section de f pour $x = a$.

Certaines surfaces dans $\mathbb{R}^3$ sont le graphe d'une fonction.

Exemple 13.142
Quelques graphes importants.

Un plan non vertical Tout plan dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrit par une équation de la forme

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = r,$$

où, (x_0, y_0, z_0) est vecteur dans $\mathbb{R}^3$, et a, b, c et r sont des nombres réels. Si $c \neq 0$ alors le plan n'est pas vertical et on peut dire que il est le graphe de la fonction

$$P(x, y) = \frac{r + cz_0 - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{c},$$

quitte à choisir des nouvelles constantes s, t, q,

$$P(x, y) = sx + ty + q.$$

Un paraboloïde elliptique Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PE_1(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PE_2(x,y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes elliptiques. Le premier est contenu dans le demi-espace $z \geqslant 0$, l'autre dans $z \leqslant 0$. Le nom de cette surface vient de la forme de ses sections. En fait toutes sections S_c^z sont des ellipses, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Un paraboloïde hyperbolique (selle) Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PH_1(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PH_2(x,y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes hyperboliques. Remarquez que les sections S_c^z de ce graphe sont des hyperboles, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Une demi-sphère La fonction $S^+ = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ a pour graphe la demi-sphère supérieure centrée en l'origine et de rayon R. Le dernier de ces exemples nous signale une chose très importante : une sphère entière n'est pas le graphe d'une fonction de x et y. Par contre, une demi-sphère est bien le graphe de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

L'équation que nous utilisons pour d'écrire une sphère de rayon R centrée en l'origine est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Donc, à chaque point (x,y) dans le disque $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ (notez que ce disque est contenu dans la section S_0^z), on peut associer deux valeurs de z : $z_1 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Par définition, une fonction n'associe qu'un seul valeur à chaque point de son domaine, d'où l'impossibilité de décrire cette sphère comme le graphe d'une fonction de x et y.

△

Considérons la fonction $Sp : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui associe à (x,y,z) la valeur $x^2 + y^2 + z^2$. La sphère de rayon R centrée en l'origine est l'ensemble de niveau N_{R^2} de Sp. L'ensemble de niveau N_0 de Sp est l'origine, et tous les ensembles de niveau de hauteur négative sont vides. La même chose est vraie pour les ellipsoïdes centrées en l'origine avec les axes x, y et z comme axes principaux et comme longueurs de demi-axes a, b et c. Voici la fonction dont il sont les ensembles de niveau

$$El(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Exemple 13.143

Des ensembles de niveau importants.

Tout graphe Le graphe de toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peut être considéré comme l'ensemble de niveau zéro de la fonction $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

Hyperboloïdes Les hyperboloïdes, comme les ellipsoïdes, sont une famille d'ensemble de niveau. En particulier, nous considérons des hyperboloïdes dont l'axe de symétrie est l'axe des z et qui sont symétriques par rapport un plan x-y. Une fois que les paramètres a, b et c sont fixés la fonction que nous intéresse est

$$Hyp(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

Les ensembles de niveau N_d pour $d > 0$ sont connexes, on les appelle *hyperboloïdes à une feuille*. L'ensemble de niveau N_0 est *cône (elliptique)*, les deux moitiés du cône se touchent en l'origine. Enfin, les ensembles de niveau N_d pour $d < 0$ ne sont pas connexes et pour cette raison on les appelle *hyperboloïdes à deux feuilles*.

△

13.15.1 Graphes de fonctions à plusieurs variables

Le **graphe** d'une fonction de deux variables $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Big\{\big(x, y, f(x,y)\big) \text{ tel que } (x,y) \in D\Big\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{13.331}$$

Ce graphe est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 13.144

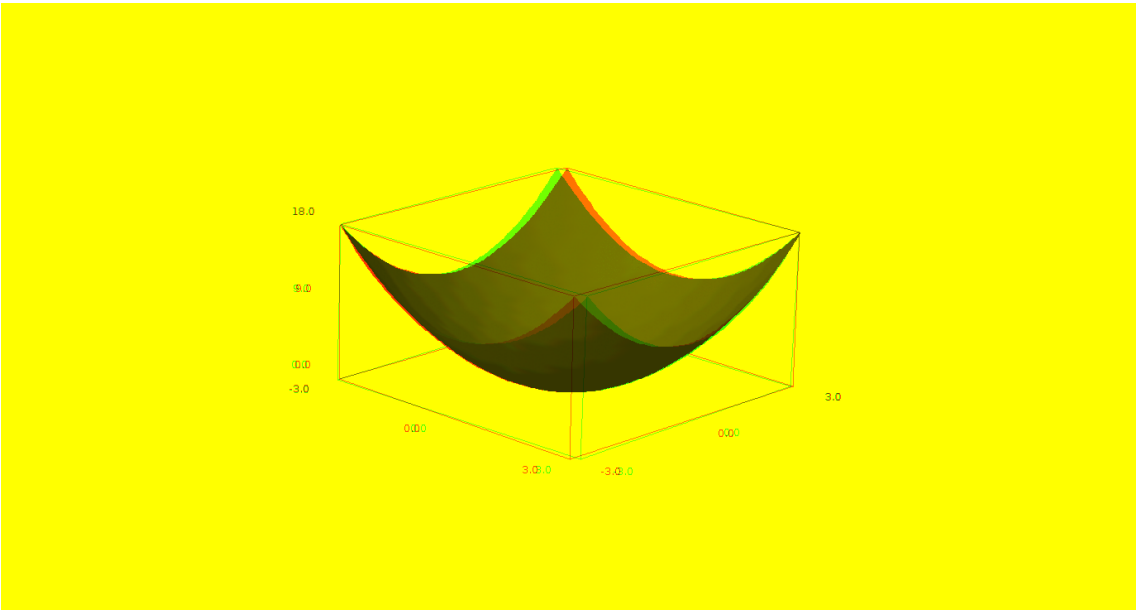
Tracer le graphe de la fonction

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2. \tag{13.332}$$

Le plus simple est de demander à Sage de nous fournir une représentation 3D

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=x**2+y**2
sage: plot3d(f,(x,-3,3),(y,-3,3))
```

Voici ce que cela donne[40] : (à regarder avec des lunettes bleues et rouges) :



À part que l'ordinateur l'a dit, est-ce qu'on peut comprendre pourquoi le graphe de la fonction $x^2 + y^2$ ressemble à un bol ? En coordonnées cylindriques, le graphe s'écrit

$$z = r^2. \tag{13.333}$$

40. En vrai, ce que Sage donne est un objet qu'on peut même faire bouger.

Donc il se fait que plus on s'éloigne du point $(0,0)$ dans le plan XY, plus le graphe va monter. Et il monte à quelle vitesse ? Il monte à la vitesse r^2. Il s'agit donc de dessiner la fonction $z = r^2$ dans le plan et de la « faire tourner ».

△

13.15.2 Courbes de niveau

Une technique utile pour se faire une idée de la forme d'une fonction en trois dimensions est de tracer les **courbes de niveau**. La courbe de niveau de hauteur h est la courbe dans le plan donnée par l'équation

$$f(x,y) = h. \tag{13.334}$$

Exemple 13.145

Dessinons par exemple les courbes de niveau de la fonction

$$f(x,y) = x + y + 2. \tag{13.335}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x + y + 2 = h$, c'est-à-dire

$$y(x) = -x + h - 2. \tag{13.336}$$

Par conséquent la courbe de niveau de hauteur 0 est $y = -x - 2$, celle de hauteur 5 est $y = -x + 3$, etc.

Nous pouvons également nous aider de Sage pour ce faire :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=x+y+2
sage: var('h')
h
sage: niveau(h,x)=solve(f(x,y)==h,y)[0].rhs()
sage: g1(x)=niveau(1,x)
sage: g1
x |--> -x - 1
```

Ici la fonction `g1` est la courbe de niveau 1.

Si on veut faire tracer une courbe de niveau, Sage peut le faire :

```
sage: implicit_plot(f(x,y)==1,(x,-3,3),(y,-4,4))
```

Cela tracera la courbe de niveau $h = 1$ dans la partie du plan $x \in [-3,3]$ et $y \in [-4,4,]$.

△

Il est bien entendu possible de créer automatiquement 50 courbes de niveau et de demander de les tracer toutes sur le même graphe.

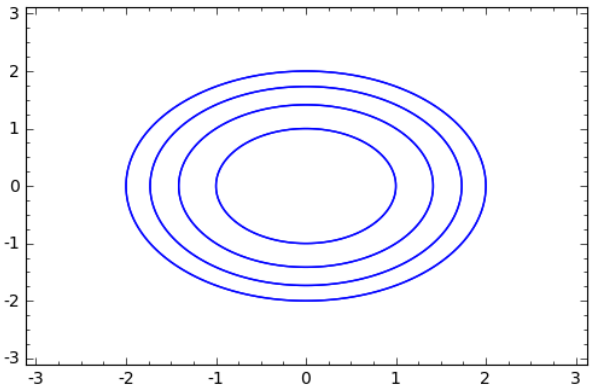
```
1 #! /usr/bin/sage -python
2 # -*- coding: utf8 -*-
3
```

```
from sage.all import *

var('x,y')
f=x**2+y**2
G=Graphics()
a=3
for i in range(0,5):
  G=G+implicit_plot(f==i,(x,-a,a),(y,-a,a))
show(G)
```

tex/frido/courbeNiveau.py

Le résultat est :



Notez que les courbes sont censées être des cercles : les axes X et Y n'ont pas la même échelle.

Exemple 13.146
Un exemple plus riche en enseignements est celui de la fonction

$$f(x,y)=x^2-y^2. \tag{13.337}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x^2-y^2=h$.

Commençons par $h=0$. Dans ce cas nous avons $(x+y)(x-y)=0$ et par conséquent les courbes de niveau de hauteur zéro sont les deux droites $x+y=0$ et $x-y=0$.

Voyons ensuite la courbe de niveau $h=1$. Cela est l'équation $x^2-y^2=1$, c'est-à-dire

$$y(x)=\pm\sqrt{x^2-1}. \tag{13.338}$$

C'est une fonction qui n'est définie que pour $|x|\geqslant 1$. Avec $x=1$ nous avons $y=1$. Ensuite, lorsque x grandit, y grandit également, mais la courbe ne peut pas croiser la courbe de niveau $h=0$. Donc, suivant les notations de la figure 13.6, la courbe de niveau « part » de P et doit monter sans croiser les diagonales.

En ce qui concerne la courbe de niveau $h=-1$, elle correspond à la courbe $y=\pm\sqrt{1+x^2}$ qui est définie pour tous les $x\in\mathbb{R}$. Le même raisonnement que précédemment nous amène à la figure 13.7.

△

Une autre façon de voir les courbes de niveau est de dire que la courbe de niveau de hauteur h est la projection dans le plan XY de la section du graphe de f par le plan $z=h$.

On peut également définir le graphe de fonctions de trois (ou plus) variables. Le graphe de la fonction $f\colon D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\big\{\big(x,y,z,f(x,y,z)\big)\text{ tel que }(x,y,z)\in D\big\}\subset\mathbb{R}^4. \tag{13.339}$$

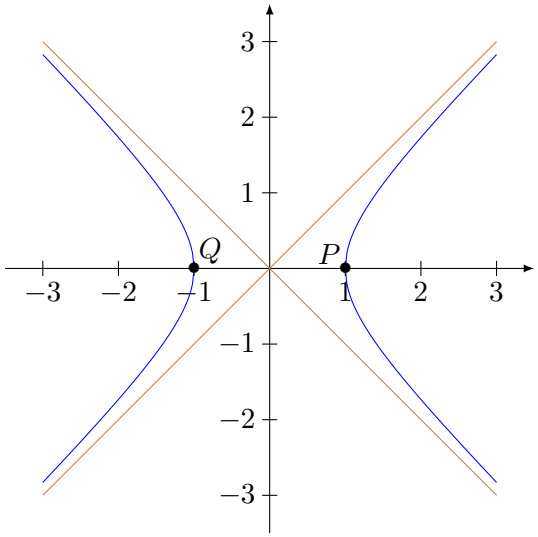


FIGURE 13.6 – La courbe de niveau $h = 1$ de $x^2 - y^2$. Notez qu'elle est en deux morceaux.

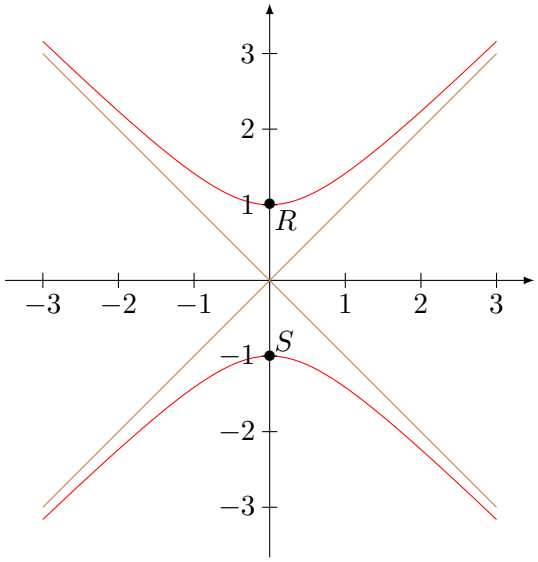


FIGURE 13.7 – La courbe de niveau $x^2 - y^2 = -1$.

De tels graphes ne peuvent pas être représentés sur une feuille de papier. Il est toutefois possible de définir les ensembles de niveaux :

$$E_h = \big\{(x, y, z) \in D \text{ tel que } f(x, y, z) = h\big\}. \tag{13.340}$$

Ce sont des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ que l'on peut dessiner.

Exemple 13.147
Les surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sont des sphères. Il n'y a pas de surfaces de niveau pour les « hauteurs » négatives. △

Exemple 13.148
Considérons la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. En coordonnées cylindriques, cette fonction s'écrit

$$f(r, \theta, z) = r^2 - z^2. \tag{13.341}$$

La surface de niveau 0 est donnée par l'équation $r = |z|$. Cela fait un cercle à chaque hauteur, dont le rayon grandit linéairement avec la hauteur ; le tout est donc un cône. C'est d'ailleurs le cône obtenu par rotation de la courbe de niveau $h = 0$ que nous avions obtenu pour la fonction $x^2 - y^2$.

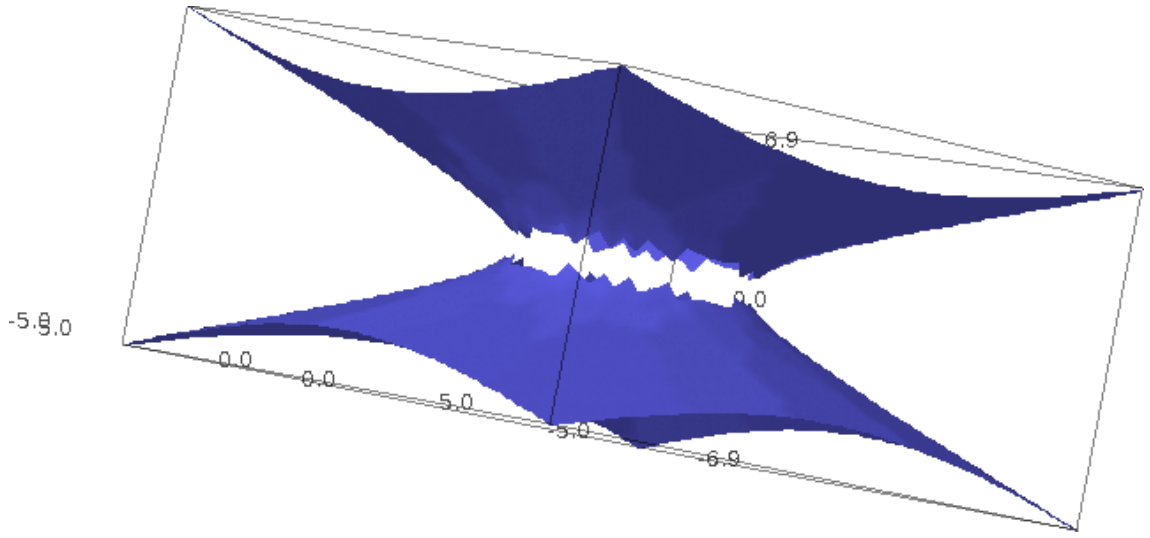
En ce qui concerne les ensembles de niveau positifs, ils sont donnés par

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - h}. \tag{13.342}$$

Notez qu'ils ne sont pas définis pour $r \geqslant h$. Cela pose un petit problème quand on veut le tracer à l'ordinateur :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: F+G
```

Le résultat est [41] :

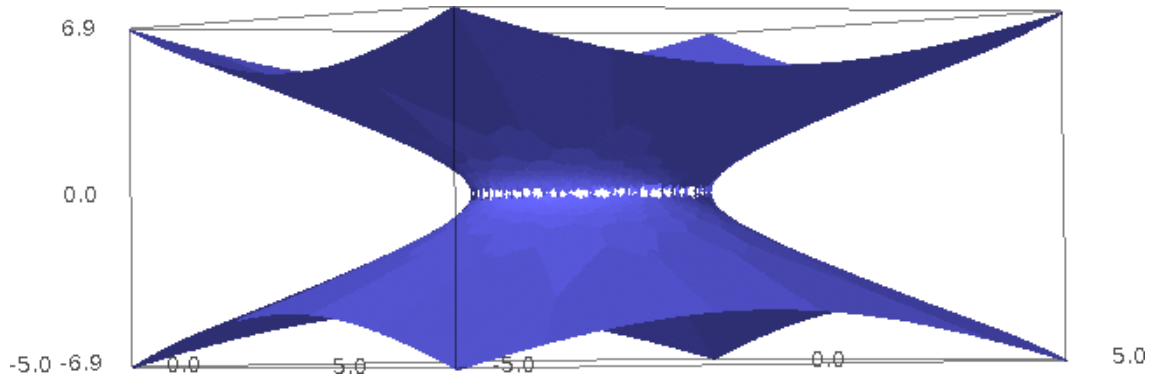


On voit qu'il y a un grand trou au centre correspondant aux z proches de zéro. Or d'après l'équation, il n'en est rien : en $z = 0$ il y a bel et bien tout un cercle. Afin d'obtenir une meilleur image, il faut demander de tracer avec un maillage plus fin :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: F+G
```

Le temps de calcul est un peu plus long, mais le résultat est meilleur :

41. Encore une fois : ça donne mieux à l'écran, et vous pouvez le faire bouger ; je vous encourage à le faire !



△

13.16 Limites à plusieurs variables

Prenons une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous disons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \tag{13.343}$$

lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$.

Remarquez qu'ici, $x \in \mathbb{R}^n$, et sachez distinguer $\|.\|$, la norme dans $\mathbb{R}^n$ de $|.|$ qui est la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Une autre façon d'exprimer cette définition est que l'ensemble des valeurs atteintes par f dans une boule de rayon δ autour de x_0 n'est pas très loin de l. Nous définissons donc

$$E_\delta = \{f(x) \text{ tel que } x \in B(x_0, \delta)\}. \tag{13.344}$$

Notez que si f n'est pas définie en x_0, il n'y a pas de valeurs correspondantes au centre de la boule dans E_δ. Ceci est évidemment la situation générique lorsqu'il y a une indétermination à lever dans le calcul de la limite. Nous avons alors que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \tag{13.345}$$

lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que

$$\sup\{|v - l| \text{ tel que } v \in E_\delta\} \leqslant \epsilon. \tag{13.346}$$

Une façon classique de montrer qu'une limite n'existe pas, est de prouver que, pour tout δ, l'ensemble E_δ contient deux valeurs constantes. Si par exemple $0 \in E_\delta$ et $1 \in E_\delta$ pour tout δ, alors aucune valeur de l (même pas $l = \pm\infty$) ne peut satisfaire à la condition (13.346) pour toute valeur de ϵ.

Nous laissons à la sagacité de l'étudiant le soin d'adapter tout ceci pour le cas $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

La proposition suivante semble évidente, mais nous sera tellement utile qu'il est préférable de l'expliciter :

Proposition 13.149.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine D, $a \in \mathrm{Adh}(D)$ et un voisinage V de a. Nous supposons que $V \cap D$ s'écrive comme une intersection finie :

$$V \cap D = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

telle que $a \in \mathrm{Adh}\, A_i$ pour tout $i \leqslant k$. Alors, la limite

$$\lim_{x\to a} f(x) \tag{13.347}$$

existe et vaut $b \in \mathbb{R}$ si et seulement si chacune des limites

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_i}} f(x) \tag{13.348}$$

existe et vaut b.

Démonstration. On sait déjà que si la limite de $f : D \to \mathbb{R}$ existe, alors toute restriction à A_i admet la même limite [42]. Il suffit donc de prouver la réciproque.

Fixons provisoirement un entier i entre 1 et k ainsi que $\epsilon > 0$. Vu que $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_i}} f(x) = b$, il existe $\delta_i > 0$ tel que si $x \in A_i$ et si $0 < |x - a| < \delta_i$, alors

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{13.349}$$

Quitte à prendre δ_i un peu plus petit, nous supposons que $V \subset B(a, \delta_i)$.

Nous posons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\dots,k}$, et nous considérons $x \in D$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Nous avons alors

(1) $x \in V \cap D$,

(2) il existe i tel que $x \in A_i$.

Ce x est donc un élément de A_i vérifiant $0 < |x-a| < \delta \leqslant \delta_i$. Il vérifie donc (13.349) : $|f(x)-f(a)| < \epsilon$.

Cela prouve la limite (13.347). □

Exemple 13.150

(1) Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette une limite en $a \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'elle y admette une limite à droite et une limite à gauche qui soient égales.
Cela est une application de la proposition 13.149 avec $\mathbb{R} =]-\infty, a[\cup]a, \infty[$.

(2) Une suite (x_k) admet une limite si et seulement si les sous-suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Ceci n'est pas une application directe de la proposition, mais la teneur est la même.

△

Lemme 13.151 ([1])**.**
Soient deux espaces vectoriels E et F. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to F$ telle que $\lim_{t\to 0} f(t) = y \in F$. Nous posons

$$\begin{aligned}\varphi\colon E &\to F\\ h &\mapsto f(\|h\|).\end{aligned} \tag{13.350}$$

Alors φ admet une limite pour $h \to 0$ et elle est donnée par

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \lim_{t\to 0} f(t). \tag{13.351}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que si $t < \delta$ alors $\|f(t) - y\|_F < \epsilon$. Si $\|h\| < \delta$ nous avons

$$\|\varphi(h) - y\| = \|f(\|h\|) - y\| < \epsilon. \tag{13.352}$$

Donc c'est bon. □

Voici, dans le même ordre d'idée, un autre résultat qui permet de réduire le nombre de variables dans une limite lorsque la fonction ne dépend pas de certaines variables.

42. C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de la continuité 7.73.

Lemme 13.152 ([1]).
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

(1) $f(x,y) = g(x)$,

(2) $\lim_{t\to a} g(t) = \ell$.

Alors

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ x\neq a}} f(x,y) = \ell. \tag{13.353}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse sur la limite de g en a, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |t-a| < \delta$ implique $|g(t) - \ell| < \epsilon$.

Attention : passage subtil[43]. Si $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$, alors nous avons évidemment aussi $|x-a| < \delta$, mais pas spécialement $0 < |x-a| < \delta$ comme le requis pour utiliser la limite de g.

Dans le calcul de la limite restreinte à $x \neq a$, les points qui interviennent sont les valeurs de (x,y) dans $B\big((a,b),\delta\big)\backslash\{x=a\}$. Or pour celles-là nous avons bien $0 < |x-a| < \delta$. Le calcul suivant fonctionne donc :

$$|f(x,y) - \ell| = |g(x) - \ell| < \epsilon. \tag{13.354}$$

□

Exemple 13.153
Pourquoi prendre la limite $(x,y) \to (a,b)$ avec $x \neq a$ dans l'énoncé du lemme 13.152 ? Imaginons la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{13.355}$$

Dans ce cas, le graphe de la fonction $f(x,y) = g(x)$ est tout plat sauf la ligne $x = 0$ qui est en hauteur. Nous avons donc $f(0,t) = 1$ pour tout t et donc nous n'avons pas $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$: tout voisinage de $(0,0)$ contient des points (x,y) tels que $f(x,y) = 1$ et des points (x,y) tels que $f(x,y) = 0$. △ <++>

Il existe de nombreuses façons de calculer des limites à plusieurs variables. Plus nous connaîtrons de mathématiques, plus nous aurons de techniques à notre disposition. Nous allons tout de suite voir quelques méthodes. Voir le thème 72 pour plus de techniques et d'exemples.

13.16.1 Caractérisation de la limite par les suites

Exemple 13.154
Considérons la fonction

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \tag{13.356}$$

et remarquons que, quelle que soit la valeur de y, cette fonction est nulle lorsque $x = 0$. De la même manière, nous voyons que si $x = y$, alors la fonction vaut[44] $\frac{1}{2}$.

Il est impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$ parce qu'on ne peut pas trouver un ℓ dont on s'approche à la fois en suivant la ligne $x = 0$ et la ligne $x = y$.

Deux autres chemins avec encore deux autres valeurs sont dessinés sur la figure 13.8.

Cet exemple pourra être formalisé en utilisant le théorème 13.155. Voir l'exemple 13.156. △

Théorème 13.155 (Caractérisation de la limite par les suites).
Une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ admet une limite ℓ en un point d'accumulation a de D si et seulement si pour toute suite (x_n) dans $D\backslash\{a\}$ convergente vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ dans $\mathbb{R}^n$ converge vers ℓ.

43. Je rejette déjà en bloc et d'un revers de main toute tentative de dire « la limite épointée, c'est mieux ». Voir aussi l'exemple 13.153.

44. En fait ce que nous sommes en train de faire est de poser $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$ dans (19.712).

Démonstration. Supposons d'abord que la fonction ait une limite ℓ lorsque $x \to a$, et considérons une suite (x_n) dans $D\backslash\{a\}$ convergente vers a. Nous devons montrer que la suite $y_n = f(x_n)$ converge vers ℓ, c'est-à-dire que si nous choisissons $\varepsilon > 0$ nous devons montrer qu'il existe un N tel que $n > N$ implique $\|y_n - \ell\| = \|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon$.

Nous avons deux hypothèses. La première est la convergence de la fonction et la seconde est la convergence de la suite (x_n). L'hypothèse de convergence de la fonction nous dit que (le ε a déjà été choisi dans le paragraphe précédent)

$$\exists \delta \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon. \tag{13.357}$$

Une fois choisi ce δ qui « va avec » le ε qui a été choisi précédemment, la définition de la convergence de la suite nous enseigne que

$$\exists N \text{ tel que } n > N \Rightarrow \|x_n - a\| < \delta. \tag{13.358}$$

Récapitulons ce que nous avons fait. Nous avons choisi un ε, et puis nous avons construit un N. Lorsque $n > N$, nous avons $\|x_n - a\| < \delta$. Mais alors, par construction de ce δ, nous avons $\|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon$. Au final, $n > N$ implique bien $\|y_n - \ell\| < \varepsilon$, ce qu'il nous fallait.

Nous supposons maintenant que la fonction f *ne* converge *pas* vers ℓ, et nous allons construire une suite d'éléments x_n qui converge vers a sans que $(y_n) = f(x_n)$ ne converge vers ℓ. La fonction f vérifie la condition (13.52). Nous prenons donc un ε tel que $\forall \delta$, il existe un x qui vérifie *en même temps* les deux conditions

$$\begin{cases} 0 < \|x - a\| < \delta & \text{(13.359a)} \\ \|f(x) - \ell\| > \varepsilon. & \text{(13.359b)} \end{cases}$$

Un tel x existe pour tout choix de δ. Choisissons un n arbitraire et $\delta = \frac{1}{n}$. Nous nommons x_n le x correspondant à ce choix de n. La suite (x_n) ainsi construite converge vers a parce que

$$\|x_n - a\| < \delta_n = \frac{1}{n}, \tag{13.360}$$

donc dès que n est grand, $\|x_n - a\|$ est petit. Mais la suite $y_n = f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ parce que

$$\|f(x_n) - \ell\| > \varepsilon \tag{13.361}$$

pour tout n. La suite y_n ne s'approche donc jamais à moins d'une distance ε de ℓ. □

Exemple 13.156
Reprenons l'exemple 13.154. Considérons les deux suites $x_n = (0, \frac{1}{n})$ et $y_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Ce sont deux suites dans $\mathbb{R}^2$ qui tendent vers $(0, 0)$. Si la fonction f convergeait vers ℓ, alors nous aurions au moins

$$\lim f(x_n) = \ell \tag{13.362a}$$
$$\lim f(y_n) = \ell, \tag{13.362b}$$

mais nous savons que pour tout n, $f(x_n) = f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(y_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Il n'y a donc aucun nombre ℓ qui vérifie les deux équations (13.362) parce que $\lim f(x_n) = 0$ et $\lim f(y_n) = \frac{1}{2}$. △

13.16.2 Règle de l'étau

Une première façon de calculer la limite d'une fonction est de la « coincer » entre deux fonctions dont nous connaissons la limite.

Théorème 13.157 (Règle de l'étau[214]).
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant le point a. Soient f, g et h, trois fonctions définies sur $\mathcal{O}$ (éventuellement pas en a lui-même). Supposons que pour tout $x \in \mathcal{O}$ (à part éventuellement a), nous ayons les inégalités

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x). \tag{13.363}$$

Supposons de plus que

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell. \tag{13.364}$$

Alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Nous insistons sur le fait que les deux fonctions entre lesquelles nous coinçons f doivent tendre vers *la même* valeur.

Cette méthode est très pratique lorsqu'on a des fonctions trigonométriques qui se factorisent parce qu'elles sont toujours majorables par 1 ; voir l'exemple 19.67.

Exemple 13.158
Prouver la continuité en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.365}$$

Considérons une suite $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ qui tend vers $(0,0)$. Étant donné que $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$ pour tout x et y, nous avons

$$0 \leqslant |f(x_n,y_n)| = \left| \frac{x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \right| \leqslant |x_n| \to 0. \tag{13.366}$$

Donc nous avons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0), \tag{13.367}$$

ce qui prouve que la fonction est continue en $(0,0)$ par la proposition 7.74. Nous avons utilisé la règle de l'étau (théorème 13.157). △

13.159.
Nous notons $f \sim g$ pour $x \to a$ lorsque $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Cela signifie que f et g tendent vers la même limite, à la même vitesse.

13.16.3 Méthode des chemins

Lorsque la limite n'existe pas, il y a une façon en général assez simple de le savoir, c'est la **méthode des chemins**.

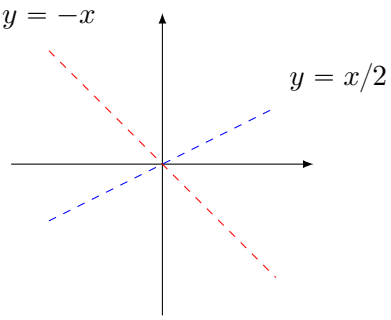


FIGURE 13.8 – Sur toute la droite $y = -x$, la fonction vaut $-1/2$, tandis que sur toute la droite $y = x/2$, elle vaut $\frac{2}{5}$. Il est donc impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$, parce que dans toute boule autour de zéro, il y aura toujours un point de chacune de ces deux droites.

C'est la proposition suivante qui va faire une grosse partie du travail.

Proposition 13.160 ([1]).
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'adhérence de D. Alors nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{13.368}$$

si et seulement si pour toute fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$, nous avons

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell. \tag{13.369}$$

Démonstration. En deux parties.

Sens direct Soit une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$. Par le théorème 13.155, il suffit de montrer que $(f\circ\gamma)(t_n) \to \ell$ pour toute suite $t_n \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

Nous savons que la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$ est une suite qui converge vers a. Mais l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ implique que pour toute suite $x_n \to a$ nous avons $f(x_n) \to \ell$. Cela est en particulier vrai pour la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\gamma(t_n)\big) = \ell, \tag{13.370}$$

ce qu'il fallait prouver.

Réciproque Pour les mêmes raisons de caractérisation séquentielle que précédemment, il faut prouver que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ pour tout suite $x_n \to a$.

Un chemin Soit la fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ affine par morceaux et telle que

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n. \tag{13.371}$$

Nous prolongeons γ par $\gamma(t) = a$ pour $t \leqslant 0$.

$\gamma(t) \to a$ Nous montrons que $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$. Soient $\epsilon > 0$ et N tel que $x_n \in B(a,\epsilon)$ pour tout $n \geqslant N$. Si $t < \frac{1}{N}$ alors $t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ pour un certain $k > N$. Donc

$$\gamma(t) \in [\gamma(\frac{1}{k+1}), \gamma(\frac{1}{k})] \tag{13.372}$$

et donc $\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k]$ parce que γ est formé de ces segments de droites. Mais comme $B(a,\epsilon)$ est convexe [45], nous avons

$$\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k] \subset B(a,\epsilon). \tag{13.373}$$

Nous avons donc bien $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$.

Conclusion L'hypothèse nous donne alors $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$. En particulier le critère de la caractérisation séquentielle de la limite dit que

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\gamma(\frac{1}{n})\big) = \ell, \tag{13.374}$$

ce qui signifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

□

Corollaire 13.161.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si nous avons deux fonctions $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que

$$\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = \lim_{t\to 0}\gamma_2(t) = a \tag{13.375}$$

tandis que

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) \neq \lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_2)(t), \tag{13.376}$$

ou bien que l'une des deux limites n'existe pas, alors la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$ n'existe pas.

45. C'est l'exemple 10.25.

Corollaire 13.162.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si il existe une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ avec $\gamma(0) = a$ telle que la limite $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t)$ n'existe pas, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

En ce qui concerne le calcul de limites, la méthode des chemins peut être utilisé de trois façons :

(1) Dès que l'on trouve une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$, alors nous savons que *si la limite* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe*, alors cette limite vaut ℓ.
(2) Dès que l'on a trouvé deux fonctions γ_i qui tendent vers a, mais dont les limites de $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_i)(t)$ sont différentes, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.
(3) Dès qu'on trouve une chemin le long duquel il n'y a pas de limite, alors la limite n'existe pas (corollaire 13.162).

La méthode des chemins ne permet donc pas de de calculer une limite quand elle existe. Elle permet uniquement de la « deviner », ou bien de prouver que la limite n'existe pas.

Exemple 13.163
Soit à calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}. \tag{13.377}$$

Si nous prenons le chemin $\gamma_1(t) = (t,t)$, nous avons bien $\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = (0,0)$, et nous avons

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t-t}{t+t} = 0. \tag{13.378}$$

Donc si la limite (13.377) existait, elle vaudrait obligatoirement 0. Mais si nous considérons $\gamma_2(t) = (0,t)$, nous avons

$$(f\circ\gamma_2)(t) = \frac{-t}{t} = -1, \tag{13.379}$$

donc si la limite existe, elle doit obligatoirement valoir -1. Ne pouvant être égale à 0 et à -1 en même temps, la limite (13.377) n'existe pas. △

13.17 Dérivée directionnelle

Nous sommes capables de dériver une fonction de deux variables $f(x,y)$ par rapport à x et par rapport à y. C'est-à-dire que nous sommes capables de donner la variation de la fonction lorsqu'on bouge le long des axes horizontal et vertical. Il est évidemment souhaitable de parler de la variation de la fonction lorsqu'on se déplace le long d'autre droites.

Soit donc $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire $u_1^2 + u_2^2 = 1$), et considérons la fonction de une variable

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+tu_1, b+tu_2). \end{aligned} \tag{13.380}$$

La fonction φ n'est rien d'autre que la fonction f vue le long de la droite de direction donnée par le vecteur u. Nous pouvons aussi l'écrire $\varphi(t) = f(p+tu)$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. La façon la plus naturelle de définir une dérivée à deux variables est de considérer les **dérivées partielles** définies par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}. \end{aligned} \tag{13.381}$$

Ces nombres représentent la façon dont le nombre $f(x,y)$ varie lorsque soit seul x varie soit seul y varie. Les dérivées partielles se calculent de la même façon que les dérivées normales. Pour calculer $\partial_x f$, on fait « comme si » y était une constante, et pour calculer $\partial_y f$, on fait comme si x était une constante.

13.17.1 Dérivée partielle et directionnelles

Soit une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si $n \neq 1$, la notion de *dérivée* de la fonction f n'a plus de sens puisqu'on ne peut plus parler de pente de *la* tangente au graphe de f en un point. On introduit alors quelques notions qui feront, en dimension quelconque, le même travail que la dérivée en dimension un : les dérivées directionnelles et la différentielle. Nous allons voir qu'en dimension un, la différentielle coïncide avec la dérivée.

Définition 13.164.
*Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, a un point dans U et v un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On dit que f admet une **dérivée suivant le vecteur** v **au point** a si la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ admet une dérivée en $t = 0$. La dérivée de f suivant le vecteur v au point a est alors cette dérivée, et f est dite dérivable suivant v en a,*

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Définition 13.165.
*La fonction $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de composantes $(f_1, \dots, f_n)$, est dite **dérivable suivant** v **au point** a si toute ses composantes f_i, $i = 1, \dots, n$ sont dérivables suivant v au point a. Dans ce cas, nous écrivons*

$$\partial_v f(a) = (\partial_v f_1(a), \dots, \partial_v f_n(a)). \tag{13.382}$$

Géométriquement, il s'agit du taux de variation instantané de f en a dans la direction du vecteur u, c'est-à-dire de la pente de la tangente dans la direction du vecteur u au graphe de f au point $(a, f(a))$.

Remarque 13.166.
De nombreuses sources parlent de de dérivée **dans la direction**u vecteur v en définissant (avec une certaine raison) une **direction** dans $\mathbb{R}^m$ comme étant un vecteur de norme 1.

Ces personnes ne définissent alors $\partial_u f$ que pour $\|u\| = 1$. Pourquoi ? Le but de la dérivée directionnelle dans la direction u est de savoir à quelle vitesse la fonction monte lorsque l'on se déplace en suivant la direction u. Cette information n'aura un caractère « objectif » que si l'on avance à une vitesse donnée. En effet, si on se déplace deux fois plus vite, la fonction montera deux fois plus vite. Par convention, on demande alors d'avancer à vitesse 1.

Ici, pour être plus souple en termes de notations et de manipulations, nous définissons $\partial_u f$ pour tout u (non nul). Nous devons cependant garder en tête que le nombre $(\partial_v f)(a)$ ne peut pas être interprété comme étant une « vitesse de croissance de f en a » de façon trop sérieuse.

Cas particulier où $n = 2$:

$a = (a_1, a_2)$, $u = (u_1, u_2)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

Un cas particulier des dérivées directionnelles est la dérivée partielle. Si nous considérons la base canonique e_i de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}. \tag{13.383}$$

Dans le cas d'une fonction à deux variables, nous avons donc les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) \tag{13.384}$$

qui correspondent aux dérivées directionnelles dans les directions des axes. Ces deux nombres représentent de combien la fonction f monte lorsqu'on part de a en se déplaçant dans le sens des axes X et Y.

13.17.1.1 Quelques propriétés et notations

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $v = \alpha\, u$, alors $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \alpha\, \frac{\partial f}{\partial u}(a)$.

(2) Si on prend $u = e_j$ le $j$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

c'est-à-dire que la dérivée de f au point a dans la direction e_j est la dérivée partielle de f par rapport à sa $j$ème variable.

(3) Une fonction peut être dérivable dans certaines directions mais pas dans d'autres (rappelez vous que si la limite à droite est différente de la limite à gauche, la limite n'existe pas).

(4) Même si une fonction est dérivable en un point dans toutes les directions, on n'est pas sûr qu'elle soit continue en ce point. La dérivabilité directionnelle n'est donc pas une notion suffisante pour assurer la continuité. C'est pourquoi on introduit le concept de *différentiabilité*.

Proposition 13.167.
Soit u un vecteur de norme 1 dans $\mathbb{R}^m$ et soit $v = \lambda u$, avec λ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable suivant v au point a si et seulement si f est dérivable suivant u au point a, en outre

$$\partial_v f(a) = \lambda \partial_u f(a).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \partial_v f(a) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+t\lambda u)-f(a)}{t} = \\ &= \lambda \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+t\lambda u)-f(a)}{\lambda t} = \lambda \partial_u f(a). \end{aligned} \tag{13.385}$$

□

Définition 13.168.
Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. On appelle ***dérivées partielles de f au point*** *a les dérivées de f suivant les vecteurs de base $e_1, \ldots, e_m$ au point a, si elles existent.*

Si $m = 2, 3$ on peut utiliser la notation f_x, ∂_x ou ∂_1 pour la dérivée partielle suivant e_1, f_y, ∂_y ou ∂_2 pour la dérivée partielle suivant e_2 et f_z, ∂_z ou ∂_3 pour la dérivée partielle suivant e_3. En général, nous écrivons ∂_i pour noter la la dérivée partielle suivant e_i.

Des exemples faisons intervenir les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithme sont les exemples 19.212, 16.65.

La fonction d'une seule variable qu'on obtient à partir de f en fixant les $p-1$ variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p$ et qui associe à x_i la valeur $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$, est appelée x_i-ème **section** de f en $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p$. L'$i$-ème dérivée partielle de f au point $a = (x_1, \ldots, x_m)$ est la dérivée de l'i-ème section de f au point x_i. En pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction on fait une dérivation par rapport à la variable choisie en considérant les autres variables comme des constantes.

Exemple 13.169
Considérons la fonction $f(x, y) = 2xy^2$. Lorsque nous calculons $\partial_x f(x, y)$, nous faisons comme si y était constant. Nous avons donc $\partial_x f(x, y) = 2y^2$. Par contre lors du calcul de $\partial_y f(x, y)$, nous prenons x comme une constante. La dérivée de y^2 par rapport à y est évidemment $2y$, et par conséquent, $\partial_y f(x, y) = 4xy$. △

Définition 13.170.
Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La fonction f est ***dérivable sur U suivant le vecteur*** *u, si f est dérivable suivant le vecteur u en tout point de U.*

Pour les fonctions d'une seule variable la dérivabilité en un point a implique la continuité en a. Cela n'est pas vrai pour les fonctions de plusieurs variables : il existe des fonctions f qui sont dérivables suivant tout vecteur au point a sans pour autant être continue en a.

Exemple 13.171
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.386}$$

Pour voir que f n'est pas continue en $(0,0)$ il suffit de calculer la limite de f restreinte à la parabole $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Pourtant la fonction f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions. En effet, soit $v = (v_1, v_2)$. Si $v_2 \neq 0$, alors

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{t^3 v_1^2 v^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2},$$

tandis que si $v_2 = 0$, alors la valeur de $f(tv_1, 0)$ est 0 pour tout t et v_1, donc la dérivée partielle de f par rapport à x en l'origine existe et est nulle. △

Exemple 13.172
Pour une fonction réelle à variable réelle, la dérivabilité entraine la continuité. Il n'en va pas de même pour les fonctions à plusieurs variables, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.387}$$

Nous avons tout de suite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \tag{13.388}$$

De plus si $u_x \neq 0$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{u_y}{u_x}\|u\|. \tag{13.389}$$

Donc toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ existent alors que la fonction n'y est manifestement pas continue. En effet sous forme polaire,

$$f(r,\theta) = \frac{r\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \tag{13.390}$$

et quelle que soit la valeur de r, en prenant θ suffisamment proche de $\pi/2$, la fraction peut être arbitrairement grande.

Nous verrons par la proposition 13.193 que la différentiabilité d'une fonction implique sa continuité. △

Théorème 13.173 (Accroissement finis pour les dérivées suivant un vecteur)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Soient a et b deux points distincts dans U, tels que le segment[46] *$[a,b]$ soit contenu dans U. Soit u le vecteur*

$$u = \frac{b-a}{\|b-a\|_m}.$$

Si $\partial_u f(x)$ existe pour tout x dans $[a,b]$ on a

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|\partial_u f(x)\|_n \|b-a\|_m.$$

46. Définition 8.33.

Démonstration. Nous considérons la fonction $g(t) = f\big((1-t)a - tb\big)$. Elle décrit la droite entre a et b parce que $g(0) = a$ et $g(1) = b$. En ce qui concerne la dérivée,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((1-t-h)a - (t+h)b\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(a + (t+h)(b-a)\big) - f\big(a + t(b-a)\big)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(a + t(b-a)\big)\|b-a\|. \end{aligned} \tag{13.391}$$

Le dernier facteur $\|b-a\|$ apparaît pour la normalisation du vecteur u. En effet dans la limite, il apparaît $h(b-a)$, ce qui donnerait la dérivée le long de $b-a$, tandis que u vaut $(b-a)/\|b-a\|$.

Par le théorème des accroissements finis pour g, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que

$$g(1) = g(0) + g'(t_0)(1-0). \tag{13.392}$$

Donc

$$\|g(1) - g(0)\| \leqslant \sup_{t_0} \|g'(t_0)\| = \sum_{t_0\in]0,1[} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(a + t_0(b-a)) \right\| \|b-a\|. \tag{13.393}$$

Mais lorsque t_0 parcours $]0,1[$, le point $a + t_0(b-a)$ parcours le segment $]a,b[$, d'où le résultat. □

Corollaire 13.174.
Dans les mêmes hypothèses, si $n = 1$, alors il existe $\bar{x}$ dans $]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \partial_u f(\bar{x})\|b-a\|_m.$$

Définition 13.175.
Le nombre

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big(a + tu_1, b + tu_2\big) - f(a,b)}{t} \tag{13.394}$$

*est la **dérivée directionnelle** de f dans la direction de u au point (a,b). Il sera noté*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a,b), \tag{13.395}$$

ou plus simplement $\partial_u f(a,b)$.

Lorsque f est différentiable, la dérivée directionnelle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u. \tag{13.396}$$

13.17.2 Gradient : direction de plus grande pente

Étant donné que u est de norme 1, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|\nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right| \leqslant \|\nabla f(a,b)\|. \tag{13.397}$$

Donc

$$-\|\nabla f(p)\| \leqslant \nabla f(p) \cdot u \leqslant \|\nabla f(p)\|. \tag{13.398}$$

La norme de la dérivée directionnelle (qui est la valeur absolue du nombre au centre) est donc « coincée » entre $-\|\nabla f(p)\|$ et $\|\nabla f(p)\|$. Prenons par exemple

$$u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}. \tag{13.399}$$

Dans ce cas, nous avons exactement

$$\nabla f(p) \cdot u = \|\nabla f(p)\|, \tag{13.400}$$

qui est la valeur maximale que la dérivée directionnelle peut prendre.

La direction du gradient est donc la direction suivant laquelle la dérivée directionnelle est la plus grande. Pour la même raison, la dérivée directionnelle est la plus petite dans le sens opposé au gradient.

En termes bien clairs : lorsqu'on veut aller le plus vite possible au ski, on prend la direction du gradient de la piste de ski. C'est dans cette direction que ça descend le plus vite. Dans quelle direction vont les débutants ? Ils vont perpendiculairement à la pente (ce qui ennuie tout le monde, mais c'est un autre problème). Les débutants vont donc dans la direction perpendiculaire au gradient. Prenons donc $u \perp \nabla f(p)$ et calculons la dérivée directionnelle de f dans la direction u en utilisant la formule 13.396 :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u = 0 \tag{13.401}$$

parce que nous avons choisi $u \perp \nabla f(p)$. Nous voyons donc que les débutants en ski ont eu la bonne intuition que la direction dans laquelle la piste ne descend pas, c'est la direction perpendiculaire au gradient.

C'est aussi pour cela que l'on a tendance à faire du zig-zag à vélo lorsqu'on monte une pente très forte et qu'on est fatigué. C'est toujours pour cela que les routes de montagne font de longs lacets. La montée est moins rude en suivant une direction proche d'être perpendiculaire au gradient !

Théorème 13.176.
Le gradient des fonctions suit à peu près les mêmes règles que les dérivées. Soient f et g deux fonctions différentiables. Nous avons entre autres

(1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(2) $\nabla(fg)(a,b) = g(a,b)\nabla f(a,b) + f(a,b)\nabla g(a,b)$;

(3) Dès que $g(a,b) \neq 0$, nous avons

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{g(a,b)\nabla f(a,b) - f(a,b)\nabla g(a,b)}{g(a,b)^2}. \tag{13.402}$$

13.17.3 Gradient : orthogonal au plan tangent

Vu que le gradient d'une fonction est la direction de plus grande pente et que le plan tangent est le plan de plus petite pente, quoi de plus naturel que de penser que le gradient est orthogonal au plan tangent ?

Lemme 13.177.
Soit $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et la partie

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \phi(x) = C\} \tag{13.403}$$

pour une certaine constante C.

Soit $x_0 \in \Gamma$. Le gradient de ϕ en x_0 est orthogonal au plan tangent à Γ en x_0.

Démonstration. Un vecteur tangent à Γ en x_0 est de la forme $\gamma'(0)$ où $\gamma\colon \mathbb{R} \to \Gamma$ vérifie $\gamma(0) = x_0$. Vu que ϕ est constante sur Γ nous avons

$$\frac{d}{ds}\Big[\phi\big(\gamma(s)\big)\Big]_{s=0} = 0, \tag{13.404}$$

ce qui donne

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\big(\gamma(0)\big)\gamma_i'(0) = 0, \tag{13.405}$$

ce qui signifie exactement $\langle (\nabla\phi)(x_0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Le vecteur $(\nabla\phi)(x_0)$ est donc perpendiculaire à tout vecteur tangent de Γ en x_0. □

13.18 Dérivée directionnelle de fonctions composées

Nous savons déjà comment dériver les fonctions composées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si nous avons deux fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous formons la composée $\varphi = f \circ u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la dérivée vaut

$$\varphi'(a) = f'\big(u(a)\big)u'(a). \tag{13.406}$$

Considérons maintenant le cas un peu plus compliqué des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et de la composée

$$\begin{aligned} \varphi&\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \varphi(x,y) &= f\big(u(x,y)\big). \end{aligned} \tag{13.407}$$

Afin de calculer la dérivée partielle de φ par rapport à x, nous admettons que pour tout a, b et t, il existe $c \in [a, a+t]$ tel que

$$u(a+t,b) = u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b). \tag{13.408}$$

Cela est une généralisation immédiate du théorème 13.129. Nous devons calculer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a+t,b) - \varphi(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\big(u(a+t,b)\big) - g\big(u(a,b)\big)}{t}. \tag{13.409}$$

Étant donné l'hypothèse que nous avons faite sur u, nous avons

$$f\big(u(a+t,b)\big) = f\big(u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big). \tag{13.410}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis pour f, nous avons un point d entre $u(a,b)$ et $u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$ tel que

$$f\big(u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big) = f\big(u(a,b)\big) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{13.411}$$

Le numérateur de (13.409) devient donc

$$t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{13.412}$$

Certes les points c et d sont inconnus, mais nous savons que c est entre a et $a+t$ ainsi que d se situe entre $u(a,b)$ et $u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$. Lorsque nous prenons la limite $t \to 0$, nous avons donc $\lim_{t\to 0} c = a$ et $\lim_{t\to 0} d = u(a,b)$. Nous avons alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)f'\big(u(a,b)\big). \tag{13.413}$$

La formule que nous avons obtenue (de façon pas très rigoureuse) est

$$\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,y)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)f'\big(u(x,y)\big). \tag{13.414}$$

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué où nous voudrions savoir les dérivées partielles de la fonction φ donnée par

$$\varphi(x,y,z) = f\big(u(x,y), v(x,y,z)\big) \tag{13.415}$$

où $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Commençons par la dérivée partielle par rapport à z. Étant donné que φ ne dépend de z que via la seconde entrée de f, il est normal que seule la dérivée partielle de f par rapport à sa seconde entrée arrive dans la formule :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z). \tag{13.416}$$

La dérivée partielle par rapport à y demande de tenir compte en même temps de la façon dont f varie avec sa première entrée et la façon dont elle varie avec sa seconde entrée ; cela nous fait deux termes :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y),v(x,y,z)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z).\tag{13.417}$$

Cette formule a une interprétation simple. Lançons un caillou du sommet d'une falaise. Son mouvement est une chute libre avec une vitesse initiale horizontale :

$$\begin{cases} x(t)=v_0t & (13.418a)\\ y(t)=h_0-\frac{gt^2}{2} & (13.418b)\end{cases}$$

où v_0 est la vitesse initiale horizontale et h_0 est la hauteur de la falaise. Si nous sommes intéressés à la distance entre le caillou et le bas de la falaise (point $(0,0)$), le théorème de Pythagore nous dit que

$$d(t)=\sqrt{x^2(t),y^2(t)}.\tag{13.419}$$

Pour trouver la variation de la distance par rapport au temps il faut savoir de combien la distance varie lorsque x varie et multiplier par la variation de x par rapport à t, et puis faire la même chose avec y.

Théorème 13.178.
Soit $g\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ une fonction différentiable[47] *en a, et $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $g(a)$. Si nous définissons $\varphi(x)=(f\circ g)(x)$, alors pour tout $i=1,\dots,m$, nous avons*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g(a)\big)\frac{\partial g}{\partial x_i}\tag{13.420}$$

où $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ dénote la dérivée partielle de f par rapport à sa k-ième variable.

Donnons un exemple d'utilisation de cette formule. Si

$$\begin{aligned}g\colon\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}^3\\ f\colon\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R},\end{aligned}\tag{13.421}$$

nous avons $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Les dérivées partielles de φ sont données par les formules

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y)\tag{13.422}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y)\tag{13.423}$$

Notez que les dérivées de φ et des composantes de g sont calculées en (x,y), tandis que celles de f sont calculées en $g(x,y)$.

13.19 Formes différentielles

Nous parlerons de formes différentielles exactes et fermées dans la section 21.82.

47. Je ne suis pas certain que l'hypothèse de différentiabilité soit obligatoire.

13.19.1 Décomposition dans la base duale

Définition 13.179.
*Soit U, un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une 1-**forme différentielle** ω sur U est une application*

$$\begin{aligned}\omega\colon U &\to (\mathbb{R}^n)^*\\ x &\mapsto \omega_x.\end{aligned} \tag{13.424}$$

Remarque 13.180.
L'ensemble des 1-formes différentielles forment un espace vectoriel avec les définitions

$$\begin{aligned}(\lambda\omega)_x(v) &= \lambda\omega_x(v)\\ (\omega+\mu)_x(v) &= \omega_x(v)+\mu_x(v).\end{aligned} \tag{13.425}$$

Nous connaissons la de $(\mathbb{R}^n)^*$ définie en 4.113. Nous allons noter ces formes par dx_i :

$$\begin{aligned}e_1^* = dx_1\colon v &\mapsto v_1\\ &\vdots\\ e_n^* = dx_n\colon v &\mapsto v_n\end{aligned} \tag{13.426}$$

Toute forme différentielle s'écrit

$$\omega_x = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)dx_i \tag{13.427}$$

où $a_1,\dots,a_n$ sont les composantes de ω dans la base usuelle, et sont des fonctions à valeurs réelles.

Lemme 13.181.
*Une 1-forme différentielle est **continue** si les fonctions a_i sont continues. La forme sera C^k quand les a_i seront C^k.*

Pour un vecteur $v=(v_1,\dots,v_n)$ on a donc par définition de dx_i

$$\omega_x(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)v_i. \tag{13.428}$$

Ces fonctions a_i peuvent être trouvées en appliquant ω aux éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$a_j(x) = \omega_x(e_j) \tag{13.429}$$

parce que $\omega_x(e_j) = \sum_i a_i(x)dx_i(e_i) = \sum_i a_i(x)\delta_{ij} = a_j(x)$.

13.19.2 L'isomorphisme musical

Si G est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$, et si $x\in\mathbb{R}^n$, nous pouvons définissons

$$\begin{aligned}G_x^\flat\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto \langle G(x),v\rangle\end{aligned} \tag{13.430}$$

Pour chaque x, l'application $G_x^\flat$ est une forme sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Nous écrivons que

$$G_x^\flat \in \big(\mathbb{R}^n\big)^*. \tag{13.431}$$

Nous pouvons ainsi déterminer le développement de $G^\flat$ dans la base des dx_i en faisant le calcul

$$G_x^\flat(e_i) = \langle G(x),e_i\rangle = G_i(x), \tag{13.432}$$

donc les composantes de $G^\flat$ dans la base dx_i sont exactement les composantes de G dans la base e_i :

$$G_x^\flat = G_1(x)dx_1 + \cdots + G_n(x)dx_n. \tag{13.433}$$

La construction inverse existe également. Si ω est une 1-forme différentielle, nous pouvons définir le champ de vecteur $\omega^\sharp$ par la formule (implicite)

$$\omega_x(v) = \langle \omega^\sharp(x), v \rangle \tag{13.434}$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $(\omega^\sharp)^\flat = \omega$.

Lemme 13.182.
En composantes nous avons :

$$\omega^\sharp(x) = \big(a_1(x), \dots, a_n(x)\big). \tag{13.435}$$

Si G est un champ de vecteurs, alors $(G^\flat)^\sharp = G$.

13.20 Différentielle

Nous avons déjà donné une définition abstraite de la différentielle dans la définition 12.133. Nous en voyons maintenant quelque motivations dans le cas de fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$.

13.20.1 Exemples introductifs

La notion de dérivée est associée à la recherche de la droite tangente à une courbe. Reprenons rapidement le cheminement. La dérivée de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point a est un nombre $f'(a)$, qui définit donc une application linéaire dont le coefficients angulaire est $f'(a)$, et que nous notons df_a :

$$\begin{aligned} df_a\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto f'(a)u. \end{aligned} \tag{13.436}$$

La droite donnée par l'équation

$$y(a+u) = f'(a)u \tag{13.437}$$

est parallèle à la tangente en a. Pour trouver la tangente, il suffit de la décaler de la hauteur qu'il faut. L'équation de la droite tangente au graphe de f au point $\big(a, f(a)\big)$ devient

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f(a) + df_a(x-a). \tag{13.438}$$

Nous nous proposons de généraliser cette formule au cas de la recherche du plan tangent à une surface.

Exemple 13.183
Considérons $f(x,y) = x^2y + y^2e^x$. Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + y^2e^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 2ye^x. \end{aligned} \tag{13.439}$$

△

Cet exemple était l'exemple facile où tout se passe bien.

Exemple 13.184
Les choses sont moins simples lorsqu'on considère la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{13.440}$$

On voit que pour tout x et tout y, nous avons $f(x,0)=f(0,y)=0$. Donc cette fonction est nulle sur les axes horizontaux et verticaux. Nous avons en particulier

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=0.\end{aligned}\tag{13.441}$$

Donc ces dérivées partielles existe.

Il n'est par contre pas question de dire que cette fonction « va bien » autour du point $(0,0)$. En effet si nous regardons sa valeur sur la droite diagonale $y=x$, nous avons

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.\tag{13.442}$$

Par conséquent si nous suivons la fonction le long de la droite $y=x$, la hauteur vaut $\frac{1}{2}$ en permanence, sauf juste en $(0,0)$ où la fonction fait un grand plongeon !

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=(x*y)/(x**2+y**2)
sage: plot3d(f,(x,-2,2),y(-2,2))
```

D'ailleurs elle fait un plongeon le long de toutes les droites (sauf verticale et horizontale). En effet si nous regardons la fonction le long de la droite $y=mx$, nous avons

$$f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}.\tag{13.443}$$

La fonction est donc *constante* sur chacune de ces droites. Il n'est donc pas question de dire que cette fonction est « dérivable » en $(0,0)$, vu qu'elle fait des grands sauts dans presque toutes les directions. △

Nous devons donc trouver mieux que les dérivées partielles pour étudier le comportement des fonctions un peu problématiques.

13.20.2 Différentielle

Nous nous souvenons de l'équation (13.231) qui nous dit que pour une fonction d'une variable la dérivabilité signifiait qu'il existait un nombre ℓ et une fonction α tels que

$$f(x)=f(a)+\ell(x-a)+(x-a)\alpha(x-a)\tag{13.444}$$

et $\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0$.

En nous inspirant de cela, nous comprenons peut-être un peu le pourquoi de la définition 12.133.

13.185.
L'objet df_a est *en soi* une application $df_a\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. Nous notons $df_a(u)$ la valeur de df_a sur le vecteur $u\in\mathbb{R}^m$. En particulier, l'application df est une forme différentielle au sens de la définition 13.179.

13.186.
Les propositions 13.196 et 13.199 vont montrer qu'en étudiant bien les dérivées partielles, nous pouvons conclure à la différentiabilité d'une fonction. Attention cependant, nous verrons dans l'exemple 13.205 que l'existence des dérivées directionnelles partielles ne permettait pas de conclure à la différentiabilité.

13.20.3 Matrice de la différentielle

La différentielle est une application linéaire. Elle possède donc une matrice lorsque des bases sont fixées.

Proposition 13.187.
Soient une application différentiable $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^m$. Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, la matrice de df_a est

$$(df_a)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{13.445}$$

Démonstration. Le lien entre matrice et application linéaire est fait dans la proposition 4.63. Dans le cas des bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ nous savons qu'extraire une composante revient à prendre le produit scalaire. Nous avons donc

$$(df_a)_{ij} = \big(df_a(e_j)\big)_i = df_a(e_j) \cdot e_i. \tag{13.446}$$

La linéarité de la dérivation donne alors

$$(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f(a+te_j)\Big]_{t=0} \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f_i(a+te_j)\Big]_{t=0} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{13.447}$$

□

13.20.4 Quelques propriétés

Lemme 13.188.
La différentielle d'une application linéaire est l'application elle-même. Plus précisément : soit une application linéaire $f\colon E \to F$. Alors nous avons, pour tout $a \in E$ et $u \in E$:

$$df_a(u) = f(u). \tag{13.448}$$

Démonstration. Pour rappel, toujours bon à avoir en tête : $df\colon E \to \mathcal{L}(E,F)$. En posant $T(u) = f(u)$ nous avons :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0 \tag{13.449}$$

parce que le numérateur est nul pour tout h. □

Lemme 13.189 ([1]).
Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Nous posons

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto g(x). \end{aligned} \tag{13.450}$$

Alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Le problème lorsqu'il faut démontrer qu'une fonction est de classe C^∞, c'est que $d^k f$ sera une application de $\mathbb{R}^2$ vers un espace qui est un terrible emboîtement de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \dots)$. Pour traiter cette difficulté, nous considérons les espaces suivants : $V_0 = \mathbb{R}$ et par récurrence $V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, V_k)$.

Et nous considérons également les éléments

$$\begin{aligned} \alpha_1\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto u \end{aligned} \tag{13.451}$$

et plus généralement $\alpha_k \in V_k$ donné par

$$\begin{aligned} \alpha_k\colon \mathbb{R}^2 &\to V_{k-1} \\ (u,v) &\mapsto u\alpha_{k-1}. \end{aligned} \tag{13.452}$$

Notons que dans l'expression $u\alpha_{k-1}$, il s'agit d'un produit entre un scalaire $u \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\alpha_{k+1} \in V_{k-1}$.

Nous prouvons maintenant par récurrence que $d^k f_{(a,b)} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, en utilisant directement la définition.

Initialisation Pour $k = 1$, nous calculons

$$\frac{|f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \tag{13.453}$$

Notre but est de calculer la limite de cela lorsque $h \xrightarrow{\mathbb{R}^2} 0$ avec $h \neq 0$. L'hypothèse sur la dérivabilité de g nous indique que si $0 < |t| < \delta$, alors

$$\frac{|g(a+t) - g(a) - tg'(a)|}{|t|} < \epsilon. \tag{13.454}$$

Nous considérons donc la boule épointée de $\mathbb{R}^2$ de rayon δ : $B = B\big((0,0),\delta\big)\backslash\{(0,0)\}$, et nous considérons $h \in B$. Deux cas sont à distinguer : $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$.

Si $h_1 = 0$, alors

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} = 0. \tag{13.455}$$

Sinon nous avons $0 < h_1 \leqslant \|h\| < \delta$ et donc

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \leqslant \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{|h_1|} < \epsilon \tag{13.456}$$

par la relation (13.454). Nous avons donc bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = 0. \tag{13.457}$$

Récurrence Nous supposons que $d^k f_{a,b} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, et nous devons prouver que $d^k f$ est différentiable et que $d^{k+1} f_{(a,b)} = g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}$. Pour cela nous introduisons tout dans la définition de la différentielle pour voir ce qui arrive.

Nous avons :

$$\frac{d^k f_{(a+h_1,b+h_2)} - d^k f_{(a,b)} - g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}(h_1,h_2)}{\|h\|} = \frac{g^{(k)}(a+h_1)\alpha_k - g^{(k)}(a)\alpha_k - g^{(k+1)}(a)h_1\alpha_k}{\|h\|}. \tag{13.458}$$

Cela est, pour chaque $h \neq 0$, un élément V_k, mais le coefficient α_k se factorise de telle sorte que nous devons seulement calculer la limite (si elle existe)

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{(k)}(a+h_1) - g^{(k)}(a) - h_1 g^{(k+1)}(a)}{\|h\|}. \tag{13.459}$$

Le même jeu de séparation entre $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$ que dans le cas $k = 1$ nous permet de déduire que cette limite existe et vaut zéro, grace à la définition de $g^{(k+1)}$.

Nous avons donc prouvé que f est différentiable autant que fois que souhaité. Elle est donc de classe C^∞ comme annoncé. □

13.20.5 Différentielle, dual et forme différentielle

13.20.5.1 Dans la base duale

Nous avons déjà parlé en (13.426) de la base $\{dx_i\}_{i=1,\dots,n}$ des formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 13.190.
La forme de base dx_i est la différentielle de la fonction de projection

$$\begin{aligned} \texttt{proj}_i\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto v_i. \end{aligned} \tag{13.460}$$

Autrement dit nous avons

$$d(\texttt{proj}_i)_a = dx_i \tag{13.461}$$

pour tout i et pour tout a.

Démonstration. Le quotient

$$\frac{\texttt{proj}_i(a+h) - \texttt{proj}_i(a) - dx_i(h)}{\|h\|} \tag{13.462}$$

est toujours nul. La limite est a fortiori nulle. □

Nous avons donc $(d\,\texttt{proj}_i)_a = dx_i$ pour tout a. Notons que les fonctions dx_i et $\texttt{proj}_i$ sont les mêmes. Cela justifie la notation « dx_i » pour les formes différentielles de base, parce que ce sont les différentielles des fonctions « coordonnées » que nous pouvons noter x_i.

Étant donné une fonction f, il est légitime de nous demander comment (si elle existe) la différentielle se décompose en chaque point dans la base duale. C'est-à-dire fixer les fonctions a_i en termes des dérivées de f pour avoir

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i. \tag{13.463}$$

C'est ce que nous allons faire dans le corollaire 13.194.

Exemple 13.191
Si $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, sa différentielle est la forme

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy. \tag{13.464}$$

Si nous nommons f et g les fonctions $\partial_x F$ et $\partial_y F$, nous avons donc

$$Df = f dx + g dy, \tag{13.465}$$

qui vérifie

$$\partial_y f = \partial_x g, \tag{13.466}$$

parce que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Ce que nous avons donc prouvé, c'est que △

Lemme 13.192.
Si $f dx + g dy$ est la différentielle d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors $\partial_y f = \partial_x g$.

13.20.6 Ce n'est pas la différentielle extérieure

Il existe une notion de différentielle extérieure, mais ce n'est pas celle-là que nous utilisons la majorité du temps. En particulier si E et F sont des espaces vectoriels normés, lorsque $f\colon E \to F$ est une fonction, df est une application

$$df\colon E \to \mathcal{L}(E, F) \tag{13.467}$$

et la différentielle seconde est la différentielle de cette application-là. Chose faisable parce que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel on ne peut plus respectable.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle extérieure d'une 1-forme, nous avons une formule de Leibnitz

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega. \tag{13.468}$$

En particulier,

$$d(f dx) = df \wedge dx + f \underbrace{d(dx)}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial x} dx \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx. \tag{13.469}$$

Attention : la différentielle extérieure n'est pas la différentielle usuelle. Certes dans le cas d'une 0-forme (c'est-à-dire d'une fonction), les deux notions coïncident, mais ça ne va pas plus loin. La différentielle extérieure vérifie $d^2\omega = 0$ pour tout ω, y compris pour les fonctions : si $\omega = df$ alors $d\omega = 0$.

Nous mentionnerons la différentielle extérieure dans le cas de

(1) Théorème de Stockes 21.73.

13.20.7 Fonctions composées

Cette façon de voir la différentielle nous permet de jeter un nouveau regard sur la formule de différentiation des fonctions composées. Soient

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ g &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{13.470}$$

et $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(u) = h\big(f(u)\big) = (g \circ f)(u). \tag{13.471}$$

Nous allons noter x les coordonnées de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathbb{R}^p$ et u, un vecteur de $\mathbb{R}^p$ accroché au point a. Pour $\mathbb{R}^n$, les notations seront que les coordonnées sont y, b est un point de $\mathbb{R}^n$ et v est un vecteur « accroché » au point b.

Nous avons

$$dg_b(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) dy_i(v). \tag{13.472}$$

Ici $dy_i(v)$ signifie la $i$ème composante de v. C'est simplement v_i. Cette formule étant valable pour tout point $b \in \mathbb{R}^n$ et pour tout vecteur v, nous pouvons l'écrire en particulier pour

$$\begin{cases} b = f(a) & \text{(13.473a)} \\ v = df_a(u). & \text{(13.473b)} \end{cases}$$

Cela donne

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) dy_i\big(df_a(u)\big). \tag{13.474}$$

Mais

$$df_a(u) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \tag{13.475}$$

donc la $i$ème composante de ce vecteur est

$$\big(df_a(u)\big)_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \tag{13.476}$$

En remplaçant $dy_i\big(df_a(u)\big)$ par cela dans l'expression (13.474), nous trouvons

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \tag{13.477}$$

Nous pouvons vérifier que cela est la différentielle de $g \circ f$ au point a appliquée au vecteur u. En effet

$$d(g \circ f)_a(u) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \tag{13.478}$$

tandis que, par la dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{13.479}$$

Au final, ce que nous avons prouvé est que

$$d(g \circ f)_a(u) = dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big). \tag{13.480}$$

13.20.8 Continuité, dérivabilité et différentiabilité

Le théorème suivant reprend les principales propriétés d'une fonction différentiable. Il est à ne pas confondre avec la proposition 13.223 qui dira que si les dérivées partielles sont continues sur un voisinage de a, alors f est différentiable en a.

Proposition 13.193.
Si f est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$ alors

(1) elle est continue en a,

(2) elle admet une dérivée dans toutes les directions de $\mathbb{R}^m$,

(3) toutes les dérivées directionnelles $\partial_u f(a)$ existent et nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} df_a \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i, \end{aligned} \tag{13.481}$$

si les u^i sont les composantes de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La dernière égalité sera de temps en temps utilisée sous la forme

$$df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a + tu)\Big]_{t=0}. \tag{13.482}$$

Démonstration. La limite

$$\lim_{h \to 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n}{\|h\|_m} = 0,$$

implique que

$$\lim_{h \to 0_m} \|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n = 0.$$

Comme T est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, on a $\lim_{h \to 0} T(h) = 0$, d'où la continuité de f au point a.

Si u est un vecteur non nul, la différentiabilité de f au point a implique

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(a+tu) - f(a) - T(tu)\|_n}{\|tu\|_m} = 0,$$

par la linéarité de T et par l'égalité $\|tu\|_m = |t|\|u\|_m$ on obtient

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{|t|} = T(u).$$

Donc f est dérivable suivant le vecteur u et $\partial_u f(a) = T(u) = df_a(u)$. □

Corollaire 13.194.
Si f est différentiable, alors la forme différentielle df_a se décompose en

$$df_a f = \sum_i (\partial_i f)(a) dx_i. \tag{13.483}$$

Démonstration. Vue la définition des formes dx_i nous pouvons remplacer u_i par $dx_i(u)$ dans l'égalité (13.481) et écrire

$$df_a(u) = \sum_i (\partial_i f)(a) dx_i(u) \tag{13.484}$$

et donc écrire l'égalité demandée. □

Le lemme suivant regroupe quelques égalités avec lesquelles nous allons souvent travailler. Il explique comment sont liés les dérivées directionnelles, les dérivées partielles et la différentielle.

Lemme 13.195.
Si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, alors

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a) \cdot u \tag{13.485}$$

pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^m$

Démonstration. La première égalité est la proposition 13.193, et la seconde est seulement la définition de la dérivée directionnelle avec des notations un peu plus snob. En particulier nous avons

$$df_a(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{13.486}$$

Pour le reste c'est la linéarité de la différentielle qui joue : le vecteur u peut être écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base

$$u = \sum_{i=1}^m u_i e_i, \qquad u_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Alors, la linéarité de df_a nous donne

$$df_a(u) = df_a\left(\sum_{i=1}^m u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m u_i \left(df_a e_i\right) = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{13.487}$$

Le lien avec le gradient est la définition du produit scalaire (11.289). □

La formule $df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ est bien utile pour calculer des différentielles, mais elle ne permet pas de prouver que f est différentiable. Autrement dit, même si le calcul de la dérivée $\frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ donne un résultat pour tout u, nous ne pouvons pas en déduire que f est différentiable au point a.

Proposition 13.196.
Soient f une fonction de x et y et un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si les nombres $\partial_x f(a,b)$ et $\partial_y f(a,b)$ existent et s'il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \|(x,y)-(a,b)\|\alpha\Big(\|(x,y)-(a,b)\|\Big) \end{aligned} \tag{13.488}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0, \tag{13.489}$$

alors f est différentiable en (a,b).

13.197.
Dans cet énoncé nous avons écrit $d\big((x,y),(a,b)\big)$ la distance entre (x,y) et (a,b), c'est-à-dire le nombre $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Afin d'écrire l'équation (13.488) sous forme plus compacte, nous introduisons le vecteur

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \end{pmatrix} \tag{13.490}$$

L'équation (13.488) devient alors

$$f(X) = f(P) + \nabla f(a,b) \cdot (X-P) + \|X-P\|\alpha\big(\|X-P\|\big). \tag{13.491}$$

Le vecteur $(\nabla f)(a,b)$ est appelé le **gradient** de f au point (a,b).

Remarque 13.198.
Nous avons introduit la notation ∇f pour le gradient d'une fonction f. Nous allons par la suite introduire $\nabla \cdot F$ pour la divergence du champ de vecteurs F et $\nabla \times F$ pour son rotationnel.

Toutes les formules pour ∇f, $\nabla \cdot F$ et $\nabla \times F$ peuvent facilement être mémorisées en pensant à ∇ comme étant le vecteur

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{13.492}$$

Nous allons ici cependant seulement penser à (13.492) comme un moyen mnémotechnique ; nous ne donnons pas de définitions à « ∇ » tout seul.

Proposition 13.199.
Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ qui sont elles-mêmes des fonctions continues de x et y. Alors la fonction f est différentiable partout.

Proposition 13.200.
Si f est différentiable en (a,b) alors pour tout vecteur u, la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+tu_1, b+tu_2) \end{aligned} \tag{13.493}$$

est dérivable en 0 et on a

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \tag{13.494}$$

où nous avons noté $p=(a,b)$.

Démonstration. Récrivons la formule (13.491) sous la forme

$$f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p) + \|x-p\|\alpha(\|x-p\|). \tag{13.495}$$

Cela étant vrai pour tout x, nous l'écrivons en particulier pour $x = p+tu$ où t est un réel et u est le vecteur unitaire choisi. Nous avons donc

$$f(p+tu) = f(p) + t\nabla f(p) \cdot u + \|tu\|\alpha(\|tu\|). \tag{13.496}$$

En utilisant le fait que u est unitaire, $\|tu\| = |t|\|u\| = |t|$. La dérivée de φ en 0 est alors donnée par

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tu)-f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \nabla f(p) \cdot u + \alpha(|t|). \tag{13.497}$$

Lorsque nous prenons la limite, le membre de gauche devient $\varphi'(0)$ tandis que dans le membre de droite, le second terme disparaît. Nous avons finalement

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \tag{13.498}$$

□

13.20.9 Calcul de valeurs approchées

Si nous remplaçons les accroissements $x-a$ et $y-b$ par h et k, le critère de différentiabilité s'écrit

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ + \sqrt{h^2+k^2}\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big). \end{aligned} \tag{13.499}$$

Le dernier terme du membre de droite tend vers zéro à une vitesse double lorsque h et k tendent vers zéro : d'une part parce que $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers zéro et d'autre part parce que $\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)$ tend vers zéro. Nous avons donc la « bonne » approximation

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b). \tag{13.500}$$

lorsque (x,y) n'est pas trop loin de (a,b). Cette expression est évidemment une généralisation immédiate de l'équation (13.234). Elle exprime que l'on peut obtenir des informations sur la valeur d'une fonction en (x,y) si on peut calculer la fonction et ses dérivées en un point (a,b) non loin de (x,y).

Cette formule peut aussi être vue sous la forme suivante, plus pratique dans certains calculs :

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \simeq f(a,b) + \Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \tag{13.501}$$

Exemple 13.201
Prenons la fonction $f(x,y)=\cos(x)\sin(y)$ et calculons une approximation de

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01, \frac{\pi}{2}+0.03\big). \tag{13.502}$$

D'abord les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\sin(x)\sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos(x)\cos(y). \end{aligned} \tag{13.503}$$

Nous allons utiliser l'approximation

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01, \frac{\pi}{2}+0.03\big) \simeq f\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) + 0.01\frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) + 0.03\frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big). \tag{13.504}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) &= -\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned} \tag{13.505}$$

Par conséquent

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01, \frac{\pi}{2}+0.03\big) \simeq \frac{1}{2} - 0.01\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{200}. \tag{13.506}$$

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=cos(x)*sin(y)
sage: a=f(pi/3+0.01,pi/2+0.03)
sage: numerical_approx(a)
0.491093815387986
sage: b=1/2-sqrt(3)/200
sage: numerical_approx(b)
```

```
0.491339745962156
sage: numerical_approx(a-b)
-0.000245930574169814
```

Cela fait une erreur de l'ordre du dix millième.

△

Remarque 13.202.
Les esprits les plus critiques diront que cette vérification pas Sage n'en est pas une parce que Sage a certainement utilisé un algorithme d'approximation qui se base sur la même idée que ce que nous venons de faire, et que par conséquent le fait qu'il obtienne le même résultat que nous est un peu tautologique.

Ils n'auront pas tort. Cependant, le code source de Sage est disponible publiquement [48] ; vous pouvez aller le lire et vérifier qu'il y a effectivement une *preuve* que le résultat fourni par Sage possède une bonne dizaine de décimales correctes.

Cette disponibilité publique du code source est une des nombreuses différences fondamentales entre Sage et votre calculatrice [49]. Dois-je vous rappeler qu'un des principes fondamentaux de l'éthique scientifique est que les résultats et les méthodes utilisés doivent être absolument ouverts à la vérification et à la critique de tous ?

$$df_p(u) = \nabla f(p) \cdot u. \tag{13.507}$$

13.20.10 Différentielle et tangente

La notion de dérivée partielle (ou de dérivée suivant un vecteur) pour une fonction de plusieurs variables n'est pas une généralisation de la notion de dérivée en une variable d'espace. En fait, du point de vue géométrique, la dérivée de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point a est la pente de la ligne droite tangente au graphe de g au point $(a, g(a))$. Cette ligne, d'équation $r(x) = g'(a)x + g(a)$, est la meilleure approximation affine du graphe de g au point a, comme à la figure 13.9.

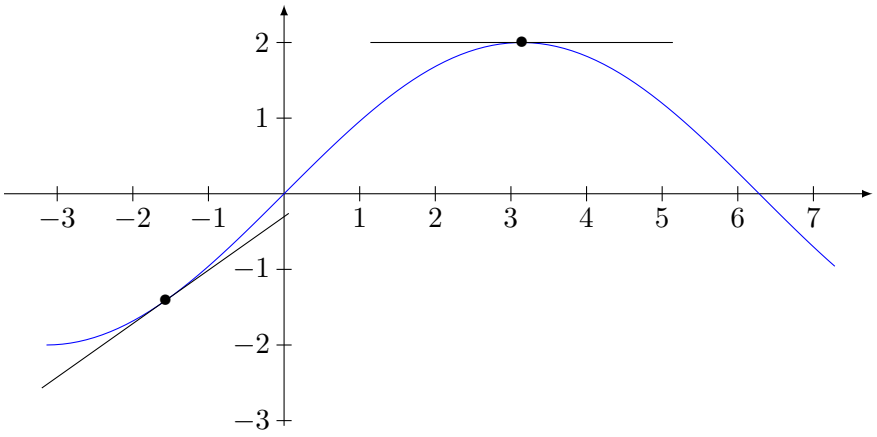


FIGURE 13.9 – Tangentes au graphe d'une fonction d'une variable

Le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une surface de deux paramètres dans $\mathbb{R}^3$. Si l'approximation affine d'une telle surface au point $(x, y, f(x, y))$ existe, alors elle est un plan tangent. En dimension plus haute, le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une surface de m paramètres dans $\mathbb{R}^{m+1}$ et son approximation affine (si elle existe) est un hyperplan de $\mathbb{R}^m$.

48. Voir http://www.sagemath.org
49. et les autres logiciels de type fenêtre, pomme ou feuille d'érable.

Nous allons voir que si f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ l'approximation affine de f au point a est l'élément de $f(a) + \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ qui ressemble le plus à f au voisinage de a. Plus précisément, on utilise les définitions suivantes.

Définition 13.203.
*Soient f et g deux applications d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. On dit que g est **tangente** à f au point $a \in U$ si $f(a) = g(a)$ et*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - g(x)\|_n}{\|x - a\|_m} = 0.$$

La relation de tangence est une relation d'équivalence. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où f admet une application affine tangente au point a.

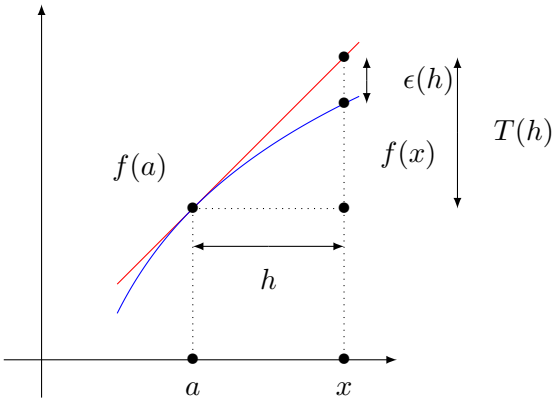


FIGURE 13.10 – Interprétation géométrique de la différentielle.

En ce qui concerne l'interprétation géométrique, si nous regardons la figure 13.10, et d'ailleurs aussi en voyant la définition 12.300, la fonction est différentiable et la différentielle est T s'il existe une fonction α telle que

$$f(a + u) - f(a) - T(u) = \alpha(u) \tag{13.508}$$

où la fonction α satisfait

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|\alpha(u)\|}{\|u\|} = 0 \tag{13.509}$$

C'est cela qui fait écrire $f(a+u) - f(a) - df_a(u) = o(\|u\|)$ à ceux qui n'ont pas peur de la notation o.

La différentielle df_a est donc la partie linéaire de l'application affine qui approxime au mieux la fonction f autour du point a. La notion de différentielle est la vraie généralisation du concept de dérivée pour fonctions de plusieurs variables, en outre elle nous permet d'expliciter la relation qui associe au vecteur u la dérivée $\partial_u f(a)$, pour f et a fixés.

Remarque 13.204.
Si on remplace les normes $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_n$ par d'autres normes, l'existence et la valeur de la différentielle de f au point a ne sont pas remises en cause. En effet, soient $\|\cdot\|_M$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|_N$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème 12.6, ces normes sont équivalentes à $\|.\|_m$ et $\|.\|_n$ respectivement ; il existe donc des constantes k, K, l, $L > 0$ telles que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^m$ et tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$

$$k\|u\|_M \leqslant \|u\|_m \leqslant K\|u\|_M,$$
$$l\|v\|_N \leqslant \|v\|_n \leqslant L\|v\|_N.$$

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sont les mêmes et on a

$$\begin{aligned} \frac{l}{K} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_N}{\|h\|_M} \leqslant \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n}{\|h\|_m} \leqslant \\ \leqslant \frac{L}{k} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_N}{\|h\|_M}. \end{aligned} \tag{13.510}$$

Il est donc possible, pour démontrer la différentiabilité ou pour calculer la différentielle, d'utiliser le critère (12.300) avec une norme au choix. Parfois c'est utile.

13.20.11 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable

Chacun des points du théorème 13.193 est en soi un critère pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point.

13.20.11.1 Continuité

Le premier critère à vérifier est donc la continuité. Si une fonction n'est pas continue en un point, alors elle n'y sera pas différentiable. Pour rappel, la continuité en a se teste en vérifiant si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

13.20.11.2 Linéarité

Un second test est la linéarité de la dérivée directionnelle par rapport à la direction : l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ doit être linéaire, sinon df_a n'existe pas.

Exemple 13.205
Examinons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{13.511}$$

Prenons $u = (u_1, u_2)$ et calculons la dérivée de f dans la direction de u au point $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{tu_1t^2u_2}{t^2u_1^2+t^4u_2^4}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+t^2u_2^4}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{si } u_1\neq 0 \\ 0 & \text{si } u_1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{13.512}$$

Cette application n'est pas linéaire par rapport à u. En effet, notons

$$\begin{aligned} A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(0,0), \end{aligned} \tag{13.513}$$

et vérifions que pour tout u et v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous ayons $A(\lambda u) = \lambda A(u)$ et $A(u+v) = A(u) + A(v)$. Le premier fonctionne parce que

$$A(\lambda u) = A(\lambda u_1, \lambda u_2) = \frac{\lambda^2 u_2^2}{\lambda u_1} = \lambda \frac{u_2^2}{u_1} = \lambda A(u). \tag{13.514}$$

Mais nous avons par exemple

$$A\big((0,1)+(2,3)\big) = A(2,4) = \frac{16}{2} = 8, \tag{13.515}$$

tandis que

$$A(0,1) + A(2,3) = 0 + \frac{9}{2} \neq 8. \tag{13.516}$$

La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$, parce que la candidate différentielle, $df_{(0,0)}(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, n'est même pas linéaire.

△

Voici une autre façon de traiter la fonction de l'exemple 13.205.

Exemple 13.206
La figure 13.11 représente le domaine d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et sur chacune des parties, elle est définie différemment.

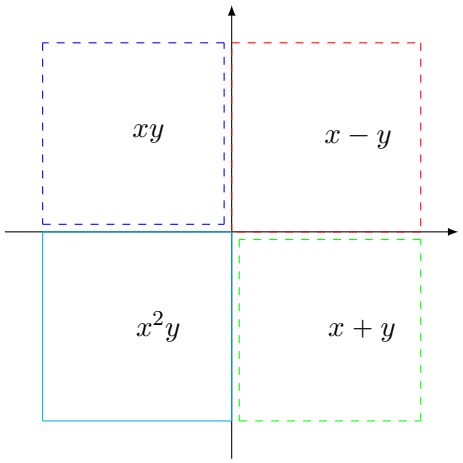


FIGURE 13.11 – La fonction de l'exemple 13.206.

L'expression de f est ici

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ x - y & \text{si } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ x^2 y & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ x + y & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.517}$$

On note que les deux axes forment une zone à problèmes. La zone hors des axes est un ouvert sur lequel f est différentiable car composée de polynômes. Analysons chacun des points de la forme (a,b) dans la zone à problèmes (c'est-à-dire si $ab = 0$).

Si $a = 0$ et $b > 0$ Un tel point $(0,b)$ est sur l'axe verticale, dans la moitié supérieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y > 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} x - y = 0 - b = -b$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} xy = 0b = 0$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0,b)$ avec $b > 0$.

Si $a = 0$ et $b < 0$ Un tel point $(0, b)$ est sur l'axe verticale, dans la moitié inférieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y < 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} x^2 y = 0^2 b = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} x + y = 0 + b = b$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0, b)$ avec $b < 0$.

Si $a > 0$ et $b = 0$ Un tel point $(a, 0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié droite. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x > 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} x - y = a - 0 = a$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} x^2 y = a^2 0 = 0$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a, 0)$ avec $a > 0$.

Si $a < 0$ et $b = 0$ Un tel point $(a, 0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié gauche. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x < 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} xy = a0 = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} x + y = a + 0 = a$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a, 0)$ avec $a < 0$.

Si $a = 0$ et $b = 0$ Le cas du point $(0, 0)$ est particulier, puisque il est adhérent aux quatre composantes du domaine où la fonction est définie différemment. Pour étudier la continuité, il faut donc étudier quatre limites. Ces limites ont déjà été étudiées ci-dessus et valent toutes 0, ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.

En ce qui concerne la différentiabilité, on sait qu'il est nécessaire que toutes les dérivées directionnelles existent. Calculons la dérivée dans la direction $(0, 1)$ (au point $(0, 0)$) :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \dots$$

qu'on sépare en deux cas, car $f(0,t)$ possède une formule différente si $t<0$ ou si $t\geqslant 0$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{f(0,t)}{t}=\begin{cases}\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\frac{f(0,t)}{t}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\frac{0+t}{t}=1\\ \lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}}\frac{f(0,t)}{t}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}}\frac{0-t}{t}=-1\end{cases}$$

ce qui prouve que la limite n'existe pas, donc que la dérivée directionnelle n'existe pas, et finalement que la fonction n'est pas différentiable.

Conclusion : La fonction donnée est continue hors des axes et au point $(0,0)$, mais discontinue partout ailleurs sur les axes. Elle est différentiable hors des axes, mais ne l'est pas sur les axes.

△

13.20.11.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle

Dans la pratique, nous pouvons calculer $\partial_u f(a)$ pour une direction u générale, et puis en déduire $\partial_x f$ et $\partial_y f$ comme cas particuliers en posant $u=(1,0)$ et $u=(0,1)$. Une chose incroyable, mais pourtant possible est qu'il peut arriver que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)\neq\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u^i. \tag{13.518}$$

Ceci se produit lorsque f n'est pas différentiable en a. En voici un exemple.

13.20.11.4 Un candidat dans la définition (marche toujours)

Lorsqu'une fonction est donné, un candidat différentielle au point (a_1,a_2) est souvent assez simple à trouver en un point :

$$T(u_1,u_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)u_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)u_2. \tag{13.519}$$

L'application T est la candidate différentielle en ce sens que si la différentielle existe, alors elle est égale à T. Ensuite, il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\frac{f(x,y)-f(a_1,a_2)-T\big((x,y)-(a_1,a_2)\big)}{\|(x,y)-(a_1,a_2)\|}=0 \tag{13.520}$$

ou non. Si oui, alors la différentielle existe et $df_{(a,b)}(u)=T(u)$, sinon [50], la différentielle n'existe pas.

Attention : dans la ZAP, les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne peuvent en général pas être calculées en utilisant les règles de calcul (c'est bien pour ça que la ZAP est une zone à problèmes). Il faut d'office utiliser la définition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t}, \tag{13.521}$$

et la définition correspondante pour $\partial_y f$.

Conclusion

Soient $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, et $a\in int\,A$. Si f est différentiable en a,

$$(df_a(e_j))_i=d(f_i)_a(e_j)=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)=[Jac(f)_{|a}]_{ij}$$

et la matrice de l'application linéaire df_a est la matrice jacobienne $m\times n$ de f en a notée $Jac(f)_{|a}$.

50. y compris si la limite (13.520) n'existe même pas.

Proposition 13.207 (Règles de calculs)**.**
Soient f et g des fonctions différentiables en $g(a)$ et a respectivement, alors la composée $f \circ g$ est différentiable en a et

$$d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a$$

et de plus les jacobiennes correspondantes vérifient

$$J_{f\circ g}(a) = J_f\big(g(a)\big)J_g(a)$$

où le membre de droite est le produit (non-commutatif!) des deux matrices.

Corollaire 13.208 (Chain rule)**.**
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, alors

$$(f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))g_i'(t).$$

Remarque 13.209.
Quelque remarques à propos de la règle de dérivation en chaîne.

(1) Si $p = 1$, on retrouve la règle usuelle de dérivation de fonctions composées.
(2) Si g est à plusieurs variables, cette règle permet de déterminer les dérivées partielles de $f \circ g$, puisqu'une dérivée partielle peut être vue comme dérivée usuelle par rapport à une seule variable (voir 13.226).
(3) Si f est à valeurs vectorielles, cette formule permet de retrouver la jacobienne de $f \circ g$ puisqu'il suffit de traiter chaque composante de f séparément.

13.20.12 Gradient

Définition 13.210.
Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. On appelle ***gradient*** *de f la fonction $\nabla f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de composantes*

$$\partial_1 f, \dots, \partial_m f.$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))^T$. On appelle ***matrice jacobienne*** *de f la fonction $J(f) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par*

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_m f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \dots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix} \tag{13.522}$$

13.20.13 Linéarité

La proposition suivante signifie que différentiation est une opération linéaire sur l'ensemble des fonctions différentiables.

Proposition 13.211.
Soient f et g deux fonctions de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$, et soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$ et λf sont différentiables au point a et on a

$$\begin{aligned} d(f + g)(a) &= df(a) + dg(a), \\ d(\lambda f)(a) &= \lambda df(a), \end{aligned} \tag{13.523}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0_m} \frac{\|(f(a+h) + g(a+h)) - (f(a) + g(a)) - df(a).h - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} \leqslant \\ &\lim_{h\to 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a).h\|_n}{\|h\|_m} + \lim_{h\to 0_m} \frac{\|g(a+h) - g(a) - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} = 0. \end{aligned} \tag{13.524}$$

De même on démontre la propriété $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$. □

13.21 Produit

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous notons $f \cdot g$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donnée par le produit scalaire point par point, c'est-à-dire

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \tag{13.525}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Le point dans le membre de droite est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Le cas particulier $n = 1$ revient au produit usuel de fonctions :

$$(fg)(x) = f(x)g(x). \tag{13.526}$$

Lemme 13.212.
Si f et g sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction produit fg est également différentiable et

$$(dfg)_a = g(a)fd_a + f(a)dg_a \tag{13.527}$$

au sens où pour chaque u dans $\mathbb{R}^m$,

$$(dfg)_a(u) = g(a)df_a(u) + f(a)dg_a(u). \tag{13.528}$$

Démonstration. Ce que nous devons faire pour vérifier la formule 13.527, c'est de vérifier le critère (12.300) en remplaçant f par fg et $T(h)$ par $g(a)df(a).h + f(a)dg(a).h$.

Ce que nous avons au numérateur est

$$\begin{aligned} \clubsuit &= (fg)(a+h) - (fg)(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h \\ &= f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h. \end{aligned} \tag{13.529}$$

Maintenant, nous allons faire apparaitre $\big(f(a+h)-f(a)-df(a)\big)g(a+h)$ en ajoutant et soustrayant ce qu'il faut pour conserver $\clubsuit$:

$$\begin{aligned} \clubsuit = &\big(f(a+h) - f(a) - df(a).h\big)g(a+h) \\ &+ f(a)g(a+h) + g(a+h)df(a).h \\ &- f(a)g(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h. \end{aligned} \tag{13.530}$$

Nous mettons maintenant $f(a)$ et $fd(a).h$ en évidence là où c'est possible :

$$\begin{aligned} \clubsuit = &\big(f(a+h) - f(a) - df(a).h\big)g(a+h) \\ &+ f(a)\big(g(a+h) - g(a) - dg(a).h\big) \\ &+ \big(g(a+h) - g(a)\big)df(a).h. \end{aligned} \tag{13.531}$$

Nous devons maintenant considérer la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\clubsuit\|}{\|h\|}. \tag{13.532}$$

Étant donné que f et g sont différentiables, les deux premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(a+h) - f(a) - df(a).h\big)}{\|h\|} g(a+h) = 0 \\ \lim_{h\to 0} f(a) \frac{\big(g(a+h) - g(a) - dg(a).h\big)}{\|h\|} = 0. \end{aligned} \tag{13.533}$$

En ce qui concerne le troisième terme, en utilisant la norme d'une application linéaire, nous avons

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|df(a).h\|}{\|h\|} \leqslant \sup_{h\in\mathbb{R}^m} \frac{\|df(a).h\|}{\|h\|} = \|df(a)\|, \tag{13.534}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \lim_{h\to 0} \|g(a+h)-g(a)\| \frac{\|df(a).h\|\|h\|}{\|h\|} \\ &\leqslant \lim_{h\to 0} \|g(a+h)-g(a)\|\|df(a)\| = 0 \end{aligned} \tag{13.535}$$

parce que g est continue (la limite du premier facteur est nulle tandis que la norme de $df(a)$ est un nombre constant). Nous avons donc bien prouvé que la formule (13.527) est la différentielle de fg au point a. □

Ce résultat se généralise pour des fonctions f et g de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ dans la proposition suivante qui généralise tout en même temps la proposition 13.118.

Proposition 13.213.
Soient f et g deux fonctions de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$. Alors la fonction $f \cdot g$ est différentiable au point a et on a

$$d(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a) \tag{13.536}$$

au sens où

$$d(f \cdot g)_a(u) = g(a) \cdot \big(df_a(u)\big) + f(a) \cdot \big(dg_a(u)\big) \tag{13.537}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.

Démonstration. La preuve du cas $n = 1$ est déjà faite ; c'est la formule (13.527). Pour le cas général $n \geqslant 2$, nous passons au composantes en nous rappelant que

$$(f \cdot g)(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)g_i(a) = \sum_{i=1}^{n} (f_i g_i)(a). \tag{13.538}$$

En utilisant la linéarité de la différentiation, nous nous réduisons donc au cas des produits $f_i g_i$ qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d(f \cdot g)(a) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right)(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(df_i(a)g_i(a) + f_i(a)dg_i(a)\big) \\ &= g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a). \end{aligned} \tag{13.539}$$

Ceci termine la preuve. □

13.21.1 Difficulté d'ordre supérieur

13.214.
Il serait tentant de faire une récurrence sur le lemme 13.212 pour dire que si f et g sont de classe C^p, alors le produit fg est également de classe C^p, parce que la formule de $d(fg)$ contient des produits de fonctions de classe C^p et C^{p-1}.

Le problème est que le lemme 13.212 est énoncé et prouvé pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors que déjà la formule

$$d(fg) = gdf + fdg \tag{13.540}$$

contient le produit de $g\colon E \to \mathbb{R}$ par $df\colon E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Lorsque nous montons dans les différentielles, la situation empire, et les produits dont sont composés les formules sont réellement à définir...

Oublions un instant les questions de régularité, et calculons sans ménagement, pour voir ce qu'il se passe. Nous considérons un espace vectoriel E ainsi que des des fonctions $f\colon E \to \mathbb{R}$ et $g\colon E \to V$ où V est un autre espace vectoriel.

Nous avons

$$d(fg)_a(u) = df_a(u)g(a) + f(a)dg_a(u). \tag{13.541}$$

Les deux termes sont des produits $\mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$. Montons un coup :

$$d(gdf)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(gdf)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[g(a+tu)df_{a+tu}\Big]_{t=0} = dg_a(u)df_a + g(a)(d^2f)_a(u). \tag{13.542}$$

Un autre pour voir comment ça se passe plus haut :

$$d(dfdg)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(dfdg)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}dg_{a+tu}\Big]_{t=0} = (d^2f)_a(y)dg_a + df_a(d^2g)_a(u). \tag{13.543}$$

Là déjà vous noterez que nous sommes passés par le produit

$$df_{a+tu}df_{a+tu} \tag{13.544}$$

qui pour chaque t est un produit $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(E,V)$ que nous n'avons pas réellement défini.

En continuant le calcul ainsi nous trouvons par exemple

$$\begin{aligned}(d^3fg)_a(u) = {} & d^3f_a(u)g(a) + d^2f_a dg_a(u) \\ & + d^2f_a(u)dg_a + df_a d^2g_a(u) \\ & + d^2f_a(u)dg_a + df_a(d^2g)_a(u) \\ & + df_a(u)d^2g_a + f(a)(d^3g)_a(u).\end{aligned} \tag{13.545}$$

Vous noterez que cette formule contient trois termes que nous aurions eu envie de noter d^2fdg. Or ces trois termes ne sont pas identiques : deux sont $d^2f_a(u)dg_a$ et un est $(d^2f)_a dg_a(u)$.

13.21.2 Solution : produit tensoriel

Afin de donner un sens à tous les produits, nous allons passer par les produits tensoriel. Nous avons déjà le théorème 12.149 qui fait pratiquement tout.

Proposition 13.215 ([1]).
Soient des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p. Alors fg est de classe C^p.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1 \otimes 1 &\mapsto 1\end{aligned} \tag{13.546}$$

dont nous avons déjà parlé dans le lemme 12.131. En utilisant la notation $\tilde{\otimes}$ de la définition 12.145, nous avons

$$fg = \varphi \circ (f \tilde{\otimes} g). \tag{13.547}$$

La proposition 12.149 nous dit que $f\tilde{\otimes}g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ est de classe C^p. Vu que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, la proposition 12.142 nous dit que $\varphi \circ (f\tilde{\otimes}g)$ est encore de classe C^p.

Et voila. □

13.21.3 Formes bilinéaires

Nous avons aussi une formule importante pour la différentielle des formes bilinéaires.

Lemme 13.216.
Toute application bilinéaire

$$\begin{aligned}B\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \\ B(a_1,a_2) &= a_1 \star a_2\end{aligned} \tag{13.548}$$

est différentiable en tout point (a_1,a_2) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, et on a

$$dB(a_1,a_2).(h_1,h_2) = h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{\|B(a_1+h_1,a_2+h_2)-B(a_1,a_2)-(h_1\star a_2+a_1\star h_2)\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}=\\ =\frac{\|(a_1+h_1)\star(a_2+h_2)-a_1\star a_2-(h_1\star a_2+a_1\star h_2)\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}=\spadesuit\end{aligned}\tag{13.549}$$

on rajoute et on enlève la quantité $(a_1+h_1)\star a_2$ dans le numérateur, et on obtient

$$\begin{aligned}\spadesuit&=\frac{\|(a_1+h_1)\star h_2+h_1\star a_2-(h_1\star a_2+a_1\star h_2)\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}=\\ &=\frac{\|h_1\star h_2\|_p}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}\leqslant C\frac{\|h_1\|_m\|h_2\|_n}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}\leqslant\\ &\leqslant C\frac{\|(h_1,h_2)\|^2_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}{\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}=C\|(h_1,h_2)\|_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}.\end{aligned}\tag{13.550}$$

Si on prend la limite de cette expression pour $(h_1,h_2)\to(0_m,0_n)$ on obtient 0, donc la preuve est complète. À noter, que dans l'avant-dernier passage on a utilisé la continuité des applications linéaires $\texttt{proj}_m:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ et $\texttt{proj}_n:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ qui à chaque point (a_1,a_2) de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ associent a_1 et a_2 respectivement. □

Proposition 13.217.
Soit V et W deux espaces vectoriels et $\varphi\colon V\to W$ un isomorphisme. Soit $f\colon\mathbb{C}\to V$ une application telle que $\varphi\circ f\colon\mathbb{C}\to W$ soit différentiable.

Alors f est différentiable et $df=\varphi^{-1}\circ d(\varphi\circ f)$.

Démonstration. Si T est la différentielle de $\varphi\circ f$ au point z nous avons

$$\lim_{\substack{h\to0\\h\in\mathbb{C}}}\frac{(\varphi\circ f)(z+h)-(\varphi\circ f)(z)+T(h)}{h}=0.\tag{13.551}$$

En appliquant φ aux deux membres, et en permutant avec la limite (parce que φ est continue),

$$\varphi\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)+\varphi^{-1}T(h)}{h}=0,\tag{13.552}$$

ce qui signifie que f est différentiable et que $df=\varphi^{-1}\circ T=\varphi^{-1}\circ d(\varphi\circ f)$. □

13.22 Différentielle de fonction composée

Une importante règles de différentiation est la règle de différentiation d'une fonction composée (*chain rule* dans les livres anglais et américains). Cette règle généralise la règle de dérivation pour fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette règle a déjà été donnée dans le théorème 12.140, mais si vous avez seulement envie d'entendre parler de $\mathbb{R}^n$, vous pouvez lire le lemme 13.218 suivit de la proposition 13.220.

Le lemme suivant est essentiellement une reformulation du lemme 12.136.

Lemme 13.218.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. La fonction $f:U\to\mathbb{R}^n$ est différentiable au point a dans U, si et seulement s'il existe une fonction $\sigma_f:U\times U\to\mathbb{R}^n$ telle que

$$\sigma_f(a,a)=\lim_{x\to a}\sigma_f(a,x)=0\tag{13.553a}$$

$$f(x)=f(a)+T(x-a)+\sigma_f(a,x)\|x-a\|_m,\tag{13.553b}$$

pour une certaine application linéaire $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Si les conditions (13.553) sont satisfaites alors T est la différentielle de f en a. En effet, dans ce cas nous avons

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \sigma_f(a, a+h)\|h\|, \tag{13.554}$$

et la condition (12.300) devient

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\sigma_f(a,a+h)\|\|h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \|\sigma_f(a,a+h)\| = 0 \tag{13.555}$$

Si f est différentiable au point a il suffit de prendre $T = df(a)$ et

$$\sigma_f(a,x) = \frac{f(x) - f(a) - df(a).(x-a)}{\|x-a\|_m}.$$

□

Remarque 13.219.
La fonction $\sigma_f(a,x)\|x-a\|_m$ est ce qui avait été appelle $\epsilon(h)$ sur la figure 13.10.

Proposition 13.220.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables respectivement au point a dans U et $b = f(a)$ dans V. Alors la fonction composée $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable au point a et

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a. \tag{13.556}$$

Démonstration. En tenant compte du lemme 13.218 on peut écrire

$$f(a+h) - f(a) = df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m, \qquad \forall h \in U - a, \tag{13.557a}$$
$$g(b+k) - g(b) = dg_b(k) + \sigma_g(b,b+k)\|k\|_n, \qquad \forall k \in V - b. \tag{13.557b}$$

On sait que $f(a) = b$ et que $f(a+h)$ est un élément de V et $f(a+h) = f(a) + k$ pour $k = df(a).h + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m$. Par substitution dans la deuxième équation on obtient

$$\begin{aligned}
&g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) \\
&\quad = dg_{f(a)}\Big(df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\Big) \\
&\qquad + \sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\left\|df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\right\|_n \\
&\quad = g\circ f(a+h) - g\circ f(a) \\
&\quad = dg_{f(a)} \circ df_a(h) \\
&\qquad + \|h\|_m\Big[dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h) \\
&\qquad + \sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\left\|df_a\frac{h}{\|h\|_m} + \sigma_f(a,a+h)\right\|_n\Big],
\end{aligned} \tag{13.558}$$

donc

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = dg_f(a) \circ df_a(h) + S(a,a+h)\|h\|_m \tag{13.559}$$

où S représente le contenu du dernier grand crochet. Il ne reste plus qu'à prouver que $S(a,a+h)$ est $o(\|h\|_m)$. En tenant compte du fait que $\sigma_f(a,a+h)$ et $\sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)$ sont $o(\|h\|_m)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0_m} \frac{S(a,a+h)}{\|h\|_m} &= \lim_{h\to 0_m} \frac{dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h)}{\|h\|_m} + \\
&+ \lim_{h\to 0_m} \frac{\sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\left\|df_a\frac{h}{\|h\|_m} + \sigma_f(a,a+h)\right\|_n}{\|h\|_m} = 0.
\end{aligned} \tag{13.560}$$

□

Remarque 13.221.
Note : la formule (13.556) est à comprendre de la façon suivante. Si $u \in \mathbb{R}^m$, alors

$$d(g \circ f)_a(u) = \underbrace{dg_{f(a)}}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} \Big(\underbrace{df_a(u)}_{\in \mathbb{R}^n} \Big) \in \mathbb{R}^p. \tag{13.561}$$

Le lemme suivant sert à prouver les théorèmes 16.6 et 21.74. Il est fondamentalement la raison de la formule définissant l'intégrale d'une forme sur un chemin (définition 21.47).

Lemme 13.222 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé F de dimension finie, ainsi que E, un espace vectoriel normé. Nous considérons un chemin de classe C^1

$$\gamma : [a, b] \to E \tag{13.562}$$

et une application de classe C^1

$$f : E \to F. \tag{13.563}$$

Si $g = f \circ \gamma$, alors

$$g'(t) = (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) \tag{13.564}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Démonstration. Nous écrivons la dérivée de g de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{ds}\Big[g(t+s)\Big]_{s=0} && \text{(13.565a)}\\
&= \frac{d}{ds}\Big[(f \circ \gamma)(t+s)\Big]_{s=0} && \text{(13.565b)}\\
&= d(f \circ \gamma)_t(1) && \text{(13.565c)}\\
&= (df)_{\gamma(t)}\big(d\gamma_t(1)\big) && \text{(13.565d)}\\
& && \text{(13.565e)}
\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (13.565c) : les formules (13.195). Notez que le 1 à qui s'applique la différentielle de $f \circ \gamma$ est le vecteur de $\mathbb{R}$ qui est multiplié par s dans l'expression $(f \circ \gamma)(t + s)$.

— Pour (13.565d) : la différentiation de fonction composées de la proposition 13.220.

Mais

$$d\gamma_t(1) = \frac{d}{ds}\Big[\gamma(t+s)\Big]_{s=0} = \gamma'(t). \tag{13.566}$$

En remettant au bout de (13.565), nous obtenons le résultat. □

13.23 Autres trucs sur la différentielle

13.23.1 Différentielle et dérivées partielles

Proposition 13.223.
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et a un point dans U. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. Si toutes les dérivées partielles de f existent sur U et sont continues au point a alors f est différentiable au point a.

Démonstration. On se limite au cas $m = 2$. Pour rendre les calculs plus simples on utilise ici la norme $\| \cdot \|_\infty$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$, mais comme on a vu plus en haut, cela ne peut pas avoir des conséquences sur la différentiabilité de f. Si la différentielle de f au point a existe alors elle est définie par la formule

$$df_a(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v_2$$

pour tout v dans $\mathbb{R}^m$.

On commence par prouver le résultat en supposant que les dérivées partielles de f au point a sont nulles. La différentiabilité de f signifie que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta > 0$ telle que si $\|v\|_\infty \leqslant \delta$ alors

$$\frac{\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n}{\|v\|_\infty} \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
&\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n = \\
&= \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2) + f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \\
&\leqslant \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n + \|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n.
\end{aligned} \tag{13.567}$$

Comme la dérivée partielle $\partial_x f$ est nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta_1 > 0$ telle que si $|v_1| \leqslant \delta_1$ alors

$$\|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \varepsilon |v_1|.$$

Pour l'autre terme on a, par la proposition 13.173,

$$\begin{aligned}
&\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n \leqslant \\
&\leqslant \sup\{\|\partial_y f(x)\|_n \,|\, x \in S\}|v_2|.
\end{aligned} \tag{13.568}$$

où S est le segment d'extrémités $(a_1 + v_1, a_2)$ et $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$. Comme la dérivée partielle $\partial_y f$ est continue et nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il existe une constante $\delta_2 > 0$ telle que si $\|(u_1, u_2)\|_\infty \leqslant \delta_2$ alors $\|\partial_y f(a_1 + u_1, a_2 + u_2)\|_n \leqslant \varepsilon$. Si on choisit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ le segment S est contenu dans la boule de rayon δ centrée au point a et on obtient

$$\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \varepsilon |v_1| + \varepsilon |v_2| \leqslant 2\varepsilon \|v\|_\infty.$$

Cela prouve que f est différentiable en (a_1, a_2) et que la différentielle est nulle :

$$df_{(a_1,a_2)} = 0. \tag{13.569}$$

Dans le cas général, où les dérivées partielles de f au point a ne sont pas spécialement nulles, on peut considérer la fonction [51]

$$g(x, y) = f(x, y) - \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y, \tag{13.570}$$

qui a dérivées partielles nulles au point a. La fonction g est donc différentiables. La fonction f est maintenant la somme de g et de la fonction linéaire et continue $(x, y) \mapsto \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y$. On verra dans la prochaine section que la somme de deux fonctions différentiables est une fonction différentiable. Par conséquent, la fonction f est différentiable. □

Remarque 13.224.
En dimension infinie, il n'est pas vrai que l'existence et la continuité de toutes les dérivées partielles en un point implique la différentiabilité en ce point. Pour donner un exemple, nous allons continuer l'exemple 12.34 avec la fonction 26.131 sur un espace de Hilbert.

En dimension infinie nous aurons le théorème 12.153 qui donnera quelque chose de moins fort.

Étant donné que pour tout vecteur u dans $\mathbb{R}^m$ on a $\partial_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$, le gradient de f nous donne la direction dans laquelle la croissance de f est maximale. Soit C une colline et soit f la fonction que a chaque point (x, y) de la Terre associe son altitude. Si nous voulons monter la colline le plus vite possible nous n'avons qu'a suivre la direction ∇f à chaque point. Elle est la projection sur le plan x-y de la direction de pente maximale. Au contraire, la direction $-\nabla f$ est la direction de croissance minimale.

La matrice jacobienne calculé au point a est la matrice associée canoniquement à l'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

51. Vous verrez dans la discussion à propos de la fonction (26.131) pourquoi cette fonction ne fonctionne pas dans le cas de la dimension infinie.

13.23.2 Plan tangent

On a dit au début de cette section que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ alors le graphe de f est une surface à deux paramètres et que l'application affine tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est un plan. Maintenant on sait que ce plan est celui d'équation

$$T_a(x,y) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2). \tag{13.571}$$

Le plan tangent au graphe de f au point a est le graphe de cette fonction T_a.

Remarque 13.225.
Il existe cependant des fonctions différentiables dont les dérivées partielles ne sont pas continues. La construction d'un tel exemple est cependant délicate, et nous le ferons pas ici. Retenez cependant que si dans un exercice vous obtenez que les dérivées partielles ne sont pas continues, vous ne pouvez pas immédiatement en conclure que la fonction ne sera pas différentiable.

13.23.3 Calcul de différentielles

13.226.
En pratique, ayant une formule pour la fonction f, nous la dérivons par rapport à la variable x_i en utilisant les règles usuelle de dérivation en considérant que les autres (x_j avec $j \neq i$) sont des constantes.

Exemple 13.227
Pour $f(x,y) = xy + x^2$, les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

△

Des *règles de calcul* sont d'application. En particulier, quand ces opérations existent, les sommes, différences, produits, quotients et compositions d'applications différentiables sont différentiables.

Toute application linéaire est différentiable, et sa différentielle en tout point est égale à l'application elle-même [52]. En particulier, les *projections canoniques*, c'est-à-dire les applications du type $(x,y,z) \mapsto y$, sont linéaires donc différentiables.

Exemple 13.228
Les cas suivants sont faciles :

(1) En combinant les projections canoniques avec les règles de calculs, on obtient que toute fonction polynomiale à n variables est différentiable comme application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

(2) Toute fonction rationnelle, du type $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, est différentiable en tout point a tel que $Q(a) \neq 0$.

(3) Pour une fonction d'une variable $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le caractère différentiable et le caractère dérivable coïncident. De plus, on a

$$df_a(u) = f'(a)u.$$

△

52. Lemme 13.188.

13.23.4 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent

Notons G, le graphe d'une fonction f, c'est-à-dire

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}. \tag{13.572}$$

Première affirmation : si $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ est une courbe telle que $\gamma(0) = \big(a, f(a)\big)$, alors $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ est dans le plan tangent à G au point $\big(a, f(a)\big)$.

Plus fort : tous les éléments du plan tangent sont de cette forme.

Le plan tangent à G en un point $x \in G$ est donc constitué des vecteurs vitesse de tous les chemins qui passent par x.

Prenons maintenant S, une courbe de niveau de G, c'est-à-dire

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x, y) = C\}. \tag{13.573}$$

Si nous prenons un chemin dans G qui est, de plus, contraint à S, c'est-à-dire tel que $\gamma(t) \in S$, alors $\gamma'(0)$ sera tangent à G (ça, on le savait déjà), mais en plus, $\gamma'(0)$ sera tangent à S, ce qui est logique.

La morale est que si vous prenez un chemin qui se ballade dans n'importe quoi, alors la dérivée du chemin sera un vecteur tangent à ce n'importe quoi.

En outre, si $\gamma(t) \in S$ et $\gamma(0) = a$, alors

$$\langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = 0, \tag{13.574}$$

c'est-à-dire que le vecteur tangent à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient. Cela est intuitivement logique parce que la tangente à la courbe de niveau correspond à la direction de *moins* grande pente.

13.23.5 Gradient et recherche du plan tangent

Nous avons maintenant en main les concepts utiles pour trouver l'équation du plan tangent à une surface.

De la même manière que la tangente à une courbe était la droite de coefficient directeur donné par la dérivée, maintenant, le plan tangent à une surface est le plan dont les vecteurs directeurs sont les dérivées partielles :

La généralisation de l'équation (13.438) est

$$T_a(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x - a)^i \tag{13.575}$$

Nous introduisons aussi souvent l'opérateur différentiel abstrait **nabla**, noté ∇ et qui est donné par le vecteur

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \tag{13.576}$$

Les égalités suivantes sont juste des notations, sommes toutes logiques, liées à ∇ :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \tag{13.577}$$

et

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \tag{13.578}$$

Ce dernier est un élément de $\mathbb{R}^n$: chaque entrée est un nombre réel.

Définition 13.229.
Le vecteur gradient de f au point a est le vecteur donné par la formule (13.578).

La notation ∇ permet d'écrire la différentielle sous forme un peu plus compacte. En effet, la formule (13.481) peut être notée

$$df_a(u) = \langle \nabla f(a), u \rangle. \tag{13.579}$$

En utilisant ce produit scalaire, l'équation (13.575) peut se récrire

$$T_a(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x-a)^i = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle. \tag{13.580}$$

Afin d'éviter les confusions, il est parfois souhaitable de bien mettre les parenthèses et noter $(\nabla f)(a)$ au lieu de $\nabla f(a)$.

Proposition 13.230.
$\nabla f(a) \perp S_a$

$$z = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial f}(a)(x-a)^i. \tag{13.581}$$

Cas particulier où $n = 2$:

Le plan T_a avec $a = (a_1, a_2)$ a pour équation dans $\mathbb{R}^3$:

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\,(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{13.582}$$

Définition 13.231.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point a. Le plan tangent *au graphe de f en $(a, f(a))$ est l'ensemble des points*

$$\begin{aligned} T_a f &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + df_a(x-a)\} \\ &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle\} \end{aligned}$$

Nous avons vu que, de la même façon qu'en deux dimensions nous avions l'approximation (13.233) d'une fonction par sa tangente, en trois dimensions nous avons l'approximation suivante d'une fonction de deux variables :

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \tag{13.583}$$

lorsque (x, y) n'est pas trop loin de (a, b). Cela signifie que le graphe de f ressemble au graphe de la fonction $T_{(a,b)}$ donnée par

$$T_{(a,b)}(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(x - a). \tag{13.584}$$

En notations compactes :

$$T_p(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p). \tag{13.585}$$

Le graphe de la fonction T_p sera le **plan tangent** au graphe de f au point p. L'équation du plan tangent sera donc

$$z - f(p) = \nabla f(p) \cdot (x - p). \tag{13.586}$$

Remarque 13.232.
Lorsque nous utilisons la notation vectorielle, la lettre « x » désigne le vecteur (x, y). Il faut être attentif. Dans un cas x est un vecteur dans l'autre c'est une composante d'un vecteur.

13.23.6 Projection orthogonale

Le théorème suivant n'est pas indispensablissime parce qu'il est le même que le théorème de la projection sur les espaces de Hilbert [53]. Cependant la partie existence est plus simple en se limitant au cas de dimension finie.

Théorème 13.233 (Théorème de la projection)**.**
Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, $x \in E$, et C un sous-ensemble fermé convexe de E.

(1) Les deux conditions suivantes sur $y \in E$ sont équivalentes :
(1a) $\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| \text{ tel que } z \in C\}$,
(1b) pour tout $z \in C$, $\operatorname{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$.

(2) Il existe un unique $y \in E$, noté $y = \texttt{proj}_C(x)$ vérifiant ces conditions.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un élément dans C vérifiant la première condition. Ensuite nous verrons l'équivalence.

Existence Soit $z_0 \in C$ et $r = \|x - z_0\|$. La boule fermée $\overline{B(x,r)}$ est compacte [54] et intersecte C. Vu que C est fermé, l'ensemble $C' = C \cap \overline{B(x,r)}$ est compacte. Tous les points qui minimisent la distance entre x et C sont dans C' ; la fonction

$$\begin{aligned} C' &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(x,z) \end{aligned} \tag{13.587}$$

est continue sur un compact et donc a un minimum qu'elle atteint [55]. Un point P réalisant ce minimum prouve l'existence d'un point vérifiant la première condition.

Unicité Soient y_1 et y_2, deux éléments de C minimisant la distance avec x, et soit d ce minimum. Nous avons par l'identité du parallélogramme (11.15) que

$$\|y_1 - y_2\|^2 = -4\left\|\frac{y_1+y_2-x}{2}\right\|^2 + 2\|y_1-x\|^2 + 2\|y_2-x\|^2 \leqslant -4d + 2d + 2d = 0. \tag{13.588}$$

Par conséquent $y_1 = y_2$.

(1a)⇒ (1b) Soit $z \in C$ et $t \in]0,1[$; nous notons $P = \texttt{proj}_C x$. Par convexité le point $z = ty + (1-t)P$ est dans C, et par conséquent,

$$\|x-P\|^2 \leqslant \|x - tz - (1-t)P\|^2 = \|(x-P) - t(z-P)\|^2. \tag{13.589}$$

Nous sommes dans un cas $\|a\|^2 \leqslant |a-b|^2$, qui implique $2\operatorname{Re}\langle a,b\rangle \leqslant \|b\|^2$. Dans notre cas,

$$2\operatorname{Re}\langle x-P, t(z-P)\rangle \leqslant t^2\|z-P\|^2. \tag{13.590}$$

En divisant par t et en faisant $t \to 0$ nous trouvons l'inégalité demandée :

$$2\operatorname{Re}\langle x-P, z-P\rangle \leqslant 0. \tag{13.591}$$

(1b)⇒ (1a) Soit un point $P \in C$ vérifiant

$$\operatorname{Re}\langle x-P, z-P\rangle \leqslant 0 \tag{13.592}$$

pour tout $z \in C$. Alors en notant $a = x - P$ et $b = P - z$,

$$\begin{aligned} \|x-z\|^2 = \|x-P+P-z\|^2 &= \|a+b\|^2 \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a,b\rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-P, z-P\rangle \\ &\geqslant \|b\|^2, \end{aligned} \tag{13.593}$$

ce qu'il fallait.

□

53. Théorème 26.5
54. C'est ceci qui ne marche plus en dimension infinie.
55. Théorème 8.35.

13.24 Jacobienne

13.24.1 Rappels et définitions

Dans cette section nous considérons des fonctions $f : D \to \mathbb{R}^m$ où $D \subset \mathbb{R}^n$, et un point $a \in \operatorname{Int} D$ où f est différentiable.

Remarque 13.234.
La définition de continuité (resp. différentiabilité) pour une fonction à valeurs vectorielles est celle introduite précédemment, et on remarque que pour avoir la continuité (resp. différentiabilité) de f en un point, il faut et il suffit de chacune des composantes de $f = (f_1, \dots, f_m)$, vues séparément comme fonctions à n variables et à valeurs réelles, soit continue (resp. différentiable) en ce point.

Définition 13.235.
*La **jacobienne** de f en a est la matrice de l'application linéaire donnée par la différentielle. Elle a de nombreuses notations*

$$J_f(a) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial x_1, \dots, x_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \tag{13.594}$$

*Autrement dit, c'est la matrice composée de l'ensemble des dérivées partielles de f. Le **jacobien** de f au point a est le déterminant de cette matrice.*

*Si $m = 1$, cette matrice ne contient qu'une ligne ; c'est donc un vecteur appelé le **gradient** de f au point a et noté $\nabla f(a)$.*

Remarque 13.236. (1) Si la fonction est supposée différentiable, calculer la jacobienne revient à connaitre la différentielle. En effet, par linéarité de la différentielle et par définition des dérivées partielles, nous avons

$$df_a(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ et où le membre de droite est un produit matriciel

(2) Remarquons que la jacobienne peut exister en un point donné sans que la fonction soit différentiable en ce point !

13.237.
Le théorème de différentiation de fonctions composées 13.220 peut également se lire au niveau des matrices jacobiennes. La matrice jacobienne de $g \circ f$ au point a est le produit matriciel des matrices jacobiennes de f et de f. Plus précisément, nous avons

$$J_{g\circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) J_f(a). \tag{13.595}$$

Remarquez que nous considérons la matrice jacobienne de g au point $f(a)$.

Dans la cas particulier où $m = 1$ et f est une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^n$, dérivable au point a, on a que la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point a si g est différentiable et alors

$$(g \circ f)'(a) = dg\,(f(a))\,.f'(a).$$

En fait, pour les fonctions d'une seule variable la dérivabilité coïncide avec la différentiabilité.

<++>

13.25 Fonctions de classe C^1

Soit f une fonction différentiable de U, ouvert de $\mathbb{R}^m$, dans $\mathbb{R}^n$. L'application différentielle de f est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^m &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ a &\mapsto df_a \end{aligned} \tag{13.596}$$

Nous savons que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel normé avec la définition 4.25. Si T est un élément dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ alors la norme de T est définie par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{\|T(x)\|_n}{\|x\|_m} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m \\ \|x\|_m\leqslant 1}} \|T(x)\|_n.$$

Lorsqu'il existe un $M > 0$ tel que $\|df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} < M$ pour tout a dans U, nous disons que la différentielle de f est **bornée** sur U.

Définition 13.238.
*La fonction f est dite **de classe $\mathcal{C}^1$** de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ si son application différentielle df est continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Nous écrivons $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.*

Proposition 13.239.
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ où U est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ est de classe C^1 si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Démonstration. Supposons que les dérivées partielles de f existent et sont continues. Nous savons alors déjà par la proposition 13.223 que la fonction f est différentiable et qu'elle s'exprime sous la forme

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^m \partial_i f(a) h_i, \qquad \forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^m.$$

Pour montrer que df est continue, nous devons montrer que la quantité $\|df(x) - df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}$ peut être rendue arbitrairement petite si $\|x - a\|_m$ est rendu petit. Nous avons

$$\begin{aligned} \|df_x - df_a\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\|h\|=1} \|df_x(h) - df_a(h)\| \\ &= \sup_{\|h\|_m=1} \left\| \sum_{i=1}^m (\partial_i f(x) - \partial_i f(a)) h_i \right\|_n \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|h\|_m=1} \sum_{i=1}^m \|(\partial_i f(x) - \partial_i f(a))\|_n |h_i| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|h\|_m=1} \|h\|_\infty \sum_{i=1}^m \|(\partial_i f(x) - \partial_i f(a))\|_n \\ &\leqslant \sum_{i=1}^m \|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)\|. \end{aligned} \tag{13.597}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé le fait que si $\|h\|_m \leqslant 1$, alors $\|h\|_\infty \leqslant 1$. Étant donné la continuité de $\partial_i f$, la dernière ligne peut être rendue arbitrairement petite lorsque x est proche e a.

Supposons maintenant que f soit dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)\|_n = \|df(x).e_i - df(a).e_i\|_n \leqslant \|df(x) - df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)},$$

la continuité de df implique donc celle de $\partial_i f$ pour tout i dans $\{1, \ldots, m\}$. □

Proposition 13.240.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \to V$ dans $\mathcal{C}^1(U, V)$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ dans $\mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$. Alors la fonction composée $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$.

Démonstration. On fixe a dans U

$$\begin{aligned}\big\|d(g\circ f)(x)-d(g\circ f)(a)\big\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)}&\\ &=\|dg(f(x))\circ df(x)-dg(f(a))\circ df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)}\leqslant\\ &\leqslant\|(dg(f(x))-dg(f(a)))\circ df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)}+\\ &\quad+\|dg(f(a))\circ(df(x)-df(a))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)}\leqslant\\ &\leqslant\|dg(f(x))-dg(f(a))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)}\|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}+\\ &\quad+\|dg(f(a))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)}\|df(x)-df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)}.\end{aligned}\tag{13.598}$$

On peut conclure en passant à la limite $x\to a$ parce que les fonctions f, g, df et dg sont continues, de telle sorte que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}dg\big(f(x)\big)&=dg\big(f(a)\big)\\ \lim_{x\to a}df(x)&=df(a).\end{aligned}\tag{13.599}$$

□

Remarque 13.241.
On peut prouver le même résultat en utilisant la continuité de l'application bilinéaire

$$\begin{array}{rccc}\circ:&\mathcal{C}^1(U,V)\times\mathcal{C}^1(V,\mathbb{R}^p)&\to&\mathcal{L}(U,\mathbb{R}^p)\\ &(T,S)&\mapsto&T\circ S.\end{array}\tag{13.600}$$

13.26 Différentielle et dérivée complexe

13.242.
Nous commençons par donner quelques éléments à propos de dérivée et de différentielle pour des fonctions $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ parce que les séries entières vont souvent être des fonctions complexes. Le gros du chapitre sur les fonctions holomorphes est le chapitre 27.

Nous identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{R}^2&\to\mathbb{C}\\ (x,y)&\mapsto x+iy.\end{aligned}\tag{13.601}$$

Dans cette partie, nous désignons par Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 13.243.
*Une fonction $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-**dérivable** si la limite*

$$\lim_{\substack{h\to0\\h\in\mathbb{C}}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\tag{13.602}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est la dérivée de f et est notée f'.

Définition 13.244.
*Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$. Une fonction $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est **holomorphe** si elle est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.*

Définition 13.245.
Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}\tag{13.603}$$

*avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ est une **similitude**.*

Lemme 13.246.
En tant qu'application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, l'opération de multiplication par $\alpha + \beta i$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{13.604}$$

Démonstration. Cela est vite remarqué en calculant explicitement $(\alpha + \beta i)(u_1 + iu_2)$. □

Lemme 13.247.
Une application $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est une similitude en tant qu'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A(z) = z_0 z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Commençons par considérer l'application A sur $\mathbb{R}^2$. Elle est en particulier une application $\mathbb{R}$-linéaire et par conséquent il existe une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{13.605}$$

Nous voulons maintenant imposer la $\mathbb{C}$-linéarité, c'est-à-dire que nous voulons

$$A\big((a + bi)(x + iy)\big) = (a + bi)A(x + iy) \tag{13.606}$$

pour tout $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. À gauche nous avons

$$A\big(ax - by + i(bx + ay)\big) \tag{13.607}$$

et à droite nous avons

$$(a + bi)\big(\alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)\big). \tag{13.608}$$

En égalant les deux expressions nous obtenons les équations

$$\begin{cases} \beta b = -b\gamma & \text{(13.609a)} \\ -\alpha b + \beta a = a\beta - b\delta & \text{(13.609b)} \\ \delta b = b\alpha & \text{(13.609c)} \\ -\gamma b + \delta a = b\beta + a\delta, & \text{(13.609d)} \end{cases}$$

dont nous tirons immédiatement que $\gamma = -b\beta$ et $\delta = \alpha$. La matrice de A est donc de la forme demandée.

Inversement nous devons prouver que la fonction

$$f(x + iy) = \alpha x + \beta y + i(-\beta x + \alpha y) \tag{13.610}$$

est $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire qu'elle vérifie $f(z_0 z) = z_0 f(z)$ pour tout $z_0, z \in \mathbb{C}$. Cela est un simple calcul que nous confions à Sage : le code suivant affiche « 0 ».

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

def f(z):
    var('alpha,beta')
    x=z.real_part()
    y=z.imag_part()
    return alpha*x+beta*y+I*( -beta*x+alpha*y  )
```

```
11
12
13 var('a,b,x,y')
14
15 A=a+b*I
16 Z=x+y*I
17
18 z1=f( A*Z  )
19 z2=A*f( Z )
20
21 rep=z1-z2
22 print(rep.full_simplify())
```

tex/frido/code_sage3.py

Pour conclure, notons que la fonction (13.610) est la fonction de multiplication par $\alpha - i\beta$. □

13.248.
Soient une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et l'isomorphisme canonique $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$. La fonction f définit une la fonction

$$F = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2. \tag{13.611}$$

Cela est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à f. Il serait tentant de croire que tout ce qui est vrai pour F est également vrai pour f. Eh bien non.

Par exemple, F peut être différentiable sans que f le soit. La proposition suivant donne une condition sur dF pour que f soit différentiable.

Proposition 13.249.
Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si et seulement si elle est différentiable en a et si df_a est une similitude.

Plus précisément avec les notations de 13.248, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable (donc holomorphe) au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si la fonction F est différentiable en (x_0, y_0) et si la matrice de dF est de la forme

$$dF = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{13.612}$$

c'est-à-dire si $dF_{(x_0,y_0)}$ fournit une application $\mathbb{C}$-linéaire.

Dans ce cas, le lien entre $\mathbb{C}$-dérivée et différentielle est donné par

$$(df_{z_0})(z) = f'(z_0)z. \tag{13.613}$$

Démonstration. Nous décomposons f en parties réelles et imaginaires :

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{13.614}$$

où P et Q sont des fonctions réelles. La jacobienne de F est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{13.615}$$

et la condition dont nous parlons s'écrit comme le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \text{(13.616a)} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}. & \text{(13.616b)} \end{cases}$$

Si F est différentiable en (x_0, y_0) alors nous avons

$$F\big((x_0, y_0) + (h, k)\big) = F(x_0, y_0) + dF_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + s(|h| + |k|) \tag{13.617}$$

où s est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0} \frac{s(t)}{t} = 0$. Soit

$$dF_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{13.618}$$

Si nous posons $\sigma = \alpha - i\beta$ et $w = h + ik$, l'équation (13.617) s'écrit dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \sigma w + s(|w|), \tag{13.619}$$

ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

Supposons maintenant que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Alors nous avons

$$f'(z_0) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \sigma \in \mathbb{C}, \tag{13.620}$$

ce qui se récrit sous la forme

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0) - \sigma w}{w} = 0. \tag{13.621}$$

Si nous posons $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = h + ik$ et $\sigma = \alpha - i\beta$ nous avons

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{F\big((x_0, y_0) + (h, k)\big) - F(x_0, y_0) - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{|w|} \right| = 0, \tag{13.622}$$

ce qui signifie que F est différentiable et que sa différentielle est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{13.623}$$

La matrice (13.623) est, vue dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de multiplication dans $\mathbb{C}$ par $\alpha - i\beta = f'(z_0)$. En d'autre termes, dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$df_{z_0}(z) = f'(z_0)z, \tag{13.624}$$

et en particulier la différentielle est donnée par

$$df_{z_0} = f'(z_0)dz. \tag{13.625}$$

□

Exemple 13.250(Une application C^∞ mais pas $\mathbb{C}$-dérivable)
Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x + iy &\mapsto x. \end{aligned} \tag{13.626}$$

Vu que c'est une application linéaire, elle est différentiable une infinité de fois et sa différentielle est elle-même. C'est donc une application C^∞.

Elle n'est cependant pas $\mathbb{C}$-dérivable. En effet le quotient différentiel est, pour $\epsilon \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(x + iy + \epsilon_x + i\epsilon_y) - f(x + iy)}{\epsilon} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon}. \tag{13.627}$$

Cela n'a pas de limite lorsque $\epsilon \to 0$. Pour voir cela nous invoquons la méthode des chemins du corollaire 13.161 avec les chemins $\epsilon_1(t) = t$ et $\epsilon_2(t) = it$. Dans le premier cas, le quotient différentiel vaut 1 pour tout t, tandis que dans le second il vaut zéro pour tout t. △

13.26.1 Quelques règles de calcul

Lemme 13.251.
Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si g ne s'annule pas sur Ω, alors f/g est holomorphe sur Ω.

13.27 Théorèmes des accroissements finis

Nous avons déjà démontré (lemme 13.195) que si f est différentiable au point x alors $df_x(u) = \partial_u f(x)$. Une importante conséquence est le théorème des accroissements finis

Théorème 13.252 (Accroissements finis, inégalité de la moyenne)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. Soient a et b deux points dans U, $a \neq b$, tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U. Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{13.628}$$

Démonstration. On utilise le théorème 13.173 et le fait que

$$\|\partial_u f(x)\|_n \leqslant \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|u\|_m,$$

pour tout u dans $\mathbb{R}^m$. □

La proposition suivante est une application fondamentale du théorème des accroissements finis 13.252.

Proposition 13.253.
Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^m$ et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est constante ;

(2) f est différentiable et $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$;

(3) les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ existent et sont nulles sur U.

Démonstration. Nous allons démonter les équivalences en plusieurs étapes. D'abord (1) ⇒ (2), puis (2) ⇒ (3), ensuite (3) ⇒ (2) et enfin (2) ⇒ (1).

Commençons par montrer que la condition (1) implique la condition (2). Si $f(x)$ est constante, alors la condition (12.300) est vite vérifiée en posant $T(h) = 0$.

Afin de voir que la condition (2) implique la condition (3), remarquons d'abord que la différentiabilité de f implique que les dérivées partielles existent (proposition 13.193) et que nous avons l'égalité $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ (lemme 13.195). L'annulation de $\sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout u implique l'annulation des $\partial_i f(a)$ pour tout i.

Prouvons maintenant que la propriété (3) implique la propriété (2). D'abord, par la proposition 13.223, l'existence et la continuité des dérivées partielles $\partial_i f(a)$ implique la différentiabilité de f. Ensuite, la formule $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ implique que $df(a) = 0$.

Il reste à montrer que (2) implique la condition (1), c'est-à-dire que l'annulation de la différentielle implique la constance de la fonction. C'est ici que nous allons utiliser le théorème des accroissements finis. En effet, si a et b sont des points de U, le théorème 13.252 nous dit que

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{13.629}$$

Mais $\|df(x)\| = 0$ pour tout $x \in U$, donc ce supremum est nul et $f(b) = f(a)$, ce qui signifie la constance de la fonction. □

13.28 Fonctions Lipschitziennes

Définition 13.254.
Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques[56]*, $f\colon E \to F$ une application et un réel k strictement positif. Nous disons que f est* ***Lipschitzienne*** *de constante k sur E si pour tout $x, y \in E$,*

$$d_F\big(f(x) - f(y)\big) \leqslant k d_E(x, y). \tag{13.630}$$

Soit f une fonction k-Lipschitzienne. Si $y \in \overline{B(x, \delta)}$ alors $\|x-y\| \leqslant \delta$ et donc $\big\|f(x)-f(y)\big\| \leqslant k\delta$. Cela signifie que la condition Lipschitz pour s'énoncer en termes de boules fermées par

$$f\big(\overline{B(x, \delta)}\big) \subset \overline{B\big(f(x), k\delta\big)} \tag{13.631}$$

tant que $\overline{B(x, \delta)}$ est contenue dans le domaine sur lequel f est Lipschitz.

Proposition 13.255.
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. La fonction f est Lipschitzienne sur U si et seulement si df est bornée sur U.

Démonstration. Le fait que l'application différentielle df soit bornée signifie qu'il existe un $M > 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\|df_a\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \leqslant M$, pour tout a dans U. Si cela est le cas, alors le théorème 13.252 et la convexité[57] de U impliquent évidemment que f est de Lipschitz de constante plus petite ou égale à M.

Inversement, si f est Lipschitz de constante k, alors pour tout a dans U et u dans $\mathbb{R}^m$ on a

$$\left\| \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} \right\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

En passant à la limite pour $t \to 0$ on a

$$\|\partial_u f(a)\|_n = \|df_a(u)\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

donc la norme de df_a est majorée par k pour tout a dans U. □

Notez cependant qu'une fonction peut être Lipschitzienne sans être différentiable.

Proposition 13.256.
Une fonction Lipschitzienne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de la continuité donnée par le théorème 7.69. Prouvons donc la continuité en $a \in \mathbb{R}$. Pour tout x nous avons

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k|x - a|. \tag{13.632}$$

Si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\delta < \frac{\epsilon}{k}$ pour avoir

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon. \tag{13.633}$$

Donc f est continue en a. □

Définition 13.257.
Une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^p \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned} \tag{13.634}$$

56. Pour rappel, les espaces métriques sont définis par la définition 7.87 et le théorème 7.88 ; je précise que nous ne supposons pas que E soit vectoriel ; en particulier il peut être un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

57. La convexité de U sert à assurer que la droite reliant a à b est contenue dans U ; c'est ce que nous utilisons dans la démonstration du théorème 13.252.

est ***localement Lipschitz*** *en y au point (t_0, y_0) s'il existe des voisinages V de t_0 et W de y_0 et un nombre $k > 0$ tels que pour tout $(t, y) \in V \times W$ on ait*

$$\|f(t_0, y_0) - f(t, y)\| \leqslant k\|y - y_0\|. \tag{13.635}$$

La fonction est localement Lipschitz sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si elle est localement Lipschitz en chaque point de U.

13.258.
Autrement dit, une fonction est localement Lipschitzienne en sa deuxième variable lorsque tout point admet un voisinage sur lequel elle est Lipschitzienne.

Proposition 13.259.
Une application Lipschitz[58] *est uniformément continue.*

Proposition 13.260.
Si f et g sont deux fonctions localement Lipschitz alors $f + g$ l'est.

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul avec une majoration standard :

$$\begin{aligned}\|(f+g)(t_0, y_0) - (f+g)(t, y)\| &\leqslant \|f(t_0, y_0) - f(t, y)\| + \|g(t_0, y_0) - g(t, y)\| && \text{(13.636a)}\\ &\leqslant k_f\|y - y_0\| + k_g\|y - y_0\| && \text{(13.636b)}\\ &= (k_f + k_g)\|y - y_0\|. && \text{(13.636c)}\end{aligned}$$

□

Lemme 13.261.
La fonction donné par

$$f(t, (x, y)) = xy \tag{13.637}$$

est localement Lipschitz en tout point.

Démonstration. Nous avons la majoration classique

$$|f\big(t, (x_0, y_0)\big) - f\big(t, (x, y)\big)| = |x_0y_0 - xy| \leqslant |x_0y_0 - x_0y| + |x_0y - xy| \leqslant |x_0||y_0 - y| + |y||x_0 - x|. \tag{13.638}$$

Vu que nous parlons de fonction *localement Lipschitzienne*, nous pouvons majorer $|y|$ et $|x_0|$ par un même nombre k dans un voisinage de (x_0, y_0). Cela donne

$$|f\big(t, (x_0, y_0)\big) - f\big(t, (x, y)\big)| \leqslant k\big(|y_0 - y| + |x_0 - x|\big) \leqslant \sqrt{2}k\| \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix} \|. \tag{13.639}$$

Nous avons utilisé l'équivalence de norme de la proposition 12.5(1). □

13.29 Différentielles d'ordre supérieur

Définition 13.262.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction. La fonction f est dite ***deux fois différentiable*** *au point a dans U, si f est différentiable dans un voisinage de a, et sa différentielle df est différentiable au point a en tant que application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.*

La fonction f sera dite deux fois différentiable sur l'ensemble U si elle est deux fois différentiable en chaque point de U.

58. Définition 13.254.

13.29.1 Identification des espaces d'applications multilinéaires

La différentielle de la différentielle de f est notée

$$d(df)(a) = d^2f(a),$$

et est une application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$. Comme on a vu dans la proposition 12.55, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On verra comment cette propriété est utilisé dans l'exemple 13.265.

Soient V et W deux espaces vectoriel normés de dimension finie et $\mathcal{O}$ un ouvert autour de $x \in V$. D'une part l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(V, W)$ est lui-même un espace vectoriel normé de dimension finie, et on peut identifier $\mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}^{(k)}(V, W)\big)$ avec $\mathcal{L}^{(k+1)}(V, W)$, ce qui nous permet de dire que la k^{e} différentielle est une application

$$d^k f \colon \mathcal{O} \to \mathcal{L}^{(k)}(V, W). \tag{13.640}$$

Plus précisément, l'identification se fait de la façon suivante : si $\omega \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}^{(k)}(V, W)\big)$, alors ω vu dans $\mathcal{L}^{(k+1)}(V, W)$ est définie par

$$\omega(u_1, \dots, u_{k+1}) = \omega(u_1)(u_2, \dots, u_{k+1}). \tag{13.641}$$

Cela étant posé nous pouvons donner les définitions.

13.29.2 Fonctions différentiables plusieurs fois

Définition 13.263 ([215]).
La fonction $f \colon \mathcal{O} \subset V \to W$ est

(1) de classe C^0 si elle est continue,
(2) de classe C^1 si $df \colon \mathcal{O} \to \mathcal{L}(V, W)$ est continue,
(3) de classe C^k si $d^k f \colon \mathcal{O} \to \mathcal{L}^{(k)}(V, W)$ est continue,
(4) de classe C^∞ si f est dans $\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(V, W)$.

Définition 13.264.
*Un C^k-**difféomorphisme** est une application inversible de classe C^k dont l'inverse est également de classe C^k.*

Exemple 13.265
Soit $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application bilinéaire. On définit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ par $f(x) = B(x, x)$. Le lemme 13.216 nous dit que B est différentiable. Cela implique la différentiabilité de f. Pour trouver la différentielle de la fonction f, nous écrivons $f = B \circ s$ où $s \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ est l'application $s(x) = (x, x)$. En utilisant la règle de différentiation de fonctions composées,

$$df(a) = dB\big(s(a)\big) \circ ds(a). \tag{13.642}$$

Mais $ds(a).u = (u, u)$ parce que $s(a + h) - s(a) - (h, h) = 0$. Par conséquent,

$$df(a).u = dB\big(s(a)\big)(u, u) = B(u, a) + B(a, u) \tag{13.643}$$

où nous avons utilisé la formule du lemme 13.216. La formule (13.643) peut être écrite sous la forme compacte

$$df(a) = B(\,\cdot\,, a) + B(a, \,\cdot\,) \tag{13.644}$$

La fonction $df(a)$ ainsi écrite est linéaire par rapport à a, donc différentiable. En outre elle coïncide avec sa différentielle, comme on a vu dans le lemme 13.188, au sens que la différentielle de df au point a sera l'application que à chaque x dans $\mathbb{R}^m$ associe l'application linéaire $B(x, \,\cdot\,) + B(\,\cdot\,, x)$. On voit bien que d^2f au point a est une application de $\mathbb{R}^m$ vers l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On peut utiliser d'autre part l'isomorphisme des espaces $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et dire que, une fois que a est fixé, l'application $d^2f(a)$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. On écrit alors $d^2f(a)(x, y) = B(x, y) + B(y, x)$. △

13.29.3 Différentielle seconde, fonction de classe C^2

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la différentielle seconde est la suivante

Proposition 13.266.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction. La fonction f est deux fois différentiable au point a si et seulement si les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ sont différentiables en a.

Cela veut dire, en particulier, que f est deux fois différentiable si et seulement si ses dérivées partielles secondes, $\partial_i \partial_j f$, pour tout couple d'indices i, j dans $\{1, \dots, m\}$, existent et sont continues. Pour les différentielles d'ordre supérieur on a la proposition suivante.

La différentielle seconde dans l'exemple 13.265 est symétrique, c'est-à-dire que $d^2 f(a)(x_1, x_2) = d^2 f(a)(x_2, x_1)$. En fait toute différentielle seconde est symétrique.

Théorème 13.267 (Schwarz)**.**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, pour tout couple i, j d'indices dans $\{1, \dots, m\}$ et pour tout point a dans U, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Démonstration. Pour simplifier nous nous limitons ici au cas $m = 2$. Soit (h, g) un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ on note

$$\begin{aligned} \Delta_h f(v) &= f(v + he_1) - f(v) = f(x + h, y) - f(x, y), \\ \Delta_g f(v) &= f(v + ge_2) - f(v) = f(x, y + g) - f(x, y), \end{aligned} \tag{13.645}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_g \Delta_h f(v) &= \left(f(x + h, y + g) - f(x, y + g)\right) - \left(f(x + h, y) - f(x, y)\right), \\ \Delta_h \Delta_g f(v) &= \left(f(x + h, y + g) - f(x + h, y)\right) - \left(f(x, y + g) - f(x, y)\right), \end{aligned} \tag{13.646}$$

donc,

$$\frac{1}{g}\Delta_g \left(\frac{1}{h}\Delta_h f(v)\right) = \frac{1}{h}\Delta_h \left(\frac{1}{g}\Delta_g f(v)\right). \tag{13.647}$$

On utilise alors le théorème des accroissements finis 13.129

$$\frac{1}{h}\Delta_h f(v) = \frac{1}{h}\big(f(x + h, y) - f(x, y)\big) = \frac{1}{h}\partial_1 f(x + t_1 h, y)h = \partial_1 f(x + t_1 h, y), \tag{13.648}$$

pour un certain t_1 dans $]0, 1[$. De même on obtient

$$\frac{1}{g}\Delta_g f(v) = \partial_2 f(x, y + t_2 g),$$

pour un certain t_2 dans $]0, 1[$. Alors

$$\frac{1}{g}\Delta_g\big(\partial_1 f(x + t_1 h, y)\big) = \frac{1}{h}\Delta_h\big(\partial_2 f(x, y + t_2 g)\big). \tag{13.649}$$

En appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis on a

$$\partial_2 \partial_1 f(x + t_1 h, y + s_1 g) = \partial_1 \partial_2 f(x + s_2 h, y + t_2 g). \tag{13.650}$$

Il suffit maintenant de passer à la limite pour $(h, g) \to (0, 0)$ et de se souvenir du fait que f est $\mathcal{C}^2$ seulement si ses dérivées partielles secondes sont continues pour avoir $\partial_2 \partial_1 f(v) = \partial_1 \partial_2 f(v)$. □

Si f est deux fois différentiable $d^2f(a)$ est l'application bilinéaire associée avec la matrice symétrique

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \dots & \partial_1\partial_m f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\partial_m f(a) & \dots & \partial_1^2 f(a), \end{pmatrix} \tag{13.651}$$

Cette matrice est dite la matrice **hessienne** de f.

Exemple 13.268
Montrons qu'il n'existe pas de fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 5\sin x & \text{(13.652a)} \\ \partial_y(x,y) = 6x + y. & \text{(13.652b)} \end{cases}$$

Ceci est vite fait en appliquant le théorème de Schwarz, 13.267 ; ce que nous trouvons est

$$\partial_y(\partial_x f) = 0 \neq \partial_x(\partial_y f) = 6.$$

Donc, l'existence d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\partial_x(x,y) = 5\sin x$ et $\partial_y f(x,y) = 6x + y$ serait en contradiction avec le théorème. △

Soit une fonction de classe C^2 $f\colon V \to \mathbb{R}$ où V est un espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Nous avons

$$f\colon V \to \mathbb{R} \tag{13.653a}$$
$$df\colon V \to \mathcal{L}(V,\mathbb{R}) \tag{13.653b}$$
$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}\Big(V, \mathcal{L}(V,\mathbb{R})\Big), \tag{13.653c}$$

avec, en suivant les différentes formules du lemme 13.195,

$$df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(v+tu)\Big]_{t=0} \tag{13.654}$$

et

$$(d^2f)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[df_{v+tu}\Big]_{t=0} \tag{13.655}$$

pour tout $a, u \in V$. Notons que dans le deuxième cas, il s'agit d'une limite dans $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Si $\dim(V) = n$, alors $\dim\mathcal{L}(V,\mathbb{R}) = n$ et avec un choix de base, nous pouvons trouver une matrice $n \times n$ pour $(d^2f)_a$.

Soit une base $\{e_i\}$ de V et la base duale $\{e_i^*\}$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Nous allons chercher la matrice de $(d^2f)_a$ pour ces bases. L'élément de matrice

$$\big[(d^2f)_a\big]_{ij} \tag{13.656}$$

est la composante e_j^* de $(d^2f)_a$ appliqué à e_i. Trouver cette composante e_j^* revient à appliquer l'élément $(d^2f)_a e_i$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ à e_j. Le calcul est donc :

$$\begin{aligned} \big[(d^2f)_a\big]_{ij} &= \big((d^2f)_a e_i\big)(e_j) && \text{(13.657a)} \\ &= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+te_i}(e_j)\Big]_{t=0} && \text{(13.657b)} \\ &= \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+te_i+se_j)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} && \text{(13.657c)} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a). && \text{(13.657d)} \end{aligned}$$

Attention : le passage à (13.657b) n'est pas une trivialité. Le fait est que si $t \mapsto A(t)$ est une application continue $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{t\to 0}\big(A(t)v\big) = \big(\lim_{t\to 0} A(t)\big)v. \tag{13.658}$$

Donc la matrice de d^2f est la matrice des dérivées secondes. Il s'agit d'une matrice symétrique par le théorème de Schwarz 13.267.

13.269.
Si $a \in v$, nous pouvons aussi voir $(d^2f)_a$ comme une forme bilinéaire sur V grâce à la proposition 12.55. Si $u, v \in V$ nous notons

$$(d^2f)_a(u,v) = (d^2f)_a(u)v. \tag{13.659}$$

À droite, il s'agit de la définition réelle de d^2f sans abus de notations, et à gauche, il s'agit d'une notation. Cette application bilinéaire $(d^2f)_a \in \mathcal{L}^{(2)}(V,\mathbb{R})$ a pour matrice symétrique la matrice des dérivées secondes calculées en a.

Exemple 13.270
Voyons comment la différentielle seconde fonctionne entre deux espaces vectoriels. Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W. Pour que les choses soient claires, nous avons :

$$f : V \to W \tag{13.660a}$$
$$df : V \to \mathcal{L}(V,W) \tag{13.660b}$$
$$d^2f : V \to \mathcal{L}\Big(V, \mathcal{L}(V,W)\Big). \tag{13.660c}$$

Si $a \in V$, alors $(d^2f)_a$ est une application $V \to \mathcal{L}(V,W)$. Il faut donc l'appliquer à $u \in V$ et ensuite à $v \in V$ pour obtenir un élément de W :

$$(d^2f)_a(u)v = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}\Big]_{t=0} v \tag{13.661a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}(v)\Big]_{t=0} \tag{13.661b}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+tu+sv)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} \tag{13.661c}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \tag{13.661d}$$

Par conséquent nous voyons

$$\begin{aligned} d^2f &: V \to \mathcal{L}^{(2)}(V,W) \\ d^2f_a(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \end{aligned} \tag{13.662}$$

Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous avons une seule direction et par linéarité de (13.662) par rapport à u et v, nous avons

$$d^2f_a(u,v) = f''(a)uv \tag{13.663}$$

où les produits sont des produits usuels dans $\mathbb{R}$ et f'' est la dérivée seconde usuelle. △

Tout ceci est un peu résumé dans la proposition suivante.

Proposition 13.271.
Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors en désignant par H_af sa matrice hessienne au point a nous avons

$$(d^2f)_a(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \langle (H_af)u, v\rangle \tag{13.664}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. La première égalité est l'équation (13.663) déjà faite. Pour la seconde, il faut se rappeler du lien entre dérivée partielle et dérivée directionnelle, donné en le lemme 13.195. En particulier ici nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sum_{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(a) u_k v_l = \langle (H_af)u, v\rangle. \tag{13.665}$$

□

En particulier, la matrice hessienne $H_a f$ est symétrique et donc diagonalisable (théorème spectral 11.189). Si e_i est un vecteur propre unitaire pour la valeur propre λ_i nous avons

$$(d^2f)_a(e_i, e_i) = \langle (H_a f)e_i, e_i\rangle = \lambda_i\langle e_i, e_i\rangle = \lambda. \tag{13.666}$$

Enfin pour celles qui aiment les notations matricielles de tout poil, il y a cette façon-ci d'écrire :

$$(d^2f)_a(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x^2 f(a) & \partial_{xy}^2 f(a)\\ \partial_{xy}^2 f(a) & \partial_y^2 f(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}. \tag{13.667}$$

13.29.4 Ordre supérieur

Intuitivement, une fonction est de classe C^p si elle est p fois continûment différentiable. Nous posons la définition suivante.

Définition 13.272.
*Une fonction $f\colon E \to F$ est **de classe** C^0 si elle est continue.*

*Nous disons que la fonction $f\colon E \to F$ est **de classe** C^p si elle est différentiable et si sa différentielle $df\colon E \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue.*

Ce qui est terrible avec les différentielles d'ordre supérieurs, c'est l'emboîtement des espaces. Pour une fonction $f\colon E \to F$, nous allons souvent poser

$$V_0 = F \tag{13.668a}$$
$$V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k), \tag{13.668b}$$

de telle sorte à avoir

$$df\colon E \to \mathcal{L}(E, F) = V_1 \tag{13.669}$$

et

$$d^2f\colon E \to \mathcal{L}(E, V_1) = V_2, \tag{13.670}$$

ce qui donne en général

$$d^k f\colon E \to \mathcal{L}(E, v_{k-1}) = V_k. \tag{13.671}$$

La proposition suivante lie une bonne fois pour toute dérivée et différentielle dans le cadre de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 13.273 ([1])**.**
Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^p si et seulement si elle est p fois continûment dérivable.

Démonstration. Nous commençons par poser un certain nombre de notations. Comme souvent nous posons $V_0 = \mathbb{R}$ et

$$V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R}, V_k). \tag{13.672}$$

De plus nous considérons $M_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donnée par $M_1(t) = t$. Et par récurrence

$$M_{k+1}(t) = tM_k. \tag{13.673}$$

Nous avons $M_1 \in V_1$ et $M_k\colon \mathbb{R} \to V_{k-1}$, c'est-à-dire $M_k \in V_k$.

Les formules que nous allons prouver sont que d'une part,

$$df_a = f'(a)M_1. \tag{13.674}$$

et que d'autre part, plus généralement,

$$(d^k f)_a = f^{(k)}(a)M_k. \tag{13.675}$$

En plusieurs parties et par récurrence.

Si f est continûment dérivable, alors f est C^1 Le candidat différentielle serait $df_a(h) = hf'(a)$. Vérifions cela directement dans la définition :

$$\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} - 1'_h f(a). \tag{13.676}$$

où nous avons noté 1_h le vecteur unité dans la direction de h, c'est-à-dire $1_h = h/\|h\|$. Vu que $h \in \mathbb{R}$, c'est simplement

$$1_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases} \tag{13.677}$$

et nous ne définissons pas 1_h si $h = 0$.

C'est le moment de prendre la limite de (13.676) pour $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$ séparément. Lorsque $h \to 0^+$, nous avons $\|h\| = h$ et $1_h = h$. Vu que f est supposée dérivable, la limite du quotient existe et vaut $f'(a)$. Donc le tout a une limite nulle :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a) = 0. \tag{13.678}$$

En ce qui concerne la limite $h \to 0^-$, nous avons $\|h\| = -h$ et $1_h = -1$, et à nouveau une limite nulle. La proposition 13.37 nous permet alors de conclure que la limite existe et est nulle. Les limites à gauche et à droite étant nulles, la limite existe et est nulle par la proposition 13.37.

Si $f^{(p)}$ est continue alors $d^p f$ aussi Nous passons à la récurrence de notre preuve. Sous l'hypothèse que $f^{(p)}$ existe et est continue, nous allons montrer que $d^p f$ existe, est continue et vaut

$$(d^p f)_a = f^{(p)}(a)M_p. \tag{13.679}$$

Soit $k < p$ tel que ce soit bon (pour $k = 1$ c'est déjà fait). Nous avons $(d^k f)_a = f^{(k)}(a)M_k$, et pour prouver que $(d^{k+1} f)_a = f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ nous l'y mettons dans la définition de la différentielle. Nous avons :

$$\frac{(d^k f)_{a+h} - (d^k f)_a - f^{(k+1)}(a)M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{f^{(k)}(a+h)M_k - f^{(k)}(a)M_k - hf^{(k+1)}(a)M_k}{\|h\|}. \tag{13.680}$$

La limite $h \to 0$ est une limite dans V_k, et elle se traite comme précédemment. Elle vaut zéro parce que $f^{(k+1)}$ est la dérivée de $f^{(k)}$. Cela justifie les faits que $d^k f$ est différentiable en a et que la différentielle est donné par la formule voulue.

Par hypothèse, $k + 1 \leqslant p$, donc $f^{(k+1)}$ est continue. Par conséquent l'application $a \mapsto f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ est continue.

Si f est de classe C^1 alors f' existe et est continue Dire que f est de classe C^1 revient à dire que la différentielle $df : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existe et est continue. Soyons conscient que $df_a(\epsilon) = \epsilon df_a(1)$ et calculons

$$\frac{f(a+\epsilon) - f(a) - df_a(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} - df_a(1). \tag{13.681}$$

La définition de la différentielle est que la limite de cela pour $\epsilon \to 0$ soit nulle. Cela implique que la limite suivante existe et vaut

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = df_a(1). \tag{13.682}$$

Nous avons prouvé que $f'(a) = df_a(1)$.

La fonction $a \mapsto df_a$ est continue. Pouvons-nous en déduire que f' est continue ? Nous avons

$$f' = ev_1 \circ df \tag{13.683}$$

où ev_1 est l'application d'évaluation dont le lemme 12.18 a déjà donné la continuité. Donc f' est continue comme composée d'applications continues.

f est C^p. Récurrence Nous supposons que f est de classe C^p, et nous allons montrer par récurrence que $f^{(k)}$ existe et est continue pour tout $k \leqslant p$. Posons exactement l'énoncé de notre récurrence.

Pour $k = 1$ c'est fait. Nous supposons que la formule soit correcte pour un certain $k \leqslant p$ et nous y allons pour $k + 1$. Nous avons

$$\frac{(d^k f)(a+h) - (d^k f)(a) - f^{(k+1)}(a)M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{\big[f^{(k)}(a+h) - f^k(a) - hf^{(k+1)}(a)\big]M_k}{\|h\|} \tag{13.684a}$$

$$= \big[\frac{f^{(k)}(a+h) - f^{(k)}(a)}{\|h\|} - 1_h f^{(k+1)}(a)\big]M_k. \tag{13.684b}$$

où nous avons aussi tenu compte que $M_{k+1}(h) = hM_k$.

C'est le moment de calculer séparément les limites $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$. Cela fonctionne comme toutes les autres fois.

□

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. L'application

$$d^l f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}\Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\dots)\big)\Big) \tag{13.685}$$

au point x appliquée à $v^{(1)}$ appliquée au point $v^{(2)}$, …, appliquée à $v^{(l)}$ est notée

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \dots, v^{(l)}) \in \mathbb{R}. \tag{13.686}$$

Proposition 13.274.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. Avec la notation (13.686) nous avons

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \dots v^{(l)}) = \sum_{k_1,\dots,k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots v^{(l)}_{k_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_l}}(x). \tag{13.687}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur l, en sachant que la formule est déjà vraie pour $l = 1$ et $l = 2$. Si la formule est valable pour l, nous avons

$$(d^{l+1} f)_x(v^{(1)}, \dots, v^{(l+1)}) = \frac{d}{dt}\Big[(d^l)_{x+tv^{(l+1)}}(v^{(1)}, \dots, v^{(l)})\Big]_{t=0} \tag{13.688a}$$

$$= \sum_{k_1 \dots k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots v^{(l)}_{k_l} \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial^l f}{\partial x_1 \dots \partial x_l}(x + tv^{l+1})\Big]_{t=0} \tag{13.688b}$$

$$= \sum_{k_1 \dots k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots v^{(l)}_{k_l} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_k}(x). \tag{13.688c}$$

Cela donne le résultat attendu. □

13.275.
La formule de la proposition 13.274 nous permet d'écrire de jolies formules comme

$$(d^3 f)_x(h, h, h) = \sum_{ijk} h_i h_j h_k (\partial^3_{ijk} f)(x). \tag{13.689}$$

Proposition 13.276 (Dérivées partielles et fonctions C^k)**.**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. La fonction f est de classe C^k si et seulement si les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ existent et sont de classe C^k.

Proposition 13.277 ([1]).
Soient des espaces vectoriels E, V et W de dimension fine, et une fonction $f\colon E \to V$ de classe C^p. Si $\varphi\colon V \to W$ est linéaire, alors

$$\varphi \circ f\colon E \to W \tag{13.690}$$

est de classe C^p.

Démonstration. En utilisant le théorème de différentiation de fonctions composées 12.140,

$$f(\varphi \circ f)_a(u) = d\varphi_{f(a)} df_a(u), \tag{13.691}$$

et donc, parce que φ est linéaire,

$$d(\varphi \circ f)_a = \varphi \circ df_a. \tag{13.692}$$

Nous pouvons exprimer cela de façon un peu différente en posant $\varphi_1\colon \mathcal{L}(E,V) \to \mathcal{L}(E,W)$,

$$\varphi_1(\alpha)(a) = (\varphi \circ \alpha)(a). \tag{13.693}$$

Cela nous permet d'écrire $\varphi \circ df_a = (\varphi_1 \circ df)(a)$ et donc

$$d(\varphi \circ f) = \varphi_1 \circ df \tag{13.694}$$

où φ_1 est encore une application linéaire. Une récurrence semble possible. Nous posons $V_0 = V$ et $W_0 = W$ puis

$$V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k) \tag{13.695a}$$
$$W_{k+1} = \mathcal{L}(E, W_k) \tag{13.695b}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_k\colon \mathcal{L}(E, V_{k-1}) &\to \mathcal{L}(E, W_{k-1}) \\ g &\mapsto \varphi_{k-1} \circ g. \end{aligned} \tag{13.696}$$

Avec tout cela, nous prétendons que $d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f$ avec φ_k linéaire.

<u>φ_k **est linéaire**</u> Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}(E, V_{k-1})$, ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Nous avons, en utilisant la linéarité de φ_{k-1} :

$$\varphi_k(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)(a) = \varphi_{k-1}\big((\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)(a)\big) \tag{13.697a}$$
$$= \varphi_{k-1}\big(\lambda\alpha_1(a)\big) + \mu\varphi_{k-1}\big(\alpha_2(a)\big) \tag{13.697b}$$
$$= \lambda\varphi_k(\alpha_1)a + \mu\varphi_k(\alpha_2)(a). \tag{13.697c}$$

Donc φ_k est linéaire pour tout k.

<u>**La relation**</u> La relation

$$d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f \tag{13.698}$$

se démontre par récurrence, chaque pas étant justifié de la même manière que (13.694).

□

13.30 Suites et séries : généralités

13.30.1 Convergence uniforme

13.30.1.1 Critère de Cauchy uniforme

Définition 13.278 ([173]).
Soient un espace (dont la nature n'est pas très importante) Ω, une partie A de Ω et un espace normé V. Lorsque g est une fonction $g\colon \Omega \to V$, nous notons

$$\|g\|_A = \sup_{x \in A} \|g(x)\| \tag{13.699}$$

C'est la norme supremum limitée à la partie A.

Nous disons qu'une suite de fonctions (f_n) définies sur un ensemble A ***converge uniformément sur*** *A vers la fonction f si*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0. \tag{13.700}$$

Proposition 13.279 (Critère de Cauchy uniforme[216])**.**
Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace topologique complet. La suite de fonctions $f_n : X \to Y$ converge uniformément sur A si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{13.701}$$

pour tout $x \in X$.

Grosso modo, cela dit que si qu'une suite de Cauchy pour la norme uniforme est une suite uniformément convergente. Le fait que la suite converge fait partie du résultat et n'est pas une hypothèse. Ce critère sera utilisé pour montrer que $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ est complet, proposition 13.282.

Démonstration. Si $f_n \xrightarrow{unif} f$ alors le critère est satisfait ; c'est dans l'autre sens que la preuve est intéressante.

Soit donc une suite de fonctions satisfaisant au critère et montrons qu'elle converge uniformément. Pour tout $x \in X$ la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans l'espace complet Y ; nous avons donc convergence ponctuelle $f_n \to f$. Nous devons prouver que cette convergence est uniforme. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{13.702}$$

pour tout $x \in X$. Si nous nous fixons un tel k et un $x \in A$ nous considérons l'inégalité

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{13.703}$$

qui est vraie pour tout l. En passant à la limite $l \to \infty$ (limite qui commute avec la fonction distance par définition de la topologie) nous avons

$$d\big(f_k(x), f(x)\big) \leqslant \epsilon. \tag{13.704}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $x \in X$, cela signifie que $f_n \xrightarrow{unif} f$. □

Théorème 13.280 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit A, un ensemble mesuré et $f_n : A \to \mathbb{R}^n$, une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues en $x_0 \in A$, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Si $x \in A$ nous avons, pour tout n, la majoration

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\| \tag{13.705a}$$
$$\leqslant \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + 2\|f_n - f\|_\infty. \tag{13.705b}$$

Grâce à l'uniforme convergence, nous considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\| \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Pour de tels n, nous avons

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant 2\epsilon + \|f_n(x) - f_n(x_0)\|. \tag{13.706}$$

La continuité de f_n nous fournit un $\delta > 0$ tel que $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| < \epsilon$ dès que $\|x - x_0\| < \delta$. Pour ce δ, nous avons alors $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$.

Donc lorsque $\|x - x_0\| < \delta$ et $n \geqslant N$ nous avons

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant 3\epsilon, \tag{13.707}$$

où vous remarquerez qu'il n'y a plus de dépendance en n. Cela prouve la continuité de f en x_0. □

13.30.1.2 Complétude avec la norme uniforme

Proposition 13.281 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit X un espace topologique et (Y,d) un espace métrique. Si une suite de fonctions $f_n\colon X\to Y$ continues converge uniformément, alors la limite est séquentiellement continue[59].

Démonstration. Soit $a\in X$ et prouvons que f est séquentiellement continue en a. Pour cela nous considérons une suite $x_n\to a$ dans X. Nous savons que $f(x_n)\xrightarrow{Y} f(x)$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in X$ nous avons la majoration

$$\begin{aligned}\|f(x_n)-f(x)\| &\leqslant \|f(x_n)-f_k(x_n)\|+\|f_k(x_n)-f_k(x)\|+\|f_k(x)-f(x)\| &\text{(13.708a)}\\ &\leqslant 2\|f-f_k\|_\infty+\|f_k(x_n)-f_k(x)\|. &\text{(13.708b)}\end{aligned}$$

Soit $\epsilon>0$. Si nous choisissons k suffisamment grand la premier terme est plus petit que ϵ. Et par continuité de f_k, en prenant n assez grand, le dernier terme est également plus petit que ϵ. □

Proposition 13.282.
Soit X un espace topologique métrique (Y,d) un espace espace métrique complet. Alors les espaces

(1) $\big(C_b^0(X,Y),\|.\|_\infty\big)$ *des fonctions continues et bornées $X\to Y$,*
(2) $\big(C_0^0(X,Y),\|.\|_\infty\big)$ *des fonctions continues et s'annulant à l'infini*
(3) $\big(C_0^k(X,Y),\|.\|_\infty\big)$ *des fonctions de classe C^k et s'annulant à l'infini*

sont complets.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $C(X,Y)$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que si $k,l>N$ nous avons $\|f_k-f_l\|_\infty\leqslant\epsilon$. Cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme 13.279 et donc converge uniformément vers une fonction $f\colon X\to Y$. La continuité (ou l'aspect C^k) de la fonction f découle de la convergence uniforme et de la proposition 13.281 (c'est pour avoir l'équivalence entre la continuité séquentielle et la continuité normale que nous avons pris l'hypothèse d'espace métrique).

Si les fonctions f_k sont bornées ou s'annulent à l'infini, la convergence uniforme implique que la limite le sera également. □

Notons que si X est compact, les fonctions continues sont bornées par le théorème 7.86 et nous pouvons simplement dire que $C^0(X,Y)$ est complet, sans préciser que nous parlons des fonctions bornées.

Lemme 13.283.
Soient un espace topologique compact A et un espace complet B. L'ensemble des fonctions continues de A vers B muni de la norme uniforme est complet.

Dit de façon courte : $\big(C(A,B),\|.\|_\infty\big)$ *est complet.*

Démonstration. Soit (f_k) une suite de Cauchy de fonctions dans $C(A,B)$. Pour chaque $x\in A$ nous avons

$$\|f_k(x)-f_l(x)\|_B\leqslant\|f_k-f_l\|_\infty, \tag{13.709}$$

de telle sorte que la suite $(f_k(x))$ est de Cauchy dans B et converge donc vers un élément de B. La suite de Cauchy (f_k) converge donc ponctuellement vers une fonction $f\colon A\to B$. Nous devons encore voir que cette fonction est continue ; ce sera l'uniformité de la norme qui donnera la continuité. En effet soit $x_n\to x$ une suite dans A qui converge vers $x\in A$. Pour chaque $k\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\|f(x_n)-f(x)\|\leqslant\|f(x_n)-f_k(x_n)\|+\|f_k(x_n)-f_k(x)\|+\|f_k(x)-f(x)\|. \tag{13.710}$$

En prenant k et n assez grands, cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut ; le premier et le troisième terme par convergence ponctuelle $f_k\to f$, le second terme par continuité de f_k. La suite $f(x_n)$ est donc convergente vers $f(x)$ et la fonction f est continue. □

59. Si X est métrique, alors c'est la continuité usuelle par la proposition 7.74.

Problèmes et choses à faire

Il serait sans doute bon de revoir cette preuve à la lumière du critère de Cauchy uniforme 13.279.

13.284 ([217]).
Le théorème de Stone-Weierstrass indique que les polynômes sont denses pour la topologie uniforme dans les fonctions continues. Donc il existe des limites uniformes de fonctions C^∞ qui ne sont même pas dérivables. Les espaces de type C^p munis de $\|.\|_\infty$ ne sont donc pas complets sans quelques hypothèses. Voir la proposition 13.282 et le thème 24.

Théorème 13.285 (Théorème de Dini[218]).
Soient un espace métrique complet D et une suite de fonctions $f_n \in C(D,\mathbb{R})$ telle que

(1) $f_n \to g$ ponctuellement,
(2) $g \in C(D,\mathbb{R})$,
(3) la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $x \in D$ et pour tout $n \geqslant 0$ nous avons $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Soit $x \in D$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$g(x) - \epsilon \leqslant f_{N(x)} \leqslant g(x). \tag{13.711}$$

De plus g et $f_{N(x)}$ sont des fonctions continues, donc il existe $\eta(x)$ tel que si $y \in B\big(x,\eta(x)\big)$ alors

$$g(y) \in B\big(g(x),\epsilon\big) \tag{13.712a}$$
$$f_{N(x)}(y) \in B\big(f_{N(x)}(x),\epsilon\big). \tag{13.712b}$$

Si $n \geqslant N(x)$ et si $y \in B(x,\eta(x))$ alors nous avons les majorations

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant f_{N(x)}(y) \geqslant f_{N(x)}(x) - \epsilon \geqslant g(x) - 2\epsilon \geqslant g(y) - 3\epsilon. \tag{13.713}$$

Justifications :

(1) Les deux premières inégalités sont la croissance de la suite.
(2) La suivante est (13.712b).
(3) Ensuite il y a le choix de $N(x)$.
(4) Et enfin il y a (13.712a).

Nous retenons que si $x \in D$ et si $n \geqslant N(x)$ alors

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant g(y) - 3\epsilon \tag{13.714}$$

pour tout $y \in B(x,\eta(x))$.

Nous utilisons maintenant la compacité de D. Pour chaque $x \in D$ nous pouvons considérer la boule ouverte $B\big(x,\eta(x)\big)$; ces boules recouvrent D. Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire un ensemble fini d'éléments $x_1,\dots,x_K$ tels que

$$D = \bigcup_{k=1}^{K} B\big(x_k,\eta(x_k)\big). \tag{13.715}$$

Si à ce moment vous ne comprenez pas pourquoi c'est une égalité au lieu d'une inclusion, il faut lire l'exemple 7.14. Considérons

$$n \geqslant N = \max\{N(x_1),\dots,N(x_K)\}. \tag{13.716}$$

Pour tout $y \in D$ il existe $k \in \{1,\dots,K\}$ tel que $y \in B\big(x_k,\eta(x_k)\big)$, et vu que $n \geqslant N(x_k)$ nous reprenons la majoration (13.714) :

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant g(y) - 3\epsilon. \tag{13.717}$$

Pour le n choisi nous avons ces inégalités pour tout $y \in D$, c'est-à-dire que nous avons $\|f_n - g\| \leqslant 3\epsilon$ et donc la convergence uniforme. □

Proposition 13.286 ([1]).
Soient une suite de fonctions continues $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction continue u telle que $u_i \to u$ simplement. Alors la convergence est uniforme sur tout compact.

Démonstration. Soit un compact K ; nous notons $\|.\|$ la norme uniforme sur K. Supposons que la limite ne soit pas uniforme, c'est-à-dire qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\|u_i - u\| > 2\epsilon \tag{13.718}$$

pour tout i. Cela permet de considérer pour tout i un élément $x_i \in K$ tel que[60]

$$\|u_i(x_i) - u(x_i)\| > \epsilon. \tag{13.719}$$

Pour cela, il faut noter que K est compact et que la fonction $x \mapsto \|u_i(x) - u(x)\|$ est continue sur K. Elle est donc bornée et atteint son maximum (c'est le théorème de Weierstrass 7.99).

La suite $i \mapsto x_i$ est une suite dans un compact, et quitte à prendre une sous-suite, nous supposons qu'elle converge vers $a \in K$ (ça, c'est Bolzano-Weierstrass 7.96).

La convergence ponctuelle $u_i \to u$, prise en a, dit qu'il existe un N tel que $|u_i(a) - u(a)| < \epsilon$ pour tout $i \geqslant N$. Pour un tel i, nous avons aussi

$$|u_i(x) - u(x)| < \epsilon \tag{13.720}$$

sur un voisinage de a, parce que $u_i - u$ est continue. Mais tout voisinage de a contient un élément x_j pour lequel

$$|u_i(x_j) - u(x_j)| > \epsilon. \tag{13.721}$$

Contradiction. □

13.30.2 Série de fonctions

Les séries de fonctions sont des cas particuliers de suites.

Définition 13.287.
Si (f_n) est une suite de fonctions, nous définissons la somme des f_n de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n. \tag{13.722}$$

Le membre de droite est une définition de la notation introduite dans le membre de gauche.

Avant de vous lancer, relisez une bonne fois les définitions de convergence absolue (définition 12.59) et de convergence uniforme (équation 12.115).

Lemme 13.288.
Soient des fonctions $u_n : \Omega \to \mathbb{C}$. Si il existe une suite réelle positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(1) pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $|u_n(z)| \leqslant a_n$ (c'est-à-dire $a_n \geqslant \|u_n\|_\infty$),

(2) la somme $\sum_n a_n$ converge,

alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement[61].

Démonstration. Découle du lemme de comparaison 12.69. □

Théorème 13.289.
Soit $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, une série de fonctions complexes où $g_k(x) = \varphi_k(x)\psi_k(x)$. Supposons que

(1) $\varphi_k : A \to \mathbb{C}$ et $|\sum_{k=1}^{K} \varphi_k(x)| \leqslant M$ où M est indépendant de x et K,

60. Notez l'inégalité stricte, obetenue en considérant 2ϵ plus haut.
61. Définition 12.60.

(2) $\psi_k\colon A\to\mathbb{R}$ *avec* $\psi_k(x)\geqslant 0$ *et pour tout* x *dans* A, $\psi_{k+1}(x)\leqslant\psi_k(x)$, *et enfin supposons que* $\psi_k(x)$ *converge uniformément vers* 0.

Alors $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *est uniformément convergente.*

Théorème 13.290.
Si la série de puissances (réelle) converge en $x=x_0+R$, *alors elle converge uniformément sur* $[x_0-R+\epsilon,x_0+R]$ $(\epsilon>0)$ *vers une fonction continue.*

Proposition 13.291.
Soit (u_n) *une suite de fonctions continues* $u_n\colon\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. *Si la série* $\sum_n u_n$ *converge normalement alors la somme est continue.*

Démonstration. Nous posons $u(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}u_n(z)$, et nous vérifions que la fonction ainsi définie sur Ω est continue. Soit $z\in\Omega$. Prouvons la continuité de u au point z. Pour tout z' dans un voisinage de z nous avons

$$\begin{aligned}\big|u(z)-u(z')\big|&=\left|\sum_{n=0}^{N}u_n(z)-\sum_{n=0}^{N}u_n(z')+\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n(z)-\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n(z')\right| &(13.723a)\\ &\leqslant\left|\sum_{n=0}^{N}u_n(z)-\sum_{n=0}^{N}u_n(z')\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|u_n(z)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|u_n(z')|. &(13.723b)\end{aligned}$$

Étant donné que les sommes partielles sont continues, en prenant N suffisamment grand, le premier terme peut être rendu arbitrairement petit. Si N est suffisamment grand, le second terme est également petit. Par contre, cet argument ne tient pas pour le troisième terme parce que nous souhaitons une majoration pour tout z' dans une boule autour de z. Nous devons donc écrire

$$\sum_{n=N}^{\infty}|u_n(z)|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\|u_n\|_\infty. \tag{13.724}$$

Ce dernier est arbitrairement petit lorsque N est grand. Notons que nous avons utilisé l'hypothèse de convergence normale. □

La même propriété, avec la même démonstration, tient dans le cas d'espaces vectoriels normés.

Proposition 13.292.
Soient E *et* F, *deux espaces vectoriels normés,* Ω *une partie ouverte de* E *et une suite de fonctions* $u_n\colon\Omega\to F$ *convergeant normalement sur* Ω, *c'est-à-dire que* $\sum_n\|u_n\|_\infty$ *converge, la norme* $\|.\|_\infty$ *devant être comprise comme la norme supremum sur* Ω. *Alors la fonction* $u=\sum_n u_n$ *est continue sur* Ω.

Démonstration. Soit $x,x'\in\Omega$ en supposant que $\|x-x'\|$ est petit. Soit encore $\epsilon>0$. Nous allons montrer la continuité en x. Pour cela nous savons que pour tout N l'inégalité suivante est correcte :

$$\|u(x)-u(x')\|\leqslant\left\|\sum_{n=0}^{N}u_n(x)-\sum_{n=0}^{N}u_n(x')\right\|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\|u_n(x)\|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\|u_n(x')\|. \tag{13.725}$$

Les deux derniers termes sont majorés par $\sum_{n=N+1}^{\infty}\|u_n\|_\infty$ qui, par hypothèse, peut être rendu aussi petit que souhaité en choisissant N assez grand. Nous choisissons donc un N tel que ces deux termes soient plus petits que ϵ. Ce N étant fixé, la fonction $\sum_{n=0}^{N}u_n$ est continue et nous pouvons choisir x' assez proche de x pour que le premier terme soit majoré par ϵ. □

Théorème 13.293.
Si les g_k *sont continues et si* $\sum g_k$ *converge uniformément, alors* $\sum g_k$ *est continue.*

Le corollaire suivant permet de considérer des séries de fonctions indexées par exemple par $\mathbb{Z}$ plutôt que par $\mathbb{N}$.

Corollaire 13.294.
Une famille dénombrable de fonctions continues convergeant normalement converge vers une fonction continue.

Démonstration. Soit I dénombrable. Considérons une famille de fonctions continues $(f_n)_{n\in I}$ telles que la famille $(\|f_i\|_\infty)_{i\in I}$ soit sommable. Le proposition 12.105 nous permet d'utiliser une bijection entre I et $\mathbb{N}$. Le théorème 13.291 s'applique alors. □

Théorème 13.295 (Critère de Weierstrass)**.**
Soit une suite de fonctions $f_k\colon A\to\mathbb{C}$ telles que $|f_k(x)|\leqslant M_k\in\mathbb{R}$, $\forall x\in A$. Si $\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ converge absolument et uniformément.

Démonstration. La convergence normale est facile : l'hypothèse dit que $\|f_k\|_\infty\leqslant M_k$, et donc que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_\infty\leqslant\sum_k M_k<\infty. \tag{13.726}$$

La convergence uniforme est à peine plus subtile. Nous nommons F la fonction somme. Pour tout x et pour tout N, nous avons

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}f_n(x)-F(x)\right\| = \|\sum_{n=N}^{\infty}f_n(x)\| \tag{13.727a}$$
$$\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\|f_k(x)\| \tag{13.727b}$$
$$\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\|f_n\|_\infty. \tag{13.727c}$$

La convergence normale étant assurée, la série $\sum_{n_1}^{\infty}\|f_n\|_\infty$ est finie, ce qui implique que la queue de somme $\sum_{n=N}^{\infty}\|f_n\|_\infty$ tend vers zéro lorsque $N\to\infty$. Pour tout ϵ, il existe donc un N (non dépendant de x) tel que

$$\|\sum_{n=1}^{N}f_n(x)-F(x)\|\leqslant\epsilon. \tag{13.728}$$

En prenant le supremum sur $x\in A$ nous trouvons la convergence uniforme. □

Remarque 13.296.
Il n'y a pas de critère correspondant pour les suites. Il n'est pas vrai que si $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|$ existe, alors $\lim_{n\to\infty}f_n$ existe, comme le montre l'exemple

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1] \text{ et } n \text{ est pair}\\ 1 & \text{si } x\in[1,2] \text{ et } n \text{ est impair}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{13.729}$$

13.31 Permuter limite et dérivée

Pour permuter différentielle et limite, ce sera le théorème 16.6.

Théorème 13.297 ([173, 195])**.**
Soient une suite de fonctions $f_i\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et une fonction $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

(1) f_i est de classe C^1 pour tout i,

(2) $f_i\to f$ simplement,

(3) $f_i'\to g$ uniformément sur tout compact.

Alors

(1) f est de classe C^1,

(2) $f' = g$,

(3) $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

Démonstration. On commence par démonter la convergence uniforme sur les compacts des f_i. Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle compact contenant x. Il suffit de montrer que la suite $(f_i)_i$ restreinte à K est une suite de Cauchy pour la norme uniforme. Soit $\epsilon > 0$. On note ω_i le module de continuité de f_i'. Par le lemme 12.173, il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ nous ayons

$$\omega_i(\delta) \leqslant \omega_g(\delta) + \epsilon. \tag{13.730}$$

Soit $y \in K$, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_n = \frac{x-y}{n+1}$. Pour tout $i \geqslant 0$,

$$f_i(y) = f_i(x) + \sum_{k=0}^{n} \left(f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) \right), \tag{13.731}$$

c'est une somme télescopique. Par le théorème des accroissements finis, il existe pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ un réel $u_{n,i,k} \in [k, (k+1)\alpha_n]$ tel que

$$f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) = \alpha_n f_i'(x + u_{n,i,k}), \tag{13.732}$$

de sorte que

$$f_i(y) = f_i(x) + \alpha_n \sum_{k=0}^{n} f_i'(x + u_{n,i,k}). \tag{13.733}$$

Et pour tout $i, j \geqslant 0$, on obtient

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \left| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \right|. \tag{13.734}$$

Or

$$\left| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \right| \leqslant \left| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k}) \right| + \left| f_i'(x + u_{n,j,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \right| \tag{13.735}$$

$$\leqslant \omega_i(\alpha_n) + \|f_i' - f_j'\|, \tag{13.736}$$

et il suit que pour tout $i, j \geqslant N$,

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |x - y| \left(\omega_i(\alpha_n) + \|f_i' + f_j'\|_K \right) \tag{13.737}$$

$$\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |x - y| \left(\omega_g(\alpha_n) + \epsilon + \|f_i' + f_j'\|_K \right), \tag{13.738}$$

où la dernière inégalité vient de (13.730). Comme g est continue (limite uniforme de fonctions continues) sur un compact, elle est uniformément continue et $\lim_{\delta \to 0} \omega_g(\delta) = 0$. Donc l'inégalité (13.738), avec $n \to \infty$ devient

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |x - y| \left(\epsilon + \|f_i' + f_j'\|_K \right). \tag{13.739}$$

Comme K est borné, $|x - y|$ est borné par une quantité M ne dépendant que de K. En prenant dans (13.739) le supremum par rapport à y, on obtient

$$\|f_i - f_j\|_K \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |x - y| \left(\epsilon + \|f_i' + f_j'\|_K \right). \tag{13.740}$$

Étant donné que $(f_i(x))_i$ est une suite de Cauchy, que $(f_i')_i$ est une suite de Cauchy pour la norme uniforme sur K, il suit que $(f_i|_K)_i$ est une suite de Cauchy. Donc elle converge uniformément vers une limite $f|_K$.

Montrons maintenant que la limite f de la suite $(f_i)_i$ est dérivable et que $f' = g$. Soit $y \in \mathbb{R}$ et soit K un voisinage compact de y. On reprend les notations précédentes. Pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ suffisamment petit $y + \delta \in K$, et pour tout $i \geqslant 0$ on a alors

$$\left|\frac{1}{\delta}\big(f(y+\delta) - f(y)\big) - g(y)\right| \tag{13.741a}$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\left|f(y) - f_i(y)\right| + \frac{1}{\delta}\left|f(y+\delta) - f_i(y+\delta)\right| + \left|\frac{1}{\delta}\left(f_i(y+\delta) - f_i(y)\right) - g(y)\right| \tag{13.741b}$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \left|\frac{1}{\delta}\left(f_i(y+\delta) - f_i(y)\right) - g(y)\right|. \tag{13.741c}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $u \in [y - |\delta|, y + |\delta|]$ tel que

$$\frac{1}{\delta}\left(f_i(y+\delta) - f_i(y)\right) = f_i'(u). \tag{13.742}$$

Il suit,

$$\left|\frac{1}{\delta}\left(f(y+\delta) - f(y)\right) - g(y)\right| \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \left|f_i'(u) - f_i'(y)\right| + \|f_i' - g\| \tag{13.743}$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \omega_i(\delta) + \|f_i' - g\|. \tag{13.744}$$

En prenant $i \to \infty$, on obtient

$$\left|\frac{1}{\delta}\left(f(y+\delta) - f(y)\right) - g(y)\right| \leqslant \omega_g(\delta). \tag{13.745}$$

Or $\lim_{\delta\to 0}\omega_g(\delta) = 0$, donc f est dérivable en y et $f'(y) = g(y)$. □

Théorème 13.298.
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f_k \colon U \to \mathbb{R}$ et f_k de classe C^1. Supposons que f_k converge simplement vers f et que $\partial_i f_k$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction g_i pour $i = 1, \dots, n$. Alors f est de classe C^1 et $\partial_i f = g_i$. De plus, f_k converge vers f uniformément.

13.32 Densité des polynômes

13.32.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Voir le thème 12.

Note : le lemme 13.299 est utilisé dans la démonstration du théorème 13.303 ; c'est pour cela que nous l'avons isolé.

Lemme 13.299.
Il existe une suite de polynômes sur $[0, 1]$ convergeant uniformément vers la fonction racine carrée.

Démonstration. Nous donnons cette suite par récurrence :

$$P_0(t) = 0 \tag{13.746a}$$

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - P_n(t)^2\big). \tag{13.746b}$$

Nous commençons par montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $P_n(t) \in [0,\sqrt{t}]$. Pour P_0, c'est évident. Ensuite nous avons

$$P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = P_n(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \tag{13.747a}$$
$$= \big(P_n(t) - \sqrt{t}\big)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t - P_n(t)^2}{P_n(t) - \sqrt{t}}\right) \tag{13.747b}$$
$$= \big(P_n(t) - \sqrt{t}\big)\left(1 - \frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2}\right) \tag{13.747c}$$
$$\leqslant 0 \tag{13.747d}$$

parce que $\sqrt{t} \leqslant 1$ et $P_n(t) \leqslant 1$ par hypothèse de récurrence.

Nous savons au passage que $P_n(t)$ est une suite réelle croissante parce que $t - P_n(t)^2 \geqslant t - (\sqrt{t})^2 = 0$. La suite $P_n(t)$ est donc croissante et majorée par $\sqrt{t}$; elle converge donc. Les candidats limites sont déterminés par l'équation

$$\ell = \ell + \frac{1}{2}(t - \ell^2), \tag{13.748}$$

dont les solutions sont $\ell = \pm\sqrt{t}$. La suite étant positive, nous avons une convergence ponctuelle de P_n vers la racine carrée. Cette suite étant une suite croissante de fonctions continues sur un compact, convergeant ponctuellement vers une fonction continue, la convergence est uniforme par le théorème de Dini 13.285. □

Lemme 13.300.
Soit K, un compact de $\mathbb{R}$ et f_n une suite de fonctions sur K convergeant uniformément vers f. Soit $g\colon X \to K$ une fonction depuis un espace topologique K. Alors $f_n \circ g$ converge uniformément vers $f \circ g$.

Démonstration. En effet, pour tout $x \in X$ nous avons

$$\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f_n\big(g(x)\big) - f\big(g(x)\big)\| \leqslant \|f_n - f\|_\infty. \tag{13.749}$$

Par conséquent, si $\epsilon\, 0$ est donné, il suffit de choisir n de telle sorte à avoir $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ et nous avons $\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty \leqslant \epsilon$. □

Définition 13.301.
*Nous disons qu'une algèbre A de fonctions sur un espace X **sépare les points** de X si pour tout $x_1 \neq x_2$ il existe $g \in A$ telle que $g(x_1) \neq g(x_2)$.*

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer une forme nettement plus générale du théorème de Stone-Weierstrass. Le théorème 13.303 le donne pour $C(X,\mathbb{C})$ et le théorème 13.302 le donne pour $C(X,\mathbb{R})$.

Théorème 13.302 (Stone-Weierstrass[219])**.**
Soient X, un espace compact et Hausdorff. Soit A, une sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\big(C(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ si et seulement si A sépare les points de X.

Démonstration. Nous allons écrire la démonstration en plusieurs étapes (dont la première est le lemme 13.299). Nous commençons par la première partie, sur les réels.

Première étape Pour tout $x \neq y \in X$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, vu que A sépare les points nous pouvons considérer une fonction $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$ et ensuite poser

$$f(z) = \alpha + \frac{\alpha - \beta}{g(y) - g(x)}\big(g(z) - g(x)\big). \tag{13.750}$$

Les constantes faisant partie de A, cette fonction f est encore dans A.

Seconde étape Pour tout n-uples de fonctions $f_1, \dots, f_n$ dans $\bar{A}$, les fonctions $\min(f_1, \dots, f_n)$ et $\max(f_1, \dots, f_n)$ sont dans $\bar{A}$.

Nous le démontrons pour $n = 2$; le reste allant évidemment par récurrence. Soient $f, g \in \bar{A}$. Étant donné que

$$\max(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} \tag{13.751a}$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2}, \tag{13.751b}$$

if suffit de montrer que si $f \in \bar{A}$ alors $|f| \in \bar{A}$. Si f est nulle, c'est évident ; supposons que $f \neq 0$ et posons $M = \|f\|_\infty \neq 0$. Pour tout $x \in X$ nous avons

$$\frac{f(x)^2}{M^2} \in [0, 1]. \tag{13.752}$$

Nous considérons alors la suite

$$h_n = P_n \circ \frac{f^2}{M^2} \tag{13.753}$$

où P_n est une suite de polynômes convergent uniformément vers la racine carrée (voir lemme 13.299). Le lemme 13.300 nous assure que h_n converge uniformément vers $\frac{|f|}{M}$ dans $C(X, \mathbb{R})$. Étant donné que $\bar{A}$ est également une algèbre, h_n est dans $\bar{A}$ pour tout n et la limite s'y trouve également (pour rappel, la fermeture $\bar{A}$ est celle de la topologie de la convergence uniforme).

Troisième étape Soit $\epsilon > 0$, $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $x \in X$. Il existe une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) & \text{(13.754a)} \\ g_x(y) \leqslant f(y) + \epsilon & \text{(13.754b)} \end{cases}$$

pour tout $y \in X$.

Soit $z \in X \backslash \{x\}$ et une fonction h_z telle que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$. Une telle fonction existe par une des étapes précédentes. Étant donné que f et h_z sont continues, il existe un voisinage ouvert V_z de z sur lequel

$$h_z(y) \leqslant f(y) + \epsilon \tag{13.755}$$

pour tout $y \in V_z$. Nous pouvons sélectionner un nombre fini de points $z_1, \dots, z_n$ tels que les ouverts $V_{z_1}, \dots, V_{z_n}$ recouvrent X (parce que X est compact, de tout recouvrement par des ouverts, nous extrayons un sous recouvrement fini.). Nous posons

$$g_x = \min(h_{z_1}, \dots, h_{z_n}) \in \bar{A}. \tag{13.756}$$

Si $y \in X$, nous sélectionnons le i tel que $h_{z_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon$ et nous avons

$$g_x(y) \leqslant h_{z_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon. \tag{13.757}$$

Étape finale Soit $\epsilon > 0$ et $f \in C(X, \mathbb{R})$. Pour chaque $x \in X$ nous considérons une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) & \text{(13.758a)} \\ g_x(y) \leqslant f(y) + \epsilon & \text{(13.758b)} \end{cases}$$

pour tout $y \in X$. Les fonctions f et g_x sont continues, donc il existe un voisinage ouvert W_x de x sur lequel

$$g_x(y) \geqslant f(y) - \epsilon. \tag{13.759}$$

De ces W_x nous extrayons un sous recouvrement fini de X : $W_{x_1}, \dots, W_{x_m}$ et nous posons

$$\varphi = \max(g_{x_1}, \dots, g_{x_n}) \in \bar{A}. \tag{13.760}$$

Si $y \in X$, il existe un i tel que

$$\varphi(y) \geqslant g_{x_i}(y) \geqslant f(y) - \epsilon. \tag{13.761}$$

La première inégalité est le fait que φ est le maximum des g_{x_k}, et la seconde est le choix de i. Donc pour tout $y \in X$ nous avons

$$f(y) - \epsilon \leqslant \varphi(y) \leqslant f(y) + \epsilon. \tag{13.762}$$

La première inégalité est ce que l'on vient de faire. La seconde est le fait que pour tout i nous ayons $g_{x_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon$; le fait que φ soit le maximum sur les i ne change pas l'inégalité.
Le fait que les inégalités (13.762) soient vraies pour tout $y \in X$ signifie que $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \epsilon$, et donc que $f \in \text{Adh}\big(\text{Adh}(A)\big) = \text{Adh}(A)$.

Tout cela prouve que $C(X, \mathbb{R}) \subset \text{Adh}(A)$. L'inclusion inverse est le fait que $C(X, \mathbb{R})$ est fermé pour la norme $\|.\|_\infty$, étant donné qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Nous pouvons maintenant nous tourner vers l'énoncé concernant $C(X, \mathbb{C})$. □

Théorème 13.303 (Stone-Weierstrass[1])**.**
Soit X, un espace compact et Hausdorff. Soit une sous-algèbre A stable par conjugaison[62] *A de $C(X, \mathbb{C})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\Big(C(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\Big)$ si et seulement si A sépare les points de X.*

Entendons-nous bien : ici A et $C(X, \mathbb{C})$ sont des algèbres à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. La preuve de cette version dans $C(X, \mathbb{C})$ va bien entendu fortement reposer sur le cas dans $C(X, \mathbb{R})$ que nous venons de prouver. Soit donc A, une sous-algèbre vérifiant les hypothèses.

Re(A) ⊂ A Nous prouvons que si $f \in A$, alors $\text{Re}(f) \in A$. En effet, vu que A est stable par conjugaison, si $f \in A$, alors $\bar{f} \in A$ et $f + \bar{f} = 2\,\text{Re}(f) \in A$.

Nous posons

$$A_1 = \{\text{Re}(g) \text{ tel que } g \in A\}. \tag{13.763}$$

A_1 **est une sous-algèbre de** A Le fait que les élément de A_1 soient dans A est déjà fait. Pour le produit, si $g_1, h_1 \in A_1$, alors il existe $h, h \in A$ tels que $g_1 = \text{Re}(g)$ et $h_1 = \text{Re}(h)$. Nous avons

$$(g_1 + ig_2)(h_1 + ih_2) = g_1h_2 - g_2h_2 + i(g_1h_2 + g_2h_1) \in A. \tag{13.764}$$

La partie réelle de cela est dans A_1, donc

$$g_1h_2 - g_2h_1 \in A_1. \tag{13.765}$$

Mais comme $g_1 + ig_2 \in A$, nous avons aussi $g_1 - ig_2 \in A$ et donc

$$(g_1 - ig_2)(h_1 + ih_2) = g_1h_1 + g_2h_2 + i(g_1h_2 - g_2h_1) \in A. \tag{13.766}$$

La partie réelle de cela est dans A_1. Donc

$$g_1h_2 + g_2h_1 \in A_1. \tag{13.767}$$

En comparant avec (13.765), nous avons $g_1h_1 \in A_1$.

62. Pour tout $g \in A$, nous avons $\bar{g} \in A$.

A_1 **sépare les points de** X Soient $x, y \in X$ ainsi que $f \in A$ séparant les points x et y, c'est-à-dire

$$f(x) \neq f(y). \tag{13.768}$$

Supposons $f_1(x) = f_2(y)$. Vu que f sépare, si ce ne sont pas les parties réelles, ce sont les parties imaginaires. C'est-à-dire que $f_2(x) \neq f_2(y)$. Mais d'autre part, $if = f_2 + if_1 \in A$, donc en réalité $f_2 \in A_1$ également.

Le partie A_1 dans $C(X, \mathbb{R})$ vérifie les hypothèses de Stone-Weierstrass réel 13.302, donc A_1 est dense dans $C(X, \mathbb{R})$. Le même raisonnement montre que A_2 est également dense dans $C(X, \mathbb{R})$ [63]

Soit maintenant le vif de la preuve : $f \in C(X, \mathbb{C})$ avec $f = u + iv$, les fonctions u et v étant dans $C(X, \mathbb{R})$. Nous avons des suites $u_k \xrightarrow{unif} u$ et $v_k \xrightarrow{unif} v$ pour des suites (u_k) et (v_k) dans $C(X, \mathbb{R})$.

Par le même genre de raisonnements que nous avons déjà fait, nous nous convainquons que $u_k + iv_k \in A$ pour chaque k. Nous avons

$$\|u_k + iv_k - u - iv\|_\infty \leqslant \|u_k - u\|_\infty + \|v_k - v\|_\infty \tag{13.769}$$

En prenant k assez grand, les deux termes peuvent être rendus plus petit que ϵ. □

Corollaire 13.304 ([1]).
Soit B, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. La partie $C^\infty(B, \mathbb{R}^n)$ est dense dans $\big(C(B, B), \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Soit $f \in C(B, B)$ et $\epsilon > 0$. La fonction donnant la composante i est une fonction $f_i \in C(B, \mathbb{R})$ et il existe donc, par le théorème de Stone-Weierstrass 13.303, une fonction $g_i \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ telle que $\|g_i - f_i\|_\infty \leqslant \epsilon$.

La fonction g dont les composantes sont les g_i ainsi construits vérifie $\|g - f\|_\infty \leqslant n\epsilon$. □

Attention toutefois que rien n'assure que les fonctions construites par le corollaire 13.304 prennent leurs valeurs dans B.

Le théorème suivant est un des énoncés les plus classiques de Stone-Weierstrass. Il découle évidemment du théorème général 13.303 (encore qu'il faut alors bien comprendre qu'il faut traiter la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ séparément). Il en existe cependant une preuve indépendante.

Théorème 13.305.
Soit f, une fonction continue de l'intervalle compact $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|P - f\|_\infty < \epsilon$.

Autrement dit, les polynômes sont denses dans $C[a, b]$ pour la norme uniforme.

13.33 Primitive de fonction continue

Proposition 13.306 ([220]).
Soit un intervalle compact K de $\mathbb{R}$ et une suite (f_n) de fonctions continues sur K telles que $f_n \xrightarrow{unif} f$. Si chacune des fonctions f_n a une primitive sur K alors f également.

Démonstration. Soit $x_0 \in K$ et les primitives F_n choisies [64] pour avoir $F_n' f_n$ et $F_n(x_0) = 0$. Nous allons voir que (F_n) est une suite de Cauchy dans $\big(K, \|.\|_\infty\big)$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in K$. Nous avons

$$\|F_n - F_m\|_\infty \leqslant \|F_n(x) - F_m(x)\| \tag{13.770a}$$
$$= \|(F_n - F_m)(x)\| \tag{13.770b}$$
$$\leqslant \|F_n' - F_m'\|_{[x,x_0]} \|x - x_0\| \tag{13.770c}$$

63. Il me semble même que $A_1 = A_2$ et qu'il y a un raccourcis possible dans cette preuve en exploitant ce fait. Écrivez-moi pour dire ce que vous en pensez.

64. Les fonctions F_n étant dérivables sont continues.

où nous avons utilisé le théorème des accroissements finis 12.151. Vu que $x \in K$ et que K est borné, $\|x - x_0\|$ est majoré par $\text{diam}(K)$ et

$$\|F_n - F_m\|_K \leqslant \|f_n - f_m\|_K \text{diam}(K). \tag{13.771a}$$

Vu que (f_n) est de Cauchy, si n et m sont assez grands, cela tend vers zéro. La suite (F_n) converge donc vers une certaine fonction F.

Le théorème 13.298 nous permet de permuter la limite et la dérivée pour conclure que $F' = f$ et donc que f a une primitive sur K. □

Proposition 13.307 ([220]).
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui admet une primitive sur tout compact de I. Alors f a une primitive sur I.

Démonstration. Nous considérons une suite exhaustive[65] de compacts K_n pour I et $x_0 \in K_0$. Nous considérons aussi F_n la primitive de f sur K_n telle que $F_n(x_0) = 0$ (possible parce que $x_0 \in K_n$ pour tout n). Les fonctions F_n sont des restrictions les unes des autres, et nous pouvons définir

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_n(x) \text{ si } x \in K_n. \end{aligned} \tag{13.772}$$

Nous avons évidemment $F(x_0) = 0$ et nous allons prouver que F est une primitive de f sur I. Soit $x \in I$ vu que I est ouvert, nous pouvons choisir n_0 tel que $x \in \text{Int}(K_{n_0})$. Les fonctions F et F_{n_0} sont égales sur K_n et donc sur un ouvert autour de x. Par conséquent F est dérivable en x et $F'(x) = F'_{n_0}(x) = f(x)$. □

Théorème 13.308.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur I admet une primitive[66] *sur I.*

Démonstration. Sur chaque compact de I, la fonction f est limite uniforme de polynômes[67] (théorème de Stone-Weierstrass 13.305). Donc f est primitivable sur tout compact de I (proposition 13.306) et donc sur I par la proposition 13.307. □

13.34 La fonction puissance

Si x et y sont des réels, définir x^y n'est pas une mince affaire. Pour l'instant nous savons déjà définir x^n lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Voir la définition 1.59 et le thème 32.

Pour la suite nous notons

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = x^\alpha & \text{(13.773a)} \\ g_a(x) = a^x & \text{(13.773b)} \end{cases}$$

pour autant que ces fonctions sont définies[68].

13.34.1 Sur les naturels

Définition 13.309.
La fonction puissance définie sur $\mathbb{N}$ s'étend à $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \tag{13.774}$$

pour $n \geqslant 0$. Cela donne donne donc x^n pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ a l'exception de $x = 0$ lorsque $n < 0$.

65. Voir le lemme 9.59.
66. Définition 13.135.
67. Si tu veux te passer de Stone-Weierstrass, tu peux prouver que toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions affines par morceaux, par exemple. Voir [220].
68. L'objet des pages suivantes est de déterminer pour quelles valeurs de a, α et x nous pouvons trouver des définitions raisonnables pour ces fonctions.

Nous étudions quelques propriétés de cette fonction pour $n > 0$ fixé.

Proposition 13.310.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; nous posons $f_n(x) = x^n$.
Si n est pair,

$$f_n \colon [0, \infty[\to [0, \infty[\tag{13.775}$$

est bijective.
Si n est impair,

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{13.776}$$

est bijective.
Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs morceaux, pas spécialement dans l'ordre auquel on s'attend.

Continuité Soit $x \in \mathbb{R}$. En vertu de 13.63 nous allons prouver que $\lim_{\epsilon\to 0} f_n(x+\epsilon) = f_n(x)$. Pour cela nous utilisons la formule du binôme 3.40 avec $x, h > 0$:

$$f_n(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \tag{13.777}$$

Nous fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Calcul :

$$|f_n(x_0+h) - f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k| \tag{13.778a}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^k \tag{13.778b}$$

$$= h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^{k-1} \tag{13.778c}$$

$$\leqslant h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k}. \tag{13.778d}$$

Justifications :

— Le terme $k = 0$ est égal à $x^n = f_n(x)$ parce que $\binom{n}{0} = 1$.
— Dans la somme nous avons majoré $|h|$ par 1, opération justifiée par le fait que nous ayons dans l'idée de faire $h \to 0$.

Nous avons donc

$$\lim_{h\to 0} |f_n(x_0+h) - f_n(x)| \leqslant \lim_{h\to 0} h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} = 0. \tag{13.779}$$

D'où la continuité de f_n en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Pour n pair ou impair, bijection sur les positifs Ceci sera déjà le résultat complet pour les n pairs, et a moitié du résultat pour les n impairs.

Stricte croissance Soit $n \neq 0$ dans $\mathbb{N}$. Nous commençons par prouver que f_n est strictement croissante sur $[0, \infty[$. Nous repartons de la formule du binôme, mais cette fois, nous séparons les termes $k = 0$ et $k = n$ des autres (si $n = 1$, il y a un peu de réécriture) en tenant compte de $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$:

$$f_n(x+h) = x^n + h^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k > x^n = f_n(x). \tag{13.780}$$

Vous noterez que l'inégalité est stricte même si $n = 1$.
Vu que nous avons stricte monotonie, le théorème 13.61(2) nous dit que

$$f_n \colon [0, \infty[\to f_n\big([0, \infty[\big) \tag{13.781}$$

est une bijection.

Bijection Nous prouvons que $f_n([0,\infty[) = [0,\infty[$. Si $x > 0$ alors $f_n(x) > 0$, cela prouve une inclusion.

Pour l'autre inclusion nous savons que $f_n(x) > x$ dès que $x > 1$. Donc $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$. Si $y \in [0,\infty[$, alors il existe x_0 tel que $f_n(x_0) > y$. Étant donné que $f_n(0) = 0$ et que nous avons déjà prouvé que f_n était continue (proposition 13.310), le théorème des valeurs intermédiaires 13.50 nous indique l'existence de $x_1 \in [0, x_0[$ tel que $f_n(x_1) = y$.

Nous avons prouvé que pour tout n, la fonction

$$f_n : [0,\infty[\to [0,\infty[\tag{13.782}$$

est une bijection.

Pour n impair Nous montrons à présent que si n est impair, alors

$$f_n :]-\infty, 0] \to]-\infty, 0] \tag{13.783}$$

est une bijection.

Tout se base sur le fait que si $x > 0$ alors $f_n(-x) = -f_n(x)$. Le fait que (13.782) soit injective et surjective montre alors tout de suite le fait que (13.783) soit également injective et surjective.

□

Vous noterez que la continuité de f_n démontrée dans la proposition 13.310 est indépendant de la proposition 13.71 qui sera invoquée plus tard pour définir a^x lorsque $a > 0$ dans $\mathbb{R}$.

13.34.2 Sur les rationnels, racines

L'existence, pour tout réel $a \geqslant 0$, d'une réel r tel que $r^2 = a$ est déjà faite en la proposition 1.130.

Définition 13.311 (Exposant rationnels)**.**
La proposition 13.310 nous dit entre autres que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_n : [0,\infty[&\to [0,\infty[\\ x &\mapsto x^n \end{aligned} \tag{13.784}$$

est bijective. Nous définissions alors, pour $a \in [0,\infty[$,

$$a^{1/n} = f_n^{-1}(a). \tag{13.785}$$

Autrement dit, le nombre $a^{1/n}$ est l'unique solution positive de

$$x^n = a. \tag{13.786}$$

13.312.
Nous ne définissons pas $a^{1/n}$ pour $a < 0$, du moins pas encore. Vu que f_3 est bijective sur $\mathbb{R}$, il serait tentant de définir $(-1)^{1/3} = f_3^{-1}(-1) = -1$.

Cela causera un certain nombre de problèmes plus tard vu que nous aurons envie de deux choses en même temps :

— d'une part $\ln(-1) = i\pi$,

— d'autre part, $a^x = e^{x\ln(a)}$.

De cette façon, nous devrions avoir

$$(-1)^{1/3} = e^{i\pi/3}, \tag{13.787}$$

qui est un nombre complexe non réel. Voici un exemple de ce que ça donne avec Sage :

```
sage: a=(-1)**(1/3)
sage: a.real_part()
1/2
sage: a.imag_part()
1/2*sqrt(3)
```

tex/sage/sageSnip019.sage

Définition 13.313 (Racince)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons $\sqrt[n]{x} = f_n^{-1}(x)$. Lorsque n est pair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, et lorsque n est impair, elle est définie sur tout $\mathbb{R}$.

13.314.
Notons que les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \mapsto x^{1/3}$ ne sont pas les mêmes : la première est définie sur tout $\mathbb{R}$ et donne des valeurs réelles tandis que la seconde n'est (pour l'instant) définie que sur les positifs, et donnera (quand on l'aura définie par l'exponentielle) des nombres complexes sur les négatifs.

En suivant cette convention, c'est-à-dire en réservant la notation $\sqrt{\ }$ pour l'inverse de f_2, nous ne devrions pas écrire des choses comme « $\sqrt{-1} = i$ », mais plutôt « $(-1)^{1/2} = i$ ». En effet, $\sqrt{-1}$ n'est pas défini et ne sera jamais défini alors que $(-1)^{1/2}$ n'est pas encore défini, mais sera défini par

$$(-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(-1)} = e^{i\pi/2} = i. \tag{13.788}$$

En résumé, nous avons les fonctions suivantes :

(1) $\sqrt[n]{\ }: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n est impair,
(2) $\sqrt[n]{\ }: [0, \infty[\to [0, \infty[$ si n est pair,
(3) $x^{1/n}: [0, \infty[\to [0, \infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cependant nous n'hésiterons pas à utiliser la notation $\sqrt{x}$ pour $x^{1/2}$ même lorsque x est négatif, parce c'est une notation très pratique. Il faut garder en tête que cette façon de faire est incohérente parce qu'elle inciterait à penser que $\sqrt[3]{-1} = e^{i\pi/3}$ au lieu de $\sqrt[3]{-1} = -1$.

Pour toute la suite de cette section, nous allons considérer a^x uniquement pour $a > 0$.

Définition 13.315.
Pour $m, n \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}, \tag{13.789}$$

ce qui définit la fonction puissance sur $\mathbb{Q}^+$. Enfin nous posons

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \tag{13.790}$$

lorsque $q \in \mathbb{Q}^+$.

Et avec tout ça, lorsque $a > 0$ nous avons défini a^q pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Nous allons souvent noter la définition (13.789) sous la forme

$$f_{m/n}(x)^n = x^m. \tag{13.791}$$

Lemme 13.316 ([1])**.**
Pour $a > 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p. \tag{13.792}$$

Démonstration. Nous divisons la preuve en fonction de la positivité du numérateur et du dénominateur.

Numérateur et dénominateurs positifs Nous commençons avec $p, q \in \mathbb{N}$. La première égalité est la définition 13.311. Pour la seconde, la définition de $(a^p)^{1/q}$ est d'être le $x > 0$ tel que

$$x^q = a^p. \tag{13.793}$$

La définition de $a^{1/q}$ est d'être le $y > 0$ tel que

$$y^q = a. \tag{13.794}$$

Ce y vérifie donc aussi $y^{pq} = a^p$ et donc $(y^p)^q = a^p$. Autrement dit, $y^p = x$, c'est-à-dire exactement

$$(a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}. \tag{13.795}$$

Le lemme est prouvé dans le cas où $p, q \in \mathbb{N}$.

Numérateur et dénominateur négatifs Si p et q sont tous les deux négatifs, nous remarquons que $p/q = (-p)/(-q)$ et nous sommes dans le même cas qu'avant.

Numérateur négatif, dénominateur positif Pour simplifier les notations nous supposons toujours $p, q \in \mathbb{N}$ mais nous considérons $a^{(-p)/q}$. Nous avons d'une part :

$$a^{(-p)/q} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p}. \tag{13.796}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé au dénominateur le résultat dans le cas positif.
Et d'autre part nous avons :

$$(a^{-p})^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^p\right)^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/q}\right)^p = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p} \tag{13.797}$$

où nous avons utilisé le résultat avec $1/a$ en guise de a.

Numérateur positif, dénominateur négatif Nous traitons maintenant $a^{p/(-q)}$. Nous avons d'une part

$$a^{p/(-q)} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^p)^{1/q}} = (a^p)^{-(1/q)} = (a^p)^{1/(-q)}. \tag{13.798}$$

Et d'autre part :

$$a^{p/(-q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \left(a^{-(1/q)}\right)^p = (a^{1/(-q)})^p. \tag{13.799}$$

□

Le lemme suivant montre que la définition sur $\mathbb{Q}^-$ est cohérente avec celle sur $\mathbb{Q}^+$, au sens où finalement nous retrouvons que $a^{m/n}$ vérifie $x^n = a^m$ quel que soient les signes de m et n.

Lemme 13.317 ([1]).
Le nombre $y = a^{-m/n}$ vérifie l'équation $y^{-n} = a^m$

Démonstration. Nous posons $x = a^{m/n}$, c'est-à-dire $x^n = a^m$. Nous avons, par définition $y = a^{-m/n} = \frac{1}{x}$. Alors

$$y^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = x^n = a^m, \tag{13.800}$$

donc c'est bon. □

Lemme 13.318 ([1]).
Pour $a > 0$ et $q, q' \in \mathbb{Q}$ nous avons

$$a^q a^{q'} = a^{q+q'}. \tag{13.801}$$

Démonstration. Nous mettons q et q' au même dénominateur. Soient $q = s/c$ et $q' = r/c$ avec $s, r \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$. En utilisant les égalités du lemme 13.316 nous trouvons

$$a^{s/c}a^{r/c} = (a^{1/c})^s(a^{1/c})^r = (a^{1/c})^{s+r} = a^{(s+r)/c} = a^{q+q'}. \tag{13.802}$$

□

Lemme 13.319 ([1]).
La fonction puissance prend les valeurs suivantes.

(1) Si $a = 1$ alors $a^q = 1$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

(2) Si $a > 1$ alors
- *$a^q > 1$ si $q > 0$*
- *$a^q < 1$ si $q < 0$*
- *$a^0 = 1$.*

(3) Si $a < 1$ alors
- *$a^q < 1$ si $q > 0$*
- *$a^q > 1$ si $q < 0$*
- *$a^0 = 1$.*

Démonstration. Si $a = 1$ alors $a^k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{n/m}$ est solution de $x^m = a^n = 1$, donc $x = 1$. En ce qui concerne les puissances négatives, $1/1 = 1$.

Si $a > 1$ alors $a^k > 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus pour $q > 0$ nous avons $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $a^{m/n}$ est solution de $x^m = a^n > 1$. Or pour $x \leqslant 1$ nous avons $x^m \leqslant 1$, donc la solution à $x^m = a^n$ vérifie forcément $x > 1$.

Toujours avec $a > 1$, si $q < 0$ nous posons $q = -q'$ avec $q' > 0$. Alors

$$a^q = q^{-q'} = \frac{1}{a^{q'}}. \tag{13.803}$$

Mais $a^{q'} > 1$, donc l'inverse est inférieur à 1.

En ce qui concerne les cas $a < 1$, ils sont obtenus en posant $b = 1/a$ et en calculant

$$a^q = \left(\frac{1}{b}\right)^q = \frac{1}{b^q} = b^{-q}. \tag{13.804}$$

□

Proposition 13.320 ([1]).
Si $a > 1$ et si $M > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n > M$.

Démonstration. Soit $a = 1 + h$. Alors en utilisant la formule du binôme,

$$a^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k}. \tag{13.805}$$

Tous les termes de la somme sont strictement positifs. Prenons le terme $k = n - 1$. Il vaut

$$\binom{n}{n-1} h = nh. \tag{13.806}$$

Donc $a^n \geqslant nh$, donc oui, cela peut être rendu arbitrairement grand avec n sans toucher à a. □

Proposition 13.321 ([1]).
Pour $a > 0$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q. \end{aligned} \tag{13.807}$$

(1) Si $a \in]0,1[$ alors g_a est décroissante et

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = 0, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = \infty. \tag{13.808a}$$

(2) Si $a > 1$ alors g_a est croissante et

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = \infty, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = 0. \tag{13.809a}$$

Démonstration. Nous prouvons le cas $a > 1$. L'autre cas s'en déduit en posant $b = 1/a$. Pour la croissance, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. En utilisant le lemme 13.318, nous avons

$$a^{q+r} = a^q a^r > a^q \tag{13.810}$$

parce que $a^r > 1$ par le lemme 13.319.

En ce qui concerne la limite $q \to \infty$, la fonction g_a est croissante et non bornée par la proposition 13.320. Donc sa limite est ∞.

Pour la limite $q \to -\infty$, nous avons

$$\lim_{q\to-\infty} a^q = \lim_{q\to\infty} a^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{a^q} = 0. \tag{13.811}$$

□

Proposition 13.322 ([1])**.**
Soit $a > 0$. Nous avons

$$\lim_{q\to 0} a^q = 1. \tag{13.812}$$

Notons que cette limite est une limite dans $\mathbb{Q}$ parce que nous n'avons même pas encore défini a^x lorsque x est irrationnel.

Démonstration. Nous notons, comme à l'accoutumée, $g_a(x) = a^x$. Soit une suite $x_k \to 0$ (avec $x_k \neq 0$ pour tout k). En définissant y_k par $x_k = 1/y_k$ nous savons que a^{1/y_k} est la solution de $x^{y_k} = a$.

Nous posons $t_k = a^{x_k}$ et notre but est de prouver que $t_k \to 1$. Pour tout k nous avons la relation

$$t_k^{y_k} = a. \tag{13.813}$$

Soit $s > 1$. Il existe un $M > 0$ tel que $y_k > M$ implique $s^{y_k} > a$ (proposition 13.320). Donc dès que $y_k > M$ nous avons $t_k < s$.

De la même manière, si $r < 1$, il existe un $R > 0$ tel que $y_k > R$ implique $r^{y_k} < a$. Donc dès que $y_k > R$ nous avons $t_k > r$.

Soit donc un voisinage $]r, s[$ de 1 (avec $r < 1$ et $s > 1$). Nous avons les nombres M et R correspondant et nous posons $L = \max\{M, R\}$. Soit K tel que $k > K$ implique $y_k > L$. Alors pour $k > K$ nous avons aussi $t_k < s$ et $t_k > r$, c'est-à-dire $t_k \in]r, s[$.

Cela prouve que $t_k \to 1$.

Donc pour toute suite $x_k \to 0$ nous avons $g_a(x_k) \to 1$. Par le critère séquentiel de la limite (proposition 9.9) nous avons $\lim_{x\to 0} g_a(x) = 1$. □

Lemme 13.323.
Soit $a > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{13.814}$$

est continue.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{Q}$ et une suite $x_k \to 0$ (toujours dans $\mathbb{Q}$) et utilisons le lemme 13.318 :

$$a^{x+x_k} = a^x a^{x_k}. \tag{13.815}$$

Cela est, dans $\mathbb{R}$, le produit entre une constante (a^x) et une suite. La limite est donc le produit de cette constante et la limite de la suite (si elle existe). Par la proposition 13.322 nous avons la limite $a^{x_k} \to 1$, et donc

$$\lim_{k\to\infty} a^{x+x_k} = a^x, \tag{13.816}$$

ce qui prouve la continuité (caractérisation séquentielle, proposition 7.74) de g_a. □

Proposition 13.324.
Soit $a > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q \end{aligned} \tag{13.817}$$

est Cauchy-continue.

Démonstration. En quelque étapes.

Pour $a > 1$ Avant de nous lancer dans la preuve directe, nous prouvons une petite formule. Soit $\epsilon > 0$. Vu que, par la proposition 13.322, $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| < \epsilon$.

Soient maintenant $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $|p - q| < \delta$. En utilisant de plus la définition (13.790) et la formule du lemme 13.318,

$$|g_a(q) - g_a(p)| = |g_a(q)| \left|1 - \frac{g_a(p)}{g_a(q)}\right| = |g_a(p)||1 - g_a(p - q)| \leqslant |g_a(q)|\epsilon. \tag{13.818a}$$

Nous y allons pour la preuve directe. Soit une suite de Cauchy (q_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous devons prouver que la suite $n \mapsto g_a(q_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$.

La suite (q_n) étant de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, elle l'est également dans $\mathbb{R}$, elle est bornée parce que convergente vu que $\mathbb{R}$ est complet [69]. Vu que g_a est croissante [70] et que (q_n) est bornée, il existe M tel que $|g_a(q_n)| \leqslant M$ pour tout n.

Nous considérons δ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| \leqslant \epsilon$, ainsi que N tel que $i, j > N$ implique $|q_i - q_j| \leqslant \delta$ (là nous utilisons le fait que (q_n) est de Cauchy). Pour de tels N, i, j nous avons

$$|g_a(q_i) - g_a(q_j)| \leqslant M\epsilon. \tag{13.819}$$

Donc la suite $g_a(g_n)$ est de Cauchy.

Pour $a = 1$ La fonction g_a est constante.

Pour $0 \leqslant a < 1$ J'imagine que ça se fait comme $a > 1$, mais en renversant quelque inégalités [71].

□

13.325.
L'ingrédient magique qui fait fonctionner la proposition 13.324 est le fait que $g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y)$ couplé au fait que $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$. C'est cela qui débloque la situation pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ en utilisant le lemme 13.71.

Le chemin suivit par [221] pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ est un peu différent : il définit $a^x = \sup\{a^q \text{ tel que } q < x, q \in \mathbb{Q}\}$. La preuve que cette définition donne $x \mapsto a^x$ continue sur $\mathbb{R}$ repose, elle aussi, essentiellement sur le fait que $\lim_{q\to 0} a^q = 1$.

Il y a donc une certaine justice.

69. Théorème 9.39.
70. Proposition 13.321(2).
71. Je n'ai pas essayé. Faites-le et écrivez-moin pour me dire si ça marche.

Proposition-définition 13.326 (Fonction puissance[1]).
Si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned} \tag{13.820}$$

est Cauchy-continue par la proposition 13.324. Si $x \in \mathbb{R}$ nous définissons

$$a^x = \tilde{g}_a(x) \tag{13.821}$$

où $\tilde{g}_a$ est l'extension de g_a donnée par le lemme 13.71.

Nous allons la noter g_a également, et écrire a^x la valeur de g_a même lorsque x n'est pas un rationnel.

Proposition 13.327 ([1]).
Quelque propriétés de la fonction puissance.

(1) Pour $a > 0$, la fonction $g_a \colon x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour $a > 1$, la fonction $g_a \colon x \mapsto a^x$ est croissante.

(3) Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons

$$a^x a^y = a^{x+y}. \tag{13.822}$$

En particulier,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{13.823}$$

Démonstration. La continuité de $x \mapsto a^x$ est par construction. Le point (1) est fait.

Pour le point (2), lorsque $a > 1$, la fonction $f_a \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est croissante (proposition 13.321). Donc par la proposition 13.73, la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Et enfin pour le point (3), il faut faire un peu plus attention. Soient des suites $x_i \to x$ et $y_i \to y$ dans $\mathbb{Q}$. Calculons :

$$\begin{aligned} a^x a^y &= (\lim_i a^{x_i}) a^y && \text{(13.824a)} \\ &= \lim_i \left(a^{x_i} a^y \right) && \text{(13.824b)} \\ &= \lim_i \left(\lim_k a^{x_i} a^{y_k} \right) && \text{(13.824c)} \\ &= \lim_i \left(\lim_k a^{x_i + y_k} \right) && \text{(13.824d)} \\ &= \lim_i a^{x_i + y} && \text{(13.824e)} \\ &= a^{x+y}. && \text{(13.824f)} \end{aligned}$$

Justifications :

— Pour 13.824a. Définition de a^x lorsque $x \in \mathbb{R}$.

— Pour 13.824b. Nous entrons le nombre a^y dans la limite. Entrer un facteur dans une limite convergente dans $\mathbb{R}$ est un acte anodin.

— Pour 13.824c. Définition de a^y, et renter le nombre réel a^{x_i} dans la limite sur k.

— Pour 13.824d. Utilisation du lemme 13.318, valable pour $x_i, y_k \in \mathbb{Q}$.

— Pour 13.824e. Pour i fixé, la suite $k \mapsto x_i + x_k$ est une suite de rationnels qui converge vers le réel $x_i + y$. Par définition 13.326 de la fonction puissance nous avons alors $\lim_k a^{x_i + y_k} = a^{x_i + y}$.

— Pour 13.824f. La suite de réels $i \mapsto x_i + y$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel $x + y$. Par la continuité de $t \mapsto a^t$ (ça fait partie du lemme 13.71 définissant la fonction puissance sur $\mathbb{R}$) nous avons $\lim_i a^{x_i + y} = a^{x+y}$.

Vous remarquerez que les limites sur k et sur i ne s'enlèvent pas tout à fait avec la même justification. Nous aurions pu invoquer la continuité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto a^t$ pour les deux limites. Mais cette continuité, dans le cas d'une suite purement constituée de rationnels, est la définition de la prolongation vers $\mathbb{R}$. □

Lemme 13.328.
Soient $a, b > 0$. Si $1 < x < y$ alors

$$a - b < ay - bx. \tag{13.825}$$

Démonstration. Nous posons $y = x + s$ avec $s > 0$. Alors

$$ay - bx = a(x + s) - bx = (a - b)x + as > (a - b)x > a - b \tag{13.826}$$

parce que $as > 0$ et $x > 1$. □

Proposition 13.329 ([1]).
Pour $q > 0$ dans $\mathbb{Q}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_q\colon \mathbb{Q}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^q \end{aligned} \tag{13.827}$$

est strictement croissante.

Démonstration. Division selon la généralité de q.

Si q est entier positif Soit $q = n \in \mathbb{N}$. Si $s > 0$ alors l'inégalité $(x+s)^n > x^n$ découle du binôme de Newton de la proposition 3.40.

Si q est rationnel Soient un rationnel $q = m/n$ et un nombre strictement positif s. Nous avons, par la définition 13.311 sous la forme (13.791) :

$$f_{m/n}(x + s)^n = (x + s)^m > x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{13.828}$$

Nous avons utilisé la stricte croissance de $x \mapsto x^m$. Cela donne

$$f_{m/n}(x + s)^n > f_{m/n}(x)^n. \tag{13.829}$$

En utilisant encore la stricte croissance de $x \mapsto x^n$, nous avons le résultat.

□

Corollaire 13.330.
Soient $1 < b < a$ dans $\mathbb{R}$ et des rationnels strictement positifs $p < q$. Alors

$$a^p - b^p < a^q - b^q \tag{13.830}$$

Démonstration. Nous notons $q = p + r$ avec $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Par la proposition 13.329,

$$a^r > b^r. \tag{13.831}$$

Cela nous permet d'utilise le lemme 13.328 pour écrire

$$a^p - b^p < a^p a^r - b^p b^r = a^q - b^q. \tag{13.832}$$

□

Proposition 13.331 ([1]).
Soient $a, b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha. \tag{13.833}$$

Démonstration. Nous supposons que c'est bon pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pour les autres, nous donnons plus de détails.

$\underline{\mathbb{Q}^+}$ Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Si $a^{m/n} = x$ et $b^{m/n} = y$, alors

$$x^n = a^m \tag{13.834a}$$
$$y^n = b^m \tag{13.834b}$$

par (13.791). Nous multiplions (13.834a) par y^n à gauche et par b^m à droite : $x^n y^n = a^m b^m$. En tenant compte du résultat pour $\mathbb{N}$, nous avons

$$(xy)^n = (ab)^m, \tag{13.835}$$

ce qui signifie que le nombre xy est $(ab)^{m/n}$.

Pour $\underline{\mathbb{Q}^-}$ Soit $q \in \mathbb{Q}^+$, nous avons le calcul

$$a^{-q}b^{-q} = \frac{1}{a^q b^q} = \frac{1}{(ab)^q} = (ab)^{-q}. \tag{13.836}$$

Pour $\underline{\mathbb{R}}$ Soit une suite de rationnels $\alpha_i \to \alpha$. Nous avons

$$a^\alpha b^\alpha = \big(\lim_i a^{\alpha_i}\big)\big(\lim_j b^{\alpha_j}\big) = \lim_i \big(a^{\alpha_i} b^{\alpha_i}\big) = \lim_i (ab)^{\alpha_i} = (ab)^\alpha. \tag{13.837}$$

Justifications :

— la proposition 8.14 pour le produit des limites,
— le résultat dans $\mathbb{Q}$ que nous venons de prouver,
— la définition de $(ab)^\alpha$ comme limite de $(ab)^{\alpha_i}$.

□

Pour rappel, la proposition suivantes, dans le cas de $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est la proposition 13.329.

Proposition 13.332 ([1]).
Pour $\alpha > 0$, la fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon]0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{13.838}$$

est strictement croissante.

Aussi, la fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon]-\infty, 0[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{13.839}$$

est strictement décroissante.

Démonstration. Nous rappellons que le cas $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est déjà traité par la proposition 13.329. Soient $x \in]0, \infty[$ et $s > 0$. Nous allons montrer que $f_\alpha(x + s) - f_\alpha(x) > 0$. Pour cela nous décomposons en plusieurs cas.

$\underline{x > 1}$ Par la proposition 1.117, nous considérons une suite strictement croissante de rationnels strictement positifs $\alpha_i \to \alpha$. Pour tout i nous avons $\alpha_i > \alpha_0$.

En utilisant la stricte croissance de f_{α_0} et le lemme 13.319(2), nous avons les inégalités $1 < x^{\alpha_0} < (x + s)^{\alpha_0}$, et en particulier

$$0 < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{13.840}$$

De plus nous avons $1 < x < x + s$ et $\alpha_0 < \alpha_i$ pour tout i. Donc le corollaire 13.330 s'applique et nous avons, pour tout i :

$$0 < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} < (x + s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}. \tag{13.841}$$

C'est le moment de passer à la limite $i \to \infty$. La seconde inégalité devient non stricte, mais la première reste :

$$0 < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} \leqslant (x + s)^\alpha - x^\alpha. \tag{13.842}$$

Nous avons donc bien la stricte croissance de f_α sur $]1, \infty[$.

$\underline{x \leqslant 1}$ Nous choisissons encore $\alpha_i \to \alpha$ strictement croissante dans $\mathbb{Q}$. Pour chaque i, nous avons encore

$$(x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} > 0. \tag{13.843}$$

Le passage à la limite change l'inégalité stricte en inégalité large, et ne permet donc pas de conclure immédiatement. Nous devons donc ruser. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k(x+s) > 1$ et $kx > 1$ (existence parce que $\mathbb{R}$ est archimédien, proposition 1.108). Nous avons :

$$\big(k(x+s)\big)^{\alpha} - (kx)^{\alpha} > 0 \tag{13.844}$$

par la partie « $x > 1$ » que nous venons de prouver. Grâce à la proposition 13.331 nous pouvons factoriser k^{α} :

$$0 < \big(k(x+s)\big)^{\alpha} - (kx)^{\alpha} = k^{\alpha}\big((x+s)^{\alpha} - x^{\alpha}\big). \tag{13.845}$$

Vu que $k^{\alpha} > 0$, cela implique $(x+s)^{\alpha} - x^{\alpha} > 0$, ce qu'il fallait.

Nous avons fini de prouver que la fonction f_{α} était strictement croissante sur $]0,\infty[$. En ce qui concerne la fonction f_{α} sur $]-\infty,0[$, nous avons, pour $x > 0$ que

$$f_{\alpha}(-x) = \frac{1}{f_{\alpha}(x)}, \tag{13.846}$$

et donc stricte décroissance. □

Nous prouvons à présent que f_{α} est localement injective ; nous en avons besoin pour prouver la continuité. Or cette continuité est nécessaire à prouver que f_{α} est localement bijective. Donc nous ne pouvons pas énoncer la bijectivité ici. Ce sera la proposition 13.336.

Proposition 13.333.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Il existe un voisinage V de x sur lequel

$$f_{\alpha} : V \to f_{\alpha}(V) \tag{13.847}$$

est injective.

Démonstration. Soit $x > 0$; nous considérons un voisinage V de x inclu à $]0,\infty[$. Soit $y \in V$; pour fixer les idées nous supposons $y < x$. Par la stricte croissance de f_{α} sur $]0,\infty[$ (proposition 13.332), nous avons $f_{\alpha}(y) < f_{\alpha}(x)$ et en particulier $f_{\alpha}(x) \neq f_{\alpha}(y)$.

Le cas $x < 0$ se traite de façon analogue, avec la stricte décroissance de f_{α} sur $]-\infty,0[$. □

Notons que les voisinages sur lesquels f_{α} est injective sont assez grands. Ils peuvent être toute une demi-droite, si l'on veut.

Lemme 13.334.
Soient $\alpha > 0$, une suite de rationnels strictement décroissante $\alpha_i \to \alpha$ ainsi que les fonctions

$$\begin{aligned} f_{\alpha_i} :]1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{13.848}$$

La famille $\{f_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinue[72].

Démonstration. Soient $x > 1$, et $\alpha > 0$. Nous allons montrer que $\{f_{\alpha_i}\}$ est équicontinue en x. Soit s tel que $1 < x < x+s$; le corollaire 13.330 nous enseigne que

$$(x+s)^p - x^p < (x+s)^q - x^q \tag{13.849}$$

dès que $p < q$. En particulier, f_p étant croissante par la proposition 13.332,

$$0 < (x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{13.850}$$

72. Définition 9.69.

Soit $\epsilon > 0$ et δ tel que $s < \delta$ implique $|(x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon$. Alors nous avons aussi, pour de tels σ et s :

$$|(x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| < |(x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon. \tag{13.851}$$

En procédant de même pour $s < 0$, nous trouvons bien que

$$|y^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| \leqslant \epsilon \tag{13.852}$$

pour tout $y \in B(x, \delta)$.

Cela signifie que $\{f_i\}$ est équicontinue. □

Proposition 13.335 ([1]).
Soit $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{13.853}$$

est continue (sauf pour $x = 0$ si $\alpha < 0$).

Démonstration. Nous allons subdiviser quelque cas.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ Nous supposons que ce cas va bien.

Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous avons :

$$f_{m/n}(x)^n = x^m \tag{13.854a}$$
$$f_{m/n}(x+\epsilon)^n = (x+\epsilon)^m. \tag{13.854b}$$

L'équation (13.854b) s'écrit aussi bien sous la forme

$$f_n\big(f_{m/n}(x+\epsilon)\big) = (x+\epsilon)^m. \tag{13.855}$$

En prenant la limite,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \big[f_n\big(f_{m/n}(x+\epsilon)\big)\big] = x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{13.856}$$

Vu que f_n est continue, nous pouvons la permuter avec la limite dans le membre de gauche tout en écrivant $f_{m/n}(x)^n = f_n\big(f_{m/n}(x)\big)$ dans le membre de droite :

$$f_n\big[\lim_{\epsilon \to 0} f_{m/n}(x+\epsilon)\big] = f_n\big(f_{m/n}(x)\big). \tag{13.857}$$

La fonction f_n étant injective dans un voisinage autour de x (proposition 13.333),

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_{m/n}(x+\epsilon) = f_{m/n}(x), \tag{13.858}$$

ce qui est la continuité de $f_{m/n}$ en x.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ Nous prouvons séparément le cas $x < 1$ et le cas $x \geqslant 1$. Commençons par $x \in]1, \infty[$.

Soit une suite $\alpha_i \to \alpha$ strictement décroissante dans $\mathbb{Q}^+$. Le lemme 13.334 nous dit que l'ensemble de fonctions $\{f_{\alpha_i} \colon]1, \infty[\to \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est équicontinu. La convergence simple $f_{\alpha_i} \to f_\alpha$ étant par définition, la proposition 9.70 nous dit que la fonction $f_\alpha \colon]1, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.

Soit maintenant $x \in]0, 1]$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kx > 1$, $k(x/2) > 1$ et $k^\alpha > 1$ (si vous pensez bien, seule la première condition est utile).

Nous considérons ϵ tel que $x + \epsilon > x/2$; de toutes façons nous comptions faire $\epsilon \to 0$. Nous avons :

$$\big|(x+\epsilon)^\alpha - x^\alpha\big| \leqslant k^\alpha \big|(x+\epsilon)^\alpha - x^\alpha\big| = \big|[k(x+\epsilon)]^\alpha - (kx)^\alpha\big|. \tag{13.859}$$

Nous prenons le δ qui correspond à ϵ en kx dans la continuité de f_α déjà démontée pour $kx > 1$. Alors si $\epsilon < \delta$ nous avons

$$\big|(x+\epsilon)^\alpha - x^\alpha\big| \leqslant \epsilon. \tag{13.860}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^-$ Si $\alpha > 0$, la fonction $f_{-\alpha}$ est donnée par

$$f_{-\alpha}(x) = \frac{1}{f_\alpha(x)} \tag{13.861}$$

et est donc continue (sauf en $x = 0$ où elle n'existe pas).

□

Proposition 13.336.
Soit $\alpha > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon [0, \infty[&\to [0, \infty[\\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{13.862}$$

est bijective.

Proposition 13.337 ([1])**.**
Soient $a > 0$ ainsi que $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}. \tag{13.863}$$

Démonstration. Nous découpons en fonction de la nature de x et y.

x rationnel, y naturel Si $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors la formule

$$(a^q)^n = a^{nq} \tag{13.864}$$

découle seulement d'une récurrence sur la formule 13.822.

$x, y \in \mathbb{Q}$ Soient $y = m/n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Q}$. Nous avons, en utilisant la partie déjà démontrée et le lemme 13.316,

$$(a^q)^p = (a)^{m/n} = \big((a^q)^m\big)^{1/n} = (a^{mq})^{1/n} = a^{mq/n} = a^{pq}. \tag{13.865}$$

x, y irrationnels Soient des suites des rationnels $x_i \to x$ et $y_i \to y$. En utilisant les définitions,

$$(a^x)^y = \lim_i (a^x)^{y_i} = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i}. \tag{13.866}$$

Fixons un i pour commencer. Nous avons, par la continuité de f_{y_i} (proposition 13.335)

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = f_{y_i}\big(\lim_j a^{x_j}\big) = \lim_j \big(f_{y_i}(a^{x_j})\big) = \lim_j a^{x_j y_i}. \tag{13.867}$$

Nous avons utilisé le résultats déjà démontré dans le cas des rationnels. La suite $j \mapsto x_j y_i$ est une suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers le réel xy_i, donc la limite sur j redonne la fonction puissance :

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_j a^{x_j y_i} = a^{xy_i}. \tag{13.868}$$

Le résultat découle maintenant de la prise de limite dans (13.866) qui revient à prendre la limite $i \to \infty$ de l'expression dans (13.868) :

$$(a^x)^y = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_i a^{xy_i} = a^{xy}. \tag{13.869}$$

□

Le lemme suivant montre en gros que x^y croît plus rapidement en y qu'en x.

Lemme 13.338.
Pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$ nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = 0 \tag{13.870}$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ plus grand que α. Soit la suite numérique $s_n = n^k a^n$. Tous ses termes sont positifs et

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{1}{a}. \tag{13.871}$$

Étant donné que $n/n+1 \to 1$ et que $a < 1$, il existe un certain rang à partir duquel la suite (s_n) est décroissante. Deux conclusions :

— Elle est majorée par une constante M.

— Elle est convergente par le lemme 8.18.

Soit l tel que $ka^l < 1$ et $n > l$ alors

$$s_{n+l} = (n+l)^k a^{n+l} \leqslant kn^k a^n a^l = ka^l s_n \leqslant ka^l M. \tag{13.872}$$

La majoration est due au fait que dans $(n+l)^k$ nous avons k termes tous plus petits que n^k. De la même façon,

$$s_{2n+2l} \leqslant ka^{2l} s_{2n} \leqslant ka^{2l} M. \tag{13.873}$$

En posant $\varphi(i) = in + il$ nous avons

$$s_{\varphi(i)} \leqslant ka^i M, \tag{13.874}$$

qui est une sous-suite convergente vers 0. Or si une suite est convergente (ce qui est le cas de (s_n)), toutes les sous-suites convergent vers la même limite. Nous en concluons que $s_n \to 0$. □

13.339.
Une conséquence est que si vous voulez choisir un mot de passe fort, la longueur du mot est plus importante que la taille de l'alphabet choisit : il est plus efficace de choisir une combinaison longue qu'une combinaisons mélangeant des lettres, chiffres et symboles spéciaux.

Exemple : si vous choisissez un mot de passe contenant majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux complètement mélangés (ne mentez pas, vous ne le faites pas), mais que vous ne le choisissez que de taille 6, vous avez 72^6 possibilités (en supposant un jeu de 10 symboles spéciaux).

Eh bien, en seulement 8 lettres minuscules, vous avez plus de possibilités : $26^8 > 72^6$.

De nombreux sites font l'erreur de considérer que

— « ggzxzheaiynshunxuydajkwyohgqxz » est un mot de passe faible,

— « azerty.2019A » est un mot de passe fort.

Il n'en est rien. Le premier est considérablement meilleur que le second, même si le second, très superficiellement, mélange les lettres majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux.

Voila voila. La prochaine fois qu'un site vous refusera un mot de passe de 30 lettres minuscules mélangées, vous saurez pourquoi il n'y a rien qui marche en informatique, et en particulier pourquoi la sécurité générale de nos systèmes d'informations est désastreuse.

13.34.3 Dérivation de la fonction puissance (première)

Nous n'allons pas complètement résoudre la question de la dérivation de la fonction $x \mapsto a^x$; il faudrait des logarithmes, et nous ne les avons pas encore défini. Le logarithme sera introduit comme fonction inverse de l'exponentielle en 16.58.

Proposition 13.340 ([221]).
Soit la fonction puissance

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned} \tag{13.875}$$

(1) La fonction g_a est dérivable.

(2) La dérivée vérifie l'équation

$$g_a'(x) = g_a'(0) g_a(x). \tag{13.876}$$

Démonstration. La fonction g_a est continue par 13.327(1). La proposition 13.308 nous dit donc que la fonction g_a admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Nous notons F une telle primitive.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $F_x(t) = F(x+t)$, nous avons une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. En effet

$$F_x'(t) = F'(x+t)\frac{d}{dt}\Big[x+t\Big]_{t=0} = a^{a+t} = a^x a^t. \tag{13.877}$$

Par ailleurs la fonction $t \mapsto a^x F(t)$ est également une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. Donc il existe un nombre $C(x)$ tel que

$$F_x(t) = F(x+t) = a^x F(t) + C(x). \tag{13.878}$$

Le nombre $F(1) - F(0)$ est un nombre sans histoires. Nous avons :

$$\begin{aligned} g_a(x)\big(F(1)-F(0)\big) &= g_a(x)F(1) - g_a(x)F(0) && \text{(13.879a)}\\ &= F_x(1) - C(x) - F_x(0) + C(x) && \text{(13.879b)}\\ &= F_x(1) - F_x(0) && \text{(13.879c)}\\ &= F(1+x) - F(x). && \text{(13.879d)} \end{aligned}$$

La fonction F étant dérivable, nous en déduisons que g_a est dérivable.

Vu que nous n'avons aucune idée de la forme de F, nous ne pouvons pas tirer beaucoup d'informations d'une dérivation des membres de gauche et de droite de (13.879).

En ce qui concerne la formule, nous écrivons la fameuse équation fonctionnelle [73]

$$g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y) \tag{13.880}$$

Nous fixons x et dérivons par rapport à y en $y = y_0$:

$$g_a'(x+y_0) = g_a(x)g_a'(y_0). \tag{13.881}$$

En posant $y_0 = 0$ nous trouvons le résultat demandé. □

13.341.
La démonstration donnée dans [221] s'assure d'abord de l'existence d'une intégrale (lemme 15.223), pose ensuite $A = \int_0^1 g_a(t)dt$ et fait le calcul suivant :

$$Ag_a(x) = \int_0^1 g_a(x)g_a(t)dt = \int_0^1 g_a(x+t)dt = \int_x^{x+1} g_a(t)dt. \tag{13.882}$$

Vu que le membre de droite est une fonction dérivable de x, nous concluons que g_a est dérivable. Cela demande donc toute la théorie de l'intégration pour prouver la *dérivabilité* d'une fonction.

La démonstration donnée ici est à peine mieux. Elle utilise l'existence d'une primitive et donc tout le théorème de Stone-Weierstrass 13.305.

Dans les deux cas, je trouve que la situation n'est pas fameuse. Si vous êtes capable de montrer l'existence de la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \tag{13.883}$$

sans recourir à autre chose que des astuces sur les limites, je suis preneur. Ou, au contraire, si vous avez un argument pour dire que c'est impossible, dites-le moi également. Écrivez-moi.

Nous posons une définition

Définition 13.342.
*Soit $a > 0$. Nous nommons l'**équation fonctionnelle** l'équation*

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) & \text{(13.884a)}\\ f(1) = a & \text{(13.884b)} \end{cases}$$

pour la fonction inconnue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

73. Pour rappel, proposition 13.327(3).

Définition 13.343.
*Soit $a > 0$. Nous nommons l'**équation exponentielle** l'équation*

$$\begin{cases} y' = y & (13.885a) \\ y(1) = a & (13.885b) \end{cases}$$

pour la fonction inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 13.344 (Unicité de l'exponentielle)**.**
Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = y & (13.886a) \\ y(0) = 1 & (13.886b) \end{cases}$$

est unique.

Démonstration. Soient y et g deux solutions et considérions la fonction $h(x) = g(x)y(-x)$. Un calcul immédiat donne

$$h'(x) = 0 \tag{13.887}$$

et donc h est constante. Vu que $h(0) = 1$ nous avons $g(x)y(-x) = 1$ pour tout x, c'est-à-dire

$$g(x) = \frac{1}{y(-x)} = y(x). \tag{13.888}$$

□

13.345.
Nous savons qu'il existe une unique solution de l'équation exponentielle avec $a = 1$. Avec la relation

$$g'_a(x) = g_a(x)g'_a(0), \tag{13.889}$$

de la proposition 13.340, nous n'en sommes pas loin. Il faut encore savoir si il existe un $a > 0$ tel que $g'_a(0) = 1$. Notre culture générale nous dit qu'un tel réel existe et est la fameuse constante e.

Nous nous attelons maintenant à la tâche de montrer l'existence de la chose.

13.34.4 Équation fonctionnelle

Il n'est un secret pour personne (proposition 13.327(3)) que la fonction

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{13.890}$$

vérifie l'équation fonctionnelle (13.884). Nous pouvons nous demander à quel point cette propriété caractérise la fonction puissance.

Proposition 13.346 ([221])**.**
Encore plusieurs résultats sur la fonction g_a avec $a > 0$.

(1) La fonction g_a vérifie l'équation fonctionnelle.

(2) La dérivée vérifie $g'_a(0) \neq 0$.

(3) Pour tout a, en posant $\alpha = 1/g'_a(0)$ nous avons

$$g'_{a^\alpha}(0) = 1. \tag{13.891}$$

(4) Il existe un unique $e > 0$ tel que

$$g'_e = g_e. \tag{13.892}$$

(5) Pour la valeur de e donnée en (4), la fonction g_e vérifie l'équation exponentielle (13.885)

$$\begin{cases} g_e' = g_e & \text{(13.893a)} \\ g_e(1) = e. & \text{(13.893b)} \end{cases}$$

Démonstration. Un point à la fois.

Pour (1) Le fait que g_a vérifie l'équation fonctionnelle est la proposition 13.327(3).

Pour (2) La formule (13.876) de la proposition 13.340 nous assure que

$$g_a'(x) = g_a(x)g_a'(0). \tag{13.894}$$

Donc $g_a'(0) = 0$ impliquerait que $g_a = 0$, ce qui n'est pas le cas.

Pour (3) Par ailleurs la proposition 13.337 nous permet d'écrire

$$g_a(\alpha x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{13.895}$$

En dérivant des deux côtés,

$$\alpha g_a'(\alpha x) = g_{a^\alpha}'(x). \tag{13.896}$$

En posant donc $\alpha = g_a'(0)$ et en évaluant (13.896) en $x = 0$ nous trouvons le résultat.

Pour (4), existence Pour les valeurs de α données par le point (3), nous avons $g_{a^\alpha}'(0) = 1$, et l'équation (13.894) nous donne alors

$$g_{a^\alpha}(x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{13.897}$$

Comme de plus $g_{a^\alpha}(0) = 1$, cette fonction vérifie bien l'équation exponentielle.

Pour (4), unicité Si a et b font en sorte que $g_a' = g_a$ et $g_b' = g_b$, alors nous avons aussi $g_a'(0) = g_b'(0) = 1$ à cause de (13.894). Donc g_a et g_b vérifient l'équation de la proposition 13.344 dont la solution est unique. Donc $g_a = g_b$.

Pour tout x nous avons $g_a(x) = g_b(x)$. En particulier pour $x = 1$ nous avons $a = b$.

□

Proposition 13.347 ([221]).
Soit $a > 0$. Nous considérons l'équation fonctionnelle 13.342 et l'équation exponentielle 13.343 pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) Si f vérifie l'équation fonctionnelle, alors

$$f(q) = a^q \tag{13.898}$$

pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

(2) Si f vérifie l'équation fonctionnelle et est monotone, alors $f = g_a$.

(3) Si f vérifie l'équation fonctionnelle et est continue, alors $f = g_a$.

Démonstration. En beaucoup de parties. Nous commençons par prouver (1). Nous supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle [74].

$f(x) \geqslant 0$ Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geqslant 0. \tag{13.899}$$

Vous noterez que cet argument ne fonctionne pas si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

74. Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire ici, nous rappelons qu'une telle fonction existe par la proposition 13.346.

Pour $n \in \mathbb{N}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Je vous laisse rédiger la récurrence correctement, mais l'idée est que $f(1) = a$ et ensuite que

$$f(n+1) = f(n)f(1) = f(1)^n f(1) = f(1)^{n+1}. \tag{13.900}$$

Pour $m \in \mathbb{Z}$ Nous avons d'une part que $f(-m+m) = f(0) = 1$, mais d'autre part que $f(-m+m) = f(-m)f(m)$. Donc $1 = f(-m)f(m)$; et nous concluons que

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)}. \tag{13.901}$$

Pour $q = 1/n$ Nous savons que $f(1) = a$, mais $1 = \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}$ (avec n termes), donc

$$a = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^n. \tag{13.902}$$

Cela implique que $f(\frac{1}{n})^n = a$. La proposition 13.310 indique qu'il existe un unique $x > 0$ tel que $x^n = a$. Vu que nous savons déjà que f est partout positive[75], cette contrainte fixe $f(1/n)$ et la définition 13.311 nous permet d'écrire

$$f(\frac{1}{n}) = a^{1/n}. \tag{13.903}$$

Pour $q \in \mathbb{Q}$ Nous posons $q = m/n$. Le nombre q peut être écrit sous la forme $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ avec m termes. Donc

$$f(\frac{m}{n}) = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n} \tag{13.904}$$

où nous avons utilisé le lemme 13.316.

La preuve de (1) est terminée.

Démonstration de (2) Nous faisons maintenant la preuve de (2). Nous supposons que f vérifie l'équation fonctionnelle et qu'elle est monotone. Pour fixer les idées, nous supposons qu'elle est monotone croissante[76].

Nous considérons les parties[77]

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q < x\} \tag{13.905a}$$
$$B = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q > x\}. \tag{13.905b}$$

Vu que f est croissante, nous avons $f(x) \geqslant f(q)$ pour tout $q \in A$ et $f(x) \leqslant f(q)$ pour tout $q \in B$. En passant au supremum et à l'infimum,

$$\sup_{q \in A} f(q) \leqslant f(x) \leqslant \inf_{q \in B} f(q). \tag{13.906}$$

Mais il existe dans A une suite strictement croissante convergente q_i vers x (parce que $x = \sup(A)$), donc

$$a^x = \lim_i a^{q_i} \tag{13.907}$$

par la définition 13.326. Et de même, il existe une suite r_i décroissante dans B telle que $x = \lim r_i$. Cette suite donne aussi

$$a^x = \lim_i a^{r_i}. \tag{13.908}$$

Nous avons donc l'encadrement

$$a^x \leqslant f(x) \leqslant a^x, \tag{13.909}$$

qui implique que $f(x) = a^x$.

75. C'est ici que l'hypothèse de fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est cruciale. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ceci ne fonctionne pas, et de loin.

76. Si f est monotone décroissante, soit vous adaptez la preuve, soit vous essayez de voir si on ne peut pas recycler le cas croissant en l'appliquant à $-f$.

77. Il du meilleur gout de citer le lemme 1.109 pour dire qu'ils sont non vides.

Démonstration de (3) Nous ne supposons plus que f est monotone. Au lieu de cela nous supposons qu'elle est continue. Nous avons déjà vu en (1) que $f = g_a$ sur $\mathbb{Q}$. Mais par hypothèse f est continue et par la proposition 13.327, g_a est continue. La proposition 13.72 conclu que $f = g_a$ sur $\mathbb{R}$.

□

Proposition 13.348 ([221]).
Si y vérifie l'équation exponentielle, alors elle est continue, monotone et vérifie l'équation fonctionnelle.

13.34.5 Dérivation de la fonction puissance (seconde)

La proposition suivante donne la dérivée de $x \mapsto x^q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. La formule donnée est encore valable pour $x \mapsto x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais elle demandera plus de théorie pour être démontrée, voir la proposition 15.242.

Proposition 13.349 ([1]).
Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{13.910}$$

En particulier, f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Démonstration. Petit à petit.

Naturel Nous prouvons que $(x^n)' = nx^{n-1}$ par récurrence en utilisant la règle de Leibnitz de la propositon 13.114(3).

D'abord pour $n = 1$ nous avons $f_1(x) = x$ et donc

$$f'_1(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon) - x}{\epsilon} = 1. \tag{13.911}$$

Supposons que $f'_k(x) = kx^{k-1}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Nous prouvons que $f'_{k+1}(x) = (k+1)x^k$. Nous avons

$$x^{k+1} = xx^k. \tag{13.912}$$

En utilisant la règle de Leibnitz et l'hypothèse de récurrence,

$$\big(x^{k+1}\big)' = (x)'x^k + x\big(x^k\big)' = x^k + x\big(kx^{k-1}\big) = x^k + kx^k = (k+1)x^k, \tag{13.913}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Rationnel positif Soit donc $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Le lemme 13.316 nous permet d'écrire $f_{p/q}(x) = x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$. Cela donne

$$f_{p/q}(x)^q = x^p. \tag{13.914}$$

Nous dérivons cette relation par rapport à x en utilisant à la fois la règle pour les entiers et la règle des fonctions composées [78] :

$$qf'_{p/q}(x)^{q-1} f'_{p/q}(x) = px^{p-1}. \tag{13.915}$$

En isolant $f'_{p/q}(x)$ dans cette expression et en utilisant le fait que $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, nous trouvons le résultat.

78. Proposition 13.114(4).

Rationnels négatifs Soit $\alpha = -p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous avons $x^{-p/q} = \frac{1}{f_{p/q}(x)}$. En utilisant la proposition 13.114(5) et le point déjà prouvé sur les rationnels positifs,

$$f'_{p/q} = -\frac{f'_{-p/q}}{f^2_{p/q}} = -\frac{(-p/q)x^{-p/q-1}}{x^{-2p/q}} = (p/q)x^{p/q-1}. \tag{13.916}$$

Notez l'utilisation de la proposition 13.337 au dénominateur.

Irrationnel Ah ah ! On vous a bien eu. Les irrationnels, c'est pour la proposition 15.242.

En ce qui concerne le fait que la fonction f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, c'est simplement une récurrence. Attention : si le rationnel α est négatif, $f_\alpha(0)$ n'est pas défini. Mais, lorsque α est positif non entier, à partir d'un certain ordre, les dérivées font intervenir x^β avec $\beta < 0$. D'où la restriction à $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ du domaine sur lequel f_α est de classe C^∞.

Si α est positif entier, alors f_α est de classe C^∞ sur tout $\mathbb{R}$ parce que toutes les dérivées sont nulles à partir d'un certain ordre. □

13.34.6 Hölder

Notre étude de la fonction puissance permet de démontrer quelque inégalités de Hölder. Voir le thème 7.

Théorème 13.350 ([222]).
Si $1 \leqslant p < \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{13.917}$$

Démonstration. Vu que la fonction $t \mapsto |t|^p$ est croissante pour les t positifs [79], pour chaque i nous avons

$$|x_i| \leqslant \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p. \tag{13.918}$$

Cela montre que

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\} \leqslant \|x\|_p. \tag{13.919}$$

D'autre part, pour chaque i nous avons $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$, donc

$$\|x\|_p \leqslant \big(n\|x\|_\infty\big)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{13.920}$$

□

Le corollaire suivant donne une façon de majorer une norme ℓ^p par une norme ℓ^q moyennant un facteur. Notons cependant que l'inégalité de Hölder de la proposition 18.106 est plus précise. Ce corollaire est suffisant pour prouver l'équivalence des normes ℓ^p.

Corollaire 13.351.
Soient $p \geqslant 1$ et $q \leqslant \infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_q. \tag{13.921}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les deux inégalités du théorème 13.350. D'abord la seconde avec p, et ensuite la première avec q. □

79. Parce que $p \geqslant 1$ et la proposition 13.332.

13.34.7 Vers les complexes

Nous avons déjà vu la proposition 13.346 qui dit essentiellement que si une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$, alors $f(x) = a^x$. Comme indiqué durant la preuve, cette proposition (et en particulier sa preuve) ne fonctionne pas pour les fonctions à valeurs complexes. L'endroit où cela coinçait est que la contrainte

$$f(\frac{1}{n})^n = a \tag{13.922}$$

n'implique pas grand chose lorsque f est à valeurs complexes.

Nous allons maintenant attaquer ce problème.

Lemme 13.352.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = \alpha y & \text{(13.923a)} \\ y(0) = 1 & \text{(13.923b)} \end{cases}$$

pour $y\colon \mathbb{R} \to S^1$ est unique.

Démonstration. Soient deux solutions y_1 et y_2. Nous posons $h(x) = y_1(x)y_2(-x)$. Une dérivation donne

$$h'(x) = y_1'(x)y_2(-x) - y_1(x)y_2'(-x). \tag{13.924}$$

En y substituant $y_1'(x) = \alpha y_1(x)$ et $y_2'(-x) = \alpha y_2(x)$ nous trouvons $h'(x) = 0$. Donc h est constante et nous avons

$$y_1(x)y_2(-x) = 1 \tag{13.925}$$

pour tout x.

Notons que cette identité est encore valable avec $y_1 = y_2$. Nous avons en particulier $y_1(x)y_1(-x) = 1$ et $y_2(x)y_2(-x) = 1$, et nous notons au passage que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne s'annulent pas.

En substituant dans (13.925) la valeur $y_2(-x) = \frac{1}{y_2(x)}$ nous trouvons

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = 1, \tag{13.926}$$

ce qui signifie $y_1(x) = y_2(x)$. □

Dans la proposition suivante, S^1 désigne l'ensemble des nombres complexes de norme 1, dont une paramétrisation est donnée dans la proposition 19.60 :

$$S^1 = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\} = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in [0, 2\pi[\}. \tag{13.927}$$

Proposition 13.353 ([1]).
Soit une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y). \tag{13.928}$$

Alors

(1) f est dérivable,

(2) f satisfait au système

$$\begin{cases} f'(x) = f'(0)f(x) & \text{(13.929a)} \\ f(0) = 1, & \text{(13.929b)} \end{cases}$$

(3) il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$.

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g_m(x) = e^{imx} \tag{13.930}$$

vérifie évidemment toutes les conditions. Le but de cette démonstration est de montrer que les conditions imposées à f la déterminent de façon univoque (à part ce m).

La condition (13.928) nous dit que $f(0) = 1$. Soit une primitive F de f. Il existe $s > 0$ tel que $F(s) > F(0)$ parce que $F' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction G_a donnée par $G_a(x) = F(x + a)$ est une primitive de $x \mapsto f(x)f(a)$. Donc $G_a(x) = f(a)F(x)$. Cela dit nous avons

$$f(x)\big(F(s) - F(0)\big) = f(x)F(s) - f(x)F(0) = G_1(x) - G_0(x). \tag{13.931}$$

Le membre de droite est évidemment dérivable, et $F(s) - F(0) \neq 0$. Donc f est dérivable.

Nous dérivons maintenant la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y en $y = 0$. Cela donne

$$f'(x) = f'(0)f(x). \tag{13.932}$$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f'(x) = \alpha f(x)$.

Jusqu'ici nous avons prouvé qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha f(x) & \text{(13.933a)} \\ f(0) = 1. & \text{(13.933b)} \end{cases}$$

Or le lemme 13.352 donne l'unicité de la solution à ce système, et il ne faut pas chercher loin : la solution est

$$f(x) = e^{\alpha x}. \tag{13.934}$$

Pour avoir $f(x) \in S^1$, nous devons de plus imposer que α soit imaginaire pur. Donc, en posant $\alpha = im$, nous avons $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$. □

13.35 Polynômes de Taylor

Définition 13.354.
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si il existe, nous définissons le n^e ***polynôme de Taylor*** *de f au point $a \in \mathbb{R}$ par*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k. \tag{13.935}$$

Et la ***série de Taylor*** *de f est la limite :*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \tag{13.936}$$

dans la mesure où la somme converge.

Tant que f est n fois dérivable, le polynôme P_n existe et vérifie $P_n(a) = f(a)$. Nous ne pouvons rien en dire de plus pour l'instant. En particulier, si f est de classe C^∞ il ne faudrait pas croire que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{13.937}$$

pour tout x dans un voisinage de a. Autrement dit, même si toutes les dérivées de f existent, la série entière T n'est pas garantie de

— un rayon de convergence[80] plus grand que zéro,

— et même avec un grand rayon de convergence, que la limite soit les valeurs de f.

80. Définition 16.8.

13.355.
Il n'est pas très compliqué de construire une fonction f telles que $f(0) = 0$ et telle que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k, sans pour autant que f soit nulle partout (voir les fonctions plateaux 16.13.1). Les polynômes de Taylor d'une telle fonction sont tous identiquement nuls.

Ceci pour dire qu'en posant

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \tag{13.938}$$

nous n'avons aucune garantie de $T = f$, même pas sur le rayon de convergence de la série entière définissant P. Et nous n'avons pas de garanties d'avoir un rayon de convergence plus grand que 0.

Notons toutefois que les polynômes étant denses pour la norme supremum parmi les fonctions continues[81], pour tout compact, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément uniformément f. Mais ces polynômes ne sont pas spécialement ceux de Taylor.

Le théorème de Taylor que nous démontrons à présent n'est pas un résultat que va dans le sens de $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. C'est un résultat qui dit juste que $\lim_{x\to a} P_n(x) = f(a)$, et que la limite va d'autant plus vite que n est grand.

Le théorème de Taylor généralise le développement limité au premier ordre de la proposition 13.112.

13.356.
Lorsque le contexte n'est pas ambigu, nous notons simplement P_n le polynôme d'ordre n de f au point a. De même nous notons le reste

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{13.939}$$

Proposition 13.357 ([223]).
Soit une fonction f qui est n fois dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant a. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{13.940}$$

où P_n est le n^e polynôme de Taylor de f autour de $x = a$.

Démonstration. Pour tout $k = 0, \dots, n$ nous avons $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$ et donc

$$R_n^{(k)}(a) = 0 \tag{13.941}$$

pour $k = 0, \dots, n$. En posant d'autre par $s(x) = (x-a)^n$ nous avons $s^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$. Par conséquent la règle de l'Hospital de la proposition 13.131 s'applique au quotient $R_n(x)/s(x)^n$. En l'utilisant n fois,

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{s(x)} = \lim_{x\to a} \frac{R^{(k)}(x)}{k!(x-a)^0} = \frac{0}{k!} = 0. \tag{13.942}$$

□

Nous démontrons à présent que le polynôme de Taylor est le seul à avoir la propriété de la proposition 13.357.

Proposition 13.358 ([223]).
Soit f, une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. Soit un polynôme Q de degré n (ou moins) tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{13.943}$$

Alors Q est le polynôme de Taylor de degré n pour f en a ci-après simplement noté P_n.

81. Théorème 13.305.

Démonstration. D'après la proposition 13.357, la fonction $f-P_n$ vérifie la même limite que $f-Q$. DOnc P_n-Q vérifie également la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(P_n-Q)(x)}{x^n}=0. \tag{13.944}$$

Nous notons $P_n(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ et $Q(x)=\sum_{k=0}^n b_kx^k$. La relation (13.944) donne en particulier

$$\lim_{x\to 0}(P_n-Q)(x)=0 \tag{13.945}$$

qui donne $a_0-b_0=0$. Nous continuons par récurrence en supposant que $a_i=b_i$ pour $i=0,\dots,k$. Alors

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{(P_n-Q)(x)}{x^{k+1}}=\lim_{x\to 0}\sum_{l=k+1}^{n}(a_l-b_l)x^{l-(k+1)}. \tag{13.946}$$

Le seul terme non nul à droite est celui vérifiant $l-(k+1)=0$. Et ce terme donne l'équation

$$a_{k+1}-b_{k+1}=0, \tag{13.947}$$

c'est-à-dire $a_{k+1}=b_{k+1}$. La récurrence continue ainsi jusqu'à $k=n$, et nous pouvons conclure que $Q=P_n$. □

L'intérêt de cette proposition est que si l'on trouve, par n'importe quel moyen, un polynôme Q vérifiant la condition (13.943), alors nous savons que c'est le polynôme de Taylor.

Théorème 13.359 (Théorème de Taylor[173, 224])**.**
Soit $I\subset$ un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ ainsi que $a\in I$. Soit une fonction $f\colon I\to\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors il existe une fonction α définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\alpha(x)(x-a)^n, \tag{13.948a}$$

$$\lim_{t\to a}\alpha(t)=0 \tag{13.948b}$$

pour tout $x\in I$. Ici $f^{(k)}$ dénote la k-ième dérivée de f (en particulier, $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$).

Démonstration. Si $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, il suffit de poser

$$\alpha(x)=R_n(x)(x-a)^n \tag{13.949}$$

et d'utiliser la proposition 13.357. □

Remarque 13.360.
Quelque remarques.

(1) La formule (13.948b) est une égalité, et non une approximation. Ce qui serait une approximation serait de récrire la formule dans le terme contenant α.

(2) Nous avons l'égalité (13.948b) uniquement sur I. Pour les x hors de I, le polynôme existe évidemment, mais nous n'avons pas spécialement de fonction α, et d'ailleurs la fonction f n'est pas spécialement définie.

13.361.
Les conditions (13.948) sont souvent aussi énoncées sous la forme qu'il existe une fonction α telle que

$$\begin{cases}\lim_{t\to 0}\dfrac{\alpha(t)}{t^n}=0 & \text{(13.950a)}\\ f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\alpha(h). & \text{(13.950b)}\end{cases}$$

Le théorème suivant donne une expression pas tout à fait explicite, mais pas mal quand même pour le reste de Taylor.

Théorème 13.362.
Soient un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ ainsi que $a \in I$. Soit encore une fonction de classe C^{k+1} sur I. Pour tout $x \in I$, il existe un $c \in]a, x[$ tel que l'égalité

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{13.951}$$

soit vérifiée.

Démonstration. Pour les besoins de la preuve, nous allons démontrer la formule (13.951) pour un $b \in I$ au lieu de x. C'est juste que nous allons écrire b au lieu de x parce que nous aurons besoin de la notation x dans le courant de la preuve.

Nous posons

$$R(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{13.952}$$

Cela vérifie $R(a) = f(a) - f(a) = 0$ et même

$$R^{(j)}(a) = 0 \tag{13.953}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$. Nous posons encore

$$F(x) = R(x) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1}. \tag{13.954}$$

Nous avons $F^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, n$ ainsi que

$$F(b) = R(b) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(b-a)^{n+1} = 0. \tag{13.955}$$

et aussi

$$F(a) = R(a) - 0 = 0. \tag{13.956}$$

Bref, la fonction F vérifie les conditions de la généralisation 13.128 du lemme de Rolle. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $F^{(n+1)}(c) = 0$. Mais vu que $P_n^{(n+1)}(x) = 0$, nous avons $R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, de telle sorte que

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{R(b)(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}. \tag{13.957}$$

En injectant cela dans la définition de F

$$F(x) = R(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{13.958}$$

En évaluant en $x = b$, et en nous souvenant que $F(b) = 0$, nous trouvons

$$0 = R(b) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{13.959}$$

qui est ce que nous voulions prouver. □

Voici un énoncé pour les fonctions à plusieurs variables.

Théorème 13.363 ([225]).
Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application n fois différentiable en $a \in E$ alors il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2 f)_a(h,h) + \ldots + & \text{(13.960a)} \\ \qquad + \ldots + \frac{1}{n!}(d^n f)_a(h, \ldots, h) + \|h\|^n \epsilon(\|h\|) & \text{(13.960b)} \\ \lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0. & \text{(13.960c)} \end{cases}$$

13.35.1 Fonctions « petit o »

Nous voulons formaliser l'idée d'une fonction qui tend vers zéro « plus vite » qu'une autre. Nous disons que $f \in o\big(\varphi(x)\big)$ si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0. \tag{13.961}$$

En particulier, nous disons que $f \in o(x)$ lorsque $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$.

En termes de notations, nous définissons l'ensemble $o(x)$ l'ensemble des fonctions f telles que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \tag{13.962}$$

Plus généralement si g est une fonction telle que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, nous disons $f \in o(g)$ si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{13.963}$$

De façon intuitive, l'ensemble $o(g)$ est l'ensemble des fonctions qui tendent vers zéro « plus vite » que g.

Nous pouvons donner un énoncé alternatif au théorème 13.359 en définissant $h(x) = \epsilon(x+a)x^n$. Cette fonction est définie exprès pour avoir

$$h(x-a) = \epsilon(x)(x-a)^n, \tag{13.964}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \epsilon(x-a) = \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0. \tag{13.965}$$

Donc $h \in o(x^n)$.

Le théorème dit donc qu'il existe une fonction $\alpha \in o(x^n)$ telle que

$$f(x) = T^a_{f,n}(x) + \alpha(x-a). \tag{13.966}$$

pour tout $x \in I$.

Remarque 13.364.
À titre personnel, l'auteur de ces lignes déconseille d'utiliser cette notation qui est un peu casse-figure pour qui ne la maîtrise pas bien.

Exemple 13.365
Le développement en série du cosinus sera traité dans la proposition 19.69. △

Proposition 13.366 (Ordre deux sur $\mathbb{R}^n$[1])**.**
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$ ainsi qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\alpha(h) & \text{(13.967a)} \\ \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. & \text{(13.967b)} \end{cases}$$

Ici, la notation $(d^2f)_a(h,h)$ réfère à ce qui est expliqué en 13.269.

Démonstration. Dans la suite nous considérons t et h tels que toutes les expressions suivantes aient un sens, c'est-à-dire que tous les trucs comme $a+th$ restent dans Ω. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ nous nommons e_h le vecteur unitaire dans la direction de h, c'est-à-dire $e_h = h/\|h\|$ et nous posons

$$k_h(t) = f(a+te_h). \tag{13.968}$$

et nous lui appliquons Taylor 13.359 à l'ordre deux : il existe une fonction β_h telle que

$$k_h(x) = k_h(0) + xk'_h(0) + \frac{x^2}{2}k''_h(0) + x^2\beta_h(x). \tag{13.969}$$

avec $\lim_{x\to 0}\beta_h(x) = 0$.

En ce qui concerne les dérivées de k_h nous avons

$$k'_h(0) = df_a(e_h) \tag{13.970}$$

et

$$k''_h(0) = (d^2f)_a(e_h, e_h). \tag{13.971}$$

Il est maintenant temps d'écrire $f(a+h) = k(\|h\|)$ et de substituer les dérivées de k par les différentielles de f dans (13.969) :

$$f(a+h) = k(\|h\|) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h^2\|\beta_h(\|h\|). \tag{13.972}$$

Il reste à voir que la fonction $\alpha\colon h \mapsto \beta_h(\|h\|)$ tend vers zéro pour $h \to 0$. En prenant la limite $h \to 0$ dans (13.972), il est manifeste que la limite du membre de gauche existe et vaut $f(a)$. Donc la limite du membre de droite doit exister et valoir également $f(a)$. Nous en déduisons que la limite de

$$df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\beta_h(\|h\|) \tag{13.973}$$

existe et vaut zéro. La limite des deux premiers termes existe et vaut zéro, donc la limite du troisième existe et vaut zéro :

$$\lim_{h\to 0}\|h\|^2\beta_h(\|h\|) = 0. \tag{13.974}$$

□

Proposition 13.367.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et deux fois différentiable sur $]x, x+h[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_{x+\theta h}(h,h). \tag{13.975}$$

13.35.2 Autres formulations

Exemple 13.368
Une des façons les plus courantes d'utiliser les formules (13.948) est de développer $f(a+t)$ pour des petits t en posant $x = a+t$ dans la formule :

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + f''(a)\frac{t^2}{2} + \epsilon(a+t)t^2 \tag{13.976}$$

avec $\lim_{t\to 0}\epsilon(a+t) = 0$. Ici, la fonction T dont on parle dans le théorème est $T^a_{f,2}(a+t) = f(a) + f'(a)t + f''(a)\frac{t^2}{2}$.

Lorsque x et y sont deux nombres « proches [82] », nous pouvons développer $f(y)$ autour de $f(x)$:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + f''(x)\frac{(y-x)^2}{2} + \epsilon(y-x)(y-x)^2, \tag{13.977}$$

et donc écrire

$$f(x) - f(y) = -f'(x)(y-x) - f''(x)\frac{(y-x)^2}{2} - \epsilon(y-x)(y-x)^2. \tag{13.978}$$

De cette manière nous obtenons une formule qui ne contient plus que y dans la différence $y-x$.
△

82. par exemple dans une limite $(x,y) \to (h,h)$.

13.35.3 Formule et reste

Proposition 13.369.
Soient $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Int}(I)$. Soit un entier $k \geqslant 1$. Si f est k fois dérivable en a, alors il existe un et un seul polynôme P de degré $\leqslant k$ tel que

$$f(x) - P(x-a) \in o\big(|x-a|^k\big) \tag{13.979}$$

lorsque $x \to a$, $x \neq a$. Ce polynôme est donné par

$$P(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k. \tag{13.980}$$

Notons encore deux façons alternatives d'écrire le résultat. Si $f \in C^k$ il existe une fonction α telle que $\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\alpha(x-a). \tag{13.981}$$

Si $f \in C^{k+1}$ alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^{n+1}\xi(x-a) \tag{13.982}$$

où ξ est une fonction telle que $\xi(t)$ tend vers une constante lorsque $t \to 0$.

La proposition suivant donne une intéressante façon de trouver le reste d'un développement de Taylor.

Proposition 13.370.
Soient I, un intervalle dans $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k sur I telle que $f^{(k+1)}$ existe sur I. Soient $a \in \operatorname{Int}(I)$ et $x \in I$. Alors il existe $c \in]x, a[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{13.983}$$

13.35.4 Reste intégral

Comme son nom l'indique, le « reste intégral » demande de savoir les intégrales. La formule du reste intégral sera donc pour après la définition des intégrales, proposition 21.149.

13.36 Développement limité autour de zéro

Dans cette sections nous supposons toujours que les fonctions sont définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, I, contenant 0.

13.36.1 Généralités

Définition 13.371.
*Soit $f\colon I \to 0$ une fonction définie sur un ouvert I autour de zéro. Nous disons que f admet un **développement limité** autour de 0 à l'ordre n s'il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\alpha(x) & \text{(13.984a)} \\ \lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 0 & \text{(13.984b)} \end{cases}$$

*où $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ est une polynôme de degré n. Le polynôme P_n est appelé la **partie régulière** du développement.*

La fonction α est appelé le **reste** du développement et sera parfois noté α_f. Lorsque P est la partie régulière d'un développement limité de f nous notons parfois $f \sim P$.

Proposition 13.372 (Troncature)**.**
Si f admet un développement limité d'ordre n alors il admet également un développement limité d'ordre n' pour tout $n' < n$. Ce dernier s'obtient en tronquant le polynôme d'ordre n à l'ordre n'.

Proposition 13.373 (Unicité)**.**
Si f admet une développement limité alors ce dernier est unique : il existe un unique polynôme P_n d'ordre n et une unique fonction α vérifiant simultanément les deux conditions

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\alpha(x), & \text{(13.985a)} \\ \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0. & \text{(13.985b)} \end{cases}$$

Exemple 13.374
En ce qui concerne les séries géométriques de raison x nous savons les formules

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{13.986}$$

et

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x} \tag{13.987}$$

pour tout $x \in]-\infty, 1[$. Comparant les deux, il est naturel d'essayer de prendre $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ comme développement limité de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour voir si cela fonctionne, il faut vérifier si « le reste » est bien de la forme $x^n\alpha(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.

Le reste en question est donné par

$$\frac{1}{1 - x} - 1 - x - x^2 - \ldots - x^n = \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1}}{1 - x} = x^n \frac{x}{1 - x}. \tag{13.988}$$

En posant $\alpha(x) = \frac{x}{1-x}$ nous avons donc bien

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1 - x} \tag{13.989}$$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Cela est le développement limité de f à l'ordre n autour de 0. △

La formule des accroissements finis est un cas particulier de développement fini. Supposons que f soit dérivable en 0. En effet nous pouvons facilement trouver la fonction α qui convient. Sachant que $f(0) + xf'(0)$ donne l'approximation affine de f autour de 0, nous cherchons α en écrivant

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x). \tag{13.990}$$

Cela nous pousse à définir

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0). \tag{13.991}$$

Notons que cette fonction n'est pas définie en $x = 0$, mais cela n'a pas d'importance : seule la limite $\lim_{x\to 0} \alpha(x)$ nous intéresse. Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = 0. \tag{13.992}$$

En conclusion si f est dérivable, son développement limité à l'ordre 1 est donné par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x) \tag{13.993}$$

où $\alpha(x)$ est donnée par la formule (13.991).

13.36.2 Formule de Taylor-Young

Plus généralement nous avons la proposition suivante qui donne le développement limité de toute fonction dérivable n fois.

Proposition 13.375 (Formule de Taylor-Young)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I\to\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n\alpha(x)\tag{13.994}$$

et

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0.\tag{13.995}$$

Cette proposition nous permet de calculer facilement des développements limités tant que nous sommes capables de calculer les dérivées successives de la fonction à développer. Dans l'exemple 13.374 nous avons dû utiliser des astuces et des formules pour déterminer le développement limité de $\frac{1}{1-x}$. Au contraire la formule (13.994) nous permet de trouver le polynôme en appliquant mécaniquement une formule simple.

Exemple 13.376
Utilisation de la formule (13.994) pour déterminer le développement limité de la fonction

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.\tag{13.996}$$

Il faut calculer les dérivées successives de f :

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\tag{13.997a}$$
$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\tag{13.997b}$$
$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\tag{13.997c}$$

Avec ces résultats, nous devinons que

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.\tag{13.998}$$

Pour en être sûr nous le prouvons par récurrence. La dérivée de $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ est donnée par

$$\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}}=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.\tag{13.999}$$

Évaluées en $x=0$, les dérivées successives de f sont $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$,$\ldots$,$f^{(n)}(0)=n!$. Utilisant la formule (13.994) nous avons

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\alpha(x),\tag{13.1000}$$

conformément à ce que nous avions déjà trouvé. △

Exemple 13.377
Soient $r\in\mathbb{Q}$ et la fonction donnée par

$$f(x)=(1+x)^r.\tag{13.1001}$$

Nous notons I le domaine de cette fonction : c'est $\mathbb{R}$ si $r>0$ ou $[-1,\infty]$ si $r<0$. Si par contre $r=0$, la fonction est constante et le domaine est $I=\mathbb{R}$.

En ce qui concerne les dérivées[83] : $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$ et plus généralement

$$f^{(k)}(x) = r(r-1)\dots(r-k+1)(1+x)^{r-k} \tag{13.1002}$$

si $k > 0$. Pour $k = 0$ nous avons $f^{(k)}(0) = 1$. Le développement de Taylor-Young est alors

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}x^k + x^n\alpha(x). \tag{13.1003}$$

Notons que que si r est un entier, pour $k = r$, le produit au numérateur s'annule et le développement s'arrête.

Dans le développement de $(1+x)^r$, nous reconnaissons la formule de $\binom{k}{r}$, sauf que nous ne pouvons pas l'écrire avec cette notation lorsque r n'est pas entier. △ Cet exemple fonctionnera encore avec $r \in \mathbb{R}$ au lieu de $r \in \mathbb{Q}$, mais il faudra la proposition 16.66 pour la dérivée

Remarque 13.378.
Pour alléger la notation et ne pas écrire $\dots + x^n\alpha(x)$ nous pouvons aussi écrire

$$f(x) \sim 1 + x + x^2 + \dots + x^n, \tag{13.1004}$$

mais il est interdit d'écrire

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \tag{13.1005}$$

en mettant un signe d'égalité entre une fonction et son développement limité[84].

Notons cependant que la proposition 13.375 ne donne pas de moyen simple de trouver la fonction α. Si la fonction f est très régulière dans l'intervalle I on a le résultat suivant.

Proposition 13.379 (Reste dans la forme de Lagrange)**.**
Si la fonction f est dérivable $n+1$ fois dans I alors il existe $\bar{x}$ dans l'intervalle $[0, x]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\bar{x})x^{n+1}. \tag{13.1006}$$

13.36.3 Règles de calcul

Les règles suivantes permettent de calculer les développements limités des fonctions qu'on peut écrire comme combinaison de fonctions dont nous savons déjà le développement.

Il est toujours possible de calculer le développement limité d'une fonction par la formule de Taylor-Young (proposition 13.375). Les règles suivantes peuvent nous economiser de l'effort et du temps.

13.36.3.1 Linéarité des développements limités

L'opération qui consiste à prendre le développement limité d'une fonction est une opération linéaire : connaissant les développements limités de f et de g, il suffit de les sommer pour obtenir celui de $f+g$. De même, si λ est une constante, le développement limité de λf est le développement limité de f fois λ.

Proposition 13.380.
Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions acceptant des développements limités d'ordre n

$$f(x) = P(x) + x^n\alpha_f(x) \tag{13.1007a}$$
$$g(x) = Q(x) + x^n\beta(x) \tag{13.1007b}$$

83. Nous utilisons la proposition 13.349.

84. Il faut cependant être très prudents avec la notation abrégée. Elle pourrait nous faire oublier des informations importantes, voir les développements des fonctions trigonométriques pour un exemple.

avec $\lim_{x\to 0}\alpha(x)=\lim_{x\to 0}\beta(x)=0$*, alors la fonction* $\lambda f+\mu g$ *admet le développement limité*

$$(f+g)(x)=(\lambda P+\mu Q)(x)+(\lambda\alpha+\mu\beta)(x). \tag{13.1008}$$

Remarque 13.381.
La forme explicite du reste ne nous interesse pas. Dans la pratique on écrira toujours $(f+g)(x)=(P+Q)(x)+\alpha(x)$, où on appelle α une fonction apportune telle que $\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

Démonstration. Vu les définitions (13.1007) des polynômes P, Q et des restes α et β, l'égalité (13.1008) est une conséquence de la linéarité de la dérivation et de la proposition 13.375

De plus $P+Q$ est un polynôme de degré n dès que P et Q sont des polynômes de degré n, et

$$\lim_{x\to 0}(\lambda\alpha+\mu\beta)(x)=\lim_{x\to 0}\lambda\alpha(x)+\lim_{x\to 0}\mu\beta(x)=0. \tag{13.1009}$$

Par conséquent $\lambda\alpha+\mu\beta$ est la fonction de reste de $\lambda f+\mu g$. □

Exemple 13.382
Calculer le développement de la fonction

$$f(x)=3\sqrt[3]{1+x}+e^{-2x}. \tag{13.1010}$$

Le développement de $\sqrt[3]{1+x}$ est donné par la formule de l'exemple 13.377 avec $\alpha=\frac{1}{3}$. Nous avons donc dans un premier temps

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3+x^3\alpha(x) \tag{13.1011a}$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+x^3\alpha(x). \tag{13.1011b}$$

Nous avons alors

$$3\sqrt[3]{1+x}+e^{-2x}=3\Big[1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+x^3\alpha(x)\Big]+1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^3\beta(x) \tag{13.1012a}$$

$$=4-x+\frac{5}{3}x^2-\frac{31}{27}x^3+x^3\big(\alpha(x)+\beta(x)\big). \tag{13.1012b}$$

△

La condition $\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$ signifie que l'approximation qui consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme n'est pas une trop mauvaise approximation lorsque x est petit. Cela ne signifie rien de plus. En particulier si x est grand, l'approximation polynomiale peut-être (et est souvent) très mauvaise.

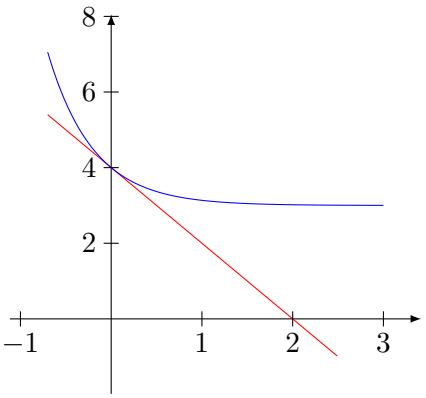
À ce propos, notez qu'un polynôme tend toujours vers $\pm\infty$ lorsque x est grand. Une approximation polynomiale d'une fonction bornée est donc toujours (très) mauvaise pour les grandes valeurs de x.

À titre d'exemple nous avons tracé sur la figure 13.12 la fonction

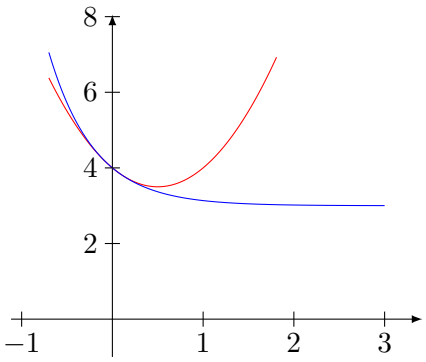
$$f(x)=3\sqrt[3]{x+1}+e^{-2x} \tag{13.1013}$$

et ses développements limités d'ordre 1 à 3. Il est particulièrement visible que l'approximation est assez bonne pour la partie gauche du graphe sur laquelle la fonction est bien croissante, alors qu'elle est franchement mauvaise sur la droite où le graphe ressemble plutôt à une constante [85].

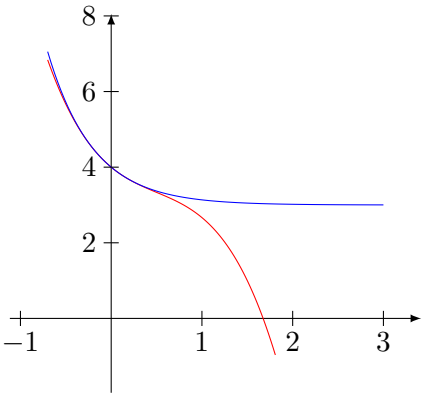
85. Pouvez-vous cependant dire que vaut $\lim_{x\to\infty}f(x)$?



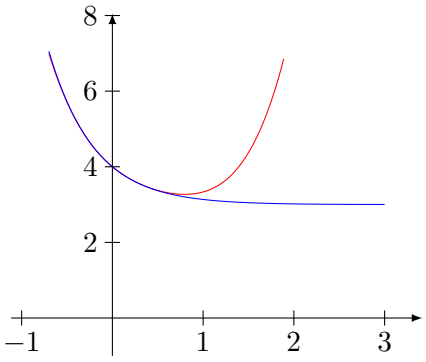
(a) Polyôme d'ordre 1



(b) Polyôme d'ordre 2



(c) Polyôme d'ordre 3



(d) Polyôme d'ordre 4

FIGURE 13.12 – Les développements limités d'ordre de plus en plus grand de la fonction de l'exemple 13.382. La fonction est en bleu et les « approximations » sont en rouge.

13.36.3.2 Développement limité d'un quotient

Proposition 13.383.
Si P_f est le polynôme du développement limité de f à l'ordre n et P_g celui de g, alors nous obtenons le développement limité de f/g à l'ordre n en effectuant la division selon les puissances croissantes de P_f par P_g.

Attention : il s'agit bien de faire une division selon les puissances croissantes, et non une divisions euclidienne. La division euclidienne de A par B consiste à écrire $A = BQ + R$ avec le reste R de degré le plus *petit* possible. Ici nous voulons avoir un reste de degré le plus *grand* possible.

13.36.3.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 13.384.
Soient f et g des fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. Nous supposons que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Alors la composée $f\big(g(x)\big)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en substituant le développement de g à chaque «x» du développement de f, et en supprimant tous les termes de degré plus élevé que n.

13.37 Développement ailleurs qu'à l'origine

Il est intéressant de développer une fonction au voisinage de zéro lorsque nous nous intéressons à son comportement pour les x pas très grands. Il est toutefois souvent souhaitable de savoir le comportement d'une fonction au voisinage d'autres valeurs que zéro.

Pour développer la fonction f autour de x_0, nous considérons la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ que nous développons autour de zéro (pour h). L'objectif est de trouver une polynôme P et une fonction α tels que

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + (x-x_0)^n \alpha(x) & (13.1014a) \\ \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0. & (13.1014b) \end{cases}$$

En pratique, le développement limité à l'ordre n d'une fonction autour d'un point x_0 quelconque à l'intérieur de son domaine prend la forme suivante, qui généralise la formule de Taylor-Young vue dans la proposition 13.375

Proposition 13.385 (Formule de Taylor-Young, cas général)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \\ + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\alpha(x-x_0) \end{aligned} \tag{13.1015}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0. \tag{13.1016}$$

13.38 Développement au voisinage de l'infini

Il est souvent utile de connaitre le comportement d'une fonction pour les grandes valeurs de x et de déterminer ses asymptotes éventuelles. La technique que nous allons utiliser consiste à poser $x = \frac{1}{h}$ et de développer la fonction "auxiliaire" $g(h) = f(1/h)$ autour de $h = 0$. La limite avec $h \to 0^+$ donnera le comportement pour $x \to \infty$ et la limite $h \to 0^-$ donnera le comportement pour $x \to -\infty$.

Dans le cas d'une développement autour de $\pm\infty$ nous ne parlons plus de développement *limité* mais de **développement asymptotique**.

13.38.1 La fonction puissance : remarques pour la suite

Il y a encore de nombreuses choses à dire sur la fonction puissance. Pour savoir lesquelles, voir le thème 32.

13.39 Fonctions réelles de deux variables réelles

Une **fonction réelle de 2 variables réelles** est une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto z = f(x,y)$.

Le **graphe de** f, noté $\operatorname{Gr} f$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{Gr} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A \text{ et } z = f(x,y)\}$$

Les **courbes de niveau** de la fonction f sont obtenues en posant $f(x,y) = \lambda$.

13.39.1 Limites de fonctions à deux variables

Ici nous n'allons pas entrer dans tous les détails, mais simplement mentionner les quelques techniques les plus courantes.

Théorème 13.386.
Soient deux fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si a est un point adhérent au domaine de $g \circ f$ et si

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= b \\ \lim_{y\to b} g(y) &= c, \end{aligned} \tag{13.1017}$$

alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c. \tag{13.1018}$$

Les techniques usuelles sont

(1) La règle de l'étau. Cette technique demande un peu plus d'imagination parce qu'il faut penser à un « truc » différent pour chaque exercice. En revanche, la justification est facile : il y a un théorème qui dit que ça marche.

(2) Lorsqu'on applique la règle de l'étau, penser à

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{13.1019}$$

Cela permet de majorer le numérateur. Attention : ce genre de majoration fonctionne seulement au numérateur : agrandir le dénominateur ferait diminuer la fraction.

(3) Il n'est pas vrai que

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^4} \leqslant \sqrt{x^4 + 2y^4}. \tag{13.1020}$$

En effet, si x est petit, alors $x^2 > x^4$, et non le contraire.

Une technique très efficace pour les limites $(x, y) \to (0, 0)$ est le passage aux coordonnées polaires. Il s'agit de poser

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) & \text{(13.1021a)} \\ y = r\sin(\theta) & \text{(13.1021b)} \end{cases}$$

et puis de faire la limite $r \to 0$.

Si la limite obtenue **ne dépend pas de** θ, alors c'est la limite cherchée. Voici quelque exemples.

Exemple 13.387
Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Tentez de les faire par vous-même avant de regarder la solution qui suit.

(1) Ici la méthode des chemins pour est particulièrement éclairante. Regardons d'abord la fonction sur la droite $x = y$. Nous avons

$$f(x, y) = \frac{x - x}{2x} = 0. \tag{13.1022}$$

Donc la fonction est nulle sur toute la ligne.

Si nous regardons maintenant la ligne verticale $x = 0$, nous avons

$$f(0, y) = \frac{-y}{y} = -1, \tag{13.1023}$$

donc la fonction vaut -1 sur toute la ligne verticale.

(2)

(3) Regardons la technique des coordonnées polaires. Nous remplaçons x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$:

$$f(r,\theta)=\frac{r^4\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{r^2}=r^2\cos(\theta)\sin^3(\theta). \tag{13.1024}$$

Cette fonction tend vers zéro quand $r\to 0$. Nous avons donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0. \tag{13.1025}$$

Pour cet exercice nous pouvons aussi utiliser la règle de l'étau en écrivant d'abord

$$0\leqslant|f(x,y)|\leqslant\frac{|x||y^3|}{|x^2+y^2|}. \tag{13.1026}$$

Mais on a $|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$, $|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$ et $|x^2+y^2|=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$, donc

$$0\leqslant|f(x,y)|\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\to 0. \tag{13.1027}$$

(4) En passant aux polaires, nous avons

$$f(r,\theta)=\frac{r\cos\theta\sin\big(r\sin\theta\big)}{r}=\cos(\theta)\sin\big(r\sin\theta\big). \tag{13.1028}$$

La limite de cette dernière fonction lorsque $r\to 0$ vaut zéro.

Une autre façon de procéder consiste à multiplier et diviser par y de telle façon à faire apparaitre $\sin(y)/y$ dont nous connaissons la limite :

$$f(x,y)=\frac{\sin(y)}{y}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{13.1029}$$

La limite du premier facteur est 1, tandis que le second peut être traité de façon classique en prenant la valeur absolue et en majorant $|x|$ par $\sqrt{x^2+y^2}$.

△

13.39.2 Dérivées partielles

La **dérivée partielle** par rapport à x au point (x,y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \tag{13.1030}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à x en considérant que y est constante.

De la même manière, la dérivée partielle par rapport à y au point (x,y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \tag{13.1031}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à y en considérant que x est constante.

Pour les dérivées partielles secondes,

— $f''_{xx}(x,y)=(f'_x)'_x=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$.

— $f''_{yy}(x,y)=(f'_y)'_y=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

— $f''_{xy}(x,y)=(f'_x)'_y=(f'_y)'_x=f''_{yx}(x,y)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$.

13.39.3 Différentielle et accroissement

La **différentielle totale** de f au point (a,b) est donnée, quand elle existe (!), par la formule

$$df(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy. \tag{13.1032}$$

De la même façon que la formule des accroissements finis disait que $f(x+a) \simeq f(x) + af'(x)$, en deux dimensions nous avons que l'**accroissement** approximatif de f au point (a,b) pour des accroissements Δx et Δy est

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \tag{13.1033}$$

Le **plan tangent** au graphe de f au point $\big(a,b,f(a,b)\big)$ est

$$T_{(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \tag{13.1034}$$

essayez d'écrire l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x)$ au point $x=a$ en terme de la dérivée de f, et comparez votre résultat à cette formule.

Un des principaux théorèmes pour tester la différentiabilité d'une fonction est le suivant.

Théorème 13.388.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Si les dérivées partielles existent dans un voisinage de a et donc continues en a, alors f est différentiable en a.

Le plus souvent, nous prouvons qu'une fonction est différentiable en calculant les dérivées partielles et en montrant qu'elles sont continues.

Dérivation implicite : Soit $F(x,f(x)) = 0$ la représentation implicite d'une fonction $y = f(x)$ alors

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

13.40 Les fonctions à valeurs vectorielles

Jusqu'à présent nous avons vu des fonctions de plusieurs variables qui prenaient leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons maintenant voir ce qu'il se passe lorsque les fonctions prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Une fonction d'une variable est dite **à valeurs vectorielles** lorsque

$$\begin{aligned} f\colon I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13.1035}$$

Les fonctions $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les **composantes** de f. Ce que nous avons raconté à propos des dérivées passe facilement :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(a+\epsilon)-f_1(a)}{\epsilon} \\ \frac{f_2(a+\epsilon)-f_2(a)}{\epsilon} \\ \frac{f_3(a+\epsilon)-f_3(a)}{\epsilon} \end{pmatrix}. \tag{13.1036}$$

En particulier dès que les fonctions f_i sont dérivables, nous avons

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ f'_2(a) \\ f'_3(a) \end{pmatrix} \tag{13.1037}$$

comme dérivée de la fonction. Cette dérivée est un vecteur.

Exemple 13.389
Si

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x^2e^x \\ \cos(x^2) \\ x^3 + x \end{pmatrix}, \tag{13.1038}$$

alors

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2xe^x + x^2e^x \\ -2x\sin(x^2) \\ 3x^2 + 1 \end{pmatrix}. \tag{13.1039}$$

△

13.41 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Ce sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13.1040}$$

En ce qui concerne les dérivées, tout se passe comme avant. Si les dérivées partielles des composantes f_i existent au point $a \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(a) \\ \partial_x f_2(a) \\ \partial_x f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \partial_y f_1(a) \\ \partial_y f_2(a) \\ \partial_y f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \begin{pmatrix} \partial_z f_1(a) \\ \partial_z f_2(a) \\ \partial_z f_3(a) \end{pmatrix}. \tag{13.1041}$$

13.42 Limites à plusieurs variables

Proposition 13.390.
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \tag{13.1042}$$

si et seulement si

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i \tag{13.1043}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ où $f_i(x)$ dénote la i-ème composante de $f(x)$ et ℓ_i la i-ème composante de $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Cette proposition revient à dire que la convergence d'une fonction est équivalente à la convergence de chacune de ses composantes.

Démonstration. L'élément clef de la preuve est le fait que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^p$, nous ayons l'inégalité

$$|u_i| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |u_k|^2} = \|u\|. \tag{13.1044}$$

La norme (dans $\mathbb{R}^p$) d'un vecteur est plus grande ou égale à la valeur absolue de chacune de ses composantes.

Supposons que nous ayons une fonction dont chacune des composantes a une limite en a : $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$. Montrons que dans ce cas la fonction f tend vers ℓ. Si nous considérons $\varepsilon > 0$, par définition de la limite de chacune des fonctions f_i, il existent des δ_i tels que

$$\|x - a\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon. \tag{13.1045}$$

Notez que la norme à gauche est une norme dans $\mathbb{R}^m$ et que celle à droite est une simple valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Considérons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\dots n}$. Si $\|x-a\| < \delta$, alors

$$\|f(x)-\ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)-\ell_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2} = \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon. \tag{13.1046}$$

Nous voyons qu'en choisissant les δ_i tels que $|f_i(x)-\ell_i| < \varepsilon$, nous trouvons $\|f(x)-\ell\| < \sqrt{n}\varepsilon$. Afin d'obtenir $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$, nous choisissons donc les δ_i de telle manière a avoir $|f_i(x)-\ell_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$.

Nous avons donc prouvé que la limite composante par composante impliquait la limite de la fonction. Nous devons encore prouver le sens inverse.

Supposons donc que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, et prouvons que nous ayons $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$ pour chaque i. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\|x-a\| < \delta$ implique $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$. Avec ces choix, nous avons

$$|f_i(x)-\ell_i| \leqslant \|f(x)-\ell\| < \varepsilon \tag{13.1047}$$

où nous avons utilisé la majoration (13.1044) avec $f(x)-\ell$ en guise de u. □

De même, pour la continuité nous avons la proposition suivante :

Proposition 13.391.
Soit une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si chacune de ses composantes l'est, c'est-à-dire si et seulement si chacune des fonctions $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ est continue en a.

Essayez de prouver cette proposition directement par la définition de la continuité, en suivant pas à pas la démonstration de la proposition 13.390.

Proposition 13.392.
Soit $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et a, un point du domaine de f telle que $f(a) > 0$. Alors il existe un rayon r tel que $f(x) > 0$ pour tout x dans $B(a,r)$.

Cette proposition signifie que si la fonction est strictement positive en un point, alors elle restera strictement positive en tous les points « pas trop loin ».

Démonstration. Prenons $\varepsilon = f(a)/2$ dans la définition de la continuité. Il existe donc un rayon δ tel que pour tout x dans $B(a,\delta)$,

$$|f(x)-f(a)| \leqslant \frac{f(a)}{2}, \tag{13.1048}$$

en d'autres termes, $f(x) \in B\big(f(a), \frac{f(a)}{2}\big)$. évidemment aucun nombre négatif ne fait partie de cette dernière boule lorsque $f(a)$ est strictement positif. □

Corollaire 13.393.
Si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m \text{ tels que } f(x) \neq 0\} \tag{13.1049}$$

est ouvert.

Démonstration. Soit $x \in A$. Si $x > 0$ (le cas $x < 0$ est laissé en exercice), alors il existe une boule autour de x sur laquelle f reste strictement positive (proposition 13.392). Cette boule est donc contenue dans A. Étant donné qu'autour de chaque point de A nous pouvons trouver une boule contenue dans A, ce dernier est ouvert. □

Exemple 13.394
Soit $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles. Nous allons montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un

ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. L'identification entre les vecteurs et les matrices consiste simplement à « déplier » la matrice pour en faire un vecteur. Par exemple, en dimension deux,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \tag{13.1050}$$

En dimension 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9. \tag{13.1051}$$

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant est un polynôme en les composantes de la matrice. En dimension deux, nous avons

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \tag{13.1052}$$

mais en écriture « dépliée », nous pouvons aussi bien écrire

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{13.1053}$$

En dimension 3, le déterminant est donc un polynôme des 9 variables qui apparaissent dans le vecteur « déplié ». En général, dans $\mathbb{R}^{n^2}$, nous considérons donc le polynôme $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ qui à un vecteur $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ fait correspondre le déterminant de la matrice obtenue en « repliant » le vecteur X.

Donc dans $\mathbb{R}^{n^2}$, l'ensemble des matrices inversibles est donné par l'ensemble des vecteurs sur lesquels le polynôme det ne s'annule pas, c'est-à-dire

$$\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \text{ tels que } \det(X) \neq 0\}. \tag{13.1054}$$

Mais le déterminant est un polynôme, et donc une fonction continue. Cet ensemble est par conséquence ouvert par le corollaire 13.393. △

La proposition suivante montre que la limite peut « passer à travers » les fonctions continues.

Proposition 13.395 (limite de fonction composée)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ et $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\lim_{x \to a} g(x) = p \tag{13.1055a}$$

$$\lim_{y \to p} f(y) = q \tag{13.1055b}$$

Alors nous avons $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = q$.

Démonstration. Comme presque toute preuve à propos de limite ou de continuité, nous commençons par choisir $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un δ tel que $\|x - a\| \leqslant \delta$ implique $\|f\big(g(x)\big) - q\| \leqslant \varepsilon$.

La limite (13.1055b) impose l'existence d'un $\tilde{\delta}$ tel que $\|y-p\| \leqslant \tilde{\delta}$ implique $\|f(y)-q\| \leqslant \varepsilon$, tandis que la limite (13.1055a) donne un δ tel que $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique $\|g(x)-p\| \leqslant \tilde{\delta}$ (nous avons pris $\tilde{\delta}$ en guise de ε dans la définition de la limite pour g).

Avec ces choix, si $\|x-a\| \leqslant \delta$, alors $\|g(x)-p\| \leqslant \tilde{\delta}$, et par conséquent,

$$\|f\big(g(x)\big)-q\| \leqslant \varepsilon, \tag{13.1056}$$

ce que nous voulions. □

De façon pragmatique, la proposition 13.395 nous fournit une formule pour les limites de fonctions composée :

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim_{y\to\lim_{x\to a} g(x)} f(y) \tag{13.1057}$$

lorsque f est continue.

Remarque 13.396.
La formule (13.1057) ne peut pas être utilisée à l'envers. Il existe des cas où $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=q$, et $\lim_{x\to a} f(x)=p$ sans pour autant avoir $\lim_{y\to q} g(y)=q$. Par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{13.1058a}$$

$$f(x) = |x|. \tag{13.1058b}$$

Nous avons $(g\circ f)(x)=2$ pour tout x, ainsi que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, mais la limite $\lim_{y\to 0} g(y)$ n'existe pas.

13.43 Champs de vecteurs

Un champ de vecteur est une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Géométriquement, il s'agit simplement de mettre un vecteur en chaque point de l'espace. Cela arrive très souvent en physique.

Exemple 13.397
Si un fluide (eau, gaz) coule dans un tube, en tout point le point a une vitesse, qui sera un vecteur généralement dirigé le long du tube. △

Exemple 13.398
La force d'attraction de la Terre sur une masse m située au point $r=(x,y,z)$ est donnée par

$$F(r) = -G\frac{Mmr}{\|r\|^3}. \tag{13.1059}$$

Dans cette expression, tant r que $F(r)$ sont des vecteurs. Nous l'avons représenté sur la figure 13.13.

L'application

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ r &\mapsto F(r) \end{aligned} \tag{13.1060}$$

est le champ gravitationnel de la Terre.

△

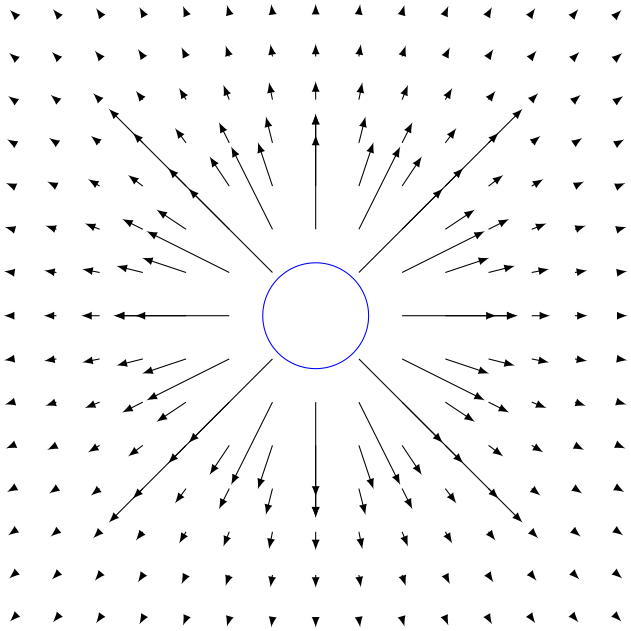


FIGURE 13.13 – Le champ de gravitation de la Terre.

13.43.1 Matrice jacobienne

La **matrice jacobienne** de la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ au point $a \in \mathbb{R}^3$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, c'est-à-dire

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix}. \tag{13.1061}$$

Exemple 13.399
Si

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xye^z \\ x^2 + \cos(yz) \\ xyz \end{pmatrix}, \tag{13.1062}$$

alors

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ 2x & -z\sin(yz) & -y\sin(yz) \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}. \tag{13.1063}$$

△

13.44 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla

Nous avons déjà vu le gradient d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{13.1064}$$

Afin de définir la divergence et le rotationnel, nous introduisons ∇ sous une forme un peu plus abstraite comme le « vecteur »

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{13.1065}$$

Vue comme ça, la formule (13.1064) est claire.

Si F est un champ de vecteurs, nous introduisons la **divergence** de F par

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{13.1066}$$

Cela est une fonction. Et nous introduisons le rotationnel du champ de vecteur F par

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) e_x - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) e_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) e_z. \end{aligned} \tag{13.1067}$$

Cela est un champ de vecteur. En utilisant le symbole complètement antisymétrique ϵ_{ijk}, le rotationnel d'un champ de vecteur peut s'écrire

$$\nabla \times F = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i F_j e_k. \tag{13.1068}$$

Le gradient, la divergence et le rotationnel consistent à appliquer simplement à ∇ est trois produits qu'on peut effectuer sur un vecteur :

(1) Le produit d'un vecteur par un scalaire multiplie chacune des composantes :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}. \tag{13.1069}$$

(2) Le produit scalaire d'un vecteur avec un autre vecteur donne lieu à la divergence :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{13.1070}$$

(3) Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{13.1071}$$

Ces trois opérations joueront un rôle central en électromagnétisme dans les équations de Maxwell.

Exemple 13.400
Soit $F(x, y, z) = xe_x + xye_y + e_z$, c'est-à-dire

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.1072}$$

Son rotationnel est donné par

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0-0)e_x - (0-0)e_y + (y-0)e_z = ye_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}. \tag{13.1073}$$

△

Afin d'étudier comment se comporte la composition de ces opérateurs, nous aurons besoin de ce lemme que nous n'énoncerons pas précisément.

Lemme 13.401.
Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors on peut permuter l'ordre des dérivées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{13.1074}$$

La fonction

$$(x,y,z) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) \tag{13.1075}$$

sera notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \tag{13.1076}$$

Il y a deux propriétés importantes :

Théorème 13.402.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \tag{13.1077}$$

Si $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^2, alors

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0. \tag{13.1078}$$

Démonstration. Ce sont seulement deux calculs qui manipulent les définitions. Pour le premier, la divergence de f est le champ de vecteurs

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y + \frac{\partial f}{\partial z}e_z. \tag{13.1079}$$

En mettant ce champ dans la définition du rotationnel,

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} &= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]e_x\\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_y\\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_z.\end{aligned} \tag{13.1080}$$

En utilisant le lemme 13.401, chacun des termes fait zéro.

La seconde propriété se démontre en utilisant le même type de calcul. □

Remarque 13.403.
Il n'y a pas de propriétés du même style pour la combinaison $\nabla \times (\nabla \cdot F)$ pour le rotationnel de la divergence. En effet la divergence d'un champ de vecteur est une fonction, et il n'y a pas de rotationnel pour une fonction.

13.45 Interprétation géométrique et physique de la divergence

En physique, on dit qu'un champ de vecteurs à divergence nulle est **incompressible**. Nous allons essayer de comprendre pourquoi. Lorsqu'un fluide incompressible se déplace, il faut qu'en chaque point il y ait autant de fluide qui rentre que de fluide qui sort. Nous allons voir sur quelques exemples que la divergence d'un champ de vecteurs est le « bilan de masse » d'un fluide qui se déplace selon le champ de vecteurs.

Si en un point la divergence est positive, cela signifie qu'il y a une perte de masse et si la divergence est négative, cela signifie qu'il y a une accumulation de masse.

Prenons par exemple un fluide qui se déplace selon le champ de vitesse montré à figure 13.14.

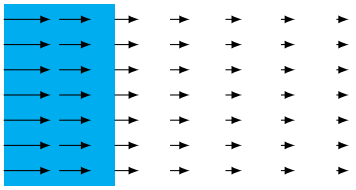


FIGURE 13.14 – Le champ de vecteurs $F(x,y) = \frac{1}{x}(1,0)$.

Étant donné que la vitesse diminue lorsque x avance, il y a une accumulation de fluide. Regardez en effet la quantité de fluide qui rentre dans le rectangle par rapport à la quantité de fluide qui en sort. Ce champ de vecteurs a pour équation :

$$F(x,y) = \frac{1}{x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/x\\0\end{pmatrix}. \tag{13.1081}$$

Sa divergence vaut donc

$$(\nabla \cdot F)(x,y) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y) + \underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y)}_{=0} = -\frac{1}{x^2}. \tag{13.1082}$$

Cette divergence étant négative, il y a bien accumulation de fluide en tout point, et d'autant plus que x est petit.

Exemple 13.404

Prenons le champ de vecteurs tournant

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix} \tag{13.1083}$$

représenté à la figure 13.15. Cela est un vecteur qui est constamment perpendiculaire au rayon.

Un fluide dont la vitesse serait donné par ce champ de vecteur se contente de tourner. Intuitivement il ne devrait pas y avoir de divergence parce qu'il n'y a aucune accumulation de fluide. En effet,

$$\nabla \cdot F(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0. \tag{13.1084}$$

△

Exemple 13.405

Prenons le cas du champ de force de gravitation :

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}. \tag{13.1085}$$

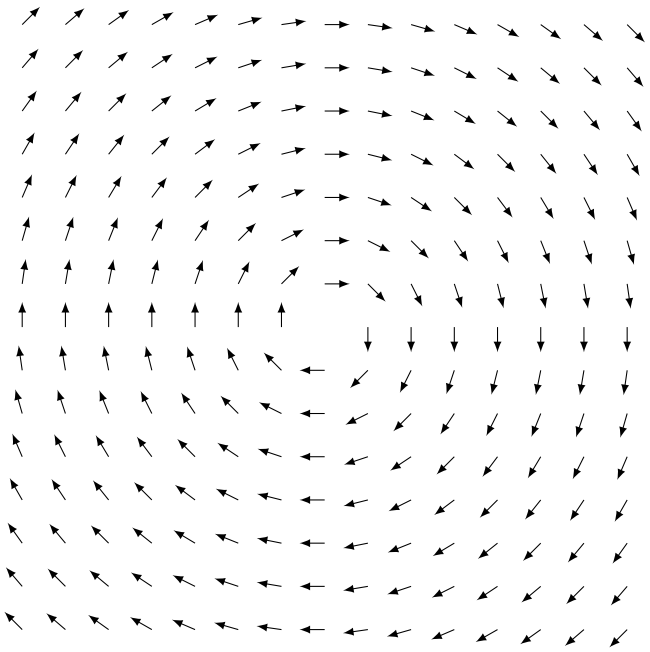


FIGURE 13.15 – Le champ de vecteurs $F(x,y) = (y,-x)$.

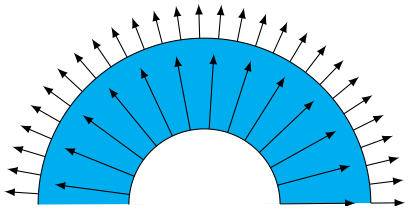


FIGURE 13.16 – Le champ de vecteur de la gravité. Nous avons tracé, sur les deux cercles la même densité de vecteurs, c'est-à-dire le même nombre de vecteurs par unité de surface.

Nous pouvons rapidement remarquer que $\nabla \cdot F = 0$. Est-ce que cela peut se comprendre sur le dessin de la figure 13.16 ?

Essayons de voir combien de fluide entre dans la zone bleue et combien en sort. D'abord, il est certain que les vecteurs qui sortent sont plus courts que ceux qui rentrent, ce qui voudrait dire qu'il y a plus de fluide qui rentre. Mais on voit également que le *nombre* de vecteurs qui sortent est plus grand parce que la seconde sphère est plus grande et qu'il y a un vecteur en chaque point de la sphère.

Intuitivement nous pouvons dire que la quantité qui rentre dans la sphère de rayon r_1 donnée par la taille des vecteurs entrants multiplié par la surface de la sphère, c'est-à-dire

$$4\pi r_1^2 \|F(x,y,z)\|, \tag{13.1086}$$

mais $\|F(x,y,z)\| = \frac{1}{r_1^2}$, donc la quantité de fluide entrant est 4π. La quantité de fluide sortant sera la même.

Cela explique deux choses

(1) Pourquoi les forces de gravitation et électromagnétiques sont en $1/r^2$; c'est parce que nous vivons dans un monde avec trois dimensions d'espace. En étudiant très précisément le champ de gravitation, certains physiciens espèrent trouver des déviations expérimentales par rapport à la règle du $1/r^2$; cela *pourrait* être un signe que l'espace contient des dimensions supplémentaires.

(2) Pourquoi il y a un 4π comme coefficient dans beaucoup d'équations en électromagnétisme ; en particulier dans certaines anciennes unités de flux.

△

Remarque 13.406.
Nous allons voir plus loin comment s'assurer que l'équation (13.1086) représente bien la « quantité de fluide » qui rentre dans la zone délimitée

13.46 Quelques formules de Leibnitz

La divergence étant une combinaison de dérivées, il n'est pas tellement étonnant que la divergence de produits donne lieux à des formules en deux termes. Si f est une fonction et si F et G sont des champs de vecteurs, nous avons la proposition suivante.

Proposition 13.407.
Si F et G sont des champs de vecteurs dont toutes les dérivées partielles existent, alors

(1) $\nabla \cdot (fF) f\nabla \cdot F + F \cdot \nabla f$

(2) $\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot \nabla \times F - F \cdot \nabla \times G$

(3) $\nabla \times (fF) = f\nabla \times F + \nabla f \times F$.

Chapitre 14

Analyse sur des groupes

14.1 Action de groupe et connexité

Sources : [226] et wikipédia.

Théorème 14.1.
Soit G un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini[1] *agissant continument et transitivement sur un espace topologique localement compact E. Alors l'application*

$$\begin{aligned}\varphi\colon G/G_x &\to E\\ [g] &\mapsto g\cdot x\end{aligned} \tag{14.1}$$

est un homéomorphisme.

Lemme 14.2.
Si G et H sont des groupes topologiques tels que G/H et H sont connexes[2]*, alors G est connexe.*

Démonstration. Soit $f\colon G\to\{0,1\}$ une fonction continue. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon G/H &\to \{0,1\}\\ [g] &\mapsto f(g).\end{aligned} \tag{14.2}$$

D'abord nous montrons qu'elle est bien définie. En effet si $h\in H$ nous aurions $\tilde{f}([gh])=f(gh)$, mais étant donné que H est connexe, l'ensemble gH est également connexe ; la fonction continue f est donc constante sur gH. Nous avons donc $f(gh)=f(g)$.

Étant donné que G/H est également connexe, la fonction $\tilde{f}$ doit être constante. Si g_1 et g_2 sont deux éléments du groupe, nous avons $f(g_1)=\tilde{f}([g_1])=\tilde{f}([g_2])=f(g_2)$. Nous en déduisons que f est constante et que G est connexe. □

Théorème 14.3.
Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe, le groupe $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes.

Démonstration. La seconde assertion découle de la première parce que les matrices de déterminant 1 et celles de déterminant -1 ne peuvent pas être reliées par un chemin continu tandis que l'application

$$M\mapsto\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}M \tag{14.3}$$

est un homéomorphisme entre les matrices de déterminant 1 et celles de déterminants -1. Montrons donc que $G=\mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs pour $n\geqslant 2$ en procédant par récurrence sur la dimension.

1. Cela signifie qu'il est une réunion dénombrable de compacts
2. Définition 7.38.

Nous acceptons le résultat pour $G = \mathrm{SO}(2)$. Notons que nous en avons besoin pour prouver que la sphère S^{n-1} est connexe.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ agit, par définition, de façon transitive sur la sphère S^{n-1}. Soit $a \in S^{n-1}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1} \tag{14.4a}$$
$$G_a \simeq \mathrm{SO}(n-1) \tag{14.4b}$$

où G_a est le fixateur de a dans G. Pour montrer le second point, nous considérons $\{e_i\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M \in G$ telle que $Ma = e_1$. Le fixateur de e_1 est évidemment isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$ parce qu'il est constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{14.5}$$

où $(a_{ij}) \in \mathrm{SO}(n-1)$. L'application

$$\begin{aligned} \alpha\colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM \end{aligned} \tag{14.6}$$

est un isomorphisme entre G_a et $\mathrm{SO}(n-1)$. Le théorème 14.1 nous montre alors que, en tant qu'espaces topologiques,

$$G/G_a = S^{n-1}. \tag{14.7}$$

L'hypothèse de récurrence montre que $G_a = \mathrm{SO}(n-1)$ est connexe tandis que nous savons que S^{n-1} est connexe. Le lemme 14.2 conclut que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe. □

Lemme 14.4.
Une bijection continue entre un espace compact et un espace séparé est un homéomorphisme.

Proposition 14.5.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ *et* $\mathrm{SU}(n)$ *sont connexes.*

Démonstration. Soit $G(n)$ le groupe $\mathrm{SU}(n)$ ou $\mathrm{U}(n)$. Ce groupe opère transitivement sur la sphère complexe

$$S^{n-1}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \langle z, z\rangle = \sum_k |z_k|^2 = 1\}. \tag{14.8}$$

Cet ensemble est le même que S^{2n-1} parce que $|z_k| = x_k^2 + y_k^2$. Nous avons une bijection continue entre S^{n-1} et $S^{n-1}_{\mathbb{C}}$ et donc un homéomorphisme (lemme 14.4). Soit $a \in S^{n-1}_{\mathbb{C}}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1}_{\mathbb{C}} \tag{14.9a}$$
$$G_a \simeq G(n-1). \tag{14.9b}$$

La seconde ligne est un isomorphisme de groupe et un homéomorphisme. Il est donné de la façon suivante. D'abord le fixateur de e_1 dans $G(n)$ est donné par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{14.10}$$

où $(a_{ij}) \in G(n-1)$. Par ailleurs si M est une matrice de $G(n)$ telle que $Ma = e_1$, nous avons l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha\colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Encore une fois, cela est un homéomorphisme par le lemme 14.4. Par composition nous avons $G_a \simeq G(n-1)$ et un homéomorphisme

$$G(n)/G_a = S^{n-1}_{\mathbb{C}}. \tag{14.12}$$

Le groupe G_a et l'ensemble $S^{n-1}_{\mathbb{C}}$ étant connexes, le groupe $G(n)$ est connexe par le lemme 14.2. □

Lemme 14.6 ([168]).
Si G est un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ alors son groupe dérivé[3] *l'est également.*

Démonstration. Soit S_m l'ensemble des produits de m commutateurs de G :

$$S_m = \{g_1, \dots, g_m \text{ où les } g_i \text{ sont des commutateurs}\}. \tag{14.13}$$

La partie S_m est l'image de G par l'application continue

$$\begin{aligned} \underbrace{G \times \dots \times G}_{2m \text{ facteurs}} &\to G \\ (g_1, h_1, g_2, h_2, \dots, g_m, h_m) &\mapsto [g_1, h_1] \dots [g_m, h_m] \end{aligned} \tag{14.14}$$

En tant qu'image d'un connexe par une application continue, S_m est connexe par la proposition 7.84. Vu que les S_m ont l'identité en commun, le groupe dérivé

$$D(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \tag{14.15}$$

est également connexe. □

14.2 Espaces de matrices

L'ensemble des matrices est un espace vectoriel. Nous identifions $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$; plus précisément, nous identifions une matrice

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} \tag{14.16}$$

avec le vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, où $a_{i,j} = x_{(n-1)i+j}$.

14.2.1 Dilatations et transvections

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $n \geqslant 2$.

Théorème-définition 14.7 ([168]).
Soit une application linéaire $u : E \to E$ dont les points fixes forment un hyperplan noté H d'équation $H = \ker(f)$ avec $f \in E^*$.

(1) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1a) $\det(u) \neq 1$

(1b) L'application u est diagonalisable et a une valeur propre qui vaut $\det(u) \neq 1$.

(1c) $\mathrm{Image}(u - \mathrm{Id}) \nsubseteq H$.

(1d) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$ *avec* $\lambda \neq 1$.

(2) Les affirmation suivantes sont équivalentes :

(2a) Il existe $a \in H$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

3. Définition 2.21.

(2b) Dans une base adaptée, la matrice de u est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.17}$$

(3) Les conditions (1a)-(1d) sont respectées si et seulement si les conditions (2a)-(2b) ne sont pas respectées (elles sont les négations l'une de l'autre.).

Un endomorphisme qui est soit l'identité soit respecte les conditions (1) est une ***dilatation****. Un endomorphisme qui est soit l'identité soit qui vérifie les conditions (2) est une* ***transvection*** *(dans les deux cas il faut que les points fixes forment un hyperplan).*

Notons que selon cette terminologie, l'application $x \mapsto \lambda x$ n'est pas une dilatation mais un produit de dilatations.

Démonstration. Nous allons prouver plein d'implications ...

(1a) implique (1b) Le théorème de la base incomplète (voir remarque 4.12) permet de considérer une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ soit une base de H. Dans cette base, la matrice de u est de la forme suivante (les cases non remplies sont nulles et les étoiles correspondent à des valeurs inconnues mais pas spécialement nulles) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & * \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{14.18}$$

Le fait que le déterminant de u ne soit pas 1 implique que $\lambda \neq 1$. Par conséquent le polynôme caractéristique

$$\chi_u(X) = (1 - X)^{n-1}(\lambda - X) \tag{14.19}$$

possède une racine $\lambda \neq 1$, et donc u possède un vecteur propre v pour cette valeur[4]. Le vecteur v est linéairement indépendant de $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ (parce que vecteur propre de valeur propre différente). Par conséquent l'ensemble $\{e_1, \dots, e_{n-1}, v\}$ est une base par la proposition 4.16. Cela est une base de vecteurs propres et donc une base de diagonalisation[5].

(1b) implique (1c) Nous nommons maintenant $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base de diagonalisation. Nous avons $u(e_n) = \lambda e_n$ avec $\det(u) = \lambda \neq 1$. Nous avons

$$(u - \mathrm{Id})(e_n) = (\lambda - 1)e_n \notin H, \tag{14.20}$$

ce qui prouver que l'image de e_n par $u - \mathrm{Id}$ n'est pas dans H.

(1c) implique (1d) Reprenons une base $\{e_1, \dots, , e_n\}$ donnant la matrice (14.18). Il existe $x \in E$ tel que $u(x) - x$ n'est pas dans H, c'est-à-dire tel que $u\big(u(x) - x\big) \neq u(x) - x$. Nous en déduisons que

$$u^2(x) - 2u(x) + x \neq 0 \tag{14.21}$$

ou encore que

$$(X - 1)^2(u)x \neq 0. \tag{14.22}$$

C'est-à-dire que $(X - 1)^2$ n'est pas un polynôme annulateur de u. Or ce serait le cas si $X - 1$ était le polynôme minimal (proposition 11.135). Le polynôme caractéristique étant

4. Proposition 11.157.

5. Nous pourrions en dire à peine plus et prouver le point (1d), mais cela ne servirait à rien parce que nous voulons prouver les équivalences et qu'il faudra quand même prouver que (1c) implique (1d).

$(X-1)^{n-1}(X-\lambda)$ (et étant annulateur[6]), le polynôme minimal est de la forme

$$\mu_u(X) = \begin{cases} (X-1)(X-\lambda) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ X-1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \tag{14.23}$$

Dans notre cas nous venons de voir que ce n'est pas $X-1$ et donc c'est $(X-1)(X-\lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.

Nous devons trouver une base de diagonalisation ... Supposons

$$u(e_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \lambda e_n, \tag{14.24}$$

dans lequel nous venons de prouver que $\lambda \neq 1$, et cherchons

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n} p_j e_j \tag{14.25}$$

de telle sorte à avoir $u(e'_n) = \lambda e_n$. Nous avons

$$u(e'_n) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j u(e_j) + p_n u(e_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (p_j + p_n a_j) e_j + p_n \lambda e_n. \tag{14.26}$$

En égalisant à $\lambda \sum_{j=1}^{n} p_j e_j$, il vient

$$p_j + p_n a_j = \lambda p_j \tag{14.27}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n-1$ et la condition triviale $p_n \lambda = \lambda p_n$ pour $j = n$. Nous en déduisons que le choix

$$p_j = \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} \tag{14.28}$$

fonctionne (parce que $\lambda \neq 1$ comme nous l'avons démontré plus haut). En bref, il suffit de poser

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} e_j + p_n e_n \tag{14.29}$$

avec p_n au choix pour avoir une base $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e'_n\}$ de diagonalisation de u avec $\lambda \neq 1$ comme dernière valeur propre.

(1d) implique (1a) Évident ... encore qu'il faut invoquer l'invariance du déterminant par changement de base.

Nous avons terminé la première série d'équivalences. Nous continuons avec la seconde.

(2a) implique (2b) Nous prenons $e_{n-1} = a$ et nous complétons en une base de H. Pour e_n il suffit de prendre n'importe quel vecteur v tel que $f(v) \neq 0$ (qui existe parce que $f = 0$ est seulement un hyperplan), et de le normaliser.

Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée parce que $u(e_n) = e_n + f(e_n)a = e_n + e_{n-1}$ du fait que $e_{n-1} = a$ et $f(e_n) = 1$.

(2b) implique (2a) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ cette base. En prenant $a = e_{n-1}$ et en posant $x = \sum_k x_k e_k$ nous avons

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k + x_n(e_{n-1} + e_n) = x + x_n e_{n-1} = x_n a. \tag{14.30}$$

Mais vu que $f(x) = \sum_i f_i x_i$, et que $f(e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ nous avons $f(x) = f_n x_n$. Il n'y a cependant pas de raisons d'avoir $f_n = 1$. Cependant en définissant

$$e'_i = \frac{1}{f_n} e_i \tag{14.31}$$

6. Théorème de Cayley-Hamilton 11.154.

nous avons bien $u(e'_n) = \frac{1}{f_n}(e_{n-1} + e_n) = e'_{n-1} + e'_n$. Donc dans cette base nous avons encore la matrice de u de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{14.32}$$

mais cette fois avec $f(e'_n) = 1$.

Nous avons terminé avec la seconde série d'équivalences. Il nous reste à prouver que la première est équivalente à la négation de la seconde.

non (1c) implique (2a) Considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$ et posons $a = u(x_0) - x_0 \in \text{Image}(u - \text{Id})$. Par la négation de (1c) nous avons $a \in H$. De plus $x_0 \notin H$ (sinon $f(x_0) = 0$) donc $u(x_0) \neq x_0$ et $a \neq 0$.

Nous montrons que ce choix de a fonctionne : $u(x) = x + f(x)a$ pour tout $x \in E$. Nous faisons cela séparément pour $x \in H$ et pour $x = x_0$.

Si $h \in H$ alors $u(h) = h$ et $f(h) = 0$ donc $h + f(h)a = h = u(h)$. Si $x = x_0$ alors $u(x_0) = a + x_0$ (cela est la définition de a) et$x_0 + f(x_0)a = x_0 + a$.

(2b) implique non (1a) Dans une base adaptée nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{14.33}$$

et donc $\det(u) = 1$, ce qui contredit (1a).

□

Remarque 14.8.
Nous notons E_{ij} la matrice qui possède uniquement 1 en position (i, j). C'est-à-dire que $\big(E_{ij}\big)_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Soit H l'hyperplan des points fixes de f. Dans une base contenant une base de H, la matrice d'une transvection a pour forme type :

$$T_{ij}(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda E_{ij} \tag{14.34}$$

avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et une dilatation a pour forme type la matrice diagonale

$$D_i(\alpha) = \mathbb{1} + (\alpha - 1)E_{ii} \tag{14.35}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Bien entendu, en choisissant une base quelconque, les matrices des dilatations et des translations peuvent avoir des formes différentes.

Lemme 14.9.
Quelques manipulations de lignes et de colonnes pour les matrices.

(1) La multiplication à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de ligne

$$L_i \to L_i + \lambda L_j. \tag{14.36}$$

(2) La multiplication à droite par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de colonne

$$C_j \to C_j + \lambda C_i. \tag{14.37}$$

(3) La multiplication à gauche par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ revient à la substitution de lignes

$$\begin{cases} L_i \to L_j & \text{(14.38a)} \\ L_j \to -L_i. & \text{(14.38b)} \end{cases}$$

Note qu'il n'est pas possible d'inverser deux lignes à l'aide de transvections sans changer un signe parce que les transvections sont de déterminant 1 alors que l'inversion de lignes change le signe du déterminant.

Démonstration. Point par point.

Pour (1) Nous devons prouver que

$$\big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl} = \begin{cases} A_{kl} & \text{si } k \neq i \\ A_{il} + \lambda A_{jl} & \text{si } k = i. \end{cases} \tag{14.39}$$

Un peu de calcul matriciel avec utilisation modérée des indices donner :

$$\big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl} = \sum_s \big(T_{ij}(\lambda)\big)_{ks} A_{sl} \tag{14.40a}$$

$$= \sum_s \delta_{ks}A_{sl} + \lambda\delta_{ik}\delta_{js}A_{sl} \tag{14.40b}$$

$$= A_{kl} + \lambda\delta_{ik}A_{jl}. \tag{14.40c}$$

Pour (2) C'est la même chose.

Pour (3) Si nous appliquons successivement ces trois matrices (de droite à gauche) nous effectuons les substitutions :

$$\begin{cases} L'_i = L_i + L_j \\ L'_j = L_j \end{cases} \text{ suivit de } \begin{cases} L''_i = L'_i \\ L''_j = L'_j - L'_i \end{cases} \text{ et de } \begin{cases} L'''_i = L''_i + L''_j \\ L'''_j = L''_j. \end{cases} \tag{14.41}$$

En effectuant ces substitutions,

$$L'''_i = L''_i + L''_j = L'_i + (L'_j - L'_i) = L'_j = L_j \tag{14.42}$$

et

$$L'''_j = L''_j = L'_j - L'_i = L_j - (L_i + L_j) = -L_i, \tag{14.43}$$

ce qu'il fallait.

□

Proposition 14.10 ([227])**.**
Soient $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

(1) Si $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, il existe des transvections $U_1,\dots,U_r$, $V_1,\dots,V_s$ telles que

$$A = U_1 \dots U_r \, D_n\big(\det(A)\big) \, V_1 \dots V_s. \tag{14.44}$$

(2) L'ensemble des transvections engendre le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

(3) L'ensemble des transvections et des dilatations engendre le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Nous allons montrer que toutes les matrices de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être écrites comme produits de matrices de la forme (14.34). Cela montrera qu'étant donné un endomorphisme f et une base *pas spécialement liée à* f, il est possible décrire la matrice de f comme produit de transvections dont les hyperplans invariants sont « contenus » dans cette base. Cela suffit à prouver que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ grâce au lemme 2.8.

Toutes les transvections ont un déterminant égal à 1. Donc le groupe engendré par les transvections est inclus dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$. Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$; nous allons utiliser le pivot de Gauss pour la diagonaliser. Étant donné que A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $A_{i1} \neq 0$ alors une multiplication à gauche par $L_{1i}\big((A_{11}-1)/A_{i1}\big)$ effectue la substitution

$$L_1 \to L_1 - \frac{A_{11}-1}{A_{i1}} L_i \tag{14.45}$$

qui met un 1 en la position $(1,1)$. Notons que si la première colonne est de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14.46}$$

avec $s \neq 0$ alors il faut plutôt faire les substitutions $L_2 \to L_2 + L_1$ et ensuite $L_1 \to L_1 - \frac{1}{s}L_2$ pour obtenir le même résultat. En effectuant le pivot avec A_{11}, une suite d'opérations sur les lignes et les colonnes donnent

$$M_1 \dots M_p A N_1 \dots N_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{14.47}$$

où $A_1 \in \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{K})$ et $\det(A_1) = \det(A)$. En continuant de la sorte nous arrivons sur une matrice diagonale [7]

$$M_1 \dots M_{p'} A N_1 \dots N_{q'} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \tag{14.48}$$

avec $\alpha = \det(A)$. En d'autres termes nous avons prouvé qu'il existe des transvections $U_1, \dots, U_r$ et $V_1, \dots, V_s$ telles que

$$A = U_1 \dots U_r \, D_n\big(\det(A)\big) \, V_1 \dots V_s. \tag{14.49}$$

Cela prouve que les transvections et les translations engendrent $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Si $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ alors $D_n\big(\det(A)\big) = 1$ et l'équation (14.49) est un produit de transvections. □

Proposition 14.11.
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est engendré par les endomorphismes inversibles diagonalisables.*

Démonstration. Par la proposition 14.10, le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est engendré par les dilatations et les transvections. Il suffit donc de montrer qu'à leur tour, ces deux types d'endomorphismes sont engendrés par les endomorphismes inversibles et diagonalisables.

Les dilatations sont diagonalisables et inversibles. C'est bon pour elles.

Soit une transvection u, et une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ dans laquelle u est de la forme (14.17). Nous considérons l'endomorphisme $d\colon E \to E$ défini par $d(e_k) = ke_k$. Cet endomorphisme est diagonalisable parce que son polynôme minimal, $\mu_d = \prod_{k=1}^{n}(X-k)$, est scindé à racines simples (voir le théorème 11.167).

Nous avons évidemment $u = d^{-1} \circ (d \circ u)$ où d^{-1} est diagonalisable et inversible. Voyons que $d \circ u$ est également diagonalisable en montrant que μ_d est son polynôme minimal (qui est scindé à racines simples).

Il suffit de montrer que $\mu_d(d \circ u)(e_k) = 0$ pour tout k. Ainsi μ_d sera un polynôme annulateur de $d \circ u$ de degré n, et donc minimal.

Si $k \leqslant n-1$ Alors $u(e_k) = e_k$ et $(d \circ u - n)e_k = (k-n)e_k$. En tout :

$$\mu_d(d\circ u)(e_k) = (d\circ u - 1)(d\circ u - 2)\dots(d\circ u - n)e_k = (k-1)(k-2)\dots(k-n)e_k = 0 \tag{14.50}$$

parce que dans le produit des $k-i$, il y en a forcément un de nul.

Si $k = n$ Dans un premier temps,

$$(d \circ u - n)e_n = d(e_n + e_{n-1}) - ne_n = ne_n + (n-1)e_{n-1} - ne_n = (n-1)e_{n-1}. \tag{14.51}$$

7. Attention : les opérations sur les lignes et le colonnes ne sont pas des opérations de similitude. Il n'est pas question de prétendre ici que toutes les matrices de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ sont diagonales, voir la définition 4.103.

Ensuite

$$\big(d\circ u-(n-1)\big)e_{n-1}=d(e_{n-1})-(n-1)e_{n-1} \tag{14.52a}$$
$$=d(e_{n-1})-(n-1)e_{n-1} \tag{14.52b}$$
$$=(n-1)e_{n-1}-(n-1)e_{n-1} \tag{14.52c}$$
$$=0 \tag{14.52d}$$

Le polynôme μ_d est donc un polynôme scindé à n racines simples annulateur de $d\circ u$, qui est alors diagonalisable et inversible (parce que u et d le sont).

Donc sous la forme $u=d^{-1}(du)$, la transvection u est écrite comme produit de diagonalisables inversibles. □

Proposition 14.12 ([76]).
Soient $n\geqslant 3$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Alors

(1) le groupe dérivé de $D(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}))$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$;

(2) le groupe dérivé de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

La preuve utilise le fait que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ et que les transvections avec les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Voir la proposition 14.10.

14.2.2 Connexité de certains groupes

Lemme 14.13.
Le groupe $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Démonstration. La non connexité par arcs est facile parce que les éléments de déterminant 1 ne peuvent pas être reliés aux éléments de déterminant -1 par un chemin continu restant dans $\mathrm{O}(n)$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires 13.50.

En ce qui concerne la connexité, il faut en dire un peu plus.

Les éléments de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ ont des déterminants égaux à 1 ou à -1. Ces deux parties sont des ouverts (pour la topologie induite de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$). En effet soit $A\in\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ (la partie contenant les déterminants 1 ; ce que l'on va dire tient pour l'autre partie). Alors, vu que le déterminant est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de A dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ dans lequel le déterminant reste entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ (c'est la définition de la continuité avec $\epsilon=1/2$). L'ensemble $\mathcal{O}\cap\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est par définition un ouvert de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et ne contient que des éléments de déterminant 1.

La partie $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est donc non-connexe selon la définition 7.38. □

Lemme 14.14.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont connexes par arcs.

Démonstration. Soient A, une matrice unitaire et Q une matrice unitaire qui diagonalise A. Étant donné que les valeurs propres arrivent par paires complexes conjuguées,

$$QAQ^{-1}=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\theta_r} & \\ & & & & e^{-i\theta_r} \end{pmatrix}. \tag{14.53}$$

Le chemin $U(t)$ obtenu en remplaçant θ_i par $t\theta_i$ avec $t\in[0,1]$ joint QAQ^{-1} à l'identité. Par conséquent $Q^{-1}U(t)Q$ joint A à l'unité. □

Proposition 14.15.
Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe.

Théorème 14.16.
Les matrices normales[8] *forment un espace connexe par arc.*

Démonstration. Soient A une matrice normale et U une matrice unitaire qui diagonalise A. Nous considérons $U(t)$, un chemin qui joint $\mathbb{1}$ à U dans $\mathrm{U}(n)$. Pour chaque t, la matrice

$$A(t) = U(t)^{-1}AU(t) \tag{14.54}$$

est normale. Nous avons donc trouvé un chemin dans les matrices normales qui joint A à une matrice diagonale. Il est à présent facile de la joindre à l'identité.

Toutes les matrices normales étant connexes à l'identité, l'ensemble des matrices normales est connexe. □

Proposition 14.17.
Le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$; par la proposition 14.10(2) nous pouvons écrire

$$A = \prod_{c\in X} T_c(\lambda_c) \tag{14.55}$$

où X est une partie de l'ensemble des couples (i,j) dans $\{1,\dots,n\}$. En posant

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,1] &\to \mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) \\ t &\mapsto \prod_{c\in X} T_c(t\lambda_c) \end{aligned} \tag{14.56}$$

nous avons une application continue de A vers $\mathbb{1}$, dont pour tout t la matrice $\varphi(t)$ est inversible de déterminant1.

Donc tous les éléments de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être reliés à $\mathbb{1}$. Donc $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est connexe par arcs. □

Proposition 14.18 ([228])**.**
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et sa décomposition (14.44). Comme fait précédemment, chacune des transvections peut être reliée à $\mathbb{1}$ par un chemin continu dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. En ce qui concerne le facteur de translation, nous ne pouvons pas simplement prendre le chemin donné par $t \mapsto D_n\big(t\det(A)\big)$ parce que le résultat n'est pas inversible en $t = 0$.

Vu que C^* il existe une application continue $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que $\alpha(0) = \det(A) \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha(1) = 1$. Il suffit alors de prendre $D_n\big(\alpha(t)\big)$ et nous avons un chemin continu de A vers $\mathbb{1}$ restant dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. □

Proposition 14.19.
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *a exactement deux composantes connexes par arcs.*

Démonstration. Nous notons $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ les parties de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ formées des applications de déterminant ± 1 respectivement. Vu le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 13.50), il n'existe pas d'applications continues dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ reliant $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ à $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ tout en restant dans les applications de déterminant non nul[9].

Montrons que $\mathrm{GL}^{\pm}(n,\mathbb{R})$ sont connexes par arcs. Si $A \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ alors grâce à la décomposition (14.44), il existe un chemin continu de A vers $D_n\big(\det(A)\big)$. Vu que $\mathbb{R}^{\pm}$ sont connexes par arc, il est possible de relier $D_n\big(\det(A)\big)$ à $D_n(\pm 1)$ par un chemin continu. □

8. Définition 11.185.

9. Si $\varphi\colon [0,1] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est le chemin, la fonction à mettre dans le théorème des valeurs intermédiaires est la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \det\big(\varphi(t)\big)$.

14.2.3 Densité

Proposition 14.20.
Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$.

Démonstration. D'après le lemme de Schur 11.176, une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est de la forme

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}. \tag{14.57}$$

Les valeurs propres sont sur la diagonale. La matrice est diagonalisable si les éléments de la diagonales sont tous différents. Il suffit maintenant de considérer n suites $(\epsilon_k^{(r)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes vers zéro telles que pour chaque k les nombres $\lambda_r+\epsilon_k^{(r)}$ soient tous différents. La suite de matrices

$$A_k=Q\begin{pmatrix}\lambda_1+\epsilon_k^{(1)} & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n+\epsilon_k^{(n)}\end{pmatrix}Q^{-1}. \tag{14.58}$$

est alors diagonalisable pour tout k et nous avons $\lim_{k\to\infty}A_k=A$. □

Proposition 14.21.
Les matrices inversibles sont denses dans l'ensemble des matrices. C'est-à-dire que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; le lemme de Schur réel 11.188 nous permet d'écrire

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}Q^{-1} \tag{14.59}$$

avec Q orthogonale.

Pour définir A_k nous remplaçons λ_i par $\lambda_i+\epsilon^{(i)k}$ de façon à avoir $\epsilon_k^{(i)}\to 0$ et $\lambda_i+\epsilon_k^{(i)}\neq 0$. En ce qui concerne les blocs, ceux dont le déterminant est non nul, nous n'y touchons pas, et ceux dont le déterminant est nul, nous remplaçons a par $a+\epsilon_k$.

Avec cela, QA_kA^{-1} est une suite dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui converge vers A. □

Proposition 14.22.
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ *alors*

$$e^{\mathrm{Tr}(A)}=\det(e^A). \tag{14.60}$$

Démonstration. Ici, e^A est l'exponentielle soit d'endomorphisme soit de matrice définie par la proposition 12.160.

Le résultat est un simple calcul pour les matrices diagonalisable. Si A n'est pas diagonalisable, nous considérons une suite de matrices diagonalisables A_k dont la limite est A (proposition 14.20). La suite

$$a_k=e^{\mathrm{Tr}(A_k)} \tag{14.61}$$

converge vers $e^{\mathrm{Tr}(A)}$ tandis que la suite

$$b_k=\det(e^{A_k}) \tag{14.62}$$

converge vers $\det(e^A)$. Mais nous avons $a_k=b_k$ pour tout k ; les limites sont donc égales. □

Corollaire 14.23.
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ alors

$$\frac{d}{dt}\Big[\det(e^{tX})\Big]_{t=0} = \mathrm{Tr}(X). \tag{14.63}$$

Démonstration. Nous écrivons la proposition 14.22 pour tX au lieu de X ; pour chaque t nous avons

$$\det\left(e^{tA}\right) = e^{\mathrm{Tr}(tA)} = e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}. \tag{14.64}$$

La dérivation par rapport à t en $t = 0$ donne le résultat attendu. □

Théorème 14.24 (Cayley-Hamilton[229, 230])**.**
Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif quelconque annule son propre polynôme caractéristique

Une autre démonstration est donnée en le théorème 11.154.

Démonstration. La preuve est divisée en plusieurs étapes.

Endomorphisme diagonalisable Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel V de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et χ_u sont polynôme caractéristique. Nous savons que si λ est une valeur propre de u alors $\chi_u(\lambda) = 0$ le théorème 11.150(2). En combinant avec le lemme 11.129, si x est vecteur propre pour la valeur propre λ de u nous avons

$$\chi_u(u)x = \chi_u(\lambda)x = 0. \tag{14.65}$$

Donc tant que u possède une base de vecteurs propres nous avons $\chi_u(u) = 0$.

Le cas complexe Nous nous restreignons à présent (et provisoirement) au cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce qui nous donne $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ par la proposition 14.20. Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ nous considérons une suite de matrices diagonalisables $A_k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})} A$. Pour chaque k nous avons par le point précédent

$$\chi_{u_k}(u_k) = 0. \tag{14.66}$$

Chacune des composantes de $\chi_{u_k}(u_k)$ est un polynôme en les composantes de u_k, ce qui légitime le passage à la limite :

$$\chi_u(u) = 0. \tag{14.67}$$

Le théorème est établi pour toutes les matrices de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et donc aussi pour tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

La cas général Par définition, $\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1})$; les coefficients de X sont des polynômes à coefficients entiers en les composantes de u. En substituant u à X nous obtenons une matrice dont chacune des entrées est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u. Pour chaque i et j entre 1 et n il existe donc un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{Z}(X_1, \ldots, X_{n^2})$ tel que

$$\chi_u(u)_{ij} = P(u_{11}, \ldots, u_{nn}). \tag{14.68}$$

Ces polynômes ne dépendent pas de u ni du corps sur lequel on travaille. Notre but est maintenant de prouver que $P_{ij} = 0$.

Étant donné que le cas complexe (et a fortiori entier) est déjà prouvé nous savons que pour tout $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{Z})$ nous avons $P(u_{11}, \ldots, u_{nn}) = 0$. La proposition 6.158 nous donne effectivement $P = 0$, en conséquence de quoi l'endomorphisme $\chi_u(u)$ est nul.

□

Exemple 14.25
Pour montrer que chaque composante $\chi_u(u)$ est bien un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u, voyons l'exemple 2×2 : $u=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. D'abord

$$\chi_u(X)=\det\begin{pmatrix}a-X & b\\ c & d-X\end{pmatrix}=X^2-(a+d)X+ad-cb. \tag{14.69}$$

Le coefficient de X^2 est 1, celui de X est $-a-d$ et le terme indépendant est $ad-cb$; tout trois sont des polynômes à coefficients entiers en a,b,c,d. Après substitution de X par u,

$$\chi_u(u)_{ij}=(u^2)_{ij}-(a+d)u_{ij}+ad-cb. \tag{14.70}$$

Cela est bien un polynôme à coefficients entiers en les entrées de la matrice u. △

14.2.4 Racine carrée d'une matrice hermitienne positive

Proposition-définition 14.26.
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne[10] *positive, alors il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $A=R^2$. De plus R est un polynôme (de $\mathbb{R}[X]$) en A.*

La matrice R ainsi définie est la ***racine carrée de*** *de A, et est notée $\sqrt{A}$.*

Démonstration. **Existence** Étant donné que A est hermitienne, elle est diagonalisable par une matrice unitaire (proposition 11.186), et ses valeurs propres sont réelles et positives (parce que A est positive). Soit donc P une matrice unitaire telle que

$$P^*AP=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix} \tag{14.71}$$

avec $\alpha_i>0$. Si on pose

$$R=P\begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n}\end{pmatrix}P^*, \tag{14.72}$$

alors $R^2=A$ parce que $P^*P=\mathbb{1}$.

Hermitienne positive La matrice R est hermitienne parce que, avec un peu de notation raccourcie, $R=P^*\sqrt{\alpha}P$ et $R^*=P^*\sqrt{\alpha}P$. D'autre part, elle est positive parce que ses valeurs propres sont les $\sqrt{\alpha_i}$ qui sont positives.

Polynôme Nous montrons maintenant que la matrice R est un polynôme en A. Pour cela nous considérons un polynôme Q tel que $A(\alpha_i)=\sqrt{\alpha_i}$ pour tout i. Soit $\{e_i\}$ une base de diagonalisation de A : $Ae_i=\alpha_ie_i$. Alors c'est encore une base de diagonalisation de $Q(A)$. En effet si $Q=\sum_k a_kX^k$, alors

$$Q(A)e_i=(\sum_k a_kA^k)e_i=(\sum_k a_k\alpha_i^k)e_i=Q(\alpha_i)e_i=\sqrt{\alpha_i}e_i. \tag{14.73}$$

Les valeurs propres de $Q(A)$ sont donc $\sqrt{\alpha_i}$. Nous savons maintenant que $Q(A)$ a la même base de diagonalisation de A (et donc la même matrice unitaire P qui diagonalise), c'est-à-dire que

$$Q(A)=P^*\begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n}\end{pmatrix}=R. \tag{14.74}$$

10. Définition 11.76.

Donc oui, R est un polynôme en A.

Notons que ce Q n'est pas du tout unique ; il existe une infinité de polynômes envoyant n nombres donnés sur n nombres donnés.

Unicité Soit S une matrice hermitienne positive telle que $R^2 = S^2 = A$. D'abord S commute avec A parce que

$$SA = S^3 = S^2S = AS. \tag{14.75}$$

Donc S commute aussi avec $Q(A) = R$. Étant donné que S et R commutent et sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables par le corollaire 11.168. Soient $D_R = PRP^*$ et $D_S = PSP^*$ les formes diagonales de R et S dans une base de simultanée diagonalisation. Les carrés des valeurs propres de R et S étant identiques (ce sont les valeurs propres de A) et les valeurs propres de R et S étant positives, nous déduisons que $D_R = D_S$ et donc que $R = P^*D_RP = P^*D_SP = S$.

□

Une des applications usuelles de cette proposition est la décomposition polaire.

14.2.5 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Lemme 14.27 ([231]).
Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ *est compact.*

Démonstration. Nous avons $O(n) = f^{-1}\big(\{\mathbb{1}_n\}\big)$ où f est l'application continue $A \mapsto A^tA$. En tant qu'image inverse d'un fermé par une application continue, le groupe $O(n)$ est fermé.

De plus il est borné parce que tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont $\leqslant 1$, donc $\|A\|_\infty$ pour tout $A \in O(n)$. □

Proposition 14.28.
Une matrice symétrique semi (ou pas) définie positive admet une unique racine carrée symétrique. Le spectre de la racine carrée est la racine carrée du spectre de la matrice de départ.

Démonstration. Ceci est une phrase pour que les titres se mettent bien.

Existence Soit T une matrice symétrique et Q une matrice orthogonale qui diagonalise[11] T : $QTQ^{-1} = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ et $\lambda_i \geqslant 0$. En posant $R = Q^{-1}\sqrt{D}Q$, il est vite vérifié que $R^2 = T$ et que R est symétrique. En ce qui concerne le spectre, R a pour valeurs propres les $\sqrt{\lambda_i}$.

Unicité Soit R une matrice symétrique de T : $R^2 = T$. Du coup R et T commutent : $RT = R^3 = TR$. Par conséquent les espaces propres de T sont stables sous R. Soit E_λ l'un d'eux de dimension d, et T_F, R_F les restrictions de T et R à E_λ. L'application T_F est une homothétie et $R_F^2 = T_F = \lambda\mathbb{1}$. Mais R_F est encore une matrice symétrique définie positive, donc nous pouvons considérer une base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de E_λ qui diagonalise R_F avec les valeurs propres μ_i ; nous avons donc en même temps

$$R_f^2(e_i) = \mu_i^2 e_i \tag{14.76a}$$
$$T_F(e_i) = \lambda e_i, \tag{14.76b}$$

de telle sorte que $\mu_i^2 = \lambda$. Mais les valeurs propres de R_F sont positives, sont $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ pour tout i. En conclusion R_F est univoquement déterminé par la donnée de T. Vu que cela est valable pour tous les espaces propres de T et que ces espaces propres engendrent tout E, l'opérateur R est déterminé de façon univoque par T.

□

Notons que nous n'avons démontré l'unicité qu'au sein des matrices symétriques.

11. Théorème 11.189.

14.2.6 Décomposition polaires : cas réel

Nous rappelons que $S^{++}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives définies en 11.192.

Lemme 14.29.
La partie $S^{+}(n,\mathbb{R})$ est fermée dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. En effet si S_k est une suite de matrices symétriques convergeant dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ vers la matrice A, les suites $(S_k)_{ij}$ et $(S_k)_{ji}$ des composantes ij et ji sont des suites égales, et donc leurs limites sont égales [12]. Donc la limite est symétrique.

En ce qui concerne le spectre, le théorème 11.189 nous permet de diagonaliser : $S_k = Q_k D_k Q_k^{-1}$ où les D_k sont des matrices diagonales remplies de nombres positifs ou nuls. Vu que $O(n)$ est compact [13], nous avons une sous-suite $Q_{\varphi(k)}$ convergente : $Q_{\varphi(k)} \to Q$. Pour chaque k, nous avons

$$S_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)} D_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}^{-1}, \tag{14.77}$$

dont la limite existe et vaut A. Vu que pour tout k, $D_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)}^{-1} S_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}$ et que le produit matriciel est continu, la suite $k \mapsto D_{\varphi(k)}$ est une suite convergente dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Nous notons D sa limite qui est encore une matrice diagonale contenant des nombres positifs ou nuls sur la diagonale.

$$A = \lim_{k\to\infty} S_{\varphi(k)} = QDQ^{-1}, \tag{14.78}$$

et donc le spectre de A est la limite de ceux des matrices $D_{\varphi(k)}$. Chacun étant positif, la limite est positive. Donc $A \in S^{+}(n,\mathbb{R})$. □

Lemme 14.30.
La fermeture de l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives est l'ensemble des matrices définies positives : $\overline{S^{++}(n,\mathbb{R})} = S^{+}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Le lemme 14.29 nous a à peine dit que $S^{+}(n,\mathbb{R})$ était fermé. Nous devons prouver que pour tout élément de $S^{+}(n,\mathbb{R})$, il existe une suite (S_k) dans $S^{++}(n,\mathbb{R})$ convergeant vers S.

Si $S \in S^{+}(n,\mathbb{R})$ alors nous avons la diagonalisation

$$S = QDQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{14.79}$$

où $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i. Nous définissons

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \epsilon_k^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + \epsilon_k^{(n)} \end{pmatrix} \tag{14.80}$$

où ϵ_k^i est une suite convergent vers 0 telle que $\lambda_i + \epsilon_n^{(i)} > 0$ pour tout n. Typiquement si $\lambda_i > 0$ alors $\epsilon_k^{(i)} = 0$ et sinon $\epsilon_k^{(i)} = 1/k$.

Pour tout k nous avons $QD_kQ^{-1} \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ et de plus $QD_kQ^{-1} \to QDQ = S$. □

Théorème 14.31 (Décomposition polaire de matrices symétriques définies positives[231, 232, 233])**.**
En ce qui concerne les matrices inversibles :

$$\begin{aligned} f\colon O(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{14.81}$$

12. Ici nous utilisons le critère de convergence composante par composante et le fait que nous ne sommes pas trop inquiétés par la norme que nous choisissons parce que toutes les normes sont équivalentes par le théorème 12.6.
13. Lemme 14.27.

est un homéomorphisme[14].

En ce qui concerne les matrices en général :

$$\begin{aligned} g\colon O(n,\mathbb{R})\times S^+(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{14.82}$$

est une surjection mais pas une injection.

De plus les mêmes conclusions tiennent si nous regardons $(Q,S)\mapsto QS$ au lieu de SQ.

Démonstration. Nous commençons par prouver les résultats concernant les matrices inversibles.

Existence et unicité Si $M=SQ$, alors $MM^t=SQQ^tS^t=S^2$, donc S doit être une racine carrée symétrique de la matrice définie positive MM^t. La proposition 14.28 nous dit que ça existe et que c'est unique. Donc S est univoquement déterminé par M. Maintenant avoir $Q=MS^{-1}$ est obligatoire (unicité) et fonctionne :

$$Q^tQ=(S^{-1})^tM^tMS^{-1}=S^{-1}S^2S^{-1}=\mathbb{1}, \tag{14.83}$$

donc Q ainsi défini est orthogonale.

Notons que ceci ne fonctionne pas lorsque M n'est pas inversible parce qu'alors S n'est pas inversible.

Homéomorphisme Le fait que f soit continue n'est pas un problème : c'est un produit de matrices. Nous devons vérifier que f^{-1} est continue. Soit une suite convergente $M_k\to M$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Si nous nommons (Q_k,S_k) la décomposition polaire de M_k et (Q,S) celle de M, nous devons prouver que $Q_k\to Q$ et $S_k\to S$. En effet dans ce cas nous aurions

$$\lim_{k\to\infty} f^{-1}(M_k)=\lim_{k\to\infty}(Q_k,S_k)=(Q,S)=f^{-1}(M). \tag{14.84}$$

Étant donné que $O(n)$ est compact (lemme 14.27), la suite (Q_k) admet une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass, théorème 7.97) que nous nommons

$$Q_{\varphi(k)}\to F\in O(n). \tag{14.85}$$

Vu que la suite (M_k) converge, sa sous-suite converge vers la même limite : $M_{\varphi(k)}\to M$ et vu que pour tout k nous avons $S_k=M_kQ_k^{-1}$,

$$S_{\varphi(k)}\to G=MF^{-1}. \tag{14.86}$$

Vu que chacune des matrices $S_{\varphi(k)}$ est symétrique définie positive, la limite est symétrique et semi-définie positive[15]. Donc $G\in S^+(n,\mathbb{R})\cap\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ parce que de plus M et F étant inversibles, G est inversible. En ce qui concerne la sous-suite nous avons

$$M_{\varphi(k)}=S_{\varphi(k)}Q_{\varphi(k)}\to GF=M \tag{14.87}$$

où $F\in O(n)$ et $G\in S^+(n,\mathbb{R})$. Par unicité de la décomposition polaire de M (partie déjà démontrée), nous avons $G=S$ et $F=Q$.

Nous avons prouvé que toute sous-suite convergente de Q_k a Q pour limite. Donc la suite elle-même converge[16] vers Q. Donc $Q_k\to Q$. Du coup vu que $S_k=M_kQ_k^{-1}$ est un produit de suites convergentes, S_k converge également, vers S : $S_k\to S$.

Au final l'application f^{-1} est bien continue parce que les égalités (14.84) ont bien lieu.

14. Cela est en réalité en difféomorphisme, voir la remarque 14.32.
15. Lemme 14.30
16. Proposition 9.58, pas difficile.

Nous passons maintenant à la preuve dans le cas des matrices en général.

Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; par densité (lemme 14.21), il existe une suite (A_k) dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telle que $A_k \to A$. Pour chacun des k nous appliquons la décomposition polaire déjà prouvée : $A_k = Q_k S_k$. D'abord (Q_k) est une suite dans le compact [17] $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et accepte donc une sous-suite convergente. Quitte à redéfinir la suite de départ, nous supposons pour alléger les notations que $Q_k \to Q \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Vu que Q_k est inversible,

$$S_k = Q_k^{-1} A_k \tag{14.88}$$

Le produit matriciel étant continu nous avons $S_k \to S$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Mais $S^+(n,\mathbb{R})$ étant fermé (lemme 14.29) nous avons aussi $S \in S^+(n,\mathbb{R})$. □

Remarque 14.32.
Pour démontrer que f est différentiable, nous devons utiliser le théorème d'inversion locale 18.48 ; cela est fait dans la proposition 18.58.

Corollaire 14.33.
Toute matrice peut être écrite sous la forme $Q_1 D Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont orthogonales et D est diagonale.

Démonstration. Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ alors la décomposition polaire 14.31 nous donne $A = SQ$ où S est symétrique définie positive et Q est orthogonale. La matrice S peut ensuite être diagonalisée par le théorème 11.189 : $S = RDR^{-1}$ où D est diagonale et R est orthogonale. Avec ces deux décompositions en main, $A = SQ = RDR^{-1}Q$. La matrice $R^{-1}Q$ est orthogonale. □

14.2.7 Enveloppe convexe

Définition 14.34.
*Sur C est un ensemble convexe, un point $x \in C$ est un **point extrémal** si $C\backslash\{x\}$ est encore convexe.*

Théorème 14.35 ([43]).
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires sur E sur lequel nous considérons la norme subordonnée [18] à celle sur E. L'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$ est le groupe orthogonal $O(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$. Montrons pour commencer que les éléments de $O(n)$ sont extrémaux dans $\mathcal{B}$. D'abord si $A \in O(E)$ alors $\|A\| = 1$ parce que $\|Ax\| = \|x\|$. Supposons maintenant que A n'est pas extrémal, c'est-à-dire qu'il est le milieu d'un segment joignant deux points (distincts) de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$. Soient donc $T, U \in \mathcal{B}$ tels que $A = \frac{1}{2}(T+U)$. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ nous avons

$$1 = \|x\| = \|Ax\| = \frac{1}{2}\|Tx + Ux\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(\|T\| + |U|\big) \leqslant 1 \tag{14.89}$$

Toutes les inégalités sont en réalité des égalités. En particulier nous avons

$$\|Tx + Ux\| = \|Tx\| + \|Ux\|, \tag{14.90}$$

mais alors nous sommes dans un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 11.10) et donc il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $Tx = \lambda Ux$. Mais de plus les ~~inégalité~~ égalités (14.89) nous donnent

$$\frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) = 1 \tag{14.91}$$

alors que nous savons que $\|Tx\|, \|Ux\| \leqslant 1$, donc $\|Tx\| = \|Ux\| = 1$. La seule possibilité est d'avoir $\lambda = 1$ et donc que $U = T$ parce que nous avons $Tx = Ux$ pour tout x de norme 1. Au final A n'est pas le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

17. Lemme 14.27.
18. Définition 12.10.

Nous passons donc à l'inclusion inverse : nous prouvons que les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont dans $O(E)$. Pour cela nous prenons $U \in \mathcal{B}\backslash O(E)$ et nous allons montrer que U n'est pas un point extrémal : nous allons l'écrire comme milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Par la seconde partie du théorème de décomposition polaire 14.31, il existe $Q \in O(n,\mathbb{R})$ et $S \in S^+(n,\mathbb{R})$ tels que $U = QS$. Nous diagonalisons S à l'aide de la matrice orthogonale P :

$$S = PDP^{-1} \tag{14.92}$$

avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. En termes de normes, nous avons

$$\|U\| = \|S\| = \|S\|. \tag{14.93}$$

En effet vu que Q est orthogonale, $\|Ux\| = \|QSx\| = \|Sx\|$ pour tout x, donc $\|U\| = \|S\|$. De plus pour tout x nous avons

$$\|Sx\| = \|PDP^{-1}x\| = \|DP^{-1}x\|. \tag{14.94}$$

Étant donné que P^{-1} est une bijection, le supremum des $\|Sx\|$ sera le même que celui des $\|Dx\|$ et donc $\|S\| = \|D\|$. Étant donné que par définition $\|U\| \leqslant 1$, nous avons aussi $\|D\| \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ (pour rappel, les valeurs propres de D sont positives ou nulles parce que S est ainsi).

Comme $U \notin O(E)$, au moins une des valeurs propres n'est pas 1, supposons que ce soit λ_1. Alors nous avons $\alpha, \beta \in [-1,1]$ avec $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ et $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Nous posons alors

$$D_1 = \operatorname{diag}(\alpha, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{14.95a}$$
$$D_2 = \operatorname{diag}(\beta, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{14.95b}$$

Nous avons bien $D_1 \neq D2$ et $D_1 + D_2 = D$. Par conséquent

$$U = \frac{1}{2}\big(QPD_1P^{-1} + QPD_2P^{-1}\big) \tag{14.96}$$

avec $QPD_1P^{-1} \neq QPD_2^{-1}$. La matrice U est donc le milieu d'un segment. Reste à montrer que ce segment est dans $\mathcal{B}$. Pour ce faire, prenons $x \in E$ et calculons :

$$\|QPD_iP^{-1}x\| = \|D_iP^{-1}x\| \leqslant \|P^{-1}x\| = \|x\| \tag{14.97}$$

parce que $\|D_i\| \leqslant 1$ et P^{-1} est orthogonale. Au final la norme de QPD_iP est plus petite que 1 et donc U est bien le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$, et donc non extrémal. □

Théorème 14.36 ([234]).
L'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme induite de $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n,\mathbb{R})\big)$ l'enveloppe convexe de $O(n,\mathbb{R})$. Vu que $\mathcal{B}$ est convexe nous avons $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big) \subset \mathcal{B}$.

Maintenant nous devons prouver l'inclusion inverse. Pour ce faire nous supposons avoir un élément $A \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big)$ et nous allons dériver une contradiction.

Remarquons que $O(n)$ est compact par le lemme 14.27 et que par conséquent $\mathcal{C}\text{onv}(O(n))$ est compacte par le corollaire 10.39 et donc fermée. Nous considérons un produit scalaire $(X,Y) \mapsto X \cdot Y$ sur $\mathbb{M}$. Vu que $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big)$ est un fermé convexe nous pouvons considérer la projection [19] sur $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ relativement au produit scalaire choisi.

Nous notons $P = \texttt{proj}_{\mathcal{C}\text{onv}\left(O(n)\right)}(A)$. En vertu du théorème de projection, nous avons

$$(A-P)\cdot(M-P) \leqslant 0 \tag{14.98}$$

pour tout $M \in \mathcal{C}\text{onv}\,O(n)$. Notons $B = A - P$ pour alléger les notations. L'équation (14.98) s'écrit

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P. \tag{14.99}$$

19. Le théorème de projection : théorème 13.233.

D'autre par vu que $B \neq 0$ nous avons $B \cdot B > 0$, c'est-à-dire $B \cdot (A - P) > 0$ et donc

$$B \cdot A > B \cdot P. \tag{14.100}$$

En combinant avec (14.99),

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P < B \cdot A. \tag{14.101}$$

Nous utilisons maintenant la décomposition polaire, théorème 14.31, pour écrire $B = QS$ avec $Q \in O(n)$ et $S \in S^+(n, \mathbb{R})$. Vu que l'inégalité (14.101) tient pour tout $M \in \mathcal{C}\text{onv}(O(n))$, elle tient en particulier pour $Q \in O(n)$. Donc

$$B \cdot Q = B \cdot A. \tag{14.102}$$

Nous nous particularisons à présent au produit scalaire $(X, Y) \mapsto \text{Tr}(X^t Y)$ de la proposition 12.29. D'abord

$$B \cdot Q = \text{Tr}(B^t Q) = \text{Tr}(S^t Q^t Q) = \text{Tr}(S^t) = \text{Tr}(S), \tag{14.103}$$

et ensuite l'inégalité (14.103) devient

$$\text{Tr}(S) < B \cdot A = \text{Tr}(S^t Q^t A). \tag{14.104}$$

Nous choisissons une basse $\{e_i\}$ diagonalisant S : $Se_i = \lambda_i e_i$ vérifiant automatiquement $\lambda_i \geqslant 0$ parce que S est semi-définie positive[20]. Alors

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(S) &< \text{Tr}(S^t Q^t A) && \text{(14.105a)}\\
&= \sum_i \langle S^t Q^t A e_i, e_i \rangle && \text{(14.105b)}\\
&= \sum_i \langle A e_i, Q S e_i \rangle && \text{(14.105c)}\\
&\leqslant \sum_i \|Ae_i\| |\lambda_i| \underbrace{\|Qe_i\|}_{=1} && \text{(14.105d)}\\
&\leqslant \sum_i \lambda_i && A \in \mathcal{B} \Rightarrow \|Ae_i\| \leqslant 1 \quad \text{(14.105e)}\\
&= \text{Tr}(S). && \text{(14.105f)}
\end{aligned}$$

Il faut noter que la première inégalité est stricte, et donc nous avons une contradiction. □

14.2.8 Décomposition de Bruhat

Théorème 14.37 (Décomposition de Bruhat)**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps ; un élément $M \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$M = T_1 P_\sigma T_2 \tag{14.106}$$

où T_1 et T_2 sont des matrices triangulaires supérieures inversibles et où P_σ est une matrice de permutation $\sigma \in S_n$. De plus il y a unicité de σ.

Démonstration. Afin de rendre les choses plus visuelles, nous nous permettons de donner des exemples au fur et à mesure de la preuve. Nous prenons l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{14.107}$$

20. Définition 11.191.

Existence Soit $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; vu qu'elle est inversible, on a un indice i_1 maximum tel que $M_{i_1,1} \neq 0$. Nous changeons toutes les lignes jusque là, c'est-à-dire que nous faisons, pour $1 \leqslant i < i_1$,

$$L_i \to L_i - \frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}} L_{i_1}. \tag{14.108}$$

Voir le lemme 14.9(3).

Nous avons donc obtenu une matrice dont la première colonne est nulle sauf la case numéro i_1. L'opération (14.108) revient à considérer la multiplication par la matrice de transvection

$$T_1^{(i)} = T_{ii_1}\left(-\frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}}\right) \tag{14.109}$$

pour tout $i < i_1$. Pour rappel nous ne changeons que les lignes *au-dessus* de la i_1. Du coup les matrices $T_1^{(i)}$ sont triangulaires supérieures. Nous avons donc la nouvelle matrice $M_1 = \left(\prod_{i<i_1} T_1^{(i)}\right) M$ pour laquelle toute la première colonne est nulle sauf un élément.

Dans le cas de l'exemple, le « pivot » sera la ligne $(2,5,6)$ et la matrice se transforme à l'aide de la matrice $T_1 = T_{12}(-1/2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{14.110}$$

Maintenant nous faisons de même avec les colonnes (en renommant M la matrice obtenue à l'étape précédente) :

$$C_j \to C_j - \frac{M_{i_1 j}}{M_{i_1 1}} C_1, \tag{14.111}$$

qui revient à multiplier à droite par les matrices $T_{1j}(\frac{M_{i_1 i}}{M_{i_1 1}})$ avec $j > 1$. Encore une fois ce sont des matrices triangulaires supérieures.

Dans l'exemple, pour traiter la seconde colonne, nous multiplions (14.110) à droite par la matrice $T_{12}(-5/2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{14.112}$$

Appliquer encore la matrice $T_{13}(-6/2)$ apporte la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{14.113}$$

Enfin nous multiplions la matrice obtenue par $\frac{1}{M_{i_1 1}}\mathbb{1}$ pour normaliser à 1 l'élément « pivot » que nous avions choisit. Dans notre exemple nous multiplions par $1/2$ pour trouver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{14.114}$$

La matrice obtenue jusqu'ici possède une ligne et une colonne de zéros avec un 1 à leur intersection, et elle est de la forme

$$M' = T_1 M T_2 \tag{14.115}$$

où T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures et inversibles, produits de matrices de transvection (et d'une matrice scalaire pour la normalisation).

Il reste à recommencer l'opération avec la seconde colonne (qui n'est pas toute nulle parce que le déterminant est encore non nul) puis la suivante etc. Dans notre exemple de l'équation (14.114), nous éliminerions le 1/4 et le 4 en utilisant le 7/2.

Encore une fois tout cela se fait à l'aide de matrice supérieures parce qu'à chaque étape, les colonnes précédent le pivot sont déjà nulles (saut un 1) et ne doivent donc pas être touchées.

À la fin de ce processus, ce qui reste est une matrice TMT' qui ne contient plus que un seul 1 sur chaque ligne et chaque colonne, c'est-à-dire une matrice de permutation : $P_\sigma = TMT'$ et donc

$$M = T_\sigma^{-1}(T')^{-1}. \tag{14.116}$$

Unicité Soient $\sigma, \sigma \in S_n'$ tels que $T_1 P_\sigma T_2 = S_1 P_\tau S_2$ avec T_i et S_i triangulaires supérieures et inversibles. En posant $T = T_2 S_2^{-1}$ et $S = T_1^{-1} S_1$, nous avons

$$P_\sigma T = S P_\tau \tag{14.117}$$

où S et T sont des matrices triangulaires supérieures et inversibles. Par les calculs de la preuve du lemme 4.96,

$$\begin{cases} (P_\sigma T)_{kl} = T_{\sigma^{-1}(k)l} & \text{(14.118a)} \\ (SP_\tau)_{kl} = S_{k\tau(l)}, & \text{(14.118b)} \end{cases}$$

et donc

$$T_{\sigma^{-1}(k)l} = S_{k\tau(l)}. \tag{14.119}$$

En écrivant cette équation avec $k = \sigma(i)$ (nous rappelons que σ est bijective),

$$T_{il} = S_{\sigma(i)\tau(l)}. \tag{14.120}$$

Nous savons que les termes diagonaux de T sont non nuls parce que T est triangulaire supérieure et inversible (donc pas de colonnes entières nulles). Nous avons donc, en prenant $i = l = k$,

$$0 \neq T_{kk} = S_{\sigma(k)\tau(k)}. \tag{14.121}$$

La matrice étant triangulaire supérieure, cela implique

$$\sigma(k) \leqslant \tau(k). \tag{14.122}$$

De la même manière en écrivant (14.119) avec $l = \tau^{-1}(i)$,

$$S_{ki} = T_{\sigma^{-1}(k)\tau^{-1}(i)} \tag{14.123}$$

et donc

$$\sigma^{-1}(k) \leqslant \tau^{-1}(k). \tag{14.124}$$

En écrivant cela avec $k = \sigma(j)$, nous avons $j \leqslant \tau^{-1}\sigma(j)$ et en appliquant enfin τ,

$$\tau(j) \leqslant \sigma(j). \tag{14.125}$$

En comparant avec (14.122), nous avons $\sigma = \tau$.

□

14.3 Sous-groupes du groupe linéaire

Lemme 14.38 ([43])**.**
Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme euclidienne $\|.\|$. Soit K un compact convexe de V et G, un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ tel que

$$u(K) \subset K \tag{14.126}$$

pour tout $u \in G$. Alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.

Démonstration. Avant de nous lancer dans la preuve, nous avons besoin d'un petit résultat.

Un pré-résultat Nous commençons par prouver que si $v \in \mathcal{L}(V)$ vérifie $v(K) \subset K$, alors v a un point fixe dans K. Pour cela nous considérons $x_0 \in K$ et la suite

$$x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^i(x_0). \tag{14.127}$$

Étant donné que K est convexe et stable par v, la suite (x_k) est contenue dans K et accepte une sous-suite convergente[21] que nous allons noter $x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Soit $a \in K$ la limite :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a. \tag{14.128}$$

Tant que nous y sommes nous pouvons aussi calculer $v(x_k)$:

$$\begin{aligned} v(x_k) &= v\left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} v^i(x_0) \right) && (14.129a)\\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^{i+1}(x_0) && (14.129b)\\ &= x_k + \frac{1}{k+1}\Big(v^{k+1}(x_0) - x_0 \Big). && (14.129c) \end{aligned}$$

La norme $\|v^{k+1}(x_0) - x_0\|$ est bornée par le diamètre de K, donc en prenant la limite $k \to \infty$ le second terme de (14.129c) tend vers zéro. En prenant ces égalités en $k = \varphi(n)$ et en prenant $n \to \infty$, nous trouvons

$$v(a) = a, \tag{14.130}$$

c'est-à-dire le résultat que nous voulions dans un premier temps.

Une norme sur V Nous passons maintenant à la preuve du lemme. D'abord nous remarquons que le groupe G agit sur V par $u \cdot x = u(x)$ et de plus, considérant la fonction continue

$$\begin{aligned} \alpha\colon G &\to V \\ u &\mapsto u(x), \end{aligned} \tag{14.131}$$

nous voyons que les orbites de cette action sont compactes en tant qu'image par α du compact G (théorème 7.86). Nous posons

$$\begin{aligned} \nu\colon V &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \max_{u\in G} \|u(x)\|. \end{aligned} \tag{14.132}$$

Cette définition a un sens parce que l'orbite $\{u(x) \text{ tel que } u \in G\}$ est compacte dans V et donc l'ensemble des normes est compact dans $\mathbb{R}$ et admet un maximum. De plus cela donne une norme sur V parce que nous vérifions les conditions de la définition 7.106 :

(1) Pour tout $x, y \in V$ nous avons :

$$\nu(x+y) = \max_{u\in G} \|u(x) + u(y)\| \leqslant \max_{u\in G} \big(\|u(x)\| + \|u(y)\|\big) \leqslant \nu(x) + \nu(y). \tag{14.133}$$

(2) Si $\nu(x) = 0$, alors l'égalité $\max_{u\in G} \|u(x)\| = 0$ nous enseigne que $\|u(x)\| = 0$ pour tout $u \in G$ et donc en particulier avec $u = \mathrm{Id}$ nous trouvons $x = 0$.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in V$,

$$\nu(\lambda x) = \max_{u\in G} \|u(\lambda x)\| = \max \|\lambda u(x)\| = \max |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| \nu(x). \tag{14.134}$$

21. C'est Bolzano-Weierstrass, théorème 7.97.

De plus la fonction ν est constante sur les orbites de G.

Un point fixe Pour tout $u \in G$ nous posons

$$F_u = \{x \in K \text{ tel que } u(x) = x\}; \tag{14.135}$$

par le pré-résultat, aucun de ces ensembles n'est vide. Ils sont de plus tous fermés par continuité de u (le complémentaire est ouvert). Nous devons prouver que $\bigcap_{u\in G} F_u \neq \varnothing$ parce qu'une intersection serait un point fixe de tous les éléments de G. Supposons donc que $\bigcap_{u\in G} F_u = \varnothing$. Alors les complémentaires des F_u forment un recouvrement ouvert de K et nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Soient $\{u_i\}_{i=1,\dots,p}$ les éléments qui réalisent ce recouvrement. Alors

$$\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} = \varnothing. \tag{14.136}$$

Nous considérons l'opérateur

$$v = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i \in \mathcal{L}(V). \tag{14.137}$$

Vu que K est convexe et stable sous chacun des u_i, nous avons aussi $v(K) \subset K$ et donc il existe $a \in K$ tel que $v(a) = a$. Pour ce a, nous avons

$$\begin{aligned}
\nu\big(v(a)\big) &= \nu\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a)\right) && \text{(14.138a)}\\
&\leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu\left(u_i(a)\right) && \text{(14.138b)}\\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu(a) && \text{(14.138c)}\\
&= \nu(a) && \text{(14.138d)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la constance de ν sur les orbites de G. Par ailleurs nous savons que $v(a) = a$, donc en réalité à gauche dans (14.138a) nous avons $\nu(a)$ et toutes les inégalités sont des égalités. Nous avons en particulier

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{p} u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^{p} \nu\left(u_i(a)\right). \tag{14.139}$$

Notons $u_0 \in G$ l'élément qui réalise le maximum de la définition de ν pour le vecteur $\sum_i u_i(a)$:

$$\nu\left(\sum_i u_i(a)\right) = \|u_0\left(\sum_i u_i(a)\right)\| \leqslant \sum_i \|u_0 u_i(a)\| \leqslant \sum_i \nu\big(u_i(a)\big). \tag{14.140}$$

Mais nous venons de voir (équation (14.139)) que l'expression de gauche est égale à celle de droite. Donc les inégalités sont des égalités et en particulier la première inégalité devient l'égalité

$$\|\sum_i u_0 u_i(a)\| = \sum_i \|u_0 u_i(a)\|. \tag{14.141}$$

En vertu du lemme 11.14, il existe des nombres positifs λ_i tels que

$$u_0 u_1(a) = \lambda_2 u_0 u_2(a) = \dots = \lambda_p u_0 u_p(a). \tag{14.142}$$

Du fait que u_0 est inversible nous avons aussi

$$u_1(a) = \lambda_2 u_2(a) = \dots = \lambda_p u_p(a). \tag{14.143}$$

Mais par constance de ν sur les orbites nous avons $\nu(u_i(a)) = \nu(u_j(a))$ pour tout i et j ; en appliquant ν à la série d'égalités (14.143), nous trouvons que tous les λ_i doivent être égaux à 1. En particulier

$$u_1(a) = u_2(a) = \ldots = u_p(a). \tag{14.144}$$

Nous récrivons maintenant l'équation $v(a) = a$ avec la définition de v :

$$a = v(a) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a) = u_j(a) \tag{14.145}$$

pour n'importe quel j. Donc

$$a \in \bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i}, \tag{14.146}$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ.

□

Proposition 14.39 ([234, 43, 235])**.**
Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Alors

(1) Il existe une forme quadratique définie positive q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathrm{O}(q)$.

(2) Le groupe G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous considérons le (pas tout à fait) morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\to \mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big) \\ u &\mapsto \rho_u\colon s \to u^t s u, \end{aligned} \tag{14.147}$$

et tant que nous y sommes à considérer, nous considérons l'ensemble

$$H = \{M^t M \text{ tel que } M \in G\} \subset \mathrm{S}(n,\mathbb{R}). \tag{14.148}$$

Cet ensemble est constitué de matrices définies positives parce que si $\langle M^t M x, x\rangle = 0$, alors $0 = \langle Mx, Mx\rangle = \|Mx\|$, mais M étant inversible, cela implique que $x = 0$. Qui plus est cet ensemble est compact dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en tant qu'image du compact G par l'application continue $M \mapsto M^t M$. L'enveloppe convexe $K = \mathcal{C}\mathrm{onv}(H)$ est alors également compacte par le théorème 10.39. Enfin nous considérons $L = \rho(G)$, qui est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big)$ parce que $\rho_u\rho_v = \rho_{vu} \in \rho(G)$. Nous remarquons que ρ_u étant linéaire, elle préserve les combinaisons convexes et donc pour tout $u \in G$, $\rho_u(K) \subset K$.

Bref, L est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ préservant le compact K de $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$. Par le lemme 14.38, il existe $s \in K$ tel que $\rho_u(s) = s$ pour tout $u \in G$. Ou encore :

$$u^t s u = s \tag{14.149}$$

pour tout $u \in G$. Fort de ce s bien particulier, nous considérons la forme quadratique associée : $q(x) = x^t s x$. Cette forme est définie positive parce que s l'est. Nous avons $G \subset \mathrm{O}(q)$ parce que si $u \in G$ alors

$$q\big(ux\big) = (ux)^t s u x = x^t \underbrace{u^t s u}_{=s} x = q(x). \tag{14.150}$$

Le premier point est prouvé.

La matrice s est symétrique et définie positive. Le théorème 11.189 nous permet donc de la diagonaliser en $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$, et ensuite transformée en la matrice $\mathbb{1}_n$ par la matrice $\mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_i})$. Nous avons donc une matrice $a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telle que $a^t s a = \mathbb{1}_n$. Avec ça, si $u \in G$, nous avons

$$(a^{-1}ua)^t(a^{-1}ua) = (a^{-1}ua)^t\mathbb{1}_n(a^{-1}ua) = a^t u^t (a^t)^{-1} a^t s a a^{-1} u a = a^t u^t s u a = a^t s a = \mathbb{1}, \tag{14.151}$$

ce qui prouve que $a^{-1}ua$ est dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, et donc que $a^{-1}Ga \subset \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. □

Chapitre 15

Tribus, théorie de la mesure, intégration

15.1 Tribus

Vous pouvez voir le thème 1 pour voir plus vite où sont les définitions associées.

15.1.1 Généralités

Définition 15.1 (Tribu, espace mesurable[236])**.**
Si Ω est un ensemble, un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de Ω est une ***tribu*** *si*

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(2) $A^c \in \mathcal{A}$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$;

(3) si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$*, alors* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ *est alors un* ***espace mesurable****.*

Remarque 15.2.
Nous trouvons parfois la notation

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \sup_{k\geqslant 0} A_k. \tag{15.1}$$

Lemme 15.3.
Opérations ensemblistes sur les tribus.

(1) Une tribu est stable par intersections au plus dénombrables.

(2) Une tribu est stable par différence ensembliste.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$. Nous devons prouver que $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de $\mathcal{A}$. Pour cela nous passons au complémentaire :

$$\complement\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement A_i. \tag{15.2}$$

La définition d'une tribu implique que le membre de droite est un élément de la tribu. Par stabilité d'une tribu par complémentaire, l'ensemble $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de la tribu.

La seconde assertion est immédiate à partir de la première parce que $A\backslash B = A \cap \complement B$. □

Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est un ensemble de tribus (indexé par un ensemble I quelconque) alors

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \tag{15.3}$$

est également une tribu.

Définition 15.4.
*Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de parties de Ω. La **tribu engendrée** par $\mathcal{D}$ est l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{D}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{D}$. Nous la noterons le plus souvent $\sigma(\mathcal{A})$*

Note : une tribu engendrée par une application sera la définition 15.46.

Proposition 15.5 ([237]).
Soit S un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu de S. Soit une classe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(S)$ telle que

(1) Si $A \in \mathcal{N}$ alors il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$.

(2) Si $A \in \mathcal{N}$ et $B \subset A$ alors $B \in \mathcal{N}$.

(3) La classe $\mathcal{N}$ est stable par union dénombrable.

Alors la classe

$$\mathcal{T} = \{X \cup A \text{ avec } A \in \mathcal{N} \text{ et } X \in \mathcal{F}\} \tag{15.4}$$

est une tribu.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable parce que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}$ le sont. De plus S et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$ et donc dans $\mathcal{T}$. Nous devons voir que $\mathcal{T}$ est stable par complémentarité.

Soit donc $A \in \mathcal{N}$ et $X \in \mathcal{F}$; nous savons que $(A \cup X)^c = A^c \cap X^c$. De plus il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$ et nous pouvons exprimer A^c en termes de Y : $A^c = Y^c \cup (Y \backslash A)$. Donc

$$(A \cup X)^c = \big(Y^c \cup (Y \backslash A)\big) \cap X^c = \underbrace{(Y^c \cap X^c)}_{\in\mathcal{F}} \cup \underbrace{\big((Y \backslash A) \cap X^c\big)}_{\in\mathcal{N}}. \tag{15.5}$$

Le fait que la seconde partie soit dans $\mathcal{N}$ est due au fait que ce soit une partie de $Y \in \mathcal{N}$. Nous avons donc bien $(A \cup X)^c \in \mathcal{T}$. □

15.1.2 Tribu induite

Proposition-définition 15.6 (Tribu induite, tribu-trace[238]).
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et une partie $R \subset S$. L'ensemble

$$\mathcal{F}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} \tag{15.6}$$

*est une tribu. Elle est la **tribu induite** de R depuis S. Elle est aussi nommée « tribu trace ».*

Démonstration. D'abord R et $\varnothing$ dont dans $\mathcal{F}_R$. Si $C \in \mathcal{F}_R$ alors $C = A \cap R$ pour un certain $A \in \mathcal{F}$ et nous devons prouver que $R \cap C^c$ est dans $\mathcal{F}_R$ (le complémentaire de C dans R). Nous avons

$$R \cap C^c = R \cap (A \cap R)^c = R \cap A^c \in \mathcal{F}_R \tag{15.7}$$

parce que $A^c \in \mathcal{F}$. Enfin si $C_i \in \mathcal{F}_R$ alors $C_i = R \cap A_i$ pour des A_i dans $\mathcal{F}$. Nous avons

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (R \cap A_i) = R \cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big), \tag{15.8}$$

mais $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ donc $\bigcup_i C_i \in \mathcal{F}_R$. □

Proposition 15.7.
Si R est mesurable dans $(\Omega, \mathcal{A})$ alors

$$\mathcal{F}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}, \tag{15.9}$$

où $\mathcal{F}_R$ est la tribu induite de $\mathcal{A}$ sur R.

Démonstration. La première égalité est simplement la définition (15.6) de la tribu induite. Pour le reste, nous notons $\mathcal{A}_R = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}$.

Si $S \subset R$ et $S \in \mathcal{A}$ alors $S = S \cap R \in \mathcal{A}_R$.

Dans l'autre sens, si $S \in \mathcal{A}_R$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $S = A \cap R$. Donc $S \subset A$ et $S \in \mathcal{A}$ parce que R et A sont des éléments de $\mathcal{A}$ (stable par intersection). □

15.1.3 Tribu de Baire

Définition 15.8.
*Une partie d'un espace topologique est **rare** si elle est contenue dans un fermé d'intérieur vide.*
*Une partie est **maigre** si elle est réunion finie ou dénombrable de parties rares.*

Exemple 15.9
L'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est maigre mais n'est pas rare parce que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. △

Proposition 15.10 ([237]).
Soit X un espace topologique. L'ensemble de parties

$$\mathcal{B}a(X) = \{B \cup A \text{ avec } B \text{ borélien et } A \text{ maigre}\} \tag{15.10}$$

*est une tribu. Elle est appelée la **tribu de Baire** de l'espace X.*

Démonstration. Nous allons montrer que les boréliens et les maigres vérifient les conditions de la proposition 15.5.

(1) Si A est maigre, il s'écrit comme $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ où les R_i sont rares. Il existe donc des fermés d'intérieur vide F_i tels que $R_i \subset F_i$; en particulier $A \subset \bigcup_i F_i$. En tant que fermés, $F_i \in \mathcal{B}\text{or}(X)$; de plus chaque F_i est rare, donc $\bigcup_i F_i$ est maigre. L'ensemble A est donc bien contenu dans un ensemble maigre et borélien.

(2) Soi A maigre et $B \subset A$. Nous avons, avec les mêmes notations, $A = \bigcup_i R_i$ et $B = \bigcup_i (R_i \cap B)$. Les ensembles $R_i \cap B$ sont encore rares, donc B est une union dénombrable d'ensembles rares. L'ensemble B est donc maigre.

(3) Si les ensembles (A_i) sont maigres, alors ils sont unions dénombrables de rares : $A_i = \bigcup_k R_k^{(i)}$. Nous avons alors

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}^2} R_k^{(i)}, \tag{15.11}$$

et donc $\bigcup_i A_i$ est encore une union dénombrable d'ensembles rares.

□

Proposition 15.11 ([237]).
Une partie B de l'espace topologique X est dans la tribu de Baire de X si et seulement s'il existe un ouvert U tel que $B\Delta U$ est maigre.

Démonstration. Nous définissons la relation d'équivalence[1] suivante sur $\mathcal{P}(X)$: nous disons que $A \sim B$ si et seulement si $A\Delta B$ est maigre.

Réflexive Nous avons $A\Delta A = \varnothing$, donc $A \sim A$.

symétrique Nous avons $A\Delta B = B\Delta A$, donc $\sim$ est symétrique.

transitive Si A, B, C sont des parties de X alors nous avons toujours

$$A\Delta C \subset (A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C) = (A\Delta B) \cup (B\Delta C). \tag{15.12}$$

Donc si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A\Delta C$ est contenu dans une union de maigres et est donc maigre.

Autres propriétés de $\sim$ De plus la relation d'équivalence $\sim$ vérifie $A \sim B$ si et seulement si $A^c \sim B^c$, par le lemme 1.22(1).

Pour compléter les propriétés de $\sim$ mentionnons encore le fait que si F est fermé alors $F \sim \text{Int}(F)$. En effet $F \cup \text{Int}(F) = F$ et $F \cap \text{Int}(F) = \text{Int}(F)$, de telle sorte que $F\Delta\,\text{Int}(F) = F\backslash\,\text{Int}(F)$. Cela est un fermé parce que son complémentaire est $F^c \cup \text{Int}(F)$ qui est une union d'ouverts. De plus $F \subset \text{Int}(F)$ est d'intérieur vide, de telle sorte qu'il est rare et donc maigre.

1. Définition 1.23

Pour la suite de la preuve nous posons

$$\mathcal{F} = \{A \subset X \text{ tel que il existe ouvert } U \text{ avec } U \sim A\}, \tag{15.13}$$

et nous devons prouver que $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{a}(X)$.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{B}\text{a}(X)$ Soit $A \in \mathcal{F}$ et un ouvert U tel que $U \sim A$. Alors nous posons $M = U\Delta A$ qui est maigre. En vertu du lemme 1.22(2), nous avons

$$A = M\Delta U = (M \cup U)\backslash(M \cap U), \tag{15.14}$$

ce qui prouve que A est dans la tribu engendrée par les ouverts et les maigres, laquelle tribu est contenue dans $\mathcal{B}\text{a}(X)$.

$\mathcal{B}\text{a}(X) \subset \mathcal{F}$ Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu contenant tous les ouverts et tous les maigres. Alors en particulier $\mathcal{F}$ contiendra $\mathcal{B}\text{a}(X)$. Si U est ouvert, $U \sim U$ et donc $U \in \mathcal{F}$. Si M est maigre, alors $M \sim \varnothing$ et donc $M \in \mathcal{F}$. Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est une tribu.

Vide et ensemble Cela est facile : X et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$.

Comlémentaire Commençons par nous souvenir que $F \sim \text{Int}(F)$ dès que F est fermé. Si $A \in \mathcal{F}$ alors il existe un ouvert U tel que $A \sim U$ et donc aussi $A^c \sim U^c$. D'autre part U^c est fermé, donc $U^c \sim \text{Int}(U^c)$, donc

$$A^c \sim U^c \sim \text{Int}(U^c), \tag{15.15}$$

ce qui implique que $A^c \in \mathcal{F}$.

Union dénombrable Soit $A_n \in \mathcal{F}$ et $M_n = A_n\Delta U_n$ avec M_n maigre et U_n ouvert. Nous allons prouver que

$$\bigcup_n A_n \sim \bigcup_n U_n. \tag{15.16}$$

Pour cela il faut remarque que

$$\Big(\bigcup_n A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_n U_n\Big) \subset \bigcup_n (A_n\Delta U_n) = \bigcup_n M_n. \tag{15.17}$$

Le terme le plus à droite est maigre, ce qui signifie que celui le plus à gauche est contenu dans un maigre et donc est maigre lui-même.

□

Proposition 15.12.
Si B est un borélien de X, alors il existe un ouvert U et un maigre M tels que

(1) $B\Delta U$ est maigre,

(2) $M\Delta U = B$,

(3) $D\Delta M$ est ouvert.

Démonstration. Vu que B est borélien, il est aussi dans la tribu de Baire et il existe par la proposition 15.11 un ouvert U tel que $M = B\Delta U$ est maigre. En prenant ce U et ce M, les trois conditions sont vérifiées parce que

$$M\Delta U = (B\Delta U)\Delta U = B \tag{15.18}$$

et

$$B\Delta M = M\Delta B = (U\Delta B)\Delta B = U. \tag{15.19}$$

Tout par le lemme 1.22(2). □

15.2 Théorie de la mesure

Définition 15.13 ([239]).
*Une **mesure extérieure** sur un ensemble S est une application $m^*\colon \mathcal{P}(S) \to [0,\infty]$ telle que*

(1) $m^*(\varnothing) = 0$,

(2) Si $A \subset B$ dans S alors $m^*(A) \leqslant m^*(B)$

(3) Si les A_n sont des parties de S alors

$$m^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n). \tag{15.20}$$

La différence avec une mesure est que nous ne demandons pas que (15.20) soit une égalité lorsque les A_n sont disjoints.

15.2.1 Mesure sur un ensemble de parties

Définition 15.14 (Mesure sur un ensemle de parties[240]).
*Soit S un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de S contenant $\varnothing$. Une **mesure positive** sur $(S,\mathcal{C})$ est une application $\mu\colon \mathcal{C} \to [0,\infty]$ telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) Si $A_n \in \mathcal{C}$ sont des éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{C}$ et tels que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$ alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n). \tag{15.21}$$

*La mesure est **finie** si $\mu(S) < \infty$ et **σ-finie** s'il existe une suite (S_n) dans $\mathcal{C}$ telle que $S = \bigcup_n S_n$ et $\mu(S_n) < \infty$.*

Remarque 15.15.
La condition $\mu(\varnothing) = 0$ est nécessaire. Certes, si $A \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing) \tag{15.22}$$

parce que A et $\varnothing$ sont disjoints. Cela semble indiquer que $\mu(\varnothing) = 0$, mais pas tout à fait : il est encore possible d'avoir $\mu(B) = \infty$ pour tout $B \in \mathcal{A}$, y compris $\mu(\varnothing) = \infty$. À cause de cette exception, la relation (15.22) n'implique pas $\mu(\varnothing) = 0$.

Sans hypothèses sur l'ensemble de parties, nous ne pouvons pas dire grand chose de plus.

15.2.2 Mesure sur une algèbre de parties

Définition 15.16 (Algèbre de parties[239]).
*Soit S, un ensemble. Une classe $\mathcal{D}$ de parties de S est une **algèbre de parties** de S si*

(1) $S \in \mathcal{D}$ et $\varnothing \in \mathcal{D}$,

(2) si $A \in \mathcal{D}$ alors $A^c \in \mathcal{D}$,

(3) si $A, B \in \mathcal{D}$ alors $A \cup B \in \mathcal{D}$.

Les algèbre de parties ne sont pas des classes si sauvages que ça ; en témoigne le lemme suivant.

Lemme 15.17.
Une algèbre de partie est stable par intersection (finie) et par différence ensembliste.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $A \cap B = \big(A^c \cup B^c\big)^c$ et que $A\backslash B = A \cap B^c$. □

Lemme 15.18 ([239]).
Si $\mathcal{D}$ est une algèbre de parties de S et si μ est une mesure sur $(S,\mathcal{D})$ alors

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$ alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$

(2) si $A_n \in \mathcal{D}$ et $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$ alors

$$\mu(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{15.23}$$

La propriété (2) est la **σ-sous-additivité**.

Démonstration. Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \backslash A)$ avec A et $B\backslash A$ disjoints donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \geqslant \mu(A). \tag{15.24}$$

Pour la seconde, on passe par les compléments deux à deux : nous posons

$$\begin{cases} B_0 = \varnothing & \text{(15.25a)} \\ B_n = A_n \backslash \bigcup_{k<n} B_k. & \text{(15.25b)} \end{cases}$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints et $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$, donc

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n \backslash \bigcup_{k<n} B_k) \leqslant \sum_n \mu(A_n), \tag{15.26}$$

où nous avons utilisé la première partie du lemme. □

Proposition 15.19 (Mesure extérieure à partir d'une algèbre de parties[239])**.**
Soit $\mathcal{D}$ une algèbre de partie sur l'ensemble S et μ une mesure sur $(S, \mathcal{D})$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mu^* \colon \mathcal{P}(S) &\to [0, +\infty] \\ X &\mapsto \inf\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{D}, X \subset \bigcup_n A_n\} \end{aligned} \tag{15.27}$$

est une mesure extérieure[2] *sur S et pour tout $A \in \mathcal{D}$ nous avons $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Démonstration. Ceci est une phrase servant à aligner correctement le `description` qui suit.

La définition est bonne Notons d'abord que la définition est bonne : l'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : il suffit de prendre $A_1 = S$ et $A_{n\geqslant 2} = \varnothing$.

Le vide D'abord $\mu^*(\varnothing) = 0$ parce que $\varnothing \in \mathcal{D}$. Prendre $A_n = \varnothing$.

Inégalité d'inclusion Soient $X \subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si $Y \subset A$ alors $X \subset A$, donc

$$\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{D}, Y \subset \bigcup_n A_n\} \subset \{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{D}, X \subset \bigcup_n A_n\}, \tag{15.28}$$

ce qui prouve que $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y)$.

Inégalité par union dénombrable Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de S. S'il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0}) = \infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n \mu^*(X_n) = \infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quoi est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc que $\mu^*(X_n) < \infty$ pour tout n.

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$ il existe une suite $(B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}$ tells que $X_n \subset \bigcup_k B_k^{(n)}$ et

$$\mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \geqslant \sum_k \mu(B_k^{(n)}). \tag{15.29}$$

Étant donné que

$$\bigcup_n X_n \subset \bigcup_n (\bigcup_k B_k^{(n)}), \tag{15.30}$$

2. Définition 15.13.

nous avons

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) \leqslant \sum_n \sum_k \mu^*(B_k^{(n)}) \leqslant \sum_n \Big(\mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\Big) = \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon. \tag{15.31}$$

Cette inégalité étant valable pour tout ϵ, nous avons bien

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) = \sum_n \mu^*(X_n). \tag{15.32}$$

Restriction Soit $A \in \mathcal{D}$. Nous avons automatiquement $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$ parce que $\mu(A)$ est dans l'ensemble dont nous prenons l'infimum (prendre $A_1 = A$ et $A_{n\geqslant 2} = \varnothing$).

En ce qui concerne l'inégalité inverse nous considérons une suite A_n dans $\mathcal{D}$ telle que $A \subset \bigcup_n A_n$. Vu que $A \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est une algèbre de parties nous avons $A \cap A_n \in \mathcal{D}$ et $\bigcup_n (A \cap A_n) = A \in \mathcal{D}$. Par conséquent

$$\mu(A) = \mu\big(\bigcup_n (A \cap A_n)\big) \leqslant \sum_n \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{15.33}$$

Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons l'infimum sont plus grands que $\mu(A)$. Nous en déduisons que $\mu^*(A) \geqslant \mu(A)$.

□

15.2.3 Mesure sur une tribu, espace mesuré

La définition suivante est un simple recopiage de la définition générale 15.14 d'une mesure sur un ensemble de parties. La seule différence est que dans le cas d'une tribu, l'union est automatiquement dans la tribu et la condition (2) ne demande pas de le préciser.

Définition 15.20 (Espace mesuré[240])**.**
Une ***mesure positive*** *sur l'espace mesurable*[3] $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$ *si les* A_i *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints.*

Le triple $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est alors un* ***espace mesuré****.*

Une mesure est ***σ-finie*** *s'il existe un recouvrement dénombrable de* Ω *par des ensembles de mesure finie. Si la mesure est σ-finie, nous disons que l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré σ-fini.*

La mesure μ *sur* Ω *est* ***finie*** *si* $\mu(\Omega) < \infty$.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $(S, \mathcal{F}, \nu)$ sont deux espaces mesurés, alors nous notons

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subset (S, \mathcal{F}, \nu) \tag{15.34}$$

lorsque $\Omega \subset S$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$.

Définition 15.21 (Ensemble mesurable)**.**
Les éléments de $\mathcal{A}$ *sont les ensembles* ***mesurables*** *pour la mesure* μ.

Si la mesure des σ-finie, nous pouvons choisir le recouvrement croissant pour l'inclusion. En effet si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le recouvrement, il suffit de considérer $F_n = \bigcup_{k\leqslant n} E_k$. Ces ensembles F_n forment tout autant un recouvrement dénombrable, mais il est évidemment croissant.

Le lemme suivant complète la propriété 15.20(2) lorsque les ensembles ne sont pas disjoints.

Lemme 15.22.
À propos de mesure d'unions et de différences dans un espace mesurable.

3. Les définitions de tribus et d'espaces mesurables sont en 15.1.

(1) Si $A \subset B$ sont deux ensembles μ-mesurables de mesure finie alors

$$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \tag{15.35}$$

(2) Si $A \subset B$ sont deux ensembles μ-mesurables de mesure finie alors

$$\mu(B) \geqslant \mu(A). \tag{15.36}$$

(3) Si (M_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ pas spécialement disjoints, alors

$$\mu\big(\bigcup_k M_k\big) \leqslant \sum_k \mu(M_k). \tag{15.37}$$

Démonstration. Vu que les ensembles $B\backslash A$ et A sont disjoints par la propriété (2) de la définition de mesure nous avons

$$\mu\big((B\backslash A) \cup A\big) = \mu(B\backslash A) + \mu(A) \tag{15.38}$$

et donc

$$\mu(B) = \mu(B\backslash A) + \mu(A) \tag{15.39}$$

comme demandé.

Pour la seconde partie nous considérons la suite disjointe

$$\begin{cases} M'_0 = \varnothing & \text{(15.40a)} \\ M'_k = M_k\backslash M'_{k-1}. & \text{(15.40b)} \end{cases}$$

Nous avons $\bigcup_k M'_k = \bigcup_k M_k$. Le calcul suivant est alors immédiat :

$$\mu\big(\bigcup_k M_k\big) = \mu\big(\bigcup_k M'_k\big) = \sum_k \mu(M'_k) = \sum_k \mu(M_k\backslash M'_{k-1}) \leqslant \sum_k \mu(M_k). \tag{15.41}$$

□

Lemme 15.23 ([1])**.**
Résultats sur les unions croissantes d'ensembles mesurables dans $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) Si (A_k) est une suite croissante d'ensembles μ-mesurables dont l'union est mesurable, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_k A_k). \tag{15.42}$$

(2) Soit K_n, une suite emboîtée d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $K_n \to S$. Si $A \in \mathcal{A}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap K_n) = \mu(A). \tag{15.43}$$

Démonstration. Pour prouver (1), nous faisons le coup de l'union télescopique, en posant $A_0 = \varnothing$:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k\backslash A_{k-1}). \tag{15.44}$$

Les ensembles $A_k\backslash A_{k-1}$ sont deux à deux disjoints, donc la propriété (2) de la définition d'une mesure donne

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k\backslash A_{k-1})\right) && \text{(15.45a)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k\backslash A_{k-1}) && \text{(15.45b)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) && \text{(15.45c)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) - \mu(A_0) && \text{(15.45d)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k). && \text{(15.45e)} \end{aligned}$$

où pour obtenir 15.45c, nous avons utilisé le lemme 15.22.

Le point (2) est une application du point (1). □

Exemple 15.24
L'intégration à la Riemann n'est pas dans la théorie des espaces mesurés. En effet l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{A \subset [0,1] \text{ tel que } \mathbb{1}_A \text{ est intégrable au sens de Riemann}\} \tag{15.46}$$

n'est pas une tribu. Par exemple les singletons en font partie tandis que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ n'en fait pas partie malgé que ce soit une union dénombrable de singletons. △

Définition 15.25.
*Si μ est une mesure nous disons qu'une propriété est vraie μ-**presque partout** si elle est fausse seulement sur un ensemble de mesure nulle.*

Par exemple la fonction de Dirichlet est presque partout égale à la fonction 1 (pour la mesure de Lebesgue).

Définition 15.26 (fonction mesurable)**.**
Une application entre espace mesurés

$$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}') \tag{15.47}$$

*est **mesurable** si pour tout $B \in \mathcal{A}'$, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est dans $\mathcal{A}$.*

Lemme 15.27.
Une union dénombrable d'ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du point (2) de la définition d'une mesure : si les A_i sont de mesure nulle,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \mu(A_i) = 0 \tag{15.48}$$

□

Définition 15.28.
*Si (A_n) est une suite croissante d'ensembles alors la **limite** est*

$$\lim_n A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{15.49}$$

Si la suite est décroissante alors la limite est

$$\lim_n A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{15.50}$$

Proposition 15.29 ([241])**.**
Soit μ une mesure sur Ω et (S_n) une suite croissante d'ensembles μ-mesurables de Ω. Nous notons

$$S = \lim_n S_n. \tag{15.51}$$

Alors pour tout ensemble mesurable[4] $A \subset \Omega$ nous avons

$$\mu(A \cap S) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n). \tag{15.52}$$

Note : dans la référence le résultat fonctionne pour tout ensemble A (et non seulement les mesurables) parce que la définition de la mesurabilité est un peu différente.

4. Définition 15.21

Démonstration. L'inégalité $\lim \mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S)$ est simple à prouver. En effet pour tout n nous avons $A \cap S_n \subset A \cap S$ et donc par le lemme 15.22 nous avons

$$\mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S). \tag{15.53}$$

En passant à la limite (qui respecte les inégalités) nous avons l'inégalité.

Nous passons à l'inégalité dans l'autre sens. D'abord si $\mu(A \cap S_n) = \infty$ pour un certain n, alors il cela vaut encore ∞ pour tous les n suivants et la limite est ∞ sans problèmes. Donc nous supposons que $\mu(A \cap S_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, quitte à renommer les indices, nous pouvons supposer que $S_0 = \varnothing$.

Un élément x est dans S si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $x \in S_{n+1}$. En prenant le plus petit de ces n nous avons $x \neq S_n$ (éventuellement $n = 0$) et donc

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \backslash S_n). \tag{15.54}$$

Par conséquent

$$A \cap S = A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \backslash S_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A \cap (S_{n+1} \backslash S_n) \tag{15.55}$$

Étant donné que les ensembles $A \cap (S_{n+1} \backslash S_n)$ sont disjoints,

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\big(A \cap (S_{n+1} \backslash S_n)\big) && \text{(15.56a)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\Big((A \cap S_{n+1}) \backslash (A \cap S_n)\Big) && \text{(15.56b)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big[\mu(A \cap S_{n+1}) - \mu(A \cap S_n)\big] && \text{(15.56c)}\\
&= \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap S_{n+1}) - \underbrace{\mu(A \cap S_0)}_{=0} && \text{(15.56d)}\\
&= \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap S_n). && \text{(15.56e)}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé plusieurs fois le fait que les S_n et A étaient mesurables (et la propriété de tribu qui dit que $A \cap S_n$ est également mesurable) ainsi que le lemme 15.22. Nous avons aussi utilisé la série télescopique dans $\mathbb{R}$ pour obtenir (15.56d). □

Définition 15.30 (λ-système[242])**.**
Soit E un ensemble. Un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E est un ***λ-système*** *lorsqu'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$ alors $B \backslash A \in \mathcal{D}$,

(2) si $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{D}$ alors $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}$.

Note : une tribu est un λ-système.

Lemme 15.31 ([242])**.**
Une intersection quelconque de λ-systèmes dans E est un λ-système dans E.

Démonstration. Soient $\{\mathcal{D}_l\}_{l \in L}$ des λ-systèmes indicés par un ensemble L. Si $A, B \in \bigcap_{l \in L} \mathcal{D}_l$ alors $B \backslash A \in \mathcal{D}_l$ pour tout $l \in L$ et donc $A \backslash B \in \bigcap_{l \in L} \mathcal{D}_l$. De la même façon si (A_k) est une suite croissante dans $\bigcap_{l \in L} \mathcal{D}_l$ alors pour tout $l \in L$ nous avons $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}_l$. Donc $\bigcup_k A_k \in \bigcap_l \mathcal{D}_l$. □

Ce lemme est ce qui permet de définir le λ-système **engendré** par une classe $\mathcal{A}$ de parties de E : c'est l'intersection de tous les λ-systèmes de E contenant $\mathcal{A}$.

Lemme 15.32 ([242]).
Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E (contenant E lui-même) qui soit stable par intersection finie. Alors le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{E}$ le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Étant donné que $\mathcal{F}$ est un λ-système nous avons $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Pour montrer l'inclusion inverse nous allons prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu.

D'abord pour $C \in \mathcal{C}$ nous posons

$$\mathcal{G}_C = \{A \subset \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap C \in \mathcal{E}\}. \tag{15.57}$$

et pour $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{H}_F = \{A \in \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap F \in \mathcal{E}\}. \tag{15.58}$$

Nous allons montrer que $\mathcal{G}_C$ et $\mathcal{H}_F$ sont des λ-systèmes et que $\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

Nous commençons par $\mathcal{G}_C$. Si $A, B \in \mathcal{G}_C$ avec $A \subset B$ alors

$$(B\backslash A) \cap C = \underbrace{(B \cap C)}_{\in\mathcal{E}} \backslash \underbrace{(A \cap C)}_{\in\mathcal{E}}. \tag{15.59}$$

Vu que $\mathcal{E}$ est un λ-système et que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ nous avons bien $(B\backslash A) \cap C \in \mathcal{E}$ et donc $B\backslash A \in \mathcal{G}_C$. Soit maintenant (A_k) une suite croissante dans $\mathcal{G}_C$. Nous avons

$$\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) \cap C = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap C) \tag{15.60}$$

qui est une union d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. Donc $\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap C) \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}_C$. Cela termine la preuve du fait que $\mathcal{G}_C$ soit une λ-système.

Étant donné que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, si $K \in \mathcal{C}$ nous avons $C \cap K \in \mathcal{C}$, ce qui signifie que $K \in \mathcal{G}_C$. Nous avons donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C$. Donc $\mathcal{G}_C$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C \subset \mathcal{E}$. Mais comme $\mathcal{E}$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$ nous avons en fait $\mathcal{G}_C = \mathcal{E}$.

Nous montrons à présent que $\mathcal{H}_F$ est un λ-système. Si $A, B \in \mathcal{H}_F$ avec $A \subset B$ alors $(B\backslash A)\cap F = (B\cap F)\backslash(A\cap F)$. Vu que $\mathcal{E}$ est une λ-système et que $A\cap F$ et $B\cap F$ sont dans $\mathcal{E}$ avec $A\cap F \subset B\cap F$, nous avons

$$(B \cap F)\backslash(A \cap F) \in \mathcal{H}_F. \tag{15.61}$$

Soit maintenant $(A_k)_{k\geqslant 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{H}_F$. Pour tout k nous avons $A_k \cap F \in \mathcal{E}$, ce qui donne

$$\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\big) \cap F = \bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k \cap F) \in \mathcal{E}. \tag{15.62}$$

Donc $\mathcal{H}_F$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_F \subset \mathcal{E}$. Nous en concluons que pour tout $C \in \mathcal{C}$ et pour tout $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}. \tag{15.63}$$

Nous allons maintenant prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu [5].

(1) Si $F \in \mathcal{E}$ alors $E \cap F = F \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $E \in \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

(2) Si $A \in \mathcal{E}$ alors $E\backslash A \in \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{E}$ est un λ-système et $E \in \mathcal{E}$. Donc $\complement A \in \mathcal{E}$.

(3) Montrons que $\mathcal{E}$ est stable par union finie en considérant $A, B \in \mathcal{E}$. Vu que E est également un élément de $\mathcal{E}$ nous avons

$$E\backslash(A \cup B) = (E\backslash A) \cap (E\backslash B) \in \mathcal{E}. \tag{15.64}$$

Cela prouve que $\complement(A \cup B) \in \mathcal{E}$. Par complémentarité nous avons aussi $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Soient $A_k \in \mathcal{E}$, et nommons $B_p = A_1 \cup \ldots \cup A_p$. Les ensembles B_p forment une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. L'union est donc dans $\mathcal{E}$ et ce dernier est au final stable par union dénombrable.

5. Définition 15.1.

Maintenant que $\mathcal{E}$ est une tribu nous avons $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Nous en déduisons que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Le théorème suivant permet de prouver que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure possible ayant les bonnes valeurs sur les intervalles (théorème 15.126).

Théorème 15.33 (Unicité des mesures[242])**.**
Soient μ et ν, deux mesures sur $(E, \mathcal{A})$ et une classe $\mathcal{E}$ de parties de E telles que

(1) La tribu engendrée par $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{A}$.

(2) si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $A \cap B \in \mathcal{E}$

(3) il existe une suite croissante (E_n) dans $\mathcal{E}$ telle que $E = \lim E_n$.

Alors si les mesures μ et ν coïncident sur $\mathcal{E}$, elles coïncident sur $\mathcal{A}$ en entier.

Démonstration. Soit (E_n) la suite des hypothèses ; nous considérons μ_n et ν_n, les restrictions de μ et ν à E_n, c'est-à-dire

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \tag{15.65a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n). \tag{15.65b}$$

Vu que les E_n sont dans $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ils sont mesurables au sens de μ et ν. Par la proposition 15.29, pour tout $A \in \mathcal{E}$ nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A) \tag{15.66a}$$
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \nu(A) \tag{15.66b}$$

Nous devons donc seulement montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(A) = \nu_n(A)$. Pour cela nous nous fixons un n et nous considérons la classe

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu_n(A) = \nu_n(A)\}. \tag{15.67}$$

Le but sera de prouver que $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.

Par hypothèse $A \cap E_n \in \mathcal{E}$ et donc

$$\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n) < \infty, \tag{15.68}$$

c'est-à-dire que $\mu_n = \nu_n$ sur $\mathcal{E}$. Par ailleurs, $E \cap E_n = E_n \in \mathcal{E}$, donc

$$\mu_n(E) = \nu_n(E) < \infty. \tag{15.69}$$

Par conséquent $\mu_n = \nu_n$ sur la classe $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E\} : \mathcal{E}' \subset \mathcal{D}$.

Montrons que $\mathcal{D}$ est un λ-système. Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Alors, étant donné que les mesures μ_n et ν_n sont finies, le lemme 15.22 nous donne

$$\mu_n(B\backslash A) = \mu_n(B) - \mu_n(A) \tag{15.70a}$$
$$\nu_n(B\backslash A) = \nu_n(B) - \nu_n(A). \tag{15.70b}$$

Donc $\mu_n(B\backslash A) = \nu_n(B\backslash A)$ et $B\backslash A \in \mathcal{D}$.

Soit par ailleurs une suite croissante $(A_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{D}$. En posant $B_p = \bigcup_{k=1}^{p} A_k$, le lemme 15.23(1) nous donne

$$\mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{p\to\infty} \mu_n(A_p). \tag{15.71}$$

Mais vu que pour chaque p nous avons $\mu_n(A_p) = \nu_n(A_p)$, nous avons aussi

$$\mu_n\Big(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p\Big) = \nu_n\Big(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p\Big). \tag{15.72}$$

Donc $\mathcal{D}$ est bel et bien un λ-système contenant $\mathcal{E}'$. Par le lemme 15.32, le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{E}'$, mais par hypothèse la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est $\mathcal{A}$, donc le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est $\mathcal{A}$. Vu que $\mathcal{D}$ est une λ-système contenant $\mathcal{E}'$, nous avons alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, ce qu'il fallait. □

Exemple 15.34
La partie $\mathcal{E}$ des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$ engendre les boréliens par la proposition 7.91. Par conséquent pour vérifier que deux mesures sont égales sur les boréliens de $\mathbb{R}$ il suffit de prouver qu'elles sont égales sur les intervalles ouverts. △

15.2.4 Mesure extérieure

Nous avons déjà défini la notion de mesure extérieure en la définition 15.13.

Lemme 15.35 ([239]).
Soit $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $X \subset S$. Alors

$$\inf_{\substack{A\in\mathcal{F}\\ X\in A}} \mu(A) = \inf\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k\}. \tag{15.73}$$

Démonstration. Pour montrer l'inégalité $\geqslant$, nous remarquons qu'il y a plus d'éléments dans l'ensemble du second membre que dans le premier. En effet si $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ alors dans le membre de gauche nous pouvons prendre $A_1 = A$ et $A_{n\geqslant 1} = \varnothing$.

Pour l'inégalité dans l'autre sens, nous montrons que tout élément de

$$\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k\} \tag{15.74}$$

est plus grand qu'un élément de

$$\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}. \tag{15.75}$$

En effet si $A_n \in \mathcal{F}$ avec $X \subset \bigcup_k A_k$ alors en posant $A = \bigcup_k A_k$ nous avons $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ ainsi que $\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$. Cela prouve que l'élément $\sum_n \mu(A_n)$ de (15.74) est plus grand que l'élément $\mu(A)$ de (15.75). □

Proposition 15.36 ([239]).
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et l'application

$$\begin{aligned} \mu^* \colon \mathcal{P}(S) &\to [0, \infty] \\ X &\mapsto \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}. \end{aligned} \tag{15.76}$$

Alors μ^* est une mesure extérieure sur S et sa restriction à $\mathcal{F}$ est égale à μ.

Cela est un cas particulier de 15.19 en utilisant 15.35. Nous en donnons cependant une preuve directe, qui est presque identique à celle de 15.19, mais avec une ou deux simplifications.

Démonstration. Notons que la définition est bonne parce que l'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : prendre $A = S$.

Le vide D'abord $\mu^*(\varnothing) = O$ parce que $\varnothing \in \mathcal{F}$.

Inégalité d'inclusion Soient $X \subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si $Y \subset A$ alors $X \subset A$, donc

$$\inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, Y \subset A\}, \tag{15.77}$$

ce qui signifie que $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y)$.

Inégalité par union dénombrable Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de S. S'il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0}) = \infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n \mu^*(X_n) = \infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quoi est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc que $\mu^*(X_n) < \infty$ pour tout n.

Soit $\epsilon >$ et par définition pour chaque n, il existe un $A_n \in \mathcal{F}$ tel que $X_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) \leqslant \mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Bien entendu nous avons

$$\bigcup_n X_n \subset \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}. \tag{15.78}$$

Nous en déduisons que

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) \leqslant \mu\big(\bigcup_n A_n\big). \tag{15.79}$$

Mais $(S, \mathcal{F}, \mu)$ étant un espace mesuré,

$$\mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{15.80}$$

Au final nous avons les inégalités

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) \leqslant \mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_n \mu(A_n) \leqslant \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon \sum_n \frac{1}{2^n} = \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon. \tag{15.81}$$

Cela étant vrai pour tout ϵ,

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) \leqslant \sum_n \mu^*(X_n), \tag{15.82}$$

ce qui prouve que μ^* est une mesure extérieure.

Restriction Supposons que $X \in \mathcal{F}$. Alors si $X \subset A$ nous avons $\mu(X) \leqslant \mu(A)$; mais en même temps, $\mu(X)$ est dans l'infimum qui définit $\mu^*(X)$ donc

$$\mu^*(X) \leqslant \mu(X) \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \mu(X) \leqslant \mu^*(X). \tag{15.83}$$

Donc nous avons égalité de tous les éléments de cette chaîne d'inégalité.

□

Définition 15.37.
*Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Une partie $A \subset X$ est m^*-**mesurable** si pour tout $X \subset S$,*

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c). \tag{15.84}$$

Remarque 15.38.
L'inégalité

$$m^*(X) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{15.85}$$

étant toujours vraie, pour prouver qu'un ensemble est m^*-mesurable, il est suffisant de prouver l'inégalité inverse :

$$m^*(X) \geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{15.86}$$

La définition 15.37 est motivée par la proposition suivante.

Proposition 15.39.
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et μ^* la mesure extérieure qui va avec. Alors tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables.

En d'autres termes, pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{15.87}$$

Démonstration. Vu que $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$, et que μ^* est une mesure extérieure,

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{15.88}$$

Nous devons montrer l'inégalité inverse.

Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$. D'une part nous avons $X \cap A \subset B \cap A \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A) \leqslant \mu^*(B \cap A) = \mu(B \cap A). \tag{15.89}$$

Et d'autre part, $X \cap A^c \subset B \cap A^c \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A^c). \tag{15.90}$$

En remettant ensemble,

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) = \mu(B). \tag{15.91}$$

La dernière égalité est le fait que $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont disjoints et que μ est une mesure. L'inégalité (15.91) étant vraie pour tout $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$, elle est encore vraie pour l'infimum :

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \inf\{\mu(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, X \subset B\} = \mu^*(X). \tag{15.92}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu^*(X). \tag{15.93}$$

□

Remarque 15.40.
Notons la duplicité du vocabulaire. Les ensembles μ-mesurables sont les éléments de $\mathcal{F}$, qui sont a priori les seuls sur lesquels μ est calculable[6], alors que les μ^*-mesurables sont les parties de S qui vérifient une certaine propriété (et μ^* est calculable sur toutes les parties de S).

15.3 Applications mesurables

15.3.1 Propriétés

Définition 15.41 (Fonction mesurable)**.**
Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurés. Une fonction $f : E \to F$ est ***mesurable*** *si pour tout $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est dans $\mathcal{A}$.*

Définition 15.42 (Fonction borélienne)**.**
Une application $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d))$ est ***borélienne*** *si elle est mesurable, c'est-à-dire si pour tout $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ nous avons $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Si rien n'est précisé, une application entre deux espaces topologiques est borélienne lorsqu'elle est mesurable en considérant la tribu borélienne sur les deux *espace.*

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur un ensemble E, nous notons $m(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions qui sont $\mathcal{A}$-mesurables.

Le plus souvent lorsque nous parlerons de fonctions $f : X \to Y$ où Y est un espace topologique, nous considérons la tribu borélienne sur Y. Ce sera en particulier le cas dans la théorie de l'intégration.

Proposition 15.43.
Soient $(S_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ des espaces mesurables et des fonctions mesurables $f : S_1 \to S_2$ et $g : S_2 \to S_3$. Alors la fonction $g \circ f : S_1 \to S_3$ est mesurable.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{F}_3$. Alors

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big) \in f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{15.94}$$

□

6. « calculable » au sens où μ y vaut un nombre bien définit ; après, que ce soit facile ou pas à calculer dans la pratique, c'est une autre histoire.

15.3.2 D'une tribu à l'autre

Lemme 15.44 ([243]).
Soit une application $f\colon S_1 \to S_2$ et une tribu $\mathcal{F}_2$ sur S_2. Alors $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ est une tribu sur S_1

Démonstration. Il faut prouver les trois propriétés de la définition 15.1 d'une tribu.

(1) D'abord f est définit sur tout S_1, donc $f^{-1}(S_2) = S_1$ alors que $S_2 \in \mathcal{F}_2$.

(2) Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{F}_2)$, c'est-à-dire $A = f^{-1}(B)$ pour un certain $B \in \mathcal{F}_2$. En ce qui concerne le complémentaire :

$$A^c = f^{-1}(B)^c = S_1 \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(S_2 \backslash B) = f^{-1}(B^c). \tag{15.95}$$

(3) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ avec $A_i = f^{-1}(B_i)$ alors

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big). \tag{15.96}$$

Ce qui est dans la dernière parenthèse est dans $\mathcal{F}_2$ parce que cette dernière est une tribu.

□

Lemme 15.45 ([243]).
Soit une application $f\colon S_1 \to S_2$ et $\mathcal{F}$ une tribu de S_1. Alors

(1) L'ensemble

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \tag{15.97}$$

est une tribu sur S_2.

(2) C'est la plus grande tribu de S_2 pour laquelle f est mesurable.

Démonstration. Encore les trois propriétés à vérifier.

(1) $S_2 \in \mathcal{F}$, sont $S_1 = f^{-1}(S_2) \in \mathcal{F}_f$.

(2) Si $A \in \mathcal{F}_f$ alors $A = f^{-1}(B)$ pour un certain $B \in \mathcal{F}$. Nous avons alors aussi $B^c \in \mathcal{F}$ et donc

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c = A^c. \tag{15.98}$$

Par conséquent A^c est dans $\mathcal{F}_f$.

(3) Si (A_i) sont des éléments de $\mathcal{F}_f$ avec $A_i = f^{-1}(B_i)$ pour $B_i \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_i B_i \in \mathcal{F}$ et

$$f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}_f. \tag{15.99}$$

En ce qui concerne la maximalité, si $R \subset S_2$ n'est pas dans $\mathcal{F}_f$ alors $f^{-1}(R)$ n'est pas dans $\mathcal{F}$ et donc f ne serait pas mesurable. □

Définition 15.46 (Tribu engendrée).
Soit une application $f\colon S_1 \to S_2$ et $\mathcal{F}$ une tribu de S_1. Alors conformément au lemme 15.45 l'ensemble

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \tag{15.100}$$

*est la **tribu engendrée**.*

Le lemme suivant est également nommé « lemme de transfert ».

Lemme 15.47 (Lemme de transport).
Soit $f\colon S_1 \to S_2$ une application et une classe $\mathcal{C}$ de parties de S_2. Alors

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big). \tag{15.101}$$

Démonstration. Vu que $\sigma(\mathcal{C})$ es tune tribu, dans S_2 alors le lemme 15.45 dit que $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$ est une tribu qui contient en particulier $f^{-1}(\mathcal{C})$. Nous en déduisons que $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$.

Réciproquement. Dans S_1 nous avons la tribu $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Nous pouvons alors considérer la tribu

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)\}. \tag{15.102}$$

Montrons que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_f$. Lorsque $B \in \mathcal{C}$ nous avons $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Du coup $B \in \mathcal{F}_f$. Nous avons alors, en passant aux tribus engendrées :

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f. \tag{15.103}$$

Si maintenant $B \in \sigma(\mathcal{C})$, nous avons $f^{-1}(B) \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$, ce qui signifie que

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big) \subset \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big). \tag{15.104}$$

□

Le théorème suivant est important pour prouver qu'une application est mesurable. En effet, il permet de ne tester si une application est mesurable uniquement sur une partie génératrice de la tribu d'arrivé [7].

Théorème 15.48.
Soient des espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application $f : S_1 \to S_2$. S'il existe un ensemble de parties $\mathcal{C}$ de S_2 tel que

— $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$
— $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}$

alors f est mesurable.

Démonstration. Par hypothèse, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$ et $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$ et nous pouvons utiliser le lemme de transfert 15.47 :

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big) \tag{15.105}$$

qui s'écrit ici

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}(\mathcal{F}_2). \tag{15.106}$$

Mais vu que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$, nous avons aussi $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset \mathcal{F}_1$, ce qui signifie que

$$f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{15.107}$$

Cela est exactement le fait que f soit mesurable. □

Le théorème suivant est très important parce qu'en pratique c'est souvent lui, en conjonction avec la proposition 15.110 qui permet de déduire qu'une fonction est borélienne.

Théorème 15.49 ([243])**.**
Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors toute application continue $f : X \to Y$ est borélienne [8].

Démonstration. Pour vérifier que f est borélienne, nous devons prouver que $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien B de Y. Heureusement, le théorème 15.48 nous permet de limiter la vérification aux B appartenant à une classe engendrant les boréliens de Y.

La classe en question est toute trouvée : ce sont les ouverts. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X et donc un borélien de X. □

Le théorème suivant donne une importante compatibilité entre l'induction de tribu et l'induction de topologie : la tribu induite à partir des boréliens sur un sous-espace topologique est la tribu des boréliens pour la topologie induite.

7. Typiquement les ouverts pour les boréliens.
8. Définition 15.42.

Théorème 15.50 ([243]).
Soit X, un espace topologique et $Y \subset X$ une partie munie de la topologie induite. Alors

$$\mathcal{B}or(Y) = \mathcal{B}or(X)_Y \tag{15.108}$$

où $\mathcal{B}or(X)_Y$ est la tribu sur Y induite de $\mathcal{B}or(X)$ par la définition 15.6.

Démonstration. Nous notons τ_X et τ_Y les topologies de X et Y.

$\mathcal{B}\mathrm{or}(Y) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$ Si $A \in \tau_Y$ alors $A = Y \cap \Omega$ pour un $\Omega \in \tau_X$. Mais vu que Ω est un ouvert de X, il est un borélien de X, ce qui donne que $Y \cap \Omega$ est un élément de $\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$. Cela prouve que $\tau_Y \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$ est une tribu sur Y contenant les ouverts de Y. Nous avons donc

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y. \tag{15.109}$$

Réciproquement L'application $\mathrm{Id}\colon (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ est continue parce que si Ω est ouvert de X alors $\mathrm{Id}^{-1}(\Omega) = \Omega \cap Y \in \tau_Y$. Par conséquent l'identité est une application borélienne (théorème 15.49), ce qui signifie que $\mathrm{Id}^{-1}\big(\mathcal{B}\mathrm{or}(X)\big) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$, ou encore que si $B \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)$, alors $\mathrm{Id}^{-1}(B) = B \cap Y \in \mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$. Cela signifie que

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(Y). \tag{15.110}$$

□

Corollaire 15.51.
Si U est un borélien de l'espace topologique X, alors les boréliens de U sont les boréliens de X inclus dans U :

$$\mathcal{B}or(U) = \{B \in \mathcal{B}or(X) \text{ tel que } B \subset U\}. \tag{15.111}$$

Démonstration. Si $B' \in \mathcal{B}\mathrm{or}(U)$, le théorème 15.50 donne un borélien $B \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)$ tel que $B' = B \cap U$. Mais U étant borélien de X, l'intersection $B \cap U$ est encore un borélien de X. □

Ce corollaire s'applique en particulier lorsque U est un ouvert.

La proposition suivante montre comment il est possible de construire un espace mesuré à partir d'une bijection avec un espace mesuré déjà connu. Attention cependant : la mesure construite dans cette proposition n'est pas celle qui est le plus adapté. Voir la proposition 15.254 et l'exemple 15.254.

Proposition 15.52.
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ *pour tout* $B \in \mathcal{A}'$.

Alors $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace mesuré.

Démonstration. En plusieurs points.

$\mathcal{A}'$ est une tribu Il faut vérifier les différents points de la définition 15.1. D'abord, vu que $\Omega \in \mathcal{A}$, nous avons $\Omega' = \varphi(\Omega) \in \mathcal{A}'$. Pour le complémentaire, si $B \in \mathcal{A}'$ alors $B = \varphi(A)$ pour un certain $A \in \mathcal{A}$. Vu que $\mathcal{A}$ est une tribu nous avons alors $\Omega\backslash A \in \mathcal{A}$ et donc $\varphi(\Omega\backslash A) \in \mathcal{A}'$. Mais comme φ est bijective,

$$\varphi(\Omega\backslash A) = \Omega'\backslash\varphi(A) = \Omega'\backslash B. \tag{15.112}$$

Le complémentaire de B est donc bien dans $\mathcal{A}'$. Pour la troisième condition soient $B_i \in \mathcal{A}'$. Pour chauqe i, il existe $A_i \in \mathcal{A}$ tel que $B_i = \varphi(A_i)$. Nous avons $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$, donc

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_i \varphi(A_i) = \varphi\Big(\bigcup_i A_i\Big) \in \mathcal{A}'. \tag{15.113}$$

Nous avons fini de prouver que $(\Omega', \mathcal{A}')$ était un espace mesurable.

μ' **est une mesure positive** D'abord $\mu'(\varnothing) = \mu\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big) = \mu(\varnothing) = 0$. Ensuite si les A_i sont disjoints dans $\mathcal{A}'$ nous avons

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) = \mu\left(\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\right) = \mu\left(\bigcup_i \varphi^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu\big(\varphi^{-1}(A_i)\big) = \sum_i \mu'(A_i). \tag{15.114}$$

□

Proposition 15.53.
Soit une bijection continue d'inverse continue $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Alors

$$\varphi\big(\mathcal{B}or(\Omega)\big) = \mathcal{B}or(\Omega'). \tag{15.115}$$

Démonstration. Si $A \in \mathcal{B}\text{or}(\Omega')$, alors $A = \varphi\big(\varphi(A)\big) \in \varphi\big(\mathcal{B}\text{or}(\Omega)\big)$ parce que φ est continue et donc borélienne (proposition 15.49). Le même raisonnement fonctionne dans l'autre sens parce que nous avons supposé que φ est continue et d'inverse continu. □

15.4 Espace mesuré complet

15.4.1 Partie négligeable

Définition 15.54.
Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Une partie N de X est ***négligeable*** *pour μ s'il existe $Y \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$.*

Lemme 15.55.
L'ensemble des parties négligeables est stable par union dénombrable.

Démonstration. Si les ensembles N_i sont négligeables, alors pour chaque i nous avons $Y_i \in \mathcal{A}$ tel que $N_i \subset Y_i$ et $\mu(Y_i) = 0$. Alors bien entendu $\bigcup_i N_i \subset \bigcup_i Y_i$ et en utilisant (15.37),

$$\mu\Big(\bigcup_i Y_i\Big) \leqslant \sum_i \mu(Y_i) = 0. \tag{15.116}$$

□

Définition 15.56.
L'espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est ***complet*** *si tout ensemble μ-négligeable est dans $\mathcal{F}$.*

Notons que la proposition 15.5 s'applique si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties μ-négligeables. C'est ce qui permet de donner le théorème suivant, que nous redémontrons de façon indépendante de la proposition 15.5.

Théorème 15.57 (Complétion d'espace mesuré[239, 244, 245])**.**
Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables de X.

(1) Les ensembles suivants sont égaux :

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B, C \in \mathcal{F} \text{ tel que } B \subset A \subset C, \mu(C \backslash B) = 0\} \tag{15.117a}$$
$$\mathcal{B} = \{B \cup N \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\} \tag{15.117b}$$
$$\mathcal{C} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B \in \mathcal{F} \text{ tel que } A \Delta B \in \mathcal{N}\}. \tag{15.117c}$$

Ici $A\Delta B$ est la différence symétrique de A et B, définition 1.21.

(2) L'ensemble $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ est une tribu.

(3) La définition

$$\begin{aligned} \mu'\colon \mathcal{B} &\to [0, \infty] \\ A \cup N &\mapsto \mu(A) \end{aligned} \tag{15.118}$$

est cohérente.

(4) L'application μ' ainsi définie est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$.

(5) L'espace $(X,\mathcal{A},\mu')$ est complet.

(6) La mesure μ' prolonge μ.

(7) La mesure μ' est minimale au sens où toute mesure complète prolongeant μ prolonge μ'.

Démonstration. Commençons par prouver que les trois ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont égaux.

$\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$. Soit $A\in\mathcal{A}$. Alors nous avons des ensembles $B,C\in\mathcal{F}$ tels que $B\subset A\subset V$ avec $\mu(C\backslash B)=0$. Alors nous avons aussi $A=B\cup(C\backslash B)$, ce qui prouve que $A\in\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}\subset\mathcal{C}$. Soit $A\in\mathcal{B}$, c'est-à-dire que $A=B\cup N$ avec $B\in\mathcal{F}$ et $N\in\mathcal{N}$. Nous avons évidemment $A\cup B=A$ et donc

$$A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)=A\backslash(A\cap B)=(B\cup N)\backslash(A\cap B)\subset N. \tag{15.119}$$

Pour comprendre la dernière inclusion, si x appartient à $A=B\cup N$ sans être dans N alors $x\in B$ et donc $x\in A\cap B$. Par conséquent nous avons $A\Delta B\subset N$ et donc $A\Delta B\in\mathcal{N}$.

$\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ Soit donc $A\in\mathcal{C}$; il existe $B\in\mathcal{F}$ tel que $A\Delta B\in\mathcal{N}$ ou encore, il existe $D\in\mathcal{F}$ tel que $A\Delta B\subset D$ avec $\mu(D)=0$. Si nous posons $B'=B\cap D^c$ et $C'=B\cup D$ alors nous prétendons avoir

$$B'\subset A\subset C'. \tag{15.120}$$

Et nous le prouvons. En effet si $x\in B\cap D^c$ alors en remarquant que B se divise en

$$B=(B\cap A)\cup\big(B\cap(A\Delta B)\big), \tag{15.121}$$

et en nous souvenant que $B\cap(A\Delta B)\subset D$, il vient que $B\cap D^c\subset B\cap A$. Et en particulier $x\in A$. D'autre part

$$A\subset B\cup(A\Delta B)\subset B\cup D. \tag{15.122}$$

Nous avons donc bien $B'\subset A\subset C'$. Par stabilité de la tribu $\mathcal{F}$ sous les intersections et complémentaires nous avons aussi $B',C'\in\mathcal{F}$. De plus

$$C'\backslash B'=(B\cup D)\backslash(B\cap D^c)\subset D, \tag{15.123}$$

et donc

$$\mu(C'\backslash B')\leqslant\mu(D)=0. \tag{15.124}$$

Nous avons donc prouvé que $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{C}$. Nous allons donc maintenant noter $\mathcal{A}$ indifféremment les trois ensembles. Nous prouvons à présent que c'est une tribu.

Tribu : le vide Pas de problèmes à $\varnothing\in\mathcal{A}$

Tribu : complémentaire Soit $A\in\mathcal{A}$. Alors il existe $B,C\in\mathcal{F}$ tels que $B\subset A\subset C$ avec $\mu(C\backslash B)=0$. En passant au complémentaire,

$$C^c\subset A^c\subset B^c. \tag{15.125}$$

Mais $B^c\backslash C^c=C\backslash B$, donc $\mu(B^c\backslash C^c)=0$.

Tribu : union dénombrable Soit (A_n) des éléments de $\mathcal{A}$. Pour chaque n nous avons des ensembles $B_n,C_n\in\mathcal{F}$ tels que$B_n\subset A_n\subset C_n$ avec $\mu(C_n\backslash B_n)=0$. En ce qui concerne les unions nous avons

$$\bigcup_n B_n\subset\bigcup_n A_n\subset\bigcup_n C_n, \tag{15.126}$$

et

$$\big(\bigcup_n C_n\big)\backslash\big(\bigcup_n B_n\big)\subset\bigcup_n(C_n\backslash B_n). \tag{15.127}$$

Par conséquent, en utilisant (15.37),

$$\mu\left(\big(\bigcup_n C_n\big)\backslash\big(\bigcup_n B_n\big)\right)\leqslant\mu\left(\bigcup_n(C_n\backslash B_n)\right)\leqslant\sum_n\mu(C_n\backslash B_n)=0. \tag{15.128}$$

Cela prouve que $\bigcup_n A_n\in\mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Définition cohérente Soient $A, A' \in \mathcal{F}$ et $N, N' \in \mathcal{N}$ tels que $A \cup N = A' \cup N'$. Nous considérons $Y, Y' \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$, $N' \subset Y'$ et $\mu(Y) = \mu(Y') = 0$. En vertu de (15.37) nous avons

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cup Y) \leqslant \mu(A' \cup Y \cup Y') \leqslant \mu(A') + \mu(Y) + \mu(Y') = \mu(A'). \tag{15.129}$$

En écrivant la même chose en échangeant les primes nous prouvons également $\mu(A') \leqslant \mu(A)$. Au final $\mu(A) = \mu(A')$, c'est-à-dire

$$\mu'(A \cup N) = \mu'(A' \cup N'). \tag{15.130}$$

La définition de μ' est donc cohérente.

μ' est une mesure Le fait que μ' soit positive et que $\mu'(\varnothing)$ soit nul ne pose pas de problèmes. Il faut voir l'union dénombrable disjointe. Si les ensembles $A_i = B_i \cup N_i$ sont disjoints, alors les B_i et le N_i sont tous disjoints deux à deux. De plus l'ensemble $\bigcup_i N_i$ est négligeable parce que nous avons déjà vu que $\mathcal{N}$ était stable par union dénombrable (15.37). Donc

$$\mu'\left(\bigcup_i B_i \cup N_i\right) = \mu'\Big(\big(\bigcup_i B_i\big) \cup \underbrace{\big(\bigcup_i N_i\big)}_{\in\mathcal{N}}\Big) = \mu\big(\bigcup_i B_i\big) = \sum_u \mu(B_i) = \sum_i \mu'(B_i \cup N_i). \tag{15.131}$$

Espace complet Un ensemble μ'-négligeable est automatiquement μ-négligeable. En effet si H est μ'-négligeable, il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $H \subset B \cup N$ avec $\mu(B) = 0$. Vu que N est μ-négligeable, il existe $Y \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$. Donc $H \subset B \cup N \subset B \cup Y$ avec $\mu(B \cup Y) = 0$.

Tous les ensembles μ-négligeables faisant partie de $\mathcal{B}$, tous les ensembles μ'-négligeables font partie de $\mathcal{A}$.

Prolongement La mesure μ' prolonge μ. En effet si $A \in \mathcal{F}$ alors $A = A \cup \varnothing \in \mathcal{B}$ et A est m'-mesurable. De plus $\mu'(A) = \mu'(A \cup \varnothing) = \mu(A)$.

Minimalité Soit un espace mesuré complet $(X, \mathcal{M}, \nu)$ prolongeant $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Pour $A \in \mathcal{A}$ nous devons prouver que $A \in \mathcal{M}$ et que $\mu'(A) = \nu(A)$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $A = B \cup N$. Vu que N est μ-négligeable, il est également ν-négligeable et donc ν-mesurable parce que ν est complète : $A \in \mathcal{M}$. En ce qui concerne l'égalité $\mu'(A) = \nu(A)$ nous avons

$$\nu(B) \leqslant \nu(B \cup N) \leqslant \nu(B) + \nu(N) = \nu(B), \tag{15.132}$$

donc $\nu(A) = \nu(B \cup N) = \nu(B) = \mu(B)$. La dernière égalité est le fait que ν prolonge μ. Mais par définition de μ' nous avons aussi $\mu'(A) = \mu'(B \cup N) = \mu(B)$. Au final $\mu'(A) = \nu(A) = \mu(B)$.

□

Définition 15.58.
*L'espace mesuré complet $(X, \mathcal{A}, \mu')$ défini par le théorème 15.57 est l'**espace mesuré complétée** de $(X, \mathcal{F}, \mu)$.*

Nous noterons le complété de $(S, \mathcal{F}, \mu)$ par $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$

Théorème 15.59 (Carathéodory[239])**.**
Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Alors

(1) l'ensemble $\mathcal{M}$ des parties m^*-mesurables est une tribu,

(2) la restriction de m^* est une mesure sur $(S, \mathcal{M})$,

(3) l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est complet[9]*.*

Démonstration. Une grosse partie de la preuve sera de prouver la stabilité de $\mathcal{M}$ par union dénombrable quelconque ; cela sera divisé en plusieurs parties.

9. Définition 15.56.

Tribu : le vide L'ensemble vide est m^*-mesurable.

Tribu : complémentaire Soit $A \in \mathcal{M}$ et $X \in S$. La condition qui dirait $A^c \in \mathcal{M}$ est :

$$m^*(X) = m^*(X \cap A^c) + m^*(X \cap A), \tag{15.133}$$

qui est la même que celle qui dit que A est dans $\mathcal{M}$.

Tribu : union finie Soient $A, B \in \mathcal{M}$ et $X \subset S$. Alors, vu que m^* est une mesure extérieure,

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*\big(X \cap (A \cup B)\big) + m^*\big(X \cap (A \cup B)^x\big) && (15.134a)\\ &= m^*\big((X \cap A) \cup (X \cap B)\big) + m^*\big(X \cap A^c \cap B^c\big). && (15.134b) \end{aligned}$$

Mais nous pouvons écrire la première union sous forme d'une union disjointe de la façon suivante :

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (X \cap A) \cup (X \cap B \cap A^c), \tag{15.135}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap A^c) + m^*(X \cap A^c \cap B^c) && (15.136a)\\ &= m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) && (15.136b)\\ &= m^*(X) && (15.136c) \end{aligned}$$

parce que les deux derniers termes de (15.136a) se somment à $m^*(X \cap A^c)$ parce que $B \in \mathcal{M}$. La dernière ligne est le fait que A soit m^*-mesurable.

Union finie disjointe Soient $\{A_1, \dots, A_n\}$ des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$. Nous allons maintenant prouver par récurrence que

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k). \tag{15.137}$$

Si $n = 1$ le résultat est évident. Sinon, le fait que A_{n+1} soit m^*-mesurable donne

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) = m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}\Big) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c\Big). \tag{15.138}$$

Le fait que les A_k soient disjoints implique aussi que

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1} = X \cap A_{n+1} \tag{15.139}$$

et

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c = X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) \tag{15.140}$$

et donc

$$\begin{aligned} m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) &= m^*(X \cap A_{n+1}) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) && (15.141a)\\ &\overset{rec.}{=} m^*(X \cap A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k) && (15.141b)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} m^*(X \cap A_k). && (15.141c) \end{aligned}$$

La relation (15.137) est prouvée.

Notons qu'en particularisant à $X = S$ nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) \tag{15.142}$$

dès que les A_k sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$.

Union dénombrable disjointe Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{M}$. Nous allons prouver les choses suivantes :

— $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$

— $m^*\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n m^*(A_n)$

où toutes les sommes et union sur n sont entre 1 et ∞.

Nous posons $A = \bigcup_k A_k$ et $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Nous savons que $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout n par le point précédent. Donc si $X \in S$ nous avons

$$m^*(X) = m^*(X \cap B_n) + m^*(X \cap B_n^c) \tag{15.143a}$$
$$= \sum_{k=1}^n m^*(X \cap A_k) + m^*(X \cap B_n^x) \tag{15.143b}$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^n m^*(X \cap A_k) + m^*(X \cap A^c) \tag{15.143c}$$

où nous avons utilisé la relation (15.137) sur les B_n ainsi que le fait que $A^c \subset B_n^c$ (parce que $B_n \subset A$). L'inégalité (15.143a) étant vraie pour tout n, elle est vraie à la limite :

$$m^*(X) \geqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap A_k) + m^*(X \cap A^c) \tag{15.144a}$$
$$\geqslant m^*\Big(\bigcup_k (X \cap A_k)\Big) + m^*(X \cap A^c) \tag{15.144b}$$
$$= m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_k A_k\big)\Big) + m^*(X \cap A^c) \tag{15.144c}$$
$$= m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c), \tag{15.144d}$$

ce qui signifie que $A \in \mathcal{M}$. La première des deux choses que nous voulions montrer est faite. En la particularisant à $X = A$ et en tenant compte des faits que $A \cap A_k = A_k$ et $A \cap A^c = \varnothing$,

$$m^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap A_k) + m^*(A \cap A^c), \tag{15.145}$$

c'est-à-dire que pour tout n nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) \geqslant \sum_{k=1}^n m^*(A_k). \tag{15.146}$$

L'inégalité est encore vraie à la limite, et l'inégalité inverse étant toujours vraie pour une mesure extérieure,

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) = \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k). \tag{15.147}$$

Union dénombrable quelconque Soit maintenant une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ que nous ne supposons plus être disjoints. Nous nous ramenons au cas disjoint en posant

$$\begin{cases} B_1 = A_1 & \text{(15.148a)} \\ B_n = A_n \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\big)^c, & \text{(15.148b)} \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous mettons dans B_n les éléments de A_n qui ne sont dans aucun des A_k précédents. Autrement dit, nous posons $B_0 = \varnothing$ et $B_n = A_n \backslash B_{n-1}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ étant stable par réunion finie, par complément et par intersection finie nous avons $B_n \in \mathcal{M}$. De plus les B_n sont disjoints, donc

$$\bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigcup_{k=1}^\infty B_k \in \mathcal{M}. \tag{15.149}$$

La première égalité se justifie de la façon suivante : si $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ alors nous notons n_0 le plus petit n tel que $x \in A_n$ et alors $x \in B_{n_0}$.

Espace complet Nous prouvons à présent que $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est un espace mesuré complet. Soit N une partie m^*-négligeable de S et $Y \in \mathcal{M}$ tel que $m^*(Y) = 0$ et $N \subset Y$. D'abord $m^*(N) = 0$ parce que

$$m^*(N) \leqslant m^*(Y) = 0. \tag{15.150}$$

Si $X \subset S$ nous avons

$$X \cap N \subset N \Rightarrow m^*(X \cap N) = 0 \tag{15.151a}$$
$$X \cap N^c \subset X \Rightarrow m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X). \tag{15.151b}$$

Donc

$$m^*(X \cap N) + m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X), \tag{15.152}$$

ce qui montre que N est est m^*-mesurable.

□

15.60.
Ce théorème nous pousse à adopter de la notation. Lorsqu'un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est donné, nous noterons

$$(S, \mathcal{M}, \mu^*) \tag{15.153}$$

l'espace mesuré construit de la façon suivante. D'abord μ^* est la mesure extérieure associée à μ par la proposition 15.36. Ensuite $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables, qui est bien une tribu parce que μ^* est une mesure extérieure (15.59). La proposition (15.39) dit alors que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. De plus 15.59 nous explique que si $A \in \mathcal{F}$ alors $\mu(A) = \mu^*(A)$. Tout cela pour dire que

$$(S, \mathcal{F}, \mu) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*). \tag{15.154}$$

Et enfin, 15.59 nous dit que l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est complet.

Exemple 15.61
Montrons un cas dans lequel $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ n'est pas σ-fini. Soit S un ensemble non dénombrable et $\mathcal{F}$ la tribu des parties de S qui sont soit fini ou dénombrables soit de complémentaire fini ou dénombrable. Nous y mettons la mesure

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.155}$$

Cette mesure n'est pas σ-finie parce qu'aucune union de dénombrables est non dénombrable. De plus $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est complet parce que toute partie contenue dans un ensemble fini ou dénombrable est fini ou dénombrable (1.32).

$\mathcal{F}$ n'est pas $\mathcal{P}(S)$ La tribu $\mathcal{F}$ est différente de $\mathcal{P}(S)$. En effet S étant infini, il existe par 1.18 une bijection $\varphi\colon \{1,2\} \times S \to S$. Alors l'ensemble $\varphi\big(\{1\} \times S\big)$ est non dénombrable et son complémentaire

$$\varphi\big(\{1\} \times S\big)^c = \varphi\big(\{2\} \times S\big) \tag{15.156}$$

n'est as dénombrable non plus. Cet ensemble n'est donc pas de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{M}$ est $\mathcal{P}(S)$ En effet, soit $A \subset S$; il faut prouver que pour tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{15.157}$$

Nous prouvons cela en séparant les cas suivant que X est dénombrable ou non.

Si X est fini ou dénombrable, alors $X \cap A$ et $X \cap A^c$ le sont également et nous avons $\mu^*(X) = \mu(X) = 0$ ainsi que $\mu^*(X \cap A) = \mu^*(X \cap A^c) = 0$.

Si au contraire X n'est pas dénombrable,

$$\mu^*(X) = \inf_{\substack{A\in\mathcal{F}\\ X\subset A}} \mu(A) = \infty, \tag{15.158}$$

parce que X n'étant pas dénombrable, l'ensemble A ne l'est pas non plus et $\mu(A) = \infty$. Mais comme X n'est pas dénombrable, soit $X\cap A$ soit $X\cap A^c$ (soit les deux) n'est pas dénombrable non plus ; par conséquent

$$\mu^*(X\cap A) + \mu^*(X\cap A^c) = \infty. \tag{15.159}$$

Par conséquent $(S,\mathcal{F},\mu) \neq (S,\mathcal{M},\mu^*)$. Mais vu que $(S,\mathcal{F},\mu)$ est complété nous devons avoir $(S,\mathcal{F},\mu) = (S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})$. Tout cela pour dire que nous avons un exemple avec

$$(S,\mathcal{M},\mu^*) \neq (S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu}). \tag{15.160}$$

△

Nous avons deux façons de créer un espace complet à partir de $(S,\mathcal{F},\mu)$.

(1) Partir de la mesure extérieure μ^* et construire $(S,\mathcal{M},\mu^*)$.

(2) Partir des ensembles μ-négligeables, construire $\hat{\mathcal{F}}$ et ensuite $(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})$.

Ces deux façons ne sont pas équivalentes en général comme le montre l'exemple 15.61. Mais il sera montré par la proposition 15.65 que si $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini alors les deux sont équivalent.

Lemme 15.62.
Soit $(S,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Alors pour tout $X\subset S$ tel que $\mu^*(X) < \infty$ il existe $A\in\mathcal{F}$ tel que $X\subset A$ et $\mu^*(X) = \mu(A)$.

C'est-à-dire que μ^* a beau être défini sur toutes les parties de S, ce qu'il faut rajouter pour être μ-mesurable, c'est pas grand chose.

Démonstration. Par définition de la mesure extérieure associée à μ en tant qu'infimum, pour tout $n\geqslant 1$, il existe $A_n\in\mathcal{F}$ tel que $X\subset A_n$ et $\mu(A_n)\leqslant \mu^*(X) + \frac{1}{2^n}$. Nous posons $A = \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ et nous vérifions que ce A fait l'affaire.

D'abord $A\in\mathcal{F}$ parce qu'une tribu est stable par union dénombrable. Ensuite pour tout $n\geqslant 1$ nous avons

$$\mu(A)\leqslant\mu(A_n)\leqslant\mu^*(X)+\frac{1}{2^n}, \tag{15.161}$$

et à la limite $\mu(A)\leqslant\mu^*(X)$. Mais $X\subset A$ implique $\mu^*(X)\leqslant\mu(A)$ parce que $\mu^*(X)$ l'infimum d'un ensemble contenant $\mu(A)$. □

Corollaire 15.63.
Soit une mesure μ et la mesure extérieure μ^* associée[10]*. Une partie N de X est négligeable si et seulement si $\mu^*(N) = 0$.*

Démonstration. Si μ^* est la mesure extérieure associée à μ et si N est μ-négligeable alors $\mu^*(N) = 0$ parce que

$$\mu^*(N)\leqslant\mu^*(Y) = \mu(Y) = 0 \tag{15.162}$$

pour un certain Y mesurable de mesure nulle contenant N.

D'autre part si $\mu^*(N) = 0$ alors le lemme 15.62 donne une partie mesurable A telle que $N\subset A$ et $\mu(A) = 0$, c'est-à-dire que N est négligeable. □

Lemme 15.64.
Si l'espace mesuré $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini alors l'espace mesuré $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est également σ-fini.

10. Par la proposition 15.36.

Démonstration. Vu que $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini, nous avons une suite croissante A_n d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que $\bigcup_n A_n = S$ et telle que $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n. Étant donné que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, cette suite convient également pour montrer que $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est σ-fini parce que $\mu^*(A_n) = \mu(A_n) < \infty$. □

La proposition suivante montre que si $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-finie alors nous avons l'égalité.

Proposition 15.65.
Soit $(S,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré σ-fini, μ^* la mesure extérieure associée et $\mathcal{M}$ la tribu des ensembles μ^*-mesurables[11]*. Alors*

$$(S,\mathcal{M},\mu^*) = (S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu}). \tag{15.163}$$

Démonstration. La proposition 15.39 indique que tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables, c'est-à-dire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. Mais l'espace $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est complet par le théorème de Carathéodory 15.59, donc par minimalité du complété (15.57(7)),

$$(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu}) \subset (S,\mathcal{M},\mu^*) \tag{15.164}$$

au sens où $\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}$ et si $A \in \hat{\mathcal{F}}$ alors $\hat{\mu}(A) = \mu^*(A)$. Notons que cette inclusion est vraie même si la mesure n'est pas σ-finie.

Nous passons à l'inclusion inverse. Soit $A \in \mathcal{M}$, c'est-à-dire que pour tout $Y \subset S$ nous avons

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c). \tag{15.165}$$

Nous allons montrer que $A \in \hat{\mathcal{F}}$ en séparant les cas suivant que $\mu^*(A) = \infty$ ou non.

Si $\mu^*(A) < \infty$ Par le lemme 15.62, il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset X$ et $\mu^*(A) = \mu(X)$. Vu que $(S,\mathcal{F},\mu) \subset (S,\mathcal{M},\mu^*)$ nous avons alors

$$\mu^*(A) = \mu(X) = \mu^*(X). \tag{15.166}$$

Nous écrivons la relation (15.165) avec ce X en guise de Y, et en nous souvenant que $X \cap A = A$ et $X \cap A^c = X\backslash A$:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X\backslash A). \tag{15.167}$$

En tenant compte de (15.166) et du fait que $\mu^*(A) < \infty$, nous pouvons simplifier et trouver $\mu^*(X\backslash A) = 0$. Le lemme 15.62 nous donne alors $B \in \mathcal{F}$ tel que $X\backslash A \subset B$ et $\mu(B) = \mu^*(X\backslash A) = 0$, c'est-à-dire que $X\backslash A$ est μ-négligeable. Par conséquent $X\backslash A \in \hat{\mathcal{F}}$. En écrivant

$$A = X\backslash(X\backslash A), \tag{15.168}$$

nous avons écrit A comme différence de deux éléments de $\hat{\mathcal{F}}$ et nous concluons que $A \in \hat{\mathcal{F}}$.

Si $\mu^*(A) < \infty$ Le lemme 15.64 nous indique que $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est σ-fini et il existe donc une suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ telle que $\bigcup_n S_n = S$ et $\mu^*(S_n) < \infty$. L'ensemble $A \cap S_n$ est un élément de $\mathcal{M}$ vérifiant

$$\mu^*(A \cap S_n) \leqslant \mu^*(A) < \infty, \tag{15.169}$$

ce qui implique que $A \cap S_n \in \hat{\mathcal{F}}$ par la première partie. Maintenant $A = \bigcup_n (A \cap S_n) \in \hat{\mathcal{F}}$ par union dénombrable d'éléments de la tribu $\hat{\mathcal{F}}$.

□

Proposition 15.66 ([1])**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. Nous considérons un mesurable $M \in \mathcal{F}$ ainsi que

- *la tribu induite $\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}$,*
- *la tribu complétée $\hat{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans Ω,*

11. C'est bien une tribu par 15.59(1).

— *la tribu complétée* $\widehat{\mathcal{F}_M}$ *de* $\mathcal{F}_M$ *dans* M *(où nous avons considéré la mesure restreinte*[12] *de* μ*).*

— *la tribu induite* $(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\}$ *de* $\hat{\mathcal{F}}$ *sur* M*.*

Alors

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}. \tag{15.170}$$

Démonstration. L'utilisation de la proposition 15.7 nous donne déjà les expressions alternatives

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} \tag{15.171}$$

et

$$\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}. \tag{15.172}$$

Pour prouver $(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}$ il faudra faire deux inclusions, et nous avons l'embarras du choix.

Première : $\widehat{\mathcal{F}_M} \subset \{M \cap A \textbf{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\}$ Un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$ est de la forme $B \cup N$ où $B \in \mathcal{F}_M$ et où N est négligeable[13] dans M. Vu que $B \in \mathcal{F}_M$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $B = A \cap M$. Vu que B et N sont dans M nous pouvons « factoriser » l'intersection :

$$B \cup N = M \cap (A \cup N) \tag{15.173}$$

avec N négligeable dans M et donc également négligeable dans Ω. Donc $A \cup N \in \hat{\mathcal{F}}$.

Deuxième : $\{M \cap A \textbf{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} \subset \widehat{\mathcal{F}_M}$ Soit $A \in \hat{\mathcal{F}}$. Nous avons une partie négligeable N de Ω et un élément $B \in \mathcal{F}$ tels que $A = B \cup N$. Nous avons la décomposition

$$M \cap (B \cup N) = (M \cap B) \cap (M \cap N). \tag{15.174}$$

Il s'agit maintenant de nous assurer que cette décomposition implique que $M \cap (B \cup N) \in \widehat{\mathcal{F}_M}$. Soit $N_1 \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(N_1) = 0$ et $N \subset N_1$. Vu que $M \cap N_1 \in \mathcal{F}$ (intersections dans une tribu), nous pouvons écrire

$$M \cap N \subset M \cap N_1 \tag{15.175}$$

avec $\mu(M \cap N_1) = 0$. Cela pour dire que $M \cap N$ est négligeable dans M. La décomposition (15.174) est donc bien une union d'un élément de $\mathcal{F}_M$ avec un négligeable de M, et donc bien un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$.

□

15.67.
La principale application de la proposition 15.66 est le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)$ et M est un borélien B de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, la proposition explique que la tribu de Lebesgue sur B (complétée depuis les boréliens de la topologie induite) est donnée directement par l'intersection entre B et la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Donc sans devoir passer par la topologie induite, les boréliens et la completion :

$$\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R}^n)_M = \widehat{\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)}_M. \tag{15.176}$$

Exemple dans la proposition 19.64 qui donne une structure d'espace mesuré dans S^1 à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

12. Ce n'est pas ce qu'il se passe dans le cas de S^1 par rapport à $\mathbb{C}$, voir la proposition 19.66(3) malgré que S^1 est un borélien de $\mathbb{C}$.

13. Pour rappel, une partie est négligeable quand elle est inclue à une partie de mesure nulle.

15.4.2 Prolongement

Le théorème suivant est parfois nommé théorème d'extension de Carathéodory, par exemple sur Wikipédia. Le théorème de Carathéodory en étant un des ingrédients principaux, on comprend.

Théorème 15.68 (Prolongement de Hahn[239])**.**
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble S et μ une mesure sur $(S,\mathcal{A})$. Soit $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Alors

(1) La mesure μ se prolonge en une mesure m sur $\mathcal{F}$.

(2) Si μ est σ-finie alors le prolongement est unique et m est σ-finie.

(3) Si μ est finie, alors m l'est aussi.

Démonstration. La proposition 15.19 nous donne une mesure extérieure μ^* sur S dont la restriction à $\mathcal{A}$ est μ. Si $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables de S alors le théorème de Carathéodory 15.59 nous dit que $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est un espace mesuré.

$\underline{\mathcal{A}\subset\mathcal{M}}$ Cette partie est une adaptation de ce qui a déjà été fait dans la preuve de la proposition 15.39. Soit $A\in\mathcal{A}$ et $X\in S$; nous devons prouver la relation de la définition 15.37. Vu que μ^* est une mesure extérieure nous avons automatiquement

$$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c). \tag{15.177}$$

Il reste à prouver l'inégalité inverse. Soit une suite B_k d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X\subset\bigcup_k B_k$; nous avons alors

$$\mu^*(X\cap A)\leqslant\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\cap A\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(B_k\cap A)=\sum_k\mu(B_k\cap A) \tag{15.178}$$

où nous avons utilisé la définition 15.13(3) ainsi que le lemme 15.17. De la même façon,

$$\mu^*(X\cap A^c)\leqslant\sum_k\mu(B_k\cap A^c). \tag{15.179}$$

Mettant les deux bouts ensemble, en remarquant que $B_k\cap A\in\mathcal{A}$ et donc que $\mu^*(B_k\cap A)=\mu(B_k\cap A)$,

$$\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)\leqslant\sum_k\mu(B_k\cap A)+\mu(B_k\cap A^c)=\sum_k\mu(B_k). \tag{15.180}$$

La somme $\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)$ est donc inférieure à chacun des éléments de l'ensemble sur lequel on prend l'infimum pour définir [14] $\mu^*(X)$, donc

$$\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)\leqslant\mu^*(X). \tag{15.181}$$

A fortiori nous avons $\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$ et donc $(S,\sigma(\mathcal{A}),\mu^*)$ est un espace mesuré. Cela prouve l'existence d'une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})$.

Unicité Nous supposons à présent que μ est σ-finie. Soient m_1 et m_2 deux mesures prolongeant μ et définies sur une tribu contenant $\mathcal{A}$. Nous posons

$$\mathcal{C}=\{A\in\mathcal{A}\text{ tel que }\mu(A)<\infty\}. \tag{15.182}$$

Dans l'optique d'utiliser le théorème d'unicité des mesures 15.33, nous prouvons que $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{C})$. Vu que μ est σ-finie, il existe une suite croissante (S_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $S=\bigcup_n S_n$ et $\mu(S_n)\in\mathcal{C}$. Alors si $A\in\mathcal{A}$ nous avons $A=\bigcup_n(A\cap S_n)$, et donc $A\in\sigma(\mathcal{C})$. Donc $\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{C})$. Mais étant donné que $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ nous avons aussi $\sigma(\mathcal{C})\subset\sigma(\mathcal{A})$. Au final $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{C})$. Les mesures m_1 et m_2 sont des mesures sur $\sigma(\mathcal{C})$ coïncidant sur $\mathcal{C}$ (parce que $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$). De plus la classe $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et contient une suite croissante dont l'union est S (parce que μ est σ-finie).

Le théorème 15.33 nous dit alors que m_1 et m_2 coïncident sur $\sigma(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{A})$.

14. Définition 15.27.

Extension finie et σ-finie Enfin si μ est σ-finie il existe $S_n \in \mathcal{A}$ avec $\mu(S_n) < \infty$ et $\bigcup_n S_n = S$. Ces ensembles vérifient tout autant $m(S_n) = \mu(S_n) < \infty$ pour tout prolongement m de μ.

Idem si μ est finie, tout prolongement est fini.

□

Exemple 15.69([239])
Soit $\mathcal{A}$, l'algèbre de parties de $\mathbb{R}$ formée par les réunions finies d'intervalles de la forme $]-\infty, a[$, $[a, b[$ et $[b, +\infty[$ avec $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Notons que les singletons ne font pas partie de $\mathcal{A}$ parce que $[a, a[= \varnothing$. Nous posons

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.183}$$

Cela donne une mesure (non σ-finie) sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Nous allons prouver que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens et que μ accepte (au moins) deux prolongements distincts à $\sigma(\mathcal{A})$.

D'abord nous avons

$$]a, b[= \big(-\infty, a[\cup [b, +\infty[\big) \cap [a, b[, \tag{15.184}$$

donc toutes les boules ouvertes appartiennent à $\sigma(\mathcal{A})$. Ces dernières comprenant une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (par la proposition 7.91), tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{A})$. Par conséquent $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) \subset (\mathbb{R}^d)$. Mais en même temps tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont des boréliens, donc $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A})$ parce que la fermeture en tant qu'algèbre de parties est plus petite que la fermeture en tant que tribu.

La mesure de comptage prolonge μ parce qu'à part l'ensemble vide, tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont infinis. Notons que les singletons sont dans $\sigma(\mathcal{A})$, donc la mesure de comptage prend d'autres valeurs que 0 et $+\infty$.

Par ailleurs la mesure

$$\mu'(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{15.185}$$

est également une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$.

La mesure de comptage et μ' sont deux prolongements distincts de μ. △

Exemple 15.70([239])
Nous montrons maintenant une mesure non σ-finie qui se prolonge en deux mesures distinctes, toutes deux σ-finies.

Nous considérons la même algèbre $\mathcal{A}$ de parties que celle donnée dans l'exemple 15.69, mais cette fois vue sur $\mathbb{Q}$ uniquement. La mesure de comptage m sur $(\mathbb{Q}, \mathcal{A})$ n'est pas σ-finie.

Vu que les singletons sont des boréliens nous avons $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, ce qui fait que $(\mathbb{Q}, \sigma(\mathcal{A}), m)$ est un prolongement σ-fini de m. L'espace mesuré $(\mathbb{Q}, \sigma(\mathcal{A}), 2m)$ est également σ-fini et est un prolongement distinct de $(\mathbb{Q}, \mathcal{A}, m)$. △

Proposition 15.71.
Soient des espaces mesurés $(S_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ ainsi qu'une application $\varphi\colon S_1 \to S_2$ avec les hypothèses suivantes :

(1) φ est une bijection,

(2) φ est mesurable d'inverse mesurable,

(3) si $\mu_1(A) = 0$ alors $\mu_2\big(\varphi(A)\big) = 0$,

(4) si $\mu_2(A) = 0$ alors $\mu_1\big(\varphi^{-1}(A)\big) = 0$.

Alors

$$\hat{\mathcal{F}}_2 = \varphi(\hat{\mathcal{F}}_1). \tag{15.186}$$

Démonstration. Nous prouvons que $\hat{\mathcal{F}}_1 \subset \varphi(\hat{\mathcal{F}}_1)$. Vu la symétrie des hypothèses, l'inclusion inverse se fera de même.

Soit $A \in \hat{\mathcal{F}}_2$. Nous avons $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{F}_2$ et N, une partie μ_2-négligeable. Nous considérons $N_1 \in \mathcal{F}_2$ tel que $\mu_2(N_1) = 0$ et $N \subset N_1$. Notre but est maintenant de prouver que $\varphi^{-1}(B \cup N) \in \hat{\mathcal{F}}_1$.

Vu que φ est une bijection, nous avons

$$\varphi^{-1}(B \cup N) = \varphi^{-1}(B) \cup \varphi^{-1}(N). \tag{15.187}$$

Là-dedans, $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ parce que φ est borélienne. Il nous reste à voir que $\varphi^{-1}(N)$ est μ_1-négligeable. Vu que $N \subset N_1$, nous avons $\varphi^{-1}(N) \subset \varphi^{-1}(N_1)$ où $\varphi^{-1}(N_1) \in \mathcal{F}_1$.

Par construction, $\mu_2(N_1) = 0$ et par hypothèse, $\mu_1\big(\varphi^{-1}(N_1)\big) = 0$.

Au total,

$$\varphi^{-1}(B \cup N) = \underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}_1} \cup \underbrace{\varphi^{-1}(N)}_{\mu_1\text{-négligeable}} \in \hat{\mathcal{F}}_1. \tag{15.188}$$

□

15.5 Tribu borélienne

15.5.0.1 Définition

Définition 15.72 (Tribu borélienne)**.**
*La tribu des **boréliens**, notée $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Plus généralement si Y est un espace topologique, la tribu des boréliens est la tribu engendrée par les ouverts de Y.*

Proposition 15.73.
La tribu engendrée par une base dénombrable de la topologie est celle des boréliens.

Démonstration. Si une base de topologie est donnée, tout ouvert peut être écrit comme union d'élément de la base, proposition 7.55. Dans le cas d'une base dénombrable, cette union sera forcément dénombrable. Une tribu étant stable par union dénombrable, tout ouvert est dans la tribu engendrée par la base de topologie. Les autres boréliens suivent automatiquement.

Dit avec plus de lettres et moins de phrases, si $\mathcal{D}$ est une base dénombrable de la topologie de X, et si $\mathcal{O}$ est un ouvert de X, nous avons $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathcal{D}$. Vu qu'une tribu est stable par union dénombrable [15], nous avons $\mathcal{O} \in \sigma(\mathcal{D})$. En conséquence de quoi $\mathcal{B}\text{or}(X) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

Mais comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}\text{or}(X)$ l'inclusion inverse est automatique. D'où l'égalité $\mathcal{B}\text{or}(X) = \sigma(\mathcal{D})$. □

15.5.0.2 Les boréliens de $\mathbb{R}$

Nous rappelons que la topologie de $\mathbb{R}$ est celle des boules donnée par le théorème 7.88. Nous rappelons (voir la proposition 7.91 et sa preuve) que les boules ouvertes de la forme $B(q, r)$ avec $q, r \in \mathbb{Q}$ forment une base dénombrable de la topologique de $\mathbb{R}$.

Lemme 15.74.
Soit $\{q_i\}$ une énumération des rationnels. La tribu engendrée par les ouverts $\sigma_i =]q_i, \infty[$ est la tribu des boréliens.

Démonstration. Si $a < b$ dans $\mathbb{Q}$ alors $\sigma_a \backslash \sigma_b =]a, b]$. Ensuite

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_a \backslash \sigma_{b-\frac{1}{n}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a, b - \frac{1}{n}] =]a, b[. \tag{15.189}$$

15. Définition 15.1(3)

Par union dénombrable, tous les intervalles $]a,b[$ avec $a,b\in\mathbb{Q}$ sont dans la tribu engendrée par les σ_i.

Ces boules ouvertes forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$ par la proposition 7.91 et la proposition 15.73 conclu. □

Exemple 15.75
Les singletons sont des boréliens de $\mathbb{R}$ parce que

$$\{x\}=\Big(]-\infty,x[\cup]x,+\infty[\Big)^c. \tag{15.190}$$

Vu qu'une tribu est stable par union dénombrable, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Et comme les tribus sont stables par différence ensembliste (15.3(2)), l'ensemble des irrationnels est un borélien de $\mathbb{R}$. △

15.5.0.3 Diverses expressions

Lemme 15.76.
Soient un espace topologique X et un borélien B de X. Nous considérons sur B la topologie induite[16] *de X et les boréliens $\mathcal{B}or(B)$ correspondants. Nous avons :*

$$\mathcal{B}or(B)=\{A\in\mathcal{B}or(X)\text{ tel que }A\subset B\}=\{B\cap A\text{ tel que }A\in\mathcal{B}or(X)\}. \tag{15.191}$$

En particulier,

$$\mathcal{B}or(B)=\mathcal{B}or(X)_B. \tag{15.192}$$

Démonstration. L'égalité

$$\{A\in\mathcal{B}\text{or}(X)\text{ tel que }A\subset B\}=\{B\cap A\text{ tel que }A\in\mathcal{B}\text{or}(X)\} \tag{15.193}$$

est déjà dans la proposition 15.7.

Nous démontrons maintenant que

$$\mathcal{B}\text{or}(B)=\{A\cap B\text{ tel que }A\in\mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{15.194}$$

Pour ce faire, nous nous rappelons du lemme de transport 15.47. Soit l'injection canonique $f\colon B\to X$; pour tout $A\subset X$ nous avons $f^{-1}(A)=A\cap B$.

Nous considérons la classe $\mathcal{T}$ des ouverts de X. Par définition de la topologie induite, les ouverts de B sont les éléments de $f^{-1}(\mathcal{T})$. Donc

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big)=\mathcal{B}\text{or}(B). \tag{15.195}$$

Mais d'autre part,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big)=\{A\cap B\text{ tel que }A\in\mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{15.196}$$

Donc le lemme de transport 15.47 nous dit que

$$\mathcal{B}\text{or}(B)=\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big)=f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big)=\{A\cap B\text{ tel que }A\in\mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{15.197}$$

Pour finir, l'égalité (15.192) n'est autre que le fait que

$$\mathcal{B}\text{or}(X)_B=\{B\cap A\text{ tel que }A\in\mathcal{B}\text{or}(X)\}, \tag{15.198}$$

alors que nous venons de prouver que le membre de droite est $\mathcal{B}\text{or}(B)$. □

16. Définition 7.10.

15.5.1 Mesure image

Le produit d'une mesure par une fonction est définit par la propriété 15.187.

Proposition-définition 15.77 (Mesure image[243])**.**
Soient $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ des espaces mesurables. Soit $\varphi\colon S_1 \to S_2$ une application mesurable. Si m_1 est une mesure positive sur S_1 alors l'application définie par

$$m_2(A_2) = m_1\big(\varphi^{-1}(A_2)\big) \tag{15.199}$$

est une mesure positive sur $(S_2, \mathcal{F}_2)$.

*La mesure m_2 ainsi définie est la **mesure image** de m_1 par l'application φ. Elle est notée $\varphi(m_1)$.*

Démonstration. Il y a deux choses à vérifier pour avoir une mesure positive[17]. D'abord pour l'ensemble vide :

$$m_2(\varnothing) = m_1\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big) = m_1(\varnothing) = 0. \tag{15.200}$$

Ensuite pour l'additivité. Soient A_n dans $\mathcal{F}_2$ des parties deux à deux disjointes et telles que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_2$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} m_2\big(\bigcup_n A_n\big) &= m_1\Big(\varphi^{-1}\big(\bigcup_n A_n\big)\Big) && \text{(15.201a)}\\ &= m_1\big(\bigcup_n \varphi^{-1}(A_n)\big) && \text{(15.201b)}\\ &= \sum_n m_1\big(\varphi(A_n)\big) && \text{(15.201c)}\\ &= \sum_n m_2(A_n). && \text{(15.201d)} \end{aligned}$$

□

Lemme 15.78.
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi que deux mesures μ et ν sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$. Si $\varphi\colon S_1 \to S_2$ est mesurable et si $\mu \leqslant \nu$ alors $\varphi(\mu) \leqslant \varphi(\nu)$.

Démonstration. Soit B mesurable dans $(S_2, \mathcal{F}_2)$ (c'est-à-dire $B \in \mathcal{F}_2$). Alors

$$\varphi(\mu)(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \leqslant \nu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \varphi(\nu)(B). \tag{15.202}$$

□

Il est naturel de se demander comment il faut intégrer par rapport à une mesure image. La réponse sera dans le théorème 15.192.

15.5.2 Régularité d'une mesure

Certaines mesures ont de la compatibilité avec la topologie. Nous allons étudier ça.

Théorème 15.79 ([243])**.**
Soit X un espace métrique et m une mesure positive bornée sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$. Alors si B est un borélien,

(1) Régularité extérieure : $m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{où } \Omega \text{ est un ouvert contenant } B\}$

(2) Régularité intérieure : $m(B) = \sup\{m(F) \text{où } F \text{ est un fermé, } F \subset B\}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des $B \in \mathcal{B}or(X)$ tels que pour tout $\epsilon > 0$, il existe Ω_ϵ ouvert et F_ϵ fermé tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon \backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Nous allons montrer que cela est une tribu contenant les ouverts. Comme cela est inclus dans la tribu borélienne, nous en déduirons que $\mathcal{F} = \mathcal{B}or(X)$.

17. Définition 15.20

$\mathcal{F}$ contient les ouverts Soit Ω un ouvert de X. Alors Ω^c est fermé et $d(x,\Omega^c)=0$ si et seulement si $x\in\Omega^c$ par la proposition 9.52. Nous pouvons donc écrire

$$\Omega^c=\bigcap_{n\geqslant 1}\{x\in X \text{ tel que } d(x,\Omega^c)<\frac{1}{n}\}. \tag{15.203}$$

En passant au complémentaire et en posant $F_n=\{x\in X \text{ tel que } d(x,\Omega^c)\geqslant\frac{1}{n}\}$ nous avons

$$\Omega=\bigcup_{n\geqslant 1}F_n. \tag{15.204}$$

Chacun des F_n est fermé parce que F_n est l'image réciproque du fermé $[\frac{1}{n},\infty[$ par l'application $x\mapsto d(x,\Omega^c)$ qui est continue. De plus les F_n forment une suite croissante, donc le lemme 15.23 nous assure que $m(\Omega)=\lim_{n\to\infty}m(F_n)$. Et le lemme 15.22 que $m(\Omega\backslash F_n)=m(\Omega)-m(F_n)$.

Soit $\epsilon>0$. Il existe alors $n_\epsilon\geqslant 1$ tel que

$$m(\Omega\backslash F_n)=m(\Omega)-m(F_n)\leqslant\epsilon. \tag{15.205}$$

Bref si Ω est ouvert nous considérons $\Omega_\epsilon=\Omega$ et $F_\epsilon=F_{n_\epsilon}$ et nous avons

$$F_\epsilon\subset\Omega\subset\Omega_\epsilon \tag{15.206}$$

avec $m(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)\leqslant\epsilon$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ contient les ouverts.

$\mathcal{F}$ est une tribu Il y a à vérifier les trois conditions de la définition 15.1.

Les ensembles faciles Les ensembles X et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$ parce qu'ils sont ouverts et fermés.

Complémentaire Soit $B\in\mathcal{F}$, soit $\epsilon>0$ et les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ qui vont avec. Alors en passant au complémentaire nous avons

$$\Omega_\epsilon^c\subset B^c\subset F_\epsilon^c \tag{15.207}$$

De plus

$$F_\epsilon^c\backslash\Omega_\epsilon^c=F_\epsilon^c\cap(\Omega_\epsilon^c)^c=F_\epsilon^c\cap\Omega_\epsilon=\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon. \tag{15.208}$$

Par conséquent

$$m(F_\epsilon^c\backslash\Omega_\epsilon^c)=m(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)\leqslant\epsilon. \tag{15.209}$$

Cela montre que $B^c\in\mathcal{F}$.

Union dénombrable Soient (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ et $\epsilon>0$. Pour chaque n nous choisissons un ouvert Ω_n et un fermé F_n tels que $F_n\subset B_n\subset\Omega_n$ et

$$m(\Omega_n\backslash F_n)\leqslant\frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{15.210}$$

Vu que $\Omega_n\backslash B_n\subset\Omega_n\backslash F_n$ nous avons aussi

$$m(\Omega_n\backslash B_n)\leqslant m(\Omega_n\backslash F_n)\leqslant\frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{15.211}$$

Nous posons $\Omega=\bigcup_{n\geqslant1}\Omega_n$ (un ouvert) et $B=\bigcup_{n\geqslant1}B_n$ ainsi que $A=\bigcup_{n\geqslant1}F_n$ (qui n'est pas spécialement fermé).

Le but est de majorer $m(\Omega\backslash F)$ où F est un fermé qui est encore à déterminer. Calculons déjà ceci :

$$\Omega\backslash B=\bigcup_n\Omega_n\cap\big(\bigcup_k B_k\big)^c \tag{15.212a}$$

$$=\bigcup_n\Big(\Omega_n\cap\big(\bigcap_k B_k^c\big)\Big) \tag{15.212b}$$

$$\subset\bigcup_n\big(\Omega_n\cap B_n^c\big) \tag{15.212c}$$

$$=\bigcup_n(\Omega_n\backslash B_n) \tag{15.212d}$$

où l'union n'est pas spécialement disjointe. Par conséquent,

$$m(\Omega\backslash B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n\backslash B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} = \frac{\epsilon}{4}. \tag{15.213}$$

De la même façon nous avons

$$B\backslash A = \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_n\big)^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\backslash F_n. \tag{15.214}$$

Nous avons alors le inégalités de mesures

$$\begin{aligned} m(B\backslash A) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n\backslash F_n) && \text{(15.215a)}\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n\backslash F_n) && \text{(15.215b)}\\ &\leqslant \frac{\epsilon}{4}. && \text{(15.215c)} \end{aligned}$$

C'est vraiment dommage que A ne soit pas en générale un fermé, sinon il répondrait à la question. Nous posons $F'_1 = F_1$ et $F'_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. En tant qu'unions finies de fermés, les F'_n sont des fermés (lemme 7.3(2)). De plus la suite (F'_n) est croissante et l'union est A. Par le lemme 15.23(1) nous avons

$$m(A) = m\big(\bigcup_n F'_n\big) = \lim_{n\to\infty} m(F'_n). \tag{15.216}$$

Il existe donc n_ϵ tel que

$$m(A) - m(F'_n) \leqslant \epsilon \tag{15.217}$$

Nous posons $F = F'_{n_\epsilon}$. Vu que $F \subset A$ nous avons aussi $m(A\backslash F) = m(A) - m(F) \leqslant \epsilon$. Et en plus $F \subset A \subset B \subset \Omega$, ce qui donne bien la propriété voulue $F \subset B \subset \Omega$. Il reste à nous assurer de $m(\Omega\backslash F)$. Nous avons d'abord

$$m(B\backslash F) = m\big((B\backslash A) \cup (A\backslash F)\big) = m(B\backslash A) + m(A\backslash F) \leqslant \frac{5\epsilon}{4}. \tag{15.218}$$

Et enfin :

$$m(\Omega\backslash F) = m\big((\Omega\backslash B) \cup (B\backslash F)\big) = m(\Omega\backslash B) + m(B\backslash F) \leqslant \frac{6\epsilon}{4}. \tag{15.219}$$

Et donc à redéfinition près de ϵ c'est d'accord.

Il est donc établi que $\mathcal{F}$ est une tribu. Qui plus est, l'ensemble $\mathcal{F}$ est une tribu incluse aux boréliens et contenant les ouverts. Ergo $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(X)$.

Régularité extérieure Soit B un borélien et $\epsilon > 0$. Alors il existe F_ϵ fermé et Ω_ϵ ouvert tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Vu que $B \subset \Omega_\epsilon$ pour tout ϵ, nous avons aussi

$$m(B) \leqslant \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon). \tag{15.220}$$

Mais comme $\mu(\Omega_\epsilon) \geqslant m(B)$ pour tout ϵ, nous avons en réalité $m(B) = \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon)$.

Soit maintenant un ouvert Ω tel que $B \subset \Omega$. Nous devons prouver l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que $m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(\Omega)$. Cela permettra de conclure que l'infimum sur tous les ouverts contenant B est égal à l'infimum sur les ouverts de la forme Ω_ϵ.

Nous posons $m(\Omega) = m(B) + \delta$ et avec $\epsilon \leqslant \delta$ nous avons

$$m(\Omega_\epsilon\backslash B) \leqslant m(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon \tag{15.221}$$

et donc aussi

$$m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(B) + \epsilon \leqslant m(B) + \delta = m(\Omega). \tag{15.222}$$

Régularité intérieure Elle se fait de même.

□

Définition 15.80.
Soit X un espace topologique et m une mesure positive sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$.

*(1) m est une **mesure de Borel** si elle est finie sur tout compact.*

*(2) m est **régulière extérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ est ouvert et } B \subset \Omega\} \tag{15.223}$$

*(3) m est **régulière intérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \sup\{m(K) \text{ tel que } K \text{ est compact et } K \subset B\} \tag{15.224}$$

*(4) m est une mesure **régulière** si elle est régulière dans les deux sens.*

*(5) m est une **mesure de Radon** si elle est de Borel et régulière.*

Proposition 15.81.
Soit X un espace localement compact et dénombrable à l'infini[18] *Alors toute mesure de Borel sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$ est de Radon.*

Démonstration. Nous avons une suite exhaustive[19] de compacts X_k tels que

$$X = \bigcup_{k\geqslant 1} X_k = \bigcup_{k\geqslant 1} \mathrm{Int}(X_k). \tag{15.225}$$

Régularité intérieure Soit B, un borélien de X ; nous avons $B = \bigcup_{k\geqslant 1}(B \cap X_k)$ et comme cette union est croissante,

$$m(B) = \lim_{k\to\infty} m(B \cap X_k) \tag{15.226}$$

par le lemme 15.23(1). Dans la suite, il va y avoir beaucoup de considérations sur les topologies induites. Nous nommons τ_k la topologie de X_k induite depuis celle de X. Il ne faudra pas confondre les expressions « un compact *de* X_k » et « un compact *dans* X_k ». La première parle d'un compact pour la topologie τ_k. La seconde parle d'un compact pour la topologie de X, inclus dans X_k.
Si $a < m(B)$ alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $a < m(B \cap X_k)$, c'est-à-dire

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(B). \tag{15.227}$$

Mais (X_k, m) est un espace mesuré borné parce que m est de Borel et X_k est compact. Par conséquent la (restriction de la) mesure m est régulière sur l'espace mesuré $\big(X_k, \mathcal{B}\mathrm{or}(X_k)\big)$ par le théorème 15.79. De plus l'ensemble $B \cap X_k$ est un borélien de (X_k, τ_k) parce que

$$B \cap X_k \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_{X_k} = \mathcal{B}\mathrm{or}(X_k) \tag{15.228}$$

où nous avons utilisé la propriété de compatibilité entre topologie induite et tribu des borélien du théorème 15.50. Il existe donc un fermé F_ϵ de (X_k, τ_k) tel que

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \cap X_k & \text{(15.229a)} \\ m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon. & \text{(15.229b)} \end{cases}$$

En mettant bout à bout les inégalités nous avons trouvé

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon < m(F_\epsilon), \tag{15.230}$$

18. Définitions 7.48 et 7.50.
19. Définition 9.59.

et donc en particulier $a < m(F_\epsilon)$. L'ensemble F_ϵ est en plus un compact de (X, τ_X). En effet X_k étant fermé de (X, τ_X), le lemme 7.11 nous dit que F_ϵ est un fermé de (X, τ_X). Mais X_k étant compact, F_ϵ est un fermé inclus dans un compact, il est donc compact (lemme 7.59).
Pour tout $a < m(B)$ nous avons trouvé un compact F_ϵ inclus dans B dont la mesure est plus grande que a. Cela prouve la régularité intérieure de la mesure m.

Régularité extérieure Soit un borélien B de X. Si $m(B) = \infty$ alors tous les ouverts contenant B ont mesure infinie et $m(B)$ en est évidemment le supremum. Nous supposons donc que $m(B) < \infty$.
Nous notons τ_k la topologie induite de X sur $\text{Int}(X_k)$. Nous posons $B_k = B \cap \text{Int}(X_k)$. L'espace $\big(\text{Int}(X_k), m\big)$ est un espace mesuré borné et $B_k \in \mathcal{B}\text{or}\Big(\text{Int}(X_k)\Big)$. Il existe donc un ouvert Ω_k de $\big(\text{Int}(X_k), \tau_k\big)$ tel que $B_k \subset \Omega_k$ et

$$m(\Omega_k \backslash B_k) \leqslant \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{15.231}$$

De plus $\text{Int}(X_k)$ est un ouvert de (X, τ_X), donc en réalité Ω_k est un ouvert de X. Nous posons

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \tag{15.232}$$

qui est encore un ouvert de (X, τ_X).
Il est temps de voir que Ω vérifie $m(\Omega \backslash B) \leqslant \epsilon$. Pour cela,

$$\Omega \backslash B = \big(\bigcup_k \Omega_k\big) \cap \big(\bigcup_l B_l\big)^c \tag{15.233a}$$

$$= \big(\bigcup_k \Omega_k\big) \cap \big(\bigcap B_l^c\big) \tag{15.233b}$$

$$\subset \bigcup_k (\Omega_k \cap B_k^c) \tag{15.233c}$$

$$= \bigcup_k (\Omega_k \backslash B_k), \tag{15.233d}$$

ce qui donne au niveau des mesures :

$$m(\Omega \backslash B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Omega_k \backslash B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon. \tag{15.234}$$

□

Remarque 15.82.
Exprimé sur $\mathbb{R}^N$, la proposition 15.81 s'exprime en disant que toute mesure de Borel sur $\mathbb{R}^N$ est régulière. Typiquement, l'espace X dont il est question est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

15.5.3 Théorème de récurrence

Soit X un espace mesurable, μ une mesure finie sur X et $\phi\colon X \to X$ une application mesurable préservant la mesure, c'est-à-dire que pour tout ensemble mesurable $A \subset X$,

$$\mu\big(\phi^{-1}(A)\big) = \mu(A). \tag{15.235}$$

Si $A \subset X$ est un ensemble mesurable, un point $x \in A$ est dit **récurrent** par rapport à A si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant p$ tel que $\phi^k(x) \in A$.

Théorème 15.83 (Théorème de récurrence de Poincaré.)**.**
Si A est mesurable dans X, alors presque tous les points de A sont récurrents par rapport à A.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$ et l'ensemble

$$U_p = \bigcup_{k=p}^{\infty} \phi^{-k}(A) \tag{15.236}$$

des points qui repasseront encore dans A après p itérations de ϕ. C'est un ensemble mesurable en tant que union d'ensembles mesurables (pour rappel, les tribus sont stables par union dénombrable, comme demandé à la définition 15.1), et nous avons donc

$$\mu(U_p) \leqslant \mu(X) < \infty. \tag{15.237}$$

De plus $U_p = \phi^{-p}(U_0)$, donc $\mu(U_p) = \mu(U_0)$. Vu que $U_p \subset U_p$, nous avons

$$\mu(U_0 \backslash U_p) = 0. \tag{15.238}$$

Étant donné que $A \subset U_0$ nous avons a fortiori que

$$\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} \subset U_0 \backslash U_p, \tag{15.239}$$

et donc

$$\mu\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} = 0. \tag{15.240}$$

Cela signifie exactement que l'ensemble des points x de A tels que aucun des $\phi^k(x)$ avec $k \geqslant p$ n'est dans A est de mesure nulle. □

15.6 Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles

Nous allons parler de la mesurabilité de fonctions

$$f\colon (S, \mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{15.241}$$

où $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

15.84.
Nous convenons que $0 \times \pm\infty = 0$ parce que nous voulons qu'une droite (qui est un rectangle dont une mesure est 0 et l'autre ∞) soit de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.

Les produits et sommes $\pm\infty \pm \pm\infty$ et $\pm\infty \times \pm\infty$ sont ceux que l'on croit. Sauf bien entendu $+\infty - \infty$ et $1/0$ qui ne sont toujours pas définis.

Lemme 15.85.
L'ensemble B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$ si et seulement s'il existe un borélien B_0 de $\mathbb{R}$ tel que B soit B_0 ou $B_0 \cup \{-\infty\}$ ou $B_0 \cup \{-\infty\}$ ou $B_0 \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Démonstration. Vu que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$, la tribu induite l'est aussi par le théorème 15.49. Donc si B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble $B \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. □

Lemme 15.86 ([243]).
Si $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des intervalles du type

$$]\alpha, \beta[, \quad [-\infty, \beta[, \quad]\alpha, +\infty] \tag{15.242}$$

avec $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ alors $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})$.

Démonstration. Les intervalles $]\alpha, \beta[$ engendrent la topologie de $\mathbb{R}$ [20], donc $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$. De plus le lemme 15.3 nous autorise à dire que

$$\bigcap_{n \geqslant 1} [n, +\infty] = \{+\infty\} \in \sigma(\mathcal{S}_0). \tag{15.243}$$

20. Parce toutes les boules sont des intervalles de ce type et que les boules forment une base de topologie, proposition 7.91.

Par conséquent tous les ensembles énumérés dans le lemme 15.85 font partie de $\sigma(\mathcal{S}_0)$. Cela implique que $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$.

Pour l'inclusion inverse, $\sigma(\mathcal{S}_0)$ est engendré par des parties qui font parie de $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$, donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$. □

15.6.1 Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable

Théorème 15.87.
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et une fonction $f : S \to \bar{\mathbb{R}}$. Les faits suivants sont équivalents.

(1) La fonction f est mesurable.

(2) L'ensemble $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

(3) L'ensemble $\{f \leqslant a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

Démonstration. Plusieurs implications à prouver.

(1)⇒(2) Vu que f est mesurable et que $[-\infty, a[\in \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$, nous avons $f^{-1}\big([-\infty, a[\big) \in \mathcal{F}$.

(2)⇒(1) Nous posons $\mathcal{A} = \{[-\infty, a[\text{ tel que } a \in \mathbb{R}\}$.

Nous avons $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_0$ (le $\mathcal{S}_0$ du lemme 15.86). Et de plus,

$$]\alpha, \beta[= [-\infty, \beta[\backslash[-\infty, \alpha] = [-\infty, \beta[\backslash \bigcap_{n\geqslant 1} [-\infty, \alpha + \frac{1}{n}[. \tag{15.244}$$

Donc $]\alpha, \beta[\in \sigma(\mathcal{A})$.

Et aussi :

$$]\alpha, +\infty] = \bar{\mathbb{R}}\backslash[-\infty, \alpha + \frac{1}{n}[, \tag{15.245}$$

ce qui donne $]\alpha, +\infty] \in \sigma(\mathcal{A})$.

Au final, $\mathcal{S}_0 \subset \sigma(\mathcal{A})$ et donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Le lemme 15.86 nous dit que $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$. Nous avons donc bien $\sigma(\mathcal{S}_0) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$.

par ailleurs, nous savons que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$ parce que les éléments de $\mathcal{A}$ sont de la forme $\{f < a\}$. Cela donne $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}$. Mais $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big)$ peut aussi s'exprimer par le lemme de transport 15.47 : $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big)$. En combinant les deux,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}, \tag{15.246}$$

et en remplaçant $\sigma(\mathcal{A})$ par $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$ nous avons ce que nous voulions :

$$f^{-1}\big(\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \in \mathcal{F}, \tag{15.247}$$

ce qui signifie que f est mesurable.

(3)⇒(2) Nous avons

$$\{f < a\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{f \leqslant a - \frac{1}{n}\}. \tag{15.248}$$

donc cela est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Donc $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$.

(1)⇒(3) Nous avons

$$\{f \leqslant a\} = \{f < a\} \cup f^{-1}\big([-\infty, a]\big). \tag{15.249}$$

Le premier ensemble est dans $\mathcal{F}$ par (2). Ensuite $[-\infty, a]$ est un fermé de $\bar{\mathbb{R}}$ et donc un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$. Son image réciproque est donc un élément de $\mathcal{F}$ parce que f est mesurable. Au final nous avons bien $\{f \leqslant a\} \in \mathcal{F}$.

□

Lemme 15.88 ([246])**.**
Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(I)$ est mesurable pour tout I de la forme $]a, \infty[$.

Démonstration. Nous devons prouver que $f^{-1}(A)$ est mesurable dans X pour tout borélien A de $\mathbb{R}$. Nous posons

$$S = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tel que } f^{-1}(A) \text{ est mesurable dans } X\} \tag{15.250}$$

et nous prouvons que cela est une tribu. D'abord $f^{-1}(\mathbb{R}) = X$, et X est mesurable, donc $\mathbb{R} \in S$. Ensuite si $A \in S$ alors $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$. En tant que complémentaire d'un mesurable de X, l'ensemble $f^{-1}(A)^c$ est mesurable dans X. Et enfin si $A_n \in S$ alors $f^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f^{-1}(A_n)$ qui est encore mesurable dans X en tant qu'union de mesurables.

Donc S est une tribu qui contient tous les ensembles de la forme $]a, \infty]$. Le lemme 15.74 conclu que S contient tous les boréliens de $\mathbb{R}$. □

Lemme 15.89 ([246]).
Soit $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables[21]*. Alors $\sup_n f_n$ est mesurable.*

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}(\sup f_n)^{-1}\big(]a, \infty]\big) &= \{x \in X \text{ tel que } (\sup f_n)(x) > a\} && (15.251a)\\ &= \bigcup_n \{x \in X \text{ tel que } f_n(x) > a\} && (15.251b)\\ &= \bigcup_n f_n^{-1}\big(]a, \infty]\big). && (15.251c)\end{aligned}$$

Étant donné que f_n est mesurable et que $]a, \infty]$ est mesurable, chacun des $f_n^{-1}\big(]a, \infty]\big)$ est mesurable dans X. L'ensemble $(\sup f_n)^{-1}\big(]a, \infty]\big)$ donc une union dénombrable de parties mesurables. Il est donc mesurable.

Le lemme 15.88 conclu que $\sup f_n$ est mesurable. □

Proposition 15.90.
Si $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions mesurables et positives, alors la fonction[22] *$\sum_n f_n$ est mesurable.*

Démonstration. Nous considérons les fonctions $s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$ qui vaut éventuellement ∞ en certains points. Nous avons

$$\sum_n f_n(x) = \sup_k s_k(x), \tag{15.252}$$

donc le lemme 15.89 nous donne la mesurabilité de la somme de f_n. □

Définition 15.91.
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une ***partition mesurable dénombrable*** *de e S est une suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ de parties de S telles que*

(1) $S_n \in \mathcal{F}$ pour tout n,
(2) $S_N \cap S_k = \varnothing$ si $n \neq k$,
(3) $S = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$.

Lemme 15.92 (Lemme de recollement)**.**
Soit (S_n) une partition mesurable dénombrable de l'espace mesurable $(S, \mathcal{F})$. Soit $(S', \mathcal{F}')$ un autre espace mesurable et des fonctions mesurables

$$f_n \colon (S_n, \mathcal{F}_{S_n}) \to (S', \mathcal{F}') \tag{15.253}$$

où $\mathcal{F}_{S_n}$ est la tribu induite[23]*. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} f \colon (S, \mathcal{F}) &\to (S', \mathcal{F}') \\ x &\mapsto f_n(x) \text{ si } x \in S_n \end{aligned} \tag{15.254}$$

est mesurable.

21. Ici X est un espace mesuré et $\mathbb{R}$ est muni des boréliens.
22. Définition 13.287 pour la série de fonctions.
23. Définition 15.6.

Démonstration. Soit $A' \in \mathcal{F}'$; nous devons prouver que $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$. Nous savons que

$$f^{-1}(A') = \bigcup_{n\geqslant 1} f_n^{-1}(A'), \tag{15.255}$$

qui est une union dénombrable d'éléments $f_n^{-1}(A') \in \mathcal{F}_{S_n}$.

Vu que $S_n \in \mathcal{F}$ nous avons $\mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}$ parce qu'un élément de $\mathcal{F}_{S_n}$ est de la forme $S_n \cap B$ avec $B \in \mathcal{F}$. Du coup pour chaque n nous avons

$$f_n^{-1}(A') \in \mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}. \tag{15.256}$$

Au final l'égalité (15.255) écrit $f^{-1}(A')$ comme une union d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. □

Proposition 15.93.
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable et des applications mesurables $f, g\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$. Alors les fonctions suivantes sont mesurables :

(1) λf *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $f + g$ *si elle existe.*

(3) $1/f$ *si elle existe.*

(4) fg.

Démonstration. Commençons par clarifier « si elle existe ». La fonction $f+g$ n'existe pas au point $x \in S$ si $f(x) = +\infty$ et $g(x) = -\infty$. La fonction $1/f$ n'existe pas au point $x \in S$ si $f(x) = 0$. Voir le point 15.84.

La partie où $f + g$ existe est mesurable La partie de S sur laquelle $f + g$ existe est

$$\{x \in S \text{ tel que } \big(f(x), g(x)\big) \neq (+\infty, -\infty), \big(f(x), g(x)\big) \neq (-\infty, +\infty)\}. \tag{15.257}$$

Nous avons

$$\{(f, g) = (+\infty, -\infty)\} = \{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\} \tag{15.258}$$

qui est un ensemble mesurable parce que, par exemple,

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n\geqslant 1} [n, +\infty]. \tag{15.259}$$

La cas $(-\infty, +\infty)$ est identique, et au final la partie de S sur laquelle $f + g$ n'existe pas est mesurable. Par complémentarité la partie sur laquelle $f+g$ existe est également mesurable [24].

Idem pour la partie sur laquelle $1/f$ existe Idem.

Mesurabilité de λf Si $\lambda = 0$, nous avons une fonction constante dont la mesurabilité est évidente [25]. Nous supposons $\lambda > 0$. Alors

$$\{\lambda f < a\} = \{f < a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{15.260}$$

.Pour $\lambda < 0$ nous avons de la même manière

$$\{\lambda f < a\} = \{f > a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{15.261}$$

Ce dernier point est suffisant pour que λf soit mesurable par la théorème 15.87(3) et par complémentarité.

24. Parfois on a envie de dire que l'affirmation « A est mesurable » ne passe pas le test de Popper.
25. Prenez quand même le temps d'y penser.

Mesurabilité de $f+g$ Soit $a \in \mathbb{R}$; le théorème 15.87 nous demande d'avoir envie de prouver que $\{f+g<a\} \in \mathcal{F}$. Nous avons

$$f(x)+g(x)<a \tag{15.262}$$

si et seulement si

$$f(x)<a-g(x) \tag{15.263}$$

si et seulement si

$$\exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } f(x)<q<a-g(x). \tag{15.264}$$

Donc

$$\{f+g<a\}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\Big(\{f<q\}\cap\{g<a-r\}\Big), \tag{15.265}$$

qui est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Donc $\{f+g<a\} \in \mathcal{F}$ et $f+g$ est mesurable. Note qu'en toute rigueur il faudrait « $\cap$là où $f+g$ est définie » un peu partout, mais cela ne change rien parce que l'intersection de deux parties mesurables est mesurable.

Mesurabilité de $1/f$ Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a>0$ alors

$$\{1/f<a\}=\{f<0\}\cup\{f>\frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{15.266}$$

et si $a<0$ alors

$$\{1/f<a\}=\{f<0\}\cap\{f>\frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{15.267}$$

Mesurabilité de fg Nous allons la prouver en plusieurs fois.

Si f est mesurable alors f^2 est mesurable Si $a \leqslant 0$ alors $\{f^2<a\}=\varnothing$. Si $a>0$ nous avons

$$\{f^2<a\}=\{-\sqrt{a}<f<\sqrt{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{15.268}$$

$f\mathbb{1}_A$ est mesurable Soit $A \in \mathcal{F}$, et prouvons que $f\mathbb{1}_A$ est mesurable. Par définition,

$$(f\mathbb{1}_A)(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{15.269}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} f_1 \colon A^c &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{15.270}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 \colon A &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{15.271}$$

Alors nous avons

$$(\mathbb{1}_A f)(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A^c \\ f_2(x) & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{15.272}$$

Les ensembles A et A^c forment une partition mesurable dénombrable de S. La fonction f_1 est mesurable ; pour prouver que f_2 est mesurable, nous l'écrivons $f_2=f\circ j_A$ où $j_A \colon A \to S$ est l'injection canonique. L'application

$$j_A \colon (A,\mathcal{F}_A) \to (S,\mathcal{F}) \tag{15.273}$$

est mesurables parce que si $B \in \mathcal{F}$ alors $j_A^{-1}(B)=A\cap B \in \mathcal{F}_A$. D'autre part l'application

$$f \colon (S,\mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{15.274}$$

est mesurable par hypothèse. La composée $f_2=f\circ j_A$ est alors mesurable par la proposition 15.43. Le lemme de recollement 15.92 nous donne alors la mesurabilité de $f\mathbb{1}_A$.

Le produit fg est mesurable Nous posons

$$F = \{x \in S \text{ tel que } |f(x)| < +\infty, |g(x)| < \infty\}. \tag{15.275}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, F est mesurable. Par la partie précédente, les applications $f_1 = g\mathbb{1}_F$ et $g_1 = g\mathbb{1}_F$ sont mesurables. L'application $f_1 + g_1 : S \to \mathbb{R}$ est encore mesurable. Par conséquent l'application

$$f_1 g_1 = \frac{1}{2}\big((f_1 + g_1)^2 - f_1^2 - g_1^2\big) \tag{15.276}$$

est mesurable.

Voyons maintenant ce qui se passe en dehors de F. Nous allons utiliser le lemme de recollement sur la fonction

$$(fg)(x) = \begin{cases} (f_1 f_2)(x) & \text{si } x \in F \\ -\infty & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{V} \\ +\infty & \text{si } x \in \mathcal{W} \end{cases} \tag{15.277}$$

où $F, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ forment une partition mesurable dénombrable [26] de S. Pour le sport nous montrons que $\mathcal{U}$ est mesurable :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \big(\{f = -\infty\} \cap \{g > 0\}\big) && \text{(15.278a)} \\ &\cup \big(\{f = +\infty\} \cap \{g < 0\}\big) && \text{(15.278b)} \\ &\cup \big(\{g = -\infty\} \cap \{f > 0\}\big) && \text{(15.278c)} \\ &\cup \big(\{g = +\infty\} \cap \{f < 0\}\big). && \text{(15.278d)} \end{aligned}$$

□

Proposition 15.94.
Si $f_n : S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables, alors les fonctions $\inf_n f_n$ et $\sup_n f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Nous avons les découpages

$$\{\inf_n f_n < a\} = \bigcup_n \{f_n < a\} \in \mathcal{F} \tag{15.279}$$

et

$$\{\sup_n f_n \leqslant a\} = \bigcap_n \{f_n \leqslant a\} \in \mathcal{F}. \tag{15.280}$$

Le théorème 15.87 permet de conclure. □

Note que pour (15.280) nous ne pouvions pas utiliser les inégalités strictes parce que $\{\sup_n f_n < a\}$ n'est pas spécialement égal à $\bigcap_n \{f_n < a\}$.

15.95.
La proposition 15.94 nous permet de définir les parties positives et négatives de f par $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. Ce sont des applications mesurables. Nous avons les décompositions

$$\begin{aligned} f &= f^+ - f^- && \text{(15.281a)} \\ |f| &= f^+ + f^-. && \text{(15.281b)} \end{aligned}$$

Corollaire 15.96.
Si $f : S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable alors les applications f^+, f^- et $|f|$ sont mesurables en tant qu'applications $S \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

26. Définition 15.91.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour f^+. Nous savons que $f^+ : S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable par la proposition 15.94. Nous considérons l'injection canonique $f : \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}$ et

$$\begin{aligned} f_1^+ : S &\to \bar{\mathbb{R}}^+ \\ x &\mapsto f^+(x). \end{aligned} \tag{15.282}$$

Alors $f_1^+ = j \circ f^+$ est mesurable. Et c'est bien cela que nous voulions.

□

Note : f^+ et f_1^+ sont exactement les mêmes fonctions. Elles ne diffèrent que par la tribu que nous considérons sur l'espace d'arrivée. Nous allons à partir de maintenant les noter toutes deux f^+.

Remarque 15.97.
L'application $|f|$ peut être mesurable sans que f le soit. Soit en effet une partie $A \notin \mathcal{F}$, et posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in A^c. \end{cases} \tag{15.283}$$

Alors $f^{-1}(\{1\}) = A$ n'est pas mesurable alors que $|f|(x) = 1$ pour tout x.

Il est temps d'aller relire les définitions 8.26.

Proposition 15.98.
Si les fonctions $f_n : S \to \bar{\mathbb{R}}$ sont mesurables alors les fonctions $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Par le lemme 8.28 nous écrivons $\limsup_n f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} f_k(x)$. Pour chaque k nous considérons la fonction $g_k = \sup_{n\geqslant k} f_n$. Par la proposition 15.94, les fonctions g_k sont mesurables. En utilisant encore la même proposition, $\inf_{n\geqslant 1} g_k$ est encore mesurable. □

Proposition 15.99 ([247]).
Si $f_n : S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables telle dont la limite ponctuelle existe, alors la limite est mesurable.

Démonstration. Si la limite existe, elle est égale à la limite supérieure par le lemme 8.29. Or la limite supérieure est mesurable par la proposition 15.98. □

15.6.2 Fonction étagée

Définition 15.100 ([248]).
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable et une fonction $f : S \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})\big)$. Il serait dommage de confondre les trois concepts suivants.

- *Une **fonction simple** est une fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs.*
- *Une **fonction étagée** est une fonction simple qui est elle-même une fonction mesurable.*
- *Une **fonction en escalier** est une fonction étagée dont les valeurs sont constantes sur des intervalles : ce sont donc des fonctions constantes par morceaux.*

Dans les trois cas, la fonction f peut être écrite comme somme de fonctions caractéristiques :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x) \tag{15.284}$$

où $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$. Ce qui change est la nature des A_j.

- Si f est simple, les A_j sont quelconques.

— Si f est étagée, les A_i peuvent être choisis mesurables parce que $\{\alpha_i\}$ est un borélien, ce qui fait que $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$ un choix mesurable.

— Si f est en escalier, les A_i sont des intervalles.

Définition 15.101.
*La **forme canonique** d'une fonction simple f est la suivante. Soit $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,l}$ les valeurs distinctes prises par f et $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$. La forme canonique de f est alors*

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}. \tag{15.285}$$

Lemme 15.102.
Si f est une fonction simple dont la représentation canonique est

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{15.286}$$

alors

(1) les A_i sont disjoints,

(2) l'union fait S : $S = \bigcup_i A_i$.

Problèmes et choses à faire

Le lemme 15.103 et le théorème 15.105 disent la même chose alors que la preuve du théorème 15.105 est beaucoup plus compliquée.La démonstration du lemme serait fausse ?

M'est avis que ce que le théorème donne en plus est la convergence uniforme en cas de fonction bornée. La suite (15.287) ne va pas converger uniformément.

Lemme 15.103 (Limite croissante de fonctions étagées[1])**.**
Soit $f\colon (S, \mathcal{F}) \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction positive mesurable. Il existe une suite $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ de fonctions étagées positives telles que $f_n \to f$ ponctuellement et $f_n \leqslant f$.

Démonstration. Nous considérons (q_n) une suite parcourant tous les rationnels positifs[27] avec $q_0 = 0$ pour être sûr. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons la fonction

$$f_n(x) = \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \leqslant f(x)\}. \tag{15.287}$$

L'ensemble sur lequel le maximum est pris n'est pas vide parce que $q_0 = 0$. La fonction f_n est simple parce qu'elle ne prend que n valeurs différentes. Nous avons aussi par construction que $f_n(x) \leqslant f(x)$. Nous avons aussi pour tout $x \in S$ que $f_n(x) \to f(x)$ parce que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

En ce qui concerne le fait que f_n est mesurable, nous notons $\{r_0, \dots, r_n\}$ l'ensemble des $\{q_0, \dots, q_n\}$ classés dans l'ordre croissant. Nous posons en plus $r_{n+1} = +\infty$. Nous avons alors

$$f_n^{-1}(r_k) = \{x \in S \text{ tel que } f(x) \geqslant r_k, f(x) < r_{k+1}\} = \{f \geqslant r_k\} \cap \{f < r_{k+1}\}. \tag{15.288}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, le théorème 15.87 dit que $f_n^{-1}(r_k)$ est mesurable. □

Remarque 15.104.
Pour avoir $f_n < |f|$ nous pouvons poser

$$f_n(x) = \begin{cases} \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \leqslant f(x)\} & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ \min\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \geqslant f(x)\} & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \tag{15.289}$$

Théorème 15.105 (Théorème fondamental d'approximation, thème 2[243, 249, 250])**.**
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

27. Nous rappelons que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ par la proposition 8.3.

(1) *Soit une fonction mesurable $f\colon S \to [0,+\infty]$. Alors il existe une suite croissante de fonctions $\varphi_n\colon S \to [0,+\infty[$ étagées positives dont la limite ponctuelle est f.*

(2) *Si de plus f est bornée, la convergence est uniforme.*

(3) *Idem pour f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Nous découpons l'intervalle $[0,n]$ en plusieurs morceaux.

$$I_{n,k} = \begin{cases} [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[& \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n2^n - 1 \\ [n,\infty] & \text{si } k = n2^n. \end{cases} \tag{15.290}$$

Nous posons $S_{n,k} = f^{-1}(I_{n,k})$. Ce sont des ensembles mesurables parce que f est mesurable. Et de plus pour chaque n, la suite $(S_{n,k})_{k\geqslant 0}$ est une partition mesurable finie de S. Nous posons

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{S_{n,k}}. \tag{15.291}$$

C'est-à-dire que sur chaque $S_{n,k}$ nous approximons f par le bas. La fonction φ_n est étagée et positive : $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f(x)$ par construction.

Croissance Nous allons voir que $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$. Soit $k \neq n2^n$. Si $x \in S_{n,k}$ alors $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$ et nous avons aussi la décomposition

$$S_{n,k} = S_{n+1,2k} \cup S_{n+,2k+1}. \tag{15.292}$$

Si $x \in S_{n+1,2k}$ alors $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$. Et si $x \in S_{n+1,2k+1}$ alors

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n} > \varphi_n(x). \tag{15.293}$$

Il reste à traiter le cas $x \in \{f \geqslant n\}$. Dans ce cas nous avons $\varphi_n(x) = n$. Il y a encore deux cas à traiter :

$$\{f \geqslant n\} = \{f \in [n, n+1[\} \cup \{f \in [n+1,\infty]\}. \tag{15.294}$$

Pour plus de simplicité dans les notations, nous notons $\bar{n} = n2^n$, c'est-à-dire que $I_{n,\bar{n}}$ est le $I_{n,k}$ avec le k le plus grand possible. Nous avons

$$I_{n,\bar{n}} = [n, n+1[\cup [n+1,\infty]. \tag{15.295}$$

Le premier élément se décompose en $I_{n+1,k}$ avec $k < n+1$ (nous préciserons plus tard exactement les valeurs de k) tandis que le second est $[n+1,\infty] = I_{n+1,\overline{n+1}}$.
Pour $x \in S_{n+1,\overline{n+1}}$ nous avons

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{(n+1)2^{n+1}}{2^{n+1}} = n+1 > \varphi_n(x). \tag{15.296}$$

Si au contraire $f(x) \in [n, n+1[$ nous devons précisément voir quels sont les k qui font en sorte que $I_{n+1,k}$ recouvre $[n, n+1[$. Le plus petit k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}} = n$, c'est-à-dire $k = n2^{n+1}$ et le plus grand k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}} < n+1$, c'est-à-dire $k = 2^{n+1}(n+1) - 1$. Donc si $f(x) \in [n, n+1[$ alors $x \in S_{n+1,k}$ avec

$$n2^{n+1} \leqslant k \leqslant (n+1)2^{n+1} - 1 \tag{15.297}$$

Dans ce cas

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \geqslant \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = \varphi_n(x). \tag{15.298}$$

Convergence ponctuelle Si $f(x) < \infty$ alors il existe[28] $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) < n_0$. Pour $bn \geqslant n_0$ nous avons $f(x) < n$ et donc $\varphi_n(x)$ se calcule à partir d'un des intervalles de taille $1/2^n$:

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}. \tag{15.299}$$

Donc

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{15.300}$$

ce qui signifie que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

Si $f(x) = +\infty$ alors $f(x) > n$ pour tout n. Et alors $\varphi_n(x) = n$ pour tout n, ce qui donne bien $\varphi_n(x) \to \infty$.

Convergence uniforme Soit f bornée : $0 \leqslant f(x) < M$ pour tout $x \in S$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous prenons $n_0 > M$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$ nous avons

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \epsilon. \tag{15.301}$$

Note qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que nous savons déjà que la limite est croissante.

□

15.6.3 Fonctions réelle à variables réelles

Nous nous particularisons à présent au cas de fonctions

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big). \tag{15.302}$$

15.106 ([1])**.**
Anticipons un peu pour expliquer pourquoi ce que nous allons faire maintenant est suffisant pour ce que nous avons en tête[29]. Toutes les fonctions mesurables

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{15.303}$$

seront a fortiori mesurables au sens de

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{15.304}$$

où $\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la tribu complétée de celle des boréliens (définition 15.127).

15.107.
Nous allons maintenant donner quelque conditions pour que des fonctions soient mesurables au sens de la tribu des boréliens sur l'espace d'arrivée et de départ. Ces résultats seront donc immédiatement appliquables à la théorie de l'intégration où nous considérons la tribu de Lebesgue sur l'espace de départ.

Autrement dit, les résultats présentés ici sont un peu plus forts que ce dont nous avons réellement besoin ... ou alors ce sont les hypothèses que nous allons nous mettre en théorie de l'intégration qui seront un peu plus fortes que nécéssaires. C'est une question de point de vue.

Corollaire 15.108.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute application monotone $f : I \to \mathbb{R}$ est borélienne.

Démonstration. Vu que f est monotone, l'ensemble $\{f < a\}$ est un intervalle. Or tous les intervalles sont boréliens, donc f est mesurable par le théorème 15.87. □

28. Le vrai snob citera ici le lemme 1.106.

29. Pour rappel, nous avons en tête de définir une théorie de la mesure afin d'y définir des intégrales. En particulier nous allons étudier l'inttégrale de Lebesgue et en ce qui concerne $\mathbb{R}^n$, nous aurons la tribu de Lebesgue.

Définition 15.109.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ a une propriété (monotone, mesurable, continue, etc.) ***par morceaux*** *s'il existe une suite strictement croissante de points $(x_I)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans I telle que f ait la propriété sur chacun des ouverts $]x_j, x_{j+1}[$..*

Dans cette définition, les points sont numérotés par $\mathbb{Z}$ et non par $\mathbb{N}$ parce que nous nous laissons la liberté d'avoir une infinité de points de chacun des deux côtés.

Proposition 15.110.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f est continue ou monotone par morceaux sur I alors elle y est borélienne.

Démonstration. L'ensemble $\{]x_j, x_{j+1}[\}_{j\in\mathbb{Z}} \cup \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ forme une partition mesurable dénombrable de I (les singletons sont des boréliens). À une belle redéfinition près de la numérotation (deux fois $\mathbb{Z}$ va dans $\mathbb{N}$), nous les appelons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et nous définissons les fonctions f_n comme étant les restrictions de f aux intervalles I_k.

Toute fonction sur un singleton est mesurable. Toute fonction continue sur un ouvert est mesurable (théorème 15.49). Toute fonction monotone sur un ouvert est mesurable (corollaire 15.108).

Le lemme de recollement 15.92 donne alors la mesurabilité de f. □

15.111.
Toutes les fonctions que nous pouvons écrire explicitement sont mesurables . . . en tout cas toutes celles que l'on trouve en pratique. En effet nous avons déjà toutes les fonctions continues par morceaux via la proposition 15.110 et ensuite toutes les limites par la proposition 15.99. Cela donne les séries, les dérivées, les primitives, etc.

15.7 Tribu produit, mesure produit

15.7.1 Produit d'espaces mesurables

Définition 15.112.
Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus sur deux ensembles Ω_1 et Ω_2, nous définissons la ***tribu produit*** *$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ comme étant la tribu engendrée par*

$$\{X \times Y \text{ tel que } X \in \mathcal{A}_1, Y \in \mathcal{A}_2\}. \tag{15.305}$$

Ces ensembles sont appelés ***rectangles*** *de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.*

Proposition 15.113 ([251])**.**
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$. Si $\mathcal{C}_i$ est une classe de parties de S_i avec $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ et $S_i \in \mathcal{C}_i$. Alors

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{15.306}$$

Démonstration. Nous notons p_1 et p_2 les projections de $S_1 \times S_2$ vers S_1 et S_2. Nous commençons par prouver que

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(\mathrm{P}_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big). \tag{15.307}$$

En effet cette union est dans $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ parce que ce sont tous des produits de la forme $A_1 \times S_2$ et $S_1 \times A_2$ où $A_i \in \mathcal{F}_i$. Inversement, tous les produits de la forme $A_1 \times A_2$ sont dans la tribu engendrée par l'union parce que

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \times S_2) \cap (S_1 \times A_2). \tag{15.308}$$

Par conséquent, la partie $p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)$ engendre tous les produits qui engendrent la tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. L'égalité (15.307) est donc correcte.

Si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ alors

$$p_1^{-1}(C_1) = C_1 \times S_2 \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \tag{15.309}$$

et donc $p_1^{-1}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. En utilisant le lemme de transport 15.47 nous avons alors

$$p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) = p_1^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}_1)\big) = \sigma\big(p_1^{-1}\mathcal{C}_1\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1) \tag{15.310}$$

et au bout de la même façon,

$$p_2^{-1}(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{15.311}$$

Vu les relations (15.310), (15.311) et (15.307) nous avons

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(\mathrm{P}_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{15.312}$$

Réciproquement, si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ et $C_2 \in \mathcal{C}_2$ alors

$$C_1 \times C_2 = (C_1 \times S_1) \cap (S_1 \times C_2) = p_1^{-1}(C_1) \cap p_2^{-1}(C_2) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2. \tag{15.313}$$

□

15.7.2 Le cas des boréliens

Si X_1 et X_2 sont des espaces topologiques et si nous notons $\mathcal{O}_i$ l'ensemble de leurs ouverts, par définition $\mathcal{B}\mathrm{or}(X_i) = \sigma(\mathcal{O}_i)$. De plus par la proposition 15.113 nous savons que

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) = \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2). \tag{15.314}$$

Lemme 15.114.
Si $(X_i, \mathcal{O}_i)$ sont des espaces topologiques, alors

$$\mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2) \subset \mathcal{B}or(X_1 \times X_2) \tag{15.315}$$

Démonstration. Si $A_i \in \mathcal{O}_i$ alors $A_1 \times A_2$ est un ouvert de $X_1 \times X_2$ (voir la définition 7.9). Par conséquent, $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ est contenu dans l'ensemble des ouverts de $X_1 \times X_2$ ou encore

$$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2), \tag{15.316}$$

et donc

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \sigma\big(\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2)\big) \tag{15.317}$$

finalement, par (15.314)

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2). \tag{15.318}$$

□

Il n'y a en général pas égalité, mais nous allons immédiatement voir que dans (presque) tous les cas raisonnables, les boréliens sur un produit sont le produit des boréliens.

Proposition 15.115 ([251])**.**
Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques séparables. Alors

$$\mathcal{B}or(X_1 \times X_2) = \mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2). \tag{15.319}$$

Démonstration. Nous savons par le lemme 9.1 que tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. Donc tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est dans $\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2)$. Par conséquent

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2). \tag{15.320}$$

L'inclusion inverse étant déjà acquise par le lemme 15.114, nous avons l'égalité. □

Proposition 15.116.
Les boréliens sur $\mathbb{R}^N$ sont ceux qu'on croit.

(1) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$

(2) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$

Démonstration. Cela n'est rien d'autre que la proposition 15.115. □

Proposition 15.117.
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et des applications $f_k : S \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, N)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f : (S, \mathcal{F}) &\to (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N)) \\ x &\mapsto \big(f_1(x), \dots, f_N(x)\big) \end{aligned} \tag{15.321}$$

est mesurable si et seulement si chacun des f_i est mesurable.

Démonstration. Division en deux.

Condition nécessaire Nous supposons que les f_i sont mesurables. Nous avons

$$f^{-1}\Big(\prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[\Big) = \{x \in S \text{ tel que } f_1(x) \in]a_1, b_1[, \cdots f_N(x) \in]a_N, b_N[\} \tag{15.322a}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} f_k^{-1}\big(]a_k, b_k[\big). \tag{15.322b}$$

Cela est une intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. Mais les pavés ouverts engendrent $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^N)$ parce qu'ils sont une base dénombrable de la topologie (proposition 15.73). Le théorème 15.48 nous assure alors que f est mesurable parce que l'image inverse d'une base de la tribu est mesurable.

Condition suffisante Si f est mesurable alors en particulier

$$f_k^{-1}\big(]a, b[\big) = f^{-1}\big(\mathbb{R} \times \dots \times]a, b[\times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}\big) \in \mathcal{F}. \tag{15.323}$$

Pour cela nous avons utilisé la proposition 15.116 qui nous indique que le produit dans la parenthèse est un borélien de $\mathbb{R}^N$ en tant que produit de boréliens de $\mathbb{R}$.
Encore une fois f_k^{-1} tombe dans $\mathcal{F}$ pour une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ et est donc mesurable.

□

15.8 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Nous notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des intervalles[30] de $\mathbb{R}$.

Proposition 15.118.
L'ensemble réunions finies d'éléments de $\mathcal{S}$ est une algèbre de parties de $\mathbb{R}$ que nous allons noter $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Démonstration. Nous devons vérifier la définition 15.16. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des intervalles et font donc partie de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se décompose en union d'intervalles de la forme (a_k, b_k) avec $k = 1, \dots, n$ (ici nous mettons des parenthèses au lieu de crochets parce qu'a priori nous ne savons pas). Alors

$$A^c = \bigcup_{k=0}^{k} (b_k, a_{k+1}) \tag{15.324}$$

où nous avons posé $b_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Ici encore les parenthèses sont soit fermées soit ouvertes en fonction de ce qu'étaient celles dans la décomposition de A. Quoi qu'il en soit, cette décomposition de A^c montre que $A^c \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Enfin si $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. □

30. Définition 1.13.

Lemme 15.119.
Tout élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ admet une décomposition minimale unique en réunion finie d'intervalles. Cette décomposition est formée d'intervalles deux à deux disjoints.

Démonstration. Nous allons montrer que si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, alors la décomposition minimale consiste en les composantes connexes de A. Pour cela nous rappelons que la proposition 8.34 dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est un intervalle. D'abord cela nous dit immédiatement que les composantes connexes de A forment une décomposition de A en intervalles. Nous devons prouver qu'elle est minimale.

Soit $\{C_k\}_{k=1,\dots,n}$ les composantes connexes de A. Aucun connexe de $\mathbb{R}$ contenu dans A ne peut intersecter plus d'un des C_k, et par conséquent nous ne pouvons pas décomposer A en moins de n intervalles.

Pour l'unicité, soit $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ un ensemble de n intervalles tels que $\bigcup_{k=1}^{n} I_k = A$. Chacun des I_k intersecte un et un seul des C_k. En effet si $x \in I_k \cap C_i$ et $y \in I_k \cap C_j$, alors $[x,y] \subset I_k$ parce que I_k est un intervalle. Mais C_i étant le plus grand connexe contenant x, $[x,y] \subset C_i$ et de la même façon, $[x,y] \subset C_j$. Par conséquent C_i et C_j sont tous deux la composante connexe de x et y. Nous en déduisons que $C_i = C_j$, c'est-à-dire $i = j$.

Par ailleurs nous avons $I_k \cap I_l = \varnothing$ dès que $k \neq l$ parce que sinon l'ensemble $I_k \cap I_l$ serait connexe et la décomposition des $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ ne serait pas minimale : en remplaçant I_k et I_l par $I_k \cup I_l$ on aurait eu une décomposition contenant moins d'éléments. Donc à renumérotation près nous pouvons supposer que I_k intersecte C_l si et seulement si $k = l$.

Dans ce cas nous devons avoir $I_k = C_k$, sinon les éléments de $C_k \backslash I_k$ ne seraient pas dans $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$. □

Définition 15.120 (longueur d'intervalle[239])**.**
Si I est un intervalle d'extrémités a et b avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ alors nous définissons la ***longueur*** *de I par*

$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & si\ -\infty < a \leqslant b < +\infty \\ \infty & si\ a\ ou\ b\ est\ infini \end{cases} \tag{15.325}$$

Si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ et si sa décomposition minimale est $A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, alors on définit

$$\ell(A) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k). \tag{15.326}$$

Le lemme suivant nous indique que nous pouvons calculer la longueur d'un élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ sans savoir la décomposition minimale, pourvu que l'on connaisse une décomposition disjointe.

Lemme 15.121 ([239])**.**
Si

$$B = \bigcup_{r=1}^{p} J_r \tag{15.327}$$

est une décomposition de $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ en intervalles deux à deux disjoints alors

$$\ell(B) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{15.328}$$

Démonstration. Nous prouvons dans un premier temps le résultat dans le cas où $B = I$ est un intervalle. Soit I un intervalle et une décomposition en intervalles disjoints $I = \bigcup_{r=1}^{p} J_r$. Nous montrons qu'alors $\ell(I) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r)$. Nous verrons ensuite comment passer au cas où B est un élément générique de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Si $B = I$ est un intervalle infini Si I est infini alors un des J_r soit l'être et donc $\sum_{r=1}^{p} \ell(J_r) = \infty = \ell(I)$.

Si $B = I$ est un intervalle ininfini Pour chaque $r = 1, \dots, p$ nous notons a_r et b_r les extrémités de J_r. Vu que les J_r sont connexes et disjoints, si $a_k \leqslant a_l$ alors $b_k \leqslant a_l$, sinon l'ensemble (non vide) $]a_l, b_k[$ serait dans l'intersection $I_k \cap I_l$ qui, elle, est vide. Plus généralement, si $x \in J_k$ et $y \in J_l$ avec $x < y$ alors pour tout $x' \in J_k$ et tout $y' \in J_l$ nous avons $x' < y'$. Vu qu'il y a un nombre fini d'ensembles J_r, nous pouvons les classer dans l'ordre croissant :

$$a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_{p-1} \leqslant a_p \leqslant b_p. \tag{15.329}$$

Vu que les J_r sont disjoints et que leur union est connexe nous avons en réalité

$$a = a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = a_3 \leqslant \dots \leqslant b_{p-1} = a_p \leqslant b_p, \tag{15.330}$$

donc une somme télescopique donne

$$\ell(I) = b - a = \sum_{r=1}^{p} (b_r - a_r) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{15.331}$$

Si B n'est pas un intervalle Soit $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ la décomposition minimale de B. Alors

$$\spadesuit = \ell(B) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \ell\Big(\bigcup_{r=1}^{p} (I_k \cap J_r) \Big). \tag{15.332}$$

Mais I_k est un intervalle et s'écrit comme union disjointe $I_k = \bigcup_{r=1}^{p} (I_k \cap J_r)$, donc par la première partie

$$\spadesuit = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} \ell(I_k \cap J_r) = \sum_{r=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k \cap J_r). \tag{15.333}$$

Ici J_r est un intervalle qui se décompose en $J_r = \bigcup_{k=1}^{n} (I_k \cap J_r)$, donc nous pouvons encore utiliser la première partie :

$$\spadesuit = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r), \tag{15.334}$$

ce qu'il fallait.

□

Lemme 15.122.
Si $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ avec $A \subset B$ alors $\ell(A) \leqslant \ell(B)$.

Démonstration. Nous avons évidemment $B = A \cup B\backslash A$. Notons que $B\backslash A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ par le lemme 15.17. Si $\{I_k\}$ est une décomposition disjointe de A et $\{J_i\}$ une de $B\backslash A$ alors $\{I_k\} \cup \{J_i\}$ est une décomposition disjointe de $A \cup B\backslash A$ et le lemme 15.121 nous dit que

$$\ell(B) = \ell(A \cup B\backslash A) = \ell(A) + \ell(B\backslash A). \tag{15.335}$$

Par conséquent $\ell(B) \geqslant \ell(A)$. □

Lemme 15.123.
Si I est un intervalle et s'il se décompose en

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \tag{15.336}$$

où les I_n sont des intervalles disjoints, alors

$$\ell(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \tag{15.337}$$

Démonstration. Nous allons encore diviser la preuve en deux parties suivant que I soit de longueur finie ou pas.

Si I est de longueur finie Soient a et b les extrémités de I : $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Pour tout $N \geqslant 1$ nous avons

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) = \ell\Big(\bigcup_{n=1}^{n} I_n\Big) \leqslant \ell(I). \tag{15.338}$$

La première égalité est le lemme dans le cas d'une union finie 15.121. L'inégalité est le lemme 15.122. Cela étant vrai pour tout N, à la limite $N \to \infty$ nous conservons l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leqslant \ell(I). \tag{15.339}$$

Nous devons encore voir l'inégalité inverse. Pour cela nous supposons que $a < b$. Sinon $\ell(I) = 0$ et tous les I_n doivent être vide sauf un qui contiendra seulement $\{a\}$ (si I le contient).

Soit $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < b - a$ et l'intervalle

$$[a + \frac{\epsilon}{4}, b - \frac{\epsilon}{4}] = [a', b'] \subset I. \tag{15.340}$$

Si les a_n et le b_n sont le extrémités des I_n alors

$$[a', b'] \subset I = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \subset \bigcup_{n\geqslant 1}]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}[= \bigcup_{n\geqslant 1}]a'_n, b'_n[\tag{15.341}$$

où nous avons posé $a'_n = a_n - \epsilon/2^{n+2}$ et $b'_n = b_n + \epsilon/2^{n+2}$. Nous avons donc recouvert le compact [31] $[a', b']$ par des ouverts. Nous pouvons donc en extraire un sous-recouvrement fini (c'est la définition de la compacité), c'est-à-dire une partie finie F de $\mathbb{N}$ telle que

$$[a', b'] \subset \bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[. \tag{15.342}$$

Le lemme 15.122 nous dit alors que

$$\heartsuit = b' - a' \leqslant \ell\Big(\bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[\Big) \leqslant \sum_{n\in F} (b'_n - a'_n). \tag{15.343}$$

La seconde inégalité se prouve en recopiant [32] la preuve de 15.18. Nous continuons le calcul :

$$\heartsuit \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \sum_{n\in F} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{15.344}$$

Mais $b' - a' = (b - a) - \frac{\epsilon}{2}$, donc

$$b - a - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{15.345}$$

D'où nous déduisons que

$$\ell(I) = b - a \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \epsilon \leqslant \sum_{n\in \mathbb{N}} (b_n - a_n) + \epsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \epsilon. \tag{15.346}$$

Cela étant valable pour tout ϵ nous déduisons que

$$\ell(I) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n). \tag{15.347}$$

31. Lemme 8.7.

32. Nous ne pouvons pas invoquer directement le lemme 15.18 parce que nous n'avons pas encore prouvé que ℓ était une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_S)$.

Si I est de longueur infinie Étant donné que I est un intervalle de longueur infinie, il doit au moins contenir un ensemble du type $]-\infty,a]$ ou $[a,+\infty[$; donc pour tout $M>0$, il existe $N\geqslant 1$ tel que

$$\ell\big(I\cap[-N,N]\big)\geqslant M. \tag{15.348}$$

Mais $I\cap[-N,N]$ est un intervalle et

$$I\cap[-N,N]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\cap[-N,N] \tag{15.349}$$

qui est une union disjointe. Par conséquent,

$$M\leqslant\ell\big(I\cap[-N,N]\big)=\sum_n\ell\big(I_n\cap[-N,N]\big)\leqslant\sum_n\ell(I_n). \tag{15.350}$$

Cela étant vrai pour tout $M>0$, nous concluons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)=\infty. \tag{15.351}$$

□

Remarque 15.124.
Pour la preuve de 15.123 nous ne pouvons pas classer les I_n en ordre croissant comme nous l'avons fait dans la preuve de 15.121. En effet si $I=[0,1]$ et que nous recouvrons $[0,\frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2},1]$ par une infinité d'intervalles chacun, nous ne pouvons plus les classer par ordre croissant.

Proposition 15.125 ([239])**.**
La fonction ℓ ainsi définie est une mesure σ-finie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Démonstration. Le fait que ℓ soit σ-finie provient par exemple du fait que $\ell\big(]-n,n[\big)=2n$ tandis que $\bigcup_n]-n,n[=\mathbb{R}$.

Nous devons à présent prouver que ℓ est additive. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, avec leurs décomposition minimales

$$A_i=\bigcup_{k=1}^{n} I_k^{(i)}. \tag{15.352}$$

Pour chaque $i\in\mathbb{N}$, le lemme 15.123 nous indique que

$$\ell(A_i)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\ell(I_k^{(i)}). \tag{15.353}$$

L'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable et nous pouvons considérer la décomposition

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i=\bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} I_k^{(i)}. \tag{15.354}$$

Cette décomposition n'est pas spécialement minimale[33] mais elle est disjointe. Le lemme 15.123 donne

$$\ell\Big(\bigcup_i A_i\Big)=\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\ell(I_k^{(i)})=\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\ell(I_k^{(i)})\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\ell(A_i). \tag{15.355}$$

La décomposition de la somme sur $\mathbb{N}^2$ en deux sommes sur $\mathbb{N}$ est faite en vertu de la proposition 12.104. □

33. A_1 pourrait contenir $[0,1]$ et A_2 contenir $]1,2]$.

15.8.1 Mesure et tribu de Lebesgue

Théorème 15.126.
Il existe une unique mesure λ sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$ telle que

$$\lambda\big(]a,b[\big) = b - a \tag{15.356}$$

pour tout $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'existence provient du théorème de prolongement de Hahn 15.68 : la mesure ℓ sur $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ se prolonge à $\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$.

Nous ne pouvons pas prouver l'unicité en invoquant la partie unicité de Hahn (c'est tentant parce que ℓ est σ-finie) parce que dans ce théorème nous ne fixons la valeur de λ que sur une toute petite partie de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Nous allons cependant voir que cette petite partie suffit à garantir l'unicité.

La classe

$$\mathcal{D} = \{]a,b[\text{ tel que } -\infty < a \leqslant b < +\infty\} \tag{15.357}$$

est stable par intersection finie et engendre la tribu borélienne. En effet $\mathcal{D}$ contient toutes les boules et donc une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (proposition 7.91). Donc tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{D})$ et $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc dire grâce au théorème 15.33 qu'il y a unicité de la mesure sur $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ lorsque les valeurs sur $\mathcal{D}$ sont fixées. □

Définition 15.127.
*La mesure de l'espace mesuré $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda\big)$ donné par le théorème 15.126 est la **mesure de Lebesgue** sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$.*

*Nous définissons aussi la **tribu de Lebesgue** par la proposition 15.65 : $\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}eb(\mathbb{R}), \lambda\big)$ est l'espace mesuré complété de $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda\big)$.*

Remarque 15.128.
Il n'est pas évident que la tribu de Lebesgue soit plus grande que celle des boréliens, ni que la tribu des parties soit plus grande que celle de Lebesgue. Nous mentionnons cependant les faits suivants.

(1) Il existe des ensembles mesurables non-boréliens, et cela ne nécessite pas l'axiome du choix. Un argument classique de cardinalité est donné dans [237]. La construction la plus explicite que j'aie trouvée est dans [252], mais ça a l'air de demander des connaissances précises sur les ordinaux.

(2) Vu que l'ensemble de Cantor C est mesurable de mesure nulle (proposition 15.147), tout sous-ensemble de Cantor est mesurable de mesure nulle parce que la tribu de Lebesgue est complète par définition. Le cardinal de $\mathcal{P}(C)$ est strictement supérieur à la puissance du continu, alors que le cardinal de l'ensemble des boréliens est au plus égal à la puissance du continu. Donc il existe des non boréliens contenus dans Cantor ; de tels non boréliens sont alors mesurables au sens de Lebesgue.

(3) Si nous admettons l'axiome du choix alors il existe des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue. Nous en verrons un dans l'exemple 15.141.

Exemple 15.129(Un ouvert contenant tous les rationnels et de mesure arbitrairement petite)
Il est possible de construire un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et de mesure de Lebesgue plus petite que ϵ. Pour cela si (q_i) est une énumération des rationnels, il suffit de prendre

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(q_n, \frac{\epsilon}{2^{n+1}}). \tag{15.358}$$

Cela est un ouvert comme union d'ouverts, ça contient tous les rationnels, et sa mesure se majore. En effet le théorème 15.126 donne $\lambda\big(B(q_n, \frac{\epsilon}{2^n})\big) = \frac{\epsilon}{2^n}$. Vu que ces boules ne sont a priori pas disjointes, le lemme 15.22 donne

$$\lambda(\mathcal{O}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \tag{15.359}$$

par (12.144) avec $q = \frac{1}{2}$.

Par complémentarité, nous pouvons construire un ensemble fermé de mesure non nulle et ne contenant aucun rationnel. Et même un fermé dans $[0,1]$, de mesure $1-\epsilon$ ne contenant aucun rationnel.

Cela peut surprendre parce qu'il existe des tonnes de suites d'irrationnels qui convergent vers des rationnels [34], et il semble difficile de créer un ensemble contenant beaucoup d'irrationnels tout en préservant la propriété de fermeture vis à vis des suites convergentes. △

Exemple 15.130(Mesure finie, non borné)
Il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui sont de mesure finie sans être bornés. Par exemple en posant

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(n, \frac{1}{2^n}). \tag{15.360}$$

La partie A n'est pas bornée parce que que $\mathbb{N} \subset A$. Mais en terme de mesure,

$$\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \tag{15.361}$$

en vertu de la somme de la série géométrique, exemple 12.75. △

15.8.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue

Proposition 15.131.
Tout ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.

Démonstration. Un point de $\mathbb{R}$ est un intervalle de mesure nulle. Si D est dénombrable, il est union disjointes et dénombrable de points. Le lemme 15.123 nous dit alors que sa mesure est $\lambda(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{a_i\}) = 0$. □

Remarque 15.132.
Il existe cependant des ensembles non dénombrables et tout de même de mesure nulle. Par exemple l'ensemble de Cantor (voir la proposition 15.147).

Proposition 15.133.
La mesure de Lebesgue est invariante par translation, c'est-à-dire que si A est mesurable alors $\lambda(A) = \lambda(A+\alpha)$ pour tout réel α.

Démonstration. Nous commençons par les intervalles ouverts :

$$\lambda\big(]a,b[+ \alpha\big) = \lambda\big(]a+\alpha, b+\alpha[\big) = (b+\alpha) - (a+\alpha) = b - a = \lambda\big(]a,b[\big). \tag{15.362}$$

D'après ce qui est dit dans l'exemple 15.34, la mesure de Lebesgue sur les boréliens est invariante par translation.

Si A est mesurable alors il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $A = B \cup N$ par la caractérisation 15.117b de la complétion. Alors $A + \alpha = B + \alpha \cup N + \alpha$ et $N + \alpha$ est encore un ensemble négligeable. Donc $\lambda(A+\alpha) = \alpha(B+\alpha) = \lambda(B)$. □

Le mesure ℓ définie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ (voir proposition 15.125). La proposition 15.19 nous donne donc une mesure extérieure par

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(A_n); A_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}, X \subset \bigcup_n A_n\}. \tag{15.363}$$

La proposition suivante montre que cette mesure extérieure peut être exprimée seulement avec des intervalles ouverts.

34. Si $q \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ alors la suite $(q + r/10^k)_k$ est une suite d'irrationnels convergente vers le rationnel q

Proposition 15.134.
Nous avons

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_{n\geqslant 1} \ell(I_n); I_n \text{ sont des intervalles ouverts et } X \subset \bigcup_n I_n\}. \tag{15.364}$$

Démonstration. Nous savons que dans la définition (15.363), chacun des A_n est une réunion disjointe d'intervalles (pas spécialement ouverts) deux à deux disjoints ; donc

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n); I_n \in \mathcal{S}, X \subset \bigcup_n I_n\}. \tag{15.365}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si $A \subset \bigcup_n I_n$, pour chaque $n \geqslant 1$ nous considérons un intervalle ouvert J_n tel que $I_n \subset J_n$ et $\ell(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \leqslant \ell(J_n)$. Faisant cela pour chacun des découpages de X en intervalles nous trouvons

$$\lambda^*(X) \leqslant \inf\{\sum_n \ell(J_n) \ J_n \text{ est ouvert et } X \subset \bigcup_n J_n\} + \epsilon. \tag{15.366}$$

Étant donné que ϵ est arbitraire nous avons l'égalité. □

Proposition 15.135 ([239])**.**
Si $X \subset \mathbb{R}$ est tel que $\lambda^*(X) < \infty$ alors

(1) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que

$$\begin{cases} X \subset \Omega_\epsilon & \text{(15.367a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(15.367b)} \end{cases}$$

(2) Il existe une intersection dénombrable d'ouverts G telle que

$$\begin{cases} X \subset G & \text{(15.368a)} \\ \lambda(G) = \lambda^*(X). & \text{(15.368b)} \end{cases}$$

Démonstration. Pour (1), la proposition 15.134 nous a déjà dit que

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n) \ I_n \text{ est un intervalle ouvert}, X \subset \bigcup_n I_n\}, \tag{15.369}$$

donc si $\epsilon > 0$, il existe des intervalles ouverts I_n tels que

$$\begin{cases} X \subset \bigcup_n I_n & \text{(15.370a)} \\ \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(15.370b)} \end{cases}$$

Si nous posons $\Omega_\epsilon = \bigcup_n I_n$, alors nous avons bien

$$\begin{cases} X \subset \Omega_\epsilon & \text{(15.371a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(15.371b)} \end{cases}$$

En ce qui concerne (2), pour chaque $k \geqslant 1$ nous considérons l'ensemble $\Omega_{1/k}$ obtenu comme précédemment avec $\epsilon = 1/k$ et nous posons $G = \bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_{1/k}$. Cela est une intersection dénombrable d'ouverts vérifiant $X \subset G$ (parce que $X \subset \Omega_{1/k}$ pour tout k) et donc $\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(G) = \lambda(G)$. De plus pour tout k nous avons

$$\lambda(G) \leqslant (\Omega_{1/k}) \leqslant \lambda^*(X) + \frac{1}{k} \tag{15.372}$$

pour tout k. En faisant $k \to \infty$ nous avons

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X). \tag{15.373}$$

Au final

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X) \leqslant \lambda(G), \tag{15.374}$$

d'où l'égalité. □

Corollaire 15.136.
Une partir $N \subset \mathbb{R}$ est négligeable[35] *si et seulement si $\lambda^*(N) = 0$.*

Démonstration. Nous savons que si N est négligeable il existe un borélien Y tel que $N \subset Y$ avec $\lambda(Y) = 0$. Par conséquent[36]

$$\lambda^*(N) \leqslant \lambda^*(Y) = \lambda(Y) = 0. \tag{15.375}$$

Pour l'implication inverse nous supposons que $\lambda^*(N) = 0$ et nous prenons l'ensemble G définit par la proposition 15.135(2) : c'est un borélien contenant N et tel que $\lambda(G) = \lambda^*(N) = 0$. L'ensemble N est donc négligeable. □

Théorème 15.137 (Régularité extérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Pour tout mesurable $A \subset \mathbb{R}$ nous avons

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(\Omega); \Omega \text{ ouvert contenant } A\}. \tag{15.376}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où B est un borélien.

Si B borélien, $\lambda(B) < \infty$ Soit $\epsilon > 0$; par la proposition 15.135(1) il existe un ouvert Ω_ϵ contenant B tel que $\lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda^*(B) + \epsilon$. Vu qu'ici B est borélien, $\lambda^*(B) = \lambda(B)$ et nous concluons que pour tout ϵ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que

$$\begin{cases} B \subset \Omega_\epsilon & \text{(15.377a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda(B) + \epsilon, & \text{(15.377b)} \end{cases}$$

et donc

$$\lambda(B) = \inf\{\lambda(\Omega);\ \Omega \text{ ouvert contenant } B\ \}. \tag{15.378}$$

Si B borélien, $\lambda(B) = +\infty$ Dans ce cas l'infimum est pris uniquement sur des ouverts Ω tels que $\lambda(\Omega) = \infty$.

Si A est mesurable non borélien Nous passons maintenant au cas où A est mesurable sans être borélien. Il s'écrit donc $A = B \cup N$ avec B borélien et N négligeable par la proposition 15.57, et par définition $\lambda(A) = \lambda(B)$. Si Y est un borélien tel que $N \subset Y$ et $\lambda(Y) = 0$ alors

$$\begin{aligned}
\lambda(A) = \lambda(B) &= \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && \text{(15.379a)} \\
&\leqslant \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \cup N \subset \Omega\} && \text{(15.379b)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega', Y'}\{\lambda(\Omega' \cup Y') \text{ tel que } \Omega', Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && \text{(15.379c)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega', Y'}\{\lambda(\Omega') + \lambda(Y') \text{ tel que } \Omega', Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && \text{(15.379d)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega'}\{\lambda(\Omega') \text{ tel que } \Omega' \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && \text{(15.379e)} \\
&= \lambda(B). && \text{(15.379f)}
\end{aligned}$$

Justifications :

— (15.379a) Le cas borélien déjà fait.

— (15.379b) Les ouverts Ω tels que $B \cup N \subset \Omega$ vérifient a fortiori $B \subset \Omega$; nous avons donc agrandit l'ensemble sur lequel l'infimum est pris.

— (15.379c) Parmi les ouverts Ω qui recouvrent $B \cup N$, il y a ceux de la forme $\Omega' \cup Y'$ où Ω' recouvre B et Y' est un ouvert contenant Y. Donc nous avons rétréci l'ensemble sur lequel l'infimum est pris et par conséquent agrandit l'infimum.

— (15.379d) Mesure d'une union majorée par la somme des mesures.

35. Définition 15.54.
36. Au péril d'être lourd nous rappelons que λ^* est défini sur toutes les parties de $\mathbb{R}$.

— (15.379e) Vu que Y est borélien, $\lambda(Y) = \inf_{Y' \text{ ouvert}}\{\lambda(Y') \text{ tel que } Y \subset Y'\} = 0$. Donc pour tout Ω' et tout $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver un Y' vérifiant les conditions tel que $\lambda(\Omega') + \lambda(Y') \leqslant \lambda(\Omega') + \epsilon$.

Toutes les inégalités sont des égalités en en particulier (15.379b) donne

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \ \Omega \text{ ouvert}, B \cup N \subset \Omega\}, \tag{15.380}$$

ce qu'il fallait.

□

Proposition 15.138 ([239])**.**
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ et si $\epsilon > 0$ alors il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset A \subset \Omega_\epsilon & \text{(15.381a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon \backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon. & \text{(15.381b)} \end{cases}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où A est un borélien, que nous noterons B.

Première étape Montrons qu'il existe un ouvert U_ϵ tel que

$$\begin{cases} B \subset U_\epsilon & \text{(15.382a)} \\ \lambda(U_\epsilon \backslash B) \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}. & \text{(15.382b)} \end{cases}$$

Si $\lambda(B) < \infty$ alors le théorème 15.137 nous donne un ouvert U_ϵ tel que $B \subset U_\epsilon$ et $\lambda(U_\epsilon) \leqslant \lambda(B) + \frac{\epsilon}{2}$. Nous avons alors

$$\lambda(\Omega_\epsilon \backslash B) = \lambda(\Omega_\epsilon) - \lambda(B) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. \tag{15.383}$$

Si par contre $\lambda(B) = \infty$, nous posons $B_n = B \cap [-n, n]$ et $\epsilon_n = \epsilon/2^{n+1}$. Pour chaque n nous avons un ouvert Ω_n tel que

$$\begin{cases} B_n \subset \Omega_n & \text{(15.384a)} \\ \lambda(\Omega_n \backslash B_n) \leqslant \dfrac{\epsilon}{2^{n+1}} & \text{(15.384b)} \end{cases}$$

Par conséquent en posant $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} \Omega_n$ nous avons [37]

$$\begin{cases} B \subset \Omega & \text{(15.385a)} \\ \lambda(\Omega \backslash B) \leqslant \lambda\big(\bigcup_n (\Omega_n \backslash B_n)\big) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \lambda(\Omega_n \backslash B_n) = \dfrac{\epsilon}{2}. & \text{(15.385b)} \end{cases}$$

La première étape est terminée.

Deuxième étape Nous prouvons à présent qu'il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon & \text{(15.386a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon \backslash B) \leqslant \dfrac{\epsilon}{2} & \text{(15.386b)} \\ \lambda(B \backslash F_\epsilon) \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}. & \text{(15.386c)} \end{cases}$$

L'ouvert Ω_ϵ, nous l'avons déjà de l'étape précédente. Pour le fermé, nous appliquons la première étape au borélien B^c ; ce qui nous trouvons est un ouvert G_ϵ tel que

$$\begin{cases} B^c \subset G_\epsilon & \text{(15.387a)} \\ \lambda(G_\epsilon \backslash B^c) \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}. & \text{(15.387b)} \end{cases}$$

En posant $F_\epsilon = G_\epsilon^c$ nous avons un fermé tel que $F_\epsilon \subset B$ et

$$\lambda(B \backslash F_\epsilon) = \lambda(F_\epsilon^c \backslash B^c) = \lambda(G_\epsilon \backslash B^c) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. \tag{15.388}$$

37. Nous utilisons la petite relation ensembliste $\big(\bigcup_n A_n\big)\backslash\big(\bigcup_n B_n\big) \subset \bigcup_n (A_n \backslash B_n)$.

Dernière étape Les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ trouvés à la deuxième étape donnent bien les relations (15.381). En effet $\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon = (\Omega_\epsilon\backslash B) \cup (B\backslash F_\epsilon)$, donc

$$\lambda(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) \leqslant \lambda(\Omega_\epsilon\backslash B) + \lambda(B\backslash F_\epsilon) = \epsilon. \tag{15.389}$$

Nous passons au cas où $A = B \cup N$ est mesurable. Nous commençons par prendre les Ω_ϵ et F_ϵ qui correspondent à B :

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon & \text{(15.390a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon. & \text{(15.390b)} \end{cases}$$

Soit Y un borélien tel que $N \subset Y$ et $\lambda(Y)$ puis un ouvert Y' tel que $\lambda(Y') \leqslant \epsilon$ et $Y \subset Y'$. L'existence d'un tel Y' est assurée par la proposition 15.137 appliquée à Y. Nous vérifions que les ensembles F_ϵ et $\Omega_\epsilon \cup Y'$ fonctionnent. En effet $\Omega_\epsilon \cup Y'\backslash F_\epsilon \subset (\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) \cup Y'$, donc

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \cup N \subset \Omega_\epsilon \cup Y' & \text{(15.391a)} \\ \lambda\big((\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)\big) \leqslant \lambda(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) + \lambda(Y') \leqslant 2\epsilon. & \text{(15.391b)} \end{cases}$$

Donc en réalité il faut choisir $\Omega_{\epsilon/2}$, $F_{\epsilon/2}$ et $\lambda(Y') \leqslant \epsilon/2$. □

Théorème 15.139 (Régularité intérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ alors

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K); K \text{ compact contenu dans } A\}. \tag{15.392}$$

Démonstration. Par la proposition 15.138 nous avons

$$\lambda(A) = \sup_{F \text{ fermé dans } A} \lambda(F). \tag{15.393}$$

Pour un tel F nous posons $K_n = F \cap [-n, n]$ qui est compact [38] et contenu dans B. De plus le lemme 15.23(2) nous dit que

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) \tag{15.394}$$

Donc tous les $\lambda(F)$ peuvent être arbitrairement approchés par un $\lambda(K)$ avec K compact dans A, et le supremum (15.393) n'est pas affecté en nous restreignant à prendre des compacts contenus dans B :

$$\lambda(A) = \sup_{F \text{ fermé dans } A} \lambda(F) = \sup_{K \text{ compact dans } A} \lambda(K). \tag{15.395}$$

□

15.8.3 Fonctions mesurables

Lemme 15.140.
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\lambda(f \neq 0) > 0$. Alors il existe une partie mesurable M et $m > 0$ tels que $\lambda(M) > 0$ et $f(x) > m$ pour tout $x \in M$.

Démonstration. Nous notons

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > 0\}, \tag{15.396}$$

et nous supposons que $\lambda(D) > 0$ pour fixer les idées (si ce n'est pas le cas, nous prenons pour D la partie où f est strictement négative).

Nous posons

$$A_1 = [1, \infty[\tag{15.397a}$$

$$A_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[. \tag{15.397b}$$

38. parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 8.9.

Ces parties A_n sont disjointes ; donc les parties

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in A_n\} \tag{15.398}$$

sont également disjointes. Vu que $\bigcup_n D_n =]0, \infty[$, nous avons $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Vu que

$$\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n) > 0, \tag{15.399}$$

il existe au moins un N tel que $\lambda(D_N) > 0$. Pour $x \in D_N$ nous avons

$$f(x) \in A_N = [\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}[. \tag{15.400}$$

Donc pour $x \in D_N$ nous avons $f(x) > \frac{1}{N}$. □

15.8.4 Ensemble de Vitali (non mesurable)

Exemple 15.141(Un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue[253])
Nous considérons l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; chaque classe intersecte l'intervalle $[0, 1]$. Grâce à l'axiome du choix (voir 1.6) nous pouvons construire un ensemble V contenant un représentant dans $[0, 1]$ de chaque classe. Un tel ensemble est un **ensemble de Vitali**. Nous allons prouver que V n'est pas mesurable.

Supposons que V soit mesurable. Alors tous les ensembles de la forme $V + q$ ($q \in \mathbb{Q}$) sont mesurables et ont même mesure par la proposition 15.133. Nous posons

$$A = \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} (V + q) \subset [-1, 2]. \tag{15.401}$$

Cela est une union disjointe d'ensembles mesurables. Donc

$$\lambda(A) = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} \lambda(V + q). \tag{15.402}$$

Vu que $A \subset [-1, 2]$ nous avons $\lambda(A) \leqslant 3$ et donc tous les termes de la somme doivent être nuls. Nous avons donc $\lambda(A) = 0$.

Prouvons toutefois que $[0, 1] \subset A$, ce qui serait une contradiction. Soit $x \in [0, 1]$; il est dans une des classes de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et donc il existe $v \in V$ tel que $x - v \in \mathbb{Q}$. De plus $x, v \in [0, 1]$, donc

$$-1 \leqslant x - v \leqslant 1. \tag{15.403}$$

Cela fait que $x \in V + (x - v) \subset A$. Nous avons donc $x \in A$ et donc $[0, 1] \subset A$. En conséquence de quoi nous aurions $\lambda(A) \geqslant 1$. △

15.8.5 Ensemble de Cantor

Nous considérons la fonction donnant l'écriture décimale des nombres définie en (12.166).

Définition 15.142 (Ensemble de Cantor)**.**
Soit $K_0 = [0, 1[$ et les ensembles K_n définis par la récurrence

$$K_{n+1} = \big(\frac{1}{3}K_n\big) \cup \big(\frac{1}{3}(K_n + 2)\big). \tag{15.404}$$

L'ensemble

$$K = \bigcup_{n\geqslant 0} K_n \tag{15.405}$$

*est l'**ensemble triadique de Cantor**.*

Les principales propriétés de l'ensemble de Cantor sont qu'il est non dénombrable (proposition 15.146) et borélien de mesure nulle (proposition 15.147).

15.143.
L'idée de base pour prouver que l'ensemble K est non dénombrable est que ses éléments sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. En prenant un nombre sans 1 écrit en base 3, en changeant tous les 2 en 1 et en lisant le résultat en base 2, nous obtenons tous les nombres possibles en base 2 et donc une quantité non dénombrable. L'idée est donc simple et astucieuse. La mise en musique est un peu plus délicate parce qu'il faut faire attention aux queues de suites ; c'est pour cela que nous avons construit l'ensemble de Cantor en partant de $[0,1[$ et non de $[0,1]$.

Le lemme suivant dit précisément ce que nous entendons en disant que les éléments de l'ensemble de Cantor sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. Nous rappelons que $\mathbb{D}_3$ est l'ensemble des suites constituées de 0, 1 et 2, et qui ne se terminent pas par une suite infinie de 2, voir 12.83 pour une définition précise.

Lemme 15.144 ([1])**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{D}_3$; nous avons $\varphi_3(x) \in K_n$ si et seulement si $x_1, \dots, x_n \in \{0,2\}$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence en commençant avec $n = 1$. Si $x_1 = 1$ alors

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[. \tag{15.406}$$

Notons que $\varphi_3(x) = \frac{2}{3}$ est impossible parce que ça demanderait une queue de suite de 2. Par conséquent $\varphi_3(x) = [0,1[\backslash[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= K_1$.

Nous passons à la récurrence.

Sens direct Nous supposons que $x_1, \dots, x_{n+1} \in \{0,2\}$ et nous montrons que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$. La chose surprenante est que nous n'allons pas considérer deux cas suivant que x_{n+1} vaut 0 ou 1 ; nous allons considérer deux cas suivant [39] que x_1 vaut 0 ou 1. Écrivons encore $\varphi_3(x)$:

$$\varphi_3(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{3^k} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}. \tag{15.407}$$

Si $x_1 = 0$ Alors nous avons

$$3\varphi_3(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi_3(x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \tag{15.408}$$

Vu que par hypothèse $x_2, \dots, x_{n+1}$ sont dans $\{0,2\}$ nous avons $3\varphi_3(x) \in K_n$ par hypothèse de récurrence. Cela implique que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

Si $x_1 = 2$ Alors

$$\varphi_3(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \tag{15.409}$$

et

$$3\varphi_3(x) - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{15.410}$$

et donc là nous avons $3\varphi_3(x) - 2 \in K_n$, ce qui implique encore $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

39. Pour comprendre pourquoi, faire un dessin de comment K_n se transforme en K_{n+1} et remarquer dans K_2, les deux premiers segments ne sont pas une division du premier segment de K_1, mais bien une copie des *deux* segments de K_1.

Sens réciproque Nous devons maintenant prouver que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$ implique $x_1, \dots, x_{n+1} \in \{0, 2\}$. Par le même calcul que précédemment nous avons soit

$$3\varphi_3(x) = \varphi_3(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{15.411}$$

si $x_1 = 0$, soit

$$3\varphi_3(x) - 2 = \varphi_3(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{15.412}$$

si $x_1 = 2$. Dans les deux cas, si $x_l = 1$ pour un certain $2 \leqslant l \leqslant n+1$, alors l'hypothèse de récurrence donne que ces éléments ne sont pas dans K_n et donc $\varphi_3(x)$ pas dans K_{n+1}.

□

Corollaire 15.145 ([1]).
En posant $\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{D}_3$ tel que $x_i \neq 1 \forall i\}$ nous avons $K = \varphi_3(\mathbb{E})$. Et plus précisément, $\varphi_3 \colon \mathbb{E} \to K$ est une bijection.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois étapes.

Image contenue dans K Si $x \in \mathbb{E}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons $x_1, \dots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc $\varphi_3(x) \in K_n$ par la proposition 15.144. Donc

$$\varphi_3(x) \in \bigcup_{n \geqslant 1} K_n = K. \tag{15.413}$$

Injective L'application $\varphi_3 \colon \mathbb{E} \to K$ est injective parce qu'elle est déjà injective depuis $\mathbb{D}_3$.

Surjective Soit $p \in K \subset [0, 1[$. Vu que $\varphi_3 \colon \mathbb{D}_3 \to [0, 1[$ est surjective (théorème 12.86), il existe $x \in \mathbb{D}_3$ tel que $\varphi_3(x) = p$. Pour tout n nous avons $\varphi_3(x) \in K_n$ et donc $x_1, \dots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc au final $x \in \mathbb{E}$.

□

Proposition 15.146 ([1]).
L'ensemble de Cantor est non dénombrable.

Démonstration. Nous avons prouvé à la proposition 12.87 que l'ensemble $\mathbb{D}_2$ n'était pas dénombrable. Nous allons à présent prouver que l'application

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathbb{D}_2 &\to K \\ c &\mapsto \varphi_3(c \text{ en remplaçant les 1 par des 2}) \end{aligned} \tag{15.414}$$

est une bijection. Le fait que ψ soit injective est une conséquence du fait que ce soit la composition de deux applications injectives (le remplacement et φ_3). Il faut par contre montrer que l'image est égale à K, en notant qu'il n'est pas évident a priori que l'image soit contenue dans K.

L'opération qui consiste à remplacer les 1 par des 2 est une bijection $\mathbb{D}_2 \to \mathbb{E}$. Le corollaire 15.145 nous dit aussi que $\varphi_3 \colon \mathbb{E} \to K$ est une bijection. En tant que composée de bijections, ψ est une bijection.

Étant en bijection avec $\mathbb{D}_2$ qui n'est pas dénombrable par la proposition 12.87, l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable. □

Proposition 15.147 (Ensemble de Cantor).
L'ensemble de Cantor[40] est borélien, non dénombrable et de mesure nulle.

Démonstration. Nous reprenons les notations de la définition 15.142. Le fait que l'ensemble de Cantor soit non dénombrable a été prouvé dans la proposition 15.146.

40. Définition 15.142

L'ensemble de Cantor étant une intersection dénombrable de boréliens, il est borélien par le lemme 15.3. Vu que $K_n \subset [0,1[$ nous avons $\frac{1}{3}K_n \leqslant \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}(K_n+2) \geqslant \frac{2}{3}$, donc K_n est une union disjointe de 2^n intervalles de mesure $2/3^n$. Nous avons donc

$$\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n. \tag{15.415}$$

L'ensemble de Cantor étant contenu dans chacun des K_n, sa mesure est plus petite que la mesure de chacun des K_n (lemme 15.22) et donc $\lambda(K) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n ; ergo $\lambda(K) = 0$. □

15.8.6 Mesure positive sans intervalle

Vu que la mesure de Lebesgue est basée sur la mesure des intervalles et quelques extensions, nous sommes en droit de croire qu'une partie de mesure strictement positive de $\mathbb{R}$ doit toujours contenir un intervalle, éventuellement à partie de mesure nulle près. Eh bien non.

Exemple 15.148([254])
Soient une énumération (q_i) de $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ et une suite (r_i) telle que $\sum_{i=0}^{\infty} r_i < \frac{1}{2}$. Quitte à prendre r_i plus petit, supposons de plus que $B(q_i, r_i) \subset [0,1]$.

Nous posons $J_n = B(q_i, r_i)$, $J = \bigcup_{i=0}^{\infty} J_n$ et

$$B = [0,1] \backslash J. \tag{15.416}$$

Les parties J_i ne sont pas disjointes, donc, en notant λ la mesure de Lebesgue,

$$0 < \lambda(J) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(J_i) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{15.417}$$

Mais, par définition, l'union $[0,1] = B \cup J$ est disjointe, donc

$$1 = \lambda\big([0,1]\big) = \lambda(J) + \lambda(B). \tag{15.418}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda(B) \leqslant 1. \tag{15.419}$$

Je plaide que cette partie B ne contient non seulement aucun intervalle, mais qu'il est impossible de le compléter par une partie de mesure nulle pour obtenir un intervalle.

Soit un intervalle I dans $[0,1]$. Il existe $q_i \in I$ et donc [41]

$$J_i \subset B \backslash I. \tag{15.420}$$

Donc il n'existe pas de parties de mesure nulle qui, ajoutée à B, contiendrait I. △

Vous voulez un truc dingue à propos de la partie J de l'exemple 15.148 ? Le théorème 15.139 nous dit qu'il existe dans J des compacts de mesure arbitrairement proches de $\lambda(J)$. Il existe donc des compacts non seulement de mesure strictement positive mais même de mesure assez grande, tout en étant infiniment découpés.

15.9 Intégrale par rapport à une mesure

15.149.
Nous n'en avons pas encore terminé avec la théorie de la mesure, mais nous devons quand même définir les intégrales et voir quelque propriétés avant de continuer avec la mesure parce que la définition de la mesure sur un espace mesurable produit [42] passe par une intégrale.

41. C'est ici que nous utilisons le fait que r_i est choisi pour que $B(q_i, r_i)$ ne déborde pas de $[0,1]$. Sinon il aurait fallu chipoter et prendre seulement une partie de la boule.
42. Théorème 15.207.

15.150.
En théorie de l'intégration, la convention est la suivante : pour une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$, nous considérons sur X la tribu des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur X, *tout en gardant celle des boréliens sur l'ensemble d'arrivée.* C'est-à-dire qu'en théorie de l'intégration, c'est

$$f\colon \big(X, \mathcal{L}\text{eb}(X)\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big). \tag{15.421}$$

En particulier, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sera mesurable si pour tout borélien A de $\mathbb{R}^m$ l'ensemble $f^{-1}(A)$ est Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné qu'il est franchement difficile de créer des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue, il est franchement difficile de créer des fonctions non mesurables à valeurs réelles. L'hypothèse de mesurabilité est donc toujours satisfaite dans les cas pratiques.

Voir aussi le point 15.106, et les résultats qui suivent.

15.9.1 Définition pour les fonctions à valeurs positives

Voir le thème 3.

Une mesure μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ permet de définir une fonctionnelle linéaire sur l'ensemble des fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$. Cette fonctionnelle linéaire est l'intégrale que nous allons définir à présent.

Définition 15.151.
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Notre but est de définir

$$\int_Y f d\mu \tag{15.422}$$

que nous nommons ***intégrales de*** *f de f sur Y pour la mesure μ.*

Fonction étagée *Si f est une fonction étagée*[43]*, et si sa forme canonique est $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors nous définissons*

$$\int_Y f d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(Y \cap A_i). \tag{15.423}$$

Fonction mesurable à valeurs positives *Pour une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ nous définissons l'intégrale de f sur Y par*

$$\int_Y f d\mu = \sup\Big\{ \int_Y \psi d\mu \text{ où } \psi \text{ est une fonction étagée telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant f \Big\}. \tag{15.424}$$

Remarque 15.152.
Toute fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ est intégrable (l'intégrale vaut éventuellement $+\infty$). Au moment où une fonction commence à prendre des valeurs positives et négatives, nous demandons à pouvoir intégrer séparément les parties positive et négative. C'est pour cela que nous disons qu'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable si $|f|$ l'est.

15.153.
Le nombre $\int_0^\infty f$ est défini directement par (15.424) complètement indépendamment d'une éventuelle limite $\lim_{x\to 0} \int_0^x f$.

15.154.
Si la fonction n'est pas mesurable ? Alors nous n'avons pas défini son intégrale. Supposons la plus simple des fonctions non mesurables sur Ω : la fonction indicatrice d'une partie non mesurable :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.425}$$

43. Définition 15.100.

où $A \subset \Omega$ n'est pas mesurable[44].

Nous supposons que l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est complet (définition 15.56). Vu que A n'est pas mesurable, il n'est pas contenu dans une partie négligeable (parce que l'espace est complet), et nous voulons que l'intégrale ne soit pas nulle ; sinon on se demande bien à quoi sert une intégrale.

Toute fonction étagée minorant f est forcément nulle en dehors de A. Dès que B est une partie mesurable de mesure non nulle dans A, le complémentaire de B dans A est encore non mesurable, et nous voulons encore que l'intégrale de f sur ce complémentaire soit non nul.

Mais comme A n'est pas mesurable et que $\mathbb{1}_A$ n'est le supremum d'aucune suite de fonctions mesurables (lemme 15.89), bien que le supremum qui définirait l'intégrale de f existe (toute partie de $\mathbb{R}$ a un supremum), il est sans espoir que ce supremum ait un sens que l'on puisse interpréter en tant que mesure de f.

15.9.2 Premières propriétés

15.155.
Si $(\Omega^n(\mathfrak{A})\mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable, et si Y est un élément de $\mathcal{A}$, nous avons l'espace mesurable $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ donné par

— $\mathcal{A}_y = \{B \cap Y \text{ tel que } B \in \mathcal{A}\}$,

— $\mu_Y = \mu$.

Et là, nous arrivons à un problème de notations parce que $\int_Y f d\mu$ peut désigner l'intégrale de f sur Y dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ou l'intégrale de f sur Y dans $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

Heureusement, nous allons tout de suite montrer que ces deux choses sont identiques.

Lemme 15.156.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Nous considérons une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable sur Y.

Alors, avec des notations que j'espère être claires,

(1) f est $\mathcal{A}_Y$-mesurable,

(2) f est $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$-intégrable,

(3) nous avons l'égalité

$$\int_{(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)} f|_Y = \int_{(Y \subset \Omega, \mathcal{A}, \mu)} f. \tag{15.426}$$

Démonstration. Nous considérons les deux ensembles suivants :

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } Y \text{ et majorées par } f|_Y\} \tag{15.427a}$$
$$S_2 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ et majorées par } f\}. \tag{15.427b}$$

Nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} s &: S_1 \to S_2 \\ s(\psi)(x) &= \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{15.428}$$

L'application s est une bijection.

Pour $\psi \in S_1$ nous avons

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mathbb{1}_{A_k}|_Y \tag{15.429}$$

avec $A_k \in \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ et $\mathbb{1}_{A_k}|_Y : Y \to \{0, 1\}$. Nous avons aussi

$$s(\psi) = \sum_{\psi_k} \mathbb{1}_{A_k} \tag{15.430}$$

44. Ça existe, par exemple 15.141.

avec $\mathbb{1}_{A_k}: \Omega \to \{0,1\}$.

En ce qui concerne les intégrales de ces fonctions étagées, nous avons

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu_Y(A_k \cap Y) \tag{15.431a}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu(A_k) \tag{15.431b}$$
$$= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi). \tag{15.431c}$$

Justifications. Pour passer à (15.431b) nous avons utilisé d'abord que $A_k \subset Y$ et ensuite que $\mu_Y(A_k) = \mu(A_k)$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver l'égalité du lemme. Nous avons ceci :

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} f|_Y = \sup\{\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\} \tag{15.432a}$$
$$= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi) \text{ tel que } \psi \in S_1\} \tag{15.432b}$$
$$= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} \varphi \text{ tel que } \varphi \in S_2\} \tag{15.432c}$$
$$= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} f. \tag{15.432d}$$

□

Lemme 15.157.
Si $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré et si $B \in \mathcal{A}$ alors

$$\mu(B) = \int_B 1 d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_B. \tag{15.433}$$

Démonstration. La fonction caractéristique d'une partie mesurable est une fonction étagée dont la forme canonique est $\mathbb{1}_B = 1 \cdot \mathbb{1}_B + 0 \times \mathbb{1}_{B^c}$. Son intégrale est donc

$$\int \mathbb{1}_B d\mu = 1 \times \mu(B) + 0 \times \mu(B^c) = \mu(B) \tag{15.434}$$

parce que $0 \times \mu(B^c) = 0$, même si $\mu(B^c) = \infty$, comme nous l'avons convenu en 15.84. □

Proposition 15.158 ([1]).
Soient une fonction $f: (\Omega,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{R}^+$ et une fonction g intégrable sur Ω telle que $f \leqslant g$. Alors f est intégrable.

Démonstration. Une fonction étagée qui minore f minore également g. Donc l'ensemble sur lequel il faut faire le supremum pour définir $\int_\Omega f$ est inclus dans celui pour $\int_\Omega g$. Le second supremum étant fini, le premier l'est également. □

Lemme 15.159.
Soient un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, une fonction $f: \Omega \to \mathbb{R}^+$ et $Y \in \mathcal{A}$. Nous avons :

$$\int_Y f d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_A d\mu. \tag{15.435}$$

Démonstration. En plusieurs parties, selon la généralité.

Si f est étagée Nous posons $f = \sum_{k=1}^{n} f_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $f_k \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas,

$$f\mathbb{1}_Y = \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k \cap Y} \tag{15.436}$$

est encore une fonction étagée. Donc nous avons d'une part

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k \cap Y} = \sum_k f_k \mu(A_k \cap Y), \tag{15.437}$$

et d'autre part,

$$\int_Y f d\mu = \sum_k f_k \mu(Y \cap A_k), \tag{15.438}$$

Si f est à valeurs positives Nous posons

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y\} \tag{15.439}$$

et

$$S_2 = \{\psi\mathbb{1}_Y \text{ tel que } \psi \text{ étagée avec } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{15.440}$$

Nous prouvons que $S_1 = S_2$.

Si $\psi \in S_1$, alors

$$0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y \leqslant f. \tag{15.441}$$

De plus comme $\psi = 0$ hors de Y nous avons $\psi = \psi\mathbb{1}_Y$.

Pour l'autre inclusion, soit $0 \leqslant \psi \leqslant f$ pour une fonction étagée ψ et montrons que $\psi\mathbb{1}_Y \in S_1$. L'application $\psi\mathbb{1}_Y$ est étagée sur Ω et vérifie

$$0 \leqslant \psi\mathbb{1}_Y \leqslant f\mathbb{1}_Y \tag{15.442}$$

parce que $\psi \leqslant f$.

L'égalité à prouver Dans l'égalité 15.435 à prouver, le membre de droite est, d'après la définition 15.424,

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \sup\{\int \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\}. \tag{15.443}$$

Il nous reste donc à prouver que $\int_Y f$ se calcule de la même façon avec les éléments de S_2. D'abord nous copions la définition :

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y \psi \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{15.444}$$

Ensuite nous réfléchissons un peu. Si $0 \leqslant \psi \leqslant f$ avec $\psi = \sum_k \psi_k \mathbb{1}_{A_k}$, alors

$$\int_Y \psi = \sum_k \mu(A_k \cap Y) = \int_Y \psi\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \psi\mathbb{1}_Y. \tag{15.445}$$

La dernière égalité est la partie déjà faite, à propos des fonctions étagées. Nous avons donc bien

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y s \text{ tel que } s \in S_2\}. \tag{15.446}$$

□

15.9.3 Propriétés plus avancées

15.9.3.1 Convergence monotone

Le théorème suivant est très utile parce que le théorème fondamental d'approximation 15.105 donne les fonctions étagées qu'il faut.

Théorème 15.160 (Théorème de la convergence monotone ou de Beppo-Levi[255]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors la limite ponctuelle $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, est mesurable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu, \tag{15.447}$$

cette intégrable valant éventuellement ∞.

Démonstration. La limite ponctuelle de la suite est la fonction à valeurs dans $[0, \infty]$ donnée par

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{15.448}$$

Ces limites existent parce que pour chaque x la suite $f_n(x)$ est une suite numérique croissante. Nous notons

$$I_0 = \int_\Omega f d\mu. \tag{15.449}$$

Nous posons par ailleurs

$$I_n = \int_\Omega f_n. \tag{15.450}$$

Cela est une suite numérique croissante qui a par conséquent une limite que nous notons $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Notre objectif est de montrer que $I = I_0$. D'abord par croissance de la suite, pour tous n nous avons $I_n \leqslant I_0$, par conséquent $I \leqslant I_0$.

Nous prouvons maintenant l'inégalité dans l'autre sens en nous servant de la définition (15.424). Soit une fonction simple h telle que $h \leqslant f$, et une constante $0 < C < 1$. Nous considérons les ensembles

$$E_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } f_n(x) \geqslant Ch(x)\}. \tag{15.451}$$

Ces ensembles vérifient les propriétés $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Pour chaque n nous avons les inégalités

$$\int_\Omega f_n \geqslant \int_{E_n} f_n \geqslant C \int_{E_n} h. \tag{15.452}$$

Si nous prenons la limite $n \to \infty$ dans ces inégalités,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant C \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} h = C \int_\Omega h. \tag{15.453}$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant C \int_\Omega h$. Mais étant donné que cette inégalité est valable pour tout C entre 0 et 1, nous pouvons l'écrire sans le C :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega h. \tag{15.454}$$

Par définition, l'intégrale de f est donné par le supremum des intégrales de h où h est une fonction simple dominée par f. En prenant le supremum sur h dans l'équation (15.454) nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega f, \tag{15.455}$$

ce qu'il nous fallait. □

Remarque 15.161.
La proposition 15.105 ainsi que le lemme 15.103 montrent qu'une fonction mesurable peut-être écrite comme limite croissante de fonctions simples. Cela permet de démontrer des théorèmes en commençant par prouver sur les fonctions simples et en utilisant Beppo-Levi pour généraliser.

Remarque 15.162.
Une des raisons de demander la positivité des fonctions f_n est de n'avoir pas d'ambiguïté à parler d'intégrales qui valent ∞. Si par exemple nous prenons $\Omega = [0,1]$ et que nous considérons

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.456}$$

Ce sont des fonctions intégrables, mais la limite étant la fonction $1/x$, l'égalité (15.447) est une égalité entre deux intégrales valant ∞.

Corollaire 15.163 (Inversion de somme et intégrales)**.**
Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables positives ou nulles, alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int u_i = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_i. \tag{15.457}$$

Démonstration. Nous considérons la suite des sommes partielles de (u_n) : $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} u_n(x)$. Le théorème de la convergence monotone (théorème 15.160) implique que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{15.458}$$

Nous remplaçons maintenant f_n par sa valeur en termes des u_i et dans le membre de gauche nous permutons l'intégrale avec la somme finie :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \int u_n = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_n, \tag{15.459}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

15.9.3.2 Lemme de Fatou

Lemme 15.164 (Lemme de Fatou)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n \colon \Omega \to [0,\infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors la fonction $f(x) = \liminf f_n(x)$ est mesurable et

$$\int_\Omega \liminf f_n d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f d\mu. \tag{15.460}$$

Démonstration. Nous posons

$$g_n(x) = \inf_{i\geqslant n} f_i(x). \tag{15.461}$$

Cela est une suite croissance de fonctions positives mesurables telles que, par définition,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf f_n(x). \tag{15.462}$$

Nous pouvons y appliquer le théorème de la convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n(x) = \int \liminf f_n(x). \tag{15.463}$$

Par ailleurs, pour chaque $i \geqslant n$ nous avons

$$\int g_n \leqslant \int f_i, \tag{15.464}$$

en passant à l'infimum nous avons

$$\int g_n \leqslant \inf_{i\geqslant n} \int f_i, \tag{15.465}$$

et en passant à la limite nous avons

$$\int \liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geqslant n} \int f_i = \liminf_{i\to\infty} \inf f_i. \tag{15.466}$$

□

L'inégalité donnée dans ce lemme n'est en général pas une égalité, comme le montre l'exemple suivant :

$$f_i = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]} & \text{si } i \text{ est pair} \\ \mathbb{1}_{[1,2]} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases} \tag{15.467}$$

Nous avons évidemment $g_n(x) = 0$ tandis que $\int_{[0,2]} f_i = 1$ pour tout i.

Théorème 15.165 ([239])**.**
Soient f, g des fonctions étagées positives sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors si $\alpha \in [0, \infty]$ nous avons

(1)

$$\int_\Omega (\alpha f) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{15.468}$$

(2)

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu. \tag{15.469}$$

(3) Si $a_k \in \mathbb{R}^+$ et si les f_k sont étagées positives,

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\int_\Omega f_k d\mu \right). \tag{15.470}$$

Démonstration. En ce qui concerne le produit par un nombre, tout repose sur le fait que

$$(\alpha f)^{-1}(\alpha a_i) = f^{-1}(a_i), \tag{15.471}$$

ce qui fait que si la représentation canonique de f est $f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors la représentation canonique de αf est $\alpha f = \sum_i (\alpha a_i) \mathbb{1}_{A_i}$. Donc

$$\int_\Omega \alpha f d\mu = \sum_i \alpha a_i \mu(A_i) = \alpha \sum_i a_i \mu(A_i) = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{15.472}$$

Pour la somme c'est plus lourd. Soient les formes canoniques

$$f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} \tag{15.473a}$$

$$g = \sum_j b_j \mathbb{1}_{B_i}. \tag{15.473b}$$

Vu que l'union des B_j est Ω nous avons l'union disjointe $A_i = \bigcup_j A_i \cap B_j$ et donc $\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j)$. Nous avons donc pour les intégrales :

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) \tag{15.474a}$$

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_i b_k \sum_l \mu(B_k \cap A_l). \tag{15.474b}$$

Pour la somme :

$$\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \sum_{k,l}(a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l). \tag{15.475}$$

Nous devons maintenant évaluer $\int_\Omega (f+g)d\mu$. Pour cela nous remarquons que si $c \in (f+g)(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs atteintes pas $f+g$), alors nous notons

$$I_c = \{(k,l) \text{ tel que } a_k + b_l = c\} \tag{15.476}$$

et nous avons

$$\{f+g=c\} = \bigcup_{(k,l)\in I_c} (A_k \cap B_l), \tag{15.477}$$

et comme cette union est disjointe, nous pouvons faire la somme des mesures :

$$\mu(f+g=c) = \sum_{(k,l)\in I_c} \mu(A_k \cap B_l). \tag{15.478}$$

Cela nous permet de faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f+g)d\mu &= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c\mu(f+g=c) && (15.479a)\\
&= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c \sum_{(k,l)\in I_c} \mu(A_k \cap B_l) && (15.479b)\\
&= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} \sum_{(k,l)\in I_c} (a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l) && (15.479c)
\end{aligned}$$

Dans cette double somme, tous les couples (k,l) sont tirés une et une seule fois parce qu'ils sont tous dans un et un seul des I_c, donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f+g)d\mu &= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} \sum_{(k,l)\in I_c} (a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l) && (15.480a)\\
&= \sum_{(k,l)} (a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l) && (15.480b)\\
&= \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu. && (15.480c)
\end{aligned}$$

□

Remarque 15.166.
Si $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ n'est pas une décomposition canonique, il n'en reste pas moins que chacun des $\mathbb{1}_{A_k}$ est la forme canonique de lui-même. Donc le théorème 15.165 s'applique et nous avons quand même

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k). \tag{15.481}$$

Proposition 15.167.
Soient deux fonctions mesurables $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$. Alors

$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g. \tag{15.482}$$

Démonstration. Soient des suites $f_n \to f$ et $g_n \to g$ fournies par le théorème fondamental d'approximation 15.105. Par le théorème de la convergence monotone 15.160 nous avons d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n + g_n) = \int_\Omega \int (f+g), \tag{15.483}$$

et par le théorème 15.165 nous avons d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n + \int g_n \right) = \int f + \int g \tag{15.484}$$

où nous avons encore utilisé la convergence monotone.

En égalant les deux, nous avons notre résultat. □

15.9.4 Fonctions à valeurs réelles

L'intégrale d'une fonction à valeurs dans $[0,+\infty]$ étant faite, nous passons aux fonctions à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$.

Proposition-définition 15.168 ([1])**.**
Soit une fonction mesurable $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Nous considérons les deux fonction suivantes à valeurs dans $[0,+\infty]$:

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & si\ f(x) < 0 \\ f(x) & si\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{15.485a}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & si\ f(x) > 0 \\ -f(x) & si\ f(x) \leqslant 0. \end{cases} \tag{15.485b}$$

Nous avons $\int_\Omega |f| < \infty$ si et seulement si $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$.

*Dans ce cas nous disons que f est **intégrable** au sens de Lebesgue et nous posons*

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \tag{15.486}$$

Démonstration. Vu que f est mesurable, les fonctions f^+ et f^- sont également mesurables et nous avons l'égalité

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{15.487}$$

La proposition 15.167 nous dit alors que

$$\int_\Omega |f| = \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-. \tag{15.488}$$

Dans cette égalité, tous les nombres sont dans $[0,\infty]$. Le membre de gauche vaut $+\infty$ si et seulement si au moins un des deux de droite vaut $+\infty$. □

Nous verrons comment donner un sens à $\int_\Omega f$ dans certains cas où f n'est pas intégrable sur Ω dans la section 15.14.7 sur les intégrales impropres.

Nous définissons aussi

$$\mu(f) = \int_\Omega f \tag{15.489}$$

si f est une fonction mesurable sur Ω.

Remarque 15.169.
Dans $\mathbb{R}^d$, quasiment toutes les fonctions et ensembles sont mesurables. En effet la construction d'ensembles non mesurables demande obligatoirement l'utilisation de l'axiome du choix ; de tels ensembles doivent être construits « exprès pour ». Il y a très peu de chances pour que vous tombiez sur un ensemble non mesurable de $\mathbb{R}^d$ sans que vous ne vous en rendiez compte.

Il y en a un en l'exemple 15.141.

Remarque 15.170.
« Mesurable » ne signifie pas « intégrable ». Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \bar{\mathbb{R}} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{15.490}$$

est mesurable, mais non intégrable.

Lemme 15.171.
Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Si g est intégrable, alors f est intégrable.

Démonstration. La fonction g est manifestement à valeurs réelles positives. La proposition 15.158 nous dit alors que $|f|$ est intégrable. Ensuite c'est au tour de la proposition 15.168 de conclure à l'intégrabilité de f. □

Proposition 15.172.
Soient deux fonctions intégrables sur $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors $f + g$ est intégrable et

$$\int_S (f+g)d\mu = \int_S f d\mu + \int_S g d\mu. \tag{15.491}$$

Démonstration. En plusieurs étapes suivant la généralité de f et g.

Si f et g sont étagées et positives C'est le théorème 15.165(2) déjà prouvé.

Si f et g sont à valeurs positives Le théorème fondamental d'approximation 15.105 nous permet de considérer des suites croissantes de fonctions étagées positives (f_k) et (g_k) qui vérifient $f_k \to f$ et $g_k \to g$.
Pour chaque k nous avons

$$\int_S (f_k + g_k)d\mu = \int_S f_k d\mu + \int_S g_k d\mu. \tag{15.492}$$

De plus, la suite $k \mapsto f_k + g_k$ est une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers $f + g$. Le théorème de la convergence monotone 15.160 nous permet donc de passer à la limité dans (15.492) et de permuter toutes les limites avec toutes les intégrales, des deux côtés.

f et g à valeurs réelles Il faut diviser le domaine en de nombreuses régions suivant les signes de f, g et $f + g$.

□

Proposition 15.173.
Si $A, B \subset \Omega$ sont des parties disjointes et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $A \cup B$ alors les intégrales $\int_A f$ et $\int_B f$ existent et

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{15.493}$$

Démonstration. Vu que A et B sont disjoints, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. En utilisant alors le lemme 15.159 et la proposition 15.172 nous avons le calcul

$$\int_{A\cup B} f = \int_\Omega f\mathbb{1}_{A\cup B} = \int_\Omega f\mathbb{1}_A + \int_\Omega f\mathbb{1}_B = \int_A f + \int_B f. \tag{15.494}$$

□

15.9.5 Fonctions à valeurs vectorielles (dimension finie)

Nous voulons intégrer des fonctions du type

$$f : \Omega \to V \tag{15.495}$$

où Ω et V sont des espaces vectoriels. Nous expliquons à présent plus précisément le cadre.

15.174.
Nous considérons à présent un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ de dimension finie, et un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Attention à ne pas confondre espace de départ et espace d'arrivée. Vu que V est un espace topologique, nous avons bien entendu les boréliens de V, et pour peut que nous ayons une mesure sur V (qui qui n'est pas compliqué à créer à partir de celle canonique de $\mathbb{R}^n$ et un isomorphisme), nous avons déjà une définition de $\int_V f d\mu$ lorsque $f : V \to \mathbb{R}$.

Ici nous nous proposons non d'intégrer $f\colon V\to\mathbb{R}$ mais bien $f\colon(\Omega,\mathcal{A},\mu)\to V$ où V est un espace vectoriel normé.

Le lemme suivant est la point de départ pour définir les intégrales de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Pour les fonctions à valeurs dans un espace de dimension infine (par exemple de Banach), il existe des choses, mais c'est un peu plus compliqué.

Lemme 15.175 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V réel de dimension finie, muni de la norme N. Soient une base $\{e_i\}$ de V, et une fonction $f\colon(\Omega,\mathcal{A},\mu)\to V$ telle que la norme $N(f)\colon\Omega\to\mathbb{R}^+$ soit intégrable. Nous notons f_i les composantes de f : $f(x)=\sum_i f_i(x)e_i$.

Alors pour chaque i,

(1) la fonction $|f_i|\colon\Omega\to\mathbb{R}^+$ est intégrable,

(2) la fonction $f_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$ est intégrable.

Démonstration. Si V était un espace muni d'un produit scalaire, et si la base $\{e_i\}$ était orthonormée, ce serait facile parce que la norme majore toutes les composantes. Hélas, ce n'est pas spécialement le cas. La base $\{e_i\}$ n'est pas spécialement orthonormée et même la norme N ne dérive pas spécialement d'un produit scalaire.

Nous allons utiliser l'équivalence de toutes les normes en dimension finie (théorème 12.6) pour nous ramener au cas d'une norme euclidienne.

Nous considérons sur V la norme « euclidienne » construite sur la base $\{e_i\}$: $\|\sum_i v_ie_i\|=\sum_i|v_i|^2$. Par équivalence des normes nous avons des nombres non nuls λ_1 et λ_2 tels que

$$N(v)\leqslant\lambda_1\|v\|,\tag{15.496}$$

et

$$\|v\|\leqslant\lambda_2N(v)\tag{15.497}$$

pour tout $v\in V$. Pour un i fixé nous avons alors les majorations

$$N\big(f_i(x)e_i\big)\leqslant\lambda_1\|f_i(x)e_i\|\leqslant\lambda_1\|f(x)\|\leqslant\lambda_1\lambda_2N\big(f(x)\big).\tag{15.498}$$

En posant $N_i=N(e_i)$ nous avons la majoration [45]

$$|f_i(x)|\leqslant\frac{\lambda_1\lambda_2}{N(e_i)}N\big(f(x)\big).\tag{15.499}$$

L'application

$$\begin{aligned}|f_i|\colon\Omega&\to\mathbb{R}^+\\x&\mapsto|f_i(x)|\end{aligned}\tag{15.500}$$

est donc une fonction à valeurs réelles positives, majorée par une fonction intégrable (la fonction $x\mapsto N\big(f(x)\big)$). Elle est donc intégrable par le lemme 15.171.

La fonction f_i elle-même est alors intégrable par la proposition 15.168. □

Notons que ce lemme est en réalité très simple si V est un espace vectoriel normé dont la norme découle d'un produit scalaire, comme c'est le cas pour $\mathbb{C}$. D'ailleurs, il ne faut pas se voiler la face : le cas d'intégrales de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera dans le Frido le cas de loin le plus courant. À ce propos, nous n'avons pas encore défini ce que nous voulons noter $\int_\Omega f\,d\mu$ lorsque f est une fonction à valeurs vectorielles. Comblons vite ce manque ...

Proposition-définition 15.176 ([1])**.**
Soit une fonction $f\colon\Omega\to V$ où V est un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit une base $\{e_i\}$ de V. Si la fonction $\|f\|\colon\Omega\to\mathbb{R}^+$ est intégrable, alors

(1) toutes les composantes $f_i\colon\Omega\to\mathbb{R}$ sont intégrables,

45. Vous notez l'utilisation de la condition (2) de la définition 7.106 de la norme pour « convertir » la norme N en valeur absolue.

(2) le vecteur

$$\sum_i (\int_\Omega f_i) e_i \tag{15.501}$$

ne dépend pas de la base choisie.

Dans ce cas, la fonction f est dite ***intégrable*** *et nous définissons*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i (\int_\Omega f_i) e_i. \tag{15.502}$$

Démonstration. Le fait que les composantes soient intégrables est le lemme 15.175. Soient deux bases de V, $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$, liées conformément à (11.422) par la relation $s_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$ pour une certaine matrice inversible Q. Nous avons pour tout $x \in \Omega$:

$$f(x) = \sum_i f_i(x) e_i = \sum_\alpha f_\alpha(x) s_\alpha \tag{15.503}$$

avec $f_\alpha(x) = \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i}$ par la formule (11.429).

Notons pour être pointilleux que les ensembles $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$ ne sont pas indexés par le même ensemble, de telle sorte que f_i ne peut pas être confondu avec f_α, même lorsqu'on attribue des valeurs à i et à α.

Comme combinaisons linéaires des fonctions f_i qui sont intégrables, les fonctions f_α sont intégrables (proposition 15.172). En écrivant $\int_\Omega f$ par rapport à la base $\{s_\alpha\}$ nous trouvons :

$$\sum_\alpha (\int f_\alpha) s_\alpha = \sum_\alpha \Big(\int \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} dx \Big) \sum_j Q_{j\alpha} e_j \tag{15.504a}$$

$$= \sum_j \int \sum_{\alpha i} f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} Q_{j\alpha} dx e_j \tag{15.504b}$$

$$= \sum_j \int f_j(x) dx e_j \tag{15.504c}$$

$$= \sum_j (\int f_i) e_i \tag{15.504d}$$

où nous avons permuté des sommes finies et des intégrales des fonctions f_i, à valeurs dans $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition 15.172 □

La proposition suivante est, pour les intégrales à valeurs vectorielles, analogue à la proposition 15.168.

Proposition 15.177.
Soit une fonction mesurable $f : \Omega \to (V, \|.\|)$. Soit une base $\{e_i\}$ de V et la décomposition $f = \sum_i f_i e_i$.

Nous avons équivalence entre

(1) $\int_\Omega \|f\| < \infty$
(2) $\int_\Omega |f_i| < \infty$
(3) $\int_\Omega f_i^+ < \infty$ *et* $\int_\Omega f_i^- < \infty$.

Démonstration. L'équivalence entre les points (2) et (3) est la proposition 15.168. Nous démontrons l'équivalence entre (1) et (2).

Vu que toutes les normes sont équivalentes sur V, nous considérons en particulier la norme associée à la base $\{e_i\}$ donnée par

$$N(x) = \sum_i |x_i|. \tag{15.505}$$

Il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$\lambda_1\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \leqslant \|f(x)\| \leqslant \lambda_2\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \tag{15.506}$$

pour tout $x \in \Omega$.

La première inégalité dit que si $\int_\Omega \|f\| < \infty$, alors $\lambda_1\big(\sum_i \int_\Omega |f - i|\big) < \infty$. Et vu que chacun des termes est positif, ils sont tous finis.

La seconde inégalité donne l'implication dans réciproque. □

15.9.6 Quelques propriétés

Proposition 15.178.
Si f, g sont des fonctions étagées et si $A, B \subset S$ sont disjoints, alors

(1) $\int_A f d\mu = \int_S f \mathbb{1}_A d\mu$

(2) $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

Démonstration. Si $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{B_k}$ alors d'une part

$$\int_A f d\mu = \sum_k a_k \mu(B_k \cap A) \tag{15.507}$$

et d'autre part,

$$\int_S f \mathbb{1}_A d\mu = \sum_k a_k \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B_k} = \sum_k a_k \mathbb{1}_{B_k \cap A}, \tag{15.508}$$

ce qui donne

$$\int f \mathbb{1}_A d\mu = \sum_k a_k \mu(B_k \cap A). \tag{15.509}$$

En ce qui concerne la seconde égalité à prouver, tout repose sur le fait que $\mathbb{1}_{A\cup B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B}$. Du coup nous avons, en utilisant le théorème 15.165 :

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f d\mu &= \int_S f \mathbb{1}_{A\cup B} d\mu && \text{(15.510a)}\\
&= \int_S f(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) d\mu && \text{(15.510b)}\\
&= \int_S f\mathbb{1}_A + \int_S f\mathbb{1}_B && \text{(15.510c)}\\
&= \int_A f + \int_B f. && \text{(15.510d)}
\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant nous aide à détecter des fonctions presque partout nulles.

Lemme 15.179.
Soit f une fonction mesurable positive ou nulle telle que

$$\int_\Omega f d\mu = 0. \tag{15.511}$$

Alors $f = 0$ μ-presque partout.

Démonstration. L'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que $f(x) \neq 0$ peut s'écrire comme une union dénombrable disjointe :

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \tag{15.512}$$

avec

$$E_0 = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) > 1\} \tag{15.513a}$$

$$E_i = \{x \in \Omega \text{ tel que } \frac{1}{i+1} \leqslant f(x) < \frac{1}{i}\}. \tag{15.513b}$$

Si un des ensembles E_i est de mesure non nulle, alors nous pouvons considérer la fonction simple $h(x) = \frac{1}{i+1}\mathbb{1}_{E_i}$ dont l'intégrale sur Ω est strictement positive. Par conséquent le supremum de la définition (15.424) est strictement positif.

Nous savons donc que $\mu(E_i) = 0$ pour tout i. Étant donné que la mesure d'une union disjointe dénombrable est égale à la somme des mesures, nous avons

$$\mu\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = 0, \tag{15.514}$$

ce qui signifie que f est nulle μ-presque partout. □

Corollaire 15.180.
Soit f une fonction mesurable sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_{f>0}d\mu = 0. \tag{15.515}$$

Alors $f \leqslant 0$ presque partout.

Démonstration. Nous avons l'égalité d'ensembles

$$\{f\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = \{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\}. \tag{15.516}$$

Mais lemme 15.179 implique que $f\mathbb{1}_{f>0}$ est nulle presque partout, c'est-à-dire que la mesure de l'ensemble du membre de gauche est nulle par conséquent

$$\mu\{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = 0. \tag{15.517}$$

Cela signifie que la fonction f est presque partout négative ou nulle. □

15.9.7 Permuter limite et intégrale

15.9.7.1 Convergence uniforme

Proposition 15.181 (Permuter limite et intégrale)**.**
Soit $f_n \to f$ uniformément sur un ensemble mesuré A de mesure finie. Alors si les fonctions f_n et f sont intégrables sur A, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{15.518}$$

Démonstration. Notons f la limite de la suite (f_n). Pour tout n nous avons les majorations

$$\left|\int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu\right| \leqslant \int_A |f_n - f| d\mu \tag{15.519a}$$

$$\leqslant \int_A \|f_n - f\|_\infty d\mu \tag{15.519b}$$

$$= \mu(A)\|f_n - f\|_\infty \tag{15.519c}$$

où $\mu(A)$ est la mesure de A. Le résultat découle maintenant du fait que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

Il existe un résultat considérablement plus intéressant que cette proposition. En effet, l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire. Cette hypothèse peut être remplacée soit par l'uniforme convergence de la suite (théorème 15.182), soit par le fait que les normes des f_n sont uniformément bornées (théorème de la convergence dominée de Lebesgue 15.184).

Théorème 15.182 ([256]).
La limite uniforme d'une suite de fonctions intégrables sur un borné est intégrable, et on peut permuter la limite et l'intégrale.

Plus précisément, soit A un ensemble de μ-mesure finie et $f_n : A \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur A. Si la limite $f_n \to f$ est uniforme, alors f est intégrable sur A et nous pouvons inverser la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{15.520}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et n tel que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \epsilon$ (ici la norme uniforme est prise sur A). Étant donné que f_n est intégrable sur A, il existe une fonction simple φ_n qui minore f_n telle que

$$\left| \int_A \varphi_n - \int_A f_n \right| < \epsilon. \tag{15.521}$$

La fonction $\varphi_n + \epsilon$ est une fonction simple qui majore la fonction f. Si ψ est une fonction simple qui minore f, alors

$$\int_A \psi \leqslant \int_A \varphi_n + \epsilon \leqslant \int_A f_n + \epsilon\mu(A). \tag{15.522}$$

Par conséquent le supremum qui définit $\int_A f$ existe, ce qui montre que f est intégrable. Le fait qu'on puisse inverser la limite et l'intégrale est maintenant une conséquence de la proposition 15.181. □

Remarque 15.183.
L'hypothèse sur le fait que A soit de mesure finie est importante. Il n'est pas vrai qu'une suite uniformément convergente de fonctions intégrables est intégrables. En effet nous avons par exemple la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{15.523}$$

qui converge uniformément vers $f(x) = 1/x$ sur $A = [1, \infty[$. Le limite n'est cependant guerre intégrable sur A.

15.9.7.2 Convergence dominée de Lebesgue

Théorème 15.184 (Convergence dominée de Lebesgue).
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Nous supposons que $f_n \to f$ simplement sur Ω presque partout et qu'il existe une fonction intégrable g telle que

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \tag{15.524}$$

pour presque[46] *tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors*

(1) f est intégrable,
(2) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$,
(3) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0$.

Démonstration. La fonction limite f est intégrable parce que $|f| \leqslant g$ et g est intégrable[47]. Par hypothèse nous avons

$$-g(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x). \tag{15.525}$$

En particulier la fonction $g_n = f_n + g$ est positive et mesurable si bien que le lemme de Fatou 15.164 implique

$$\int_\Omega \liminf g_n \leqslant \liminf \int_\Omega g_n. \tag{15.526}$$

46. S'il n'y avait pas le « presque » ici, ce théorème serait à peu près inutilisable en probabilité ou en théorie des espaces L^p, comme dans la démonstration du théorème de Fischer-Riesz 28.41 par exemple.
47. Par le lemme 15.171

Évidemment nous avons $\liminf g_n = f + g$, de telle sorte que

$$\int f + \int g \leqslant \liminf \int g_n = \liminf \int f_n + \int g, \tag{15.527}$$

et le nombre $\int g$ étant fini, nous pouvons le retrancher des deux côtés de l'inégalité :

$$\int f \leqslant \liminf \int f_n. \tag{15.528}$$

Afin d'obtenir une minoration de $\int f$ nous refaisons exactement le même raisonnement en utilisant la suite de fonctions $k_n = -f_n \to k = -f$. Nous obtenons que

$$\int k \geqslant \liminf \int k_n = -\limsup \int f_n, \tag{15.529}$$

et par conséquent

$$\liminf \int f_n \leqslant \int f \leqslant \limsup \int f_n. \tag{15.530}$$

La limite supérieure étant plus grande ou égale à la limite inférieure, les trois quantités dans les inégalités (15.530) sont égales.

Nous prouvons maintenant le troisième point. Soit la suite de fonctions

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \tag{15.531}$$

qui tend ponctuellement vers zéro. De plus

$$h_n(x) \leqslant |f_n(x)| + |f(x)| \leqslant 2g(x), \tag{15.532}$$

ce qui prouve que les h_n majorés par une fonction intégrable. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{15.533}$$

□

Remarque 15.185.
Lorsque nous travaillons sur des problèmes de probabilités, la fonction g peut être une constante parce que les constantes sont intégrables sur un espace de probabilité.

Corollaire 15.186.
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite numérique absolument convergente. Alors elle est convergente. Il en est de même pour les séries de fonctions si on considère la convergence ponctuelle.

Démonstration. L'hypothèse est la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} |a_i| dm(i)$ où dm est la mesure de comptage. Étant donné que $|a_i| \leqslant |a_i|$, la fonction a_i (fonction de i) peut jouer le rôle de g dans le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 15.184). □

15.9.8 Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité)

Proposition-définition 15.187 ([1, 257])**.**
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et une fonction mesurable positive $w\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$. Alors la formule

$$(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu \tag{15.534}$$

*pour tout $A \in \mathcal{F}$ définit une mesure positive sur $(S, \mathcal{F})$ appelée **produit** de la mesure μ par la fonction w. La fonction w est la **densité** de la mesure $w \cdot \mu$ par rapport à la mesure μ.*

Démonstration. D'abord $(w \cdot \mu)(\varnothing) = 0$ parce que le lemme 15.157 donne

$$(w \cdot \mu)(\varnothing) = \int_S w\mathbb{1}_\varnothing d\mu = \int_S 0 d\mu = 0 \times \mu(S) = 0 \tag{15.535}$$

où nous avons (éventuellement) utilisé deux fois la convention $0 \times \infty = 0$.

Ensuite si les ensembles A_i sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$ alors nous avons $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty} = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{1}_{A_i}$, et donc

$$(w \cdot \mu)(\bigcup_i A_i) = \int_S w\mathbb{1}_{\bigcup_i A_i} d\mu = \int_S (\sum_{i=1}^\infty w\mathbb{1}_{A_i}) d\mu = \sum_i \int_S w\mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_i (w \cdot \mu)(A_i). \tag{15.536}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé le fait que f était positive pour justifier l'application du théorème de la convergence monotone 15.160. □

En particulier nous parlons souvent de mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est alors la construction suivante. Si μ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une **densité** si pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ nous avons

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx \tag{15.537}$$

où dx est la mesure de Lebesgue.

Proposition 15.188 ([257])**.**
Soit une fonction mesurable $w\colon (S, \mathcal{F}, \mu) \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

(1) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, alors $f \cdot (w \cdot \mu) = (fg) \cdot \mu$.

(2) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable, elle est $w \cdot \mu$-intégrable si et seulement si fw est μ-intégrable. Dans ce cas, nous avons encore $f \cdot (w \cdot \mu) = (fg) \cdot \mu$.

Attention : dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut que w soit à valeurs finies dans $\mathbb{R}$ parce que nous n'avons pas définit $\infty \times z$ lorsque $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le résultat pour la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable A. Nous avons : $\mathbb{1}_A \cdot (w \cdot \mu)(B) = \int_B \mathbb{1}_A d(w \cdot \mu)$. Mais par définition, l'intégrale d'une fonction indicatrice est la mesure de l'ensemble indiqué. En passant sur le fait que $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$,

$$\int_B \mathbb{1}_A d(w \cdot \mu) = (w \cdot \mu)(A \cap B) = \int_S \mathbb{1}_{A\cap B} w d\mu = \int_S \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B w d\mu = \int_B \mathbb{1}_A w d\mu = (\mathbb{1}_A w) \cdot \mu(B). \tag{15.538}$$

Supposons maintenant que f soit une fonction étagées qui s'écrit $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ où les A_k sont des ensembles mesurables disjoints. Alors le calcul est le suivant, en utilisant le fait que sur A_k, on a $a_k = f(x)$:

$$\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot \mu)B &= \int_B f d(g \cdot \mu) && \text{(15.539a)}\\
&= \sum_k a_k (g \cdot \mu)(A_k \cap B) && \text{(15.539b)}\\
&= \sum_k a_k \int_{A_k \cap B} gf\mu && \text{(15.539c)}\\
&= \int_{A_k \cap} f(x)g(x)d\mu(x) && \text{(15.539d)}\\
&= \sum_k (fg \cdot \mu)(A_k \cap B) && \text{(15.539e)}\\
&= (fg \cdot \mu)(B) && \text{(15.539f)}
\end{aligned}$$

parce que les $A_k \cap B$ forment une partition de l'ensemble B (voir le point (2) de la définition 15.20).

Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, le théorème 15.105 donne une suite croissante f_n de fonctions étagées positives convergeant (ponctuellement) vers f. Vu que la fonction w est positive, nous avons aussi la limite positive et croissante $wf_n \to wf$. Ainsi l'utilisation du théorème de la convergence monotone est justifié dans le calcul suivant :

$$\int_S f d(w \cdot \mu) = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n d(w \cdot \mu) = \lim_{n\to\infty} \int_S (wf_n) d\mu = \int_S wf d\mu. \tag{15.540}$$

Nous passons maintenant au cas général où f est une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ (avec w finie dans ce dernier cas). Nous avons la chaîne d'équivalences

$\Leftrightarrow$ f est $(w \cdot \mu)$ intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|$ est $(w \cdot \mu)$-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|w$ est μ-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|fw|$ est μ-intégrable.

Si cela est le cas, la formule se démontre en se ramenant au cas déjà prouvé des fonctions positives en utilisant les $(fw)^+ = f^+w$, $(fw)^- = f^-w$ etc. □

15.9.9 Mesure et topologie

Exemple 15.189(Un compact n'est pas toujours de mesure finie)
Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}))$ réel avec ses boréliens et la fonction

$$\begin{aligned} w\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) &\to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{15.541}$$

Essayons d'étudier la mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue.

<u>w **est mesurable**</u> Soit un borélien B de $\bar{\mathbb{R}}$. Si B ne contient pas ∞ alors $w^{-1}(B)$ est un borélien de $\mathbb{R}$ par continuité de l'application restreinte $w\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Ici nous avons par exemple appliqué la proposition 15.110 à chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. Si $+\infty \in B$ alors

$$w^{-1}(B) = w^{-1}\big(B\backslash\{0\}\big) \cup w^{-1}(\{\infty\}) = w^{-1}\big(B\backslash\{0\}\big) \cup \{0\}, \tag{15.542}$$

qui est borélien par union de boréliens.

<u>**Mesure produit**</u> La proposition 15.187 nous assure alors qu'en posant [48]

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{|x|} d\lambda(x) \tag{15.543}$$

où λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une mesure.

<u>**Mesure du singleton**</u> Pour avoir les idées claires, nous pouvons nous demander la mesure $\mu\big(\{0\}\big)$. Nous cela nous devons calculer

$$\int_{\{0\}} \frac{1}{|x|} d\lambda(x) = \int_{\{0\}} w(x) d\lambda(x) \tag{15.544}$$

où là, l'abus de notation n'est plus possible. Mais quelle que soit la fonction étagée $h = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ considérée,

$$\int_{\{0\}} h(x) d\lambda(x) = \sum_i \alpha_i \lambda\big(A_i \cap \{0\}\big) = 0. \tag{15.545}$$

Attention : ceci n'a rien de particulier à la fonction $x \mapsto 1/|x|$. Lorsqu'une mesure a une densité par rapport à Lebesgue, la mesure d'un singleton sera toujours nulle.

48. Avec un mini abus de notation : si $0 \in B$, cette notation n'est pas tout à fait correcte.

Mesure de la boule compacte Il n'en reste pas moins que $\mu\big([-1,1]\big) = \infty$.

△

15.190.
En réalité, il n'y a pas de liens forts entre mesure et topologie. Un espace topologique est une chose, et y mettre une mesure en est une autre. Bien entendu, une topologie étant donnée, nous pouvons considérer la tribu des boréliens et y mettre une mesure un peu quelconque. Il n'y a pas de choix canonique.

Notons que même dans l'exemple de compact de mesure infinie 15.189, la mesure introduite n'est pas sans lien avec la topologie de $\mathbb{R}$. En effet pour avoir une mesure à densité par rapport à Lebesgue, nous avons dû prendre une application mesurable par rapport à la tribu des boréliens, laquelle est éminemment liée à la topologie. Il y a donc parfaitement moyen de construire des espaces mesurés tenant compte de la topologie, et ayant des propriétés qui ne sont pas celle attendues.

Quand les choses sont faciles, ça se passe bien. La proposition suivante dit qu'une fonction continue sur un compact y est intégrable ; sauf que pour dire cela de façon précise, il faut un peu bosser parce qu'il y a de écueils à éviter, tels que l'exemple 15.189.

Proposition 15.191 ([1])**.**
Soit un espace mesuré $(K, \mathcal{A}, \mu)$ et une fonction $f\colon K \to \mathbb{R}$. Nous supposons pas mal de trucs techniques :

(1) La mesure est finie : $\mu(K) < \infty$.

(2) L'ensemble K est par ailleurs un espace topologique compact[49]*.*

(3) La fonction f est continue pour les topologies de K et de $\mathbb{R}$.

(4) La fonction f est mesurable pour la tribu $\mathcal{A}$ de K et la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Alors f est intégrable sur K et $\int_K |f| < \infty$.

L'hypothèse (4) ne se déduit pas nécessairement de l'hypothèse (3). Dans les cas usuels, nous avons bien « continue implique mesurable », mais si $\mathcal{A}$ n'a aucun rapport avec la topologie ... hum ...

Démonstration. Si nous écrivons $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ avec f^+ et f^- prenant des valeurs positives ou nulles[258], en vertu de la proposition 15.168, si nous devons prouver séparément $\int_K f^+ < \infty$ et $\int_K f^- < \infty$. Nous allons donc prouver cette proposition en plusieurs étapes.

Si f est positive La fonction f est continue sur K qui est compact (même en tant qu'espace topologique en soi ; il n'est pas nécessaire d'être compact *dans* quelque chose), donc elle a un maximum par le théorème 7.99 nommons M ce maximum. Donc $f\colon K \to [0, M]$. De plus la mesure μ sur K est finie et vérifie disons $\mu(K) = m$.

Soit une fonction étagée $h\colon K \to \mathbb{R}^+$ majorée par f. Nous notons

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{15.546}$$

où les A_i sont des éléments de $\mathcal{A}$. Vu que $0 \leqslant h(x) \leqslant f(x) \leqslant M$, nous avons[50]

$$\int_K h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(K \cap A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\mu(K \cap A_i) \leqslant M = \mu(K) = Mm \tag{15.547}$$

parce que les A_i sont disjoints et vérifient $\bigcup_i A_i = K$ (lemme 15.102).

49. Nous ne prétendons pas que la tribu $\mathcal{A}$ soit liée à la topologie de K.
50. Définition (15.423).

Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (15.424) sont contenus dans $[0, Mm]$. Le supremum est donc dans $[0, Mm]$ et est alors strictement plus petit que l'infini.

Si f est positive ou négative Nous appliquons la première partie séparément à f^+ et f^-. Et nous avons alors que f est intégrable et

$$\int_K |f| = \int_K f^+ + \int_K f^- < \infty. \tag{15.548}$$

□

15.10 Propriétés des intégrales

Théorème 15.192 ([257]).
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application mesurable $\varphi\colon S_1 \to S_2$. Soit encore μ, une mesure positive sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$.

Si $f\colon S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable alors,

(1) f est $\varphi(\mu)$-intégrale si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable.

(2) dans le cas où f est $\varphi(\mu)$-intégrable, nous avons

$$\int_{S_2} f d\big(\varphi(\mu)\big) = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{15.549}$$

Démonstration. L'intégrabilité est la définition 15.168, et demande que $|f|$ soit intégrable. L'égalité (15.549) a un sens si les deux membres sont infinis. Tant que les fonctions considérées sont positives, le point (1) est immédiat. Ce n'est qu'au moment où les fonctions considérées deviennent à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ que l'intégrabilité de $|f|$ commence à jouer parce qu'il faut que f^+ et f^- soient séparément intégrables.

Nous allons prouver la formule (15.549) pour des fonctions de plus en plis générales. Pour la suite nous notons $\mu' = \varphi(\mu)$.

Pour $f = \mathbb{1}_B$, B mesurable Soit $B \in \mathcal{F}_2$. Nous avons $\mathbb{1}_B \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$. Donc en utilisant le lemme 15.157 nous avons

$$\int_{S_2} \mathbb{1}_B d\mu' = \mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \int_{S_1} \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \int_{S_1} (\mathbb{1}_B \circ \varphi) d\mu. \tag{15.550}$$

f est étagée positive La fonction f peut être écrite sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{15.551}$$

avec $B_k \in \mathcal{F}_2$ et $a_k \in \mathbb{R}^+$. Nous avons alors, en utilisant la sous-additivité de l'intégrale du théorème 15.165(3),

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} f d\mu' &= \sum_k a_k \int_{S_2} \mathbb{1}_{B_k} d\mu' && \text{(15.552a)}\\
&= \sum_k a_k \int_{S_1} (\mathbb{1}_{B_k} \circ \varphi) d\mu && \text{(15.552b)}\\
&= \int_{S_1} \Big(\sum_k a_k \mathbb{1}_{B_k} \Big) \circ \varphi d\mu && \text{(15.552c)}\\
&= \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. && \text{(15.552d)}
\end{aligned}$$

f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ Vu que f est mesurable, par le théorème 15.105 il existe une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers f. Soit donc cette suite, $f_n\colon S_2 \to \mathbb{R}^+$. Les fonctions $f_n \circ \varphi$ sont étagées et positives et nous avons aussi la limite ponctuelle et croissante $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ parce que φ est continue. Le théorème de la convergence monotone (théorème 15.160) permet d'écrire ceci :

$$\int_{S_2} f d\mu' = \lim \int_{S_2} f_n d\mu' = \lim \int_{S_1} (f_n \circ \varphi) d\mu = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{15.553}$$

Pour $f\colon S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ C'est maintenant que l'intégrabilité va jouer. Nous avons $|f| \circ \varphi = |f \circ \varphi|$, donc

$$\int_{S_2} |f| d\mu' = \int_{S_1} |f| \circ \varphi d\mu = \int_{S_1} |f \circ \varphi| d\mu, \tag{15.554}$$

ce qui montre que f est μ'-intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable.

De plus si $f = f^+ - f^-$ alors $f^+ \circ \varphi = (f \circ \varphi)^+$, $f^- \circ \varphi = (f \circ \varphi)^-$, et de façon similaire pour les parties imaginaires et réelles.

□

15.11 Mesure à densité

15.11.1 Théorème de Radon-Nikodym

Proposition 15.193 (Produit d'une mesure par une fonction)**.**
Si $(S, \mathcal{F}, m_1)$ est un espace mesuré, si $f\colon S \to \mathbb{R}$ est intégrable, et si B est un ensemble mesurable, nous définissons fm_1 par

$$m_2(B) = (fm_1)(B) = \int_B f(t) dm_1(t). \tag{15.555}$$

Cela est une mesure positive sur $(S, \mathcal{F})$.

Démonstration. D'abord pour l'ensemble vide : $m_2(\varnothing) = \int_\varnothing f dm_1 = 0$.

Si A_n sont des éléments disjoints de $\mathcal{F}$ tels que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$. Alors en utilisant la proposition 15.173, nous avons le calcul suivant :

$$m_2\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \int_{\bigcup_n A_n} f(t) dm_1(t) = \sum_n \int_{A_n} f(t) dm_1(t) = \sum_n m_2(A_n). \tag{15.556}$$

□

Définition 15.194 ([259])**.**
*Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Nous disons que la mesure μ est **dominée** par ν si pour tout ensemble mesurable A, $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$.*

*Si ν est une mesure positive et μ une mesure, nous disons que μ est **absolument continue** par rapport à ν si $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$. On note aussi $\mu \ll \nu$.*

La mesure μ est **portée** par l'ensemble $E \in \mathcal{A}$ si pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E). \tag{15.557}$$

Nous écrivons que $\mu \perp \nu$ s'il existe un ensemble $E \in \mathcal{A}$ tel que μ soit porté par E et ν soit porté par $\complement E$.

Théorème 15.195 (Radon-Nikodym[260])**.**
Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur un espace métrisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

(1) Il existe un unique couple de mesures μ_1 et μ_2 telles que

(1a) $\mu = \mu_1 + \mu_2$

(1b) μ_1 *est dominé par* ν

(1c) $\mu_2 \perp \nu$.

Dans ce cas, les mesures μ_1 *et* μ_2 *sont positives et* σ*-finies.*

(2) À égalité ν*-presque partout près, il existe une unique fonction mesurable positive* f *telle que pour tout mesurable* A*,*

$$\mu_1(A) = \int_A d\mu_1 = \int_\Omega \mathbb{1}_A f d\nu. \tag{15.558}$$

(3) À égalité ν*-presque partout près, il existe une unique fonction positive mesurable* h *telle que* $\mu_1 = h\nu$.

Corollaire 15.196.
Si μ *es une mesure* σ*-finie dominée par la mesure* σ*-finie* m*, alors* μ *possède une unique fonction de densité.*

Corollaire 15.197.
Soient μ *et* m*, deux mesures positives* σ*-finies sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Alors* m *domine* μ *si et seulement si* μ *possède une densité par rapport à* m.

Démonstration. Si μ est dominée par m, alors la décomposition $\mu = \mu + 0$ satisfait le théorème de Radon-Nikodym. Par conséquent il existe une fonction f telle que

$$\mu(A) = \int_A f dm. \tag{15.559}$$

Cette fonction est alors une densité pour μ par rapport à m.

Pour la réciproque, nous supposons que μ a une densité f par rapport à m, et que A est une ensemble de m-mesure nulle :

$$m(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A dm = 0. \tag{15.560}$$

Cela signifie que la fonction $\mathbb{1}_A$ est m-presque partout nulle. La fonction produit $\mathbb{1}_A f$ est également nulle m-presque partout, et par conséquent

$$\mu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A f dm = 0. \tag{15.561}$$

□

Problèmes et choses à faire

Est-ce que la démonstration de cela ne demande pas la convergence monotone d'une façon ou d'une autre ?

15.11.2 Mesure complexe

Définition 15.198 (Mesure complexe[261])**.**
Si $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace mesurable, une* ***mesure complexe*** *est une application* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) ν *est sous-additive : si les ensembles* $A_i \in \mathcal{A}$*, alors* $\sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i)$.

Notons que la série $\sum_i \mu(A_i)$ est alors nécessairement absolument convergente. En effet changer l'ordre de la somme ne change pas l'union, et donc ne change pas la valeur de la somme. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une permutation,

$$\sum_i \mu(A_{\sigma(i)}) = \mu\Big(\bigcup_i A_{\sigma(i)}\Big) = \mu\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i \mu(A_i). \tag{15.562}$$

Le théorème 12.97 dit alors que la somme doit être absolument convergente.

Théorème 15.199 (Radon-NikoDym complexe[51]).
Soit μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et ν une mesure complexe. Alors

(1) Il existe un unique couple de mesures complexes ν_a, ν_s sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tel que

(1a) $\nu = \nu_a + \nu_s$

(1b) $\nu_a \ll \mu$

(1c) $\nu_s \perp \mu$.

(2) Ces mesures satisfont alors $\nu_a \perp \nu_s$.

(3) Il existe une fonction intégrable $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\nu_a = h\mu$.

(4) La fonction h est unique à μ-équivalence près.

(5) Si de plus $\nu \ll \mu$ alors $\nu = h\mu$.

Démonstration. No proof. □

Remarque 15.200.
Le point (5) est souvent utilisé sous la forme

$$\nu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h(\omega) d\mu(\omega) = \int_A h(\omega) d\mu(\omega). \tag{15.563}$$

15.11.3 Théorème d'approximation

Lemme 15.201 ([249]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens[52] $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure finie μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soit un borélien A de Ω et $\epsilon > 0$.

Il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que

(1) $F \subset A \subset V$

(2) $\mu(V \backslash F) < \epsilon$.

Démonstration. Soit la famille $\mathcal{D}$ des parties D de Ω qui vérifient la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que $F \subset D \subset V$ et $\mu(V \backslash F) < \epsilon$.

Nous allons prouver que $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient tous les ouverts.

$\mathcal{D}$ contient les ouverts Soit un ouvert D. Nous posons

$$F_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } d(x, D^c) \geqslant 2^{-n}\}. \tag{15.564}$$

F_n est fermé Le lemme 7.103 montre que le complémentaire F_n^c est ouvert. Donc F_n est fermé.

$D \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ Si $x \in D$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset D$ (parce que D est ouvert). Donc $d(x, V^c) \geqslant \delta$. Donc $x \in F_n$ pour $2^{-n} < \delta$.

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset D$ Si $x \in F_n$, nous avons $d(x, D^c) > 0$, c'est-à-dire que x n'est pas dans D^c. Autrement dit, $x \in D$.

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = D$ Nous avons donc l'égalité

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n. \tag{15.565}$$

51. L'histoire du nom de ce théorème est intéressante. Lorsque monsieur et madame Rèmederdonnukodym apprirent que leurs amis, les Rèmedelaboulechevelue avaient appelé leur fils Théo, ils décidèrent d'en faire autant. C'est en souvenir de ces circonstances que monsieur Nikodym (prénommé Radon) décida de faire des math.

52. Définition 15.72.

Vu que $F_n \subset F_{n+1}$, le lemme 15.23(1) nous indique que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\Big) = \mu(D). \tag{15.566}$$

Étant donné que la mesure est finie, nous pouvons écrire cela sous la forme

$$\mu(D) - \mu(F_n) \to 0. \tag{15.567}$$

Pour chaque n nous avons l'encadrement

$$F_n \subset D \subset D \tag{15.568}$$

où F_n et D sont ouverts. Lorsque ϵ est donné, il suffit de prendre n assez grand pour avoir $\mu(D\backslash F_n) < \epsilon$ pour avoir un encadrement de D par un fermé et un ouvert (D lui-même) dont la différence des mesures est plus petite que e.

Tout cela pour dire que $D \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ est une tribu Il faut vérifier les trois points de la définition 15.1.

$\Omega \in \mathcal{D}$ Nous venons de voir que les ouverts sont dans $\mathcal{D}$. Or Ω est un ouvert.

$D \in \mathcal{D}$ **implique** $D^c \in \mathcal{D}$ Soit F fermé et V ouvert tels que $F \subset D \subset V$. Nous avons aussi

$$V^c \subset D^c \subset F^c \tag{15.569}$$

où V^c est fermé et F^c est ouvert. De plus $F^c\backslash = V\backslash F$ et donc

$$\mu(F^c\backslash V^c) = \mu(V\backslash F). \tag{15.570}$$

Nous pouvons donc choisir F et V pour avoir $\mu(F^c\backslash V^c) < \epsilon$.

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \in \mathcal{D}$ Soient $D_i \in t\mathcal{D}$. Pour chaque n nous posons

$$F_n \subset D_n \subset V_n \tag{15.571}$$

en choisissant V_n et F_n de telle sorte que $\mu(V_n\backslash F_n) < 2^{-n}\epsilon$.

Nous posons

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n, \tag{15.572}$$

et

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{15.573}$$

Chacun des Y_N est fermé en tant qu'union finie de fermés (lemme 7.3(2)). Mais Y ne l'est pas spécialement [53]. Le lemme 15.23 nous dit cependant que $\mu(Y) = \lim_{N\to\infty} \mu(Y_N)$.

Nous posons

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \tag{15.574}$$

ainsi que

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n. \tag{15.575}$$

La partie V est ouverte dans Ω comme union d'ouverts (c'est dans le définition d'une topologie). Nous avons, pour tout N, l'encadrement

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n \subset Y \subset D \subset V. \tag{15.576}$$

53. Par exemple $A_n = [1/n, 2]$ sont des fermés dont l'union est $]0, 2]$ qui n'est pas fermé.

Nous prouvons à présent que $\lim_{N\to\infty}\mu(V\backslash Y_N)=0$, de telle sorte que l'encadrement (15.576) dise que $D\in\mathcal{D}$.

D'abord nous avons

$$V\backslash Y\subset\bigcup_n(V_n\backslash F_n)\tag{15.577}$$

parce que si $x\in V\backslash Y$, alors $x\in V_i$ pour un certain i, mais vu que x n'est pas dans Y, il n'est dans aucun des F_n donc en particulier pas dans F_i et $x\in V_n\backslash F_i$.

Un peu de calcul :

$$\begin{aligned}\mu(V)-\mu(Y)&=\mu(V\backslash Y)&(15.578a)\\&\leqslant\mu\Big(\bigcup_n(V_n\backslash F_n)\Big)&(15.578b)\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\mu(V_n\backslash F_n)&(15.578c)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\epsilon&(15.578d)\\&=2\epsilon.&(15.578e)\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (15.578a), c'est le lemme 15.22.

— Pour (15.578b), c'est (15.577).

— Pour (15.578c), c'est le lemme 15.22(3).

— Pour (15.578e), c'est la série géométrique (12.144).

Nous choisissons maintenant N assez grand pour que $\mu(Y)-\mu(Y_N)<\epsilon$. Nous avons alors l'encadrement

$$Y_N\subset Y\subset D\subset V\tag{15.579}$$

avec

$$\mu(V\backslash Y_N)=\mu(V)-\mu(Y_N)=\underbrace{\mu(V)-\mu(y)}_{\leqslant 2\epsilon}+\mu(Y)-\mu(Y_N)\leqslant 2\epsilon+\epsilon=3\epsilon.\tag{15.580}$$

Nous avons donc montré que $\mathcal{D}$ était une tribu contenant les ouverts. Donc $\mathcal{D}$ contient tous les boréliens. □

Lemme 15.202 ([249])**.**
Soit un espace topologique métrique (Ω,d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega,\mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soient un ouvert $W\subset\Omega$ tel que $\mu(W)<\infty$ et un borélien A tel que $A\subset W$. Soit aussi $\epsilon>0$. Il existe un fermé F et un ouvert V tels que

(1) $\mu(V)<\infty$,

(2) $\mu(V\backslash F)<\epsilon$,

(3) et $F\subset A\subset V$.

Démonstration. Vu que la mesure de W est finie, nous considérons la mesure finie

$$\begin{aligned}\nu\colon\mathcal{B}\text{or}(\Omega)&\to[0,\mu(W)]\\B&\mapsto\mu(B\cap W).\end{aligned}\tag{15.581}$$

La partie A étant borélienne ; par le lemme 15.201, nous avons un fermé F et un ouvert V_1 ouvert tels que

$$F\subset A\subset V_1\tag{15.582}$$

et $\nu(V_1\backslash F)<\epsilon$. Nous posons $V=V_1\cap W$; vu que $A\subset W$ et $A\subset V_1$ nous avons aussi $A\subset V_1\cap W$ et donc l'encadrement

$$F\subset A\subset V\subset W. \tag{15.583}$$

En ce qui concerne la mesure :

$$\mu(V\backslash F)=\mu(V)-\mu(F)=\mu(V\cap W)-\mu(F\cap W)=\nu(B)-\nu(F)<\epsilon. \tag{15.584}$$

□

Théorème 15.203 (Théorème d'approximation, thème 2[249])**.**
Soit un espace topologique métrique (Ω,d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega,\mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soient un ouvert $W\subset\Omega$ tel que $\mu(W)<\infty$ et un un borélien A tel que $A\subset W$. Soit aussi $\epsilon>0$.

Il existe un fermé $F\subset W$ et une fonction $f\in C^0(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant

(1) $F\subset A\subset W$,
(2) $f|_F=1$,
(3) $f|_{W^c}=0$
(4) $\|f-\mathbb{1}_A\|_{L^1}<\epsilon$

Démonstration. Par le lemme 15.202, il existe un fermé F et un ouvert V tels que

$$F\subset A\subset V\subset W \tag{15.585}$$

et $\mu(V\backslash F)<\epsilon$. Nous posons alors

$$f(x)=\frac{d(x,V^c)}{d(x,V^c)+d(x,F)}. \tag{15.586}$$

Le dénominateur de cette expression ne s'annule jamais parce que si $d(x,V^c)=0$, c'est que $x\in V^c$. Mais alors x n'est pas dans V et donc pas dans F non plus. La partie F étant fermée, $d(x,F)>0$ par lemme 7.104. De plus la fonction f est continue par le lemme 7.105.

Pour (2) Si $x\in F$, alors $d(x,F)=0$, et f devient

$$f(x)=\frac{d(x,V^c)}{d(x,V^c)}=1 \tag{15.587}$$

Pour (3) Si $x\in W^c$, alors $x\in V^c$ et $d(x,V^c)=0$ si bien que $f(x)=0$.

Pour (4) Les premiers points montrent que

$$\mathbb{1}_F\leqslant f\leqslant\mathbb{1}_V. \tag{15.588}$$

Mais nous avons aussi, par ailleurs,

$$\mathbb{1}_F\leqslant\mathbb{1}_A leq\mathbb{1}_V. \tag{15.589}$$

Ces deux encadrement, par le lemme 1.114 donnent l'encadrement

$$|f-\mathbb{1}_A|\leqslant\mathbb{1}_V-\mathbb{1}_F. \tag{15.590}$$

En ce qui concernent les intégrales nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\mathbb{1}_A-f|&\leqslant\int_\Omega(\mathbb{1}_V-\mathbb{1}_F)d\mu && \text{(15.591a)}\\ &=\mu(V)-\mu(F) && \text{(15.591b)}\\ &<\epsilon. && \text{(15.591c)}\end{aligned}$$

Pour (15.591b), c'est le lemme 15.157.

□

15.12 Produit de mesures

Lemme 15.204 (Propriété des sections[246]).
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des tribus sur les ensembles Ω_1 et Ω_2. Si $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ alors pour tout $x \in \Omega_1$ et $y \in \Omega_2$, les ensembles

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A\} \tag{15.592a}$$
$$A_2(x) = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A\} \tag{15.592b}$$

sont mesurables.

Démonstration. Soit $y \in \Omega_2$; nous allons prouver le résultat pour $A_1(y)$. Pour cela nous notons

$$S = \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \text{ tel que } \forall y \in \Omega_2, A_1(y) \in \mathcal{A}_1\}, \tag{15.593}$$

et nous allons noter que S est une tribu contenant les rectangles. Par conséquent, S sera égal à $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Les rectangles Considérons le rectangle $A = X \times Y$ et si $y \in \Omega_2$ alors

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in X \times Y\}. \tag{15.594}$$

Donc soit $y \in Y$ alors $A_1(y) = X \in \mathcal{A}_1$, soit $y \notin Y$ et alors $A_1(y) = \varnothing \in \mathcal{A}_1$.

Tribu : ensemble complet Nous avons $\Omega_1 \times \Omega_2 \in S$ parce que c'est un rectangle.

Tribu : complémentaire Soit $A \in S$. Montrons que $A^c \in S$. Nous avons d'abord

$$(A^c)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A^c\}. \tag{15.595}$$

D'autre part

$$A_1(y)^c = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \notin A\} = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A^c\} = (A^c)_1(y). \tag{15.596}$$

Vu que $\mathcal{A}_1$ est une tribu et que par hypothèse $A_1(y) \in \mathcal{A}_1$, nous avons aussi $A_1(y)^c \in S$, et donc $(A^c)_1(y) \in \mathcal{A}_1$, ce qui prouve que $A^c \in S$.

Tribu : union dénombrable Soit une suite $A_n \in S$. Nous avons

$$(\bigcup_n A_n)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_n A_n\} \tag{15.597a}$$
$$= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A_n\} \tag{15.597b}$$
$$= \bigcup_n (A_n)_1(y), \tag{15.597c}$$

et ce dernier ensemble est dans $\mathcal{A}_1$ parce que c'est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}_1$.

Nous avons donc prouvé que S est une tribu contenant les rectangles, donc S contient au moins $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. □

Corollaire 15.205.
Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable[54] *sur $X \times Y$ alors pour chaque y dans Ω_2, la fonction*

$$\begin{aligned} f_y : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x,y) \end{aligned} \tag{15.598}$$

est mesurable.

54. Définition 15.41.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (i.e. un borélien), et $y \in \Omega_2$. Nous avons

$$f_y^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in X \text{ tel que } f(x,y) \in \mathcal{O}\} = A_1(y) \tag{15.599}$$

où

$$A = \{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ tel que } f(x,y) \in \mathcal{O}\} = f^{-1}(\mathcal{O}). \tag{15.600}$$

Ce dernier est mesurable parce que f l'est. □

Théorème 15.206 ([246] [55]).
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ deux espaces mesurés σ-finie. Soit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Alors les fonctions [56]

$$x \mapsto \mu_2\big(A_2(x)\big) \tag{15.601a}$$
$$y \mapsto \mu_1\big(A_1(y)\big) \tag{15.601b}$$

sont mesurables et

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_2\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y). \tag{15.602}$$

Démonstration. Nous supposons d'abord que μ_1 et μ_2 sont finies et nous notons $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur lequel le théorème est correct. Nous allons commencer par prouver que $\mathcal{D}$ est un λ-système.

λ-système : différence ensembliste Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Nous avons

$$(B\backslash A)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B\backslash A\} \tag{15.603a}$$
$$= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B\}\backslash\{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A\} \tag{15.603b}$$
$$= B_1(y)\backslash A_1(y). \tag{15.603c}$$

Vu que $A_1(y) \subset B_1(y)$ et que les mesures sont finies le lemme 15.22 nous donne

$$\mu_1\big((B\backslash A)_1(y)\big) = \mu_1\big(B_1(y)\big) - \mu_1\big(A_1(y)\big), \tag{15.604}$$

et similairement pour $1 \leftrightarrow 2$. Les deux fonctions (de y) à droite étant mesurables, nous avons la mesurabilité de la fonction $y \mapsto \mu_1\big((B\backslash A)_1(y)\big)$.
Prouvons la formule intégrale en nous rappelant que la formule (15.602) est supposée correcte pour A et B séparément :

$$\int_{\Omega_2} \mu_1\big((B\backslash A)_1(y)\big) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(B_1(y)\big) d\mu_2(y) - \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{15.605a}$$
$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big(B_2(x)\big) d\mu_1(x) - \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{15.605b}$$
$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big((B\backslash A)_2(x)\big) d\mu_1(x). \tag{15.605c}$$

λ-système : limite de suite croissante Soit (A_n) une suite croissante dans $\mathcal{D}$; nous posons $B_n = A_n\backslash A_{n-1}$ et $A_0 = \varnothing$ de telle sorte à travailler avec une suite d'ensembles disjoints qui satisfait $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$. Vu que la suite est croissante nous avons $A_{n-1} \subset A_n$ et donc $B_n \in \mathcal{D}$ par le point déjà fait sur la différence ensembliste. Nous avons :

$$\mu_1\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_n B_n\} \tag{15.606a}$$
$$= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B_n\} \tag{15.606b}$$
$$= \bigcup_n (B_n)_1(y). \tag{15.606c}$$

55. Modèle non contractuel : des notations et la définition de λ-système peuvent varier entre la référence et le présent texte.
56. Voir la notation du lemme 15.592.

Par conséquent, par la propriété (2) d'une mesure nous avons

$$\mu_1\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) = \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big). \tag{15.607}$$

En tant que somme de fonctions positives et mesurables, la fonction

$$y \mapsto \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) \tag{15.608}$$

est mesurable par la proposition 15.90. Il faut encore vérifier la formule intégrale. Le gros du boulot est de permuter une somme et une intégrale par le corollaire 15.163 :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) d\mu_2(y) &= \sum_n \int_{\Omega_2} \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) d\mu_2(y) && (15.609a)\\
&= \sum_n \int_{\Omega_1} \mu_2\big((B_n)_2(x)\big) d\mu_1(x) && (15.609b)\\
&= \int_{\Omega_1} \sum_n \mu_2\big((B_n)_2(x)\big) d\mu_1(x) && (15.609c)\\
&= \int_{\Omega_1} \mu_2\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) d\mu_1(x). && (15.609d)
\end{aligned}$$

Maintenant que $\mathcal{D}$ est un λ-système contenant les rectangles, le lemme 15.32 dit que la tribu engendrée par $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$) est le λ-système $\mathcal{D}$ lui-même.

La preuve est finie dans le cas de mesures finies. Nous commençons maintenant à prouver dans le cas où les mesures μ_1 et μ_2 sont seulement σ-finies. Nous considérons des suites croissantes $\Omega_{i,n} \to \Omega_i$ d'ensembles mesurables et de mesure finie : $\mu_i(\Omega_{i,n}) < \infty$. D'abord remarquons que

$$\mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x)\Big) = \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big)\mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}. \tag{15.610}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\heartsuit &= (A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x) && (15.611a)\\
&= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j}\} && (15.611b)\\
&= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\}. && (15.611c)
\end{aligned}$$

Si $y \in \Omega_{1,j}$ alors $\{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\} = \Omega_{2,j}$ et dans ce cas

$$\heartsuit = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \Omega_{2,j} = A_2(x) \cap E_{2,j}. \tag{15.612}$$

Et inversement, si $x \notin \Omega_{1,j}$ alors $\heartsuit = \varnothing$. Dans les deux cas nous avons (15.610).

Les ensembles $A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}$ étant de mesure finie, nous pouvons leur appliquer la première partie :

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_2(x)\Big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_1(y)\Big) d\mu_2(u), \tag{15.613}$$

ou encore

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big)\mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}(x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big(A_1(y) \cap \Omega_{1,j}\Big)\mathbb{1}_{\Omega_{2,j}}(y) d\mu_2(y). \tag{15.614}$$

Ce que nous avons dans ces intégrales sont (par rapport à j) des suites croissantes de fonction positives ; nous pouvons donc permuter une limite et une intégrale. En sachant que si $k \to \infty$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{1,j}(x) &\to 1 && (15.615a)\\
\mu_2\big(A_2(x) \cap \Omega_2, j\big) &\to \mu_2\big(A_2(x)\big), && (15.615b)
\end{aligned}$$

nous trouvons le résultat demandé. □

Théorème-définition 15.207 ([262, 263]).
Soient μ_i des mesures σ-finies sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$.

(1) Il existe une et une seule mesure, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ telle que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \tag{15.616}$$

pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

(2) Cette mesure est donnée par la formule[57]

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big)d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big)d\mu_2(y). \tag{15.617}$$

*Cette mesure est la **mesure produit** de μ_1 par μ_2.*

(3) La mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ ainsi définie est σ-finie.

Démonstration. La partie « existence » sera divisée en deux parties : l'une pour prouver que les formules (15.617) donnent une mesure et une pour montrer que cette mesure vérifie la condition (15.616).

Unicité L'ensemble des rectangles de $\Omega_1 \times \Omega_2$ engendre la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, est fermé par intersection et contient une suite croissante d'ensembles $P_n \times R_n$ de mesure finie ($\mu(P_n \times R_n) < \infty$) telle que $P_n \times R_n \to \Omega_1 \times \Omega_2$. Cette suite est donné par le fait que μ_1 et μ_2 sont σ-finies. En effet si (X_n) et (Y_n) sont des recouvrements dénombrables de Ω_1 et Ω_2 par des ensembles de mesure finie, en posant $P_n = \bigcup_{k=1}^n X_n$ et $R_n = \bigcup_{k=1}^n Y_n$ nous avons bien une suite croissante de rectangles qui tendent vers $\Omega_1 \times \Omega_2$. Avec ces rectangles en main, le théorème 15.33 donne l'unicité.

Les formules définissent une mesure Le théorème 15.206 dit que ces formules ont un sens et que l'égalité entre les deux intégrales est correcte. Nous prouvons à présent qu'elles déterminent effectivement une mesure sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

Pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mu(A) \geqslant 0$ parce que μ est donnée par l'intégrale d'une fonction positive.

En ce qui concerne la condition d'unions dénombrable disjointe, soient $A^{(i)}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$; nous commençons par remarquer que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right)_2 (x) = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x, y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\} \tag{15.618a}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x, y) \in A^{(i)}\} \tag{15.618b}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_2^{(i)}(x). \tag{15.618c}$$

Par conséquent,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right) = \int_{\Omega_1} \mu_2\left(\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\Big)_2(x)\right) d\mu_1(x) \tag{15.619a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big)d\mu_1(x) \tag{15.619b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big)d\mu_1(x). \tag{15.619c}$$

57. Voir les notations du lemme 15.204.

où nous avons utilisé l'additivité de la mesure μ_2. À ce niveau, il serait commode de permuter la somme et l'intégrale. Pour ce faire nous considérons la suite (croissante) de fonctions

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big). \tag{15.620}$$

Nous pouvons permuter la limite et l'intégrale grâce au théorème de la convergence monotone 15.160 ; ensuite la somme se permute avec l'intégrale en tant que somme finie :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} \big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x) \tag{15.621a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A^{(i)}) \tag{15.621b}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A^{(i)}). \tag{15.621c}$$

Elles vérifient la condition Prouvons que les formules (15.617) se réduisent à (15.616) dans le cas des rectangles. Soit donc $A = X_1 \times X_2$ avec $X_i \in \mathcal{A}_i$. Alors

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \in X_1 \times X_2\} \tag{15.622}$$

et

$$\mu_1\big(A_1(y)\big) = \mathbb{1}_{X_2}(y)\mu_1(X_1), \tag{15.623}$$

donc

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{15.624a}$$

$$= \int_{\Omega_2} \mu_1(X_1)\mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) \tag{15.624b}$$

$$= \mu_1(X_1) \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) \tag{15.624c}$$

$$= \mu_1(X_1)\mu_2(X_2). \tag{15.624d}$$

Pour cela nous avons utilisé le fait que l'intégrale de la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable est la mesure de cet ensemble.

□

Définition 15.208 (Produit d'espaces mesurés)**.**
*Si $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ sont deux espaces mesurés, l'**espace produit** est l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2$ muni de la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de la définition 15.112 et de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ définie par le théorème 15.207.*

Remarque 15.209.
Il n'est pas garantit que la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ soit la tribu la plus adaptée à l'ensemble $S_1 \times S_2$. Dans le cas de $\mathbb{R}^N$, il se fait que c'est le cas : en prenant des produits des boréliens sur $\mathbb{R}$ on obtient bien les boréliens sur $\mathbb{R}^N$, voir proposition 15.116.

15.13 Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Définition 15.210 (Mesure de Lebesgue)**.**
En plusieurs étapes.

(1) D'abord nous avons la mesure λ_N sur $\mathbb{R}^n$ définie sur

$$\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big) \tag{15.625}$$

comme le produit $\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$ via la définition 15.208.

(2) *Ensuite nous nous souvenons du corollaire 15.116 qui donne λ_N comme une mesure sur*

$$\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N)\big). \tag{15.626}$$

(3) *Et enfin nous considérons la completion de la mesure λ_N (théorème 15.57), que nous notons encore λ_N.*

Proposition 15.211 ([250]).
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable et disjointe de cubes semi-ouverts.

Démonstration. Nous allons même montrer que ces cubes peuvent être choisis sur un quadrillage.

Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{Q_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ un découpage de $\mathbb{R}^n$ en cubes semi-ouverts de côté 1 et dont les sommets sont en les coordonnées entières. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n}[n_i, n_i+1[\tag{15.627}$$

où les n_i sont des entiers. Ce sont des cubes disjoints. Nous considérons ensuite pour chaque $k>1$ le découpage $\{Q_i^{(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ en cubes de côtés 2^{-k} qui consiste à découper en 2 les côtés des cubes du découpage $Q^{(k-1)}$. Ces cubes forment encore un découpage dénombrable de $\mathbb{R}^n$ en des cubes disjoints. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n}[\frac{n_i}{2^k}, \frac{n_i+1}{2^k}[\tag{15.628}$$

où les n_i sont encore entiers. Ensuite nous considérons $\mathcal{E}$ l'union de tous les $Q_i^{(k)}$ contenus dans G.

Montrons que $\mathcal{E}=G$. D'abord $\mathcal{E}\subset G$ parce que $\mathcal{E}$ est une union d'ensembles contenus dans G. Ensuite si $x\in G$, il existe une boule de rayon r autour de x contenue dans G ; alors un des ensembles $Q_i^{(k)}$ avec $2^{-j}<\frac{r}{2}$ est contenue dans $B(x,r)$ et donc dans $\mathcal{E}$.

Bien entendu l'union qui donne $\mathcal{E}$ n'est pas satisfaisante par ce que les $Q_i^{(k+1)}$ sont contenus dans les $Q_i^{(k)}$; les intersections sont donc loin d'être vides.

Nous faisons ceci :

$$R^{(0)} = \{Q_i^{(1)} \text{contenu dans } G\} \tag{15.629a}$$
$$R^{(k+1)} = \{Q_i^{(k+1)} \text{contenus dans } G \text{ et pas dans } R^{(k)}\}. \tag{15.629b}$$

En fin de compte l'union de tous les ensembles contenus dans les $R^{(k)}$ forment encore $\mathbb{R}^n$, mais sont d'intersection vide. □

Les cubes dont il est question dans cette preuve, de côtés 2^{-k} sont souvent appelés des cubes **dyadiques**.

Corollaire 15.212 ([250]).
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable de cubes presque disjoints[58].

Démonstration. Il suffit de prendre les cubes de la proposition 15.211 et de les fermer. Ce que l'on ajoute est de mesure nulle. □

Remarque 15.213.
La proposition 15.211 est une propriété seulement de la topologie de $\mathbb{R}^n$ alors que le corollaire fait intervenir la mesure de Lebesgue parce qu'il faut bien dire que les intersections sont de mesure (de Lebesgue) nulle.

58. « presque » au sens où les intersections éventuelles sont de mesure de Lebesgue nulle.

15.13.1 Ensembles négligeables

Lemme 15.214 ([264]).
L'image d'une partie négligeables de $\mathbb{R}^N$ par une application Lipschitz est négligeable.

Démonstration. Soit N une partie négligeable de $\mathbb{R}^N$ et une application Lipschitz $f\colon N \to \mathbb{R}^N$. Soit $Q \subset \mathbb{R}^N$ un cube borné de côté r. Pour tout $x, x' \in N \cap Q$ nous avons

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant C\|x - x'\| \leqslant Cr. \tag{15.630}$$

Donc $f(N \cap Q)$ est dans une boule de rayon Cr. Mais comme toutes les normes sont équivalentes [59] sur $\mathbb{R}^N$ nous pouvons tout aussi bien prendre la norme $\|.\|_1$ au lieu de la norme $\|.\|_2$ (qui est toujours la norme prise implicitement lorsqu'on parle de $\mathbb{R}^n$), de telle sorte que les boules soient des cubes. Quoi qu'il en soit, $f(N \cap Q)$ est contenu dans un cube de côté $2Cr$ et au niveau de la mesure extérieure,

$$m^*\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2Cr)^N = (2C)^N r^N, \tag{15.631}$$

ou encore

$$m\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2C)^N m(Q) \tag{15.632}$$

parce que r^N est la mesure du cube Q.

Soit maintenant $\epsilon > 0$; vu que N est négligeable, il existe un ouvert U contenant N et tel que $m(U) < \epsilon$. Ce U est une union presque disjointe de cubes dyadiques (Q_n) par le corollaire 15.212. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
m^*\big(f(N)\big) &= m^*\big(f(\bigcup_n N \cap Q_n)\big) && \text{(15.633a)}\\
&= m^*\big(\bigcup_n f(N \cap Q_n)\big) && \text{(15.633b)}\\
&\leqslant \sum_n m^*(f(N \cap Q_n)) && \text{(15.633c)}\\
&\leqslant \sum_n (2C)^N m(Q_n) && \text{(15.633d)}\\
&= (2C)^N m(U) && \text{(15.633e)}\\
&< (2C)^d \epsilon. && \text{(15.633f)}
\end{aligned}$$

Au final, $m^*\big(f(N)\big) \leqslant (2C)^N \epsilon$. L'ensemble N est donc négligeable parce que le lemme 15.63 le dit : $m^*(N) = 0$. □

Corollaire 15.215.
Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ est négligeable.

Démonstration. Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k < N$ est l'image de

$$A = \{t_1 e_1 + \cdots + t_k e_k \text{ tel que } t_i \in \mathbb{R}\} \tag{15.634}$$

par une application linéaire. Ce A est un pavé de mesure de Lebesgue nulle. Donc l'image est négligeable par le lemme 15.214. □

15.13.2 Parties et fonctions mesurables

Pour rappel, la notion d'application de classe C^1 est donnée par la définition 12.134.

Proposition 15.216.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $E \subset U$ est mesurable, alors $\phi(E)$ est mesurable [60].

59. Proposition 12.5
60. Ici « mesurable » parle de mesurabilité au sens de la tribu de Lebesgue, c'est-à-dire pas seulement les boréliens.

Démonstration. Si E est mesurable, il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $E = B \cup N$. Vu que ϕ est un homéomorphisme, l'application ϕ^{-1} est borélienne parce que continue (théorème 15.49). Nous avons

$$\phi(B) = (\phi^{-1})^{-1}(B), \tag{15.635}$$

c'est-à-dire que $\phi(B)$ est l'image inverse de B par ϕ^{-1}. L'ensemble $\phi(B)$ est donc borélien.

Il reste à voir que $\phi(N)$ est négligeable. Soit $Q \subset U$ une cube compact. L'application $d\phi\colon Q \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est continue et donc bornée (par la remarque 12.135) sur le compact Q. Par les accroissements finis (théorème 12.151), l'application ϕ est donc Lipschitz sur Q. La partie $\phi(N \cap Q)$ est alors négligeable par le lemme 15.214. Pour conclure,

$$\phi(N) = \bigcup_i \phi(N \cap Q_i) \tag{15.636}$$

où les Q_i sont tous des cubes compacts. Donc $\phi(N)$ est une union dénombrable d'ensembles négligeables ; ergo négligeable lui-même par le lemme 15.55. □

Proposition 15.217.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors $f \circ \phi\colon U \to \mathbb{C}$ l'est.

Démonstration. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{C}$. Il nous faut prouver que

$$(f \circ \phi)^{-1}(A) = \phi^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \tag{15.637}$$

soit mesurable. Par hypothèse , $f^{-1}(A)$ est mesurable. Vu que ϕ est un C^1-difféomorphisme, elle et son inverse sont mesurables par la proposition 15.216. Donc l'image du mesurable $f^{-1}(A)$ par ϕ^{-1} est encore mesurable. □

15.13.3 Propriétés d'unicité

Corollaire 15.218.
La mesure λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N))$ à satisfaire

$$\mu\Big(\prod_{i=1}^{N}[a_i, b_i]\Big) = \prod_{i=1}^{n}|a_i - b_i| \tag{15.638}$$

Démonstration. Par définition de la mesure produit, λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}))$ à satisfaire la condition. La proposition 15.116 conclut. □

Vu que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (théorème 8.9), et que tout borné est dans un tel produit d'intervalle, la mesure de Lebesgue est une mesure de Borel (définition 15.80(1)).

Théorème 15.219 ([265])**.**
La mesure de Lebesgue est invariante par translation. Autrement dit si A est mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et si $a \in \mathbb{R}^n$ alors $A + a$ est mesurable et

$$\lambda_N(A + a) = \lambda_N(A). \tag{15.639}$$

Démonstration. Nous supposons que A est borélien ; sinon il l'est à ensemble négligeable près. Nous notons t_a la translation et nous nommons μ la mesure donnée par

$$\mu(A) = \lambda_N(A + a). \tag{15.640}$$

Vu que

$$\mu\Big(\prod_{n=1}^{N}[r_n, s_n[\Big) = \lambda_N\Big(\prod_i [r_n + a_n, s_n + a_n[\Big) = \prod_i |s_n - r_n|. \tag{15.641}$$

Vu qu'il y a unicité de la mesure vérifiant cette propriété (corollaire 15.218), nous avons $\mu = \lambda_N$. □

Pour la suite nous notons Q_0 le cube unité de $\mathbb{R}^N$: $Q_0 = \big([0,1[\big)^N$.

Théorème 15.220 ([265]).
Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que

(1) μ soit invariante par translation (des boréliens),

(2) $\mu(Q_0) = 1$.

Alors $\mu = \lambda_N$.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture nous faisons $N = 2$. Notre but est de prouver que $\mu([0,r[\times [0,r'[) = rr'$ pour tout $r, r' \in \mathbb{R}$.

Longueur $=1/J$ Soient J, K des entiers. Nous pouvons diviser le cube Q_0 en rectangles de côtés $1/J$ et A/K :

$$Q_0 = \bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} [\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}[\times [\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}[\tag{15.642}$$

où l'union est disjointe. En ce qui concerne la mesure nous commençons par utiliser la sous-additivité :

$$\mu(Q_0) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \mu\left([\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}[\times [\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}[\right). \tag{15.643}$$

Nous utilisons ensuite, sur chacun des termes séparément l'invariance par translation selon les vecteurs $(\frac{j-1}{J}, 0)$ et $(0, \frac{k-1}{K})$:

$$1 = \mu(Q_0) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \mu\left([0, \frac{1}{J}[\times [0, \frac{1}{K}[\right) = JK\mu\mu\left([0, \frac{1}{J}[\times [0, \frac{1}{K}[\right), \tag{15.644}$$

et donc

$$\mu\left([0, \frac{1}{J}[\times [0, \frac{1}{K}[\right) = \frac{1}{J} \times \frac{1}{K}. \tag{15.645}$$

Longueur L/K Soient L, M des entiers et calculons :

$$\mu\left([\frac{0}{J}, \frac{L}{J}[\times [\frac{0}{K}, \frac{M}{K}[\right) = \sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant L-1\\ 0\leqslant m\leqslant M-1}} \mu\left([\frac{l}{J}, \frac{l+1}{J}[\times [\frac{m}{K}, \frac{m+1}{K}[\right) \tag{15.646a}$$

$$= LM\mu\left([\frac{0}{J}, \frac{1}{J}[\times [\frac{0}{K}, \frac{1}{K}[\right) \tag{15.646b}$$

$$= LM \times \frac{1}{J} \times \frac{1}{K}. \tag{15.646c}$$

Nous avons donc, pour tout J, K, L, M :

$$\mu\left([0, \frac{L}{J}[\times [0, \frac{M}{K}[\right) = \frac{L}{J} \times \frac{M}{K}, \tag{15.647}$$

c'est-à-dire que pour tout $r, s \in \mathbb{Q}^+$ nous avons

$$\mu\big([0,r[\times [0,s[\big) = rs. \tag{15.648}$$

Longueur réelle Nous passons au cas de longueur réelle. Soit $a > 0$ et une suite croissante de rationnels $r_n \to a$. Une telle suite existe par la proposition 8.4. Nous avons $[0,a[= \bigcup_{n\geqslant 1}[0,r_n[$ où l'union n'est pas disjointe mais croissante, ce qui permet d'utiliser le lemme 15.23(1) pour écrire

$$\mu\big([0,a[\big) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1}[0,r_n[\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\big([0,r_n[\big) = \lim_{n\to\infty} r_n = a. \tag{15.649}$$

Enfin, si $a, a' \in \mathbb{R}$, l'invariance par translation donne

$$\mu\big([a,a'[\big) = \mu\big([0,a'-a[\big) = a'-a. \tag{15.650}$$

Par unicité de la mesure ayant cette propriété, nous avons $\mu = \lambda_N$. □

Corollaire 15.221.
Si μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ invariante par translation et telle que $\mu(Q_0) = C < \infty$ alors $\mu = C\lambda_N$.

Démonstration. Si $C > 0$ nous considérons la mesure $\frac{1}{C}\mu$ qui vérifie $(\frac{1}{C}\mu)(Q_0) = 1$. En conséquence du théorème 15.220, $\frac{1}{C}\mu = \lambda_N$ et $\mu = C\lambda_N$.

Si au contraire $C = 0$ alors nous pouvons paver $\mathbb{R}^N$ avec des cubes Q_i de côté 1 qui ont tous mesure 0. Par conséquent, $\mathbb{R}^N = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, donc $\mu(\mathbb{R}^N) = \sum_i \mu(Q_i) = 0$. Par conséquent $\mu = 0$ parce que toute partie de $\mathbb{R}^N$ a une mesure au maximum égale à celle de $\mathbb{R}^N$. □

15.13.4 Régularité

Les différentes notions de régularité pour une mesure sont données dans la définition 15.80. Ce sont essentiellement des questions de compatibilité entre la mesure et la topologie.

Proposition 15.222.
La mesure de Lebesgue est une mesure de Radon sur tout ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Démonstration. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^N$. C'est localement compact et dénombrable à l'infini. Il suffit de prouver que λ_N est de Borel sur V pour que le théorème 15.81 conclue à la régularité de la mesure de Lebesgue.

Soit K un compact de V. Par la proposition 7.60 c'est également un compact de $\mathbb{R}^N$. Par conséquent K est dans un pavé fermé de $\mathbb{R}^N$ du type

$$K \subset \prod_{n=1}^{N} [a_n, b_n] \tag{15.651}$$

et donc en passant par le corollaire 15.218,

$$\lambda_N(K) \leqslant \prod_{i=1}^{N} (b_n - a_n) < \infty. \tag{15.652}$$

Nous avons démontré que λ_N reste fini sur tout compact de V. □

15.14 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Un lemme qui a l'air de rien, mais qui au final est souvent utilisé ; tellement qu'on l'oublie un peu.

Lemme 15.223 ([1])**.**
Soit un compact K de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors l'intégrale

$$\int_K f \tag{15.653}$$

existe et est finie.

Démonstration. Vu que f est continue sur le compact K, elle y atteint une borne supérieure[61] que nous nommons M.

Soit R tel que $B(0,R)$ contienne K. La fonction $(M+1)\mathbb{1}_{B(0,R)}$ majore strictement f sur le mesurable $B(0,R)$. L'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (15.424) de l'intégrale de f contient donc au moins le nombre fini $(M+1)\mu(K)$. Le supremum existe et est fini (proposition 1.122). □

61. Nous ne nous lasserons jamais de citer le théorème de Weierstrass 7.99.

15.14.1 Quelque limites dans les bornes

Dans le cas de l'intégrale de Lebesgue définie par 15.151, si f est une fonction sur $\mathbb{R}$ et si λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une définition directe de

$$\int_0^\infty f\lambda. \tag{15.654}$$

Nous sommes cependant en droit de nous demander si nous n'aurions pas également ceci :

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f\lambda = \int_0^\infty f d\lambda. \tag{15.655}$$

Lorsque l'intégrale considérée est celle de Riemann, l'égalité (15.655) est une définition. Ici, ça va être une propriété.

15.224.
Tant que nous sommes à parler de limites dans les bornes, nous aurions pu vouloir, pour les séries, suivre le chemin suivant :

— Définir l'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré.
— Prendre au passage le cas particulier $\sum_{k=0}^\infty a_k = \int_{\mathbb{N}} a$ où $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ est une fonction mesurable pour la mesure de comptage.
— Démontrer qu'avec ces définitions, $\sum_{k=0}^\infty = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^N a_k$.

Or le dernier point est pris comme définition et son égalité avec l'intégrale pour la mesure de comptage est une propriété[62]. Pourquoi ? Parce que la définition 15.20 de mesure positive demande déjà d'avoir défini les sommes sur $\mathbb{N}$.

Lemme 15.225.
Soit une partie mesurable $A\subset\mathbb{R}^+$ de mesure finie. Alors

$$\lim_{M\to 0}\lambda\big(A\cap[M,\infty[\big) = 0. \tag{15.656}$$

Démonstration. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \lambda\big(A\cap[x,\infty[\big) \end{aligned} \tag{15.657}$$

est décroissante et bornée vers le bas par 0. Elle possède dont une limite $\ell\geqslant 0$ (corollaire 8.37). Nous allons prouver que $\ell = 0$ en calculant la limite sur les entiers.

Nous posons $J_k = [k,k+1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$ nous avons :

$$f(n) = \lambda\big(A\cap[n,\infty[\big) \tag{15.658a}$$
$$= \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^\infty (A\cap J_k)\Big) \tag{15.658b}$$
$$= \sum_{k=n}^\infty \lambda(A\cap J_k). \tag{15.658c}$$

Mais nous savons par hypothèse sur la mesure de A que

$$\lambda(A) = \sum_{k=0}^\infty \lambda(A\cap J_k) < \infty. \tag{15.659}$$

Donc $f(n)$ est une queue de série convergente. Elle tend donc vers zéro par le lemme 12.67. C'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0. \tag{15.660}$$

Et comme $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe et vaut ℓ, la seule possibilité est $\ell = 0$. □

62. Proposition 15.228.

Lemme 15.226.
Soit une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$. Alors

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^\infty f d\lambda = 0. \tag{15.661}$$

Démonstration. Nous posons

$$F(x) = \int_x^\infty f d\lambda. \tag{15.662}$$

Nous commençons par prouver que c'est une fonction décroissante. En effet,

$$F(x) - F(x+a) = \int_x^\infty f - \int_{x+a}^\infty f = \int_x^{x+a} f + \int_{x+a}^\infty f - \int_{x+a}^\infty = \int_x^{a+a} f \geqslant 0. \tag{15.663}$$

Nous avons utilisé 15.173.

Vu que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, nous avons $F(x)\geqslant 0$ pour tout x. La fonction F est décroissante et bornée vers le bas. Donc elle a une limite :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \ell \geqslant 0. \tag{15.664}$$

Supposons $\ell > 0$ et posons $0<\epsilon<\ell$. Soit M tel que pour tout $x>M$ nous ayons

$$\int_x^\infty f > m. \tag{15.665}$$

Soit $a\in\mathbb{R}^+$ tel que

$$|\int_a^\infty f(t) - \ell\, dt| < \epsilon. \tag{15.666}$$

En vertu de (15.665) nous considérons $a_0 > a$ tel que

$$\int_{a_0}^\infty f = I_0 > m. \tag{15.667}$$

Nous construisons la suite strictement croissante (a_k) de la façon suivante :

$$\int_{a_k}^\infty f = I_k > m \tag{15.668}$$

et

$$|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f - I_k| < \epsilon. \tag{15.669}$$

Donc pour k nous avons

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant I_k - \epsilon \geqslant m - \epsilon. \tag{15.670}$$

Mais

$$\int_{a_0}^\infty = \sum_{k=0}^\infty \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant \sum_k (m-\epsilon) = \infty. \tag{15.671}$$

Nous avons une contradiction. □

15.14.2 Mesure de comptage et série

Définition 15.227 (mesure de comptage)**.**
*Soit $(S,\mathcal{F})$ un ensemble mesurable. La **mesure de comptage** sur $(S,\mathcal{F})$ est la mesure définie par*

$$m(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.672}$$

Cette mesure est utilisée pour voir des séries comme des intégrales sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

Proposition 15.228.
Soit l'espace mesuré $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m\big)$ [63]. *Nous considérons une suite* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

(1) *L'intégrale* $\int_{\mathbb{N}} a\,dm$ *existe si et seulement si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *existe.*

(2) *Si* $\int_{\mathbb{N}} a\,dm$ *existe, alors*

$$\int_{\mathbb{N}} a\,dm = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{15.673}$$

Exemple 15.229
La mesure de comptage m sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu de ses parties est σ-finie parce que $E_n = \{0, \dots, n\}$ est de mesure finie et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{N}$. △

Exemple 15.230
L'intervalle $I = [0, 1]$ muni de la tribu de toutes ses parties et de la mesure de comptage est un espace mesuré non σ-fini. △

15.14.3 Théorème de la moyenne

Théorème 15.231 ([1]).
Soit Q *un compact connexe par arcs et une fonction continue* $f\colon Q \to \mathbb{R}$. *Si* λ *est la mesure de Lebesgue, alors il existe* $a \in Q$ *tel que*

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda \tag{15.674}$$

Démonstration. En posant $I = \int_Q f d\lambda$ nous avons immédiatement

$$\min(f)\lambda(Q) \leqslant I \leqslant \max(f)\lambda(Q) \tag{15.675}$$

où le minimum et le maximum existent parce que f est continue sur un compact. Si une des deux inégalités est une égalité alors la fonction est constante. En effet supposons que la première inégalité soit une égalité ; si la fonction n'était pas constante, il existerait une boule sur laquelle f serait strictement supérieure à $\min(f)$. En intégrant d'abord sur cette boule et ensuite sur le complémentaire nous obtenons une intégrale plus grande que $\min(f)\lambda(Q)$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha, \beta \in Q$ tels que $f(\alpha) \leqslant \min(f) + \epsilon$ et $f(\beta) \geqslant \max(f) - \epsilon$. Soit $\gamma\colon [0, 1] \to Q$ un chemin continu tel que $\gamma(0) = \alpha$ et $\gamma(1) = \beta$. La fonction $f \circ \gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ est alors continue et vérifie $(f \circ \gamma)(0) \leqslant \min(f) + \epsilon$ et $(f \circ \gamma)(1) \geqslant \max(f) - \epsilon$.

Si ϵ est assez petit et vu que les inégalités (15.675) sont strictes,

$$\lambda(Q)(f \circ \gamma)(0) \leqslant \min(f)\lambda(Q) + \epsilon\lambda(Q) < I < \max(f)\lambda(Q) - \epsilon\lambda(Q) \leqslant \lambda(Q)(f \circ \gamma)(1). \tag{15.676}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires 13.50, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\lambda(Q)(f \circ \gamma)(t_0) = I$. Le point $a = \gamma(t_0)$ vérifie

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda. \tag{15.677}$$

□

63. La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est donnée en la définition 15.227.

15.14.4 Primitives et intégrales

En termes de notations, si $a < b$ nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f. \tag{15.678}$$

Si par contre $a > b$ nous posons $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Proposition 15.232 (Primitive et intégrale[173])**.**
Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et continue sur $]a,b[$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{[a,x]} f(t)dt. \end{aligned} \tag{15.679}$$

est l'unique primitive de f sur $]a,b[$ s'annulant en $x = a$.

Démonstration. Nous devons prouver que F est dérivable et que pour tout $x_0 \in]a,b[$ nous avons $F'(x_0) = f(x_0)$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha(h) \tag{15.680}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Cette dernière limite signifie qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $|\alpha(h)| < \epsilon$ pour tout h tel que $|h| < \delta$, c'est-à-dire pour tout $h \in B(0,\delta)$. À partir de maintenant nous ne considérons plus que de tels h.

Notre travail maintenant est de prouver que F est dérivable en x_0, et de montrer que la dérivée est $f(x_0)$. Pour cela,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \tag{15.681a}$$

$$= \int_0^h f(x_0 + t)dt \tag{15.681b}$$

$$= \int_0^h \big[f(x_0) + \alpha(t)\big]dt \tag{15.681c}$$

$$= hf(x_0) + \int_0^h \alpha(t)dt. \tag{15.681d}$$

Nous avons donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ (défini via la fonction α) tel que $|h| < \delta$ implique

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon. \tag{15.682}$$

Cela signifie que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0), \tag{15.683}$$

qui n'est rien d'autre que le fait que F est dérivable en x_0 et que sa dérivée est $f(x_0)$.

Le fait que F s'annule en $x = a$ est par sa définition. L'unicité provient du corollaire 13.136. □

Théorème 15.233 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I contenant strictement l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{15.684}$$

Démonstration. Nous avons vu par la proposition 15.232 que la fonction

$$\begin{aligned} G\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \tag{15.685}$$

était l'unique primitive de f sur $]a,b[$ à s'annuler pour $x=a$. Nous avons évidemment

$$\int_a^b f(t)dt = G(b). \tag{15.686}$$

Si F est une primitive quelconque, il suffit de soustraire sa valeur en $x=a$: $G(x)=F(x)-F(a)$ et donc

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b)-F(a), \tag{15.687}$$

comme il fallait le prouver. □

Le théorème fondamental s'écrit souvent sous la forme [64]

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt. \tag{15.688}$$

Sous cette forme, il faut penser que nous calculons $f(x)$ en un point pas trop éloigné de a, en sachant $f(a)$ et en intégrant la dérivée entre les deux.

Remarque 15.234.
Le lien entre primitive et intégrale est fondamentalement lié à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, et non à la construction précise de cette mesure. Mais en même temps, la mesure de Lebesgue est l'unique à être invariante par translation.

Quelque remarques.

(1) Le théorème fondamental du calcul intégral est à utiliser pour calculer des intégrales des fonctions réelle lorsqu'on a des primitives sur un domaine strictement plus large que le domaine sur lequel nous voulons intégrer.
(2) Une version pour les intégrales impropres sera donnée au corollaire 15.247.
(3) Une primitive est forcément une fonction continue parce qu'une primitive est dérivable.
(4) Le théorème fondamental du calcul intégral ne sert pas qu'à calculer des intégrales à partir de primitives. Il sert aussi à démontrer des résultats plus théoriques, comme le théorème 13.297.
(5) En vertu du corollaire 13.136, une fonction ne possède qu'une seule primitive à constante près.

15.14.5 Exemples et applications

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et y admettant des primitives, nous notons

$$\int f(x)dx \tag{15.689}$$

l'ensemble des primitives de f sur I :

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C \text{ tel que } C\in\mathbb{R}\} \tag{15.690}$$

où F est une quelconque primitive de f.

64. Par exemple dans les théorèmes du reste des polynômes de Taylor 16.34 et de Cauchy-Lipschitz 18.40.

Exemple 15.235
Une primitive bien connue de $f : x \mapsto x^2$ est la fonction $F : x \to \frac{x^3}{3}$. Nous écrivons donc

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \tag{15.691}$$

Cela est un abus de notations terrible pour dire en réalité

$$\{x \mapsto \frac{x^3}{3} + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\}. \tag{15.692}$$

△

En termes de notations, nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \tag{15.693}$$

Remarque 15.236.
La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive qu'on choisi pour le calculer, car si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 = F_2 + C$ et $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

Remarque 15.237.
Si l'intervalle d'intégration est réduit à un seul point alors la valeur de l'intégrale est zéro. Nous le savions déjà, et cela est cohérent avec le théorème fondamental car $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$.

Remarque 15.238.
Toute intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle.

Proposition 15.239 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés E et F où F est de dimension finie[65]*. Nous considérons une fonction $f : E \to F$ de classe C^1 ainsi qu'un chemin $\gamma : [0,1] \to E$ de classe C^1 également.*

Alors nous avons l'égalité

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big). \tag{15.694}$$

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to F \\ t &\mapsto (f \circ \gamma)(t). \end{aligned} \tag{15.695}$$

Cette fonction vérifie $g'(t) = (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)$ par le lemme 13.222. Le théorème fondamental du calcul intégral[66] nous permet donc d'écrire

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \int_0^1 g'(t)df = g(1) - g(0). \tag{15.696}$$

Notons que g est continue grâce aux hypothèses de classe C^1 pour γ et f. □

15.14.6 Permuter limite et dérivée

15.240.
Voici une preuve alternative du théorème 13.297. Elle utilise des intégrales ; elle demande donc plus de dependences.

65. Sinon l'intégrale dont nous allons parler n'est pas définie au sens où nous n'en avons pas donné de définition. Voir 15.174.
66. Théorème 15.233.

Théorème 15.241 ([173]).
Soient une suite de fonctions $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

(1) *f_i est de classe C^1 pour tout i,*
(2) *$f_i \to f$ simplement,*
(3) *$f_i' \to g$ uniformément sur tout compact.*

Alors

(1) *f est de classe C^1,*
(2) *$f' = g$,*
(3) *$f_i \to f$ uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Nous commençons par considérer $x_0 \in \mathbb{R}$ et un intervalle compact K contenant x_0. Nous montrons que $f'(x_0) = g(x_0)$ en plusieurs étapes.

Une formule intégrale Par hypothèse, les fonctions f_i sont continues (en particulier sur un ouvert contenant K), et le théorème fondamental de l'analyse 15.233 donne

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_i'(t)dt \tag{15.697}$$

pour tout $x \in K$. Nous avons envie de prendre la limite $i \to \infty$ en permutant la limite avec l'intégrale. Pour cela nous allons utiliser la convergence dominée de Lebesgue.

Convergence dominée La convergence uniforme sur tout compact des fonctions continues f_i' vers g donne la continuité de g, théorème 13.280. En particulier g est bornée et donc intégrable sur le compact $[x_0, x]$. Mais il en faut plus pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 15.184). Soit $a > 0$; il existe N tel que pour tout $i > n$ nous ayons $\|f_i' - g\| < a$. Avec cela nous avons

$$|f_i'(x)| < |g(x)| + a \tag{15.698}$$

pour tout $x \in K$. En particulier, la fonction $x \mapsto g(x) + a$ fonctionne pour la convergence dominée et nous pouvons permuter la limite et l'intégrale dans (15.697).

Passage à la limite En passant à la limite $i \to \infty$ dans (15.697) nous trouvons

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt. \tag{15.699}$$

Premières conclusions Il suffit maintenant de prendre la dérivée de (15.699) au point $x = x_0$ grâce à la proposition 15.232 :

$$f'(x_0) = g(x_0). \tag{15.700}$$

Cela nous donne l'égalité $f = g$ parce que x_0 était arbitraire.

De plus g est continue comme limite uniforme des fonctions continues f_i'. Plus précisément, pour voir la continuité de g en x_0, prendre un ouvert borné $B(x_0, r)$ autour de x_0, et ensuite un compact K contenant cet ouvert. La convergence uniforme $f_i' \to g$ sur K implique la convergence uniforme sur $B(x_0, r)$ et donc la continuité sur $B(x_0, r)$ (théorème 13.280).

$f_i \to f$ uniforme sur tout compact Un compact n'étant pas spécialement connexe, nous ne pouvons pas reprendre le travail fait jusqu'ici sans prendre une petite précaution. Soit un compact L. Cette partie de $\mathbb{R}$ étant bornée[67], nous pouvons prendre r assez grand pour que $L \subset \overline{B(0, r)}$. Nous posons $K = \overline{B(0, r)}$ et nous prouvons la convergence uniforme $f_i \to f$ sur K. A fortiori, cela donnera la convergence uniforme sur L.

67. Par le théorème de Borel-Lebesgue 8.9

Prenons la différence entre (15.699) et (15.697) :

$$|f(x)-f_i(x)| = \Big|f(x_0)-f_i(x_0)+\int_{x_0}^{x} g(t)-f_i'(t)dt\Big| \tag{15.701a}$$

$$\leqslant |f(x_0)-f_i(x_0)| + \Big|\int_{x_0}^{x} |g(t)-f_i'(t)|dt\Big| \tag{15.701b}$$

$$\leqslant |(f-f_i)(x_0)| + |x-x_0|\|g-f_i'\|_K. \tag{15.701c}$$

Notez les valeurs absolues autour de l'intégrale dans (15.701b). Elles sont nécessaires parce que x est dans un voisinage de x_0, sans que nous sachions si $x \geqslant x_0$ ou $x \leqslant x_0$ (ça change le signe de l'intégrale).

Nous avons donc

$$\|f-f_i\| \leqslant |(f-f_i)(x_0)| + \operatorname{diam}(K)\|g-f_i'\| \tag{15.702}$$

où $\operatorname{diam}(K)$ est le diamètre de K, c'est-à-dire la plus grande distance entre deux éléments de K c'est un nombre fini parce que K est borné. Il majore évidemment $|x-x_0|$. Le membre de droite tend vers zéro si $i \to \infty$ parce que nous avons convergence simple $f_i \to f$ et donc $(f-f_i)(x_0) \to 0$, et parce que nous avons convergence uniforme sur tout compact, donc $\|g-f_i'\| \to 0$.

Nous avons donc bien $\lim_{i\to\infty}\|f-f_i\| = 0$, c'est-à-dire convergence uniforme de (f_i) vers f sur K.

□

La proposition suivante est la généralisation à $\mathbb{R}$ de la proposition 13.349.

Proposition 15.242.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{15.703}$$

Au niveau du domaine, c'est $\mathbb{R}$ auquel il faut enlever $\{0\}$ si $\alpha - 1 < 0$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et une suite de rationnels α_i qui converge vers α. Le plus amateurs d'abstraction diront $(\alpha_i) \in \alpha$ en référence à la proposition 1.97.

Nous notons $f_\alpha(x) = x^\alpha$ et $f_i(x) = x^{\alpha_i}$. Par définition nous avon

$$f_i \to f_\alpha \tag{15.704}$$

ponctuellement. De plus en utilisant la proposition 13.349 nous savons que $f_i'(x) = \alpha_i x^{\alpha_i-1}$. En posant $g(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ nous avons donc

$$f_i' \to g. \tag{15.705}$$

ponctuellement. Mais f_i' est continue pour tout i et g également. Donc la convergence $f_i \to f_\alpha$ est uniforme sur tout compact [68]. Le théorème 13.297 nous permet de permuter limite et dérivée pour avoir $g = f_\alpha'$. □

15.14.7 Intégrales impropres

Définition 15.243 ([173]).
*Une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur un intervalle I si f est intégrable sur tout intervalle compact contenu dans I.*

Proposition 15.244.
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f. \tag{15.706}$$

68. Proposition 13.286.

Démonstration. Notons que la valeur de f en b n'a strictement aucune importance parce que l'intégrale de Lebesgue ne dépend pas du choix de la valeur de la fonction en un ensemble de mesure nulle ; et en même temps la limite à gauche de (15.706) ne dépend pas non plus de la valeur de f en b. Bref si f n'est pas définie en b, nous pouvons poser $f(b) = 42$.

Notons de plus que du point de vue de l'intégrale de Lebesgue, $\int_{[a,b]}$ et $\int_{[a,b[}$ sont identiques et valent toutes les deux $\int_a^b$ (lorsque ça existe).

Supposons d'abord que f est positive. Alors nous posons $f_n = f\mathbb{1}_{[a,b-\frac{1}{n}]}$. Ponctuellement nous avons la limite croissante $f_n \to f$ et de plus

$$\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n. \tag{15.707}$$

Chacun des f_n est intégrable sur $[a,b]$. Le théorème de Beppo-Levi 15.160 implique que f est intégrable sur $[a,b]$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{15.708}$$

Cela montre que dans le cas d'une fonction f positive nous avons bien (15.706).

Si f n'est pas positif, alors nous la décomposons en partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ et par définition de l'intégrale d'une fonction non positive,

$$\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x[} f = \lim \int f^+ - \lim \int f^-. \tag{15.709}$$

□

Il peut cependant arriver que la limite $\lim_{x\to b} \int_a^b f$ existe alors que f n'est pas intégrable sur $[a,b]$. C'est l'ennui des fonctions non positives. Un exemple classique est

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \tag{15.710}$$

Définition 15.245 ([266]).
Si

$$\lim_{x\to b} \int_a^b f \tag{15.711}$$

existe alors nous disons que l'intégrale est ***convergente*** *en b. Ce procédé de limite est l'intégrale* ***impropre*** *de f sur $[a,b]$.*

Exemple 15.246(Intégale impropre)
Nous considérons la fonction $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-2, 2n-1[\\ -\frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-1, 2n[. \end{cases} \tag{15.712}$$

Par la divergence de la série harmonique, $\int_0^\infty |f|$ n'existe pas. La fonction f n'est donc pas intégrable au sens de Lebesgue (définition 15.168).

Cependant pour tout n pair nous avons

$$\int_0^n f = 0. \tag{15.713}$$

Du coup pour tout $x \geqslant 0$ nous avons

$$\int_0^x f = \int_{2n}^x f \tag{15.714}$$

où $2n$ est le plus grand nombre pair inférieur à x. Nous avons $|x-2n|\leqslant 2$ et $|f(x)|\leqslant\frac{1}{n}$ pour $x\in[2n,x]$. Donc

$$\int_{2n}^{x} f\leqslant\frac{2}{n}. \tag{15.715}$$

Nous avons par conséquent

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f=0, \tag{15.716}$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur $[0,\infty[$ converge au sens des intégrales impropres. △

L'intégrale (15.710) est une intégrale convergente mais la fonction n'est pas intégrable (parce que pour être intégrale il faut que $|f|$ soit intégrable). Nous pouvons ainsi dire que cette intégrale converge mais n'existe pas.

Le corollaire suivant nous autorise à utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 15.233 même dans les cas limites.

Corollaire 15.247.
Si f est localement intégrable sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f sur tout ouvert de $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(a). \tag{15.717}$$

Démonstration. Pour chaque x dans $[a,b[$ nous avons

$$\int_a^x f=F(x)-F(b). \tag{15.718}$$

La proposition 15.244 nous explique que la limite $x\to b^-$ du membre de gauche existe et vaut $\int_a^b f$. Donc également le membre de droite :

$$\int_a^b f=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f=\lim_{x\to b^-}F(x)-F(b). \tag{15.719}$$

□

La convergence des intégrales de fonctions $\frac{1}{x^\alpha}$ en 0 et ∞ est une question classique de l'intégration. De plus ces fonctions servent souvent à utiliser une théorème de comparaison (type intégrale dominée de Lebesgue).

Proposition 15.248.
Deux intégrales remarquables.

(1) Nous avons

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}=\infty \tag{15.720}$$

si et seulement si $\alpha\geqslant 1$.

(2) Nous avons

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}=\infty \tag{15.721}$$

si et seulement si $\alpha\leqslant 1$.

Démonstration. La fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ admet la primitive $F(x)=\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur tout compact de $]0,\infty[$. Le corollaire 15.247 nous permet [69] de dire que $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}$ vaudra

$$\lim_{x\to 0-+}\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}. \tag{15.722}$$

Cela est strictement plus petit que ∞ si et seulement si $\alpha<1$. □

69. Tout ce que nous avons fait avec la borne b de l'intégrale $\int_a^b$ reste valable avec la borne a.

15.15 Changement de variables dans une intégrale multiple

Dans ce qui suit, U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U \to V$ est un C^1-difféomorphisme. Nous notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des cubes fermés dans U dont les côtés sont parallèles aux axes.

15.15.1 Des lemmes

Lemme 15.249 ([265]).
Soient μ et ν deux mesures de Borel sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^N$. Si $\mu(Q) \leqslant \nu(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{Q}$ alors $\mu(B) \leqslant \nu(B)$ pour tout borélien B.

Démonstration. Si Q est un cube semi-ouvert, c'est-à-dire de la forme

$$Q = \prod_{i=1} N[a_n, a_n + h[\subset U \tag{15.723}$$

alors Q est une réunion croissante de cubes fermés du type $[a_n+\epsilon, a_n+h-\epsilon]$, et donc $\mu(Q) \leqslant \nu(Q)$ par le lemme 15.23(1). La propriété est donc vraie pour les cubes semi-ouverts.

Si Ω est un ouvert, alors il est réunion disjointe dénombrable de cubes semi-ouverts par la proposition 15.211. Donc pour tout ouvert $\Omega \subset U$ nous avons $\mu(\Omega) \leqslant \nu(\Omega)$. En vertu de la proposition 15.81 et de la remarque 15.82, les mesures μ et ν sont régulières, et l'inégalité au niveau des ouverts se répercute en inégalité pour tout boréliens de U :

$$\mu(B) \leqslant \nu(B) \tag{15.724}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}\mathrm{or}(U)$. Notons que U étant ouvert dans $\mathbb{R}^N$, les boréliens de U sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}^N$ inclus dans U par le corollaire 15.51. □

Lemme 15.250 ([265]).
Soit une application $\theta\colon U \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 où U est ouvert dans $\mathbb{R}^N$. Pour tout $Q \in \mathcal{Q}$ nous avons

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big) \leqslant \sup_{s\in Q} \|d\theta_s\|^N \lambda_N(Q). \tag{15.725}$$

Démonstration. Nous notons h la longueur du côté du cube. Le théorème des accroissements finis 13.252, pour la composante θ_i donne, pour $u, v \in Q$:

$$\big|\theta_i(u) - \theta_i(v)\big| \leqslant \sup_{s\in Q} \|(d\theta_i)_s\| \|u - v\| \leqslant \sum_{s\in Q} \|(d\theta_i)_s\| h. \tag{15.726}$$

D'autre part nous avons (nous écrivons pour $N = 2$ pour être plus court) :

$$d\theta_s(u) = \frac{d}{dt}\Big[\theta_1(s + tu)e_1 + \theta_2(s + tu)e_2\Big]_{t=0} = (d\theta_1)_s(u)e_1 + (d\theta_2)_s(u)e_2. \tag{15.727}$$

Donc pour chaque i : $\|d\theta_s\| \geqslant \|(d\theta_i)_s\|$, et nous continuons la majoration (15.726) :

$$\big|\theta_i(u) - \theta_i(v)\big| \leqslant\leqslant \sum_{s\in Q} \|(d\theta_i)_s\| h \leqslant \sup_{s\in Q} \|d\theta_s\| h. \tag{15.728}$$

Les points $\theta(u)$ et $\theta(v)$ sont donc dans un cube de côté $\sup_{s\in Q} \|d\theta_s\| h$, ce qui permet de majorer $\lambda_N\big(\theta(Q)\big)$ par

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big) \leqslant \Big(\sup_{s\in Q} \|d\theta_s\| h\Big)^N = \Big(\sup_{s\in Q} \|d\theta_s\|\Big)^N \lambda_N(Q) \tag{15.729}$$

où le dernier facteur provient de l'égalité $h^N = \lambda_N(Q)$. □

15.15.2 Déterminant et mesure de Lebesgue

Dans la suite, Q_0 désigne le cube unité : $Q_0 = \big([0,1[\big)^N$.

Théorème 15.251 (Interprétation géométrique du déterminant[265])**.**
Soit une application linéaire $T\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$,

$$\lambda_N\big(T(B)\big) = |\det(T)|\lambda_N(B). \tag{15.730}$$

Démonstration. Nous considérons la mesure positive μ donnée par $\mu(B) = \lambda_N\big(T(B)\big)$, qui est bien une mesure par la proposition 15.77. Cette mesure est invariante par translation parce que λ_N l'est :

$$\mu(B+a) = \lambda_N\big(T(B)+a\big) = \lambda_N\big(T(B)\big) = \mu(B). \tag{15.731}$$

De plus, $T(Q_0)$ est borné et nous notons $\mu(Q_0) = C$. Nous avons $\mu = C\lambda_N$ par le corollaire 15.221.

$C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2)$ Par définition,

$$\begin{aligned} C(T_1T_2)\lambda_N(B) &= \lambda_N\big((T_1T_2)(B)\big) && \text{(15.732a)}\\ &= \lambda_N\big(T_1(T_2B)\big) = C(T_1)\lambda_N\big(T_2(B)\big) = C(T_1)C(T_2)\lambda_N(B). && \text{(15.732b)}\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction C est multiplicative :

$$C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2). \tag{15.733}$$

Et en plus, $C(\mathrm{Id}) = 1$.

Matrice diagonale En guise de T, nous considérons l'application linéaire diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_N)$ qui fait

$$T(Q_0) = [0,d_1[\times \dots \times [0,d_N[\tag{15.734}$$

La mesure de cela est $|d_1\cdots d_N|$, ce qui nous donne

$$C(D) = |d_1\dots d_N| = |\det(D)|. \tag{15.735}$$

Matrice orthogonale Nous considérons maintenant $T = U$ où U est une matrice orthogonale ($UU^t = 1$). Une matrice orthogonale est une isométrie [70] qui conserve donc la boule unité : $UB(0,1) = B(0,1)$. Nous avons

$$\lambda_N\big(B(0,1)\big) = \lambda_N\big(UB(0,1)\big) = C(U)\lambda_N\big(B(0,1)\big) \tag{15.736}$$

par conséquent $C(U) = 1$, et 1 est justement le déterminant de U.

Matrice quelconque Nous savons par le corollaire 14.33 de la décomposition polaire que toute matrice peut être écrite sous la forme $T = U_1DU_2$ où U_i sont orthogonales et D est diagonale. Donc $C(T) = C(U_1)C(D)C(U_2) = \det(U_1)\det(D)\det(U_2) = \det(U_2DU_2) = \det(T)$ parce que le déterminant est multiplicatif (proposition 11.52(1)).

□

Ce théorème donne une interprétation géométrique du déterminant en tant que facteur de dilatation des volumes lors de l'utilisation d'une application linéaire. Si T est une application linéaire quelconque,

$$\lambda_N\big(T(Q_0)\big) = |\det(T)|\lambda_N(Q_0) = |\det(T)|. \tag{15.737}$$

Le déterminant de T est le volume de l'image du cube unité par l'application T.

De la même façon, en utilisant l'application linéaire $T(x) = ax$ nous avons pour tout borélien B :

$$\lambda_N(aB) = a^N\lambda_N(B). \tag{15.738}$$

Une dilatation d'un facteur a des longueurs provoque une multiplication par a^N des volumes.

70. Proposition 11.83.

15.15.3 Le théorème et sa démonstration

Théorème 15.252 (Changement de variable[264, 265]).
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ ainsi qu'un C^1-difféomorphisme $\phi\colon U \to V$. Nous notons J_ϕ la fonction

$$\begin{aligned} J_\phi\colon \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \det(d\phi_a). \end{aligned} \tag{15.739}$$

Alors :

(1) Si $E \subset U$ est borélien, alors $\phi(E)$ est borélien et

$$\lambda_N\big(\phi(E)\big) = \int_E |J_\phi| d\lambda_N, \tag{15.740}$$

c'est-à-dire $\phi^{-1}(\lambda_N) = |J_\phi| \cdot \lambda_N$.

(2) Si $f\colon V \to [0, +\infty]$ est mesurable alors la fonction

$$(f \circ \phi) \times |J_\phi|\colon U \to [0, \infty] \tag{15.741}$$

l'est également et[71]

$$\int_V f d\lambda_N = \int_U (f \circ \phi)(x)|J_\phi(x)| d\lambda_N(x). \tag{15.742}$$

(3) Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ est mesurable alors elle est intégrable si et seulement si $(f \circ \phi) \times |J_\phi|\colon U \to \mathbb{C}$ est intégrable. Si c'est le cas, alors nous avons encore la formule de changement de variables :

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\phi^{-1}(V)} (f \circ \phi)|J_\phi| d\lambda_N. \tag{15.743}$$

Démonstration. Attention : la preuve va être longue.

(1) Le fait que $\phi(E)$ soit borélien lorsque E l'est est la proposition 15.216. En ce qui concerne la formule annoncée, il faut travailler.

Inégalité dans un sens (cubes) Nous commençons par prouver l'inégalité

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi(x)| dx \tag{15.744}$$

pour tout $Q \in \mathcal{Q}$. On peut diviser le côté du cube Q en k éléments de longueurs égales. Le cube est alors divisé en k^N petits cubes d'intérieurs disjoints. Nous les nommons Q_i ($i = 1, \dots, k^N$) Nous avons alors

$$\sum_i \lambda_N(Q_i) = \sum_i \lambda_N\big(\operatorname{Int}(Q_i)\big) = \lambda_N\big(\bigcup_i \operatorname{Int}(Q_i)\big) \leqslant \lambda_N(Q) \leqslant \sum_i \lambda_N(Q_i). \tag{15.745}$$

La dernière inégalité est le fait que les intersections ne sont pas disjointes. Toutes ces inégalités sont en réalité des égalités et en particulier : $\lambda_N(Q) = \sum_i \lambda_N(Q_i)$.
Soit $a \in Q_i$. Posons

$$\begin{aligned} \theta\colon U &\to U \\ \theta &= (d\phi_a)^{-1} \circ \phi \end{aligned} \tag{15.746}$$

Cela appelle deux commentaires. D'abord l'application $d\phi_a\colon U \to V$ est inversible parce que ϕ est un difféomorphisme (lemme 12.143). Ensuite, l'application θ est la composée de $(d\phi_a)$ (qui est linéaire) et de ϕ qui est de classe C^1 ; donc θ est de classe C^1. Donc le lemme 15.250 s'applique. La différentielle de θ n'est pas trop compliquée à écrire parce

71. L'intégrabilité d'une fonction est la définition 15.168 qui stipule que l'intégrale de $|f(x)|$ est finie. L'égalité proposée a un sens si les deux membres sont infinis. Il n'y a donc pas d'hypothèses d'intégrabilité obligatoire pour écrire une intégrale lorsque la fonction a des valeurs positives.

que nous avons la formule de différentielle d'une composée (théorème 12.141) et le fait que $(d\phi_a)^{-1}$ qui est linéaire et donc sa propre différentielle (lemme 12.137). Nous avons donc $d\theta = (d\phi_a)^{-1} \circ d\phi$, et le lemme donne

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i) \tag{15.747}$$

Étant donné que $(d\phi_a)^{-1}$ est une application linéaire, la proposition 15.251 s'applique, et donc

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) = |\det(d\phi_a)^{-1}|\lambda_N\big(\phi(a)\big). \tag{15.748}$$

Le déterminant d'une application réciproque est donné par la proposition 11.52(4) :

$$\det\left((d\phi_a)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(d\phi_a\right)} = \frac{1}{J_\phi(a)}. \tag{15.749}$$

Recollant les morceaux,

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big)\frac{1}{J_\phi(a)} \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_), \tag{15.750}$$

ou encore :

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant |J_\phi(a)| \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i). \tag{15.751}$$

Vu que a et s sont proches l'un de l'autre (on peut choisir encore la taille du cube), nous pouvons espérer que $(d\phi_a)^{-1}$ ne soit pas loin d'être l'inverse de $d\phi_s$. Et c'est en effet le cas. Pour s'en assurer, remarquons que l'application

$$d\phi\colon Q_i \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \tag{15.752}$$

est continue et même uniformément continue parce que Q_i est compact. De plus la composition de différentielles étant un produit de matrices nous pouvons permuter la limite dans le calcul suivant :

$$\lim_{s\to a}(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s = (d\phi_a)^{-1} \circ \lim_{s\to a} d\phi_s = \mathbb{1}. \tag{15.753}$$

Donc si $\epsilon > 0$ est donné, il existe δ tel que pour tout $s \in B(a,\delta)$, $\|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s - \mathbb{1}\| \leqslant \epsilon$. En ce qui concerne les normes, si $\|A - \mathbb{1}\| \leqslant \epsilon$ alors $\|A\| \leqslant \|A - \mathbb{1}\| + \|\mathbb{1}\| \leqslant \epsilon + 1$.

Cela étant dit, nous nous souvenons que nous avions découpé U en un nombre fini de cubes Q_i d'égales dimensions ; il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la diagonale des cubes sot plus petite que le minimum des δ_i. Avec un tel découpage,

$$\sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\| \leqslant 1 + \epsilon \tag{15.754}$$

et par conséquent

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant (1+\epsilon)^N |J_\phi(a_i)|\lambda_N(Q_i) \tag{15.755}$$

où nous avons ajouté un indice i au point a pour nous rappeler que nous avons choisi $a \in Q_i$.

Le théorème de la moyenne 15.231 appliqué à l'intégrale $\int_{Q_i} |J_\phi(t)|d\lambda_N(t)$ donne l'existence d'un $a_i \in Q_i$ tel que

$$|J_\phi(a_i)| = \frac{1}{\lambda_N(Q_i)} \int_{Q_i} |J_\phi| d\lambda_N. \tag{15.756}$$

Ce point a_i vérifie l'inégalité (15.755) comme tout point de Q_i. Nous sommons ces inégalités sur tous les i :

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \sum_i \lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \tag{15.757a}$$

$$\leqslant (1+\epsilon^N \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_N(Q_i)\int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N} \right) \lambda_N(Q_i) \tag{15.757b}$$

$$= (1+\epsilon)^N \sum_i \int_{Q_i} |J_\phi| d\lambda_N \tag{15.757c}$$

$$= (1+\epsilon)^N \int_Q |J_\phi| d\lambda_N \tag{15.757d}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathbb{1}_Q = \sum_i \mathbb{1}_{Q_i}$ presque partout. En prenant le limite $\epsilon \to 0$ nous trouvons

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi| d\lambda_N. \tag{15.758}$$

L'inégalité (15.744) est prouvée.

Inégalité pour les boréliens Soit B un borélien de U. Vu que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$, les mesures de Lebesgue sur U et sur V sont les mêmes que celles sur $\mathbb{R}^n$ par le corollaire 15.51.

Par les définitions 15.187 et 15.77, les applications μ et n définies par $\mu = \phi^{-1}(\lambda_N)$ et $\nu = |J_\phi|\lambda_N$ sont des mesures positives sur U (de Borel, qui plus est). L'inégalité (15.744) à peine prouvée s'écrit $\mu(Q) \leqslant \nu(Q)$ pour tout cube Q. Le lemme 15.249 nous dit alors que l'inégalité tient pour tout borélien.

Inégalité dans l'autre sens En utilisant la notation de la mesure image et du produit d'une mesure par une fonction [72], nous pouvons écrire l'inégalité prouvée sous la forme $\phi^{-1}(\lambda_N) \leqslant |J_\phi|\lambda_N$. En inversant les rôles de U et V (et donc de ϕ et ϕ^{-1}) nous avons aussi

$$\phi(\lambda_N) \leqslant |J_{\phi^{-1}}|\lambda_N. \tag{15.759}$$

En y appliquant ϕ^{-1} et le lemme 15.77,

$$\lambda_N \leqslant \phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}|\lambda_N\big). \tag{15.760}$$

Nous prouvons à présent que $\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big) = \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)$ en appliquant à un borélien B de U. D'une part

$$\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)(B) = \big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)\phi(B) \tag{15.761a}$$

$$= \int_{\phi(B)} |J_{\phi^{-1}}| d\lambda_N, \tag{15.761b}$$

et d'autre part,

$$\Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)B = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)(x) d\big(\phi^{-1}(\lambda_N)\big)(x) \tag{15.762a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B\big(\phi^{-1}(x)\big)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)\big(\phi^{-1}(x)\big) d\lambda_N(x) \tag{15.762b}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}|J_{\phi^{-1}}| \tag{15.762c}$$

$$= \int_B |J_{\phi^{-1}}| d\lambda_N. \tag{15.762d}$$

Justification :

72. Définition 15.77 et 15.187

— Pour (15.762b), le théorème 15.192(2).

L'équation (15.760) devient alors

$$\lambda_N \leqslant \big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{15.763}$$

Nous allons faire le produit de cette mesure par $|J_\phi|$ en nous souvenant que $J_\phi(x) = \det\big(d\phi_x\big)$. Par le lemme 12.143 nous avons aussi $(d\phi_x)^{-1} = d\phi^{-1}_{\phi(x)}$ et donc, par la propriété 11.52(3) du déterminant,

$$J_\phi(x) = \frac{1}{\det\big(d\phi^{-1}_{\phi(x)}\big)} = \frac{1}{J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)}. \tag{15.764}$$

Nous avons

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant |J_\phi| \cdot \big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{15.765}$$

En utilisant la proposition 15.188, il s'agit de multiplier la mesure $\phi^{-1}(\lambda_N)$ par la fonction

$$x \mapsto |J_\phi(x) J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)| = 1. \tag{15.766}$$

Nous avons donc bien

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{15.767}$$

et donc l'égalité

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N = \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{15.768}$$

c'est-à-dire le point (1).

(2) Le fait que la fonction proposée soit mesurable est le fait que la mesurabilité n'est pas affectée par produit et composition (propositions 15.93 et 15.43), et le fait que pour les mêmes raisons, l'application $J_\phi\colon U \to \mathbb{R}$ est également mesurable. En ce qui concerne la formule nous allons la démontrer dans le cas de fonctions de plus en plus générales.

Pour les fonctions indicatrices Soit B un borélien de U. Considérons la fonction $f = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. Alors

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}(y)\mathbb{1}_V(y) d\lambda_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)} d\lambda_N = \lambda_N\big(\phi(B)\big). \tag{15.769}$$

parce que $V = \phi(U)$ et $B \subset U$, donc $\mathbb{1}_{\phi(B)}\mathbb{1}_{\phi(U)} = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. D'autre part, pour calculer l'autre membre de (15.742) nous remarquons que $f = \mathbb{1}_{\phi(B)} = \mathbb{1}_B \circ \phi^{-1}$, ce qui donne

$$\int_U f\big(\phi(x)\big)|J_\phi(x)| d\lambda_N(x) = \int_U \mathbb{1}_B |J_\phi| d\lambda_N = \int_B |J_\phi| d\lambda_N. \tag{15.770}$$

L'ensemble B étant borélien, il est extrêmement mesurable, ce qui fait que le point (1) s'applique : les expressions (15.769) et (15.770) sont égales.

Pour les fonctions étagées Soit $f\colon V \to \mathbb{R}^+$ une fonction étagée :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{15.771}$$

Nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\int_V f d\lambda_N = \int_V \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N \tag{15.772a}$$
$$= \sum_i a_i \int_V \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N \tag{15.772b}$$
$$= \sum_i \int_U (\mathbb{1}_{a_i} \circ \phi)(x) |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \tag{15.772c}$$
$$= \sum_i a_i \int_U \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)} |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \tag{15.772d}$$
$$= \int_V \underbrace{\sum_i a_i \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)}(x)}_{=(f\circ\phi)(x)} |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \tag{15.772e}$$
$$= \int_V (f \circ \phi)|J_\phi| d\lambda_N. \tag{15.772f}$$

Justifications :

— Pour (15.772b) : linéarité de l'intégrale, théorème 15.165(2) [73]

— Pour (15.772c) : le cas des fonctions indicatrices est utilisé pour chaque i entre 1 et n.

Fonction mesurable positive Soit $f : V \to [0, \infty]$. Par le théorème fondamental d'approximation 15.105, il existe une suite croissante de fonctions étagées et mesurables $\varphi_n : V \to [0, \infty[$ dont la limite ponctuelle est f. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\int_V f d\lambda_N = \lim_{n\to\infty} \int_V \varphi_n d\lambda_N \tag{15.773a}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_U (\varphi_n \circ \phi)|J_\phi| d\lambda_N \tag{15.773b}$$
$$= \int_U \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ \phi)|J_\phi| d\lambda_N \tag{15.773c}$$
$$= \int_U (f \circ \phi)|J_\phi| d\lambda_N. \tag{15.773d}$$

Justifications :

— Pour (15.773a), c'est le théorème de la convergence monotone 15.160.

— Pour (15.773b), c'est le présent théorème pour la fonction étagée φ_n.

— Pour (15.773c), c'est encore la convergence dominée, justifiée par le fait que $\varphi_n \circ \phi$ est également une suite croissante : si $x \in U$ alors $\varphi_{n+1}\big(\phi(x)\big) \geqslant \varphi_n\big(\phi(x)\big)$.

— Pour (15.773d), c'est la limite ponctuelle $\varphi_n\big(\phi(x)\big) \to f\big(\phi(x)\big)$.

(3) La partie sur l'intégrabilité repose sur le fait que $|f| \circ \phi = |f \circ \phi|$. Ici $|.|$ est le module et non une valeur absolue. Les faits suivants sont équivalents :

— la fonction $f : V \to \mathbb{C}$ est intégrable

— la fonction $|f| : V \to \mathbb{R}$ est intégtrable

— la fonction $(|f| \circ \phi)|J_\phi| : U \to \mathbb{R}$ est intégrable (par le point (2)).

— la fonction $(f \circ \phi)|J_\phi| : U \to \mathbb{R}$ est intégrable.

En ce qui concerne la formule, il s'agit seulement d'appliquer le point (2) aux parties positives, négatives, imaginaires et réelles de f.

□

73. Il est remarquable que nous n'utilisons cette linéarité que pour les fonctions étagées.

Notons que la formule peut être écrite sous la forme

$$\langle f, g\rangle_V = \langle f\circ\phi, (g\circ\phi)|J|\rangle_U, \tag{15.774}$$

qui est plus pratique lorsqu'on parle de produits scalaires. Pour rappel, $\phi\colon U\to C$ est un C^1-difféomorphisme.

15.253.
La formule de changement de variables peut être comprise de la façon suivante. Si ϕ est linéaire alors le facteur $|J_\phi|$ est la mesure de l'image par ϕ d'une portion de $\mathbb{R}^p$ de mesure 1, sinon $|J_\phi|$ est le rapport entre la mesure de l'image d'un élément infinitésimale de volume de $\mathbb{R}^p$ et sa mesure originale.

Soit $\phi(u,v) = g(u,v)e_1 + h(u,v)e_2$ un difféomorphisme dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0,y_0) l'image par ϕ de (u_0,v_0). On considère le petit rectangle R de sommets (u_0,v_0), $(u_0+\Delta u, v_0)$, $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ et $(u_0, v_0+\Delta v)$. L'image de R n'est pas un rectangle en général, mais peut être bien approximée par le rectangle de sommets (x_0,y_0), $(x_0,y_0)+\phi_u\Delta u$, $(x_0,y_0)+\phi_u\Delta u+\phi_v\Delta v$ et $(x_0,y_0)+\phi_v\Delta v$ et son aire est $\|\phi_u\times\phi_v\|\Delta u\Delta v$. La valeur $|\phi_u\times\phi_v|$ est exactement $|J_\phi|$

15.15.4 Exemples

Un exemple avec une exponentielle est donnée dans l'exemple 19.74.

Énormément d'exemples sont disponibles avec les coordonnées polaires et toutes leurs variations. Cependant les fonctions trigonométriques ne seront vues que plus tard ; les coordonnées polaires, cylindrique et sphériques seront vues en section 19.12 et les exemples d'utilisation pour les intégrales seront dans la section 19.14.

15.16 Changement d'espace mesuré

Proposition 15.254 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Soit un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon\Omega\to\Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ *pour tout* $B\in\mathcal{A}'$.

Soit enfin une fonction mesurable $f\colon\Omega\to X$.

Alors

(1) Le triple $(\Omega',\mathcal{A}',\mu')$ est un espace mesuré.

(2) L'application $f\circ\varphi^{-1}\colon\Omega'\to X$ est mesurable.

(3) Nous avons l'égalité

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega'}(f\circ\varphi^{-1})d\mu'. \tag{15.775}$$

Démonstration. La proposition 15.52 montre déjà que $(\Omega',\mathcal{A}',\mu')$ est un espace mesuré.

Soit une partie S mesurable dans X. Alors $f^{-1}(S)$ est mesurable dans Ω par hypothèse sur f, c'est-à-dire que $f^{-1}(S)\in\mathcal{A}$. Ensuite $(\varphi\circ f^{-1})(S)$ est mesurable dans Ω' par hypothèse sur φ. Cela prouve que $f\circ\varphi^{-1}$ est une application mesurable.

Nous avons encore à prouver l'égalité d'intégrale. Par la définition 15.151 nous avons

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i)\} \tag{15.776}$$

où le supremum est sur tous les n et tous les choix de $A_i\in\mathcal{A}$, $a_i\in\mathbb{R}^+$ tels que $f|_{A_i} > a_i$. Vu que $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$, si $A_i\in\mathcal{A}$ et a_i sont choisis, nous avons aussi

$$f\circ^{-1}|_{\varphi(A_i)} \geqslant a_i \tag{15.777}$$

avec $\varphi(A_i) \in \mathcal{A}'$. Donc pour un choix de $\{(A_i, a_i)\}$ donné,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu'\big(\varphi(A_i)\big). \tag{15.778}$$

Au final,

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)\} = \sup\{\sum_i a_i \mu'\big(\varphi(A_i)\big)\} = \int_{\varphi(\Omega)} f \circ \varphi^{-1} d\mu'. \tag{15.779}$$

□

Remarque 15.255 (Ce n'est pas la mesure que nous voulons)**.**
La mesure donnée par la proposition 15.254 n'est pas celle que nous voulons d'habitude sur Ω'. Anticipons un peu pour comprendre. Prenons l'exemple de la partie C de $\mathbb{R}$ donnée par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x^2, x \in]0, 3[\}. \tag{15.780}$$

(1) La façon correcte de définir la longueur de C est de prendre une limite d'approximations par des morceaux de droites, comme fait à la définition 22.4.

(2) Cette définition de la longueur peut être exprimée sous forme intégrale par le théorème 22.10 qui nous assure que

$$l(C) = \int_0^3 \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt \neq \mu'(C). \tag{15.781}$$

En effet, $\mu'(C) = \mu\big(\varphi^{-1}(C)\big) = \mu\big(]0, 3[\big) = 3$, alors que pour tout t nous avons $\sqrt{1 + 4t^2} > 1$ et donc $l(C) > 3$.

(3) Donc μ' n'est pas exactement ce que nous aurions pu vouloir appeler la « mesure » de C.

(4) La mesure à considérer sur C doit donc plutôt être quelque chose comme le produit de la mesure μ' par la fonction $\|\varphi'\|$. Mais cela est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

(5) Dans le cas de S^1, nous avons $\varphi(x) = e^{ix}$, et $\|\varphi'(x)\| = 1$. Donc la mesure donné ici est probablement bien celle que nous voulons. Peut-être à coefficient $\frac{1}{2\pi}$ près pour avoir une normalisation $\mu'(S^1) = 1$. Cela est également une autre histoire qui vous sera contée une autre fois ; par exemple dans la proposition 19.64.

15.17 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini

Nous rappelons que $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue est un espace mesuré σ-fini, conformément à la définition 15.20.

Le théorème de Fubini-Tonelli parle de fonctions réelles et non complexes, et même positives. Le truc est que ce théorème va servir de base pour construire les autres. Si nous avons une fonction à valeurs complexes, elle se décompose en parties réelles et imaginaires qui elles-mêmes se décomposent en parties positives et négatives. Au final, les preuves pour $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se ramènent à appliquer quatre fois le théorème pour $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

Théorème 15.256 (Fubini-Tonelli[246])**.**
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit une fonction $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive (valant éventuellement ∞ à certains endroits) Alors :

(1) Les fonction

$$F_1 : x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \tag{15.782}$$

et

$$F_2 \colon y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \tag{15.783}$$

sont mesurables.

(2) *Toutes les intégrales imaginables existent et sont égales :*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y) d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x) \tag{15.784a}$$

$$= \int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{15.784b}$$

où tous les membres de l'égalité valent éventuellement $+\infty$.

Démonstration. Commençons par prouver le théorème dans le cas d'une fonction caractéristique d'un ensemble mesurable : $f(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y)$ pour un certain ensemble $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dans ce cas,

$$F_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y)d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_1(y)}(x)d\mu_2(y) = \mu_2\big(A_1(x)\big), \tag{15.785}$$

et nous avons déjà vu au théorème 15.206 que cette fonction F_1 était alors mesurable. En utilisant maintenant les égalités (15.617) ainsi que le fait que $\mathbb{1}_A(x,y) = \mathbb{1}_{A_2(x)}(y)$ nous avons

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) = (\mu_1\otimes\mu_2)(A) \tag{15.786a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big)d\mu_1(x) \tag{15.786b}$$

$$= \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_2(x)}(y)d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x) \tag{15.786c}$$

$$= \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A}(x,y)d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x). \tag{15.786d}$$

Le théorème étant valable pour les fonctions caractéristiques, il est valable pour les fonctions simples (définition 15.100) par linéarité de l'intégrale.

Si f n'est pas une fonction simple, alors la proposition 15.105 nous donne une suite croissante de fonctions simples et positives convergeant ponctuellement vers f. La partie du théorème sur les fonctions simples dit que pour chaque n l'intégrale

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) \tag{15.787}$$

peut être décomposée comme il faut en suivant la formule (15.784). Il faut pouvoir permuter la limite et l'intégrale dans chacun de cas. D'abord le théorème de la convergence monotone 15.160 appliqué à l'espace $\Omega_1 \times \Omega_2$ dit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y). \tag{15.788}$$

Ensuite, pour chaque $x \in \Omega_1$, les fonctions

$$\sigma_n(y) = \int_{\Omega_1} f_n(x,y)d\mu_1(x) \tag{15.789}$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables ; nous leur appliquons encore le théorème de la convergence monotone :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\sigma_n(y)d\mu_2(y) \tag{15.790a}$$

$$= \int_{\Omega_2}\left[\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1} f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{15.790b}$$

$$= \int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{15.790c}$$

où nous avons utilisé une seconde fois Beppo-Levi. □

Remarque 15.257.
Les formules (15.784) sont bien, mais ne garantissent en aucun cas que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$: il faut encore que ces intégrales soient finies.

Corollaire 15.258 ([263]).
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit[74]*. Soit une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

(2)
$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| d\mu_2 \right] d\mu_1 < \infty, \tag{15.791}$$

(3)
$$\int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} |f| d\mu_1 \right] d\mu_2 < \infty. \tag{15.792}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La notation $|f|$, pour l'instant, dénote donc bien la valeur absolue et non le module.

La fonction $|f|$ est mesurable et positive par hypothèse et par le fait que si f est mesurable, alors $|f|$ l'est également par le corollaire 15.96. Le théorème 15.256(2) nous dit alors que les intégrales suivantes existent et sont égales :

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f(x,y)| d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} |f(x,y)| d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). \tag{15.793}$$

Attention : rien ne dit encore que ces intégrales sont finies.

(1) implique (2) et (3) Si $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ alors $|f|$ y est également. Cela implique que le membre de droite de (15.793) est fini. Les deux autres sont alors également finis.

(2) ou (3) implique (1) Les expressions à droite de (15.793) sont finies. Donc celle de gauche également. Cele signifie que $|f| \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Par conséquent f est également dans $L^1(\Omega_2 \times \Omega_2)$.

Nous passons maintenant au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous décomposons

$$f = f_R + i f_I \tag{15.794}$$

où f_R et f_I sont des fonctions réelles. Nous avons

$$\int_\Omega |f| \leqslant \int_\Omega |f_R| + \int_\Omega |f_I|. \tag{15.795}$$

Donc si f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega)$, la fonction f le sera aussi. De même,

$$\int_\Omega |f_R| \leqslant \int_\Omega |f|, \tag{15.796}$$

qui donne l'inverse : si $f \in L^1(\Omega)$ alors $f_R, f_I \in L^1(\Omega)$. Bref, f est intégrable sur Ω si et seulement si f_R et f_I le sont.

Supposons que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| d\mu_2 \right] d\mu_1 \leqslant \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f_R| \right] + \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f_I| \right] < \infty \tag{15.797a}$$

74. Définition 15.208.

où nous avons appliqué (1) implique (2) aux fonctions f_R et f_I qui sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ parce que f y est.

Dans l'autre sens, si

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| \right] < \infty, \tag{15.798}$$

alors en remplaçant $|f|$ par $|f_R|$ ou par $|f_I|$ nous restons fini. En appliquant alors « (2) implique (1) » nous trouvons que f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Et cela implique que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. □

Théorème 15.259 (Fubini[263])**.**
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit

$$f \in L^1\big((\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{C}\big), \tag{15.799}$$

c'est-à-dire une fonction à valeurs mesurable et intégrable sur Ω. Alors :

(1) Pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est $L^1(\Omega_2)$.

(2) Si nous posons

$$\varphi_f(x) = \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y); \tag{15.800}$$

alors $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$.

(3) Nous avons la formule d'inversion d'intégrale

$$\int_\Omega f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 \tag{15.801a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \tag{15.801b}$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). \tag{15.801c}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs réelles : $f \in L^1\big((\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2), \mathbb{R}\big)$. Nous décomposons la fonction f en parties positives et négatives : $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives ou nulles. Nous avons évidemment

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f^+| \leqslant \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| < \infty. \tag{15.802}$$

Donc f^+ et f^- sont des éléments de $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Pour (1) Nous posons

$$\varphi_{f^+}(x) = \int_{\Omega_2} f^+(x,y) d\mu_2(y) \tag{15.803}$$

pour tous les $x \in \Omega_1$ pour lesquels cette intégrale est bien définie. Vu que f^+ est positive et mesurable, le théorème de Fubini-Tonelli 15.256(1) s'applique donc pour nous dire que φ_{f^+} est mesurable.

De plus le résultat (15.784) appliqué à f^+ donne

$$\int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty. \tag{15.804}$$

Le fait que le tout soit fini est une conséquence du fait déjà mentionné que $f^+ \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2$. Vu que φ_{f^+} est une fonction positive, l'inégalité (15.804) signifie que $\varphi_{f^+} \in L^1(\Omega_1, \mu_1)$.

En particulier, $\varphi_{f^+}(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega_1$. C'est-à-dire pour presque tout $x \in \Omega_1$:

$$\int_{\Omega_2} f^+(x,y) d\mu_2(y) < \infty, \tag{15.805}$$

et sachant que $f^+ \geqslant 0$ nous avons $f^+(x, \cdot\,) \in L^1(\Omega_2)$ pour presque tout x.

Pour (2) Partout où φ_{f^+} et φ_{f^-} sont finies nous avons

$$\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}, \tag{15.806}$$

et comme cela a lieu presque partout, nous pouvons considérer une partie mesurable $A \subset \Omega_1$ telle que $\mu_1(A) = 0$ et $\varphi_f(x) = \varphi_{f^+}(x) - \varphi_{f^-}(x)$ pour tout x hors de A. Bref, nous posons

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}(x) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{15.807}$$

Cette fonction g est mesurable et $g = \varphi_f$ presque partout. De plus

$$\int_{\Omega_1} |g| d\mu_1 = \int_{A^c} |g| \leqslant \int_{A^c} \varphi_{f^+} + \int_{A^c} \varphi_{f^-} < \infty. \tag{15.808}$$

La dernière inégalité est le fait que $\varphi_{f^\pm}$ sont dans $L^1(\Omega_1)$. Et notons au passage que nous aurions pu laisser toutes les intégrales sur Ω_1 sans faire de précisions sur la distinction entre Ω_1 et A^c parce que la partie de Ω_1 sur laquelle $\varphi_{f^\pm}$ sont infinies est trop petite pour changer la valeur de l'intégrale.

Nous avons donc $g \in L^1(\Omega_1)$, et par conséquent également $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$ parce que ces deux fonctions sont égales presque partout (les classes sont égales).

Pour (3) En utilisant l'équation (15.804) nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 = \int g d\mu_1 &= \int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} - \int_{\Omega_1} \varphi_{f^-} && \text{(15.809a)} \\ &= \int_{\Omega_1 \times} f^+ d\mu - \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- d\mu && \text{(15.809b)} \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega 2} f d\mu. && \text{(15.809c)} \end{aligned}$$

Et toutes ces intégrales sont finies.

Et c'est maintenant que nous considérons le cas complexe. Nous décomposons $f = f_R + if_I$ avec des fonctions réelles f_R et f_I. Comme déjà mentionné autour de (15.795), les fonctions f_R et f_I sont intégrables. Nous leur appliquons le théorème.

Les valeurs de x pour lesquelles $f_R(x, \cdot\,)$ et $f_I(x, \cdot\,)$ ne sont pas dans $L^1(\Omega_2)$ forment un ensemble de mesure nulle, nommons le A. En posant

$$g(x, y) = \begin{cases} f_R(x, y) + if_I(x, y) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A, \end{cases} \tag{15.810}$$

nous avons que $g(x, \cdot\,)$ est intégrable pour tout $x \in A^c$. Vu que pour ces valeurs de x nous avons $g(x, y) = f(x, y)$ nous en déduisons que pour $x \in A^c$ nous avons aussi $f(x, \cdot\,) \in L^1(\Omega_2)$.

Les autres points se traitent de la même façon [75]. □

15.260.

En pratique, il n'est pas toujours évident qu'une fonction soit intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Pour permuter des intégrales sur une fonction à deux paramètres nous faisons comme suit.

(1) Nous testons l'intégrabilité en chaîne de $|f|$, et si c'est bon, le corollaire 15.258 nous donne $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(2) Nous utilisons le théorème de Fubini 15.259 pour séparer et permuter les intégrales comme des ingénieurs.

75. Attention : je n'ai pas vérifié explicitement. C'est juste une intuition. Vérifiez et écrivez moi pour dire si c'est bon ou non.

Si la fonction $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ satisfait aux hypothèse du théorème de Fubini alors

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x)g(y)dx\otimes dy=\left(\int_{\Omega_1}f(x)dx\right)\left(\int_{\Omega_2}g(y)dy\right). \tag{15.811}$$

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous cette forme.

Exemple 15.261(Nécessité d'avoir des mesures σ-finies)
Nous montrons que le théorème ne tient pas si une des deux mesures n'est pas σ-finie. Soit $I=[0,1]$. Nous considérons l'espace mesuré

$$(I,\mathcal{B}\text{or}(I),\lambda) \tag{15.812}$$

où $\mathcal{B}\text{or}(I)$ est la tribu des boréliens sur I et λ est la mesure de Lebesgue (qui est σ-finie). D'autre part nous considérons l'espace mesuré

$$(I,\mathcal{P}(I),m) \tag{15.813}$$

où $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble des parties de I et m est la mesure de comptage. Cette dernière n'est pas σ-finie parce que les seuls ensembles de mesure finie pour la mesure de comptage sont des ensembles finis, or une union dénombrable d'ensemble finis ne peut pas recouvrir l'intervalle I.

Nous allons montrer que dans ce cadre, l'intégrale de la fonction indicatrice de la diagonale sur I^2 ne vérifie pas le théorème de Fubini. Étant donné que $\mathcal{B}\text{or}(I)\subset\mathcal{P}(I)$ nous avons

$$\mathcal{B}\text{or}(I^2)\subset\mathcal{B}\text{or}(I)\otimes\mathcal{P}(I). \tag{15.814}$$

Soit $\Delta=\{(x,x)\text{ tel que }x\in I\}$. La fonction

$$\begin{aligned}g\colon I^2&\to\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto x-y\end{aligned} \tag{15.815}$$

est continue et $\Delta=g^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans I^2. L'ensemble Δ est donc un borélien de I^2 et par conséquent un élément de la tribu $\mathcal{B}\text{or}(I)\otimes\mathcal{P}(I)$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_\Delta$ est alors mesurable pour l'espace mesuré

$$(I\times I,\mathcal{B}\text{or}(I)\otimes\mathcal{P}(I),\lambda\otimes m). \tag{15.816}$$

Pour x fixé nous avons

$$\mathbb{1}_\Delta(x,y)=\begin{cases}1&\text{si }y=x\\1&\text{si }y\neq x\end{cases}=\mathbb{1}_{\{x\}}(y), \tag{15.817}$$

et donc

$$\begin{aligned}A_1&=\int_I\left(\int_I\mathbb{1}_\Delta(x,y)dm(y)\right)d\lambda(x) &\text{(15.818a)}\\&=\int_I\left(\int_I\mathbb{1}_{\{x\}}(y)dm(y)\right)d\lambda(x) &\text{(15.818b)}\\&=\int_I\Big(m(\{x\})\Big)d\lambda(x) &\text{(15.818c)}\\&=\int_I 1d\lambda(x) &\text{(15.818d)}\\&=1. &\text{(15.818e)}\end{aligned}$$

Par contre le support de $\mathbb{1}_\Delta$ étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, nous avons

$$\int_I\mathbb{1}_\Delta(x,y)d\lambda(x)=0 \tag{15.819}$$

et par conséquent

$$A_2=\int_I\left(\int_I\mathbb{1}_\Delta(x,y)d\lambda(x)\right)dm(y)=0. \tag{15.820}$$

Nous voyons donc que le théorème de Fubini ne s'applique pas. △

Exemple 15.262
Nous nous proposons de calculer l'intégrale suivante en utilisant le théorème de Fubini :

$$G = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{15.821}$$

alors que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ n'a pas de primitives parmi les fonctions élémentaires.

Nous allons le faire de deux façons. Une première directe en utilisant le théorème de Fubini sur un domaine non borné, et une seconde en utilisant Fubini sur un domaine borné, et en passant à la limite ensuite.

Fubini, domaine non borné Par symétrie nous pouvons nous contenter de calculer

$$G_+ = \int_0^\infty e^{-x^2} dx. \tag{15.822}$$

L'astuce est de passer par l'intermédiaire

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)} dxdy && \text{(15.823a)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy && \text{(15.823b)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx \right)^2 && \text{(15.823c)} \\ &= G_+^2 && \text{(15.823d)} \end{aligned}$$

L'intégrale (15.823a) se calcule en passant aux coordonnées polaires et le résultat est $H = \frac{\pi}{4}$. Nous avons alors $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{15.824}$$

Fubini, domaine borné, puis limite Une variante, qui n'applique pas Fubini sur un domaine non borné. Nous commençons par écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \tag{15.825}$$

et puis nous faisons le calcul

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{R \to +\infty} \left((\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx)(\int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy) \right) \\ &= \lim_{R \to +\infty} \left(\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right) \\ &= \lim_{R \to +\infty} \left(\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right) \end{aligned} \tag{15.826}$$

où K est le carré de demi-côté R centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes et C_R est le cercle de rayon R centré à l'origine.

La première étape à justifier est simplement l'application de Fubini. Pour le passage de l'intégrale du carré vers le cercle, définissons

$$I_K(r) = \int_{K_r} f, \quad I_C(r) = \int_{C_r} f \tag{15.827}$$

où K_r est la carré de demi-côté r et C_r est le cercle de rayon r. Le demi-côté du carré inscrit à C_r est $\sqrt{2}$, donc pour tout r nous avons

$$I_K(\sqrt{2}r) \leqslant I_C(r) < I_K(r), \tag{15.828}$$

et en prenant la limite, nous avons évidement

$$\lim_{r\to\infty} I_K(\sqrt{2}r) = \lim_{r\to\infty} I_K(r), \tag{15.829}$$

et donc cette limite est également égale à $\lim_{r\to\infty} I_C(t)$.
Il ne reste qu'à calculer la dernière intégrale sur le cercle en passant aux coordonnées polaires :

$$\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R re^{-r^2}dr = \pi(1-e^{-R^2}). \tag{15.830}$$

La limite donne π, nous en déduisons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}. \tag{15.831}$$

△

Le théorème de Fubini-Tonelli nous permet également d'inverser des sommes et des séries. En effet une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale pour la mesure de comptage :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_{\mathbb{N}} a_n dm(n). \tag{15.832}$$

La proposition suivante montre comment il faut faire.

Proposition 15.263.
Soient les espaces mesurés $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue ainsi qu'une suite de fonctions positives $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Nous supposons de plus que la fonction f_n soit intégrable pour tout n et que les résultats forment une suite sommable. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{15.833}$$

Démonstration. Nous pouvons la récrire le membre de gauche sous la forme

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(n,x)dx \right) dm(n) \tag{15.834}$$

avec la notation évidente $f(n,x) = f_n(x)$. Prouvons que la fonction $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une fonction mesurable pour l'espace mesuré

$$\big(\mathbb{N}\times\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}^d), m\otimes\lambda\big). \tag{15.835}$$

Si $A\subset\mathbb{R}$, nous avons

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\times f_n^{-1}(A). \tag{15.836}$$

Chacun des ensembles dans l'union appartient à la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}^d)$ tandis que les tribus sont stables sous les unions dénombrables. La fonction f est donc mesurable. Comme nous avons supposé que f était positive, le théorème de Fubini-Tonelli s'applique et nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n,x)dm(n) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{15.837}$$

□

Théorème 15.264 (Fubini)**.**
Soit $(x,t) \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable sur $B_n \times B_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ où B_n et B_m sont des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Alors :

(1) pour tout $x \in B_n$, sauf éventuellement en les points d'un ensemble $G \subset B_n$ de mesure nulle, la fonction $y \in B_m \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ est intégrable sur B_m

(2) la fonction

$$\begin{aligned} B_n \backslash G &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{B_n} f(x,y)dy \end{aligned} \tag{15.838}$$

est intégrable sur $B_n \backslash G$.

(3) On a

$$\int_{B_n \times B_m} f(x,y)dxdy = \int_{B_n} \left(\int_{B_m} f(x,y)dy \right) dx. \tag{15.839}$$

Notons en particulier que si $f(x,y) = \varphi(x)\phi(y)$, alors $\int_{B_m} \varphi(y)dy$ est une constante qui peut sortir de l'intégrale sur B_n, et donc

$$\int_{B_n \times B_m} \varphi(x)\phi(y)dxdy = \int_{B_n} \varphi(x)dx \int_{B_m} \phi(y)dy. \tag{15.840}$$

Chapitre 16

Suites et séries de fonctions

Les généralités sur les suites et séries de fonctions, c'est dans la section 13.30.

16.1 Séries de fonctions

16.1.1 Intégration de séries de fonctions

Théorème 16.1.
La somme uniforme de fonctions intégrables sur un ensemble de mesure fini est intégrable et on peut permuter la somme et l'intégrale.

En d'autres termes, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers F sur A avec $\mu(A) < \infty$. Si F et f_n sont des fonctions intégrables sur A alors

$$\int_A F(x)d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n(x)d\mu(x). \tag{16.1}$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du théorème 15.182. En effet nous définissons la suite des sommes partielles

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n. \tag{16.2}$$

La limite $\lim_{N\to\infty} F_N = F$ est uniforme. Par conséquent la fonction F est intégrable et

$$\int_A F = \lim_{N\to\infty} \int_A F_N = \lim_{N\to\infty} \int_A \sum_{n=0}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_A f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n. \tag{16.3}$$

La première égalité est le théorème 15.182, les autres sont de simples manipulations rhétoriques. □

Le théorème suivant est une paraphrase du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (15.184).

Théorème 16.2.
Soient des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} f_n$ soit intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour chaque N. Nous supposons que la somme converge simplement vers

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{16.4}$$

et qu'il existe une fonction g telle que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} f_n \right| < g \tag{16.5}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Alors

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est intégrable,*

(2) on peut permuter somme et intégrale :

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=0}^{N} f_n d\mu = \int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \tag{16.6}$$

(3)

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \left| \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right| = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \left| \sum_{n=N}^{\infty} f_n \right| = 0. \tag{16.7}$$

Théorème 16.3.
Soit f_n *des fonctions* $C^1[a,b]$ *telles que*

(1) la série $\sum_n f_n(x_0)$ *converge pour un certain* $x_0 \in [a,b]$,

(2) la série des dérivées $\sum_n f'_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$.

Alors la série $\sum_n f_n$ *converge vers une fonction* F *et*

(1) La convergence est uniforme sur $[a,b]$.

(2) La fonction F *est dérivable*

(3) $F'(x) = \sum_n f'_n(x)$.

16.1.2 Différentiabilité

Lemme 16.4.
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés. Si la suite* (T_n) *converge vers* T *dans* $\mathcal{L}(E,F)$*, alors pour tout* $v \in E$ *nous avons*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right)(v) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(v). \tag{16.8}$$

Problèmes et choses à faire

À mon avis si on a un ouvert connexe par arcs dans un espace vectoriel normé, alors il est connexe par arcs de classe C^1, c'est-à-dire que deux points peuvent être liés par un chemin de classe C^1.

Je n'en suis pas certain.

Si vous êtes sûr de vous, vous pouvez affaiblir les hypothèses du théorème 16.6 et supprimer la définition 16.5 qui ne sert à rien d'autre.

Définition 16.5.
Soit un espace vectoriel normé E*. Un ouvert* Ω *est dit connexe par arcs de classe* C^1 *si pour tout choix de* $a, b \in \Omega$*, il existe une application* $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ *de classe* C^1 *telle que* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$.

Théorème 16.6 ([267])**.**
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* Ω *un ouvert connexe par arcs de classe* C^1 *de* E*. Soit* (u_n) *une suite de fonctions* $u_n\colon \Omega \to F$ *telle que*

(1) pour tout n*, la fonction* u_n *est de classe* C^1 *sur* Ω,

(2) la série $\sum_n u_n$ *converge simplement sur* Ω,

(3) la série des différentielles $\sum_n (du_n)$ *converge normalement sur tout compact de* Ω.

Alors la somme $u = \sum_n u_n$ *est de classe* C^1 *sur* Ω *et sa différentielle est donnée par*

$$du = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{16.9}$$

Démonstration. Pour chaque n, la fonction $du_n\colon \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$ est une fonction continue parce que u_n est de classe C^1. La série convergeant normalement, la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} du_n$ est également continue par la proposition 13.292. La difficulté de ce théorème est donc de prouver que cela est bien la différentielle de la fonction $\sum_n u_n$, c'est-à-dire que

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{16.10}$$

Soient $a, x \in \Omega$. Nous considérerions bien le segment $[a, x]$, mais vu que Ω n'est supposé que connexe par arcs de classe C^1 (définition 16.5), nous ne pouvons pas faire mieux pour joindre a à x que choisir un chemin de classe C^1

$$\gamma\colon [0,1] \to \Omega \tag{16.11}$$

tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

L'astuce est de poser

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big), \end{aligned} \tag{16.12}$$

et d'en étudier l'intégrale [1].

Permuter somme et intégrale Nous voudrions permuter la somme et l'intégrale dans $\int_0^1 \sum_i f_i(t)dt$.

Pour cela nous commençons par regarder quelque majorations de normes.

D'abord γ est de classe C^1, ce qui fait que γ' est continue. Vu que la norme est une application continue, la fonction $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ est également continue sur le compact $[0,1]$. Elle est donc majorée par une constante que nous nommons M. C'est le théorème de Weierstrass 7.99.

Ensuite nous avons le calcul

$$\|f_i(t)\| = \|(du_i)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\| \leqslant \|(du_i)_{\gamma(t)}\|\|\gamma'(t)\| \leqslant M\|du_i\|_\infty < \infty. \tag{16.13}$$

Justifications :

— Pour la première inégalité. C'est le lemme 12.17.

— Pour la seconde inégalité. Il s'agit de l'inégalité évidente

$$\|du_i\|_\infty = \sup_{x \in \gamma([0,1])} \|(du_i)_x\| \tag{16.14}$$

Notons que la norme $\|.\|_\infty$ ne réfère pas à un supremum sur E, mais seulement sur l'image de γ. Nous aurions pu faire preuve d'un peu de créativité dans les notations.

— L'application du_i est continue sur le compact $\gamma\big([0,1]\big)$. Donc le supremum est fini et atteint.

Maintenant nous posons

$$g_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t). \tag{16.15}$$

Nous avons la majoration

$$\|g_n(t)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|f_i(t)\| \leqslant M \sum_{i=0}^{n} \|du_i\|_\infty < \infty. \tag{16.16}$$

Le fait que le tout soit fini est l'hypothèse de convergence normale sur tout compact. Le compact en question est $\gamma\big([0,1]\big)$.

C'est le moment d'utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 15.184. Attention aux notations un peu décalées. Nous avons $g_n \to \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (convergence simple) et $\|g_n(t)\| \leqslant A$ où A est une constante que nous voyons comme une fonction constante inté-

1. Cela revient à étudier l'intégrale de la forme différentielle du_n sur le chemin γ. Voir la définition 21.47 et tout ce qui s'en suit.

grable sur le compact $[0,1]$. Nous permutons la limite et l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t)dt = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} g_n)(t)dt \tag{16.17a}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)dt \tag{16.17b}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} f_i(t)dt \tag{16.17c}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 f_i(t)dt \tag{16.17d}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 f_i(t)dt. \tag{16.17e}$$

Accroissements Nous pouvons maintenant faire le petit calcul suivant :

$$\sum_n \int_0^1 (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \sum_n \Big(u_n\big(\gamma(1)\big) - u_n\big(\gamma(0)\big)\Big) = \sum_n \big(u_n(x) - u_n(a)\big) = u(x) - u(a) \tag{16.18}$$

où nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul intégral sous la forme de la proposition 15.239.

Nous retenons l'égalité

$$u(x) = u(a) + \int_0^1 \sum_n (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt. \tag{16.19}$$

Remarque La formule (16.19) n'est pas une forme de formule des accroissements finis qui parlerait d'évaluer une fonction u en x en partant de a et en intégrant du le long d'un chemin joignant a et x.

Ce serait le cas si nous pouvions permuter la somme et la différentielle qui se trouvent dans l'intégrale. Or permuter somme et différentielle est précisément l'objet du théorème que nous sommes en train de prouver.

Différentielle Forts de la formule (16.19), nous calculons $du_a(v)$, c'est-à-dire la différentielle de u au point a appliquée au vecteur $v \in F$. Pour cela, nous savons que Ω est ouvert, donc Ω contient une boule de rayon r autour de a, ce qui nous permet de dire que pour un donné, le point $a + sv$ est dans Ω pour tout $s \in B(0,\epsilon)$ lorsque ϵ n'est pas trop grand. Pour chacun de ces s, nous considérons un chemin de classe C^1 joignant a à $a + sv$. Ce chemin sera noté

$$\gamma_s : [0,1] \to \Omega \tag{16.20}$$

et $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = a + sv$. Nous avons le calcul

$$
\begin{aligned}
du_a(v) &= \frac{d}{ds}\Big[u(a+sv)\Big]_{s=0} && (16.21a)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (16.21b)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (16.21c)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_n \big(u_n(a+sv) - u_n(a)\big)\Big]_{s=0} && (16.21d)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[(\sum_n u_n)(a+sv)\Big]_{s=0} && (16.21e)\\
&= \sum_n \frac{d}{ds}\Big[u_n(a+sv)\Big]_{s=0} && (16.21f)\\
&= \sum_n (du_n)_a(v) && (16.21g)\\
&= \Big(\sum_n (du_n)_a\Big)(v) && (16.21h)\\
&= \Big(\sum_n du_n\Big)_a(v). && (16.21i)
\end{aligned}
$$

Justifications :

— Pour 16.21c. Permuter la somme et l'intégrale comme plus haut.

— Pour 16.21f. Permuter une somme et une dérivée classique des fonctions $\mathbb{R} \to F$ données par $s \mapsto u_n(a+sv)$. Il s'agit d'utiliser le théorème 13.297 sur chaque composantes dans F.

— Pour 16.21i. Chaque du_n est une application $du_n \colon E \to \mathcal{L}(E,F)$. Au fait près que la notation est plus lourde, il s'agit simplement d'une définition de la somme pontuelle d'une suite de fonctions : $\sum_n f_n(a) = (\sum_n f_n)(a)$. Dans ce cas-ci, le tout est encore un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ que nous appliquons à v.

□

16.2 Séries entières

Dans cette section nous allons parler de séries complexes autant que de séries réelles. L'étude des propriétés à proprement parler complexes des séries entières (holomorphie) sera effectuée dans le chapitre dédié, voir le théorème 27.15 et ses conséquences.

16.2.1 Disque de convergence

Une **série de puissance** est une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{16.22}$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$ est fixé, (c_k) est une suite complexe fixée, et z est un paramètre complexe. Nous disons que cette série est *centrée* en z_0.

Définition 16.7.
*Une **série entière** est une somme de la forme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{16.23}$$

avec $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Une série entière peut définir une fonction

$$f(z) = \sum_n a_n z^n. \tag{16.24}$$

Le but de cette section est d'étudier des conditions sur la suite (a_n) qui assurent la continuité de f ou la possibilité de dériver ou intégrer la série terme à terme.

Définition 16.8.
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *une série entière. Le* ***rayon de convergence*** *de cette série est le nombre*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, \infty]. \tag{16.25}$$

La boule $B(0, R)$ *est le* ***disque de convergence*** *de la série.*

Le rayon de convergence d'une série ne dépend que des réels $|a_n|$, même si à la base $a_n \in \mathbb{C}$.

Remarque 16.9.
Si pour tout n nous avons $|b_n| \geqslant |a_n|$ alors le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^n$ est au moins aussi grand que celui de la série $\sum_n b_n z^n$. Cela y compris lorsque l'un ou l'autre des rayons de convergences est infini.

Lemme 16.10 (Critère d'Abel)**.**
Soit $R > 0$ *le rayon de convergence de la somme* $\sum_n a_n z^n$ *et* $z \in \mathbb{C}$.

(1) Si $|z| < R$ *alors la série converge absolument.*

(2) Si $R < \infty$ *et si* $|z| > R$ *alors la série diverge.*

Démonstration. Démonstration en deux parties.

(1) Si $|z| < R$ alors la suite $(a_n z^n)$ est bornée et il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| r^n \leqslant M$ pour tout n. Nous considérons alors un r tel que $|z| < r < R$ et nous pouvons calculer :

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \tag{16.26}$$

Vu que $|z| < r$ nous tombons sur la série géométrique (12.141) qui converge. Par le critère de comparaison [2] la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.

(2) Par définition du rayon de convergence, la suite $(a_n z^n)$ n'est donc pas bornée et la série ne peut pas converger à cause de la proposition 12.66.

□

Le critère d'Abel parle bien de convergence absolue, et non de convergence normale. Pour chaque t, la série $\sum_k |a_n t^k|$ converge. Si par contre nous posons $u_k(t) = a_k t^k$, nous n'avons a priori pas la convergence normale $\sum_k \|u_k\|_\infty$, même pas si la norme est la norme supremum sur $B(0, R)$ [3]. Prenons comme exemple simplement $a_k = 1$ pour tout k. Pour tout $|t| < 1$, la série $\sum_k t^k$ converge absolument (série géométrique), mais nous aurions $\|u_k\|_\infty = 1$ et donc divergence évidente de $\sum_k \|u_k\|_\infty$.

La proposition suivante sera surtout utile lorsqu'on parlera de dérivée.

Proposition 16.11 ([268])**.**
Quel que soit le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, *les séries* $\sum_n a_n z^n$ *et* $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ *ont même rayon de convergence.*

2. Lemme 12.69.
3. Il y aurait par contre bien convergence sur tout compact ? Cher lecteur, dites moi ce que vous en pensez

Démonstration. Nous posons

$$E = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (a_n r^n) \text{ est borné }\} E' = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (n^\alpha a_n r^n) \text{ est borné }\} \quad (16.27a)$$

Et aussi $R = \sup(E)$, $R' = \sup(E')$. Le fait que $E' \geqslant E$ est facile. Nous supposons $R > 0$ et nous considérons $r < R$ (c'est-à-dire $r \in E$). Nous allons montrer que $r \in E'$. Pour cela nous prenons un nombre s tel que $r < s < R$. Nous avons

$$n^\alpha a_n r^n = n^\alpha a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n s^n = n^\alpha \left(\frac{r}{s}\right)^n a_n s^n. \quad (16.28)$$

Mais $r/s < 1$, donc le lemme 13.338 dit que $n^\alpha (r/s)^n \to 0$. Cela est donc borné par une constante M. Donc

$$n^\alpha a_n r^n \leqslant M a_n s^n. \quad (16.29)$$

Mais la suite $(a_n s^n)$ est bornée. Donc la suite $n^\alpha a_n r^n$ est également bornée, ce qui prouve que $r \in E'$. □

Remarque 16.12.
Au fond, cette proposition n'est rien d'autre que dire que dans $n^\alpha r^n$, l'effet « convergent » est r^n qui est une décroissance exponentielle tandis que l'effet « divergent » est n^α qui a une croissance seulement polynomiale.

Théorème 16.13 (Formule de Hadamard)**.**
Le rayon de convergence[4] *de la série entière* $\sum_n c_n z^n$ *est donné par une des deux formules*

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \quad (16.30)$$

ou

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \quad (16.31)$$

lorsque a_k *est non nul à partir d'un certain* k*.*

Si une de ces formules donne $1/R = 0$*, alors le rayon de convergence est infini.*

Le disque $|z - z_0| \leqslant R$ est le **disque de convergence** de la série $\sum_n a_n (z - z_0)^n$. Notons que le critère d'Abel ne dit rien pour les points tels que $|z - z_0| = R$. Il faut traiter ces points au cas par cas. Et le pire, c'est qu'une série donnée peut converger pour certain des points sur le bord du disque, et diverger en d'autres. Le théorème d'Abel radial (théorème 16.21) nous donnera quelques informations sur le sujet.

Il y a un dessin à la figure 16.1.

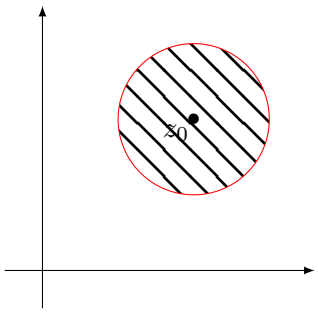


FIGURE 16.1 – À l'intérieur du disque de convergence, la convergence est absolue. En dehors, la série diverge. Sur le cercle proprement dit, tout peut arriver.

Si les suites a_n et b_n sont équivalentes, alors les séries correspondantes auront le même rayon de convergence. Cela ne signifie pas que sur le bord du disque de convergence, elles aient même

4. Définition 16.8.

comportement. Par exemple nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}. \tag{16.32}$$

En même temps, en $z = -1$ la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \tag{16.33}$$

converge par le critère des séries alternées [5]. Par contre la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) z^n \tag{16.34}$$

ne converge pas pour $z = -1$.

Exemple 16.14
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où a_n est la n-ième décimale de α. Si α est un nombre décimal limité, la suite (a_n) est finie et le rayon de convergence est infini. Sinon, pour tout N il existe un $n > N$ tel que $a_n \neq 0$ et la suite (a_n) ne tend pas vers zéro. Par conséquent la série

$$\sum_n a_n z^n \tag{16.35}$$

diverge pour $z = 1$ et le rayon de convergence satisfait $R \leqslant 1$. Nous avons aussi $|a_n| \leqslant 9$, de telle manière à ce que la série soit bornée et par conséquent majorée en module par $9z^n$, ce qui signifie que $R \geqslant 1$.

Nous déduisons alors $R = 1$. △

16.2.2 Propriétés de la somme

Le théorème suivant donne une formule (dit « produit de Cauchy ») pour le produit de deux séries entières. Nous en donnons une adaptation dans le cas de séries de puissances dans une algèbre normée dans la proposition 16.45.

Théorème 16.15.
Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b.

(1) Si R_s est le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n) z^n$, nous avons

$$R_s \geqslant \min\{R_a, R_b\} \tag{16.36}$$

et nous avons l'égalité si pour tout $|z| \leqslant \min\{R_a, R_b\}$, $\sum (a_n + b_n) z^n = \sum_n a_n z^n + \sum_n b_n z^n$.

(2) Si $\lambda \neq 0$ la série $\sum_n (\lambda a_n) z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum_n a_n z^n$ et si $|z| < R_a$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{16.37}$$

*(3) Le **produit de Cauchy** des deux séries est donné par*

$$\left(\sum_n a_n z^n \right) \left(\sum_k b_k z^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n. \tag{16.38}$$

Si R_p est le rayon de convergence de ce produit nous avons

$$R_p \geqslant \min\{R_a, R_b\} \tag{16.39}$$

et si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right). \tag{16.40}$$

5. Théorème 12.80.

Démonstration. Nous prouvons la partie sur le produit de Cauchy. En utilisant la propriété du produit de la somme par un scalaire nous avons

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m a_n z^{m+n}\right) \tag{16.41a}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} b_m a_n z^{m+n} \tag{16.41b}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\sum_{k=0}^{N+M}\sum_{i+k=k} b_i a_j z^k \tag{16.41c}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+k=k} b_i a_j z^k \tag{16.41d}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k} b_i a_j z^k. \tag{16.41e}$$

□

Exemple 16.16
Montrons un produit de Cauchy dont le rayon de convergence est strictement plus grand que le minimum. D'abord nous considérons

$$A = 1 - z, \tag{16.42}$$

c'est-à-dire $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n\geqslant 2} = 0$ avec $R_a = \infty$. Ensuite nous considérons

$$B = \sum_n z^n, \tag{16.43}$$

c'est-à-dire $B = (1-z)^{-1}$ et $R_b = 1$. Le produit de Cauchy de ces deux séries valant 1, le rayon de convergence est infini. △

Exemple 16.17
Nous montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{16.44}$$

pour $x \in]-1,1[$.

Étant donné que pour tout r dans $]-1,1[$ la suite $(n+1)r^n$ est bornée, le rayon de convergence est correct. Pour les x dans ce domaine nous avons

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right). \tag{16.45}$$

Nous devons expliciter ce produit de Cauchy en utilisant le théorème 16.15. Pour tout i nous avons $a_i = b_i = 1$. Par conséquent le produit (16.45) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n. \tag{16.46}$$

△

Théorème 16.18.
Une série entière converge normalement sur tout disque fermé inclus au disque de convergence.

Démonstration. Toute boule fermée inclue à $B(0,R)$ est inclue à la boule $\overline{B(0,r)}$ pour un certain $r<R$. Nous nous concentrons donc sur une telle boule fermée.

Pour chaque n nous posons $u_n(z)=a_nz^n$ que nous voyons comme une fonction sur $\overline{B(0,r)}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\overline{B(0,r)}$ nous avons

$$\|u_n\|_\infty\leqslant|a_nz^n|\leqslant|a_n|r^n. \tag{16.47}$$

Étant donné que $r<R$ la série $\sum_n|a_n|r^n$ converge et la série $\sum_n\|u_n\|$ est convergente. La série $\sum_n a_nz^n$ est alors normalement convergente. □

Exemple 16.19
Encore une fois nous n'avons pas d'informations sur le comportement au bord. Par exemple la série $\sum_n z^n$ a pour rayon de convergence $R=1$, mais $\sup_{z\in B(0,1)}|z^n|=1$ et nous n'avons pas de convergence normale sur la boule fermée. △

La convergence normale n'est donc pas de mise sur tout l'intérieur du disque de convergence. La continuité, par contre est effective sur la boule. En effet si $z_0\in B(0,R)$ alors il existe un rayon $0<r<R$ tel que $B(z_0,r)\subset B(0,R)$. Sur $B(z_0,r)$ nous avons convergence normale et donc continuité en z_0.

La différence est que la continuité est une propriété locale tandis que la convergence normale est une propriété globale.

Proposition 16.20.
Soit $f(z)=\sum_n a_nz^n$ avec un rayon de convergence R. Si $\sum|a_n|R^n$ converge alors

(1) la série $\sum_n a_nz^n$ converge normalement sur $\overline{B(0,R)}$,

(2) f est continue sur $\overline{B(0,R)}$.

Démonstration. La conclusion est claire dans l'intérieur du disque de convergence. En ce qui concerne le bord, chacune des sommes partielles est une fonction continue. De plus nous avons $\|u_n\|\leqslant|a_n|R^n$, dont la série converge. Par conséquent nous avons convergence normale sur le disque fermé. □

Le théorème suivant permet de donner, dans le cas de fonctions réelle, des informations sur la convergence en une des deux extrémités de l'intervalle de convergence.

Théorème 16.21 (Convergence radiale de Abel)**.**
Soit $f(x)=\sum_n a_nx^n$ une série réelle de rayon de convergence $0<R<\infty$.

(1) Si $\sum a_nR^n$ converge, alors f est continue sur $[0,R]$.

(2) Si $\sum_n a_n(-R)^n$ converge, alors f est continue sur $[-R,0]$.

La proposition 16.74 donnera un exemple d'utilisation pour la série de $\ln(1-x)$ (qui n'est pas encore définie à ce moment).

Le résultat suivant permet d'identifier deux séries complexes lorsque leurs valeurs sur $\mathbb{R}$ sont identiques.

Proposition 16.22.
Soient les séries $f(z)=\sum a_nz^n$ et $g(z)=\sum b_nz^n$ convergentes dans $B(0,R)$. Si $f(x)=g(x)$ pour $x\in[0,R[$ alors $a_n=b_n$.

Démonstration. Soit n_0 le plus petit entier tel que $a_{n_0}\neq b_{n_0}$. Pour tout $z\in B(0,R)$ nous avons

$$f(z)-g(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n=z^{n_0}\varphi(z) \tag{16.48}$$

où

$$\varphi(z)=\sum_{n\geqslant0}(a_{n+n_0}-b_{n+n_0})z^n. \tag{16.49}$$

Par le théorème 16.15(1) le rayon de convergence de φ est plus grand que R et la fonction φ est continue en 0. Étant donné que $\varphi(0) = a_{n_0} - b_{n_0} \neq 0$ et que φ est continue nous avons un ρ tel que $\varphi \neq 0$ sur $B(0,\rho)$. Or cela n'est pas possible parce que au moins sur la partie réelle de cette dernière boule, φ doit être nulle. □

Proposition 16.23 ([269, 1]).
Si la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R alors

(1) La somme est une fonction holomorphe dans le disque de convergence.

(2) La somme est différentiable et

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} z. \tag{16.50}$$

(3) De plus pour tout $z_0 \in B(0,R)$, on pose[6]

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \tag{16.51a}$$

$$T(z) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \tag{16.51b}$$

Alors nous avons

$$\lim_{z\to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = T(z_0). \tag{16.52}$$

Démonstration. Nous allons prouver, en utilisant le théorème 16.6, que la somme est une fonction différentiable et que la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. La proposition 13.249 nous dira alors que la somme est $\mathbb{C}$-dérivable.

Nous posons $u_n(z) = a_n z^n$, qui est une fonction de classe C^1. En ce qui concerne sa différentielle nous considérons $z_0 \in B(0,R)$ et nous avons (si $n = 0$ alors la différentielle est nulle)

$$(du_n)_{z_0}(z) = \frac{d}{dt}\Big[u_n(z_0 + tz)\Big]_{t=0} \tag{16.53a}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[a_n(z_0 + tz)^n\Big]_{t=0} \tag{16.53b}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[n a_n (z_0^{n-1} tz)\Big]_{t=0} \tag{16.53c}$$

$$= n a_n z_0^{n-1} z. \tag{16.53d}$$

En cours de calcul nous avons développé $(z_0 + tz)^n$ et gardé seulement les termes de degré 1 en t. Il y en a n et ils sont tous égaux à $z_0^{n-1} tz$.

La convergence simple $\sum_n u_n$ est dans les hypothèses. Il reste à prouver que la somme des différentielles converge uniformément sur tout compact autour de z_0 ne débordant pas du disque ouvert de convergence. Soit K un compact autour de z_0. Dans le calcul suivant nous utilisons une première fois la norme uniforme de du_n vu comme fonction de K vers $\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et une fois la norme opérateur[7] de $(du_n)_{z_0}$ comme application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\|du_n\|_k = \sup_{z_0\in K} \|(du_n)_{z_0}\| \tag{16.54a}$$

$$= \sup_{z_0\in K} \sup_{|z|=1} |(du_n)_{z_0}(z)| \tag{16.54b}$$

$$= \sup_{z_0\in K} \sup_{|z|=1} |n a_n z_0^{n-1} z| \tag{16.54c}$$

$$= \sup_{z_0\in K} n|a_n||z_0|^{n-1}. \tag{16.54d}$$

6. Pour rappel, dans tout ce texte, $B(a,r)$ est une boule *ouverte*.
7. Définition 12.10.

Vu que $z \mapsto |z|^{n-1}$ est une application continue sur le compact K, elle atteint son maximum (théorème 7.99). Nous considérons z_K, un point qui réalise le supremum. Ce nombre est dans le disque de convergence parce que K est un compact autour de z_0.

Nous devons prouver que $\sum_n n|a_n||z_K|^{n-1}$ converge. Vu que $|z_K|$ est une constante (par rapport à n) nous pouvons étudier la convergence en écrivant $|z_K|^n$ au lieu de $|z_K|^{n-1}$.

La suite $(a_n|z_K|^n)$ est une suite bornée. Soit M tel que $|a_n||z_K|^n < M$ pour tout n. Nous considérons de plus r de telle sorte que $K \subset B(0,r) \subset B(0,R)$. En particulier $|z_K| < r$ et nous avons

$$n|a_n||z_K|^n \leqslant n|a_n|r^n \left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n \leqslant nM \left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n. \tag{16.55}$$

Nous savons que ce qui est dans la parenthèse est plus petit que 1, mais que $\sum_n nx^n$ converge dès que $|x| < 1$. Par conséquent

$$\sum_n \|du_n\|_K \tag{16.56}$$

converge et le théorème 16.6 fonctionne : $du = \sum_{n=1}^{\infty} du_n$ et la somme $\sum_n u_n$ est de classe C^1.

La différentielle de $\sum_n u_n$ s'exprime explicitement par

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1} z. \tag{16.57}$$

Cette forme montre que du_{z_0} est une application $\mathbb{C}$-linéaire et donc la somme est $\mathbb{C}$-dérivable par la proposition 13.249. Ergo holomorphe sur le disque de convergence par définition 13.244.

En ce qui concerne la formule (16.52), elle provient de la formule (13.613) : $f'(z_0)$ est donné par la facteur multiplicatif de du_{z_0}. En l'occurrence la formule (16.57) nous donne

$$f'(z_0) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z_0^{n-1}. \tag{16.58}$$

□

16.2.3 Dérivation

Lemme 16.24.
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Les séries

$$\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \tag{16.59}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1} \tag{16.60}$$

ont même rayon de convergence R.

Notons toutefois que nonobstant ce lemme, les séries dont il est question peuvent se comporter différemment sur le bord du disque de convergence. En effet la série

$$\sum \frac{1}{n} z^n \tag{16.61}$$

diverge pour $z = 1$ alors que

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1} \tag{16.62}$$

converge pour $z = 1$.

Les théorèmes de dérivation et d'intégration de séries de fonctions (théorèmes 16.1 et 16.3) fonctionnent bien dans le cas des séries entières. Ils donnent la proposition 16.25 pour la dérivation et 16.30 pour l'intégration.

Proposition 16.25.
Soit la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{16.63}$$

de rayon de convergence R. Alors la fonction f est C^1 sur $]-R,R[$ et se dérive terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{16.64}$$

pour tout $x \in]-R,R[$.

Démonstration. Nous savons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergente que celui de la série f. En particulier cette série des dérivées converge normalement sur tout compact dans $]-R,R[$ et la somme est continue. Le théorème 16.3 conclu. □

Remarque 16.26.
À part lorsqu'on parle de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notion de classe C^k s'entend au sens de la différentielle, et non de la dérivée, voir les définitions 13.263. C'est cela qui explique la structure de la démonstration de la proposition 16.23.

Corollaire 16.27 ([269, 1])**.**
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration. La proposition 16.23 a démontré en réalité nettement plus : sur le disque ouvert de convergence, la somme est une fonction holomorphe. Il n'est cependant pas possible de conclure ainsi parce que le fait qu'une fonction holomorphe est C^∞ ne sera démontré qu'au coût de nombreux efforts dans le théorème 27.15(3).

Cas réel Nous considérons la série entière $\sum_n a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ de rayon de convergence R. Une simple récurrence sur la proposition 16.25 donne le résultat.

Cas complexe Attention : le fait d'être de classe C^k est le fait d'être k fois *différentiable*. Rien à voir avec la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

En ce qui concerne la différentiabilité nous avons la proposition 16.23 qui dit que dans le disque de convergence, la fonction $u(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour différentielle l'application $du\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} du\colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ du_{z_0}(z) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n\Big) z. \end{aligned} \tag{16.65}$$

Nous allons éviter de considérer la différentielle seconde comme une application

$$d^2u\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}\big(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})\big) \tag{16.66}$$

parce que ça nous mènerait trop loin pour parler de la différentielle k^{e}. Au lieu de cela nous allons considérer l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ z_0 &\mapsto \psi(z_0)z = z_0 z. \end{aligned} \tag{16.67}$$

Dans cette optique nous écrivons :

$$du_{z_0} = \psi\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n\Big) \tag{16.68}$$

ou encore :

$$(\psi^{-1} \circ d)u(z_0) = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z_0^n. \tag{16.69}$$

Nous allons prouver par récurrence que l'égalité suivante est vraie (y compris le fait que la somme converge) :

$$(\psi^{-1}\circ d)^k u(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}z_0^n. \tag{16.70}$$

Prouvons d'abord que cette somme converge pour tout k. Nous avons $(n+k)!/n!<(n+k)^k$ et donc il suffit de prouver que la série de coefficients $n^k a_n$ converge. C'est le cas par la proposition 16.11.

Nous pouvons calculer la différentielle de $(\psi^{-1}\circ d)^k u$ en dérivant terme à terme en utilisant (encore) la proposition 16.23(2) :

$$d\big((\psi^{-1}\circ d)^k u\big)_{z_0}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}na_0^{n-1}z \tag{16.71a}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n z. \tag{16.71b}$$

Nous appliquons ψ^{-1} à cela :

$$(\psi^{-1}\circ d)^{k+1}u(z_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n. \tag{16.72}$$

Dérouler à l'envers Nous allons maintenant utiliser la proposition 13.217 pour montrer que u est de classe C^k pour tout k. Nous avons démontré que $(\psi^{-1}\circ d)^k u$ était différentiable. Par conséquent, $d\big((\psi^{-1}\circ d)^{k-1}u\big)$ est différentiable et donc $(\psi^{-1}\circ d)^{k-1}$ est de classe C^1. En continuant ainsi, $(\psi^{-1}\circ d)^{k-l}u$ est de classe C^l et u est de classe C^k.

□

Le lemme suivant est encore essentiellement valable dans un espace de Banach (proposition 12.158).

Lemme 16.28.
La série entière $\sum_{n\geqslant 0}z^{nk}$ a un rayon de convergence 1 et converge vers la fonction

$$\sum_{n\geqslant 0}z^{nk}=\frac{1}{1-z^k}. \tag{16.73}$$

Lorsque $|\omega|=1$ nous avons aussi un rayon de convergence 1 pour la série

$$\frac{1}{\omega-z}=\sum_{k\geqslant 0}\omega^{-k-1}z^k. \tag{16.74}$$

Sous les mêmes hypothèses sur ω nous avons encore la série

$$\frac{1}{(\omega-z)^k}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\omega^{-s-1-k}\frac{(s+k-1)!}{s!}z^s \tag{16.75}$$

Démonstration. Les coefficients de la série sont $a_n=1$ lorsque n est multiple de k et $a_n=0$ autrement. Donc pour $r=1$ la suite $r^n a_n$ reste bornée[8]. Cela prouve que le rayon de convergence est au moins 1. Par ailleurs si $r>1$ alors clairement la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Cela prouve le rayon de convergence égal à 1.

Soit donc $z\in B(0,1)$. Nous avons

$$\left(\sum_{n\geqslant 0}z^{nk}\right)(1-z^k)=\sum_{n\geqslant 0}z^{nk}-\sum_{n\geqslant 0}z^{(n+1)k}. \tag{16.76}$$

8. Utilisation directe de la définition 16.8.

Le premier terme de la première somme vaut 1 tandis que tous les autres termes s'annulent deux à deux.

En ce qui concerne la série (16.74), elle s'obtient facilement :

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \frac{1}{\omega}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\omega}\right)^s = \sum_s \omega^{-s-1}z^s. \tag{16.77}$$

La troisième série s'obtient en dérivant la seconde, ce qui est permis dans le disque de convergence par la proposition 16.25. □

Remarque 16.29.
Sur le bord du disque de convergence, la série $\sum_n z^{nk}$ ne converge pas. En effet le rayon étant 1, sur le bord nous avons la série $\sum_n e^{ink\theta}$ dont la norme du terme général ne tend pas vers zéro.

16.2.4 Intégration

Proposition 16.30.
Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.

(1) Pour tout segment $[a,b] \subset]-R,R[$ nous pouvons intégrer terme à terme :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx. \tag{16.78}$$

(2) La série entière obtenue en intégrant terme à terme a le même rayon de convergence que celui de la série de départ.

Démonstration. La première assertion est un cas particulier du théorème général 16.1. Pour le rayon de convergence, le lemme 16.24 fait le travail. □

Vu que le rayon de convergence ne varie pas par la dérivation ou par l'intégration et qu'une série entière est de classe C^∞ sur son disque de convergence, nous pouvons dériver terme à terme autant de fois que nous le voulons sans faire de fautes dans le disque de convergence.

16.3 Séries de Taylor

16.31.
Avant de commencer, une petite formule de dérivation toute simple que nous allons utiliser souvent :

$$(z^k)^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \frac{k!}{(k-l)!}z^{k-l} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.79}$$

Dans les cas où il est permis de dériver terme à terme, nous avons la formule

$$f^{(p)}(x) = \sum_k a_k (x^k)^{(p)} = \sum_{k=p}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-p)!}x^{k-p} \tag{16.80}$$

16.3.1 Polynôme de Taylor d'une série entière

Le polynôme de Taylor d'une fonction définie par une série entière s'obtient en tronquant la série. Cela est une assez bonne nouvelle que nous allons démontrer maintenant.

Proposition 16.32 ([1]).
Soit une série entière

$$f(x) = \sum_k a_k x^k \tag{16.81}$$

de rayon de convergence $R > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction α telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x)x^n \tag{16.82}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0. \tag{16.83}$$

Tout ceci étant convenu que

— *l'égalité (16.82) est uniquement valable sur le disque de convergence,*
— *La fonction α dépend de n.*

Démonstration. Le corollaire 16.27 nous indique que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et que nous pouvons dériver terme à terme.

En utilisant la formule (16.80) et en l'évaluant en $x = x_0$, tous les termes s'annulent sauf $k = p$:

$$f^{(p)}(0) = p!a_p. \tag{16.84}$$

Le théorème de Taylor 13.359 nous indique alors qu'il existe $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x)x^n. \tag{16.85}$$

□

16.3.2 Une majoration pour le reste

Lemme 16.33.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois sur $B(a, R)$. Alors pour tout $x \in B(a, r)$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \dots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n)du_n \dots du_1. \tag{16.86}$$

Démonstration. Nous allons intensivement utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 15.233 sous la forme de la formule (15.688). Nous avons d'abord

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u_1)du_1 = \int_a^x \big[f'(a) + \int_a^{u_1} f''(u_2)du_2\big]du_1. \tag{16.87}$$

Toute l'astuce de ce théorème est de continuer à substituer $f^{(k)}(t)$ par $f^{(k)}(a)$ plus une intégrale de a à t de $f^{(k+1)}(u)$. Nous démontrons ainsi par récurrence que

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \cdots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n)du_n \dots du_1. \tag{16.88}$$

La preuve de cela se fait en substituant

$$f^{(n)}(u_n) = f^{(n)}(a) + \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1})du_{n+1} \tag{16.89}$$

et en remarquant (encore par récurrence par exemple) que

$$\int_a^x \dots \int_a^{u_{n-1}} du_n \dots du_1 = \frac{(x-a)^n}{n!}. \tag{16.90}$$

□

Le théorème suivant donne majoration du reste du polynôme de Taylor. Il est un premier pas dans la démonstration de formules comme

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{16.91}$$

lorsque P_n est un polynôme de Taylor autour d'un point $a \neq x$. Nous ne saurions trop insister sur le fait que de telles formules ne seraient valables que pour une classe relativement restreintes de fonctions.

Théorème 16.34 (Inégalité de Taylor[270]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois et telle que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_N$ sur $B(a,d)$. Alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{16.92}$$

où $R(x) = f(x) - P_n(x)$ et où P_n sont les polynômes de Taylor autour de $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous pouvons écrire la formule du lemme 16.33 pour $n+1$ au lieu de n ; cela donne

$$f(x) = P_n(x) + \int \cdots, \tag{16.93}$$

et donc

$$|R_n(x)| = |P_n(x) - f(x)| = \int_a^x \dots \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(x) du_n \cdots du_1 \tag{16.94}$$

En effectuant toutes les intégrales nous trouvons[9]

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}. \tag{16.95}$$

□

Cette formule pour le reste est très bien, mais pour l'exploiter au maximum de ses possibilités, il faudra la notion de convergence de suite de fonctions, et en particulier la notion de série de fonctions, pour pouvoir écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k \tag{16.96}$$

lorsque cela est possible. Nous renvoyons donc aux séries de Taylor, section 16.3, et en particulier aux fonctions analytiques de la sous-section 16.3.3.

16.3.3 Fonctions analytiques

Nous avons vu les polynômes de Taylor et déjà noté qu'il n'est pas en général vrai que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ pour des x même proches du point autour duquel les polynômes de Taylor P_n sont calculés.

Nous allons maintenant étudier la classe des fonctions pour lesquelles la série de Taylor est égale à la fonction de départ. D'abord une proposition montrant que les coefficients de Taylor sont les seuls pour lesquels il est possible d'espérer avoir une telle propriété.

Proposition 16.35 ([271]).
Soit une fonction donnée par la série entière

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \tag{16.97}$$

sur la boule de convergence $B(a,R)$ avec $R > 0$ (hypothèse : le rayon de convergence est strictement positif). Alors

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{16.98}$$

9. Je me demande si je n'ai pas une faute entre n et $n+1$ quelque part. Relisez attentivement et écrivez moi si vous trouvez une faute.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons un rayon de convergence $R > 0$, et le corollaire 16.27 nous indique que f y est de classe C^∞. Et nous pouvons dériver terme à terme par la proposition 16.25. Cela pour dire qu'il nous est autorisé d'utiliser la formule (16.80) pour calculer les dérivées de f au point a. Nous avons d'abord

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-p)!}(x-a)^{n-p}, \tag{16.99}$$

et donc

$$f^{(p)}(a) = c_p p! \tag{16.100}$$

qui donne immédiatement le résultat. □

Proposition 16.36.
Soit l'intervalle $I = B(a,r)$. Si il existe M tel que

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \tag{16.101}$$

pour tout $x \in B(a,r)$. Alors nous avons la convergence simple

$$P_n \to f \tag{16.102}$$

sur $B(a,r)$. Ici, P_n est le polynôme de Taylor d'ordre n pour la fonction f autour du point a[10].

Démonstration. Vu que nous avons $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n!$ pour tout x, nous pouvons poser

$$M_n = \frac{M}{r^n} n! \tag{16.103}$$

dans le théorème 16.34 pour le faire fonctionner. Nous avons alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = \frac{M}{n+1}|x-a|\left|\frac{x-a}{r}\right|^n. \tag{16.104}$$

Vu que $x \in B(a,r)$ nous avons $|x-a| < r$ et donc $|(x-a)/r|^n < 1$. Nous pouvons aussi majorer $|x-a|$ par r et écrire

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{rM}{n+1}. \tag{16.105}$$

Nous avons donc bien $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \to 0$. □

16.4 Exponentielle sur une algèbre normée

16.4.1 Définition

Dans ce qui suit, nous considérons une algèbre commutative.

Proposition-définition 16.37 (Exponentielle[1])**.**
Soit $(A, \|.\|)$ une algèbre[11] *commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$ munie d'une norme d'algèbre. Pour $x \in A$ nous définissons*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{16.106}$$

Cette définition a les propriétés suivantes :

10. Pour être complet, il faut préciser que P_n est calculé dans ZFC. C'est pour cela que nous n'écrivons pas des lourdeurs comme $P_{n,a}(f)(x)$; si il fallait donner tout le contexte dans la notation, on n'en sortirait pas.

Ah, et tant que j'y suis si vous ne savez pas ce qu'est ZFC, je vous déconseille fortement de répéter cela à un jury d'agrég, entre autres parce que vous allez attirer la question « vraiment ? Vous utilisez C ? Où ? Pourquoi ? ». Et là, bonne chance.

11. Définition 3.71.

(1) *C'est bien défini pour tout $x \in A$. C'est-à-dire que pour chaque x, la série (16.106) converge.*
(2) *Cela donne une application continue* $\exp\colon A \to A$.
(3) *La fonction* exp *est différentiable et*

$$(d\exp)_x(y) = \exp(x)y, \tag{16.107}$$

le dernier produit étant la structure d'algèbre sur A.

Démonstration. Pour la différentiabilité de exp, nous voulons utiliser le théorème 16.6. Pour cela nous posons

$$u_k(x) = \frac{x^k}{k!} \tag{16.108}$$

Convergence simple Nous prouvons la convergence simple, c'est-à-dire pour chaque x séparément, de la série (16.106) dans deux buts. D'abord de nous assurer que la définition posée de exp a un sens, et ensuite pour commencer à vérifier les hypothèses du théorème 16.6.

Nous montrons que les sommes partielles forment une suite de Cauchy. Nous fixons $x \in A$ et nous posons

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{16.109}$$

Soient $p > q$, deux entiers. Nous avons :

$$\|s_p - s_q\| = \| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{x^k}{k!} \| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x\|^k}{k!} \tag{16.110}$$

où nous avons utilisé le fait que la norme sur A soit une norme d'algèbre.

C'est le moment d'utiliser la série exponentielle donnée dans l'exemple 12.77 que nous appliquons avec $t = \|x\|$. La série donnée par les coefficients $a_k = \|x\|^k/k!$ converge et ses sommes partielles forment en particulier une suite de Cauchy. Donc ce que nous avons à droite dans (16.110) peut être rendu arbitrairement petit lorsque p et q sont grands.

u_k est continue Il s'agit de remarquer que $(x+h)^k = x^k + hC(x,h)$ où C est une fonction bornée de h (lorsque h est dans un voisinage de $0 \in A$). Donc

$$\|(x+h)^k - x^k\| \leqslant \|h\|\|C(x,h)\| \to 0. \tag{16.111}$$

Candidat différentielle de u_k Nous trouvons à présent un candidat à être différentielle de u_k. Pour cela nous faisons le calcul suivant, sans trop nous soucier de la rigueur :

$$(du_k)_x(y) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(x+ty)\Big]_{t=0} = k\frac{1}{k!}x^{k-1}y = u_{k-1}(x)y. \tag{16.112}$$

u_k est différentiable Nous fixons $x \in A$ et nous posons $T(y) = u_{k-1}(x)y$. Ensuite nous vérifions que cela vérifie la définition de la différentielle : nous devons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_k(x+h) - u_k(x) - T(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k - kx^{k-1}h}{k!\|h\|} = \clubsuit. \tag{16.113}$$

Vous vous souvenez de la formule pour $(x+h)^k$? Essayez de vous en souvenir. Le premier terme est x^k, et le second est $kx^{k-1}h$. Pour le reste c'est un polynôme dont tous les termes contiennent au moins h^2. Nous avons donc

$$\clubsuit = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 P(x,h)}{k!\|h\|} = 0. \tag{16.114}$$

Nous en concluons que u_k est différentiable et que

$$(du_k)_x(y) = u_{k-1}(x)y. \tag{16.115}$$

u_k est de classe C^1 Nous devons démontrer que la différentielle est continue ; cela est la continuité de l'application

$$\begin{aligned} du_k\colon A &\to \mathcal{L}(A,A)\\ x &\mapsto (du_k)_x. \end{aligned} \tag{16.116}$$

La topologie sur A est celle de la norme, et celle sur $\mathcal{L}(A,A)$ est celle de la norme opérateur associée à la norme sur A. Nous avons[12] :

$$\lim_{h\to 0}\|(du_k)_{x+h}-(du_k)_x\| = \lim_{h\to 0}\sup_{\|y\|=1}\|u_{k-1}(x+h)y-u_{k-1}(x)y\| \tag{16.117a}$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0}\sup_{\|y\|=1}\|u_{k+1}(x+h)-u_{k-1}(x)\|\|y\| \tag{16.117b}$$

$$= \lim_{h\to 0}\|u_{k+1}(x+h)-u_{k-1}(x)\|. \tag{16.117c}$$

Le fait que cette limite valle zéro est maintenant la continuité de u_{k-1}.

Convergence normale sur tout compact Soit un compact K de A. Par le théorème de Borel-Lebesgue 8.9, K est fermé et borné. C'est pour ceci que nous avons supposé que A était de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit donc $R>0$ tel que $\|y\|<R$ pour tout $y\in K$. Nous avons

$$\|du_k\|_K = \sup_{x\in K}\|(du_k)_x\| = \sup_{x\in K}\frac{\|x^{k-1}\|}{(k-1)!} \leqslant \sup_{x\in K}\frac{\|x\|^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{16.118}$$

Mais la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^k}{k!}$ converge. Nous avons donc la convergence normale demandée.

Conclusion Le théorème 16.6 conclu que l'exponentielle est de classe C^1 et que sa différentielle est donnée par la formule

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty}(du_k)_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty}(du_k)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)y = \exp(x)y. \tag{16.119}$$

Notez le jeu d'indices : $du_k=0$ lorsque $k=0$ (ce qui permet de faire commencer la somme à 1) et ensuite du_k fait intervenir u_{k-1} (ce qui fait revenir le départ de la somme à $k=0$).

□

16.38.
Lorsque nous disons que la différentielle de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même, nous référons au point 16.37(3) : la différentielle de exp en x est l'opérateur de multiplication par $\exp(x)$.

Nous pouvons comprendre maintenant que exp est même de classe C^∞ parce qu'à chaque différentiation nous tombons sur la même fonction, laquelle est de classe au moins C^1.

Cependant, pour formaliser ça, il faut un peut travailler. Le cauchemar des différentielles successives d'une application $A\to A$ est que les espaces en jeu sont des emboîtements terribles de $\mathcal{L}(A,\mathcal{L}(A,\mathcal{L}(A,A)))$.

Ce qui nous sauve est que l'espace $\mathcal{L}(A,V)$ est un A-module, quel que soit V. En particulier lorsque V est lui-même déjà un emboîtement. Faisons un lemme pour voir comment ça fonctionne.

16.4.2 Différentielles

Lemme 16.39 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés E et V tels que V soit un E-module[13]*. Nous supposons les normes soient telles que $\|xv\|_V\leqslant\|x\|_E\|v\|_V$.*

Soit une fonction différentiable $f\colon E\to V$ telle que la différentielle $df\colon E\to\mathcal{L}(E,V)$ soit de la forme

$$df_x(y) = yg(x) \tag{16.120}$$

12. N'oubliez pas de faire à part le cas $k=0$ parce que ce qui suit n'est correct que pour $k\geqslant 1$.
13. Définition 3.61.

pour une certains fonction différentiable $g\colon E\to V$.

Alors f *est* C^1, *et deux fois différentiable telle que*

$$\begin{aligned} d^2f\colon E &\to \mathcal{L}\big(E,\mathcal{L}(E,V)\big)\\ (d^2f)_x(y)z &= z(dg_x)(y) \end{aligned} \tag{16.121}$$

pour tout $x,y,z\in E$.

Démonstration. En plusieurs étapes.

<u>f **est** C^1</u> Nous savons, par hypothèse, que f est différentiable. Il faut montrer que sa différentielle est continue, en remarquant déjà que g est continue parce que différentiable.

Soit $x_k\xrightarrow{E}x$, et calculons $\|df_{x_k}-df_x\|$:

$$\begin{aligned} \|df_{x_k}-df_x\| &= \sup_{\|y\|=1}\|df_{x_k}(y)-df_x(y)\|\\ &= \sup_{\|y\|=1}\|\big(g(x_k)-g(x)\big)y\|\\ &\leqslant \sup_{\|y\|=1}\|g(x_k)-g(x)\|\|y\|\\ &= \|g(x_k)-g(x)\|. \end{aligned} \tag{16.122}$$

Donc nous avons bien $df_{x_k}\xrightarrow{\mathcal{L}(E,V)}df_x$, ce qui signifie la continuité de df. Donc f est de classe C^1.

<u>f **est deux fois différentiable**</u> Pour montrer que df est différentiable, nous mettons directement dans la définition (12.133) le candidat

$$\begin{aligned} T_x(h)\colon R &\to V\\ T_x(h)z &= zdg_x(y). \end{aligned} \tag{16.123}$$

Nous devons vérifier la limite suivante :

$$\lim_{h\xrightarrow{E}0}\frac{df_{x+h}-df_x-T_x(h)}{\|h\|}=0. \tag{16.124}$$

Étudions la norme du numérateur :

$$\|df_{x+h}-df_x-T_x(h)\| = \sup_{\|y\|=1}\|df_{x+h}(y)-df_x(y)-T_x(h)y\| \tag{16.125a}$$

$$= \sup_{\|y\|=1}\|yg(x+h)-yg(x)-ydg_x(h)\| \tag{16.125b}$$

$$\leqslant \sup_{\|y\|=1}\|y\|\|g(x+h)-g(x)-dg_x(h)\|. \tag{16.125c}$$

La limite (16.124) se déduit donc de la différentiabilité de g.

Note : la partie démontrant que f est C^1 n'est pas strictement obligatoire parce qu'en vérifiant que f est deux fois différentiable, nous vérifions de facto que df est en particulier continue. □

Lemme 16.40 ([1])**.**
Soient des algèbres normées A *et* V *telles que* V *soit un* A*-module vérifiant* $\|xv\|\leqslant\|x\|\|v\|$ *pour tout* $x\in A$ *et* $v\in V$. *Alors* $\mathcal{L}(A,V)$ *est un* A*-module vérifiant* $\|x\alpha\|\leqslant\|x\|\|\alpha\|$ *pour tout* $x\in A$ *et* $\alpha\in\mathcal{L}(A,V)$.

Démonstration. C'est un simple calcul utilisant la norme opérateur :

$$\|x\alpha\| = \sup_{\|y\|=1}\|(x\alpha)y\| = \sup_{\|y\|=1}\|x\alpha(y)\| \leqslant \sup_{\|y\|=1}\|x\|\|\alpha(y)\| = \|x\|\sup_{\|y\|=1}\|\alpha(y)\| = \|x\|\|\alpha\|. \tag{16.126}$$

□

Proposition 16.41 ([1]).
La fonction $\exp\colon A \to A$ *est de classe* C^∞ *et vérifie, pour tout* $k \geqslant 1$ *la récurrence*

$$(d^k \exp)_x(y) = y(d^{k-1}\exp)_x. \tag{16.127}$$

Démonstration. La formule proposée fonctionne avec $k = 1$:

$$(d\exp)_x(y) = y\exp(x). \tag{16.128}$$

C'est la relation 16.107.

Nous considérons $k > 1$, nous supposons que exp est de classe C^{k-1} et k fois différentiable. Nous allons prouver que exp est alors de classe C^k et $k+1$ fois différentiable, et que la différentielle de $d^k\exp$ est donné par la formule

$$(d^{k+1}\exp)_x(y) = y(d^k\exp)_x. \tag{16.129}$$

Pour nous mettre au clair avec les espaces en présence, nous supposons que

$$d^{k-1}\exp\colon A \to \mathcal{L}(A,V) \tag{16.130a}$$
$$d^k\exp\colon A \to \mathcal{L}\big(A,\mathcal{L}(A,V)\big) \tag{16.130b}$$

pour un certain espace vectoriel normé V, lequel est un de ces terrifiants emboîtement de type $\mathcal{L}\Big(A,\mathcal{L}\big(A,\mathcal{L}(A,A)\big)\Big)$. Il est bien un espace vectoriel normé, et également un A-module parce qu'on peut toujours définir la multiplication d'un élément $v \in V$ par un élément $x \in A$ comme étant la multiplication par x du résultat final de l'évaluation emboîtée, laquelle se termine par un élément de A. Donc tout se met bien.

Quoi qu'il en soit, nous posons

$$T_x(y) = y(d^k\exp)_x \tag{16.131}$$

et nous vérifions ce que cela donne dans la définition de la différentielle. Si nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{(d^k\exp)_{x+h} - (d^k\exp)_x - T_x(h)}{\|h\|} = 0 \tag{16.132}$$

alors nous aurons prouvé tout ce qu'il nous faut.

Le numérateur est une application $A \to \mathcal{L}(A,V)$; nous en écrivons la norme comme il se doit :

$$\|(d^k\exp)_{x+h} - (d^k\exp)_x - T_x(h)\| = \sup_{\|y\|=1}\|(d^k\exp)_{x+h}(y) - (d^k\exp)_x(y) - h(d^k\exp)_x y\| \tag{16.133a}$$
$$= \sup_{\|y\|=1}\|y(d^{k-1}\exp)_{x+h} - y(d^{k-1}\exp)_x - h(d^k\exp)_x y\| \tag{16.133b}$$
$$= \sup_{\|y\|=1}\|y(d^{k-1}\exp)_{x+h} - y(d^{k-1}\exp)_x - hy(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{16.133c}$$
$$\leqslant \|(d^{k-1}\exp)_{x+h} - (d^{k-1}\exp)_x - h(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{16.133d}$$
$$= \|(d^{k-1}\exp)_{x+h} - (d^{k-1}\exp)_x - (d^k\exp)_x(h)\|. \tag{16.133e}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé le lemme 16.40 et $T_x(h)y = h(d^k\exp)_x y$. Maintenant, la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|(d^{k-1}\exp)_{x+h} - (d^{k-1}\exp)_x - (d^k\exp)_x(h)\|.}{\|h\|} \tag{16.134}$$

n'est rien d'autre que la limite arrivant dans la définition du fait que $d^k\exp$ est la différentielle de $d^{k-1}\exp$. Cette limite est donc zéro comme nous voulions le prouver. □

Le théorème suivant est très important parce qu'il permet de définir l'exponentielle d'une matrice. Et les exponentielles de matrices sont utiles, entre très nombreuses autres choses pour résoudre certaines équations différentielles.

Théorème-définition 16.42 ([1]).
Soit une algèbre normée A (pas spécialement commutative). La formule

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{16.135}$$

définit une fonction différentiable dont la différentielle est donnée par[14]

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{j,j\in\mathbb{N}} \frac{x^i y x^j}{(i+j+1)!} \tag{16.136}$$

16.43.
Nous ne démontrons pas cela ici.

Il s'agit d'une adaptation de la proposition 16.37. Là où il faut faire attention, c'est dans l'équation (16.113) : il n'y a pas k termes $x^{k-1}h$ dans $(x+h)^k$, mais k termes de la forme $x^i h x$. C'est pour cela que la différentielle n'est pas donnée par $T(y) = u_{k-1}(x)y$, mais bien par la somme (16.136).

M'est avis en réalité que toute la démonstration du théorème 16.114 passe facilement au cas présent.

16.4.3 Séries dans une algèbre normée

Nous allons parler d'exponentielle de matrice. Avant cela, quelque propriétés qui sont valables sur des algèbres normées. Le principal exemple que nous avons en tête est $\mathbb{A} = \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$.

Proposition 16.44 ([1]).
Soit une algèbre normée $\mathbb{A}$. Soient une suite d'éléments $A_k \in \mathbb{A}$ et un élément B. Nous supposons que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge. Alors

$$B\sum_k A_k = \sum_k (BA_k). \tag{16.137}$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$\| \sum_{k=0}^{N} BA_k - B\sum_{k=0}^{\infty} A_k \| = \| B \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \| \tag{16.138a}$$

$$\leqslant \|B\| \| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \| \tag{16.138b}$$

Justifications :

— Pour (16.138a), c'est la linéarité du produit matriciel.

— Pour (16.138b), c'est que la norme est une norme d'algèbre [15].

À droite, la limite $N \to \infty$ donne zéro parce que $\|B\|$ est un simple nombre, et $\| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \|$ est une queue de suite convergente par hypothèse.

Nous avons donc bien convergence

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} BA_k = B \sum_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{16.139}$$

□

14. La fonction exponentielle est, j'en suis quasiment certain, de classe C^∞. Si vous connaissez un moyen pas trop douloureux de prouver cela, faites-le moi savoir.

15. Définition 12.14. Pour rappel, la norme opérateur en est une par le lemme 12.20.

Nous adaptons le produit de Cauchy du théorème 16.15 au cas d'une algèbre normée.

Proposition 16.45 ([1]).
Soient une algèbre normée $\mathbb{A}$, un élément $A \in \mathbb{A}$, ainsi que des séries convergentes $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ et $\sum_{l=0}^{\infty} b_l A^l$. Alors

$$\left(\sum_k a_k A^k\right)\left(\sum_l b_l A^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\Big) A^n. \tag{16.140}$$

Démonstration. Un calcul :

$$\left(\sum_k a_k A^k\right)\left(\sum_l b_l A^l\right) = \sum_k \Big(\sum_l b_l A^l\Big) a_k A^k \tag{16.141a}$$
$$= \sum_k \Big(\sum_l b_l a_k A^{l+k}\Big) \tag{16.141b}$$
$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \Big(\lim_{L\to\infty} \sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l}\Big) \tag{16.141c}$$
$$= \lim_{K\to\infty} \lim_{L\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l} \tag{16.141d}$$
$$= \lim_{K\to\infty} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{K+L} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^n \tag{16.141e}$$
$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{16.141f}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{16.141g}$$

Justifications :

— Pour (16.141a), la proposition 16.44 nous permet d'entrer l'élément $\sum_l b_l A^l \in \mathbb{A}$ dans la somme sur k.
— Pour (16.141b), c'est la même chose.
— Pour (16.141d), la somme sur k étant finie (pour chaque K), elle commute avec la limite sur L.
— Pour (16.141e), c'est une manipulation de sommes finies. On regroupe les termes selon les puissances de A.
— Pour (16.141f), c'est effectuer la limite sur L pour K fixé.
— Pour (16.141g), l'expression dans la limite sur K ne dépend pas de K. Donc nous pouvons simplement supprimer la limite.

□

16.4.4 Exponentielle de matrice

Proposition 16.46 ([272]).
Soient des matrices $A, P \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telle que P soit inversible. Alors[16]

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P. \tag{16.142}$$

Démonstration. Une première chose à remarquer est que pour chaque$m \in \mathbb{N}$ nous avons $(P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^m P$. Ensuite,

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_k \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_k \frac{P^{-1}A^k P}{k!} = P^{-1}\sum_k \frac{A^k}{k!} P. \tag{16.143}$$

16. La définition de l'exponentielle de matrice est 16.37 où la convergence de la somme est celle de la norme opérateur 12.10.

Nous avons utilisé la proposition 16.44 pour sortir P^{-1} à gauche et P à droite de la somme. □

Proposition 16.47 ([272]).
L'exponentielle de matrice vérifie

(1) $e^0 = \mathrm{Id}$

(2) $A^m e^A = e^A A^m$

(3) $(e^A)^t = e^{(A^t)}$

(4) *Si* $AB = BA$ *alors* $Ae^B = e^B A$ *et* $e^A e^B = e^B e^A$.

Démonstration. Point par point.

Pour (1) Juste substituer $A = 0$ dans la définition. Tous les termes tombent sauf le premier. Il faut utiliser le fait que $A^0 = \mathrm{Id}$.

Pour (2) Il faut utiliser la proposition 16.44 pour écrire

$$A^m \sum_k \frac{A^k}{k!} = \sum_k \frac{A^m A^k}{k!} = \sum_k \frac{A^k A^m}{k!} = \sum_k \frac{A^k}{k!} A^m. \tag{16.144}$$

Pour (3) Pour chaque k nous avons l'égalité $(A^k)^t = (A^t)^k$. En utilisant encore le coup de la queue de suite qui converge vers zéro,

$$\| \sum_{k=0}^{N} \frac{(A^t)^k}{k!} - (e^A)^t \| = \| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(A^t)^k}{k!} \| \to 0. \tag{16.145}$$

Pour (4) Pour prouver $Ae^B = e^B A$, c'est le même genre de manipulations que (16.144).

Maintenant, vu que A et e^B commutent, l'égalité à peine prouvée montre que e^A et e^B commutent.

□

Proposition 16.48 ([272]).
Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ *ainsi que* $s, t \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A}. \tag{16.146}$$

Démonstration. Nous calculons le produit $e^{sA}e^{tA}$ par le produit de Cauchy de la proposition 16.45 :

$$\clubsuit = \left(\sum_k \frac{t^k}{k!} A^k \right) \left(\sum_l \frac{s^l}{l!} A^l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} \frac{s^{n-m}}{(n-m)!} A^n. \tag{16.147}$$

À ce point, nous multiplions et divisons par $n!$ et nous réarrangons la somme de la façon suivante :

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} t^m s^{n-m}. \tag{16.148}$$

Nous reconnaissons la somme sur m comme étant un binôme de Newton[17] pour $(t+s)^n$. Nous avons donc finalement

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big((t+s)A\big)^n}{n!} = e^{(t+s)A}. \tag{16.149}$$

□

La proposition suivante dit que les exponentielles de matrices sont inversibles. Elle ne dit pas que toutes les matrices inversibles sont des exponentielles. Ce sera la proposition 16.94.

17. Proposition 3.40.

Proposition 16.49 ([272]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, alors e^A est inversible et

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{16.150}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $s = 1$ et $t = -1$ dans la proposition 16.48 et nous avons

$$e^A e^{-A} = e^0 = \mathbb{1}. \tag{16.151}$$

Cela prouve que e^A est inversible et que son inverse est e^{-A}. □

Proposition 16.50 ([272]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned} \tag{16.152}$$

Nous avons la formule de dérivation

$$f'(t) = Ae^{tA}. \tag{16.153}$$

Démonstration. Il s'agit de calculer la limite en utilisant la proposition 16.48 :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{(t+\epsilon)A} - e^{tA}}{\epsilon} && \text{(16.154a)} \\ &= e^{tA} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{\epsilon A} - \mathbb{1}}{\epsilon} && \text{(16.154b)} \\ &= e^{tA} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \big(\epsilon A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\epsilon A)^k}{k!}\big) && \text{(16.154c)} \\ &= e^{tA} \lim_{\epsilon \to 0} \big(A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\epsilon^{k-1} A}{k!}\big) && \text{(16.154d)} \\ &= e^{tA} A && \text{(16.154e)} \\ &= Ae^{tA} && \text{(16.154f)} \end{aligned}$$

où à la toute fin nous avons aussi utilisé la commutation de la proposition 16.47(2). □

Le théorème suivant montre que le produit d'exponentielle de matrices suit la règle usuelle tant que les matrices commutent. Cela est cependant plutôt l'exception que la règle. A priori nous avons $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

Théorème 16.51 ([272]).
Soient $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Alors

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{16.155}$$

Démonstration. Vu que A et B commutent nous avons $Ae^{tB} = e^{tB}A$ (proposition 16.47(4)). Ensuite nous posons

$$g(t) = e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA}. \tag{16.156}$$

Nous calculons la dérivée de g en utilisant la règle de Leibnitz et la proposition 16.50 :

$$\begin{aligned} g'(t) = &(A+B)e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)}(-B)e^{-tB} e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)} e^{-tB}(-A)e^{-tA}. \end{aligned} \tag{16.157}$$

Vu que A, B et $A+B$ commutent, nous pouvons réarranger les facteurs en

$$\begin{aligned} g'(t) = &(A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Be^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Ae^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}. \end{aligned} \tag{16.158}$$

Enfin, cela fait

$$g'(t) = (A+B-B-A)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = 0. \tag{16.159}$$

Donc g est constante et nous avons

$$e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = g(0) = \mathbb{1}. \tag{16.160}$$

En multipliant à droite par $e^{tA}e^{tB}$ nous trouvons

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \tag{16.161}$$

comme annoncé. □

16.5 Exponentielle et logarithme dans les réels

Pour avoir une vue synthétique du plan, voir le thème 56.

16.5.1 L'équation différentielle

Pour la suite nous notons y une solution de l'équation $y' = y$, $y(0) = 1$, et nous allons en donner des propriétés indépendamment de l'existence, donnée par le théorème 16.54.

Proposition 16.52.
Quelques propriétés de y (si elle existe) :

(1) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $y(x)y(-x) = 1$.*
(2) *$y(x) > 0$ pour tout x.*
(3) *y est strictement croissante.*

Démonstration. Nous posons $\varphi(x) = y(x)y(-x)$ et nous dérivons :

$$\varphi'(x) = y'(x)y(-x) - y(x)y'(-x) = 0. \tag{16.162}$$

Donc φ est constante[18]. Vu que $\varphi(0) = 1$ nous avons automatiquement $y(x)y(-x) = 1$ pour tout x.

Les deux autres allégations sont simples : si $y(x_0) < 0$ alors il existe $t \in]x_0, 1[$ tel que $y(t) = 0$, ce qui est impossible parce que $y(t)y(-t) = 1$. La stricte croissance de y s'ensuit. □

Proposition 16.53.
Quelques formules pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

(1) *$y(a+b) = y(a)y(b)$*
(2) *$y(na) = y(a)^n$*
(3) *$y\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{y(a)}$.*

Démonstration. Nous posons $h(x) = y(a+b-x)y(x)$ et nous avons encore $h'(x) = 0$ dont nous déduisons que h est constante. De plus

$$h(0) = y(a+b)y(0) = y(a+b) \tag{16.163}$$

18. Proposition 13.124.

et

$$h(b) = y(a)y(b). \tag{16.164}$$

Vu que h est constante, ces deux expressions sont égales : $y(a+b) = y(a)y(b)$.

Forts de cette relation, une récurrence donne $y(na) = y(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus

$$y(a) = y\left(\frac{a}{n} \times n\right) = y\left(\frac{a}{n}\right)^n, \tag{16.165}$$

ce qui donne $y(a) = y(a/n)^n$ ou encore $y(a/n) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Enfin pour les négatifs, si $n \in \mathbb{N}$,

$$y(-na) = \frac{1}{y(na)} = \frac{1}{y(a)^n} = y(a)^{-n}. \tag{16.166}$$

Et de la même façon,

$$y\left(-\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{y\left(\frac{a}{n}\right)} = \sqrt[n]{\frac{1}{y(a)}} = \sqrt[-n]{y(a)}. \tag{16.167}$$

□

16.5.2 Existence

Jusqu'ici nous avons donné des propriétés d'une éventuelle fonction y qui vérifierait l'équation différentielle. Il est temps de montrer qu'une telle fonction existe.

Théorème 16.54.
La série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{16.168}$$

définit une fonction dérivable solution de

$$\begin{cases} y' = y & \text{(16.169a)} \\ y(0) = 1. & \text{(16.169b)} \end{cases}$$

Démonstration. La formule de Hadamard (théorème 16.13) donne le rayon de convergence de la série (16.168) par

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0. \tag{16.170}$$

Donc nous avons un rayon de convergence infini. La fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ et la proposition 16.25 nous dit que y est dérivable. Nous pouvons aussi dériver terme à terme :

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = y(x). \tag{16.171}$$

Notez le petit jeu d'indice de départ de k. Dans un premier temps, nous remarquons que $k = 0$ donne un terme nul et nous le supprimons, et dans un second temps nous effectuons la simplification des factorielles (qui ne fonctionne pas avec $k = 0$). □

16.55.
Nous savons que la fonction y existe parce qu'une solution de l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$ est donnée par la fameuse série (théorème 16.54). À part cela, ce qui a été fait avec cette équation différentielle ne permet pas de prouver l'existence de y. Donc, du point de vue de « définir l'exponentielle par son équation différentielle », c'est pas encore gagné. Notons au passage que le nombre e n'est pas encore bien défini via l'équation différentielle.

16.5.3 Le nombre de Neper e

Nous savons par le théorème 16.54 que $x \mapsto \exp(x)$ est une solution de l'équation différentielle exponentielle (avec la bonne condition initiale). Or une telle solution est unique par la proposition 13.344.

Définition 16.56 (Le nombre de Neper)**.**
Nous notons e le nombre $\exp(1)$.

Proposition 16.57.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\exp(x) = e^x. \tag{16.172}$$

Démonstration. Soit y vérifiant la fameuse équation différentielle. Nous savons que $y = \exp$ parce que c'est l'unique solution (proposition 13.344). Nous avons :

$$y(x) = y(1)^x. \tag{16.173}$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $q = a/b$ et

$$y(q) = y\left(\frac{a}{b}\right) = y\left(a \times \frac{1}{b}\right) = y\left(\frac{1}{b}\right)^a = \left(\sqrt[b]{y(1)}\right)^a = y(1)^{a/b} = y(1)^q. \tag{16.174}$$

Le résultat est prouvé pour les rationnels.

En ce qui concerne un élément général $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto y(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto e^x$ également (proposition 13.326). Ces deux fonctions étant égales sur $\mathbb{Q}$, elles sont égales sur $\mathbb{R}$ par la proposition 9.15). □

Une conséquence des propositions 16.57 et 13.321 est que

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \tag{16.175a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \tag{16.175b}$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to]0, \infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \tag{16.176}$$

est une bijection.

16.5.4 Application réciproque : logarithme

Proposition-définition 16.58.
L'application $\exp\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ *est une bijection. L'application réciproque*

$$\ln\colon]0, \infty[\to \mathbb{R} \tag{16.177}$$

est le ***logarithme****.*

Démonstration. Le fonction exponentielle est dérivable, toujours strictement positive, donc strictement croissante. Les limites en $\pm\infty$ sont 0 et $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 13.50 nous dit que c'est une bijection. En effet, l'injectivité est la stricte croissance. En ce qui concerne la surjection, soit $y \in]0, \infty[$. Vu que la limite en $-\infty$ est zéro, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) < y$ pour tout $x < A$, et de la même façon, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) > y$ pour tout $x > B$. Si $a < A$ et $b > B$ alors $\exp(a) < y$ et $\exp(b) > y$, donc y est dans l'image de $[a, b]$ par l'exponentielle. □

Lemme 16.59 ([1])**.**
Le logarithme est une fonction continue.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de la bijection 13.61(4), et de la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, qui est une partie du théorème 16.54. □

Proposition 16.60 ([1])**.**
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour $a > 0$ nous avons

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x), \tag{16.178}$$

et

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \tag{16.179}$$

et

$$\ln(a^x) = x \ln(a) \tag{16.180}$$

et

$$a^x = e^{x \ln(a)}. \tag{16.181}$$

Démonstration. Nous avons, par la proposition 13.327,

$$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}. \tag{16.182}$$

En prenant le logarithme des deux côtés nous trouvons

$$-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right). \tag{16.183}$$

Nous pouvons continuer avec la suivante.

Par définition, $\ln(xy)$ est donné par $\exp\big(\ln(xy)\big) = xy$. Mais nous avons aussi, par la proposition 13.327 :

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} e^{\ln(y)} = xy. \tag{16.184}$$

Nous avons donc démontré (16.179).

La relation (16.180) de démontre d'abord pour $x \in \mathbb{N}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$ et enfin pour $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ alors la relation (16.179) donne immédiatement

$$\ln(a^n) = n \ln(a). \tag{16.185}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si $m, n \in \mathbb{N}$, le nombre $a^{n/m}$ est par définition le $x > 0$ tel que

$$x^m = a^n. \tag{16.186}$$

En prenant le logarithme des deux côtés : $\ln(x^m) = \ln(a^n)$ et en utilisant la relation déjà démontrée pour $\mathbb{N}$ nous trouvons $m \ln(x) = n \ln(a)$ et donc

$$\ln(a^{m/n}) = \ln(x) = \frac{m}{n} \ln(a). \tag{16.187}$$

La relation est donc démontré pour $\ln(a^q)$ avec $q \in \mathbb{Q}^+$.

Nous passons à $q = -m/n \in \mathbb{Q}^-$, c'est-à-dire toujours $m, n \in \mathbb{N}$. Nous avons, en utilisant la proposition 16.60,

$$\ln(a^{-q}) = \ln(\frac{1}{a^q}) = -\ln(a^q) = -q \ln(a). \tag{16.188}$$

Enfin si $x \in \mathbb{R}$ nous considérons une suite de rationnels $x_k \to x$. Pour chaque k nous avons

$$\ln(a^{x_k}) = x_k \ln(a). \tag{16.189}$$

Nous prenons la limite deux deux côtés. À droite nous avons tout de suite $x \ln(a)$, et à gauche, par continuité de la fonction ln (lemme 16.59) et de la fonction puissance (définition 13.326) nous trouvons $\ln(a^x)$. □

La formule (16.180) en particulier est pratique pour réexprimer des fonctions puissances compliquées en écrivant

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}. \tag{16.190}$$

Cela aide à calculer la dérivée de $x \mapsto a^x$.

Notons que certains prennent (16.190) comme définition de la fonction puissance.

16.5.5 Approximations numériques de e

Nous donnons maintenant quelques approximations numériques de e, particulièrement inefficaces.

Lemme 16.61.
Nous avons

$$2 < e < 3. \tag{16.191}$$

Démonstration. Nous savons que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. La fonction y est strictement croissante (et donc sa dérivée aussi). Nous avons donc $y'(x) > 1$ pour tout $x \in]0, 1]$, et donc

$$y(1) > 1 + 1 \times 1 = 2. \tag{16.192}$$

Sachant que $2 > y'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ nous pouvons refaire le coup de l'approximation affine, cette fois en majorant :

$$y(1) < 1 + 2 \times 1 = 3. \tag{16.193}$$

□

De la même façon nous savons que

$$y(\frac{1}{n}) > 1 + \frac{1}{n} \tag{16.194}$$

parce que y' est minoré par 1 sur $]0, \frac{1}{n}[$. Avec cela nous avons aussi la majoration

$$y(\frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}. \tag{16.195}$$

Et enfin nous pouvons donner l'encadrement, valable pour tout n :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y(1) < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n. \tag{16.196}$$

Pour $n = 10$ nous trouvons

$$2.50 < e < 2.83. \tag{16.197}$$

Bien que ce soit à mon avis humainement pas possible à faire à la main nous avons, pour $n = 100$:

$$2.70 < e < 2.7317 \tag{16.198}$$

Cela reste un encadrement très modeste.

Une méthode plus efficace consiste à calculer directement le développement de définition

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{16.199}$$

```
def u(k):
    """
    return the kth term in the expansion of 'e'
    """
    return 1/factorial(k)

def sum_u(n):
    """
    return the sum of the 'n' first terms, that is with
    k froim 0 to n-1.
    """
```

```
    L=[  u(k) for k in range(0,n)  ]
    return sum(L)

s = sum_u(5)          # This is a fraction
print(s)
print( numerical_approx(s)  )
```

tex/sage/sageSnip013.sage

Problèmes et choses à faire

Comment trouver, avec cette méthode, un *encadrement pour e ?*

Ce petit programme, avec 5 termes donne $e \simeq 65/24 \simeq 2.708$. Avouez que c'est déjà bien mieux.

16.5.6 Résumé des propriétés de l'exponentielle

Théorème 16.62.
Les choses que nous savons sur l'exponentielle :

(1) Il y a unicité de la solution à l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y & \text{(16.200a)} \\ y(0) = 1. & \text{(16.200b)} \end{cases}$$

(2) L'équation différentielle (16.200) possède une solution donnée par la série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{16.201}$$

(3) Cette solution est une bijection $y : \mathbb{R} \to]0, \infty[$.

(4) La fonction y ainsi définie est de classe C^∞.

(5) Elle est également donnée par la formule

$$\exp(x) = e^x \tag{16.202}$$

où e est définit par $e = \exp(1)$.

(6) Elle vérifie

$$e^{a+b} = e^a e^b \tag{16.203}$$

Nous nommons **exponentielle** cette fonction.

Démonstration. Point par point.

(1) C'est la proposition 13.344.

(2) C'est le théorème 16.54.

(3) Le rayon de convergence de la série (16.201) est infini (théorème 16.54) ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. Le fait que ce soit une bijection est dû au fait qu'elle est strictement croissante (proposition 16.52) ainsi qu'aux limites (16.175).

(4) Vu que $y = y'$, y est dérivable. Mais comme y' est alors égale à une fonction dérivable, y' est dérivable. En dérivant l'égalité $y' = y$ nous obtenons $y'' = y'$ et le jeu continue.

(5) C'est la proposition 16.57.

(6) C'est la proposition 16.53(1).

□

Exemple 16.63(Un endomorphisme sans polynôme annulateur[146])
l'exponentielle permet de donner un exemple d'un endomorphisme n'ayant pas de polynôme annulateur [19] : l'endomorphisme de dérivation

$$\begin{aligned} D\colon C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned} \tag{16.204}$$

n'a pas de polynôme annulateur. En effet supposons que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ en soit un, et considérons les fonctions $f_\lambda\colon t \mapsto e^{\lambda t}$. Nous avons

$$0 = P(D)f_\lambda = \sum_k a_k D^k(f_\lambda) = \sum_k a_k \lambda^k f_\lambda = P(\lambda)f_\lambda. \tag{16.205}$$

Par conséquent λ est une racine de P pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela implique que $P = 0$.

D'ailleurs si on y pense bien, cet exemple n'est qu'un habillage de l'exemple 11.134. △

Proposition 16.64.
Quelque propriétés du logarithme.

(1) Le logarithme est une application dérivable et strictement croissante.

(2) Le logarithme est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$.

Démonstration. Elle est donc bijective, d'inverse continue et dérivable par le théorème 13.61 et la proposition 13.119.

La dérivée de la fonction logarithme peut être calculée en utilisant la formule (13.275), mais aussi de façon plus piettone en écrivant l'expression suivante, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\big(\exp(x)\big) = x, \tag{16.206}$$

que nous pouvons dériver en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\ln'\big(\exp(x)\big)\exp'(x) = 1. \tag{16.207}$$

Mais $\exp'(x) = \exp(x)$, donc

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \tag{16.208}$$

pour tout y dans l'image de exp, c'est-à-dire pour tout y dans l'ensemble de définition de ln.

Par ailleurs, $\exp(0) = 1$ donc

$$\ln(1) = \ln\big(\exp(0)\big) = 0. \tag{16.209}$$

En ce qui concerne l'unicité d'une primitive s'annulant en $x = 1$, c'est le corollaire 13.136. □

16.5.7 Dérivée de la fonction puissance

Exemple 16.65
Soit la fonction $f(x,y) = x^y$, définie en 13.326. Nous allons en calculer les dérivées partielles au point $(1,2)$. Notons que f n'est pas définie pour $x < 0$, mais que cela n'a pas d'importance parce que nous pouvons nous restreindre à un voisinage du point $(1,2)$. La première dérivée partielle est facile :

$$\partial_x f(1,2) = (yx^{y-1})_{(x,y)=(1,2)} = 2.$$

Pour la seconde, il faut utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. D'abord le logarithme est par définition l'application réciproque de l'exponentielle (définition 16.58), donc

$$x^y = \exp\big(\ln(x^y)\big). \tag{16.210}$$

19. Voir la définition 11.130 et ce qui suit.

Ensuite nous calculons en utilisant la proposition 16.60 :

$$\partial_y f(1,2) = \partial_y \left(e^{y\ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)} = \left(\ln x e^{y\ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)} = \ln\left(1 - e^{2\ln(1)}\right) = 0.$$

△

Cet exemple est facilement généralisable aux fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$. Voici une proposition qui dit comment faire.

Proposition 16.66 ([1]).
Soit une fonction dérivable $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a > 0$. Nous avons

$$(a^u)' = u' \ln(a) a^u. \tag{16.211}$$

Si de plus $u(x) > 0$ pour tout x, nous avons

$$(u^a)' = a u' u^{a-1}. \tag{16.212}$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $f(x) = a^{u(x)}$. Vu que $f(x) > 0$ pour tout x, nous pouvons en prendre le logarithme et écrire l'égalité, valable pour tout x :

$$f(x) = e^{\ln(a^{u(x)})} = \exp\big(u(x)\ln(a)\big). \tag{16.213}$$

Sachant la dérivée de l'exponentielle, cela n'est rien d'autre que la dérivée d'une fonction composée :

$$f'(x) = \ln(a) u'(x) e^{u(x)\ln(a)}. \tag{16.214}$$

Pour l'autre, nous posons

$$g(x) = u(x)^a, \tag{16.215}$$

qui peut encore s'écrire sous la forme

$$g(x) = e^{a\ln\left(u(x)\right)}. \tag{16.216}$$

Ici encore, c'est la dérivée de fonctions composées qui donne le résultat. □

16.5.8 Dérivée du logarithme

Lemme 16.67.
Si $u\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ est dérivable alors $\ln(u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration. Cela est une conséquence du théorème de dérivation des fonctions composées : si $g(x) = \ln(u(x))$ alors

$$g'(x) = \ln'\big(u(x)\big)u'(x) = \frac{1}{u(x)}u'(x). \tag{16.217}$$

□

16.5.9 Taylor pour l'exponentielle

Proposition 16.68 (Développement de l'exponentielle).
Pour tout entier n, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0$ et

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \alpha(x). \tag{16.218}$$

Démonstration. Il s'agit de la proposition 16.32 appliquée à la série entière (16.37). □

16.5.10 Analycité

Vu que $\exp(x)$ est défini par une série entière (définition 16.37) et vu la proposition 16.35, il n'est pas étonnant que exp soit analytique. Traitons ce cas.

Exemple 16.69(Analycité de l'exponentielle)
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Nous démontrons que exp est analytique sur $B(a, R)$. Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n)}(x) = e^x$ pour tout n (équation (16.169a)). Nous avons donc

$$|f^{(n)}(x)| < e^{a+R} \tag{16.219}$$

pour tout $x \in B(a, R)$. Nous partons de l'expression (16.34) du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant \frac{e^{a+R}}{(n+1)!}R^{n+1}. \tag{16.220}$$

Mais nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{16.221}$$

pour tout R.

Donc avec les polynômes de Taylor P_n calculés en a, nous avons $P_n \to \exp$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons donc développer la fonction exponentielle autour de n'importe quel point, et avoir convergence des polynômes vers l'exponentielle sur tout $\mathbb{R}$. Vous accepterez cependant que si a et x sont éloignés, la convergence $P_n(x) \to \exp(x)$ peut être extrêmement lente. △

16.5.11 Autres propriétés et petits calculs

Lemme 16.70.
Si $a, b \in]0, \infty[$ alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \tag{16.222}$$

et

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b). \tag{16.223}$$

Démonstration. Nous posons $f(x) = \ln(ax)$ qui est une fonction dérivable. Alors $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Cette fonction f est donc une primitive de $\frac{1}{x}$ et il existe une constante K telle que

$$f(x) = \ln(x) + K. \tag{16.224}$$

Vu que $\ln(1) = 0$ nous avons $K = f(1) = \ln(a)$. Donc

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a). \tag{16.225}$$

En ce qui concerne la seconde formule à démontrer, nous avons

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{1}{b}b\right) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b). \tag{16.226}$$

Étant donné que $\ln(1) = 0$ nous en déduisons la formule (16.223). □

Lemme 16.71.
Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes[20] *et si (v_n) admet une limite l différente de 1, alors les suites $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$ sont équivalentes.*

Démonstration. En effet si $u_n = v_n\alpha(n)$ alors en utilisant la formule du lemme 16.70,

$$\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln\big(\alpha(n)\big) = \ln(v_n)\left(1 + \frac{\ln\big(\alpha(n)\big)}{\ln(v_n)}\right), \tag{16.227}$$

et comme $\alpha(n) \to 1$, la parenthèse tend vers 1. □

20. Définition 8.17.

16.5.12 Taylor pour le logarithme

Vu que $\ln(0)$ n'existe pas, il n'est pas question de développer ln autour de $x = 0$. À la place, nous allons le développer autour de $x = 1$ et plus précisément nous allons étudier Taylor pour la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$. Les résultats seront résumés dans la proposition 16.74.

Proposition 16.72 ([1]).
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]-1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned} \tag{16.228}$$

Pour tout n, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n \tag{16.229}$$

pour tout x dans le domaine de f.

Notez la somme qui part de $k = 1$ et non $k = 0$.

Démonstration. Nous utilisons la formule de Taylor-Young (proposition 13.375). La première dérivée de f se calcule en utilisant le lemme 16.67 :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}. \tag{16.230}$$

Pour les dérivées suivantes, c'est juste du calcul et nous pouvons prouver par récurrence que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k}. \tag{16.231}$$

En ce qui concerne l'évaluation en zéro :

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (k-1)!(-1)^{k+1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.232}$$

Du fait que $f^{(0)}(0) = \ln(1) = 0$, la somme commence à $k = 1$ et non $k = 0$. Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \alpha(x)x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n. \tag{16.233}$$

□

Nous étudions les polynômes de la série de Taylor pour

$$\begin{aligned} f\colon]-1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned} \tag{16.234}$$

Les dérivées successives de f ont déjà été calculées en (16.231). Nous développons autour de $x = 0$. Donc $f(0) = \ln(1) = 0$ et pour les autres,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!. \tag{16.235}$$

Pour les polynômes de Taylor, nous avons

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{16.236}$$

où vous noterez la somme qui part de $k = 1$ et non de $k = 0$. Nous avons aussi la série de Taylor de f donnée par

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \tag{16.237}$$

La somme est une limite ponctuelle, là où elle existe.

Jusqu'à présent, la seule certitude à props de T est que $T(0) = f(0) = 0$. Pour le reste :

— Rien ne dit que $T(x)$ existe pour d'autres x que $x = 1$.

— Et même si $T(x)$ existait pour d'autres x (c'est-à-dire si le rayon de convergence de (16.237) était strictement plus grand que zéro), rien n'assurerait que la valeur serait celle de f.

— Et même si $T(x)$ convergeait vers f sur son disque de convergence, ce ne serait pas encore assez pour dire que f est analytique, parce que l'analycité demande que les séries de Taylor autour de *chaque* point converge vers f. Or ici nous ne parlons encore que de T qui est la série autour de $x = 0$.

Lemme 16.73.
La série de Taylor de $x \mapsto \ln(1 + x)$ autour de $x = 0$ converge sur $]-1, 1]$. Elle ne converge pas pour $x = -1$.

Démonstration. En ce qui concerne le rayon de convergence de T, nous utilisons la formule de Hadamard [21] avec

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{16.238}$$

Ce que nous trouvons est

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1. \tag{16.239}$$

Le rayon de convergence de T est donc 1. Nous avons donc que $P_n \to T$ sur $]-1, 1[$, et peut-être que $P_n \to T$ en $x = \pm 1$.

Pour $x = -1$. L'intuition nous dit que ce serait $\ln(0)$ qui n'est pas défini. C'est le cas parce que

$$P_n(-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{16.240}$$

La limite $n \to \infty$ diverge. Donc T n'est pas définie en $x = -1$.

Pour $x = 1$ par contre,

$$P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{16.241}$$

Le critère des séries alternées [22] nous donne la convergence de cette série. □

Nous savons maintenant que la série de Taylor T converge sur $]-1, 1]$, et que $T(0) = f(0) = \ln(1) = 0$. Le premier gros morceau intéressant vient maintenant : nous allons prouver que $T(x)$ converge vers ce que nous croyons, c'est-à-dire $\ln(1 + x)$ en personne.

Proposition 16.74.
Pour tout $x \in]-1, 1]$ nous avons

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{16.242}$$

De plus nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{16.243}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser l'expression du reste fourni par le théorème 13.362. Pour tout $x \in]-1, \infty[$, il existe un $c \in]0, x[$ (le c dépend de x) tel que

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{16.244}$$

21. Théorème 16.13.
22. Théorème 12.80.

Cela est parce que f est de classe C^∞. Calculons un peu :

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{16.245a}$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{16.245b}$$
$$= \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}. \tag{16.245c}$$

Lorsque $x > 1$, il n'y a aucune garantie sur la convergence de cela pour $n \to \infty$. Pour rappel, $c \in]0, x[$. Si par contre $x \in]-1, 1[$, alors nous savons que

$$\left|\frac{x}{1+c}\right| < 1, \tag{16.246}$$

et donc convergence $P_n(x) - f(x) \to 0$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que pour la série de Taylor converge vers $\ln(1+x)$ pour $x \in]-1, 1[$. Nous avons également vu que la série converge pour $x = 1$. Donc la fonction

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \tag{16.247}$$

est de continue sur $]-1, 1]$ et égale à $\ln(x+1)$ sur $]-1, 1[$. Vu que $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est continue sur $]-1, \infty[$, nous avons également $g(1) = f(1) = \ln(2)$.

Ceci nous mène au dernier point de notre proposition : $g(1) = \ln(2)$ s'écrit précisément

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{16.248}$$

□

16.75.
La formule (16.243) peut sembler très chouette pour trouver des approximations de $\ln(2)$. Le problème est qu'elle ne donne aucune idée de l'erreur commise en tronquant la série.

Vous pouvez, certre écrite

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \simeq 0.78. \tag{16.249}$$

Ce calcul n'a aucune valeur pour affirmer que $\ln(2)$ doit être proche de 0.78. Ni même pour affirmer que $\ln(2) < 1$.

Avoir des valeurs numériques de $\ln(2)$ (c'est à dire que « chiffres corrects devant ou derrière la virgule ») demande d'avoir un encadrement. Cela doit donc se faire avec des formules de séries avec reste ; les formules exactes qui somment jusqu'à l'inifini sont inutiles pour avoir des approximations numériques.

Dans le cas de $\ln(2)$, une approximation numérique sera donnée à l'aide de Taylor avec reste intégrale dans la proposition 21.147.

Lemme 16.76.
Soit la fonction[23]

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{16.250}$$

(1) Elle admet un prolongement de classe C^∞ sur $]-1, \infty[$.

(2) $f(0) = 1$.

23. Pour la définition du logarithme, c'est la définition 16.58.

La seconde condition étant évidemment avec un abus de notation entre f et son prolongement, parce que f n'est pas définie en zéro.

Démonstration. La difficulté étant de voir que f a un prolongement en zéro et qu'elle y est de classe C^∞.

La 16.74 nous donne l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{16.251}$$

pour tout $x \in]-1,0]$; en particulier pour $x = 0$. Nous faisons le petit calcul suivant :

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \tag{16.252a}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \tag{16.252b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k+1} x^{k}. \tag{16.252c}$$

Ce calcul n'est pas valable pour $x = 0$, mais ça ne nous empêche pas de poser

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k+1} x^{k}, \tag{16.253}$$

qui, lui, est bien définie en zéro. Le rayon de convergence de la série T est égal à 1, de telle sorte que

$$T :]-1,1[\to \mathbb{R} \tag{16.254}$$

de classe C^∞, et est égale à f sur $]-1,1[\backslash\{0\}$.

La série T est donc le prolongement demandé. En ce qui concerne $f(0)$, c'est un abus pour écrire $T(0)$ qui vaut immédiatement 1. □

Notons qu'un calcul de limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{16.255}$$

donnait la valeur $f(0) = 1$. Donc prolonger avec $f(0) = 1$ était la seule possibilité pour avoir une fonction continue. De là à dire que le prolongement ainsi créé est de classe C^∞, c'est une autre histoire, qui est résoue par les séries entières.

16.5.13 Développements et calcul de limites

Lors d'un calcul de limite, développer une partie d'une expression peut être utile.

Exemple 16.77
À calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. \tag{16.256}$$

Cela est une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Le développement limité du numérateur [24] nous donne une fonction $\alpha(x)$ telle que $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$ et

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x). \tag{16.257}$$

Sur le membre de droite la limite est facile à calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \Big(1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x)\Big) = 1. \tag{16.258}$$

△

24. Proposition 16.72.

16.6 Vitesses de x^α, de l'exponentielle et du logarithme

16.6.1 Un peu de théorie

Voici une série de résultats qui lient les vitesses des polynômes, du logarithme et de l'exponentielle.

Proposition 16.78.
Nous avons :

(1) *Pour tout $\alpha > 0$, il existe N tel que $\ln(n) \leqslant n^\alpha$ pour tout $n \geqslant N$.*

(2) *Pour tout $p > 0$ et tout $\alpha > 0$, il existe N tel que*

$$\ln(n)^p < n^\alpha \tag{16.259}$$

pour tout $n \geqslant N$.

(3) *Pour tout $n \geqslant 1$ nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0. \tag{16.260}$$

(4) *Nous avons*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1. \tag{16.261}$$

(5) *L'exponentielle croit plus vite que tout polynôme, et plus vite que que logarithme :*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}(\ln t)^n t^\alpha = 0 \tag{16.262}$$

pour tout n et pour tout α.

(6) *Pour tout $n > 0$, nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = \infty. \tag{16.263}$$

Le point (1) et sa généralisation (2) nous font dire que le logarithme croît moins vite que n'importe quel polynôme.

Démonstration. En plusieurs parties.

Pour (1) En effet, nous avons, par la règle de l'Hospital (proposition 13.131),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \alpha x^\alpha = \infty \tag{16.264}$$

quand $\alpha > 0$. La dérivée du logarithme est dans la proposition 16.64.

Pour (2)

Pour (3) Lorsque $x \neq 0$ nous avons

$$x^n \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x^n}, \tag{16.265}$$

qui est un cas $\frac{\infty}{\infty}$. Nous nous en remettons à la règle de l'Hospital 13.132. D'abord nous nous assurons de la limite des dérivées :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{n}\frac{x^{n+1}}{x} = 0. \tag{16.266}$$

La règle de l'Hospital conclu à l'existence de la limite demandée et à son égalité à 0.

Pour (4) En effet, par la règle de l'Hospital 13.131,

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \tag{16.267}$$

Pour (5)

Pour (6) Nous passons au logarithme :

$$\ln(x^n e^{1/x}) = \ln(x^n) + \ln(e^{1/x}) = n\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{nx\ln(x)+1}{x}. \tag{16.268}$$

Grâce à la limite déjà prouvée en (3), le numérateur tend vers 1 lorsque $x \to 0^+$. Donc le tout tend vers $+\infty$. Au final,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^n e^{1/x})} = \infty. \tag{16.269}$$

□

Exemple 16.79

Le lemme 13.338 a déjà prouvé la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n \tag{16.270}$$

pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$.

L'utilisation de propriétés de l'exponentielle nous permet de donner une nouvelle preuve, plus courte [25].

Le théorème 16.62 et la proposition 16.60 nous permettent de passer à l'exponentielle. Pour chaque n nous avons :

$$n^\alpha a^n = e^{\alpha\ln(n)+n\ln(a)}. \tag{16.271}$$

Ce qui est dans l'exponentielle est

$$\alpha\ln(n) + n\ln(a) = n\big(\alpha\frac{\ln(n)}{n} + \ln(a)\big). \tag{16.272}$$

Dans la parenthèse, $\ln(a) < 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$. Donc ce qui est dans l'exponentielle (16.271) tend vers $-\infty$ et au final l'expression demandée tend vers zéro. △

Remarque 16.80.

Vous ne pouvez pas a priori considérer l'exemple 16.79 comme une preuve alternative au lemme 13.338, parce que vous n'êtes pas sûr que dans toute la théorie permettant de définir l'exponentielle (en particulier la convergence de $\sum_k x^k/k!$), le lemme n'est pas utilisé [26].

Proposition 16.81.

Pour tout polynôme P et pour tout $a > 0$ la fonction $f(x) = P(x)e^{-ax}$ est intégrable [27] sur $[0,\infty[$.

Démonstration. Nous avons $f(x) = P(x)e^{-ax/2}e^{-ax/2}$, et par la vitesse comparée des exponentielles et polynômes, pour un certain $M > 0$ nous pouvons affirmer que $P(x)e^{-ax/2} < 1$ sur $[M, 0[$. Dès lors

$$|f(x)| < e^{-ax/2}, \tag{16.273}$$

qui est intégrable. □

Exemple 16.82

La fonction logarithme (définition 16.58) n'est pas définie pour $x \leqslant 0$. Par conséquent la fonction $f(x) = x\ln(|x|)$ n'est pas définie en $x = 0$. Elle est bien définie pour $x < 0$ et vérifie

$$\lim_{x\to 0} x\ln(|x|) = 0. \tag{16.274}$$

25. C'est toujours facile de prétendre qu'une preuve est plus courte qu'une autre lorsqu'on utilise en une ligne des très gros théorèmes qui ont mis dix pages à être démontrés.

26. Faites la vérification et dites moi si c'est bon.

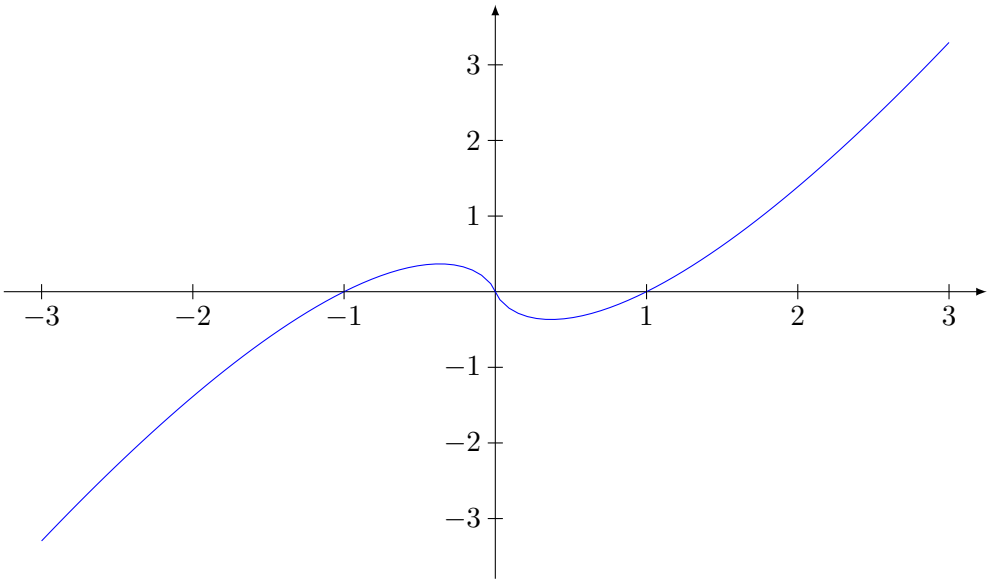
27. Définition 15.168.

Nous pouvons donc définir la fonction

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{16.275}$$

Contrairement à la fonction initiale f, cette fonction $\tilde{f}$ est définie et continue en 0.

Notez que sur le graphe de la fonction $\tilde{f}$, la courbe est bien régulière en $x=0$.



△

16.6.2 Nombres premiers

Théorème 16.83.
Soit P, l'ensemble des nombres premiers. Alors la somme $\sum_{p\in P}\frac{1}{p}$ diverge et plus précisément,

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in P}}\frac{1}{p}\geqslant \ln(\ln(x))-\ln(2). \tag{16.276}$$

Démonstration. Nous posons

$$S_x=\{q\leqslant x \text{ avec } q \text{ sans facteurs carrés}\} \tag{16.277}$$

et

$$P_x=\{p\in P \text{ tel que } p\leqslant x\}. \tag{16.278}$$

Si

$$K_x=\{(q,m) \text{ tels que } q \text{ n'a pas de facteurs carrés et } qm^2\leqslant x\}, \tag{16.279}$$

alors nous avons

$$K_x=\bigcup_{q\in S_x}\bigcup_{m\leqslant\sqrt{x/q}}(q,m). \tag{16.280}$$

Par définition et par le lemme 3.26 nous avons aussi

$$\{n\leqslant x\}=\{qm^2 \text{ tel que } (q,m)\in K_x\}. \tag{16.281}$$

Tout cela pour décomposer la somme

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\sum_{q\in S_x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x/q}}\frac{1}{m^2}\leqslant\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}\underbrace{\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^2}}_{=C}. \tag{16.282}$$

Nous avons aussi

$$\prod_{p\in P_x}\left(1+\frac{1}{p}\right)=1+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}+\sum_{\substack{p,q\in P_x\\ p<q}}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\ p<q<r}}\frac{1}{pqr}+\dots \tag{16.283a}$$

$$\geqslant 1+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}+\sum_{\substack{p,q\in P_x\\ pq\leqslant x}}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\ pqr\leqslant x}}\frac{1}{pqr}+\dots \tag{16.283b}$$

Les sommes sont finies. Les sommes s'étendent sur toutes les façons de prendre des produits de nombres premiers distincts de telle sorte de conserver un produit plus petit que x ; c'est-à-dire que les sommes se résument en une somme sur les éléments de S_x :

$$\exp\left(\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}\right)\geqslant\prod_{p\in P_x}\left(1+\frac{1}{p}\right)\geqslant\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}. \tag{16.284}$$

La première inégalité est simplement le fait que $1+u\leqslant e^u$ si $u\geqslant 0$ (directe de la définition 16.62). Les inégalités suivantes proviennent du fait que le logarithme est une primitive de la fonction inverse (proposition 16.64) :

$$\ln(x)\leqslant\sum_{n\geqslant x}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{n\geqslant x}\frac{1}{n}. \tag{16.285}$$

Nous prolongeons ces inégalités avec les inégalités (16.282) et (16.284) :

$$\ln(x)\leqslant\sum_{n\geqslant x}\frac{1}{n}\leqslant C\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}\leqslant C\leqslant\exp\left(\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}\right). \tag{16.286}$$

En passant au logarithme,

$$\ln\big(\ln(x)\big)\leqslant\ln(C)+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}. \tag{16.287}$$

Ceci montre la divergence de la série de droite. Nous cherchons maintenant une borne pour C. Pour cela nous écrivons

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\sum_{n=2}\frac{1}{n(n-1)} \tag{16.288a}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \tag{16.288b}$$

$$=1+1-\frac{1}{N} \tag{16.288c}$$

$$\leqslant 2. \tag{16.288d}$$

Donc $C\leqslant 2$. □

Ce théorème prend une nouvelle force en considérant le théorème de Müntz 18.7 qui dit qu'alors l'ensemble $\mathrm{Span}\{x^p \text{ tel que } p \text{ est premier}\}$ est dense dans les fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme ou $\|.\|_2$.

16.6.3 Quelques limites

Nous voyons à présent quelques calculs de limite et de développements mettant en scène des logarithmes et exponentielles.

Exemple 16.84
Pour trouver le développement de la fonction $f(x) = e^{-2x}$, il suffit d'écrire celui de e^t et de remplacer ensuite t par $-2x$. Le développement à l'ordre 3 de la fonction exponentielle est :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\alpha(t). \tag{16.289}$$

Le développement de $f(x) = e^{-2x}$ sera donc

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} - 8x^3\alpha(-2x). \tag{16.290}$$

Donc le polynôme de degré 3 partie régulière de g est :

$$1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3, \tag{16.291}$$

et la fonction reste correspondante est :

$$\alpha_g(x) = -8\alpha(-2x). \tag{16.292}$$

△

Exemple 16.85
Nous savons les développements

$$f(x) = \ln(1 + x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{16.293}$$

et

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{6}. \tag{16.294}$$

Nous obtenons le développement d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln\big(1 + \sin(x)\big)$ en écrivant

$$\ln\big(1 + \sin(x)\big) \sim \big(x - \frac{x^3}{6}\big) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3. \tag{16.295}$$

Il s'agit maintenant de trouver les termes qui sont de degré inférieur ou égale à 3.

D'abord

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \sim x^2 \tag{16.296}$$

Nous avons alors aussi

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^6 \sim x^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \sim x^3. \tag{16.297}$$

En replaçant tout ça dans (16.295) nous trouvons

$$\ln\big(1 + \sin(x)\big) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \tag{16.298}$$

△

Exemple 16.86
Calculer

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1 + 4x^2} - 2x. \tag{16.299}$$

Nous allons effectuer un développement asymptotique de la partie « difficile » de l'expression posant d'abord $x = 1/h$. Si $f(x) = e^{1/x}\sqrt{1-4x^2}$ alors

$$g(h) = \frac{1}{|h|}e^h\sqrt{h^2+4} = \frac{1}{h}\big(1+h+h\alpha(h)\big)\big(2+h\beta(h)\big). \tag{16.300}$$

La première parenthèse est le développement de e^h et la seconde celui de $\sqrt{h^2+4}$. Nous nous apprêtons à faire la limite $x \to \infty$ qui correspond à $h \to 0^+$, nous pouvons donc supposer que $h > 0$ et omettre la valeur absolue. En effectuant le produit et en regroupant tous les termes contenant h^2, $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ dans un seul terme $h\gamma(h)$,

$$f(h) = \frac{1}{h}\big(2+2h+h\gamma(h)\big) = \frac{2}{h} + 2 + \gamma(h) = 2x + 2 + \gamma(1/x) \tag{16.301}$$

où γ est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la limite (16.299) :

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+x^2} - 2x = \lim_{x\to\infty}\big(2x+2+\gamma(1/x)-2x\big) = 2. \tag{16.302}$$

△

16.7 Trigonométrie hyperbolique

Définition 16.87.
Les fonctions ***cosinus hyperbolique*** *et* ***sinus hyperbolique*** *sont les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par les formules suivantes :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{16.303a}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{16.303b}$$

Si vous ne vous rappelez plus la définition de e^x*, c'est 16.37.*

Proposition 16.88.
Quelque propriétés algébriques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh(-x) = \cosh(x)$

(2) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

(3) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Démonstration. Si s'agit simplement de remplacer les définitions. □

Proposition 16.89.
Quelque propriétés analytiques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh'(x) = \sinh(x)$

(2) $\sinh'(x) = \cosh(x)$.

(3) $\cosh(x) \geqslant 1$.

Démonstration. Pour les dérivées, il s'agit d'utiliser la dérivation de l'exponentielle, laquelle est facile par le théorème 16.62(1).

Pour (3), nous commençons par les $x \geqslant 0$. D'abord $\cosh(0) = 1$. Ensuite $\cosh'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Vu que $x > 0$ nous avons $e^x > e^{-x} > 0$. Donc la dérivée de cosh est strictement positive sur $]0,\infty[$. La fonction y est donc partout plus grande que $\cosh(0) = 1$.

Pour les $x < 0$, nous avons la fait que cosh est paire. □

Proposition 16.90.
La fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est bijective.*

Démonstration. En deux parties.

Injective Si $\sinh(a) = \sinh(b)$, alors le théorème de Rolle 13.126 affirme qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\sinh'(c) = 0$. Mais la proposition 16.89 nous dit que $\sinh'(x) = \cosh(c) \geqslant 1$. Donc impossible.

Surjective Nous avons

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty \tag{16.304}$$

et

$$\lim_{x \to \infty} \sinh(x) = \infty. \tag{16.305}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $m < 0$ tel que $\sinh(m) < y$ et $M > 0$ tel que $\sinh(M) > y$. Le théorème des valeurs intermédiaires 13.50 nous enseigne qu'il existe $x \in [m, M]$ tel que $\sinh(x) = y$.

□

Proposition 16.91 ([1])**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a - b^2 = 1$. *Il existe un unique* $(x, \sigma) \in \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ *tel que*

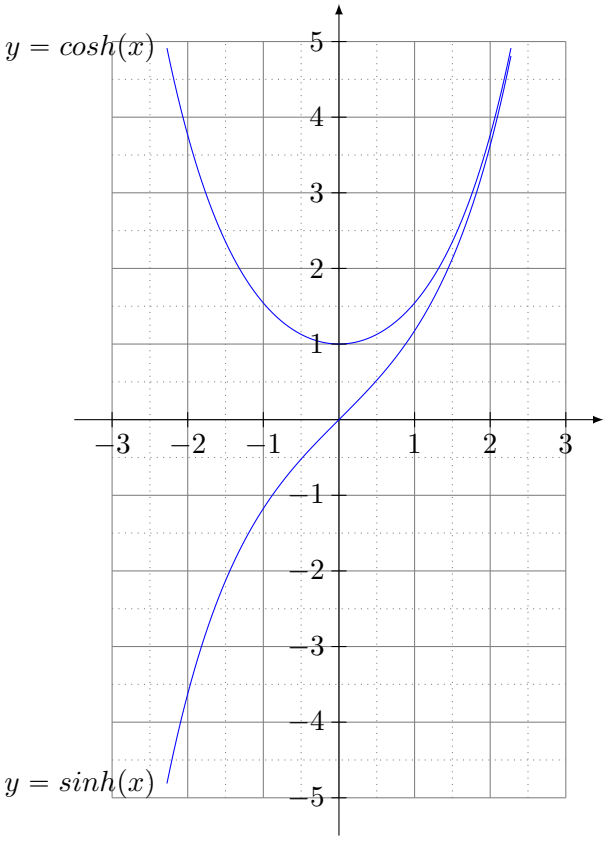
$$\begin{cases} \sinh(x) = b & \text{(16.306a)} \\ \sigma \cosh(x) = a. & \text{(16.306b)} \end{cases}$$

Démonstration. Vu que le sinus hyperbolique est une bijection [28], il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x) = b$. Maintenant un petit calcul :

$$a^2 = 1 + \sinh(x)^2 = 1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \cosh(x)^2. \tag{16.307}$$

Vu que $\cosh(x)^2 = a^2$, il existe un unique $\sigma \in \{\pm 1\}$ tel que $\sigma \cosh(x) = a$. □

Les représentations graphiques sont ceci :



28. Proposition 16.90.

La **tangente hyperbolique** est donnée par le quotient

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{16.308}$$

16.8 Séries entières de matrices

16.8.1 Différentiabilité

Proposition 16.92.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \end{aligned} \tag{16.309}$$

Alors

(1) La différentielle de f sur $B(0,R)$ est

$$df_A(U) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{k-1} A^l U A^{k-1-l}, \tag{16.310}$$

c'est-à-dire que l'on peut différentier terme à terme. (Ici c'est A qui est dans $B(0,R)$)

(2) La convergence de la somme 16.310 est absolue.

(3) La convergence de la somme 16.310 est normale sur tout compact.

(4) La fonction f est de classe C^1 sur $B(0,R)$, c'est-à-dire que la fonction $A \mapsto df_A$ est continue.

Notons que df_A n'est pas tout à fait une série entière. Cependant, en ce qui concerne les normes, c'est tout comme si ça l'était.

Démonstration. Nous posons $u_k(A) = a_k A^k$, qui est une fonction de classe C^∞ et dont la différentielle est donnée par

$$(du_k)_A(U) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(A+tU)\Big]_{t=0} = a_k \frac{d}{dt}\Big[(A+tU)^k\Big]_{t=0}; \tag{16.311}$$

en distribuant le produit nous trouvons tout un tas de termes dont seuls ceux contenant exactement une fois tU ne vont pas s'annuler. Étant donné que U et A ne commutent pas nous avons l'expression un peu moche

$$(du_k)_A(U) = \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}. \tag{16.312}$$

En ce qui concerne la norme, nous regardons celle de $(du_k)_A$ pour un A fixé ; c'est-à-dire que nous en regardons la norme opérateur :

$$\|(du_k)_A\| = \sup_{\|U\|=1} \| \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}\| \leqslant \sum_{l=0}^{k-1} |a_k| \|A\|^l \|A\|^{k-1-l} \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1}. \tag{16.313}$$

Pour donner la convergence nous considérons un nombre r tel que $\|A\| < r < R$, de telle sorte que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée par un nombre M et que nous puissions écrire

$$\|(du_k)_A\| \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1} = \frac{k|a_k|\|A\|^k}{\|A\|} = \frac{k|a_k|}{\|A\|} r^k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k \leqslant \frac{M}{\|A\|} k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k, \tag{16.314}$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence absolue de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A. \tag{16.315}$$

Passons à la convergence normale sur tout compact. Nous nous fixons $r < R$ et nous nous intéressons à la norme de du_k sur $\overline{B(0,r)}$, c'est-à-dire

$$\|du_k\|_\infty = \sum_{x\in\overline{B(0,r)}} \|(du_k)_A\|. \tag{16.316}$$

Vu que $\overline{B(0,r)}$ est compact, ce supremum est un maximum et nous pouvons noter A_k la matrice qui le réalise. Nous réalisons alors les mêmes manipulations que pour (16.314) :

$$\|du_k\|_\infty = \|(du_k)_{A_k}\| \leqslant k|a_k|\|A_k\|^{k-1} \leqslant k|a_k|r^{k-1} = \frac{1}{r}k|a_k|r^k. \tag{16.317}$$

Nous prenons maintenant $r < r_0 < R$ et M, un majorant de $(a_n r_0^n)$, de telle sorte qu'en multipliant et divisant par r_0^k,

$$\|du_k\|_\infty \leqslant \frac{k|a_k|r_0^k}{r}\frac{r^k}{r_0^k} \leqslant \frac{kM}{r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \tag{16.318}$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence normale sur tout compact. Par voie de ~~fait~~ conséquences nous avons continuité de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}(du_k)_A \tag{16.319}$$

et convergence vers df_A par le théorème 16.6. □

Proposition 16.93.
Si le rayon de convergence de la série $u(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ est R, alors

(1) elle converge normalement sur tout compact de $B(0,R)$;

(2) la fonction u y est de classe C^∞.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} u_k\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto a_k A^k \end{aligned} \tag{16.320}$$

qui est évidemment une fonction de classe C^∞. Nous étudions la j^{e} différentielle en m, pour $k > j$ (dans une série, nous ne nous intéressons pas aux premiers termes). La j^{e} différentielle appliquée à v_1 appliquée à v_2, etc s'exprime de la façon suivante :

$$(d^j u_k)_m(v_1,\dots,v_j) = \frac{d}{dt_1}\dots\frac{d}{dt_j}\Big(u_k(m + t_1v_1 + \dots + t_jv_j)\Big)_{t_i=0}. \tag{16.321}$$

Dans le produit $(m+t_1v_1+\dots+t_jv_j)^k$, seuls les termes contenant exactement une fois chacun des t_i ne s'annulera pas après avoir fait la dérivée et évalué en $t_i = 0$. Combien de termes cela fait ? Parmi les k facteurs, il faut en placer j qui ne sont pas m (cela fait $\binom{k}{j}$ possibilités), et puis il faut ordonner ces j termes, cela fait encore $j!$ possibilités. Au final,

$$\|(d^j u_k)_m\| \leqslant |a_k|\binom{k}{j}j!\|m\|^{k-j} = |a_k|P(k)\|m\|^{k-j} \tag{16.322}$$

où $P(k) = \frac{k!}{(k-j)!}$ est un polynôme de degré j.

Afin d'étudier la convergence normale sur tout compact de la série des $d^j u_k$, nous considérons $r < r_0 < R$ et nous allons prouver la convergence normale sur $\overline{B(0,r)}$. Vu que c'est un compact, il

existe une matrice $m_k \in \overline{B(0,r)}$ telle que

$$\begin{aligned}
\|d^j u_k\|_\infty &= \|(d^j u_k)_{m_k}\| && (16.323a)\\
&\leqslant |a_k| P(k) \|m_k\|^{k-j} && (16.323b)\\
&\leqslant |a_k| P(k) r^{k-j} && (16.323c)\\
&= \frac{|a_k| P(k)}{r^j} r^k && (16.323d)\\
&= \frac{|a_k| r_0^k P(k)}{r^j} \left(\frac{r}{r_0}\right)^k && (16.323e)\\
&\leqslant \frac{M}{r^j} P(k) \left(\frac{r}{r_0}\right)^k && (16.323f)
\end{aligned}$$

où M est un majorant de $a_n r^n$. Vu que $r_0/r < 1$, la somme sur k converge et nous avons convergence normale sur tout compact de

$$d^j \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} d^j (a_k A^k) \tag{16.324}$$

avec un peu d'abus de notation. □

16.9 Exponentielle de matrices

Proposition 16.94.
Une matrice complexe est inversible si et seulement si elle est une exponentielle.

Autrement dit :

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})}. \tag{16.325}$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé dans la proposition 16.49 que toutes les exponentielles étaient inversibles. Ici nous nous concentrons sur la réciproque.

Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$; nous allons donner une matrice $B \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ telle que $A = \exp(B)$. D'abord remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour une matrice par classe de similitude. En effet si $A = \exp(B)$ et si M est inversible alors

$$\begin{aligned}
\exp(MBM^{-1}) &= \sum_k \frac{1}{k!} (MBM^{-1})^k && (16.326a)\\
&= \sum_k \frac{1}{k!} MB^k M^{-1} && (16.326b)\\
&= M \exp(B) M^{-1}. && (16.326c)
\end{aligned}$$

Donc $MAM^{-1} = \exp(MBM^{-1})$. Nous pouvons donc nous contenter de trouver un logarithme pour les blocs de Jordan. Nous supposons donc que $A = (\mathbb{1} + N)$ avec $N^m = 0$. En nous inspirant de (16.242), nous posons [29]

$$D(t) = tN - \frac{t^2}{2} N^2 + \cdots + (-1)^m \frac{t^{m-1}}{m-1} N^{m-1} \tag{16.327}$$

et nous allons prouver que $e^{D(1)} = \mathbb{1} + N$. Notons que N étant nilpotente, cette somme ainsi que toutes celles qui viennent sont finies. Il n'y a donc pas de problèmes de convergences dans cette preuve (si ce n'est les passages des équations (16.326)).

Nous posons $S(t) = e^{D(t)}$ (la somme est finie), et nous avons

$$S'(t) = D'(t) e^{D(t)} \tag{16.328}$$

29. Le logarithme d'un nombre n'est pas encore définit à ce moment, mais cela ne nous empêche pas de poser une définition ici pour une application des réels vers les matrices.

Afin d'obtenir une expression qui donne S' en termes de S, nous multiplions par $(\mathbb{1}+tN)$ en remarquant que $(\mathbb{1}+tN)D'(t)=N$ nous avons

$$(\mathbb{1}+tN)S'(t)=NS(t). \tag{16.329}$$

En dérivant à nouveau,

$$(\mathbb{1}+tN)S''(t)=0. \tag{16.330}$$

La matrice $(\mathbb{1}+tN)$ est inversible parce que son noyau est réduit à $\{0\}$. En effet si $(\mathbb{1}+tN)x=0$, alors $Nx=-\frac{1}{t}x$, ce qui est impossible parce que N est nilpotente. Ce que dit l'équation (16.330) est alors que $S''(t)=0$. Si nous développons $S(t)$ en puissances de t nous nous arrêtons au terme d'ordre 1 et nous avons

$$S(t)=S(0)+tS'(0)=\mathbb{1}+tD'(0)=1+tN. \tag{16.331}$$

En $t=1$ nous trouvons $S(1)=\mathbb{1}+N$. La matrice $D(1)$ donnée est donc bien un logarithme de $\mathbb{1}+N$. □

16.9.1 Diagonalisabilité d'exponentielle

Proposition 16.95 ([57]).
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Démonstration. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible M telle que $D=M^{-1}AM$ soit diagonale (c'est la définition 11.164). Dans ce cas nous avons aussi $(M^{-1}AM)^k=M^{-1}A^kM$ et donc $M^{-1}e^AM=e^{M^{-1}AM}=e^D$ qui est diagonale.

La partie difficile est donc le contraire.

Qui est diagonalisable et comment ? Nous supposons que e^A est diagonalisable et nous écrivons la décomposition de Dunford (théorème 11.216) :

$$A=S+N \tag{16.332}$$

où S est diagonalisable, N est nilpotente, $[S,N]=0$. Nous avons besoin de prouver que $N=0$.

Les matrices A est S commutent ; en passant au développement nous en déduisons que A et e^S commutent, puis encore en passant au développement que e^A et e^S commutent. Vu que S est diagonalisable, e^S l'est et par hypothèse e^A est également diagonalisable. Donc e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables par la proposition 11.170.

Étant donné que A et S commutent, nous avons $e^N=e^{A-S}=e^Ae^{-S}$, et nous en déduisons que e^N est diagonalisable vu que les deux facteurs e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables.

Unipotence Si r est le degré de nilpotence de N, nous avons

$$e^N-\mathbb{1}=N+\frac{N^2}{2}+\cdots+\frac{N^{r-1}}{(r-1)!}. \tag{16.333}$$

Donc

$$(e^N-\mathbb{1})^k=\left(N+\frac{N^2}{2}+\cdots+\frac{N^{r-1}}{(r-1)!}\right)^k \tag{16.334}$$

où le membre de droite est un polynôme en N dont le terme de plus bas degré est de degré k. Donc $(e^N-\mathbb{1})$ est nilpotente et e^N est unipotente.

Si M est la matrice qui diagonalise e^N, alors la matrice diagonale $M^{-1}e^NM$ est tout autant unipotente que e^N elle-même. En effet,

$$(M^{-1}e^NM-\mathbb{1})^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}M^{-1}(e^N)^kM \tag{16.335a}$$
$$=M^{-1}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}(e^N)^k\right)M \tag{16.335b}$$
$$=M^{-1}(e^N-\mathbb{1})^rM \tag{16.335c}$$
$$=0. \tag{16.335d}$$

La matrice $M^{-1}e^NM$ est donc une matrice diagonale et unipotente ; donc $M^{-1}e^NM=\mathbb{1}$, ce qui donne immédiatement que $e^N=\mathbb{1}$.

Polynômes annulateurs En reprenant le développement (16.333) sachant que $e^N=\mathbb{1}$, nous savons que

$$N+\frac{N^2}{2}+\cdots+\frac{N^{r-1}}{(r-1)!}=0. \tag{16.336}$$

Dit en termes pompeux (mais non moins porteurs de sens), le polynôme

$$Q(X)=X+\frac{X^2}{2}+\cdots+\frac{X^{r-1}}{(r-1)!} \tag{16.337}$$

est un polynôme annulateur de N.

La proposition 11.135 stipule que le polynôme minimal d'un endomorphisme divise tous les polynômes annulateurs. Dans notre cas, X^r est un polynôme annulateur et donc le polynôme minimal de N est de la forme X^k. Donc il est X^r lui-même.

Nous avons donc $X^r\mid Q$. Mais Q est un polynôme contenant le monôme X donc X^r ne peut diviser Q que si $r=1$. Nous en concluons que X est un polynôme annulateur de N. C'est-à-dire que $N=0$.

Conclusion Vu que Dunford[30] dit que $A=S+N$ et que nous venons de prouver que $N=0$, nous concluons que $A=S$ avec S diagonalisable.

□

16.10 Étude d'asymptote

Lorsqu'une fonction tend vers l'infini pour $x\to\infty$, une question qui peut venir est : à quelle vitesse tend-t-elle vers l'infini ?

Il est « visible » que la fonction logarithme ne tend pas très vite vers l'infini : certes

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty, \tag{16.338}$$

mais par exemple $\ln(100000)\simeq 11.5$ tandis que $e^{100000}\simeq 10^{43429}$. Sans contestations possibles, l'exponentielle croit plus vite que le logarithme.

Soient f et g deux fonctions dont la limite $x\to\infty$ est ∞. Si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \tag{16.339}$$

nous disons que g tend vers ∞ plus vite que f ; si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \tag{16.340}$$

30. Théorème 11.216.

nous disons que f tend vers ∞ plus vite que g, et si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=a\in\mathbb{R} \tag{16.341}$$

avec $a\neq 0$ alors nous disons que f tend vers l'infini à la même vitesse que $ag(x)$.

Exemple 16.96
La fonction $x\mapsto x^2$ tend vers l'infini plus vite que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$. △

Dans cette section nous allons nous contenter de déterminer les fonctions qui tendent vers l'infini aussi vite qu'une droite oblique, que nous appellons asymptote et que nous voulons déterminer.

Exemple 16.97
Déterminer les asymptotes obliques (s'ils existent) de la fonction

$$f(x)=e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}. \tag{16.342}$$

Tout d'abord nous remarquons que $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Nous sommes donc en présence d'une branche du graphe qui tend vers l'infini. Ensuite,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{1/x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}=2. \tag{16.343}$$

Donc le graphe de f tend vers l'infini à la même vitesse que le graphe de la fonction $y=2x$. Nous aurons donc une asymptote oblique de coefficient directeur 2. De façon imagée, nous pouvons penser que le graphe de f et celui de $y=2x$ sont presque parallèles si x est assez grand. Afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il nous reste à voir quelle est la « distance » entre le graphe de f et celui de $y=2x$:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-2x=\lim_{x\to\infty}e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}-2x. \tag{16.344}$$

Cette limite a été calculée dans l'exemple 16.86 et vaut 2.

Nous concluons que le graphe de la fonction f admet l'asymptote

$$y=2x+2. \tag{16.345}$$

△

16.11 Développement en série

16.11.1 Série génératrice d'une suite

Soit u_n une suite telle que le rayon de convergence de

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n \tag{16.346}$$

soit strictement positif. Alors la série f est la **série génératrice** de la suite (u_n).

Grâce au théorème 16.25 nous pouvons la dériver terme à terme autour de $z=0$. En utilisant la petite formule (16.79) nous trouvons

$$f^{(l)}(z)=\sum_{n=l}^{\infty}u_n\frac{n!}{(n-l)!}z^{n-l}, \tag{16.347}$$

et donc

$$u_l=\frac{f^{(l)}(0)}{l!}. \tag{16.348}$$

D'où le nom de série génératrice. Cela est évidemment intéressant seulement si nous connaissons une autre forme pour f par ailleurs.

Nous en utiliserons une pour déterminer les partitions d'un nombre en parts fixes, proposition 27.45.

16.11.2 Développement en série et Taylor

Définition 16.98.
*Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous disons que f est **développable en série entière** dans un voisinage de z_0 s'il existe une série $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \leqslant R$ tel que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{16.349}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Proposition 16.99.
Si V est un ouvert dans $\mathbb{C}$ alors l'ensemble des fonctions $V \to \mathbb{C}$ développables en série entière forme une $\mathbb{C}$-algèbre.

Démonstration. Les séries entières passent aux sommes et aux produits en gardant des rayons de convergence non nuls. □

Proposition 16.100.
*Si f est développable en série entière à l'origine alors elle est C^∞ sur un voisinage de l'origine et le développement est celui de **Taylor** :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{16.350}$$

pour tout x dans un voisinage de 0.

Démonstration. Si $f(x) = \sum a_n x^n$, nous savons que f est C^1 et que nous pouvons dériver terme à terme (au moins dans un voisinage). De plus le fait de dériver ne change pas le domaine. Par récurrence, la fonction est C^∞ sur le voisinage. En dérivant k fois la série $\sum a_n x^n$ nous trouvons

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}. \tag{16.351}$$

En calculant en $x = 0$ nous trouvons

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \tag{16.352}$$

d'où le terme général

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{16.353}$$

□

Si f est une fonction et si la série

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{16.354}$$

converge, alors cette série est la **série de Taylor** de f.

Remarque 16.101.
La série de Taylor d'une fonction n'est pas liée à sa fonction de façon aussi raide qu'on pourrait le croire. Même dans le cas d'une fonction C^∞ il peut arriver que $T_f(x) \neq f(x)$.

Il peut aussi arriver que f ne soit pas développable en série entières.

Exemple 16.102
Nous considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{16.355}$$

Nous avons

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{16.356}$$

Note : pour la seconde ligne nous devons faire explicitement le calcul

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-1/t^2} = 0. \tag{16.357}$$

Plus généralement nous avons $f^{(k)}(0) = 0$, et par conséquent la série de Taylor converge (trivialement) vers la fonction identiquement nulle.

Cette fonction n'est donc pas développable en série entière vu qu'il n'existe aucun voisinage de zéro sur lequel la série de f coïncide avec f. △

Exemple 16.103
Développement de $f(x) = \arctan(x)$. Nous savons que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \tag{16.358}$$

alors que nous connaissons le développement

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{16.359}$$

pour tout $x \in B(0, 1)$. Nous avons donc successivement

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0} (-x)^n \tag{16.360a}$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0} (-1)^n x^{2n} \tag{16.360b}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + C. \tag{16.360c}$$

Notons que dans la dernière nous avons évité d'écrire la somme depuis $n = 0$ (qui serait un terme constant) et nous avons écris explicitement « $+C$ ». Étant donné que $\arctan(0) = 0$, nous devons poser $C = 0$ et donc

$$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}. \tag{16.361}$$

△

16.11.3 Resommer une série

Nous avons vu comment trouver la série correspondant à une fonction donnée. Un exercice difficile consiste à trouver la fonction qui correspond à une somme donnée.

16.11.3.1 Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$

Pour calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n \tag{16.362}$$

où P est un polynôme de degré m nous commençons par écrire

$$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1(n + 1) + \alpha_2(n + 1)(n + 2) + \cdots + \alpha_m(n + 1)\dots(n + m). \tag{16.363}$$

Nous décomposons alors la somme en m sommes de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k} \right)^{(k)}. \tag{16.364}$$

Effectuons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \tag{16.365}$$

Notons que dans un usage pratique, ce terme devra être ensuite dérivé trois fois, de telle manière que les termes « correctifs » n'interviennent pas. Cette méthode ne demande donc que de calculer les dérivées successives de $1/(1-x)$.

Exemple 16.104
Calculons la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n. \tag{16.366}$$

D'abord nous écrivons

$$n^3 = -1 + 7(n+1) - 6(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3). \tag{16.367}$$

Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(x-1)^2}. \tag{16.368}$$

De la même façon,

$$\sum_n (n+1)(n+2)x^n = \left(\sum x^{n+2} \right)'' = \frac{-2}{(x-1)^3} \tag{16.369a}$$

$$\sum_n (n+1)(n+2)(n+3)x^n = \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{16.369b}$$

En remettant tout ensemble nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = -\frac{1}{1-x} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{12}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{16.370}$$

Nous pouvons vérifier ce résultat en traçant les deux courbes et en remarquant qu'elles coïncident.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: n=var('n')
sage: S(x)=sum(  [ n**3*x**n for n in range(0,30)  ]   )
sage: f(x)=-1/(1-x)+7/((x-1)**2)+12/((x-1)**3)+6/( (x-1)**4  )
sage: S(0.1)
0.214906264288980
sage: f(0.1)
0.214906264288981
sage: f.plot(-0.5,0.5)+S.plot(-0.5,0.5)
```

△

16.11.3.2 Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$

Si $P(n)$ a des racines entières, nous pouvons le décomposer en fractions simples et utiliser la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \tag{16.371}$$

Nous avons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{16.372a}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}. \tag{16.372b}$$

Notez le changement de point de départ de la somme au passage.

Autre exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right) \tag{16.373a}$$

$$= -\frac{\ln(x-1)}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}. \tag{16.373b}$$

Si le polynôme possède des racines non entières, les choses se compliquent.

Exemple 16.105
Calculons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}. \tag{16.374}$$

Si $x \geqslant$, en posant $t = \sqrt{x}$ nous trouvons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{16.375}$$

Étudions

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{16.376}$$

Nous avons

$$H'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0} (t^2)^n = \frac{1}{1-t^2}. \tag{16.377}$$

Une primitive de cette fonction est

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \tag{16.378}$$

En $t = 0$, cette fonction vaut 0 qui est la bonne valeur. Donc nous avons bien

$$H(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \tag{16.379}$$

Notons que ce que l'équation (16.377) nous dit est que $H(t)$ est une primitive de $1/(1-t^2)$. Il faut choisir la bonne primitive en fixant une valeur.

Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| \tag{16.380}$$

pour $x > 0$. Nous devons encore trouver ce que cela vaut pour $x < 0$.

Nous posons successivement $X=-x$ puis $g(X)=f(-X)$. Ce que nous devons calculer est

$$g(t)=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{16.381}$$

Si nous posons

$$h(t)=\sum\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}, \tag{16.382}$$

alors

$$h'(t)=\sum(-1)^n t^{2n}=\sum(-t^2)^n=\frac{1}{1+t^2}, \tag{16.383}$$

par conséquent $h(t)=\arctan(t)$ (cela avait déjà été déduit à l'envers dans l'exemple 16.103).

Au final

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| & \text{si } x>0\\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases} \tag{16.384}$$

Notons qu'elle est continue en zéro à gauche et à droite.

△

Exemple 16.106

Nous considérons l'exemple suivant :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3n+2}. \tag{16.385}$$

Nous posons $t=\sqrt[3]{x}$, et nous substituons :

$$\frac{x^n}{3n+2}=\frac{t^{3n}}{3n+2}=\frac{1}{t^2}\frac{t^{3n+2}}{3n+2}. \tag{16.386}$$

Nous devons étudier la fonction

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n+2}}{3n+2} \tag{16.387}$$

Nous avons

$$g'(t)=\sum_{n=0}t^{3n+1}=t\sum_{n=0}t^{3n}=\frac{t}{1-t^3}. \tag{16.388}$$

Notons que $g(0)=0$. △

Exemple 16.107

Calculer le nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{16.389}$$

Nous aurions envie de dire que cela est $f(-1)$ pour la fonction f donnée en (16.384). Le problème est que le rayon de convergence de f étant 1, rien n'est garantit quand au fait que la fonction y soit continue en $x=-1$. En particulier nous devons justifier le fait que

$$\lim_{x\to-1}\sum_n\frac{x^n}{2n+1}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{-x}}\arctan(\sqrt{-x}). \tag{16.390}$$

Ce qui nous sauve est le critère d'Abel radial (théorème 16.21). En effet la série

$$\sum\frac{r^n}{2n+1} \tag{16.391}$$

étant convergente avec $r = -1$, la série correspondante est continue sur $[-1, 0]$. Nous pouvons donc calculer la série (16.389) en posant $x = -1$ dans (16.384) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{16.392}$$

Note : la série (16.391) ne converge pas avec $r = 1$. La fonction f n'est pas continue en $x = 1$. △

Exemple 16.108
Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{16.393}$$

En effet si nous désignons par f la somme à gauche, nous trouvons que $f = g'$ avec

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n. \tag{16.394}$$

Nous savons par ailleurs que $g(x) = 1/(1-x)$. Par conséquent

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{16.395}$$

△

16.11.3.3 Sage, primitives et logarithme complexe

16.109.
Attention : Sage pourrait nous induire en erreur si nous n'y prenions pas garde. En effet ce que vous ne savez pas mais que Sage sait, c'est que

$$\ln(-1) = i\pi. \tag{16.396}$$

Par conséquent Sage se permet de donner des primitives sans valeurs absolues dans le logarithme :

```
sage: f(x)=1/x
sage: f.integrate(x)
x |--> log(x)
```

La primitive à laquelle on s'attend d'habitude est $\ln(|x|)$. Ici la réponse est correcte parce que si x est négatif nous avons

$$\ln(x) = \ln\big((-1)|x|\big) = \ln(-1) + \ln(|x|). \tag{16.397}$$

Cette fonction est donc décalée de la primitive usuelle seulement de la constante $\ln(-1)$.

Un exemple plus élaboré :

```
sage: h(x)=1/(1-x**2)
sage: H=h.integrate(x)
sage: H
x |--> -1/2*log(x - 1) + 1/2*log(x + 1)
sage: H(0)
-1/2*I*pi
```

Exemple 16.110
Encore une fois il faut faire attention en demandant la primitive à Sage :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=x/(1-x**3)
sage: F=f.integrate(x)
sage: F(0)
-1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3))
```

Cette fois la primitive proposée diffère de celle qu'on cherche de la constante complexe

$$-\frac{\pi}{3}i. \tag{16.398}$$

Mais il y a pire si nous voulons tracer. Nous voudrions définir la fonction $F_2(x) = F(x) - F(0)$. Mathématiquement c'est bien de cette fonction que nous parlons, mais :

```
sage: F2(x)=F(x)-F(0)
sage: F2(x)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*(2*x + 1)*sqrt(3)) +
    +1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 1/3*log(x - 1) + 1/6*log(x^2 + x + 1)
sage: F2.plot(x,-0.1,0.1)
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        WARNING: When plotting, failed to evaluate function at 200 points.
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        Last error message: 'unable to simplify to float approximation'
```

Il refuse de tracer. Pourquoi ? La partie complexe de l'expression de F_2 est mathématiquement nulle, mais elle est en deux parties :

$$\frac{\pi}{3} + \text{la partie imaginaire de} -\frac{1}{3}\ln(x-1). \tag{16.399}$$

Lorsque Sage tente de tracer, il donne à x un certain nombre de valeurs et calcule une *valeur approchée* de $\ln(x-1)$. Cette dernière ne se simplifie pas avec le nombre *exact* $\pi/3$. Sage reste donc avec une partie imaginaire qu'il ne peut pas tracer.

Notez la nuance :

```
sage: ln(-0.1)
-2.30258509299405 + 3.14159265358979*I
sage: ln(-1/10)
I*pi + log(1/10)
```

Du coup nous avons aussi

```
sage: F2(-0.1)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(0.266666666666667*sqrt(3))
    + 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 0.0474885065133152 - 1.04719755119660*I
```

△

16.11.3.4 Nombres de Bell

Ici nous montrerions bien le théorème 16.124 sur les nombres de Bell parce que c'est essentiellement un résultat sur les séries entières et leurs manipulations. Hélas, il demande un tout petit peu d'équation différentielle (presque rien). Donc il est postposé jusqu'en page 1041.

16.12 Séries entières de matrices

Nous nous proposons d'étudier des séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{16.400}$$

où A est une matrice. L'essentiel de la théorie va rester. Nous considérons une norme algébrique (définition 12.14), c'est-à-dire $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

16.12.1 Rayon de convergence

La notion de rayon de convergence de cette série reste la même : c'est la définition 16.8 qui ne dépend que des coefficients a_k et pas du tout de ce qu'on met à côté dans la somme. Évidemment il faudra montrer que dans le cas des matrices, le nom « rayon de convergence » n'est pas usurpé.

Proposition 16.111.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\|A\| < R$. Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{16.401}$$

converge absolument, c'est-à-dire que $\sum_k \|a_k A^k\| < \infty$.

Démonstration. Nous avons les majorations

$$\|a_n A^n\| \leqslant |a_n|\|A^n\| \leqslant |a_n|\|A\|^n. \tag{16.402}$$

Par hypothèse $\|A\| < R$ et R est un supremum, donc il existe r tel que $\|A\| < r < R$ avec $(a_n r^n)$ borné. Nommons M un majorant de la suite $(a_n r^n)$. Alors nous avons

$$\|A_n A^n\| \leqslant |a_n| r^n \frac{\|A\|^n}{r^n} \leqslant M \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^n. \tag{16.403}$$

La série du membre de droite converge parce que c'est une série géométrique de raison plus petite que 1 ; voir l'exemple 12.75. □

16.12.2 Convergence et rayon spectral

Le concept de rayon spectral permet aussi de donner des informations sur la convergence de séries de matrices. Pour rappel le rayon spectral d'une matrice est le maximum du module de ses valeurs propres (définition 12.15). Le rayon spectral de la matrice A est noté $\rho(A)$.

La proposition suivante sera redémontrée indépendamment dans le théorème 16.113.

Proposition 16.112 ([57]).
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) < 1$, alors $A^n \to 0$.

Démonstration. Nous nous plaçons dans une base des espaces caractéristiques[31] de A, c'est-à-dire que nous supposons que la matrice A a la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \mathbb{1} + N_s \end{pmatrix} \tag{16.404}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les N_i sont nilpotentes. En effet nous savons que l'espace caractéristique F_{λ_i} est l'espace de nilpolence de $A - \lambda_i \mathbb{1}$. Si nous notons A_i la restriction de A à

31. Voir le théorème 11.215

cet espace, la matrice $N_i = A_i - \lambda_i \mathbb{1}$ est nilpotente. Du coup $A_i = \lambda_I \mathbb{1} + N_i$ et nous avons bien la décomposition (16.404).

Nous avons donc $A^n \to 0$ si et seulement si $(N_i + \lambda_i \mathbb{1})^n \to 0$ pour tout i. Soit donc N nilpotente et $\lambda < 1$ (parce que nous savons que toutes les valeurs propres de A sont inférieures à un). Nous avons

$$(\lambda \mathbb{1} + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k. \tag{16.405}$$

Nous voyons que le nombre de termes dans la somme ne dépend pas de n. De plus pour chacun de termes, la puissance de N ne dépend pas non plus de n. Le terme

$$\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \leqslant P(n) \lambda^{n-k} \tag{16.406}$$

où P est un polynôme tend vers zéro lorsque n devient grand parce que c'est une cas polynôme fois exponentielle. □

Théorème 16.113 (Thème 42[176]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les affirmations suivantes sont équivalentes.

(1) $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$

(2) $\rho(A) < 1$

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ *converge.*

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, nous avons aussi

— $\mathbb{1} - A$ *est inversible,*

— $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (\mathbb{1} - A)^{-1}$

Démonstration. Nous supposons qu'une norme est donnée sur $\mathbb{K}^n$ et nous considérons sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ la topologie associée à la norme subordonnée[32]. Nous subdivisons la preuves en différentes implications.

(1) implique (2) Si $\rho(A) \leqslant 1$, en combinant la proposition 12.22 avec la proposition 12.24, nous avons

$$\|A^m\| \geqslant \big(\rho(A)\big)^m \geqslant 1 \tag{16.407}$$

Mais la limite $A^k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})} 0$ signifie la limite $\|A^k\| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. Le fait que tous les éléments de la suite soient plus grand que 1 empêche cette limite.

(2) implique (1) Vu que $\rho(A) < 1$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. Par le lemme 12.23 il existe une norme N sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon < 1$. Notons que cette norme N dépend de A et de ϵ.

Avec cette norme nous avons

$$N(A^k) \leqslant N(A)^k \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{16.408}$$

Cela signifie que $A^k \xrightarrow{N} 0$. L'équivalence entre toutes les normes sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ donne alors la convergence $A^k \xrightarrow{\|.\|} 0$.

Pour une preuve alternative de cette implication, voir la proposition 16.112.

(3) implique (1) La convergence d'une série implique que la norme du terme général converge vers zéro par la proposition 12.66. Nous avons donc $\|A^k\| \to 0$, ce qui signifie $A^k \to 0$, et donc $\rho(A) < 1$ parce que (1) implique (2).

$\rho(A) < 1$ implique $\mathbb{1} - A$ est inversible Si μ est une valeur propre de $\mathbb{1} - A$ alors

$$\det\big((\mathbb{1} - A) - \mu \mathbb{1}\big) = \det\big(A - (1 - \mu)\mathbb{1}\big), \tag{16.409}$$

32. Si on parle de convergence d'une suite, c'est qu'il y a une topologie quelque part.

donc $1-\mu$ est une valeur propre de A. Donc les valeurs propres de $\mathbb{1}-A$ sont les nombres $1-\lambda_i$ où les λß sont les valeurs propres de A. Par hypothèse, nous avons $\lambda_i<1$ pour tout i, donc les valeurs propres de $\mathbb{1}-A$ sont toutes non nulles. Donc $\mathbb{1}-A$ est inversible (pas de noyau).

Le reste Nous montrons à présent que si $\rho(A)<1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ converge vers $\mathbb{1}-A$. Pour cela nous savons déjà que $\mathbb{1}-A$ est inversible. Nous posons

$$B_m=\mathbb{1}+A+\ldots+A^m, \tag{16.410}$$

ce qui donne immédiatement $AB_m=A+A^2+\ldots+A^{m+1}$. Nous avons donc

$$(\mathbb{1}-A)B_m=\mathbb{1}-A^{m+1}. \tag{16.411}$$

Nous savons que $\lim_{m\to 0}A^m=0$, donc

$$(\mathbb{1}-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\lim_{k\to\infty}(\mathbb{1}-A)B_k=\lim_{k\to\infty}(\mathbb{1}-A^{k+1})=\mathbb{1}. \tag{16.412}$$

Notez au passage que nous avons permuté la somme avec le produit matriciel (voir 12.3.3).

□

16.12.3 Exponentielle et logarithme de matrice

La définition de l'exponentielle dans le cas des matrices est celle sur les algèbres normées non commutatives, 16.42.

Proposition 16.114.
L'application

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R})&\to\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A&\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\end{aligned} \tag{16.413}$$

est une application de classe C^∞. Sa différentielle en zéro est l'identité : $(d\exp)_0=\mathrm{Id}$.

Démonstration. En ce qui concerne la continuité, nous savons que le rayon de convergence de la suite $\frac{1}{k!}$ est infini ; la proposition 16.93 conclu.

Pour la différentielle, c'est la proposition 16.92 qui nous permet d'écrire

$$d\exp_0(U)=\frac{d}{dt}\Big[\exp(tU)\Big]_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kU^k}{k!}\Big]_{t=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kt^{k-1}U^k}{k!}\Big|_{t=0}=U \tag{16.414}$$

parce que seul le terme $k=1$ n'est pas nul. □

Nous avons vu par la proposition 16.94 que toute matrice complexe inversible a un logarithme. Nous allons maintenant parler de logarithme de matrices réelles avec une condition sur la norme. La formule ci-dessous montre explicitement que le logarithme est réel.

$$\begin{aligned}\ln\colon \{A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\text{ tel que }\|A-\mathbb{1}\|<1\}&\to\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A&\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(A-\mathbb{1})^{k+1}}{k+1}.\end{aligned} \tag{16.415}$$

Lemme 16.115.
Si $\|m\|<1$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, alors nous posons

$$\ln(\mathbb{1}+m)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{k+1}}{k+1}. \tag{16.416}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes.

(1) Elle est de classe C^∞.

(2) Elle est un bon logarithme au sens où

$$e^{\ln(\mathbb{1}+m)} = \mathbb{1} + m. \tag{16.417}$$

(3) Elle vérifie l'approximation

$$\ln(1+m) = m + \sigma(m) \tag{16.418}$$

où σ a la propriété que

$$\lim_{k\to\infty} k\sigma\left(\frac{m}{k}\right) = 0. \tag{16.419}$$

Démonstration. Le rayon de convergence de la suite $a_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ est 1. Donc l'application donnée est C^∞ sur $B(0,1)$ par le théorème 16.93.

D'après la formule (16.416) nous avons

$$\sigma(m) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l \frac{m^{l+1}}{l+1}. \tag{16.420}$$

Nous avons alors

$$k\sigma(\frac{m}{k}) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l \frac{m^{l+1}}{k^l(l+1)}, \tag{16.421}$$

et donc

$$\|k\sigma(\frac{m}{k})\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|m\|^{l+1}}{k^l(l+1)} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|m\|^{l+1}}{l+1} \overset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{16.422}$$

Cela prouve la dernière assertion. □

Proposition 16.116.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \in \mathrm{End}(V)$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{End}(V) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned} \tag{16.423}$$

Cette fonction vérifie

$$f'(t) = \big(e^{tA}\big)' = Ae^{tA}. \tag{16.424}$$

Démonstration. Si nous posons $f_k(t) = \frac{t^k A^k}{k!}$ alors la fonction f est la somme : $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Nous allons permuter la somme et la dérivation à l'aide du théorème 16.6. Vu que

$$f_k'(t) = \frac{kt^{k-1}A^k}{k!}, \tag{16.425}$$

la suite suite des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$, nous pouvons dériver terme à terme pour obtenir

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}. \tag{16.426}$$

Notez le jeu au niveau du point départ de la somme : elle passe de 0 à 1 parce que le terme zéro est nul, mais la simplification $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ n'a pas de sens pour $k = 0$. □

Lemme 16.117 ([273])**.**
Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Si nous notons λ_i $(i = 1,\dots,r)$ les valeurs propres distinctes de A alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big)\sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}. \tag{16.427}$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A se note, d'après le corollaire 11.181 de la façon suivante :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i} \tag{16.428}$$

où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i. Le lemme des noyaux 11.127 nous dit qu'en posant

$$V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} \tag{16.429}$$

nous avons $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$. Nous nommons $p_i \colon V \to V$ la projection canonique de E sur V_i ainsi que x_i la composante de $x \in V$ dans l'espace caractéristique V_i et nous posons $A_i = p_i \circ A$. Les espaces caractéristiques sont stables par A (lemme 11.213), donc $(Ax_i)_i = Ax_i$. Par conséquent $\sum_i A_i p_i = A$ parce que

$$\big(\sum_i p_i A p_i\big)(x) = \sum_i (Ax_i)_i = \sum_i Ax_i = A\sum_i x_i = Ax. \tag{16.430}$$

En ce qui concerne les puissances de A nous avons de même

$$A_i^n x_I = A_i \underbrace{A_i^{n-1} x_i}_{\in V_i} = A A_i^{n-1} x_i = A^n x_i, \tag{16.431}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{r} A_i^n p_i = A^n. \tag{16.432}$$

En particulier,

$$e^{tA} = \sum_i e^{tA_i} p_i. \tag{16.433}$$

C'est de cette exponentielle de matrice que nous devons étudier la norme.

La décomposition de Dunford du théorème 11.216 est toujours un bon plan pour traiter avec les exponentielles : nous avons $A = s + n$ avec

$$s = \sum_k \lambda_k p_k, \quad n = \sum_k (A - \lambda_k \mathbb{1}) p_k. \tag{16.434}$$

Nous montrons que la décomposition de Dunford de $p_i A$ est $p_i A = p_i s + p_i n$. Nous avons

$$p_i s = \sum_k \lambda_k p_i p_k = \lambda_i p_i \tag{16.435}$$

qui est bien diagonalisable. De plus les espaces caractéristiques sont stables par n, donc $p_i n$ est nilpotent. Enfin ils commutent :

$$[p_i s, p_i n] = \lambda_i (p_i n - p_i n p_i). \tag{16.436}$$

Vu que n préserve les espaces caractéristiques, lorsque $v \in V_k$ avec $k \neq i$ nous avons $p_i n p_i v = 0$ et $p_i n v = 0$. Mais si $v \in V_i$ alors

$$p_i n p_i v = p_i n v = n v \tag{16.437}$$

et $p_i n v = n v$, donc les opérateurs $p_i n$ et $p_i n p_i$ sont égaux et (16.436) donne bien zéro. En ce qui concerne l'exponentielle de A_i nous avons

$$e^{p_i A} = e^{p_i s} e^{p_i n} = e^{\lambda_i p_i} \exp\big((A - \lambda_i \mathbb{1}) p_i\big). \tag{16.438}$$

Nous pouvons maintenant sérieusement nous attaquer à la norme de e^{tA} de l'équation (16.433). D'abord nous avons $\|p_i\| = 1$ parce que l'opérateur p_i est l'identité sur au moins un vecteur (en

fait tout ceux de l'espace caractéristique V_i). En utilisant les propriétés de la norme opérateur [33], nous trouvons dans un premier temps [34] :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \|e^{tA_i}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |e^{t\lambda_i}| \underbrace{\sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} \|A - \lambda_i \mathbb{1}_i\|^k}_{=P_i(|t|}} \tag{16.439}$$

où $\mathbb{1}_i$ est l'opérateur identité sur V_i. Petit détail dans le calcul :

$$\|e^{\lambda_i p_i}\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^l}{k!} \|p_i\|^l = e^{\lambda_i}. \tag{16.440}$$

Notons que tous les termes de $P_i(|t|)$ et $P_i\big(|t|\big)$ sont positifs, de telle sorte que nous pouvons majorer en ajoutant des termes partout. À la place d'avoir $P_i(|t|)$ comme coefficient de $|e^{t\lambda_i}|$ nous majorons en mettant $\sum_{j=1}^{r} P_j(|t|)$ comme coefficient :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |e^{t\lambda_i}| P_i\big(|t|\big) = \sum_{i=1}^{r} |e^{t\lambda_i}| \sum_{j=1}^{r} P_j\big(|t|\big) = P\big(|t|\big) \sum_{i=1}^{r} e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}. \tag{16.441}$$

L'arrivée de la partie réelle est une égalité usuelle pour les nombres complexes : $|e^{a+bi}| = e^a|e^{bi}| = e^a$. □

16.12.4 Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice

Nous reprenons l'exemple de [274]. Soit A une matrice dont le polynôme minimum s'écrit

$$P(X) = (X-1)^2(X-2). \tag{16.442}$$

Par le théorème 11.127 de décomposition des noyaux nous avons

$$E = \ker(A-1)^2 \oplus \ker(A-2). \tag{16.443}$$

En suivant les notations de ce théorème nous avons $P_1(X) = (X-1)^2$, $P_2(X) = X-2$ et

$$Q_1(X) = X - 2 \tag{16.444a}$$
$$Q_2(X) = (X-1)^2. \tag{16.444b}$$

Les polynômes R_i dont l'existence est assurée par le théorème de Bézout sont

$$\begin{aligned} R_1(X) &= -X \\ R_2(X) &= 1. \end{aligned} \tag{16.445}$$

Nous avons

$$R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1. \tag{16.446}$$

Le projecteur p_i sur $\ker P_i$ est R_iQ_i :

$$\begin{aligned} p_1 &= -A(A-2) = \mathtt{proj}_{\ker(u-1)^2} \\ p_2 &= (A-1)^2 = \mathtt{proj}_{\ker(u-2)}. \end{aligned} \tag{16.447}$$

Passons maintenant au calcul de l'exponentielle [35]. Nous avons évidemment

$$e^A = e^A p_1 + e^A p_2. \tag{16.448}$$

33. Surtout le fait que ce soit une norme d'algèbre, lemme 12.20.
34. Si les valeurs propres de A sont λ_i, celles de tA sont $t\lambda_i$.
35. Définition 16.42. Thème 56

Étant donné que p_1 est le projecteur sur le noyau de $(A-1)^2$, nous avons

$$e^A p_1 = e e^{A-1} p_1 = e p_1 + e(u-1)1 = e p_1 = -Ae(A-2). \tag{16.449}$$

En effet $e^{A-1}p_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(A-1)^k \circ p_1$. De la même façon nous avons

$$e^A p_2 = e^2 e^{A-2} p_2 = e^2 p_2 = e^2 (A-1)^2. \tag{16.450}$$

Au final,

$$e^A = -Ae(A-2) + e^2(A-1)^2. \tag{16.451}$$

16.13 Lemme de Borel

16.13.1 Fonctions plateaux

Vous voulez une fonction de classe C^∞ qui n'est pas nulle partout ? En voici une.

Lemme 16.118.
La fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.452}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. Pour tout polynôme P nous avons la limite[36]

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{P(x)} = 0. \tag{16.453}$$

De là, en écrivant les dérivées successives de φ, il est facile de voir qu'elles sont continues en $x = 0$. □

Proposition 16.119.
Soient $a < b < c < d$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs positives telle que

(1) $f(x) = 1$ *si* $x \in [b, c]$
(2) $\text{supp}(f) \subset [a, d]$.

Démonstration. Nous partons de la fonction φ du lemme 16.118. Ensuite nous considérons

$$\psi_m(x) = 1 - \frac{\int_0^x \varphi(t)dt}{\int_0^m \varphi(t)dt} \tag{16.454}$$

Cette fonction est encore de classe C^∞. En effet, $\int_0^m$ est un simple nombre strictement positif sans histoires tandis que la proposition 15.232 dit que $x \mapsto \int_0^x \varphi(t)dt$ est une primitive de φ. Vu que φ est déjà de classe C^∞, sa primitive l'est également.

La fonction ψ_m vérifie

$$\psi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > m \\ \text{positive} & \text{si } x \in [0, m]. \end{cases} \tag{16.455}$$

À partir de là nous considérons les fonctions

$$f_1(x) = \psi_{d-c}(x - c) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c \\ 0 & \text{si } x > d \\ \text{positive} & \text{si } x \in [c, d]. \end{cases} \tag{16.456a}$$

$$f_2(x) = \psi(b-a)(b-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \\ \text{positive} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}, \tag{16.456b}$$

36. Voir la proposition 16.78(3).

et finalement la fonction suivante répond à la question des fonctions plateaux sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x). \tag{16.457}$$

□

Une variation sur le même thème est l'existence de fonctions infiniment dérivables à support compact, c'est-à-dire des fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 16.120.
La fonction

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{si } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.458}$$

est de classe C^∞ et à support compact.

Le lemme d'Urysohn comprend de nombreuses variantes plus ou moins générales. En voici une parmi les plus simples.

Lemme 16.121 (Lemme d'Urysohn)**.**
Soit un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ et un compact K inclus dans $\mathcal{U}$. Il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^∞ telle que

(1) $f(x) = 1$ *pour* $x \in K$,

(2) $\operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{U}$.

Démonstration. Vu que K est compact, il est borné (théorème 8.9). Nous posons $b = \min(K)$ et $c = \max(K)$. En particulier b et c sont des éléments de K et donc de $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe des boules centrées en b et c contenues dans $\mathcal{U}$. Soit r le rayon de telles boules :

$$B(b,r) \subset \mathcal{U} \tag{16.459a}$$
$$B(c,r) \subset \mathcal{U}. \tag{16.459b}$$

Nous posons $a = b - r \in \mathcal{U}$ et $d = c + r \in \mathcal{U}$. Nous considérons à présent la fonction plateau f de la proposition 16.119. Elle est de classe C^∞ et vérifie $f(x) = 1$ pour $x \in [b,c] = K$ ainsi que $f(x) = 0$ hors de $[a,d] \subset \mathcal{U}$. □

Notons que la fonction du lemme 16.121 n'épouse pas spécialement très bien la forme de K. Si par exemple $K = [0,1] \cup [10,11]$, la fonction f sera égale à 1 au moins sur $[0,11]$.

16.13.2 Le lemme de Borel

Lemme 16.122 (Lemme de Borel[43])**.**
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]-1,1[$.

Nous commençons par considérer une suite de réels strictement positifs (λ_k) dont nous fixerons une valeur précise plus tard, et nous posons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x)\frac{a_k}{k!}x^k. \tag{16.460}$$

Nous allons étudier la convergence et les propriétés de $u(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$.

Calculons (formellement) la m^{e}dérivée de f_k :

$$f_k^{(m)}(x) = \frac{a_k}{k!}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\lambda_k^{m-l}\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)(x^k)^{(l)} \tag{16.461a}$$

$$= a_k\sum_{l=0}^{m}\binom{l}{m}\lambda_k^{m-l}\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)\frac{x^{k-l}}{(k-l)!}. \tag{16.461b}$$

Notons que nous travaillons à m fixé et que nous ne nous intéressons qu'aux termes avec k assez grand ; nous pouvons donc supposer $k \geqslant m$. De toutes façons pour $\sum_{k=0}^{m} f_k$, on a la classe C^∞, et la permutation de la somme avec tout ce qu'on veut. Vu que φ est continue à support compact nous pouvons poser

$$M_m = \max_{0\leqslant j\leqslant m}\|\varphi^j\|_\infty = \max_{0\leqslant j\leqslant m}\max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi^{(j)}(x)|. \tag{16.462}$$

Nous continuons en nous fixant un $x \in \mathbb{R}$ et un $k \geqslant m$.

Si $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$, alors $\varphi^{(m)}(\lambda_k x) = 0$ parce que $\lambda_k x$ est strictement hors du support de φ qui est $]-1,1[$. Donc pour $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$.

Si par contre $|x| \leqslant \frac{1}{\lambda_k}$, nous avons les majorations

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant |a_k|\sum_{l=0}^{m}\binom{l}{m}|\lambda_k|^{m-l}\underbrace{\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)}_{\leqslant M_m}\frac{1}{(k-l)!}\underbrace{|x|^{k-l}}_{\leqslant(1/\lambda_k)^{k-l}} \tag{16.463a}$$

$$\leqslant |a_k|M_m|\lambda_k|^{m-k}\frac{1}{(k-m)!}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l} \tag{16.463b}$$

$$\leqslant \frac{|a_k|M_m|\lambda_k|^{m-k}2^m}{(k-m)!} \tag{16.463c}$$

$$= \frac{|a_k|M_m 2^m}{(k-m)!|\lambda_k|^{k-m}} \tag{16.463d}$$

où pour faire disparaitre la somme de coefficients binomiaux, nous avons remarqué que $\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}$ est le nombre total de termes dans le développement de $(a+b)^m$, c'est-à-dire 2^m. Nous voulons, pour m fixé, étudier la convergence de la somme de cela. Notons que le 2^m n'a en particulier strictement aucune importance parce qu'on travaille à m fixé.

Nous fixons maintenant la valeur des λ_k :

$$\lambda_k = \max\{|a_k|, 1\}. \tag{16.464}$$

Avec cela, en nous souvenant que nous n'étudions que les termes $k > m$, le dénominateur de (16.463d) est réellement croissant en k, donc nous avons la majoration

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M_m 2^m}{(k-m)!}. \tag{16.465}$$

Au final nous avons

$$\|f_k^{(m)}\|_\infty \leqslant \frac{2^m M_m}{(k-m)!}. \tag{16.466}$$

Et la somme de cela converge sans difficultés. Donc la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(x) \tag{16.467}$$

converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors permuter la somme et la dérivation par le théorème 16.3. Donc

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)} \tag{16.468}$$

est continue. En particulier, pour évaluer en zéro, on peut faire

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0). \tag{16.469}$$

Nous avons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x)\frac{a_k}{k!}x^k. \tag{16.470}$$

Pour calculer la dérivée en zéro, il suffit de la calculer sur un voisinage sur lequel $\varphi(\lambda_k x)$ est la constante 1 ; un tel voisinage existe pour tout k. À ce moment le calcul est classique :

$$f_k^{(m)}(x) = \begin{cases} a_k & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.471}$$

Finalement nous avons bien

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0) = a_k. \tag{16.472}$$

□

Remarque 16.123.
Pour prouver le lemme de Borel, la première chose qui passe par la tête est la fonction toute simple

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}x^k. \tag{16.473}$$

Évidemment si on calcule les dérivées successives de cette fonction, nous trouvons les bons résultats. Le problème est la convergence. Rien qu'en prenant $a_k = k!k^k$, la série ne converge pour aucun x positif. L'idée de multiplier chacun de f_k par une fonction plateau sur un petit intervalle autour de zéro a plusieurs avantages. D'abord on conserve les dérivées correctes parce qu'on ne touche pas à la valeur des f_k sur un petit voisinage. Ensuite cela ne modifie pas la continuité ; et enfin en multipliant par $\varphi(\lambda_k x)$, ça calme méchamment les divergences parce que $\lambda_k x$ passe vite au dessus de 1 (et donc en dehors du support de φ) si λ_k est grand. D'où le fait qu'il soit normal que les λ_k soient de l'ordre des a_k.

16.14 Nombres de Bell

Théorème 16.124 (Nombres de Bell[43])**.**
Soient $n \geqslant 1$ et B_n le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ avec la convention que $B_0 = 0$. Alors

(1) La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n \tag{16.474}$$

a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme est donnée par

$$f(x) = e^{e^x - 1} \tag{16.475}$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \tag{16.476}$$

(3) Le rayon de convergence de la série (16.474) est en réalité infini : $R = \infty$.

Démonstration. (1) Soient $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Nous notons E_k l'ensemble des partitions de $\{1,\dots,n+1\}$ pour lesquelles le « paquet » contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Calculons le cardinal de E_k.

Pour construire un élément de E_k, il faut d'abord prendre le nombre $n+1$ et lui adjoindre k éléments choisis dans $\{1,\dots,n\}$, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite il faut trouver une partition des $(n+1)-(k+1)=n-k$ éléments restants, ce qui fait B_{n-k} possibilités. Donc

$$\operatorname{Card}(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}. \tag{16.477}$$

L'intérêt des ensembles E_k est que $\{E_0,\dots,E_n\}$ est une partition de l'ensemble des partitions de $\{1,\dots,n+1\}$, c'est-à-dire que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(E_k)$, ce qui va nous donner une relation de récurrence pour les B_n :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{n-l} B_l = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l. \tag{16.478}$$

où nous avons utilisé un petit changement de variables $l = n-k$. Afin d'étudier la convergence de la série (16.474), nous allons montrer par récurrence que pour tout n, $B_n < n!$. D'abord pour $n = 0$ c'est bon : $B_1 = 1$ parce que la seule partition de $\{1\}$ est $\{1\}$. Supposons que l'inégalité soit vraie pour une certaine valeur k, et montrons qu'elle est vraie pour la valeur $k+1$:

$$B_{k+1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leqslant \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{k} k! = k! \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leqslant 1} \leqslant n!(n+1) = (n+1)! \tag{16.479}$$

où nous avons utilisé la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leqslant \frac{B_n}{n!}|x^n| \leqslant |x|^n, \tag{16.480}$$

et donc la série a un rayon de convergence au moins aussi grand que celui de la série géométrique, c'est-à-dire que 1. Donc $R \geqslant 1$. Nous nommons R ce rayon de convergence.

(2) Soit $x \in]-R,R[$. Pour une telle valeur de x à l'intérieur du disque de convergence, la proposition 16.25 nous permet de dériver terme à terme la série [37]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}, \tag{16.481}$$

pour obtenir

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)} (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^k \tag{16.482a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} B_l \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(l-k)!} \right) x^k. \tag{16.482b}$$

<++> En cette expression, nous reconnaissons un produit de Cauchy (proposition 16.15) avec $a_l = \frac{B_l}{l!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$. Vu que ce sont deux séries ayant un rayon de convergence plus grand que zéro, le produit a encore un rayon de convergence plus grand que zéro et nous pouvons prendre le produit des séries :

$$f'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) = f(x) e^x. \tag{16.483}$$

37. C'est ici qu'on utilise la convention $B_0 = 0$ et ça aura une influence sur le choix de la constante K plus bas.

Étudions l'équation différentielle $y' = ye^x$. D'abord par un argument en lacet de chaussure [38], une solution est de classe C^∞. Ensuite si une solution est non nulle, elle est de signe constant. En effet si $y(x_0) < 0$ et $y(x_1) = 0$ (on choisit x_1 minimum pour cette propriété parmi les nombres plus grands que x_0) alors il existe [39] un $t \in]x_0, x_1[$ tel que $y'(t) > 0$, ce qui donnerait $y(t) > 0$, ce qui contredirait la minimalité de x_1.
Nous prétendons [40] que cette équation différentielle a un espace de solutions de dimension 1. En effet, si $y' = ye^x$ et $g' = ge^x$ alors en posant $\varphi = y/g$ nous obtenons tout de suite $\varphi' = 0$, ce qui signifie que φ est constante, ou encore que y et g sont multiples l'un de l'autre.
Si nous en trouvons une non nulle par n'importe quel moyen, c'est bon. Une solution étant dérivable est continue, donc l'équation $f' = fe^x$ nous indique que f' est continue. Une solution non nulle va automatiquement accepter un petit voisinage sur lequel la manipulation suivante a un sens :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x, \tag{16.484}$$

donc $\ln\big(|f(x)|\big) = e^x + C$ et $f(x) = Ke^{e^x}$ pour une certaine constante. Il est vite vérifié que cette fonction est une solution de l'équation différentielle $y'(x) = y(x)e^x$ et par unicité, toutes les solutions sont de cette forme. Autrement dit, l'espace des solutions est l'espace vectoriel $\mathrm{Span}\{x \mapsto e^{e^x}\}$. Étant donné que $f(0) = 0$, nous devons choisir $K = \frac{1}{e}$ et donc

$$f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x} = e^{e^x - 1}. \tag{16.485}$$

(3) Nous commençons par écrire la fonction f comme une série de puissance. La partie simple du calcul : pour $x \in]-R, R[$, nous avons

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(kx)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!} \frac{x^l}{l!}. \tag{16.486}$$

Notons que cela n'est pas une série de puissance en x parce qu'il y a la double somme. Nous allons inverser les sommes au moyen du théorème de Fubini sous la forme du corollaire 15.258. Pour cela nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ (k, l) &\mapsto \frac{(kx)^l}{k!l!} \end{aligned} \tag{16.487}$$

et nous mettons la mesure de comptage [41] sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Nous commençons donc à vérifier l'intégrabilité variable par variable de $|a|$:

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} |a(k,l)| dm(l) \right) dm(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(k|x|)^l}{l!} \tag{16.488a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{k|x|}. \tag{16.488b}$$

Nous devons montrer que cette dernière somme va bien. Pour cela nous posons $u_k = \frac{e^{k|x|}}{k!}$ et nous remarquons que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \to 0$. Donc la double intégrale (16.488) converge, ergo $a \in L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini 15.259 pour inverser les ~~sommes~~ ~~intégrales~~ sommes dans l'équation (16.486) :

$$\frac{1}{e}e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} (kx)^l = \sum_{l=0} \frac{1}{e} \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!} \right) x^l. \tag{16.489}$$

38. Genre ce qui est fait pour prouver 16.62(4).
39. Théorème de Rolle 13.126.
40. Ou alors on utilise le théorème 33.14 avec $M(x) = e^x$ dans les cas $n = 1$ et $I =]-R, R[$.
41. Nous passons outre les avertissements et menaces de Arnaud Girand.

Cela est un développement en série entière pour la fonction $\frac{1}{e}e^{e^x}$, dont nous savions déjà le développement (16.474) ; par unicité du développement nous pouvons identifier les coefficients :

$$B_l = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^l}{k!}. \tag{16.490}$$

(4) Le développement (16.486) étant en réalité valable pour tout x et tous les calculs subséquents l'étant aussi, le développement

$$e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \tag{16.491}$$

est en fait valable pour tout x, ce qui donne à la série entière un rayon de convergence infini. □

Chapitre 17

Représentations et caractères

17.1 Représentations et caractères

Définition 17.1.
Si G est un groupe, l'ensemble des homomorphismes $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ est un groupe pour la multiplication. Un élément de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ est un ***caractère abélien****. Le nom « abélien » vient du fait que le caractère prenne ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Nous notons $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.*

Théorème 17.2.
Soit G un groupe abélien fini. Alors G est isomorphe à $\hat{G}$.

L'isomorphisme n'est pas canonique.

Démonstration. Étant donné la structure des groupes abéliens finis donnée par le théorème 5.23, nous commençons par nous concentrer sur $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{U}_n = \{\xi \in \mathbb{C} \text{ tel que } \xi^n = 1\}. \tag{17.1}$$

Pour cela nous avons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \mathbb{C}^* \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{17.2}$$

Notons que si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, alors $f(k) = f(1)^k$, donc ψ est bien un isomorphisme. Cela nous amène à définir

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Hom}\Big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}^* n\ \cdot\ )\Big) &\to \mathrm{U}_n \\ g &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{17.3}$$

Remarquons que pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ on a bien $f(1)^n = 1$. En effet si $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $f\big([k]\big) = f(1)^k$ et en particulier

$$f(1)^n = f([n]) = f(0) = 1. \tag{17.4}$$

Donc $f(1) \in \mathrm{U}_n$. Le φ est injective parce que si $f(1) = g(1)$ alors $f = g$ du fait que $f(k) = f(1)^k = g(1)^k = g(k)$.

Nous en sommes à avoir prouvé que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{U}_n$ (introduit au lemme 20.2). Il faudrait encore montrer que $\mathrm{U}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour cela nous nous rappelons du lemme 20.3 nous ayant raconté que le groupe U_n des racines de l'unité était cyclique et d'ordre n. Il est donc bien isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Passons au cas où

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}. \tag{17.5}$$

Dans ce cas nous montrons que

$$\begin{aligned}\alpha\colon \bigtimes_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)\\ \alpha(\chi_1, \ldots, \chi_k)(g_1, \ldots, g_k) &= \chi_1(g_1)\ldots\chi_k(g_k).\end{aligned} \tag{17.6}$$

Ce α est injectif parce qu'en appliquant l'égalité

$$\alpha(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \alpha(\chi'_1, \ldots, \chi'_k) \tag{17.7}$$

à l'élément $g = (9, \ldots, 1, \ldots, 0)$ alors nous trouvons $\chi_i(1) = \chi'_i(1)$ parce que $\chi_j(0) = 1$. Du coup $\chi_i = \chi'_i$.

L'application α est en plus surjective. En effet si $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, alors nous définissons

$$\chi_i(g_i) = \chi(0, \ldots, g_i, \ldots, 0), \tag{17.8}$$

et nous avons alors $\alpha(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \chi$.

Nous devons encore montrer que α est un homomorphisme. Si $\chi, \chi' \in \times_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{d_i}, \mathbb{C}^*)$, alors

$$\begin{aligned}\alpha(\chi\chi')(g_1, \ldots, g_k) &= (\chi_1\chi'_1)(g_1)\ldots(\chi_k\chi'_k)(g_k) && \text{(17.9a)}\\ &= \chi_1(g_1)\ldots\chi_k(g_k)\chi'_1(g_1)\ldots\chi'_k(g_k) && \text{(17.9b)}\\ &= \alpha(\chi)(g_1, \ldots, g_k)\alpha(\chi')(g_1, \ldots, g_k) && \text{(17.9c)}\\ &= \big(\alpha(\chi)\alpha(\chi')\big)(g_1, \ldots, g_k). && \text{(17.9d)}\end{aligned}$$

Donc $\alpha(\chi\chi') = \alpha(\chi)\alpha(\chi')$. □

Théorème 17.3.
Soit G un groupe abélien fini. Les groupes G et $\hat{\hat{G}}$ sont isomorphes et un isomorphisme canonique est donné par $\alpha\colon g \mapsto f_g$ donné par

$$f_g(\chi) = \chi(g). \tag{17.10}$$

Démonstration. D'abord f_g est bien un caractère de $\hat{G}$ parce que

$$f_g(\chi\chi') = (\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g) = f_g(\chi)f_g(\chi'). \tag{17.11}$$

Le fait que α soit un homomorphisme de groupes est direct :

$$f_{gg'}(\chi) = \chi(gg') = \chi(g)\chi(g') = f_g(\chi)f_{g'}(\chi) = (f_gf_{g'})(\chi). \tag{17.12}$$

D'autre part nous savon que G et $\hat{\hat{G}}$ ont le même cardinal. Il suffit donc de prouver l'injectivité de α pour être sûr de la bijectivité. Pour cela nous devons prouver que si $g \neq e$ alors $f_g \neq f_e$. Nous savons que pour tout caractère $\chi \in \hat{G}$, $f_e(\chi) = \chi(e) = 1$. Donc pour tout $g \in G\backslash\{e\}$, nous devons trouver $\chi \in \hat{G}$ tel que $\chi(g) \neq 1$.

En vertu de ce que nous connaissons sur la structure des groupes abéliens finis (théorème 5.23), nous commençons $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons le caractère donné par $\chi([1]) = e^{2i\pi/n}$. Ce χ est un isomorphisme entre G et $\mathrm{U}(n)$; nous n'avons $\chi([k]) = 0$ que si $[k] = [n] = [0]$. Pour rappel dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le neutre est $e = 0$ et non $e = 1$.

Passons au cas général :

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \tag{17.13}$$

Si $g = (g_1, \ldots, g_k)$ est non nul dans G, alors il existe i tel que $g_i \neq 0$ et on prend

$$\chi(g_1, \ldots, g_k) = \chi_i(g_i) \tag{17.14}$$

où χ_i est le caractère $\chi_i([1]) = e^{2\pi i/n_i}$. Ce χ est alors un caractère non trivial de G.

□

17.1.1 Crochet de dualité et transformée de Fourier

Si G est un groupe abélien, nous définissons le crochet de dualité entre G et $\hat{G}$ par

$$\begin{aligned}\langle ., . \rangle \colon G \times \hat{G} &\to \mathbb{C}^* \\ \langle g, \chi \rangle &= \chi(g).\end{aligned} \tag{17.15}$$

Notons que l'image de ce crochet n'est pas $\mathbb{C}^*$ entier, mais seulement le groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$ où n est l'exposant [1] de G.

Si f, g sont des applications de G dans $\mathbb{C}$, alors on leur associe le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{17.16}$$

Lemme 17.4.
Les caractères de G forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$ pour ce produit scalaire.

Démonstration. Étant donné que les $\chi(s)$ sont des nombres complexe de module 1, nous avons $\chi(s)\overline{\chi(s)} = 1$ et par conséquent $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Si par contre $\chi \neq \chi'$, alors il existe $s_\in G$ tel que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$. Dans ce cas en effectuant un changement de variable $s \to s_0 s$ dans la sommation,

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi(s)\overline{\chi'(s)} \tag{17.17a}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi(s_0 s)\overline{\chi'(s_0 s)} \tag{17.17b}$$

$$= \frac{1}{|G|} \chi(s_0)\chi'(s_0) \sum_{s \in G} \chi(s)\overline{\chi'(s)}. \tag{17.17c}$$

Donc nous avons trouvé

$$\langle \chi, \chi' \rangle \big(1 - \chi(s_0)\overline{\chi'(s_0)}\big) = 0. \tag{17.18}$$

Mais vu que $\chi(s_0) \neq \chi(s_0')$, la parenthèse est non nulle (pour rappel $\chi(s_0)$ est un complexe de module 1) et par conséquent $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

Nous déduisons immédiatement que les caractères forment une famille libre parce que si $\sum_i \chi_i = 0$ (la somme est sur tous les caractères), alors en prenant le produit scalaire avec χ_k,

$$\sum_i a_i \langle \chi_k, \chi_i \rangle = 0, \tag{17.19}$$

et donc $a_k = 0$.

Les caractères forment donc un système libre orthonormé. De plus l'espace engendré à la bonne dimension parce que le cardinal de l'ensemble des caractères est la dimension (complexe) de l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ parce que, en utilisant l'isomorphisme entre G et $\hat{G}$,

$$\operatorname{Card} \hat{G} = \operatorname{Card}(G) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^G. \tag{17.20}$$

La première □

Du fait que les caractères forment une base orthonormée, nous pouvons écrire, pour toute application $f \colon G \to \mathbb{C}$,

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle \chi, f \rangle \chi. \tag{17.21}$$

À une fonction $f \colon G \to \mathbb{C}$ nous associons la **transformée de Fourier**

$$\begin{aligned}\hat{f} \colon \hat{G} &\to \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \langle \chi, f \rangle.\end{aligned} \tag{17.22}$$

1. Définition 2.17.

Nous avons donc aussi une espèce de formule d'inversion

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi \tag{17.23}$$

qui n'est qu'une réécriture de 17.21.

17.1.2 Groupes non abéliens

Nous avons vu que le groupe des caractères $\hat{G}$ contenait toute l'information sur un groupe abélien. Malheureusement, pour les groupes non abéliens, ça ne va pas suffire, et nous allons introduire la notion de représentations, dont les caractères seront un cas particulier de dimension un.

Proposition 17.5.
Soit G un groupe (pas spécialement abélien). Nous avons

$$\hat{G} \simeq \text{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big). \tag{17.24}$$

Démonstration. Ce qui fait fonctionner la preuve est le fait que si $f\colon G \to \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme, alors f s'annule sur $D(G)$. L'isomorphisme est

$$\begin{aligned}\psi\colon \hat{G} &\to \text{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big)\\ \psi(f)[g] &= f(g).\end{aligned} \tag{17.25}$$

Cette application est bien définie parce que si f est un homomorphisme,

$$f(gklk^{-1}l^{-1}) = f(g). \tag{17.26}$$

D'autre part ψ est un homomorphisme de groupe parce que

$$\psi(f_1f_2)[g] = (f_1f_2)(g) = f_1(g)f_2(g) = \psi(f_1)[g]\psi(f_2)[g] = \big(\psi(f_1)\psi(f_2)\big)[g]. \tag{17.27}$$

Pour l'injectivité de ψ, soit f_1 et f_2 telles que $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. Alors pour tout $g \in G$ nous avons

$$\psi(f_1)[g] = \psi(f_2)[g] \tag{17.28}$$

et donc $f_1(g) = f_2(g)$.

Enfin ψ est surjective. En effet, soit $\bar{f} \in \text{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big)$. Alors nous obtenons $\psi(f) = \bar{f}$ en posant

$$f(g) = \bar{f}[g]. \tag{17.29}$$

Il faut juste vérifier que le f ainsi défini est dans $\hat{G}$, c'est-à-dire que $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$. □

Cette proposition nous montre que

$$\hat{G} = \widehat{G/D(G)}, \tag{17.30}$$

alors que $G/D(G)$ est abélien ; il n'est donc pas tellement possible que $\hat{G}$ contienne beaucoup d'informations intéressantes sur G.

17.1.3 Représentations linéaires des groupes finis

Si $\dim V = 1$, alors $\text{GL}(V) = \mathbb{C}^*$ et les représentation sont les caractères abéliens.

Exemple 17.6
Considérons le triangle équilatéral A, B, C, par exemple donné par les points

$$\begin{cases} A = 1 & \text{(17.31a)}\\ B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) & \text{(17.31b)}\\ C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) & \text{(17.31c)}\\ & \text{(17.31d)}\end{cases}$$

Dans la base (pas orthonormée) $\{A, B\}$ de $\mathbb{R}^2$, ces trois points sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{17.32}$$

Le groupe symétrique S_3 agit sur le triangle par permutation des sommets. Vues dans la base $\{A, B\}$, les transpositions correspondent aux matrices

$$(A, B) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.33a}$$

$$(A, C) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.33b}$$

$$(B, C) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{17.33c}$$

La permutation (A, B, C) s'écrit comme $(A, B, C) = (A, C)(A, B)$ et on lui associe la matrice

$$(A, B, C) \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{17.34}$$

C'est bien le produit des matrices de (A, C) et de (A, B). De la même façon nous avons

$$(BAC) < ++ > \tag{17.35}$$

<++> △

Si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations du groupe G, alors nous définissons la **somme directe** par $\big(V \oplus V', \rho \oplus \rho'\big)$ donné par

$$(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(V \oplus V'). \tag{17.36}$$

Nous noterons souvent $2V$ pour la représentations $(V, \rho) \oplus (V, \rho)$ et plus généralement l'écriture

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{17.37}$$

signifiera la représentation somme de k_i termes de la représentation W_i. Ici encore un abus est commis entre la représentation (ρ_i, W_i) et l'espace W_i.

17.1.4 Module

Nous considérons la $\mathbb{C}$-algèbre $G[\mathbb{C}]$ des combinaisons (formelles) d'éléments de G à coefficients dans G, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathbb{C}[G] = \{\sum_{s \in G} a_s s\} \tag{17.38}$$

avec le produit hérité de la bilinéarité :

$$\sum_{s \in G} \sum_{t \in G} a_s b_t st = \sum_s \sum_t a_s b_{s^{-1}t} t, \tag{17.39}$$

et la somme

$$(\sum_s a_s s) + \sum_t b_t t = \sum_{s \in G} (a_s + b_s) s. \tag{17.40}$$

Le tout est une $\mathbb{C}$-algèbre agissant sur V par

$$\left(\sum_s a_s s \right) v = \sum_{s \in G} a_s \rho(s) v \in V \tag{17.41}$$

Les sous-modules indécomposables seront les représentations irréductibles.

Définition 17.7.
*La représentation (V, ρ) du groupe G est **irréductible** si les seuls sous-espaces invariants de V sous $\rho(G)$ sont V et $\{0\}$.*

Exemple 17.8
La représentation de S_3 sur $\mathbb{R}^2$ donnée par les permutations des sommets d'un triangle équilatéral donnée dans l'exemple 17.6 est irréductible. △

La question qui vient est de savoir si une représentation possédant des sous-espaces invariants peut être écrite comme la somme de représentations irréductibles.

Proposition 17.9.
Soit (V, ρ) une représentation linéaire de dimension finie d'un groupe fini[2]*. Si W_1 est un sous-espace stable*[3]*, alors il existe un sous-espace W_2 également stable et tel que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Toute représentation linéaire est décomposable en représentations irréductibles.

Démonstration. Soit $P : V \to V$ un projecteur sur W_1, c'est-à-dire que $P^2 = P$ et $P(V) = W_1$. Pour construire un tel projecteur, on peut par exemple prendre un supplémentaire de W_1 dans V puis utiliser la décomposition[4]. Nous considérons l'opérateur

$$P_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}. \tag{17.42}$$

Prouvons que ce P_G est encore un projecteur. D'abord pour tout $g \in G$ nous avons

$$\rho(g) P_G \rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(gs) P \rho(gs)^{-1} = P_G. \tag{17.43}$$

La dernière égalité est un changement de variables dans la somme[5]. Cela signifie que $P_G \rho = \rho P_G$. Nous avons même $P_G P = P$ parce que si $v \in W_1$, alors

$$P_G(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(s) P \underbrace{\rho(s)^{-1} v}_{\in W_1} \tag{17.44a}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{s} \rho(s) \rho(s)^{-1} v \tag{17.44b}$$

$$= v. \tag{17.44c}$$

Avec cela nous pouvons conclure que $P_G^2 = P_G$ parce que

$$P_G \circ P_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g} P_G \rho(g) P \rho(g)^{-1} \tag{17.45a}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g} \rho(g) P_G P \rho(g)^{-1} \tag{17.45b}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g} \rho(g) P \rho(g)^{-1} \tag{17.45c}$$

$$= P_G. \tag{17.45d}$$

Donc P_G est un projecteur, est stable sous les conjugaisons par $\rho(g)$ et commute avec $\rho(g)$. Nous décomposant Id de façon évidente en

$$\mathrm{Id} = P_G + (\mathrm{Id} - P_G). \tag{17.46}$$

2. La démonstration marche aussi pour les groupes compacts, mais il faudrait des intégrales.
3. c'est-à-dire si ρ n'est pas irréductible.
4. Ou encore prendre une base de W_1, l'étendre en une base de V et définir P comme l'annulation des coefficients des vecteurs « complétant » la base.
5. Et c'est ça qui demande un peu de technique pour écrire la preuve dans le cas d'un groupe compact : il faut une mesure de Haar.

Étant donné que l'opérateur P_G commute avec tous les $\rho(g)$, les noyaux de P_G et $\mathrm{Id} - P_G$ sont des sous-espaces invariants. Vu que P_G est un projecteur, nous avons $q(P_G) = 0$ avec $q(X) = X^2 - X$. Pour appliquer le lemme des noyaux (théorème 11.127), nous remarquons que $q(X) = X(X-1)$ et donc

$$V = \ker P_G \oplus \ker(P_G - \mathbb{1}). \tag{17.47}$$

Si nous posons $W_2 = \ker P_G$, il reste à voir que $\ker(P_G \mathbb{1}) = W_1$. D'abord $W_1 \subset \ker(P_G - \mathrm{Id})$ parce que si $w \in W_1$, ce dernier étant stable,

$$P_G w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P \underbrace{\rho(g)^{-1} w}_{\in W_1} \tag{17.48a}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w \tag{17.48b}$$

$$= w. \tag{17.48c}$$

Pour prouver l'inclusion inverse, nous savons que P_G et P sont des projecteurs tels que $P_G P = P$, ce qui signifie que l'image de P_G est inclue à celle de P, c'est-à-dire à W_1. Mais $\mathrm{Image}(P_G) = \ker(\mathbb{1} - P_G)$, donc

$$\ker(\mathbb{1} - P_G) = \mathrm{Image}(P_G) \subset \mathrm{Image}(P) = W_1. \tag{17.49}$$

La représentation ρ se décompose donc en deux sous-représentations (ρ, W_1) et ρ, W_2. Si l'une des deux n'est pas irréductible, le processus peut recommencer. Vu que la dimension de V est finie, toute représentation se décompose en une somme finie de représentation irréductibles. □

17.1.5 Structure hermitienne

Soit (ρ, V) une représentation de G sur un espace vectoriel complexe V. Nous voulons munir V d'un produit scalaire hermitien (définition 11.8) tel que les opérateurs $\rho(g)$ soient tous des isométries. C'est-à-dire que nous voudrions définir $\langle u, v \rangle_G$ de telle sorte à avoir

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle_G = \langle u, v \rangle_G \tag{17.50}$$

pour tout $g \in G$. Nous commençons par considérer un produit hermitien $\langle ., . \rangle$ quelconque et puis nous définissons

$$\langle u, v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle. \tag{17.51}$$

Nous devons vérifier que c'est un produit. La seule des conditions dont la vérification n'est pas immédiate est celle de positivité. Pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$, nous avons $\langle \rho(g)v, \rho(g)v \rangle$ est positif et nul si et seulement si $\rho(g)v = 0$. Étant donné que $\rho(e)v = v$, parmi les termes de la somme

$$\langle u, u \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)v \rangle, \tag{17.52}$$

au moins un est strictement positif (pourvu que $v \neq 0$) ; les autres sont positifs ou nuls. Par conséquent $\langle v, v \rangle_G = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Donc les groupes finis peuvent être vus comme des parties de groupes d'isométrie. De la même façon, en utilisant une mesure de Haar pour faire la moyenne, nous pouvons plonger les groupes compacts dans des groupes unitaires.

17.1.6 Caractères

Définition 17.10.
Soit (V, ρ) une représentation linéaire du groupe G. Le ***caractère*** *de ρ est la fonction*

$$\begin{aligned} \chi_\rho \colon G &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \mathrm{Tr}\big(\rho(s)\big). \end{aligned} \tag{17.53}$$

Par invariance cyclique de la trace, nous avons

$$\chi_\rho(sts^{-1}) = \chi_\rho(t), \tag{17.54}$$

ce qui fait que le caractère est une fonction constante sur les classes de conjugaison.

D'après sa fiche wikipédia, le marquis de Sade, passionné de théâtre, faisait des représentations qui avaient du caractère.

Un **caractère irréductible** est un caractère d'une représentation irréductible.

Définition 17.11.
*Une application $f\colon G \to \mathbb{C}$ est **centrale** si elle est constante sur les classes de conjugaison.*

Les traces sont des applications centrales.

L'ensemble des fonctions centrales sur un groupe fini (ou tout au moins ayant un nombre fini de classes de conjugaison) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension égale au nombre de classes, et nous pouvons mettre le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{17.55}$$

C'est une forme hermitienne sur l'espace des fonctions centrales.

17.2 Équivalence de représentations et caractères

Cette section prend des éléments des articles lemme de Schur, caractère d'une représentation, fonction centrale et trace de wikipédia.

Définition 17.12.
*Nous disons que les deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont **équivalentes** s'il existe une bijection linéaire $f\colon V \to V'$ telle que*

$$f \circ \rho = \rho' \circ f. \tag{17.56}$$

*Nous disons alors que f **entrelace** ρ et ρ'.*

Théorème 17.13 (Théorème de Schur)**.**
Si (V, ρ) et (V', ρ') sont des représentations irréductibles non équivalentes alors la seule application linéaire $f\colon V \to V'$ entrelaçant ρ et ρ' est la fonction nulle.

En d'autres termes, soit les représentations sont équivalentes (et il y a un isomorphisme), soit il n'y a même pas un homomorphisme.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(V, V')$ telle que $f \circ \rho = \rho' \circ f$. Alors $\ker f$ est un sous-espace stable sous $\rho(G)$, et $\text{Image}(f)$ est un sous-espace de V' stable par $\rho'(G)$. Par irréductibilité, nous avons que $\ker(f) = \{0\}$ ou V. Même chose pour $\text{Image}(f)$. Il y a deux possibilités.

(1) Si $\ker(f) = \{0\}$, alors $\text{Image}(f) \neq \{0\}$ et alors $\text{Image}(f) = V'$. Du coup f est injective et surjective, c'est-à-dire est un isomorphisme.
(2) Si $\ker(f) = V$, alors $f = 0$.

□

Corollaire 17.14 (Schur pour les représentations sur $\mathbb{C}$)**.**
Soit (V, ρ) une représentation irréductible, alors l'ensemble

$$\text{End}_G(V, \rho) = \{f \in \text{End}(V) \text{ tel que } \rho \circ f = f \circ \rho\} \tag{17.57}$$

est l'ensemble des homothéties.

Démonstration. Soit $f \in \text{End}_G(V, \rho)$. Vu que l'espace est sur $\mathbb{C}$, l'endomorphisme f a une valeur propre λ. L'opérateur $g = f - \lambda\mathbb{1}$ est aussi un opérateur d'entrelacement de ρ alors que $\ker(g) \neq \{0\}$ par définition de valeur propre. Du coup $\ker(g) = V$, ce qui signifie que f est l'isométrie de rapport λ : $f = \lambda\,\text{Id}$. □

Lemme 17.15.
Si (ρ, V) et (ρ', V') sont des représentations équivalentes de caractères χ et χ', alors $\chi = \chi'$.

Démonstration. Si $A\colon V \to V'$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entrelaçant ρ et ρ', c'est-à-dire si pour tout g, $\rho'(g)A = A\rho(g)$, alors $\rho'(g) = A\rho(g)A^{-1}$ et

$$\chi'(g) = \mathrm{Tr}\left(\rho'(g)\right) = \mathrm{Tr}\left(A\rho(g)A^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho(g)\right) \tag{17.58}$$

parce que la trace est un invariant de similitude (lemme 11.159). □

Lemme 17.16.
Si χ est le caractère de la représentation complexe (V, ρ) du groupe fini G, alors pour tout $g \in G$ nous avons $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Démonstration. Par le corollaire 2.32 au théorème de Lagrange, nous avons $g^{|G|} = e$ et donc en tant qu'opérateur, $\rho(g)^{|G|} = \mathbb{1}$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont donc des racines de l'unité. Si nous notons λ_i ces valeurs propres, alors $\chi(g) = \sum_i \lambda_i$, et en considérant la matrice dans sa base de diagonalisation (lemme de Schur complexe, 11.176), nous voyons que

$$\chi(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\left(\rho(g)^{-1}\right) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i}. \tag{17.59}$$

Mais λ_i étant une racine de l'unité nous avons $\frac{1}{\lambda_i} = \bar{\lambda}_i$, ce qui fait que

$$\chi(g^{-1}) = \sum_i \bar{\lambda}_i = \overline{\chi(g)}. \tag{17.60}$$

□

Proposition 17.17.
Soient deux représentations irréductibles complexes (V, ρ) et (V', ρ') du même groupe fini G, et χ et χ' leurs caractères respectifs. Nous avons

(1) $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ si ρ et ρ' ne sont pas équivalentes.

(2) $\langle \chi, \chi' \rangle = 1$ si les représentations sont équivalentes.

Démonstration. Nous considérons les bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V et $\{f_1, \dots, f_m\}$ de V'. Puis nous considérons la matrice $F(k,l) = E_{kl} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ où pour rappel, E_{kl} est la matrice de composantes $(E_{kl})_{ij} = \delta_{ki}\delta_{lj}$. Nous posons

$$F_G(k,l) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ F(k,l) \circ \rho'(g)^{-1}. \tag{17.61}$$

En nous permettant de ne pas réécrire les indices k et l de F et F_G, nous montrons que F_G entrelace ρ et ρ' :

$$\begin{aligned}
F_G \circ \rho'(t) &= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(s) \circ F \circ \rho'(s^{-1}) \circ \rho(t) && \text{(17.62a)}\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{s} \rho(s) F \rho'(s^{-1}t) && \text{(17.62b)}\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{k} \rho(tk) F \rho'(k^{-1}) && \text{(17.62c)}\\
&= \frac{1}{|G|} \rho(t) \sum_{k} \rho(k) F \rho'(k^{-1}) && \text{(17.62d)}\\
&= \rho(t) \circ F_G. && \text{(17.62e)}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons effectué le changement de variables $k = (s^{-1}t)^{-1}$ qui donne $s = tk$.

Par ailleurs nous avons

$$\Big(\rho(g)F(k,l)\rho'(g^{-1})\Big)_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\rho(g)_{ir}F(k,l)_{rs}\rho'(g^{-1})_{sj} \tag{17.63a}$$
$$= \sum_{rs}\rho(g)_{ir}\delta_{kr}\delta_{ls}\rho'(g^{-1})_{sj} \tag{17.63b}$$
$$= \rho(g)_{ik}\rho'(g^{-1})_{lj}, \tag{17.63c}$$

et par conséquent

$$F_G(k,l)_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)_{ik}\rho'(g^{-1})_{lj}. \tag{17.64}$$

Si χ et χ' sont les caractères de ρ et ρ', alors nous avons le produit (17.55) qui donne

$$\langle\chi,\chi'\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi'(g)} \tag{17.65a}$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi(g)\chi'(g^{-1}) \qquad \text{lemme 17.16} \tag{17.65b}$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\rho(g)_{ii}\rho'(g^{-1})_{jj} \tag{17.65c}$$
$$= \sum_{ij}F_G(i,j)_{ij} \qquad \text{par (17.64).} \tag{17.65d}$$

Si les représentations ρ et ρ' ne sont pas équivalentes, le fait que F_G en soit un opérateur d'entrelacement implique par le théorème de Schur 17.13 que $F_G = 0$ et donc $\langle\chi,\chi'\rangle = 0$.

Si au contraire les représentation sont équivalentes, alors le lemme 17.15 nous dit que $\chi = \chi'$ et nous reprenons la définition :

$$\langle\chi,\chi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}1 = 1 \tag{17.66}$$

parce que les nombres $\chi(g)$ sont des racines de l'unité. □

17.2.1 Représentation régulière

Nous notons λ la **représentation régulière gauche**, agissant sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{K}$ par

$$\Big(\lambda(g)f\Big)(g) = f(g^{-1}h). \tag{17.67}$$

D'autre part nous considérons les fonctions $\delta_g\colon G \to \mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou pire) définie par

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.68}$$

La représentation régulière agit sur les fonctions δ_s de la façon suivante :

$$\lambda(g)\delta_s = \delta_{gs} \tag{17.69}$$

parce que $\big(\lambda(g)\delta_s\big)(h) = \delta_s(g^{-1}h) = \delta_{gs}(h)$.

Lemme 17.18.
Le caractère de la représentation régulière gauche est donné par

$$\chi_\lambda = |G|\delta_e. \tag{17.70}$$

Démonstration. Appliquer l'équation (17.70) fonctionne parce que $\chi_\lambda(e)$ est la dimension de l'espace des fonctions sur G, c'est-à-dire $|G|$. Si par contre $g \neq e$, alors $\lambda(g)$ est une matrice de permutation (dans la base des δ_h) et a donc tous ses éléments diagonaux nuls. □

Si ρ est une représentation et si f est une fonction sur le groupe, alors nous considérons l'opérateur

$$\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g). \tag{17.71}$$

Proposition 17.19 ([275]).
Si (ρ, V) est une représentation irréductible et si f est une fonction centrale sur G, alors l'opérateur ρ_f est une homothétie de V de rapport

$$\frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g) \tag{17.72}$$

où χ est le caractère de ρ.

Démonstration. Nous commençons par voir que ρ_f entrelace ρ. En effet,

$$\begin{aligned}
\rho(t)^{-1}\circ\rho_f\circ\rho(t) &= \sum_g f(g)\rho(t^{-1}gt) && \text{(17.73a)}\\
&= \sum_h f(tht^{-1})\rho(g) \qquad h = t^{-1}gt && \text{(17.73b)}\\
&= \sum_h f(h)\rho(h) && \text{(17.73c)}\\
&= \rho_f && \text{(17.73d)}
\end{aligned}$$

où en écrivant $f(tht^{-1}) = f(h)$, nous avons utilisé le fait que f était centrale. Étant donné que ρ_f entrelace une représentation irréductible, le lemme de Schur (17.13) nous indique que ρ_f est une homothétie. Soit k le facteur d'homothétie. Alors d'une part $\mathrm{Tr}(\rho_f) = nk$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\rho_f) &= \mathrm{Tr}\big(\sum_g f(g)\rho(g)\big) && \text{(17.74a)}\\
&= \sum_g f(g)\,\mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big) && \text{(17.74b)}\\
&= \sum_g f(g)\chi(g). && \text{(17.74c)}
\end{aligned}$$

Du coup effectivement

$$k = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g). \tag{17.75}$$

□

17.2.2 Caractères et représentations : suite et fin

Lemme 17.20.
Un groupe fini n'a (à équivalence près) qu'un nombre fini de représentations irréductibles.

Démonstration. Les caractères irréductibles forment un système orthonormé (proposition 17.17) et donc libre parmi les fonctions centrales. Donc il y a au plus autant de caractères irréductibles que la dimension de l'espace des fonctions centrales ; et ce dernier est de dimension finie donnée par le nombre de classes de conjugaison de G. □

Nous savons que les caractères de deux représentations irréductibles sont égaux. Étant donné qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations irréductibles, il existe un nombre fini de caractères irréductibles. Nous pouvons donc fixer les notations suivantes. Les caractères irréductibles seront notés $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,h}$ et nous noterons (σ_i, W_i) une représentation ayant le caractère φ_i.

Théorème 17.21 ([275]).
Soit (ρ, V) une représentation de G de caractère χ. Alors sa décomposition en représentations irréductibles est donnée par

$$(V, \rho) = \bigoplus_{i=1}^{h} k_i(W_i, \sigma_i) \tag{17.76}$$

avec $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$. En particulier, à permutation près des facteurs, la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles est unique.

Démonstration. La décomposition de χ en caractères irréductibles est donnée par $\chi = \sum_i k_i \varphi_i$; en prenant le produit de cette égalité avec φ_j et en tenant compte de l'othonormalité des caractères irréductibles,

$$\langle \chi, \varphi_j \rangle = \sum_i k_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = k_j. \tag{17.77}$$

□

Le théorème suivant est ce qui nous permet de dire que l'étude des caractères et l'étude des représentations, c'est la même chose.

Théorème 17.22.
Soit G un groupe fini[6].

(1) Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractères.

(2) Si χ est le caractère d'une représentation, alors

(2a) $\langle \chi, \chi \rangle \in \mathbb{N}$

(2b) $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si la représentation est irréductible.

Démonstration. Nous démontrons chaque point séparément.

(1) Le fait que deux représentations équivalentes aient même caractère est le lemme 17.15. Nous montrons l'autre sens. Si (ρ, V) et (ρ', V') sont deux représentations irréductibles de décompositions

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{17.78a}$$

$$V' = \bigoplus_i k'_i W_i, \tag{17.78b}$$

alors si $\chi = \chi'$, nous avons $k_i = k'_i$ et les représentations sont identiques.

(2) Soit (ρ, V) une représentation ayant χ comme caractère. En posant $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$ nous avons la décomposition en représentations irréductibles

$$V = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{17.79}$$

et aussi

$$\langle \chi, \chi \rangle = \langle \sum_i k_i \varphi_i, \sum_j k_j \varphi_j \rangle = \sum_i k_i^2 \in \mathbb{N}. \tag{17.80}$$

Ce nombre est de plus égal à 1 si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls sauf un qui vaudrait 1. Ce cas donne une représentation irréductible.

□

Proposition 17.23.
Si (λ, R) est la représentation régulière gauche de décomposition en représentations irréductibles

$$R = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{17.81}$$

alors

6. Nous sommes depuis longtemps dans l'étude des représentations des groupes finis.

(1) $k_i = \dim W_i$,
(2) $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$,
(3) *pour tout* $g \in G$, $\sum_i (\dim W_i)\varphi_i(g) = 0$ [7].
(4) *Si* $\{(n_i, \varphi_i)\}$ *est la liste des couples dimension,caractère des représentations irréductibles non équivalentes, alors pour tout* $s \in G\backslash\{e\}$ *nous avons* $\sum_{i=1}^{p} n_i\varphi_i(s) = 0$ *où la somme porte sur les représentations irréductibles non équivalentes.*

Démonstration. Nous notons r le caractère de la représentation régulière gauche. Nous avons

$$k_i = \langle r, \varphi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s\in G} r(s)\overline{\varphi_i(s)} = \overline{\varphi_i(e)}. \tag{17.82}$$

Mais $\varphi_i(e) = \dim W_i \in \mathbb{R}$, donc nous avons bien $k_i = \dim W_i$. Le caractère de la représentation régulière peut alors s'exprimer de deux façons :

$$|G|\delta_e = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i. \tag{17.83}$$

En évaluant cette égalité en e nous trouvons directement

$$|G| = \sum_i (\dim W_i)^2, \tag{17.84}$$

et en l'évaluant en $s \neq e$, nous trouvons

$$0 = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i(s). \tag{17.85}$$

□

Le théorème suivant est valable pour les groupes finis (comme toute cette section).

Théorème 17.24 ([275]).
Les caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_h$ *forment une base orthonormé des fonctions centrales sur* G.

Démonstration. Nous savons déjà qu'ils forment un système orthonormé. Considérons le sous-espace $H = \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,h}$ de l'espace des fonctions centrales sur G. En vertu de la proposition 4.115, il nous suffit de prouver que $H^\perp = 0$. Soit donc f, une fonction centrale appartenant à $H^\perp$. Pour tout i, nous avons $\langle f, \varphi_i \rangle = 0$ et donc aussi $\langle \bar{f}, \bar{\varphi}_i \rangle = 0$.

Considérant une représentation irréductible (σ, W) de caractère φ, nous savons par la proposition 17.19 que l'opérateur

$$\sigma_{\bar{f}} = \sum_g \bar{f}(g)\varphi(g) \tag{17.86}$$

est une homothétie de rapport $\langle \bar{f}, \bar{\varphi} \rangle / \dim W = 0$. Étant donné que toutes les représentations sont des sommes directes de représentations irréductibles, en réalité l'opérateur $\rho_{\bar{f}}$ est nul pour toute représentation ρ. En particulier pour la représentation régulière,

$$0 = \lambda_{\bar{f}}(\delta_t) = \sum_{g\in G} \bar{f}(g)\lambda(g)(\delta_t) = \sum_g \bar{f}(g)\delta_{ft}. \tag{17.87}$$

En écrivant cette égalité avec $t = e$ et puis en appliquant à $k \in G$ nous trouvons

$$0 = \sum_g \bar{f}(g)\delta_g(k) = \bar{f}(k). \tag{17.88}$$

Donc $\bar{f} = 0$ et f est nulle. □

7. Cette propriété est appelée « orthogonalité des colonnes » pour une raison qui apparaîtra au moment de compléter le tableau (17.110).

Corollaire 17.25.
Le nombre de représentations irréductibles non équivalentes d'un groupe fini est égal à son nombre de classes de conjugaison.

Démonstration. Le nombre de classes de conjugaison est la dimension de l'espace des fonctions centrales qui elle-même est égale au nombre de caractères irréductibles par le théorème 17.24. Enfin deux caractères irréductibles sont égaux si et seulement si les représentations sous-jacentes sont équivalentes. □

Corollaire 17.26.
Toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1.

Démonstration. Le corollaire 17.25 nous dit qu'il y a autant de représentations unitaires qu'il n'y a de représentations irréductibles (non équivalentes). Mais les classes de conjugaisons sont des singletons (lemme 2.20). Nous avons donc exactement $|G|$ représentations irréductibles lorsque G est abélien.

Mais d'autre part la proposition 17.23(2) donne $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$ lorsque la somme parcours les représentations irréductibles. Il y a $|G|$ termes à la somme, donc tous les termes doivent être 1. □

17.3 Représentation produit tensoriel

Soient ρ et ϕ, deux représentations d'un groupe G sur des espaces vectoriels V et W. La représentation **produit tensoriel** est la représentation

$$\begin{aligned} \rho\otimes\phi\colon G &\to \mathrm{GL}(V\otimes W)\\ (\rho\otimes\phi)(g)(v\otimes w) &= \rho(g)v\otimes\phi(g)w. \end{aligned} \tag{17.89}$$

Pour trouver son caractère, nous considérons une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{e_\alpha\}$ de W, et la base $\{e_i\otimes e_\alpha\}$ de $V\otimes W$. Donc

$$(\rho\otimes\phi)(g)(e_i\otimes e_\alpha) = \rho(g)e_i\otimes\phi(g)e_\alpha. \tag{17.90}$$

Nous devons savoir quelle est la composante « $e_i\otimes e_\alpha$ » de cette dernière expression, et c'est évidemment

$$\rho(g)_{ii}\rho_{\alpha\alpha}, \tag{17.91}$$

ce qui nous amène à dire que

$$\mathrm{Tr}(\rho\otimes\phi)(g) = \sum_i\sum_\alpha \rho(g)_{ii}\phi(g)_{\alpha\alpha} = \mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big)\,\mathrm{Tr}\big(\phi(g)\big), \tag{17.92}$$

c'est-à-dire au final que

$$\chi_{\rho\otimes\phi} = \chi_\rho\chi_\phi. \tag{17.93}$$

17.4 Exemple sur le groupe symétrique

Soit $G = S_3$, un des premiers groupes finis non abéliens. On en a une représentation de dimension deux en tant que permutation des sommets d'un triangle équilatéral, donnée dans l'exemple 17.6 ; nous notons ρ cette représentation.

Nous y avons aussi la représentation de signature donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon\colon S_3 &\to \mathrm{GL}(\mathbb{C})\\ \sigma &\mapsto \epsilon(\sigma)\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned} \tag{17.94}$$

Et enfin il y a la représentation triviale. Ce sont les trois représentations irréductibles ; pour rappel il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison (corollaire 17.25).

Classe de conjugaison	taille	χ_1	χ_ϵ	χ_ρ
Id	1	1	1	2
(A,B)	3	1	-1	0
(A,B,C)	2	1	1	-1

Nous calculons par exemple le produit scalaire

$$\langle \chi_1, \chi_\epsilon \rangle = \frac{1}{6}\big(1 \cdot \chi_1(\mathrm{Id})\overline{\chi_\epsilon(\mathrm{Id})} + 3 \cdot \chi_1(A,B)\overline{\chi_\epsilon(A,B)} + 2 \cdot \chi_1(A,B,C)\overline{\chi_\epsilon(A,B,C)}\big) \tag{17.95a}$$

$$= 0. \tag{17.95b}$$

D'autre part nous avons aussi

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1. \tag{17.96}$$

17.5 Table des caractères du groupe symétrique S_4

Pour la table des caractères de S_4, voir [43]. Et si vous voulez la table des caractères du groupe diédral, vu que ce sont de isométries de $\mathbb{R}^n$, il faudra voir plus bas en la section 19.15.

17.5.1 Calculs à partir de rien ou presque

Nous savons que les classes de conjugaison dans S_4 sont caractérisées par la structure des décompositions en cycles (proposition 2.67). Elles sont données dans l'exemple 2.69.

Nous avons donc 5 classes de conjugaison, et il nous faut donc 5 représentations irréductibles non équivalentes (corollaire 17.25) dont nous allons chercher les caractères.

La première est la représentation triviale de dimension 1 ; nous notons χ_1 son caractère et nous avons la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1

(17.97)

Ensuite nous avons la signature qui est un morphisme non trivial $\epsilon\colon S_n \to \{-1,1\}$. Nous avons alors la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1

(17.98)

Une troisième représentation pas trop compliquée à trouver est celle

$$\begin{aligned} \rho_p &\colon S_4 \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \\ \rho_p(\sigma)e_i &= e_{\sigma(i)}. \end{aligned} \tag{17.99}$$

Cela n'est pas une représentation irréductible parce que $\mathbb{C}^4$ se décompose en deux sous-espaces stables :

$$D = \mathrm{Span}(1,1,1,1) \tag{17.100a}$$

$$H = \{x \in \mathbb{C}^4 \text{ tel que } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}. \tag{17.100b}$$

La représentation induite sur D est la représentation triviale. Puis sur H, elle induit une autre représentations que nous allons noter ρ_s.

Nous allons à présent déduire le caractère de la représentation ρ_s et prouver qu'elle est irréductible. Il est cependant possible de sauter cette étape en échange d'un certain travail sur les isométries du tétraèdre. Voir la proposition 19.12 et ensuite

Nous avons la décomposition $\rho_p = \rho_1 \oplus \rho_s$ et donc

$$\chi_p = \chi_1 + \chi_s. \tag{17.101}$$

Nous savons déjà χ_1. Le caractère χ_p n'est pas très compliqué parce que $\chi_p(\sigma)$ est une matrice de permutation des vecteurs de base. Donc la matrice $\rho_p(\sigma)$ a un 1 sur la diagonale pour les i tels que $\sigma(i) = i$. Nous avons donc

$$\chi_p(\mathrm{Id}) = 4 \qquad \chi_p(12) = 2 \tag{17.102a}$$
$$\chi_p\big((12)(34)\big) = 0 \qquad \chi_p(123) = 1 \tag{17.102b}$$
$$\chi_p(1234) = 0. \tag{17.102c}$$

Le caractère χ_s peut être calculé par simple soustraction :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_s	3	3	1	0	-1	-1

(17.103)

Avant d'ajouter cette ligne au tableau des représentations irréductibles nous devons savoir si ρ_s en est une. Pour cela, tant que nous avons son caractère nous pouvons utiliser le critère du théorème 17.22 :

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma \in S_4} \chi_s(\sigma)^2. \tag{17.104}$$

Nous avons tout de suite $|S_4| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ et puis

$$24\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 24, \tag{17.105}$$

donc oui, le caractère est irréductible parce que $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$. Et nous pouvons donc ajouter la ligne (17.103) à notre tableau. Par ailleurs, nous notons qu'elle est de dimension 3.

Pour le reste nous savons qu'il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison, de telle sorte qu'il ne manque que deux représentations irréductibles. De plus la proposition 17.23 nous dit que si n_i est la dimension de la i^{e} représentation irréductible, alors

$$|S_4| = \sum_i n_i^2. \tag{17.106}$$

Dans notre situation, si nous nommons n_1 et n_2 les dimensions des deux représentations qui nous manquent, nous avons $24 = n_1^2 + n_2^2 + (1^2 + 1^2 + 3^2)$, c'est-à-dire $n_1^2 + n_2^2 = 13$. Il n'y a pas des tonnes de sommes de deux carrés qui font 13. Il y a $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$, et c'est tout.

Nous recherchons donc encore une représentation de dimension 2 et une de dimension 3. Pour cela nous allons un peu regarder les produits tensoriels qui s'offrent à nous. Pour faire une dimension 3, il faut faire le produit d'une de dimension 1 par une de dimension 3. Là encore le choix est très limité et nous demande d'essayer

$$\rho_W = \rho_s \otimes \rho_\epsilon \tag{17.107}$$

qui agit sur l'espace $V_2 \otimes V_\epsilon$ par

$$\rho_W(g)(v \otimes x) = \rho_s(g)v \otimes \rho_\epsilon(g)x. \tag{17.108}$$

Pour savoir son caractère nous utilisons la petite formule toute simple (17.93) : nous multiplions case par case les tableaux (17.103) et (17.98) :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_W	3	3	-1	0	1	-1

(17.109)

Avant de réellement ajouter cette ligne au tableau, nous devons nous assurer qu'elle est bien irréductible. Nous utilisons le même critère : $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$, donc c'est bon.

Pour trouver le dernier caractère, que nous nommerons χ_u, il ne faut pas beaucoup d'imagination. Il suffit d'utiliser les relations d'orthogonalité du théorème 17.24, en sachant que la dimension est 2 et qu'alors $\chi_W(\mathrm{Id}) = 2$, c'est pas trop compliqué :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	b	c	d	e

(17.110)

Les relations d'orthogonalité des colonnes de la propriété 17.23 nous permettent de calculer les coefficients manquants. En pratique, il suffit de prendre le produit scalaire de chaque ligne avec la première et d'égaler avec zéro. Nous trouvons $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, et $e = 2$. Le tableau final est :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	−1	1	−1	1
χ_s	3	3	1	0	−1	−1
χ_W	3	3	−1	0	1	−1
χ_u	2	2	0	−1	0	2

(17.111)

Notons que nous sommes parvenus à remplir la dernière ligne sans rien savoir de la représentation qui va avec. Nous allons cependant donner une interprétation géométrique et fixer cette représentation comme agissant sur le triangle équilatéral en 17.30.

17.5.2 Représentation de S_4 via les isométries du tétraèdre

Une des représentations trouvées (la représentation ρ_s) peut être vue comme le groupe $\mathrm{Iso}(T)$ des isométries affine du tétraèdre grâce à la proposition 19.12 qui donne un isomorphisme de groupe $S_4 \simeq \mathrm{Iso}(T)$ lorsque T est un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$.

Nous verrons donc ça plus en détail dans la section 19.1.5.

17.5.3 À propos de la représentation ρ_u

Nous nous penchons à présent sur la représentations ρ_u dont nous ne savons rien à part qu'elle est de dimension 2 et son caractère.

Lemme 17.27.
Nous avons $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ pour tout $s \in V_4$.

Démonstration. Tous les éléments de V_4 sont conjugués (à part l'identité, mais pour elle le résultat est clair), donc il suffit de prouver le résultat pour un élément quelconque.

L'endomorphisme $\rho_u\big((12)(34)\big)$ est un endomorphisme d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ dont la trace est 2. Imposons donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.112}$$

sous la contrainte $a + d = 2$. La résolution est assez rapide et donne $b = c = 0$, $a = d = 1$.

Vous voulez une démonstration plus technologique ? Oui ? Alors commencez par remarquer que l'opérateur $A = \rho_u\big((12)(34)\big)$ vérifie $A^2 = 1$, donc le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Il est peut-être minimal ou peut être pas, mais en tout cas le polynôme minimal divise celui-là et donc est soit $X - 1$ soit $X + 1$ soit $X^2 - 1$. Dans les trois cas il est scindé à racines simples, et l'endomorphisme A est diagonalisable par le théorème 11.167(3).

Mais comme $A^2 = 1$, les valeurs propres (ce qui est sur la diagonale) de A ne peuvent être que ± 1. La trace étant 2, les éléments diagonaux ne peuvent être que 1. Et $A = \mathrm{Id}$. □

Le groupe V_4 définit en 5.41 est normal dans S_4, donc le quotient S_4/V_4 est un groupe par le lemme 2.28.

Lemme 17.28.
L'application

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_u \colon S_4/V_4 &\to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \\ [g] &\mapsto \rho_u(g) \end{aligned} \tag{17.113}$$

est bien définie et donne une représentation irréductible de S_4/V_4.

Démonstration. Montrons que c'est bien définit. Si $s \in V_4$ nous devons prouver que $\rho_u(gs) = \rho_u(g)$. Vu que ρ_u est un homomorphisme (c'est une représentation), et que $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ nous avons directement

$$\rho_u(gs) = \rho_u(g)\rho_u(s) = \rho_u(g). \tag{17.114}$$

Nous devons prouver que la représentation $\tilde{\rho}_u$ est irréductible. Si un sous-espace non trivial $\mathrm{Span}(x)$ était stabilisé par $\tilde{\rho}_u$, il serait également stabilisé par ρ_u. Mais comme ρ_u est irréductible, elle ne stabilise personne. □

Lemme 17.29.
Le groupe S_4/V_4 est un groupe non-abélien, isomorphe à S_3.

Démonstration. Le groupe S_4/V_4 a une représentation irréductible de dimension 2, et n'est donc pas abélien par le corollaire 17.26.

Il contient $|S_4|/|V_4| = 24/4 = 6$ éléments (théorème de Lagrange 2.31). Or $6 = 3 \times 2$, donc le groupe S_4/V_4 est dans le cas non-abélien du théorème 5.25(2). Cette partie parle d'unicité du groupe non-abélien d'ordre 6. Or S_3 est un groupe non-abélien d'ordre 6, donc S_4/V_4 est isomorphe à S_3. □

Attention : il n'est pas correct de dire que S_4/V_4 est un sous-groupe de S_4 juste parce que c'est un quotient de S_4 ; ce n'est en général pas vrai (exemple 2.29).

17.30.
Nous sommes maintenant aptes à identifier la représentation ρ_u. D'abord nous nous rappelons de la représentation $\rho_s : S_4 \to \mathrm{Iso}(T)$ de S_4 sur le tétraèdre. Ensuite si A est un sommet dudit tétraèdre et que $S_3 \subset S_4$ est la partie qui fixe A alors nous avons une représentation

$$\rho_s : S_3 \to \mathrm{Iso}(T) \tag{17.115}$$

qui agit en réalité sur le triangle équilatéral T' opposé au sommet A.

Nous avons finalement la chaine d'homomorphismes de groupes

$$S_4 \xrightarrow{\texttt{proj}} S_4/V_4 \xrightarrow{\simeq} S_3 \xrightarrow{\rho_s} \mathrm{Iso}(T') \tag{17.116}$$

Cela est donc une représentation $S_4 \to \mathrm{Iso}(T')$. Elle est de dimension 2 et est irréductible (elle contient les rotations d'angle $2\pi/3$ qui ne fixent aucune direction). Elle est donc la représentation ρ_u qui est la seule irréductible de dimension 2.

Nous avons donc montré que la représentation ρ_u dont nous ne savions rien est la représentation de S_4 sur un triangle équilatéral obtenue à partir de celle de S_4 sur le tétraèdre, en fixant un point.

Chapitre 18

Encore de l'analyse (et c'est pas fini)

18.1 Densité des polynômes

Corollaire 18.1.
Si $X \subset \mathbb{R}$ est compact et de mesure finie[1]*, alors l'ensemble des polynômes est denses dans $\big(C(X,\mathbb{R}), \|.\|_2\big)$.*

Démonstration. Si f est une fonction dans $C(X,\mathbb{R})$ et si $\epsilon \geqslant 0$ est donné alors nous pouvons considérer un polynôme P tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \epsilon$. Dans ce cas nous avons

$$\|f-P\|_2^2 = \int_X |f(x)-P(x)|^2 dx \leqslant \int_X \epsilon^2 dx = \epsilon^2 \mu(X) \tag{18.1}$$

où $\mu(X)$ est la mesure de X (finie par hypothèse). □

18.2 Primitive et intégrale

Nous avons déjà parlé de primitive de fonction continue en la proposition 13.308.

Proposition 18.2.
Soit I un intervalle borné ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$.

Démonstration. Si une primitive H de h est à support compact, alors

$$\int_I h = H(b) - H(a) = 0 - 0 = 0. \tag{18.2}$$

Pas de problèmes dans ce sens.

Supposons maintenant que $\int_I h = 0$. Le fait que h admette une primitive dans $C^\infty(I)$ est évident : toute fonction continue admet une primitive[2]. Soit H une telle primitive et $\tilde{H} = H - H(b)$. Alors $\tilde{H}(b) = 0$ et

$$\tilde{H}(a) = H(a) - H(b) = -\int_I h = 0. \tag{18.3}$$

Nous rappelons que le support d'une fonction est *la fermeture* de l'ensemble des points de non-annulation.

Supposons que le support de h soit inclus dans $[m,M] \subset]a,b[$. En prenant des nombres m' et M' tels que $a < m' < m$ et $M < M' < b$ (nous insistons sur le caractère strict de ces inégalités), la fonction h est nulle sur $[a,m']$ et sur $[M',b]$; la fonction $\tilde{H}$ doit donc y être constante. Mais nous avons déjà vu que $\tilde{H}(a) = \tilde{H}(b) = 0$. Donc l'ensemble des points sur lesquels $\tilde{H}$ n'est pas nul est inclus dans $]m',M'[$ et donc est strictement (des deux côtés) inclus dans I. □

1. Dans $\mathbb{R}$ cette hypothèse est évidemment superflue par rapport à l'hypothèse de compacité ; mais ça suggère des généralisations ...
2. Théorème 13.308.

18.2.1 Théorème taubérien de Hardi-Littlewood

Un théorème **taubérien** est un théorème qui compare les modes de convergence d'une série.

Lemme 18.3.
Si f et g sont des fonctions continues, alors $s(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ est également une fonction continue.

Démonstration. Soit x_0 et prouvons que s est continue en x_0. Si $f(x_0) \neq g(x_0)$ (supposons $f(x_0) > g(x_0)$ pour fixer les idées), alors nous avons un voisinage de x_0 sur lequel $f > g$ et alors $s = f$ sur ce voisinage et la continuité provient de celle de f.

Si au contraire $f(x_0) = g(x_0) = s(x_0)$ alors si (a_n) est une suite tendant vers x_0, nous prenons N tel que $\big|f(a_n) - f(x_0)\big| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > N$ et M tel que $\big|g(a_n) - g(x_0)\big| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > M$. Alors pour tout $n > \max\{N, M\}$ nous avons

$$\big|s(a_n) - s(x_0)\big| \leqslant \epsilon, \tag{18.4}$$

d'où la continuité de s en x_0. □

La proposition suivante dit que si une fonction connaît un saut, alors on peut le lisser par une fonction continue.

Proposition 18.4.
Soit f continue sur $[a, x_0[$ et sur $[x_0, b]$ avec $f(x_0^-) < f(x_0)$. En particulier nous supposons que $f(x^-)$ existe et est finie. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue s telle que sur $[a, b]$ on ait $s \leqslant f$ et

$$\int_a^b s(x) - f(x)\,dx \leqslant \epsilon. \tag{18.5}$$

Démonstration. Nous notons A la taille du saut :

$$A = f(x_0) - f(x_0^-). \tag{18.6}$$

Quitte à changer a et b, nous pouvons supposer que

$$f(x) < f(x_0) + \frac{A}{3} \tag{18.7}$$

pour $x \in [a, x_0[$ et

$$f > f(x_0) + \frac{2A}{3} \tag{18.8}$$

pour $x \in [x_0, b]$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de faire ce choix.

Soit $m(x)$ la droite qui joint le point $\big(x_0 - \epsilon, f(x_0 - \epsilon)\big)$ au point $\big(x_0, f(x_0^+)\big)$. Nous posons

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < x_0 - \epsilon \\ \max\{m(x), f(x)\} & \text{si } x_0 - \epsilon \leqslant x \leqslant x_0 \\ f(x) & \text{si } x > x_0. \end{cases} \tag{18.9}$$

En vertu des différents choix effectués, c'est une fonction continue. En effet

$$s(x_0 - \epsilon) = \max\{f(x_0 - \epsilon), f(x_0, \epsilon)\} = f(x_0 - \epsilon) \tag{18.10}$$

et

$$s(x_0) = \max\{m(x_0), f(x_0^+)\} = f(x_0^+) \tag{18.11}$$

parce que $m(x_0) = f(x_0^+)$. En ce qui concerne l'intégrale, si nous posons

$$M = \sup_{x,y \in [a,b]} |f(x) - f(y)|, \tag{18.12}$$

nous avons

$$\int_a^b s - f = \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0} s - f \leqslant \epsilon M. \tag{18.13}$$

□

Lemme 18.5.
Pour tout polynôme P, nous avons la formule

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^nP(x^n)=\int_0^1 P(x)dx. \tag{18.14}$$

Démonstration. D'abord pour $P=1$, la formule se réduit à la série harmonique connue. Ensuite nous prouvons la formule pour le polynôme $P=X^k$ et la linéarité fera le reste pour les autres polynômes. Nous avons

$$(1-x)\sum_n x^nx^{kn}=(1-x)\sum_n(x^{1+k})^n=\frac{1-x}{1-x^{1+k}}=\frac{1}{1+x+\cdots+x^k}. \tag{18.15}$$

Donc

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_n x^nP(x^n)=\frac{1}{1+k}. \tag{18.16}$$

Par ailleurs, c'est vite vu que

$$\int_0^1 x^kdx=\frac{1}{k+1}. \tag{18.17}$$

□

Théorème 18.6 (Hardy-Littlewood[276])**.**
Soit (a_n) une suite réelle telle que

(1) $\frac{a_n}{n}$ tend vers une constante,

(2) $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$,

(3) $\lim_{x\to 1^-}F(x)=l$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=l$.

Démonstration. Quitte à prendre la suite $b_0=a_0-l$ et $b_n=a_n$, on peut supposer $l=0$.

Soit Γ l'ensemble des fonctions

$$\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R} \tag{18.18}$$

telles que

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\gamma(x^n)$ converge pour $0\leqslant x<1$,

(2) $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n\geqslant 0}a_n\gamma(^n)=0$.

Ce Γ est un espace vectoriel.

Les polynômes sont dans Γ Soit $\gamma(t)=t^s$. Pour $0\leqslant x<1$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\gamma(x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{ns}<\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{18.19}$$

Donc la condition de convergence est vérifiée. En ce qui concerne la limite,

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{ns}=\lim_{x\to 1^-}F(x^s)=0 \tag{18.20}$$

parce que par hypothèse, $\lim_{x\to 1^-}F(x)=0$.

Définition de la fonction qui va donner la réponse Nous considérons la fonction

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leqslant t<1/2\\ 1 & \text{si } 1/2\leqslant t\leqslant 1,\end{cases} \tag{18.21}$$

c'est-à-dire $g = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. Nous montrons que si $g \in \gamma$, alors le théorème est terminé. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant x^n < 1/2$ dès que

$$n > -\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \tag{18.22}$$

avec une note comme quoi $\ln(x) < 0$, donc la fraction est positive. Nous désignons par N_x la partie entière de ce n adapté à x. L'idée est que la fonction $g(x^n)$ est la fonction indicatrice de $0 \leqslant n \leqslant N_x$, et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n. \tag{18.23}$$

Mais si $x \to 1^-$, alors $N_x \to \infty$, donc

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N_x} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n), \tag{18.24}$$

et cela fait zéro si $g \in \Gamma$.

Approximation de g par des polynômes Nous considérons la fonction

$$h(t) = \frac{g(t) - t}{t(1-1)} = \begin{cases} \frac{1}{t-1} & \text{si } t \in [0, 1/2[\\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{18.25}$$

La seconde égalité est au sens du prolongement par continuité. La fonction h est une fonction non continue qui fait un saut de -2 à 2 en $x = 1/2$. En vertu de la proposition 18.4 (un peu adaptée), nous pouvons considérer deux fonctions continues s_1 et s_2 telles que

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \tag{18.26}$$

et

$$\int_0^1 s_2 - s_1 \leqslant \epsilon. \tag{18.27}$$

Notons que l'inégalité $s_1 \leqslant s_2$ doit être stricte sur au moins un petit intervalle autour de $x = 1/2$. Soient P_1 et P_2, deux polynômes tels que $\|P_1 - s_1\|_\infty \leqslant \epsilon$ et $\|P_2 - s_2\|_\infty \leqslant \epsilon$ (ici la norme supremum est prise sur $[0, 1]$). C'est le théorème de Stone-Weierstrass (13.305) qui nous permet de le faire.
Nous posons aussi [3]

$$Q_1 = P_1 + \epsilon \tag{18.28a}$$
$$Q_2 = P_2 - \epsilon. \tag{18.28b}$$

Nous avons

$$\int_0^1 Q_1 - Q_2 \leqslant \int_0^1 Q_1 - P_1 + P_1 - P_2 + P_2 - Q_2. \tag{18.29}$$

Pour majorer cela, d'abord $Q_1 - P_1 = P_2 - Q2 = \epsilon$, ensuite,

$$P_1 - P_2 = P_1 - s_1 + s_1 - s_2 + s_2 - P_2 \tag{18.30}$$

dans lequel nous avons $P_1 - s_1 \leqslant \epsilon$, $s_2 - P_2 \leqslant \epsilon$ et $\int_0^1 s_1 - s_2 \leqslant \epsilon$. Au final, nous posons $q = Q_2 - Q_1$ et nous avons

$$\int_0^1 q \leqslant 5\epsilon. \tag{18.31}$$

Enfin nous posons aussi

$$R_i(x) = x + x(1-x)Q_i. \tag{18.32}$$

3. À ce niveau, je crois qu'il y a une faute de frappe dans [276].

Ces polynômes vérifient $R_i(0) = 0$, $R_i(1) = 1$ et

$$R_1 \leqslant g \leqslant R_2 \tag{18.33}$$

parce que

$$Q_1 \leqslant P_1 \leqslant h \leqslant P_2 \leqslant Q_2 \tag{18.34}$$

et

$$t + t(1-t)Q_1 \leqslant \underbrace{t + t(1-t)h(t)}_{g(t)} \leqslant t + t(1-t)Q_2. \tag{18.35}$$

Preuve que g est dans Γ D'abord si $0 \leqslant x < 1$, $x^N < \frac{1}{2}$ pour un certain N, et alors $g(x^N) = 0$.
Du coup la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N} a_n \tag{18.36}$$

est une somme finie qui converge donc.
D'autre part nous prenons M tel que $|a_n| < \frac{M}{n}$ pour tout n. Nous majorons $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n)$ en utilisant R_1. Mais vu que R_1 est un polynôme, nous pouvons dire que $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)| \leqslant \epsilon$ en prenant $x \in [\lambda, 1[$ et λ assez grand. Nous avons :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)\right| + \underbrace{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)\right|}_{\leqslant\epsilon} \tag{18.37a}$$

$$\leqslant \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(g - R_1)(x^n) \tag{18.37b}$$

$$\leqslant \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(R_2 - R_1)(x^n) \tag{18.37c}$$

$$\leqslant \epsilon + M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}(Q_2 - Q_1)(x^n) \tag{18.37d}$$

$$= \epsilon + M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \tag{18.37e}$$

$$\leqslant \epsilon + M(1-x)\sum_n x^n q(x^n). \tag{18.37f}$$

Justifications :

— La ligne (18.37d) est par le fait que $R_2 - R_1 = x(1-x)(Q_2 - Q_1)$.

— La ligne (18.37f) provient d'une majoration sauvage de $1/n$ par 1 et de $1-x^n$ par $1-x$.

Par le lemme 18.5, nous avons alors

$$\lim_{x\to 1^-} |\sum_n a_n g(x^n)| \leqslant \epsilon + M\int_0^1 q \leqslant 6\epsilon. \tag{18.38}$$

□

18.2.2 Théorème de Müntz

Théorème 18.7 (Théorème de Müntz[277, 278, 279])**.**
Soit $C_0\big([0,1]\big)$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ ou $\|.\|_2$ et une suite (α_n) strictement croissante de nombres positifs. Nous notons ϕ_λ la fonction $x \mapsto x^\lambda$.
Alors

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_n}\}} \tag{18.39}$$

est dense dans $C_0\big([0,1]\big)$ *si et seulement si*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}=+\infty. \tag{18.40}$$

Nous prouvons le théorème pour la norme $\|.\|_2$.

Démonstration. Soit $m\in\mathbb{R}^+$; nous notons $\Delta_N(m)$ la distance entre ϕ_m et $\text{Span}\{\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N}\}$. Cette distance peut être évaluée avec le déterminant de Gram (proposition 11.57)

$$\Delta_N(m)^2=\frac{G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})}{G(\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})}. \tag{18.41}$$

Pour calculer cela nous avons besoin des produits scalaires [4]

$$\langle\phi_a,\phi_b\rangle=\int_0^1 x^{a+b}dx=\frac{1}{a+b+1}. \tag{18.42}$$

Pour avoir des notations plus compactes, nous notons $\alpha_0=m$. Donc nous avons à calculer le déterminant

$$G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\det\left(\tfrac{1}{\alpha_i+\alpha_j+1}\right) \tag{18.43}$$

où $i,j=0,\dots,N$. Nous reconnaissons un déterminant de Cauchy (proposition 11.58) en posant, dans $\frac{1}{\alpha_i+\alpha_j+1}$, $a_i=\alpha_i$ et $b_j=\alpha_j+1$. Étant donné que $b_j-b_i=a_j-a_i$, nous avons

$$G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant N}(\alpha_j-\alpha_i)^2}{\prod_{i=0}^{N}\prod_{j=0}^{N}(\alpha_i+\alpha_j+1).} \tag{18.44}$$

Nous séparons maintenant les termes où i ou j sont nuls. En ce qui concerne le dénominateur, il faut prendre tous les couples (i,j) avec i et j éventuellement égaux à zéro. Nous décomposant cela en trois paquets. Le premier est $(0,0)$; le second est $(0,i)$ (chaque couple arrive en fait deux fois parce qu'il y a aussi $(i,0)$) ; et le troisième sont les i,j tous deux différents de zéro :

$$(2m+1)\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)\prod_{i}(\alpha_i+m+1)^2. \tag{18.45}$$

Notons que dans le produit central, le carré est contenu dans le fait qu'on écrit $\prod_{ij}$ et non $\prod_{i<j}$. Nous avons donc

$$G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\prod_i(\alpha_i-m)^2}{(2m+1)\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)\prod_i(\alpha_i+m+1)^2}. \tag{18.46}$$

Le calcul de $G(\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})$ est plus simple [5] :

$$G(\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}{\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)}. \tag{18.47}$$

En divisant l'un par l'autre il ne reste que les facteurs comprenant m et en prenant la racine carrée,

$$\Delta_N(m)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=1}^{N}\left|\frac{\alpha_i-m}{\alpha_i+m+1}\right|. \tag{18.48}$$

Nous passons maintenant à la preuve proprement dite. Supposons que $V=\text{Span}\{\phi_{\alpha_i},i\in\mathbb{N}\}$ est dense. Si m est un des α_i, il peut évidemment être approché par les ϕ_{α_i}. Mais vue la densité

4. C'est ici qu'on se particularise à la norme $\|.\|_2$.
5. Je crois qu'il y a une faute de frappe dans le dénominateur de [277].

de V, un ϕ_m avec $m \neq \alpha_i$ (pour tout i) alors ϕ_m peut également être arbitrairement approché par les ϕ_{α_i}, c'est-à-dire que

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_N(m) = 0. \tag{18.49}$$

Nous posons

$$u_n = \ln\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right) \tag{18.50}$$

et nous prouvons que la série $\sum_n u_n$ diverge. En effet nous nous souvenons de la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, de telle sorte que la N^{e}somme partielle de $\sum_n u_n$ est

$$\ln\left(\frac{\alpha_1 - m}{\alpha_1 + m + 1} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha_N - m}{\alpha_N + m + 1}\right) = \ln\left(\sqrt{2m+1}\Delta_N(m)\right), \tag{18.51}$$

qui tend vers $-\infty$ lorsque $N \to \infty$.

Si la suite (α_n) est majorée et plus généralement si nous n'avons pas $\alpha_n \to \infty$, alors évidemment la série $\sum_n \frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Nous supposons donc que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$. Nous avons aussi [6]

$$u_n = \ln\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{2m+1}{\alpha_n + m + 1}\right) \sim -\frac{2m+1}{\alpha_n}. \tag{18.52}$$

Une justification est donné à l'équation (16.267). Ce que nous avons surtout est

$$\sum_n u_n \sim -(2m+1)\sum_n \frac{1}{\alpha_n}. \tag{18.53}$$

Étant donné que la série de gauche diverge, celle de droite diverge [7].

Nous faisons maintenant le sens opposé : nous supposons que la série $\sum_n 1/\alpha_n$ diverge et nous nous posons

$$V = \text{Span}\{\phi_{\alpha_n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}. \tag{18.54}$$

Il suffit de prouver que $\phi_m \in \bar{V}$ pour tout m parce qu'un corollaire du théorème de Stone-Weierstrass 18.1 montre que $\text{Span}\{\phi_k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans C pour la norme $\|.\|_2$.

Si $\alpha_n \to \infty$, nous avons :

$$u_n \sim \frac{2m+1}{\alpha_n} \to 0 \tag{18.55}$$

et alors $\Delta_N(m) \to 0$. Dans ce cas nous avons immédiatement $\phi_m \in \bar{V}$.

Si par contre α_n ne tend pas vers l'infini, nous repartons de l'expression (18.48), nous posons $0 < \alpha = \sup_i \alpha_i$ et nous calculons :

$$\sqrt{2m+1}\Delta_N(m) = \prod_{i=1}^{N} \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1} \tag{18.56a}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i + m}{\alpha_i + m + 1} \tag{18.56b}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i + m + 1}\right) \tag{18.56c}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1}\right) \tag{18.56d}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1}\right)^N. \tag{18.56e}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. □

6. Je crois qu'il y a une faute de signe dans la dernière expression de [278].
7. Nous utilisons le fait que si $u_n = \sum v_n$ en tant que suites et si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

Remarque 18.8.
Certaines sources[8] citent le théorème de Müntz comme ceci (avec un implicite que $\alpha_i \neq 0$) :

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}} = C\big([0,1]\big) \Leftrightarrow \sum_{i\geqslant 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty. \tag{18.57}$$

Que penser de la présence explicite du 1 (c'est-à-dire de ϕ_0) ou non dans l'ensemble ?

Première chose : la présence éventuelle de ϕ_0 est la raison pour laquelle nous faisons commencer la somme à $i = 2$ et non $i = 1$. Dans le même ordre d'idée, si $\text{Span}\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en prenant n'importe quelle queue de suite, ça reste dense.

Prouvons donc l'énoncé (18.57). Si $\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en posant $\beta_1 = 0$, $\beta_i = \alpha_{i-1}$ notre théorème prouve que $\sum_{\beta=2}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} = +\infty$, cela est exactement que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$. Dans l'autre sens, si $\sum_{i\geqslant 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$, alors nous avons aussi $\sum_{i\geqslant 2} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$ et notre théorème dit que $\text{Span}\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense. A fortiori, $\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense.

Exemple 18.9
Nous savons depuis le théorème 16.83 que la somme des inverses des nombres premiers diverge.
△

18.3 Intégrales convergeant uniformément

18.3.1 Définition et propriété

Définition 18.10.
Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Nous disons que l'intégrale

$$\int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{18.58}$$

converge uniformément *en x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ tel que pour tout compact K tel que $K_\epsilon \subset K$ nous avons*

$$\left|\int_{\Omega\setminus K} f(x,\omega)d\mu(\omega)\right| \leqslant \epsilon. \tag{18.59}$$

Le point important est que le choix de K_ϵ ne dépend pas de x.

Lemme 18.11.
Soit

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega), \tag{18.60}$$

une intégrale uniformément convergente. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous considérons un compact K_k tel que

$$\left|\int_{\Omega\setminus K_k} f(x,\omega)d\mu(\omega)\right| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{18.61}$$

Alors la suite de fonctions F_k définie par

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{18.62}$$

converge uniformément vers F.

8. Dont le rapport du jury 2014

Démonstration. Nous avons

$$\big|F_k(x) - F(x)\big| = \left|\int_{K_k} f(x,\omega)d\mu(\omega) - \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega)\right| \tag{18.63a}$$

$$= |\int_{\Omega\setminus K_k} f(x,\omega)d\mu(\omega)| \tag{18.63b}$$

$$\leqslant \frac{1}{k}. \tag{18.63c}$$

□

18.3.2 Critères de convergence uniforme

Afin de tester l'uniforme convergence d'une intégrale, nous avons le **critère de Weierstrass** :

Théorème 18.12.
Soit $f(x,t)\colon [\alpha,\beta]\times[a,\infty[\to\mathbb{R}$, une fonction dont la restriction à toute demi-droite $x = cst$ est mesurable. Si $|f(x,t)| < \varphi(t)$ et $\int_a^\infty \varphi(t)dt$ existe, alors l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x,t)dt \tag{18.64}$$

est uniformément convergente.

Le théorème suivant est le **critère d'Abel** :

Théorème 18.13.
Supposons que $f(x,t) = \varphi(x,t)\psi(x,t)$ où φ et ψ sont bornée et intégrables en t au sens de Riemann sur tout compact $[a,b]$, $b \geqslant a$. Supposons que :

(1) $|\int_a^T \varphi(x,t)dt| \leqslant M$ où M est indépendant de T et de x,

(2) $\psi(x,t) \geqslant 0$,

(3) pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, $\psi(x,t)$ est une fonction décroissante de t,

(4) les fonctions $x \mapsto \psi(x,t)$ convergent uniformément vers 0 lorsque $t\to\infty$.

Alors l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x,t)dt \tag{18.65}$$

est uniformément convergente.

Remarque 18.14.
Étant donné que la fonction sinus est bornée, il est tentant de l'utiliser comme φ dans le critère d'Abel (théorème 18.13). Hélas,

$$\int_0^T \sin(xt) = -\frac{1}{x}\big(\cos(xT) - \cos(x)\big), \tag{18.66}$$

qui n'est pas bornée pour tout x ! Poser $\varphi(x,t) = \sin(xt)$ *ne fonctionne pas* pour assurer la convergence uniforme sur un intervalle qui contient des x arbitrairement proches de 0. Le critère d'Abel avec $\varphi(x,t) = \sin(xt)$ ne permet que de conclure à l'uniforme convergence *sur tout compact* ne contenant pas 0. Cela est toutefois souvent suffisant pour étudier la continuité ou la dérivabilité en se servant du fameux coup du compact.

18.4 Fonctions définies par une intégrale

Soit (Ω,μ) un espace mesuré. Nous nous demandons dans quel cas l'intégrale

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\omega \tag{18.67}$$

définit une fonction F continue, dérivable ou autre.

Dans la suite nous allons considérer des fonctions f à valeurs réelles. Quitte à passer aux composantes, nous pouvons considérer des fonctions à valeurs vectorielles. Par contre le fait que x soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$ n'est pas spécialement une chose facile à traiter.

18.4.1 Continuité sous l'intégrale

Nous allons présenter deux théorèmes donnant la continuité de F.

(1) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x, nous avons le théorème 18.15,

(2) si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 18.16.

Théorème 18.15.
Soit (Ω, μ) est un espace mesuré, soit $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $f: U \times \Omega \to \mathbb{R}$ où U est ouvert dans $\mathbb{R}^m$. Nous supposons que

(1) La fonction $f(x, .)$ est dans $L^1(\Omega, \mu)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$.

(2) La fonction $f(., \omega)$ est continue en x_0 pour tout $\omega \in \Omega$.

(3) Il existe une fonction $G \in L^1(\Omega)$ telle que

$$|f(x, \omega)| \leqslant G(\omega) \tag{18.68}$$

pour tout $x \in U$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F: U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega) \end{aligned} \tag{18.69}$$

est continue en x_0.

Démonstration. Soit (x_n) une suite convergente vers x_0. Nous considérons la suite de fonctions $f_n: \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(\phi) = f(x_n, \omega). \tag{18.70}$$

sur qui nous pouvons utiliser le théorème de la convergence dominée (théorème 15.184) pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x_n, \omega) d\mu(\omega) \tag{18.71a}$$

$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f(x_n, \omega) d\mu(\omega) \tag{18.71b}$$

$$= \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega) \tag{18.71c}$$

$$= F(x). \tag{18.71d}$$

Nous avons utilisé la continuité de $f(., \omega)$. □

Si nous avons un peu de compatibilité entre la topologie et la mesure, alors nous pouvons utiliser l'uniforme convergence d'une intégrale pour obtenir la continuité d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 18.16.
Soit (Ω, μ) un espace topologique mesuré tel que tout compact est de mesure finie. Soit une fonction $f: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

(1) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x, .)$ est $L^1(\Omega, \mu)$.

(2) Pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $f(., \omega)$ est continue en x_0.

(3) L'intégrale

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{18.72}$$

est uniformément convergente[9].

Alors la fonction F est continue en x_0.

Démonstration. Nous reprenons les notations du lemme 18.11. Les fonctions

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{18.73}$$

existent parce que les fonctions $f(x,.)$ sont dans $L^1(\Omega)$. Montrons que les fonctions F_k sont continues. Soit une suite $x_k \to x_0$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} F_k(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{K_k} f(x_n,\omega)d\mu(\omega). \tag{18.74}$$

Nous pouvons inverser la limite et l'intégrale en utilisant le théorème de la convergence dominée. Pour cela, la fonction $f(x_n,\omega)$ étant continue sur le compact K_k, elle y est majorée par une constante. Le fait que les compacts soient de mesure finie (hypothèse) implique que les constantes soient intégrales sur K_k. Le théorème de la convergence dominée implique alors que

$$\lim_{n\to\infty} F_k(x_n) = \int_{K_k} \lim_{n\to\infty} f(x_n,\omega)d\mu(\omega) = \int_{K_k} f(x_0,\omega)d\mu(\omega) = F_k(x_0). \tag{18.75}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(.,\omega)$ était continue en x_0.

Le lemme 18.11 nous indique alors que la convergence $F_k \to F$ est uniforme. Les fonctions F_k étant continues, la fonction F est continue. □

Pour finir, citons ce résultat concernant les fonctions réelles.

Théorème 18.17.
Nous considérons $F(x) = \int_a^\infty f(x,t)dt$. Si f est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,\alpha[$ et l'intégrale converge uniformément, alors $F(x)$ est continue.

18.4.2 Le coup du compact

Nous avons vu des fonctions définies par toute une série de processus de limite (suites, séries, intégrales). Une des questions centrales est de savoir si la fonction limite est continue, dérivable, intégrale, etc. étant donné que les fonctions sont continues.

Pour cela, nous inventons le concept de *convergence uniforme*. Si la limite (série, intégrale) est uniforme, alors la fonction limite sera continue. Il arrive qu'une limite ne soit pas uniforme sur un intervalle ouvert $]0,1]$, et que nous voulions quand même prouver la continuité sur cet intervalle. C'est à cela que sert la notion de convergence uniforme *sur tout compact*. En effet, la notion de continuité est une notion locale : savoir ce qu'il se passe dans un petit voisinage autour de x est suffisant pour savoir la continuité en x (idem pour sa dérivée).

Si nous avons uniforme convergence sur tout compact de $]0,1]$, mais pas uniforme convergence sur cet intervalle, la limite sera quand même continue sur $]0,1]$. En effet, si $x \in]0,1]$, il existe un ouvert autour de x contenu dans un compact contenu dans $]0,1]$. L'uniforme convergence sur ce compact suffit à prouver la continuité en x.

Déduire la continuité sur un ouvert à partir de l'uniforme convergence sur tout compact de l'ouvert est appelé faire le **coup du compact**.

9. Définition 18.10.

18.4.3 Dérivabilité sous l'intégrale

Nous traitons à présent de la dérivabilité de la fonction F définie comme intégrale de f.

Théorème 18.18 (Dérivation sous le signe intégral[263])**.**
Soit (Ω, μ) un espace mesuré et une fonction $f : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ dont nous voulons étudier la dérivabilité en $a \in \mathbb{R}$. Nous supposons qu'il existe $\delta > 0$, A mesurable de mesure nulle dans Ω tels que

(1) $f(x,.)$ soit dans $L^1(\Omega)$.

(2) L'application $x \mapsto f(x,\omega)$ est dérivable pour tout $x \in B(a,\delta)$ et pour tout $\omega \in \complement A$.

(3) Il existe une fonction G intégrable sur Ω telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega)\right| \leqslant G(\omega) \tag{18.76}$$

pour tout $x \in B(a,\delta)$ et pour tout $\omega \in \complement A$.

Alors la fonction

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{18.77}$$

est dérivable en a et nous pouvons permuter la dérivée et l'intégrale :

$$F'(a) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\mu(\omega). \tag{18.78}$$

Démonstration. Soit une suite (x_n) dans $B(a,\delta)$ telle que $x_n \neq a$ et $x_n \to a$. Si la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(a) - F(x_n)}{a - x_n} \tag{18.79}$$

existe et ne dépend pas de la suite choisie, alors la fonction F est dérivable en a et sa dérivée vaut cette limite. Par linéarité de l'intégrale, nous devons étudier la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f(a,\omega) - f(x_n,\omega)}{a - x_n} d\omega, \tag{18.80}$$

montrer qu'elle existe, ne dépend pas de la suite choisie et vaut $\int_\Omega \partial_x f(a,\omega)d\omega$. Nous sommes donc dans un problème d'inversion de limite et de dérivée pour lequel nous allons utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. D'abord nous posons

$$g_n(\omega) = \frac{f(x_n,\omega) - f(a,\omega)}{x_n - a}. \tag{18.81}$$

Cela est une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ parce qu'à la fois a et x_n sont dans $B(a,\delta)$. De plus nous avons

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega) \tag{18.82}$$

parce que nous savons que f est dérivable en a pour tout $\omega \in \complement A$. En ce qui concerne la majoration de g_n, nous utilisons le théorème des accroissements finis (théorème 13.129) sur le numérateur de (18.81). Pour tout n et pour tout $\omega \in \complement A$, il existe un $\theta_{n,\omega}$ dans $]a, x_n[$ tel que

$$f(x_n,\omega) - f(a,\omega) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_{n,\omega},\omega)(x_n - a), \tag{18.83}$$

donc

$$|g_n(\omega)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_{n,\omega},\omega)\right| \leqslant G(\omega). \tag{18.84}$$

La dernière inégalité provient des hypothèses. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 15.184) nous permet alors de calculer la limite (18.80) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n(\omega)d\omega=\int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)d\omega=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\omega. \tag{18.85}$$

Notons que l'existence de la dernière intégrale fait partie du théorème de la convergence dominée.

Nous avons donc prouvé que la limite de gauche existait et ne dépendant pas de la suite choisie. Donc F est dérivable en a et la dérivée vaut cette limite :

$$F'(a)=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\mu(\omega). \tag{18.86}$$

□

Théorème 18.19.
Supposons f continue et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,\alpha[$. Supposons que $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)dt$ converge et que $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}dt$ converge uniformément. Alors F est C^1 sur $[\alpha,\beta]$ et

$$\frac{dF}{dx}=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}dt. \tag{18.87}$$

En ce qui concerne les fonctions dans $\mathbb{R}^n$, il y a les propositions 18.25 et 18.26 qui parlent de différentiabilité sous l'intégrale.

18.4.4 Absolue continuité

Définition 18.20.
*Une fonction $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est **absolument continue** sur $[a,b]$ s'il existe une fonction f sur $[a,b]$ telle que*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \tag{18.88}$$

pour tout $x\in[a,b]$.

Théorème 18.21.
Soient A un ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un espace mesuré. Soient une fonction $f\colon A\times\Omega\to\mathbb{R}$ et

$$F(x)=\int_\Omega f(x,\omega)d\omega. \tag{18.89}$$

Nous supposons les points suivants.

1. *La fonction f est mesurable en tant que fonction $A\times\Omega\to\mathbb{R}$. Pour chaque $x\in A$, la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur Ω.*
2. *Pour presque tout $\omega\in\Omega$, la fonction $f(x,\omega)$ est une fonction absolument continue de x.*
3. *La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement intégrable, c'est-à-dire que pour tout $[a,b]\subset A$,*

$$\int_a^b\int_\Omega\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega)\right|d\omega\,dx<\infty. \tag{18.90}$$

Alors la fonction F est absolument continue et pour presque tout $x\in A$, la dérivée est donné par

$$\frac{d}{dx}\int_\Omega f(x,\omega)d\omega=\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega)d\omega. \tag{18.91}$$

La proposition suivante sera utilisée entre autres pour montrer que sous l'hypothèse d'une densité continue, la loi exponentielle est sans mémoire, proposition 37.98.

Proposition 18.22.
Soit $f(x,t)$ une fonction continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$, telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, des fonctions continues de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée continue sur $]\alpha,\beta[$. Alors la fonction

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt \tag{18.92}$$

admet une dérivée continue sur $]\alpha,\beta[$ et

$$\frac{dF}{dx}=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt+f\big(x,\psi(x)\big)\cdot\frac{d\psi}{dx}-f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\frac{d\varphi}{dx}. \tag{18.93}$$

L'exemple qui suit devrait pouvoir être rendu rigoureux en utilisant des distributions correctement.

Exemple 18.23
Si g est une fonction continue, la fonction suivante est une primitive de g :

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^\infty f(t)\mathbb{1}_{t<x}(t)dt. \tag{18.94}$$

Nous nous proposons de justifier *de façon un peu heuristique* le fait que ce soit bien une primitive de g en considérant la fonction

$$f(t,x)=g(t)\mathbb{1}_{t<x}(t). \tag{18.95}$$

Nous posons

$$F(x)=\int_0^\infty f(x,t)dt, \tag{18.96}$$

et nous calculons F' en permutant la dérivée et l'intégrale [10]. D'abord,

$$f(t,x)=\begin{cases}g(t) & \text{si } t\in[0,x]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{18.97}$$

La dérivée de f par rapport à x est donnée par la distribution

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_0,x_0)=g(t_0)\delta(t_0-x_0). \tag{18.98}$$

Donc

$$F'(x_0)=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt=\int_0^\infty g(t)\delta(t-x_0)=g(x_0), \tag{18.99}$$

comme attendu. △

Cet exemple est rendu rigoureux par la proposition suivante.

Proposition 18.24.
Si $f\in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt \tag{18.100}$$

est presque partout dérivable et pour les points où elle l'est nous avons $F'(x)=f(x)$.

10. Ceci n'est pas rigoureux : il faudrait avoir un théorème à propos de distributions qui permet de le faire.

18.4.5 Différentiabilité sous l'intégrale

Le théorème suivant est restrictif sur l'ensemble d'intégration (qui doit être compact), mais accepte des fonctions de plusieurs variables, ce qui est un premier pas vers la différentiabilité.

Proposition 18.25 (Dérivation sous l'intégrale)**.**
Supposons $A \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Nous considérons une fonction $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Si pour un $i \in \{i, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A \times B$ et est continue, alors la fonction

$$F(x) = \int_B f(x,t)dt \tag{18.101}$$

admet une dérivée partielle dans la direction x_i sur A. Cette dérivée partielle y est continue et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt, \tag{18.102}$$

pour tout a dans l'ouvert A.

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes.

<u>F **est dérivable**</u> Nous voulons prouver que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,t)$ existe. Pour cela nous posons

$$g_l(t) = \frac{f(a_1, \dots, a_i + \epsilon_l, \dots, a_n, t) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, t)}{\epsilon_l} \tag{18.103}$$

où ϵ_l est une suite de nombres tendant vers zéro. La fonction f est dérivable dans la direction x_i si et seulement si $\lim_{l\to\infty} g_l(t)$ existe et ne dépend pas du choix de la suite. À ce moment, la valeur de la dérivée partielle sera cette limite. Dans notre cas, nous savons que f admet une dérivée partielle dans la direction x_i et donc nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t) = \lim_{l\to\infty} g_l(t). \tag{18.104}$$

De la même façon pour F nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{l\to\infty} \int_B g_l(t)dt. \tag{18.105}$$

Sous-entendu : si la limite de droite ne dépend pas de la suite choisie, alors $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existe et vaut cette limite.

Vu la continuité de f, le seul point à vérifier pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue est l'existence d'une fonction intégrable de t majorant g_l. Pour cela le théorème de accroissements finis (théorème 13.129) appliqué à la fonction $\epsilon \mapsto f(a_n, \dots, a_i + \epsilon, \dots, a_n)$ nous dit que

$$f(a_1, \dots, a_i + \epsilon_l, \dots, a_n, t) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, t) = \epsilon_l \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n, t) \tag{18.106}$$

pour un certain $\theta \in B(a_i, \epsilon_l)$. Notons que ce θ dépend de t mais pas de l. Vu que $\partial_i f$ est continue par rapport à ses deux variables, si K est un voisinage compact autour de a, il existe $M > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) \right| < M \tag{18.107}$$

pour tout $x \in K$ et tout $t \in B$. La valeur de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n, t)$ est donc bien majorée par rapport à θ et par rapport à t en même temps par une constante qui n'a pas de mal à être intégrée sur le compact B.

Le théorème de la convergence dominée (théorème 15.184) s'applique donc bien et nous avons

$$\lim_{l\to\infty}\int_B g_l(t)dt=\int_B\lim_{l\to\infty}g_l(t)=\int_B\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt. \tag{18.108}$$

Le membre de droite ne dépendant pas de la suite ϵ_l choisie, le membre de gauche est bien la dérivée de F par rapport à x_i et nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)=\int_B\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt. \tag{18.109}$$

Cela prouve la première partie de la proposition.

La dérivée est continue Soit K un voisinage compact autour de a et U' un ouvert tel que $a\in U'\subset K$. Nous avons encore la majoration (18.107) sur U' et donc le théorème de continuité sous l'intégrale 18.15 nous indique que la fonction

$$\begin{aligned}U'&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\int_B\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt\end{aligned} \tag{18.110}$$

est continue en a.

□

Une conséquence de la proposition 18.25 est que si elle fonctionne pour tous les i, alors F est différentiable et même de classe C^1, et la différentielle de F s'obtient comme intégrale de la différentielle de f.

Proposition 18.26.
Supposons $A\subset\mathbb{R}^m$ ouvert et $B\subset\mathbb{R}^n$ compact. Si pour tout $i\in\{i,\dots,n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A\times B$ et est continue, alors F est de classe C^1 et

$$(dF)_a=\int_B(df_t)_a dt \tag{18.111}$$

où $f_t(x)=f(x,t)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 18.25, toutes les dérivées partielles de F sont continues. Cela implique que F est de classe C^1 par la proposition 13.239 et que la différentielle s'écrive en terme des dérivées partielles avec la formule usuelle. Nous avons alors

$$(dF)_a(u)=\sum_k\frac{\partial F}{\partial x_k}(a)u_k \tag{18.112a}$$

$$=\int_B\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(a,t)dt \tag{18.112b}$$

$$=\int_B\sum_k\frac{\partial f_t}{\partial x_k}(a)u_k dt \tag{18.112c}$$

$$=\int_B(df_t)_a(u)dt. \tag{18.112d}$$

Cela est la formule annoncée. □

Un autre théorème tourne autour du pot, et me semble inutile.

Théorème 18.27.
Soit (Ω,μ) un espace mesuré, une fonction $f\colon\mathbb{R}^n\times\Omega\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}^n$. Nous considérons la fonction

$$F(x)=\int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega). \tag{18.113}$$

Pour chaque $k = 1, \dots, n$ nous supposons avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) = F'_{|_k}(a) = \int_\Omega \frac{\partial f_{|_k}}{\partial t}(a_k, \omega) d\mu(\omega) \tag{18.114}$$

où $F_{|_k}(t) = F(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ et $f_{|_k}$ est définie de façon similaire.
Nous supposons de plus que les fonctions $\partial_{x_k} F$ sont continues.
Alors F est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par

$$df_a = \int_\Omega (df_\omega)_a d\omega \tag{18.115}$$

où f_ω est définie par $f_\omega(x) = f(x, \omega)$.

Démonstration. Étant donné que les dérivées partielles de F en a existent et sont continues, la proposition 13.239 dit que F est différentiable et que

$$dF_a(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) u_k. \tag{18.116}$$

La linéarité de l'intégrale et les hypothèses nous donnent alors

$$\begin{aligned} df_a(u) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) u_k && \text{(18.117a)} \\ &= \int_\Omega \sum_k \frac{\partial f_{|_k}}{\partial t}(a_k; \omega) u_k d\mu(\omega) && \text{(18.117b)} \\ &= \int_\Omega \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a; \omega) u_k d\mu(\omega) && \text{(18.117c)} \\ &= \int_\Omega (df_\omega)_a(u) d\mu(\omega), && \text{(18.117d)} \end{aligned}$$

et donc $df_a = \int_\Omega (df_\omega)_a d\mu(\omega)$. □

Notons qu'en passant aux composantes, ce théorème fonctionne tout aussi bien pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie plutôt que dans $\mathbb{R}$.

Lemme 18.28 (Hadamard[280])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p avec $p \geqslant 1$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ il existe des fonctions $g_1, \dots, g_n$ de classe C^{p-1} telles que

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) g_i(x). \tag{18.118}$$

Démonstration. Vu que f est de classe C^1, le théorème fondamental de l'analyse 15.233 fonctionne et

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[f\big(a + t(x-a)\big)\Big] dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a + t(x-a)\big)(x_i - a_i). \tag{18.119}$$

Plus de détails : la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt}\Big[f\big(a + t(x-a)\big)\Big]$ possède comme primitive la fonction $F(t) = f\big(a + t(x-a)\big)$.

Nous posons

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a + t(x-a)\big) dt \tag{18.120}$$

Le fait que l'intégrale existe est simplement le fait qu'il s'agit d'une fonction continue sur un compact et donc majorée par une constante. Pour voir que g_i est de classe C^{p-1} nous pouvons calculer $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ en permutant dérivée et intégrale par la proposition 18.25 :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big)\right)dt = \int_0^1 t\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\big(a+t(x-a)\big). \tag{18.121}$$

Nous pouvons ainsi permuter $p-1$ dérivées tout en gardant une fonction continue dans l'intégrale. Le théorème 18.15 nous donne alors une fonction continue. Ainsi toutes les fonctions

$$\frac{\partial^{p-1} g_i}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{p-1}}} \tag{18.122}$$

sont continues et g_i est de classe C^{p-1} par la proposition 13.276.

En repartant de (18.119) nous avons alors bien ce qui était annoncé :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - a_i). \tag{18.123}$$

□

Corollaire 18.29.
Soit $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tel que $\phi^{(k)}(x_0) = 0$ pour tout $k \leqslant n$. Alors il existe une fonction $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\phi(x) = (x - x_0)^{n+1}\psi(x) \tag{18.124}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En utilisant le lemme de Hadamard 18.28 avec $a = x_0$, $n = 1$ et $f(x_0) = 0$, nous avons une fonction g_1 à support compact telle que

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0)g_1(x). \tag{18.125}$$

Alors $\phi'(x) = g_1(x) + (x - x_0)g_1'(x)$, ce qui donne immédiatement $g_1(x_0) = 0$ et donc une fonction g_2 telle que $g_1(x) = (x - x_0)g_2(x)$. En injectant dans (18.125) nous avons

$$\phi(x) = (x - x_0)^2 g_2(x). \tag{18.126}$$

Il suffit de continuer ainsi tant que les dérivées de ϕ s'annulent. □

18.5 Deux théorème de point fixe

Nous allons voir Picard. Les autres théorème de point fixe que sont Brouwer, Schauder et Markov-Kakutani sont plus bas [11] parce qu'ils utilisent de l'intégration. Voir le thème 18 pour les retrouver.

18.5.1 Points fixes attractifs et répulsifs

Définition 18.30.
*Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi\colon I \to I$ une application C^1. Soit a un point fixe de φ. Nous disons que a est **attractif** s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a. Le point a sera dit **répulsif** s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ diverge.*

Lemme 18.31 ([281])**.**
Soit a un point fixe de φ.

11. Dans la section 21.5.

(1) *Si* $|\varphi'(a)|<1$ *alors* a *est attractif et la convergence est au moins exponentielle.*

(2) *Si* $|\varphi'(a)|>1$ *alors* a *est répulsif et la divergence est au moins exponentielle.*

Démonstration. Si $|\varphi'(a)<1|$ alors il existe k tel que $|\varphi'(a)|<k<1$ et par continuité il existe un voisinage V de a dans lequel $|\varphi'(x)|<k$ pour tout $x\in V$. En utilisant le théorème des accroissements finis nous avons

$$|x_n-a|=\big|f(x_{n-1}-a)\big|\leqslant k|x_{n-1}-a| \tag{18.127}$$

et par récurrence

$$|x_n-a|\leqslant k^n|x_0-a|. \tag{18.128}$$

Le cas $|\varphi'(a)>1|$ se traite de façon similaire. □

Remarque 18.32.
Dans le cas $|\varphi'(a)|=1$, nous ne pouvons rien conclure. Si $\varphi(x)=\sin(x)$ nous avons $\sin(x)<x$ et le point $a=0$ est attractif. A contrario, si $\varphi(x)=\sinh(x)$ nous avons $|\sinh(x)|>|x|$ et le point $a=0$ est répulsif.

18.5.2 Picard

Définition 18.33.
Une application $f\colon (X,\|.\|_X)\to(Y,\|.\|_Y)$ *entre deux espaces métriques est une* ***contraction*** *si elle est* k-***Lipschitz*** *pour un certain* $0\leqslant k<1$*, c'est-à-dire si pour tout* $x,y\in X$ *nous avons*

$$\|f(x)-f(y)\|_Y\leqslant k\|x-y\|_X. \tag{18.129}$$

Théorème 18.34 (Picard [282, 283] [12].)**.**
Soit X *un espace métrique complet et* $f\colon X\to X$ *une application contractante, de constante de Lipschitz* k*. Alors* f *admet un unique point fixe, nommé* ξ*. Ce dernier est donné par la limite de la suite définie par récurrence*

$$\begin{cases} x_0\in X & \text{(18.130a)}\\ x_{n+1}=f(x_n). & \text{(18.130b)}\end{cases}$$

De plus nous pouvons majorer l'erreur par

$$\|x_n-x\|\leqslant\frac{k^n}{1-k}\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\frac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|. \tag{18.131}$$

Soit $r>0$*,* $a\in X$ *tels que la fonction* f *laisse la boule* $K=\overline{B(a,r)}$ *invariante (c'est-à-dire que* f *se restreint à* $f\colon K\to K$*). Nous considérons les suites* (u_n) *et* (v_n) *définies par*

$$\begin{cases} u_0=v_0\in K & \text{(18.132a)}\\ u_{n+1}=f(v_n), v_{n+1}\in B(u_n,\epsilon). & \text{(18.132b)}\end{cases}$$

Alors le point fixe ξ *de* f *est dans* K *et la suite* (v_n) *satisfait l'estimation*

$$\|v_n-\xi\|\leqslant\frac{k^n}{1-k}\|u_1-u_0\|+\frac{\epsilon}{1-k}. \tag{18.133}$$

La première inégalité (18.131) donne une estimation de l'erreur calculable en cours de processus ; la seconde donne une estimation de l'erreur calculable avant de commencer.

12. Il me semble qu'à la page 100 de [283], l'hypothèse H1 qui est prouvée ne prouve pas Hn dans le cas $n=1$. Merci de m'écrire si vous pouvez confirmer ou infirmer. La preuve donnée ici ne contient pas cette « erreur ».

Démonstration. Nous commençons par l'unicité du point fixe. Si a et b sont des points fixes, alors $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Par conséquent

$$\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|, \tag{18.134}$$

ce qui contredit le fait que f soit une contraction.

En ce qui concerne l'existence, notons que si la suite des x_n converge dans X, alors la limite est un point fixe. En effet en prenant la limite des deux côtés de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$, nous obtenons $\xi = f(\xi)$, c'est-à-dire que ξ est un point fixe de f. Notons que nous avons utilisé ici la continuité de f, laquelle est une conséquence du fait qu'elle soit Lipschitz. Nous allons donc porter nos efforts à prouver que la suite est de Cauchy (et donc convergente parce que X est complet). Nous commençons par prouver que $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n\|x_0 - x_1\|$. En effet pour tout n nous avons

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{18.135}$$

La relation cherchée s'obtient alors par récurrence. Soient $q > p$. En utilisant une somme télescopique,

$$\|x_q - x_p\| \leqslant \sum_{l=p}^{q-1} \|x_{l+1} - x_l\| \tag{18.136a}$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=p}^{q-1} k^l \right) \|x_1 - x_0\| \tag{18.136b}$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=p}^{\infty} k^l \right) \|x_1 - x_0\|. \tag{18.136c}$$

Étant donné que $k < 1$, la parenthèse est la queue d'une série qui converge, et donc tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini.

En ce qui concerne les inégalités (18.131), nous refaisons une somme télescopique :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \tag{18.137a}$$

$$\leqslant k^p\|x_n - x_{n-1}\| + k^{p-1}\|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + k\|x_n - x_{n-1}\| \tag{18.137b}$$

$$= k(1 + \cdots + k^{p-1})\|x_n - x_{n-1}\| \tag{18.137c}$$

$$\leqslant \frac{k}{1-k}\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{18.137d}$$

En prenant la limite $p \to \infty$ nous trouvons

$$\|\xi - x_n\| \leqslant \frac{k}{1-k}\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \frac{k}{1-k}\|x_1 - x_0\|. \tag{18.138}$$

Nous passons maintenant à la seconde partie du théorème en supposant que f se restreigne en une fonction $f\colon K \to K$. D'abord K est encore un espace métrique complet, donc la première partie du théorème s'y applique et f y a un unique point fixe.

Nous allons montrer la relation par récurrence. Tout d'abord pour $n = 1$ nous avons

$$\|v_1 - \xi\| \leqslant \|v_1 - u_1\| + \|u_1 - \xi\| \leqslant \epsilon + \frac{k}{1-k}\|u_1 - u_0\| \tag{18.139}$$

où nous avons utilisé l'estimation (18.138), qui reste valable en remplaçant x_1 par u_1 [13]. Nous pouvons maintenant faire la récurrence :

$$\|v_{n+1} - \xi\| \leqslant \|v_{n+1} - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - \xi\| \tag{18.140a}$$

$$\leqslant \epsilon + k\|v_n - \xi\| \tag{18.140b}$$

$$\leqslant \epsilon + k\left(\frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| + \frac{\epsilon}{1-k} \right) \tag{18.140c}$$

$$= \frac{\epsilon}{1-k} + \frac{k^{n+1}}{1-k}\|u_1 - u_0\|. \tag{18.140d}$$

13. Elle n'est cependant pas spécialement valable si on remplace x_n par u_n.

□

Remarque 18.35.
Ce théorème comporte deux parties d'intérêts différents. La première partie est un théorème de point fixe usuel, qui sera utilisé pour prouver l'existence de certaines équations différentielles.

La seconde partie est intéressante d'un point de vie numérique. En effet, ce qu'elle nous enseigne est que si à chaque pas de calcul de la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ nous commettons une erreur d'ordre de grandeur ϵ, alors le procédé (la suite (v_n)) ne converge plus spécialement vers le point fixe, mais tend vers le point fixe avec une erreur majorée par $\epsilon/(k-1)$.

Remarque 18.36.
Au final l'erreur minimale qu'on peut atteindre est de l'ordre de ϵ. Évidemment si on commet une faute de calcul de l'ordre de ϵ à chaque pas, on ne peut pas espérer mieux.

Remarque 18.37.
Si f elle-même n'est pas contractante, mais si f^p est contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}$ alors la conclusion du théorème de Picard reste valide et f a le même unique point fixe que f^p. En effet nommons x le point fixe de f : $f^p(x) = x$. Nous avons alors

$$f^p\big(f(x)\big) = f\big(f^p(x)\big) = f(x), \tag{18.141}$$

ce qui prouve que $f(x)$ est un point fixe de f^p. Par unicité nous avons alors $f(x) = x$, c'est-à-dire que x est également un point fixe de f.

Si la fonction n'est pas Lipschitz mais presque, nous avons une variante.

Proposition 18.38.
Soit E un ensemble compact[14] *et si $f\colon E \to E$ est une fonction telle que*

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \tag{18.142}$$

pour tout $x \neq y$ dans E alors f possède un unique point fixe.

Démonstration. La suite $x_{n+1} = f(x_n)$ possède une sous-suite convergente. La limite de cette sous-suite est un point fixe de f parce que f est continue. L'unicité est due à l'aspect strict de l'inégalité (18.142). □

Théorème 18.39 (Équation de Fredholm)**.**
Soit $K\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues. Alors si λ est suffisamment petit, l'équation

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x) \tag{18.143}$$

admet une unique solution qui sera de plus continue sur $[a,b]$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions continues $[a,b] \to [a,b]$ muni de la norme uniforme. Le lemme 13.283 implique que $\mathcal{F}$ est complet. Nous considérons l'application $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ donnée par

$$\Phi(f)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x). \tag{18.144}$$

Nous montrons que Φ^p est une application contractante pour un certain p. Pour tout $x \in [a,b]$ nous avons

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leqslant \|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)\| \tag{18.145a}$$

$$= |\lambda| \Big\| \int_a^b K(x,y)\big(f(y) - g(y)\big)dy \Big\| \tag{18.145b}$$

$$\leqslant |\lambda| \|K\|_\infty |b-a| \|f-g\|_\infty \tag{18.145c}$$

14. Notez cette hypothèse plus forte

Si λ est assez petit, et si p est assez grand, l'application Φ^p est donc une contraction. Elle possède donc un unique point fixe par le théorème de Picard 18.34. □

18.6 Théorèmes de point fixes et équations différentielles

18.6.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Nous démontrons ici deux théorèmes de Cauchy-Lipschitz. De nombreuses propriétés annexes seront démontrées dans le chapitre sur les équations différentielles, section 33.8.

Le théorème de Cauchy-Arzella 21.33 sera pour plus tard parce qu'il utilise Schauder 21.32.

Théorème 18.40 (Cauchy-Lipschitz[284, 285])**.**
Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(18.146a)} \\ y(t_0) = y_0 & \text{(18.146b)} \end{cases}$$

avec $f\colon U = I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ où I est ouvert dans $\mathbb{R}$ et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que f est continue sur U et localement Lipschitz[15] *par rapport à y.*

Alors il existe un intervalle $J \subset I$ sur lequel la solution au problème est unique. De plus toute solution du problème est une restriction de cette solution à une partie de J. La solution sur J (dite « solution maximale ») est de classe C^1.

Démonstration. Nous divisions la preuve en plusieurs étapes (même pas toutes simples).

Cylindre de sécurité Précisons l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ adéquat. Soient V et W les voisinages de t_0 et y_0 sur lesquels f est localement Lipschitz. Nous considérons les quantités suivantes :

(1) $M = \sup_{V\times W} f$;
(2) $r > 0$ tel que $\overline{B(y_0, r)} \subset V$
(3) $T > 0$ tel que $\overline{B(t_0, T)} \subset W$ et $T < r/M$.

Nous considérons alors l'ensemble

$$\mathcal{F} = C^0\big(\overline{B(t_0, T)}, \overline{B(y_0, r)}\big) \tag{18.147}$$

que nous munissons de la norme uniforme. Par le lemme 13.283 l'espace $\big(\mathcal{F}, \|.\|_\infty\big)$ est complet.

Une application $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ Si y est une solution de l'équation différentielle considérée, elle vérifie[16]

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, y(u)\big)du. \tag{18.148}$$

Ceci nous incite à considérer l'opérateur $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ défini par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, y(u)\big)du. \tag{18.149}$$

Pour que l'application Φ soit utile nous devons montrer que pour tout $y \in \mathcal{F}$,

— l'application $\Phi(y)$ est bien définie,
— pour tout $t \in \overline{B(y_0, r)}$ nous avons $\Phi(y)(t) \in \overline{B(t_0, T)}$,
— l'application $\Phi(y)\colon \overline{B(t_0, T)} \to \overline{B(y_0, r)}$ est continue.

Attention : nous ne prétendons pas que Φ elle-même soit continue. C'est parti.

15. Définition 13.257. Notons que nous ne supposons pas que f soit une contraction.
16. C'est le théorème fondamental du calcul intégral 15.233.

$\Phi(y)$ **est bien définie** Il faut montrer que l'intégrale converge. Le calcul de $\Phi(y)(t)$ ne se fait qu'avec $t \in \overline{B(t_0,T)}$. Vu que u prend ses valeurs dans $[t_0,t]$ et que $y \in \mathcal{F}$, le nombre $y(u)$ est toujours dans $\overline{B(y_0,r)}$. Ceci pour dire que dans l'intégrale, la fonction f n'est considérée que sur $[t_0,t] \times \overline{B(y_0,r)} \subset V \times W$. La fonction f est donc uniformément majorable, et l'intégrale ne pose pas de problèmes.

$\Phi(y)(t) \in \overline{B(t_0,T)}$ Prouvons que $\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0,r)}$. Pour cela, notons que

$$|\Phi(y)(t) - y_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f\big(u,y(u)\big)|du \leqslant |t-t_0|\|f\|_\infty. \tag{18.150}$$

Étant donné que $t \in \overline{B(t_0,T)}$ nous avons $|t-t_0| \leqslant r/M$ et donc $|\Phi(y)(t) - y_0| \leqslant r$.

$\Phi(y)$ **est continue** Nous pourrions invoquer le théorème 18.15, mais nous allons le faire à la main. Soit $s_0 \in B(t_0,T)$ et prouvons que $\Phi(y)$ est continue en s_0. Pour cela nous prenons $s \in B(s_0,\delta)$ et nous calculons :

$$|\Phi(y)(s) - \Phi(y)(s_0)| \leqslant \int_{s_0}^{s} |f\big(u,y(u)\big)|du \leqslant |s_0-s|\|f\|_\infty. \tag{18.151}$$

C'est le fait que f soit bornée dans le cylindre de sécurité qui fait en sorte que cela tende vers zéro lorsque $s \to s_0$.

L'équation (18.148) signifie que y est un point fixe de Φ. L'espace $\mathcal{F}$ étant complet le théorème de point fixe de Picard (théorème 18.34) s'applique. Nous allons montrer qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que Φ^p soit contractante. Par conséquent Φ^p aura un unique point fixe qui sera également unique point fixe de Φ par la remarque 18.37.

Contractante Prouvons donc que Φ^p est contractante pour un certain p. Pour cela nous commençons par montrer la formule suivante par récurrence :

$$\big\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\big\| \leqslant \frac{k^p|t-t_0|^p}{p!}\|x-y\|_\infty \tag{18.152}$$

pour tout $x,y \in \mathcal{F}$, et pour tout $t \in \overline{B(t_0,T)}$. Pour $p=0$ la formule (18.152) est vérifiée parce que $\|x-y\|_\infty$ est le supremum de $\|x(t)-y(t)\|$ pour $t \in \overline{B(t_0,T)}$. Supposons que la formule soit vraie pour p et calculons pour $p+1$. Pour tout $t \in \overline{B(t_0,T)}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi^{p+1}(x)(t) - \Phi^{p+1}(y)(t)\big\| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \big\|f\big(u,\Phi^p(x)(u)\big) - f\big(u,\Phi^p(y)(u)\big)\big\|du\right| && \text{(18.153a)}\\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} k\|\Phi^p(x)(u) - \Phi^p(y)(u)\|du\right| && \text{(18.153b)}\\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} k\frac{k^p|t-t_0|}{p!}\|x-y\|_\infty\right| && \text{(18.153c)}\\
&= \frac{k^{p+1}|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}\|x-y\|_\infty. && \text{(18.153d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

— (18.153b) parce que f est Lipschitz.

— (18.153c) par hypothèse de récurrence.

La formule (18.152) est maintenant établie. Nous pouvons maintenant montrer que Φ^p est une contraction pour un certain p. Pour tout $t \in \overline{B(t_0,T)}$ nous avons

$$\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\| \leqslant \frac{k^p}{t!}|t-t_0|^p\|x-y\|_\infty \leqslant \frac{k^pT^p}{p!}\|x-y\|_\infty \tag{18.154}$$

où nous avons utilisé le fait que $|t-t_0|^p < T^p$. En prenant le supremum sur t des deux côtés il vient

$$\|\Phi^p(x) - \Phi^p(y)\|_\infty \leqslant \frac{k^pT^p}{p!}\|x-y\|_\infty. \tag{18.155}$$

Le membre de droite tend vers zéro lorsque $p \to \infty$ parce que $k < 1$ et $T^p/p! \to 0$[17]. Nous concluons donc que Φ^p est une contraction pour un certain p.

Conclusion L'unique point fixe de Φ est alors l'unique solution continue de l'équation différentielle (18.146). Par ailleurs l'équation elle-même $y' = f(t, y)$ demande implicitement que y soit dérivable et donc continue. Nous concluons que l'unique point fixe de Φ est l'unique solution de l'équation différentielle donnée. Cette dernière est automatiquement C^1 parce que si y est continue alors $u \mapsto f(u, y(u))$ est continue, c'est-à-dire que y' est continue.

Unicité Nous passons maintenant à la partie « prolongement maximum » du théorème. Soient x_1 et x_2 deux solutions maximales du problème (18.146) sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement. Les intervalles I_1 et I_2 contiennent $\overline{B(t_0, r)}$ sur lequel $x_1 = x_2$ par unicité.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $t \geqslant t_0$ pour lequel x_1 ou x_2 est défini, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont définis et sont égaux. Le raisonnement sur $t \leqslant t_0$ est similaire.

Supposons que l'ensemble des $t \geqslant t_0$ tels que $x_1 = x_2$ soit ouvert à droite, c'est-à-dire soit de la forme $[t_0, b[$. Dans ce cas, soit x_1 soit x_2 (soit les deux) cesse d'exister en b. En effet si nous avions les fonctions x_i sur $[t_0, b + \epsilon[$ alors l'équation $x_1 = x_2$ définirait un fermé dans $[t_0, b + \epsilon[$. Supposons pour fixer les idées que x_1 cesse d'exister : le domaine de x_1 (parmi les $t \geqslant 0$) est $[t_0, b[$ et sur ce domaine nous avons $x_1 = x_2$. Dans ce cas x_1 pourrait être prolongé en x_2 au-delà de b. Si x_1 et x_2 s'arrêtent d'exister en même temps en b, alors nous avons bien $x_1 = x_2$.

Nous devons donc traiter le cas où $x_1 = x_2$ sur $[t_0, b]$ alors que x_1 et x_2 existent sur $[t_0, b + \epsilon[$ pour un certain ϵ.

Nous pouvons appliquer le théorème d'existence locale au problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & \text{(18.156a)} \\ y(b) = x_1(b). & \text{(18.156b)} \end{cases}$$

Il existe un voisinage de b sur lequel la solution est unique. Sur ce voisinage nous devons donc avoir $x_1 = x_2$, ce qui contredit le fait que $x_1 \neq x_2$ en dehors de $[t_0, b]$.

Donc x_1 et x_2 existent et sont égaux sur au moins $I_1 \cup I_2$.

□

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne existence et unicité d'une solution maximale. Cependant cette solution peut ne pas exister partout où les hypothèses sur f sont remplies. En d'autres termes, il peut arriver que f soit Lipschitz jusqu'à t_1, mais que la solution maximale ne soit définie que jusqu'en $t_2 < t_1$. Ce cas fait l'objet du théorème d'explosion en temps fini 33.18.

Sous quelques hypothèses nous pouvons nous assurer de l'existence d'une solution unique sur tout $\mathbb{R}$.

Théorème 18.41 (Cauchy-Lipschitz global[286, 43])**.**
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ et une fonction continue $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout compact K dans I, il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\| \tag{18.157}$$

pour tout $t \in K$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

Alors le problème

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(18.158a)} \\ y(t_0) = y_0 & \text{(18.158b)} \end{cases}$$

possède une unique solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ sur I.

17. C'est le terme général du développement de e^T qui est une série convergente.

Démonstration. Soit un intervalle compact K dans I et contenant t_0. Nous notons ℓ le diamètre de K. Sur l'espace $E = C^0(K, \mathbb{R}^n)$ nous considérons la topologie uniforme : $(E, \|.\|_\infty)$. C'est un espace complet par le lemme 13.283 (nous utilisons le fait que $\mathbb{R}^n$ soit complet, proposition 1.79). Nous allons utiliser l'application suivante :

$$\begin{aligned}\Phi\colon E &\to E\\ \Phi(y)(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds\end{aligned} \tag{18.159}$$

Démontrons quelques faits à propos de Φ.

La définition fonctionne bien Nous devons commencer par prouver que cette application est bien définie. Si $y \in E$ alors f et y sont continues ; l'application $s \mapsto f\big(s, y(s)\big)$ est donc également continue. L'intégrale de cette fonction sur le compact $[t_0, t]$ ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la continuité de $\phi(y)$ sous l'hypothèse que y soit continue,

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(y)(t')\| \leqslant \int_{t}^{t'} \|f(s, y(s))\|ds \leqslant M|t - t'| \tag{18.160}$$

où M est une majoration de $\|s \mapsto f\big(s, y(s)\big)\|_{\infty,K}$.

Si y est solution alors $\Phi(y) = y$ Supposons que y soit une solution de l'équation différentielle (18.158). Alors, vu que $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ nous avons :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds = \Phi(y)(t). \tag{18.161}$$

Si $\Phi(y) = y$ alors y est solution Nous avons, pour tout t :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds. \tag{18.162}$$

Le membre de droite est dérivable par rapport à t, et la dérivée fait $f\big(t, y(t)\big)$. Donc le membre de gauche est également dérivable et nous avons bien

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big). \tag{18.163}$$

De plus $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} \ldots = y_0$.

Nous sommes encore avec K compact et $E = C^0(K, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme uniforme. Nous allons montrer que Φ est une contraction de E pour une norme bien choisie.

Une norme sur E Pour $y \in E$ nous posons

$$\|y\|_k = \max_{t\in K} \big(e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|\big). \tag{18.164}$$

Ce maximum est bien définit et fini parce que la fonction de t dedans est une fonction continue sur le compact K. Cela est également une norme parce que si $\|y\|_k = 0$ alors $e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\| = 0$ pour tout t. Étant donné que l'exponentielle ne s'annule pas, $\|y(t)\| = 0$ pour tout t.

Équivalence de norme Nous montrons que les normes $\|.\|_k$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes[18] :

$$\|y\|_\infty e^{-k\ell} \leqslant \|y\|_k \leqslant \|y\|_\infty \tag{18.165}$$

pour tout $y \in E$. Pour la première inégalité, $\ell \geqslant |t - t_0|$ pour tout $t \in K$, et $k > 0$, donc

$$\|y(t)\|e^{-k\ell} \leqslant e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|. \tag{18.166}$$

En prenant le maximum des deux côtés, $\|y\|_\infty e^{-k\ell} \leqslant \|y\|_k$.

En ce qui concerne la seconde inégalité dans (18.165), $k|t - t_0| \geqslant 0$ et donc $e^{-k|t-t_0|} < 1$.

18. Définition 12.3

Vu que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_k$ sont équivalentes, l'espace $(E, \|.\|_k)$ est tout autant complet que $(E, \|.\|_\infty)$. Nous démontrons à présent que Φ est une contraction dans $(E, \|\|_k)$.

Soient $y, z \in E$. Si $t \geqslant t_0$ nous avons

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, z(s)\big)\| ds \tag{18.167a}$$

$$\leqslant k \int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\| ds. \tag{18.167b}$$

Il convient maintenant de remarquer que

$$\|y(t)\| = e^{-k|t-t_0|} e^{k|t-t_0|} \|y(t)\| \leqslant \|y\|_k e^{k|t-t_0|}. \tag{18.168}$$

Nous pouvons avec ça prolonger les inégalités (18.167) par

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant k\|y - z\|_k \int_{t_0}^{t} e^{k|s-t_0|} ds = k\|y - z\|_k \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)} ds \tag{18.169}$$

où nous avons utilisé notre supposition $t \geqslant t_0$ pour éliminer les valeurs absolues. L'intégrale peut être faite explicitement, mais nous en sommes arrivés à un niveau de fainéantise tellement inconcevable que

```
1
2  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
3  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
4  Type "help()" for help.
5
6 sage: var('a,b,k')
7 (a, b, k)
8 sage: f(x)=exp(-k*x)
9 sage: f.integrate(x,a,b)
10 e^(-a*k)/k - e^(-b*k)/k
```

tex/sage/sageSnip014.sage

Au final, si $t \geqslant t_0$,

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y - z\|_k \big(e^{k(t-t_0)} - 1\big). \tag{18.170}$$

Si $t \leqslant t_0$, il faut retourner les bornes de l'intégrale avant d'y faire rentrer la norme parce que $\|\int_0^1 f\| \leqslant \int_0^1 \|f\|$, mais ça ne marche pas avec $\|\int_1^0 f\|$. Pour $t \leqslant t_0$ tout le calcul donne

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y - z\|_k \big(e^{k(t_0-t)} - 1\big). \tag{18.171}$$

Les deux inéquations sont valables a fortiori en mettant des valeurs absolues dans l'exponentielle, de telle sorte que pour tout $t \in K$ nous avons

$$e^{-k|t_0-t|} \|\phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y - z\|_k \big(1 - e^{-k|t_0-t|}\big). \tag{18.172}$$

En prenant le supremum sur t,

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_k \leqslant \|y - z\|_k (1 - e^{-k\ell}), \tag{18.173}$$

mais $0 < (1 - e^{e-k\ell}) < 1$, donc Φ est contractante pour la norme $\|.\|_k$. Vu que $(E, \|.\|_k)$ est complet, l'application Φ y a un unique point fixe par le théorème de Picard 18.34.

Ce point fixe est donc l'unique solution de l'équation différentielle de départ.

Existence et unicité sur I Il nous reste à prouver que la solution que nous avons trouvée existe sur I : jusqu'à présent nous avons démontré l'existence et l'unicité sur n'importe quel compact dans I.

Soit une suite croissante de compacts K_n contenant t_0 (par exemple une suite exhaustive comme celle du lemme 9.59). Nous avons en particulier

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n. \tag{18.174}$$

Existence sur I Soit y_n l'unique solution sur K_n. Il suffit de poser

$$y(t) = y_n(t) \tag{18.175}$$

pour n tel que $t \in K_n$. Cette définition fonctionne parce que si $t \in K_n \cap K_m$, il y a forcément un des deux qui est inclus dans l'autre et le résultat d'unicité sur le plus grand des deux donne $y_n(t) = y_m(t)$.

Unicité sur I Soient y et z des solutions sur I ; vu que I n'est pas spécialement compact, le travail fait plus haut ne permet pas de conclure que $y = z$.

Soit $t \in I$. Alors $t \in K_n$ pour un certain n et y et z sont des solutions sur K_n qui est compact. L'unicité sur K_n donne $y(t) = z(t)$.

□

18.42.
Il y a d'autres moyens de prouver qu'une solution existe globalement sur $\mathbb{R}$. Si f est globalement bornée, le théorème d'explosion en temps fini donne quelques garanties, voir 33.20.

Le théorème suivant donne une version du théorème de Cauchy-Lipschitz lorsque la fonction f dépend d'un paramètre. Ce théorème n'utilise rien de fondamentalement nouveau. Nous le donnons seulement pour montrer que l'on peut choisir l'espace $\mathcal{F}$ de façon un peu maligne pour élargir le résultat. Si vous voulez un théorème de Cauchy-Lipschitz avec paramètre vraiment intéressant, allez voir le théorème 33.31.

Théorème 18.43 (Cauchy-Lipschitz avec paramètre[1, 287])**.**
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, un connexe ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un intervalle ouvert Λ de $\mathbb{R}^d$. Soit une fonction $f\colon I \times \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitz en Ω. Soient $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$ et $\lambda_0 \in \Lambda$. Il existe un voisinage compact de (t_0, y_0, λ_0) sur lequel le problème

$$\begin{cases} y'_\lambda(t) = f\big(t, y_\lambda(t), \lambda\big) & \text{(18.176a)} \\ y_\lambda(t_0) = y_0 & \text{(18.176b)} \end{cases}$$

possède une unique solution. De plus $(t, \lambda) \mapsto y_\lambda(t)$ est continue[19].

Démonstration. **Problèmes et choses à faire**
Ceci est une idée de la preuve. Je n'ai pas vérifié toutes les étapes. Soyez prudent.

D'abord nous avons un voisinage compact $V \times \overline{B(y_0, r)} \times \Lambda_0$ de (t_0, y_0, λ_0) sur lequel f est bornée. Ensuite nous récrivons l'équation différentielle sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) = f\big(t, y(t, \lambda), \lambda\big) & \text{(18.177a)} \\ y(t_0, \lambda) = y_0. & \text{(18.177b)} \end{cases}$$

pour une fonction $y\colon V \times \Lambda_0 \to \mathbb{R}^n$.

19. Ici, la surprise est que ce soit continu par rapport à λ. Le fait qu'elle le soit par rapport à t est clair depuis le départ parce que c'est finalement rien d'autre que le Cauchy-Lipschitz vieux et connu.

Nous posons $\mathcal{F} = C^0\big(V \times \Lambda_0, \mathbb{R}^n\big)$ et nous y définissons l'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\ \Phi(y)(t,\lambda) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s,\lambda), \lambda\big) ds. \end{aligned} \tag{18.178}$$

Il y a plein de vérifications à faire[287], mais je parie que Φ est bien définie, et que une de ses puissances est une contraction de $(\mathcal{F}, \|.\|_\infty)$. L'unique point fixe est une solution de notre problème et est dans C^0, donc $(t,\lambda) \mapsto y(t,\lambda) = y_\lambda(t)$ est de classe C^0, c'est-à-dire continue. □

18.44.
Ce théorème marque un peu la limite de ce que l'on peut faire avec la méthode des points fixes dans le cadre de Cauchy-Lipschitz : nous sommes limités à la continuité de la solution parce que les espaces C^p ne sont pas complets [20]. Il n'y a donc pas d'espoir d'adapter la méthode pour prouver que si f est de classe C^p alors $(t,\lambda) \mapsto y_\lambda(t)$ est de classe C^p. On peut, à λ fixé prouver que $t \mapsto y_\lambda(t)$ est de classe C^p (utiliser une récurrence), mais pas plus.

La régularité C^1 de y par rapport à la condition initiale sera l'objet du théorème 33.28. Ce résultat n'est vraiment pas facile et utilise des ingrédients bien autres qu'un point fixe. Ensuite la régularité C^p par rapport à la condition initiale et par rapport à un paramètre seront presque des cadeaux (proposition 33.29 et 33.31).

Exemple 18.45([288])
Nous savons que le théorème de Picard permet de trouver le point fixe par itération de la contraction à partir d'un point quelconque. Tentons donc de résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & \text{(18.179a)} \\ y(0) = 1 & \text{(18.179b)} \end{cases}$$

dont nous savons depuis l'enfance que la solution est l'exponentielle [21]. Partons donc de la fonction constante $y_0 = 1$, et appliquons la contraction (18.159) :

$$u_1 = 1 + \int_0^1 u_0(s) ds = 1 + t. \tag{18.180}$$

Ensuite

$$u_2 = 1 + \int_0^t (1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}. \tag{18.181}$$

Et on voit que les itérations suivantes vont donner l'exponentielle.

Nous sommes évidemment en droit de se dire que nous avons choisi un bon point de départ. Tentons le coup avec une fonction qui n'a rien à voir avec l'exponentielle : $u_0(x) = \sin(x)$.

Le programme suivant permet de faire de belles investigations numériques en partant d'à peu près n'importe quelle fonction :

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

x=var('x')

def Phi(f):
```

20. Par exemple, le théorème de Stone-Weierstrass 13.305 nous dit que la limite uniforme de polynômes (de classe C^∞) peut n'être que continue. Voir aussi le thème 24.
21. Voir par exemple le théorème 16.54.

```
    prim=f.integrate()
    return 1+prim(x)-prim(0)

f=sin(x)

for i in range(1,30):
    print(i,f)
    f=Phi(f)

g=f(x)-exp(x)
plot(g,(x,-10,10)).show()
```

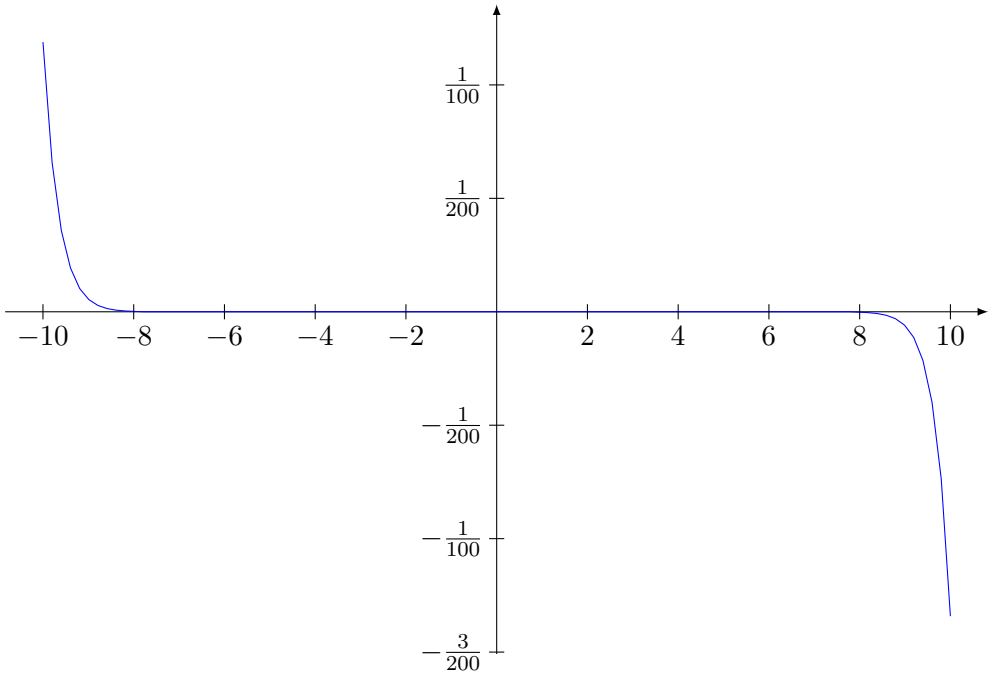
tex/sage/picard_exp.py

Ce programme fait 30 itérations depuis la fonction $\sin(x)$ pour tenter d'approximer $\exp(x)$. Pour donner une idée, après 7 itérations nous avons la fonction suivante :

$$\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \sin(x) + 1. \tag{18.182}$$

Nous voyons que les coefficients sont des factorielles, mais pas toujours celles correspondantes à la puissance, et qu'il manque certains termes par rapport au développement de l'exponentielle que nous connaissons. Bref, le polynôme qui se met en face de $\sin(x)$ s'adapte tout seul pour compenser.

Et après 30 itérations, ça donne quoi ? Voici un graphe de l'erreur entre $u_{30}(x)$ et $\exp(30)$:



Pour donner une idée, $\exp(10) \simeq 22000$. Donc il y a une faute de 0.01 sur 22000. Pas mal.

△

18.7 Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite

18.7.1 Mise en situation

Dans un certain nombre de situation, il n'est pas possible de trouver des solutions explicites aux équations qui apparaissent. Néanmoins, l'existence « théorique » d'une telle solution est souvent déjà suffisante. C'est l'objet du théorème de la fonction implicite.

Prenons par exemple la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1. \tag{18.183}$$

Nous pouvons bien entendu regarder l'ensemble des points donnés par $F(x,y) = 0$. C'est le cercle dessiné à la figure 18.1.

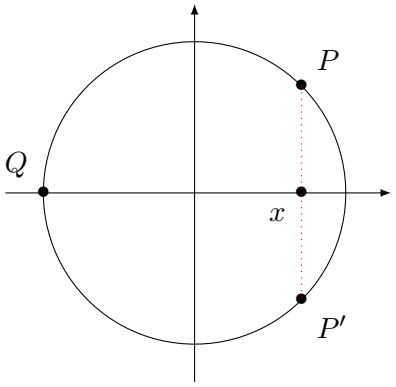


FIGURE 18.1 – Un cercle pour montrer l'intérêt de la fonction implicite. Si on donne x, nous ne pouvons pas savoir si nous parlons de P ou de P'.

Nous ne pouvons pas donner le cercle sous la forme $y = y(x)$ à cause du $\pm$ qui arrive quand on prend la racine carrée. Mais si on se donne le point P, nous pouvons dire que *autour de* P, le cercle est la fonction

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}. \tag{18.184}$$

Tandis que autour du point P', le cercle est la fonction

$$y(x) = -\sqrt{1 - x^2}. \tag{18.185}$$

Autour de ces deux points, donc, le cercle est donné par une fonction. Il n'est par contre pas possible de donner le cercle autour du point Q sous la forme d'une fonction.

Ce que nous voulons faire, en général, est de voir si l'ensemble des points tels que

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \tag{18.186}$$

peut être donné par une fonction $y = y(x_1, \dots, x_n)$. En d'autre termes, est-ce qu'il existe une fonction $y(x_1, \dots, x_n)$ telle que

$$F\big(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)\big) = 0. \tag{18.187}$$

Plus généralement, soit une fonction

$$\begin{aligned} F\colon D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ (x,y) &\mapsto \big(F_1(x,y), \dots, F_m(x,y)\big) \end{aligned} \tag{18.188}$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$. Pour chaque x fixé, on s'intéresse aux solutions du système de m équations $F(x,y) = 0$ pour les inconnues y ; en particulier, on voudrait pouvoir écrire $y = \varphi(x)$ vérifiant $F(x, \varphi(x)) = 0$.

18.7.2 Théorème d'inversion locale

Lemme 18.46 ([215]).
Soit E un espace de Banach (métrique complet) et $\mathcal{O}$ un ouvert de E. Nous considérons une λ-contraction $\varphi\colon \mathcal{O} \to E$. Alors l'application

$$f\colon x \mapsto x + \varphi(x) \tag{18.189}$$

est un homéomorphisme entre $\mathcal{O}$ et un ouvert de E. De plus f^{-1} est Lipschitz de constante plus petite ou égale à $(1-\lambda)^{-1}$.

Cette proposition utilise le théorème de point fixe de Picard 18.34, et sera utilisée pour démontrer le théorème d'inversion locale 18.48.

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$. Nous posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. En vertu de l'inégalité de la proposition 7.107 nous avons

$$\begin{aligned}\|f(x_2) - f(x_1)\| &= \|x_2 + \varphi(x_2) - x_1 - \varphi(x_1)\| && \text{(18.190a)}\\ &\geqslant \Big|\|x_2 - x_1\| - \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|\Big| && \text{(18.190b)}\\ &\geqslant (1-\lambda)\|x_2 - x_1\|. && \text{(18.190c)}\end{aligned}$$

À la dernière ligne les valeurs absolues sont enlevées parce que nous savons que ce qui est à l'intérieur est positif. Cela nous dit d'abord que f est injective parce que $f(x_2) = f(x_1)$ implique $x_2 = x_1$. Donc f est inversible sur son image. Nous posons $A = f(\mathcal{O})$ et nous devons prouver que que $f^{-1}\colon A \to \mathcal{O}$ est continue, Lipschitz de constante majorée par $(1-\lambda)^{-1}$ et que A est ouvert.

Les inéquations (18.190) nous disent que

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leqslant \frac{\|y_1 - y_2\|}{1-\lambda}, \tag{18.191}$$

c'est-à-dire que

$$f^{-1}\big(B(y,r)\big) \subset B\big(f^{-1}(y), \frac{r}{1-\lambda}\big), \tag{18.192}$$

ce qui signifie que f^{-1} est Lipschitz de constante souhaitée et donc continue.

Il reste à prouver que $f(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela nous prenons $y_0 = f(x_0)$ dans $f(\mathcal{O})$ est nous prouvons qu'il existe ϵ tel que $B(y_0, \epsilon)$ soit dans $f(\mathcal{O})$. Il faut donc que pour tout $y \in B(y_0, \epsilon)$, l'équation $f(x) = y$ ait une solution. Nous considérons l'application

$$L_y\colon x \mapsto y - \varphi(x). \tag{18.193}$$

Ce que nous cherchons est un point fixe de L_y parce que si $L_y(x) = x$ alors $y = x + \varphi(x) = f(x)$. Vu que

$$\|L_y(x) - L_y(x')\| = \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leqslant \lambda\|x - x'\|, \tag{18.194}$$

l'application L_y est une contraction de constante λ. Par ailleurs x_0 est un point fixe de L_{y_0}, donc en vertu de la caractérisation (13.631) des fonctions Lipschitziennes,

$$L_{y_0}\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) \subset \overline{B\big(L_{y_0}(x_0), \lambda\delta\big)} = \overline{B(x_0, \lambda\delta)}. \tag{18.195}$$

Vu que pour tout y et x nous avons $L_y(x) = L_{y_0}(x) + y - y_0$,

$$L_y\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) = L_{y_0}\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) + (y - y_0) \subset \overline{B(x_0,\lambda\delta)} + (y - y_0) \subset \overline{B(x_0), \lambda\delta + \|y - y_0\|}. \tag{18.196}$$

Si $\epsilon < (1-\lambda)\delta$ alors $\lambda\delta + \|y - y_0\| < \delta$. Un tel choix de $\epsilon > 0$ est possible parce que $\lambda < 1$. Pour une telle valeur de ϵ nous avons

$$L_y\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) \subset \overline{B(x_0,\delta)}. \tag{18.197}$$

Par conséquent L_y est une contraction sur l'espace métrique complet $\overline{B(x_0,\delta)}$, ce qui signifie que L_y y possède un point fixe par le théorème de Picard 18.34. □

Le théorème d'inversion locale s'énonce de la façon suivante dans $\mathbb{R}^n$:

Théorème 18.47 (Inversion locale dans $\mathbb{R}^n$)**.**
Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si df_{x_0} est inversible, alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 et V de $f(x_0)$ tels que $f\colon U \to V$ soit un C^k-difféomorphisme. (c'est-à-dire que f^{-1} est également de classe C^k)

Nous allons le démontrer dans le cas un peu plus général (mais pas plus cher [22]) des espaces de Banach en tant que conséquence du théorème de point fixe de Picard 18.34.

Théorème 18.48 (Inversion locale dans un espace de Banach[289, 215])**.**
Soit une fonction $f \in C^p(E,F)$ avec $p \geqslant 1$ entre deux espaces de Banach. Soit $x_0 \in E$ tel que df_{x_0} soit une bijection bicontinue [23]. Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 et W de $f(x_0)$ tels que

(1) $f\colon V \to W$ soit une bijection,

(2) $f^{-1}\colon W \to V$ soit de classe C^p.

Démonstration. Nous commençons par simplifier un peu le problème. Pour cela, nous considérons la translation $T\colon x \mapsto x + x_0$ et l'application linéaire

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (df_{x_0})^{-1}x \end{aligned} \tag{18.198}$$

qui sont tout deux des difféomorphismes (L en est un par hypothèse d'inversibilité). Quitte à travailler avec la fonction $k = L \circ f \circ T$, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$ et que $df_{x_0} = \mathbb{1}$. Pour comprendre cela il faut utiliser deux fois la formule de différentielle de fonction composée de la proposition 13.556 :

$$dk_0(u) = dL_{(f\circ T)(0)}\Big(df_{T(0)}dT_0(u)\Big). \tag{18.199}$$

Vu que L est linéaire, sa différentielle est elle-même, c'est-à-dire $dL_{(f\circ T)(0)} = (df_{x_0})^{-1}$, et par ailleurs $dT_0 = \mathbb{1}$, donc

$$dk_0(u) = (df_{x_0})^{-1}\Big(df_{x_0}(u)\Big) = u, \tag{18.200}$$

ce qui signifie bien que $dk_0 = \mathbb{1}$. Pour tout cela nous avons utilisé en plein le fait que df_{x_0} était inversible.

Nous posons $g = f - \mathbb{1}$, c'est-à-dire $g(x) = f(x) - x$, qui a la propriété $dg_0 = 0$. Étant donné que g est de classe C^1, l'application [24]

$$\begin{aligned} dg\colon E &\to \mathrm{GL}(F) \\ x &\mapsto dg_x \end{aligned} \tag{18.201}$$

est continue. En conséquence de quoi nous avons un voisinage U' de 0 pour lequel

$$\sup_{x\in U'} \|dg_x\| < \frac{1}{2}. \tag{18.202}$$

Maintenant le théorème des accroissements finis 12.151 (13.252 pour la dimension finie) nous indique que pour tout $x, x' \in U'$ nous avons [25]

$$\|g(x') - g(x)\| \leqslant \sup_{a\in[x,x']} \|dg_a\| \cdot \|x - x'\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|, \tag{18.203}$$

ce qui prouve que g est une contraction au moins sur l'ouvert U'. Nous allons aussi donner une idée de la façon dont f fonctionne : si $x_1, x_2 \in U'$ alors

$$\|x_1 - x_2\| = \|g(x_1) - f(x_1) - g(x_2) + f(x_2)\| \tag{18.204a}$$

$$\leqslant \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \tag{18.204b}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|, \tag{18.204c}$$

22. Sauf la justification de la régularité de l'application $A \mapsto A^{-1}$

23. En dimension finie, une application linéaire est toujours continue et d'inverse continu.

24. Ici $\mathrm{GL}(F)$ est l'ensemble des applications linéaires, inversibles et continues de F dans lui-même. Ce ne sont pas spécialement des matrices parce que nous n'avons pas d'hypothèses sur la dimension de F, finie ou non.

25. Ici nous supposons avoir choisi U' convexe afin que tous les $a \in [x, x']$ soient bien dans U' et donc soumis à l'inéquation (18.202), ce qui est toujours possible, il suffit de prendre une boule.

ce qui montre que

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|f(x_1) - f(x_2)\|. \tag{18.205}$$

Maintenant que nous savons que g est contractante de constante $\frac{1}{2}$ et que $f = g + \mathbb{1}$ nous pouvons utiliser la proposition 18.46 pour conclure que f est un homéomorphisme sur un ouvert U (partie de U') de E et f^{-1} a une constante de Lipschitz plus petite ou égale à $(1 - \frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Nous allons maintenant prouver que f^{-1} est différentiable et que sa différentielle est donnée par $(df^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

Soient $a, b \in U$ et $u = b - a$. Étant donné que f est différentiable en a, il existe une fonction $\alpha \in o(\|u\|)$ telle que

$$f(b) - f(a) - df_a(u) = \alpha(u). \tag{18.206}$$

En notant $y_a = f(a)$ et $y_b = f(b)$ et en appliquant $(df_a)^{-1}$ à cette dernière équation,

$$(df_a)^{-1}(y_b - y_a) - u = (df_a)^{-1}\big(\alpha(u)\big). \tag{18.207}$$

Vu que df_a est bornée (et son inverse aussi), le membre de droite est encore une fonction β ayant la propriété $\lim_{u\to 0} \beta(u)/\|u\| = 0$; en réordonnant les termes,

$$b - a = (df_a)^{-1}(y_b - y_a) + \beta(u) \tag{18.208}$$

et donc

$$f^{-1}(y_b) - f^{-1}(y_a) - (df_a)^{-1}(y_b - y_a) = \beta(u), \tag{18.209}$$

ce qui prouve que f^{-1} est différentiable et que $(df^{-1})_{y_a} = (df_a)^{-1}$.

La différentielle df^{-1} est donc obtenue par la chaine

$$df^{-1}\colon f(U) \xrightarrow{f^{-1}} U' \xrightarrow{df} \mathrm{GL}(F) \xrightarrow{\mathrm{Inv}} \mathrm{GL}(F) \tag{18.210}$$

où l'application $\mathrm{Inv}\colon \mathrm{GL}(F) \to \mathrm{GL}(F)$ est l'application $X \mapsto X^{-1}$ qui est de classe C^∞ par le théorème 12.159. D'autre part, par hypothèse df est une application de classe C^{k-1} et donc au minimum C^0 parce que $k \geqslant 1$. Enfin, l'application $f^{-1}\colon f(U) \to U$ est continue (parce que la proposition 18.46 précise que f est un homéomorphisme). Donc toute la chaine est continue et df^{-1} est continue. Cela entraine immédiatement que f^{-1} est C^1 et donc que toute la chaine est C^1.

Par récurrence nous obtenons la chaine

$$df^{-1}\colon f(U) \xrightarrow[C^{k-1}]{f^{-1}} U' \xrightarrow[C^{k-1}]{df} \mathrm{GL}(F) \xrightarrow[C^\infty]{\mathrm{Inv}} \mathrm{GL}(F) \tag{18.211}$$

qui prouve que df^{-1} est C^{k-1} et donc que f^{-1} est C^k. La récurrence s'arrête ici parce que df n'est pas mieux que C^{k-1}. □

18.7.3 Théorème de la fonction implicite

Nous énonçons et le démontrons le théorème de la fonction implicite dans le cas d'espaces de Banach.

Théorème 18.49 (Théorème de la fonction implicite dans Banach[193])**.**
Soient E, F et G des espaces de Banach et des ouverts $U \subset E$, $V \subset F$. Nous considérons une fonction $f\colon U \times V \to G$ de classe C^r telle que[26]

$$d_y f_{(x_0,y_0)}\colon F \to G \tag{18.212}$$

soit un isomorphisme pour un certain $(x_0, y_0) \in U \times V$.

26. La notation d_y est la différentielle partielle de la définition 12.156.

Alors nous avons des voisinages U_0 de x_0 dans E et W_0 de $f(x_0,y_0)$ dans G et une fonction de classe C^r

$$g\colon U_0\times W_0\to V \tag{18.213}$$

telle que

$$f\big(x,g(x,w)\big)=w \tag{18.214}$$

pour tout $(x,w)\in U_0\times W_0$.

Cette fonction g est unique au sens suivant : il existe un voisinage V_0 de y_0 tel que si $(x,y)\in U_0\times V_0$ et $w\in W_0$ satisfont à $f(x,y)=w$ alors $y=g(x,w)$. Autrement dit, la fonction $g\colon U_0\times W_0\to V_0$ est unique.

Démonstration. Nous commençons par considérer la fonction

$$\begin{aligned}\Phi\colon U\times V&\to E\times G\\ (x,y)&\mapsto \big(x,f(x,y)\big)\end{aligned} \tag{18.215}$$

et sa différentielle

$$d\Phi_{(x_0,y_0)}(u,v)=\frac{d}{dt}\Big[\big(x_0+tu,f(x_0+tu,y_0+tv)\big)\Big]_{t=0} \tag{18.216a}$$

$$=\left(\frac{d}{dt}\Big[x_0+tu\Big]_{t=0},\frac{d}{dt}\Big[f(x_0+tu,y_0+tv)\Big]_{t=0}\right) \tag{18.216b}$$

$$=\big(u,df_{(x_0,y_0)}(u,v)\big)\,. \tag{18.216c}$$

Nous utilisons alors la proposition 12.157 pour conclure que

$$d\Phi_{(x_0,y_0)}(u,v)=\big(u,(d_1f)_{(x_0,y_0)}(u)+(d_2f)_{(x_0,y_0)}(v)\big), \tag{18.217}$$

mais comme par hypothèse $(d_2f)_{(x_0,y_0)}\colon F\to G$ est un isomorphisme, l'application $d\Phi_{(x_0,y_0)}\colon E\times F\to E\times G$ est également un isomorphisme. Par conséquent le théorème d'inversion locale 18.48 nous indique qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de (x_0,y_0) et $\mathcal{P}$ de $\Phi(x_0,y_0)$ tels que $\Phi\colon\mathcal{O}\to\mathcal{P}$ soit une bijection et $\Phi^{-1}\colon\mathcal{P}\to\mathcal{O}$ soit de classe C^r. Vu que $\mathcal{P}$ est un voisinage de

$$\Phi(x_0,y_0)=\big(x_0,f(x_0,y_0)\big), \tag{18.218}$$

nous pouvons par 12.45 le choisir un peu plus petit de telle sorte à avoir $\mathcal{P}=U_0\times W_0$ où U_0 est un voisinage de x_0 et W_0 un voisinage de $f(x_0,y_0)$. Dans ce cas nous devons obligatoirement aussi restreindre $\mathcal{O}$ à $U_0\times V_0$ pour un certain voisinage V_0 de y_0. L'application Φ^{-1} a obligatoirement la forme

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\colon U_0\times W_0&\to U_0\times V_0\\ (x,w)&\mapsto\big(x,g(x,w)\big)\end{aligned} \tag{18.219}$$

pour une certaine fonction $g\colon U_0\times W_0\to V$. Cette fonction g est la fonction cherchée parce qu'en appliquant Φ à (18.219),

$$(x,w)=\Phi\big(x,g(x,w)\big)=\Big(x,f\big(x,g(x,w)\big)\Big), \tag{18.220}$$

qui nous dit que pour tout $x\in U_0$ et tout $w\in W_0$ nous avons

$$f\big(x,g(x,w)\big)=w. \tag{18.221}$$

Si vous avez bien suivi le sens de l'équation (18.219) alors vous avez compris l'unicité. Sinon, considérez $(x,y)\in U_0\times V_0$ et $w\in W_0$ tels que $f(x,y)=w$. Alors $\big(x,f(x,y)\big)=(x,w)$ et

$$\Phi(x,y)=(x,w). \tag{18.222}$$

Mais vu que $\Phi\colon U_0\times V_0\to U_0\times W_0$ est une bijection, cette relation définit de façon univoque l'élément (x,y) de $U_0\times V_0$, qui ne sera autre que $g(x,w)$. □

Le théorème de la fonction implicite s'énonce de la façon suivante pour des espaces de dimension finie.

Théorème 18.50 (Théorème de la fonction implicite en dimension finie)**.**
Soit une fonction $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^k *et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *tels que*

(1) $F(\alpha, \beta) = 0$,

(2) $\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)} \neq 0$, *c'est-à-dire que* $(d_y F)_{(\alpha,\beta)}$ *est inversible.*

Alors il existe un voisinage ouvert V *de* α *dans* $\mathbb{R}^n$, *un voisinage ouvert* W *de* β *dans* $\mathbb{R}^m$ *et une application* $\varphi\colon V \to W$ *de classe* C^k *telle que pour tout* $x \in V$ *on ait*

$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0. \tag{18.223}$$

De plus si $(x, y) \in V \times W$ *satisfait à* $F(x, y) = 0$, *alors* $y = \varphi(x)$.

Remarque 18.51.
Notons que cet énoncé est tourné un peu différemment en ce qui concerne le nombre de variables dont dépend la fonction implicite : comparez

$$f\big(x, g(x, w)\big) = w \tag{18.224a}$$
$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0. \tag{18.224b}$$

Le deuxième est un cas particulier du premier en posant

$$F(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \tag{18.225}$$

et donc en considérant w comme valant la constante $f(x_0, y_0)$; dans ce cas la fonction g ne dépend plus que de la variable x.

Exemple 18.52
La remarque 18.51 signifie entre autres que le théorème 18.49 est plus fort que 18.50 parce que le premier permet de choisir la valeur d'arrivée. Parlons de l'exemple classique du cercle et de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Nous savons que

$$f(\alpha, \beta) = 1. \tag{18.226}$$

Alors le théorème 18.49 nous donne une fonction g telle que

$$f(x, g(x, r)) = r \tag{18.227}$$

tant que x est proche de α, que r est proche de 1 et que g donne des valeurs proches de β.

L'énoncé 18.50 nous oblige à travailler avec la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, de telle sorte que

$$F(\alpha, \beta) = 0, \tag{18.228}$$

et que nous ayons une fonction φ telle que

$$F(x, \varphi(x)) = 0. \tag{18.229}$$

La fonction φ ne permet donc que de trouver des points sur le cercle de rayon 1. △

18.7.4 Exemple

Le théorème de la fonction implicite a pour objet de donner l'existence de la fonction φ. Maintenant nous pouvons dire beaucoup de choses sur les dérivées de φ en considérant la fonction

$$x \mapsto F\big(x, \varphi(x)\big). \tag{18.230}$$

Par définition de φ, cette fonction est toujours nulle. En particulier, nous pouvons dériver l'équation

$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0, \tag{18.231}$$

et nous trouvons plein de choses.

Exemple 18.53
Prenons par exemple la fonction

$$F\big((x, y), z\big) = ze^z - x - y, \tag{18.232}$$

et demandons nous ce que nous pouvons dire sur la fonction $z(x, y)$ telle que

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0, \tag{18.233}$$

c'est-à-dire telle que

$$z(x, y)e^{z(x,y)} - x - y = 0. \tag{18.234}$$

pour tout x et $y \in \mathbb{R}$. Nous pouvons facilement trouver $z(0, 0)$ parce que

$$z(0, 0)e^{z(0,0)} = 0, \tag{18.235}$$

donc $z(0, 0) = 0$.

Nous pouvons dire des choses sur les dérivées de $z(x, y)$. Voyons par exemple $(\partial_x z)(x, y)$. Pour trouver cette dérivée, nous dérivons la relation (18.234) par rapport à x. Ce que nous trouvons est

$$(\partial_x z)e^z + ze^z(\partial_x z) - 1 = 0. \tag{18.236}$$

Cette équation peut être résolue par rapport à $\partial_x z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{e^z(1 + z)}. \tag{18.237}$$

Remarquez que cette équation ne donne pas tout à fait la dérivée de z en fonction de x et y, parce que z apparaît dans l'expression, alors que z est justement la fonction inconnue. En général, c'est la vie, nous ne pouvons pas faire mieux.

Dans certains cas, on peut aller plus loin. Par exemple, nous pouvons calculer cette dérivée au point $(x, y) = (0, 0)$ parce que $z(0, 0)$ est connu :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 1. \tag{18.238}$$

Cela est pratique pour calculer, par exemple, le développement en Taylor de z autour de $(0, 0)$.
△

Exemple 18.54
Est-ce que l'équation $e^y + xy = 0$ définit au moins localement une fonction $y(x)$? Nous considérons la fonction

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} \tag{18.239}$$

La différentielle de cette application est

$$df_{(0,0)}(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(tu_1, tu_2)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} tu_1 \\ e^{tu_2} + t^2u_1u_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{18.240}$$

L'application f définit donc un difféomorphisme local autour des points (x_0, y_0) et $f(x_0, y_0)$. Soit $(u, 0)$ un point dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. Alors il existe un unique (x, y) tel que

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18.241}$$

Nous avons automatiquement $x = u$ et $e^y + xy = 0$. Notons toutefois que pour que ce procédé donne effectivement une fonction implicite $y(x)$ nous devons avoir des points de la forme $(u, 0)$ dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. △

18.8 Décomposition polaire (régularité)

18.55.
Nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned} f\colon S^{++}(n, \mathbb{R}) &\to S^{++}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sqrt{A} \end{aligned} \tag{18.242}$$

est une difféomorphisme.

Cependant $S^{++}(n, \mathbb{R})$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et nous ne savons pas ce qu'est la différentielle d'une application non définie sur un ouvert. Nous allons donc en réalité montrer que l'application racine carrée existe sur un voisinage de chacun des points de $S^{++}(n, \mathbb{R})$. Et comme une union quelconque d'ouverts est un ouvert, la fonction f sera bien définie sur un ouvert de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

Lemme 18.56.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon S^{++}(n, \mathbb{R}) &\to S^{++}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned} \tag{18.243}$$

est un C^∞-difféomorphisme.

Démonstration. Prouvons d'abord que f prend ses valeurs dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$. Si $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$ alors par la diagonalisation 11.189 elle s'écrit $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale avec des nombres strictement positifs sur la diagonale. Avec cela, $A^2 = QD^2Q^{-1}$ où D^2 contient encore des nombres strictement positifs sur la diagonale.

L'application f étant essentiellement des polynômes en les entrées de A, elle est de classe C^∞.

Passons à l'étude de la différentielle. Comme mentionné en 18.55 nous allons en réalité voir f sur un ouvert de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ autour de $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$. Par conséquent si $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$,

$$df\colon S^{++}(n, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}\big(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}), \mathbb{M}(n, \mathbb{R})\big) \tag{18.244a}$$
$$df_A\colon \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n, \mathbb{R}). \tag{18.244b}$$

Le calcul de df_A est facile. Soit $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et faisons le calcul en utilisant la formule du lemme (13.195) :

$$df_A(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(A + tu)\Big]_{t=0} \tag{18.245a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[A^2 + tAu + tuA + t^2u^2\Big]_{t=0} \tag{18.245b}$$
$$= Au + uA. \tag{18.245c}$$

Nous allons utiliser le théorème d'inversion locale 18.48 à la fonction f. Dans la suite, A est une matrice de $S^{++}(n, \mathbb{R})$.

$\underline{df_A}$ **est injective** Soit $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ dans le noyau de df_A. En posant $M' = A^{-1}MQ$ nous avons $M = QM'Q^{-1}$ et on applique df_A à $QM'Q^{-1}$:

$$df_A(QM'Q^{-1}) = Q\big(DM + MD\big)Q^{-1}. \tag{18.246}$$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$. La matrice D est inversible. Nous avons $M' = -DM'D^{-1}$, et en coordonnées,

$$M'_{ij} = -\sum_{kl} D_{ikM'_{kl}} D^{-1}_{lj} \tag{18.247a}$$

$$= -\sum_{kl} \lambda_i \delta_{ik} M'_{kl} \frac{1}{\lambda_j} \delta_{lj} \tag{18.247b}$$

$$= -\frac{\lambda_i}{\lambda_i} M'_{ij}. \tag{18.247c}$$

C'est-à-dire que $M'_{ij} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} M'_{ij}$ avec $-\frac{\lambda_i}{\lambda_j} < 0$. Cela implique $M' = 0$ et par conséquent $M = 0$.

$\underline{df_A}$ **est surjective** Soit $N \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; nous cherchons $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tel que $df_A(M) = N$. Nous posons $N' = Q^{-1}NQ$ et $M = QM'Q^{-1}$, ce qui nous donne à résoudre $df_D(M') = N'$. Passons en coordonnées :

$$(DM' + M'D)_{ij} = \sum_k (\delta_{ik}\lambda_i M'_{kj} + M'_{ik}\delta_{kj}\lambda_j) = M'_{ij}(\lambda_i + \lambda_j) \tag{18.248}$$

où $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$. Il suffit donc de prendre la matrice M' donnée par

$$M'_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} N'_{ij} \tag{18.249}$$

pour que $df_A(M') = N'$.

Le théorème d'inversion locale donne un voisinage V de A dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et un voisinage W de A^2 dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tels que $f\colon V \to W$ soit une bijection et $f^{-1}\colon W \to V$ soit de même régularité, en l'occurrence C^∞. □

Remarque 18.57.
Oui, il y a des matrices non symétriques qui ont une unique racine carrée.

La proposition suivante, qui dépend du le théorème d'inversion locale par le lemme 18.56, donne plus de régularité à la décomposition polaire donnée dans le théorème 14.31.

Proposition 18.58 (Décomposition polaire : cas réel (suite))**.**
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{18.250}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞.

Démonstration. Si M est donnée dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ alors la décomposition polaire[27] $M = QS$ est donnée par $S = \sqrt{MM^t}$ et $Q = MS^{-1}$. Autrement dit, si nous considérons la fonction de décomposition polaire

$$f\colon \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \tag{18.251}$$

alors

$$f^{-1}(M) = \big(M(\sqrt{MM^t})^{-1}, \sqrt{MM^t}\big). \tag{18.252}$$

Nous avons vu dans le lemme 18.56 que la racine carrée était un C^∞-difféomorphisme. Le reste n'étant que des produits de matrices, la régularité est de mise. □

27. Proposition 14.31.

18.9 Théorème de Von Neumann

Lemme 18.59 ([43]).
Soit G, un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{L}_G = \{m \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } e^{tm} \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}. \tag{18.253}$$

Alors $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Si $m \in \mathcal{L}_G$, alors $\lambda m \in \mathcal{L}_G$ par construction. Le point délicat à prouver est le fait que si $a, b \in \mathcal{L}_G$, alors $a+b \in \mathcal{L}_G$. Soit $a \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; nous savons qu'il existe une fonction $\alpha_a : \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ telle que

$$e^{ta} = \mathbb{1} + ta + \alpha_a(t) \tag{18.254}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0. \tag{18.255}$$

Si a et b sont dans $\mathcal{L}_G$, alors $e^{ta}e^{tb} \in G$, mais il n'est pas vrai en général que cela soit égal à $e^{t(a+b)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$e^{a/k}e^{b/k} = \left(\mathbb{1} + \frac{a}{k} + \alpha_a(\frac{1}{k})\right)\left(\mathbb{1} + \frac{b}{k} + \alpha_b(\frac{1}{k})\right) = \mathbb{1} + \frac{a+b}{2} + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \tag{18.256}$$

où $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ est encore une fonction vérifiant $\beta(t)/t \to 0$. Si k est assez grand, nous avons

$$\left\| \frac{a+b}{k} + \beta(\frac{1}{k}) \right\| < 1, \tag{18.257}$$

et nous pouvons profiter du lemme 16.115 pour écrire alors

$$\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k = e^{k\ln\left(\mathbb{1} + \frac{a+b}{k} + \beta(\frac{1}{k})\right)}. \tag{18.258}$$

Ce qui se trouve dans l'exponentielle est

$$k\left[\frac{a+b}{k} + \alpha(\frac{1}{k}) + \sigma\left(\frac{a+b}{k} + \alpha(\frac{1}{k})\right)\right]. \tag{18.259}$$

Les diverses propriétés vues montrent que le tout tend vers $a+b$ lorsque $k \to \infty$. Par conséquent

$$\lim_{k\to\infty}\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k = e^{a+b}. \tag{18.260}$$

Ce que nous avons prouvé est que pour tout t, $e^{t(a+b)}$ est une limite d'éléments dans G et est donc dans G parce que ce dernier est fermé. □

Vu que $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, nous pouvons considérer un supplémentaire M.

Lemme 18.60.
Il n'existe pas se suites (m_k) dans $M\backslash\{0\}$ convergeant vers zéro et telle que $e^{m_k} \in G$ pour tout k.

Démonstration. Supposons que nous ayons $m_k \to 0$ dans $M\backslash\{0\}$ avec $e^{m_k} \in G$. Nous considérons les éléments $\epsilon_k = \frac{m_k}{\|m_k\|}$ qui sont sur la sphère unité de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que cette suite converge, et vu que M est fermé, ce sera vers $\epsilon \in M$ avec $\|\epsilon\| = 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k\to\infty} e^{t\epsilon_k}. \tag{18.261}$$

En vertu de la décomposition d'un réel en partie entière et décimale, pour tout k nous avons $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| \leqslant \frac{1}{2}$ tel que $t/\|m_k\| = \lambda_k + \mu_k$. Avec ça,

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{t}{m_k}m_k\right) = \lim_{k\to\infty} e^{\lambda_k m_k}e^{\mu_k m_k}. \tag{18.262}$$

Pour tout k nous avons $e^{\lambda_k m_k} \in G$. De plus $|\mu_k|$ étant borné et m_k tendant vers zéro nous avons $e^{\mu_k m_k} \to 1$. Au final

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k\to\infty} e^{t\epsilon_k} \in G \tag{18.263}$$

Cela signifie que $\epsilon \in \mathcal{L}_G$, ce qui est impossible parce que nous avions déjà dit que $\epsilon \in M\backslash\{0\}$. □

Lemme 18.61.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L}_G \times M &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ l, m &\mapsto e^l e^m \end{aligned} \tag{18.264}$$

est un difféomorphisme local entre un voisinage de $(0,0)$ *dans* $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ *et un voisinage de* $\mathbb{1}$ *dans* $\exp\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big)$.

Notons que nous ne disons rien de $e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{R})}$. Nous n'allons pas nous embarquer à discuter si ce serait tout $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [28] ou bien si ça contiendrait ne fut-ce que G.

Démonstration. Le fait que f prenne ses valeurs dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est simplement dû au fait que les exponentielles sont toujours inversibles. Nous considérons ensuite la différentielle : si $u \in \mathcal{L}_G$ et $v \in M$ nous avons

$$df_{(0,0)}(u,v) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(t(u,v)\big)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[e^{tu}e^{tv}\Big]_{t=0} = u + v. \tag{18.265}$$

L'application df_0 est donc une bijection entre $\mathcal{L}_G \times M$ et $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Le théorème d'inversion locale 18.48 nous assure alors que f est une bijection entre un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathcal{L}_G \times M$ et son image. Mais vu que df_0 est une bijection avec $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, l'image en question contient un ouvert autour de $\mathbb{1}$ dans $\exp\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big)$. □

Théorème 18.62 (Von Neumann[43, 290, 291])**.**
Tout sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est une sous-variété de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit G un tel groupe ; nous devons prouver que c'est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Et si on est pervers, on ne va pas faire localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais à un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie. Nous allons être pervers.

Étant donné que pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned} L_g\colon G &\to G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \tag{18.266}$$

est de classe C^∞ et d'inverse C^∞, il suffit de prouver le résultat pour un voisinage de $\mathbb{1}$.

Supposons d'abord que $\mathcal{L}_G = \{0\}$. Alors 0 est un point isolé de $\ln(G)$; en effet si ce n'était pas le cas nous aurions un élément m_k de $\ln(G)$ dans chaque boule $B(0,r_k)$. Nous aurions alors $m_k = \ln(a_k)$ avec $a_k \in G$ et donc

$$e^{m_k} = a_k \in G. \tag{18.267}$$

De plus m_k appartient forcément à M parce que $\mathcal{L}_G$ est réduit à zéro. Cela nous donnerait une suite $m_k \to 0$ dans M dont l'exponentielle reste dans G. Or cela est interdit par le lemme 18.60. Donc 0 est un point isolé de $\ln(G)$. L'application ln étant continue [29], nous en déduisons que $\mathbb{1}$ est isolé dans G. Par le difféomorphisme L_g, tous les points de G sont isolés ; ce groupe est donc discret et par voie de conséquence une variété.

Nous supposons maintenant que $\mathcal{L}_G \neq \{0\}$. Nous savons par la proposition 16.114 que

$$\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \tag{18.268}$$

28. Vu les dimensions y'a tout de même peu de chance.
29. Par le lemme 16.115.

est une application C^∞ vérifiant $d\exp_0 = \mathrm{Id}$. Nous pouvons donc utiliser le théorème d'inversion locale 18.48 qui nous offre donc l'existence d'un voisinage U de 0 dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tel que $W = \exp(U)$ soit un ouvert de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et que $\exp\colon U \to W$ soit un difféomorphisme de classe C^∞.

Montrons que quitte à restreindre U (et donc W qui reste par définition l'image de U par exp), nous pouvons avoir $\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) = W \cap G$. D'abord $\exp(\mathcal{L}_G) \subset G$ par construction. Nous avons donc $\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) \subset W \cap G$. Pour trouver une restriction de U pour laquelle nous avons l'égalité, nous supposons que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans U,

$$\exp\colon \mathcal{O} \cap \mathcal{L}_G \to \exp(\mathcal{O}) \cap G \tag{18.269}$$

ne soit pas surjective. Cela donnerait un élément de $\mathcal{O} \cap \complement\mathcal{L}_G$ dont l'image par exp n'est pas dans G. Nous construisons ainsi une suite en considérant une boule $B(0,\frac{1}{k})$ inclue à U et $x_k \in B(0,\frac{1}{k}) \cap \complement\mathcal{L}_G$ vérifiant $e^{x_k} \in G$. Vu le choix des boules nous avons évidemment $x_k \to 0$.

L'élément e^{x_k} est dans $e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{R})}$ et le difféomorphisme du lemme 18.61 [30] nous donne $(l_k, m_k) \in \mathcal{L}_G \times M$ tel que $e^{l_k}e^{m_k} = e^{x_k}$. À ce point nous considérons k suffisamment grand pour que e^{x_k} soit dans la partie de l'image de f sur lequel nous avons le difféomorphisme. Plus prosaïquement, nous posons

$$(l_k, m_k) = f^{-1}(e^{x_k}) \tag{18.270}$$

et nous profitons de la continuité pour permuter la limite avec f^{-1} :

$$\lim_{k\to\infty}(l_k, m_k) = f^{-1}\Big(\lim_{k\to\infty} e^{x_k}\Big) = f^{-1}(\mathbb{1}) = (0,0). \tag{18.271}$$

En particulier $m_k \to 0$ alors que $e^{m_k} = e^{x_k}e^{-l_k} \in G$. La suite m_k viole le lemme 18.60. Nous pouvons donc restreindre U de telle façon à avoir

$$\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) = W \cap G. \tag{18.272}$$

Nous avons donc un ouvert de $\mathcal{L}_G$ (l'ouvert $U \cap \mathcal{L}_G$) qui est difféomorphe avec l'ouvert $W \cap G$ de G. Donc G est une variété et accepte $\mathcal{L}_G$ comme carte locale.

□

Remarque 18.63.
En termes savants, nous avons surtout montré que si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors l'exponentielle donne un difféomorphisme local entre $\mathfrak{g}$ et G.

18.10 Recherche d'extrema

18.10.1 Extrema à une variable

Définition 18.64.
*Soit $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in A$. Le point a est un **maximum local** de f s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que $f(a) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{U} \cap A$. Le point a est un **maximum global** si $f(a) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in A$.*

La proposition basique à utiliser lors de la recherche d'extrema est la suivante :

Proposition 18.65.
Soit $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Int}(A)$. Supposons que f est dérivable en a. Si a est un extremum local, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ en $x = 0$: sa dérivée est nulle et pourtant $x = 0$ n'est ni un maximum ni un minimum local.

Cette proposition ne sert donc qu'à sélectionner des *candidats* extremum. Afin de savoir si ces candidats sont des extrema, il y a la proposition suivante.

30. Il me semble que l'utilisation de ce lemme manque à l'avant-dernière ligne de la preuve chez [43].

Proposition 18.66.
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^k au voisinage d'un point $a \in \operatorname{Int} I$. Supposons que

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \tag{18.273}$$

et que

$$f^{(k)}(a) \neq 0. \tag{18.274}$$

Dans ce cas,

(1) Si k est pair, alors a est un point d'extremum local de f, c'est un minimum si $f^{(k)}(a) > 0$, et un maximum si $f^{(k)}(a) < 0$,

(2) Si k est impair, alors a n'est pas un extremum local de f.

Note : jusqu'à présent nous n'avons rien dit des extrema *globaux* de f. Il n'y a pas grand chose à en dire. Si un point d'extremum global est situé dans l'intérieur du domaine de f, alors il sera extremum local (a fortiori). Ou alors, le maximum global peut être sur le bord du domaine. C'est ce qui arrive à des fonctions strictement croissantes sur un domaine compact.

Une seule certitude : si une fonction est continue sur un compact, elle possède une minimum et un maximum global par le théorème 8.35.

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si $f'(a) > 0$, alors la tangente au graphe de f au point $\big(a, f(a)\big)$ sera une droite croissante (coefficient directeur positif). Cela ne veut pas spécialement dire que la fonction elle-même sera croissante, mais en tout cas cela est un bon indice.

Exemple 18.67
Si $f(x) = x^2$, il est connu que $f'(x) = 2x$. Nous avons donc que f' est positive si $x \geqslant 0$ et $f' >$ est négative si $x < 0$. Cela correspond bien au fait que x^2 est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, \infty[$. △

Sur la figure 18.2, nous avons dessiné la fonction $f(x) = x\cos(x)$ et sa dérivée. Nous voyons que partout où la dérivée est négative, la fonction est décroissante tandis que, inversement, partout où la dérivée est positive, la fonction est croissante.

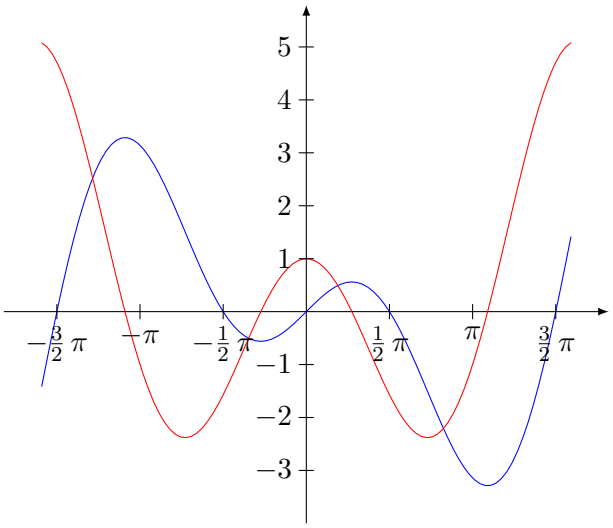


FIGURE 18.2 – La fonction $f(x) = x\cos(x)$ en bleu et sa dérivée en rouge.

Les extrema de la fonction f sont donc placés là où f' change de signe. En effet si $f'(x) < 0$ pour $x < a$ et $f'(x) > 0$ pour $x > a$, la fonction est décroissante jusqu'à a et est ensuite croissante. Cela signifie que la fonction connait un creux en a. Le point a est donc un minimum de la fonction.

Attention cependant. Le fait que $f'(a) = 0$ ne signifie pas automatiquement que f a un maximum ou un minimum en a. Nous avons par exemple tracé sur la figure 18.3 les fonctions x^3 et sa dérivée. Il est à noter que, conformément à ce que l'on pense, certes la dérivée s'annule en $x = 0$, mais elle ne change pas de signe.

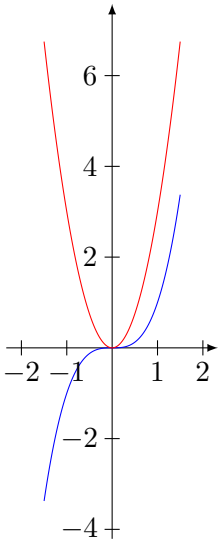


FIGURE 18.3 – La dérivée de x^3 s'annule en $x = 0$, mais ce n'est ni un minimum ni un maximum.

18.10.2 Extrema libre

Définition 18.68.
*Un point a à l'intérieur du domaine d'une fonction $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un **point critique** de f lorsque $df(a) = 0$.*

Ces points sont analogues aux points où la dérivée d'une fonction sur $\mathbb{R}$ s'annule. Les points critiques de f sont dons les candidats à être des points d'extremum.

Dans le cas d'une fonction de deux variables,l la proposition 13.271 nous permet de voir $(d^2f)_a$ comme étant la matrice

$$d^2f(a) = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2}(a) & \frac{d^2f}{dx\,dy}(a) \\ \frac{d^2f}{dy\,dx}(a) & \frac{d^2f}{dy^2}(a) \end{pmatrix}. \tag{18.275}$$

Dans le cas d'une fonction C^2, cette matrice est symétrique.

Proposition 18.69 ([292]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Si a est un extremum local de f, alors a est un point critique de f.

Démonstration. Nous supposons que a est un maximum local (ce sera la même chose si a est un minimum). Soit $r > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in B(a, r)$ (et tel que cette boule reste dans Ω). Soit $u \in \mathbb{R}^n$ assez petit pour que $a \pm u \in B(a, r)$ de sorte que la définition suivante ait un sens :

$$\begin{aligned} g\colon [-1, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + tu) \end{aligned} \tag{18.276}$$

Cette fonction est différentiable en $t = 0$ (composée de fonctions différentiables, proposition 13.207) et a un maximum local en $t = 0$. Donc $g'(0) = 0$ par la proposition 18.65. Donc

$$0 = \frac{d}{dt}\Big[f(a + tu)\Big]_{t=0} = df_a(u). \tag{18.277}$$

□

18.10.3 Extrema et Hessienne

Proposition 18.70 ([1, 293, 294]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable ainsi que $a \in \Omega$.

(1) Si a est un point critique de f et si il existe r tel que (d^2f_x) est semi-définie positive pour tout $x \in B(a,r)$ alors f possède un minimum local en a.

(2) Si a est un point critique[31] de f, et si d^2f_a est strictement définie positive[32], alors a est un minimum local strict de f,

(3) Si a est un minimum local, alors $(d^2f)_a$ est semi-définie positive.

Démonstration. Nous subdivisons la preuve.

(1) Soit h tel que $a+h \in B(a,r)$. Nous allons montrer que $f(a) \leqslant f(a+h)$; cela montrera que $x=a$ est un minimum local. Pour cela nous utilisons un développement de Taylor[33] : il existe $c \in]a, a+h[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_c(h,h) \geqslant f(a) \tag{18.278}$$

parce que par hypothèse $(d^2f)_c$ est définie positive et parce que $df_a = 0$.

(2) La forme bilinéaire d^2f_a est strictement définie positive, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d^2f_a(h,h) > \alpha\|h\|^2 \tag{18.279}$$

pour tout h. Nous écrivons encore Taylor : il existe une fonction ϵ telle que $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$ et

$$f(a+h) = g(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\epsilon(h). \tag{18.280}$$

En tenant compte du fait que $df_a = 0$,

$$f(a+h) > f(a) + \|h\|^2\big(\frac{1}{2}\alpha + \epsilon(h)\big). \tag{18.281}$$

La limite de ϵ nous dit qu'il existe $r > 0$ tel que $\|\epsilon(h)\| < \frac{1}{2}\alpha$ pour tout $h \in B(0,r)$. Pour ces valeurs de h nous avons

$$f(a+h) > f(a). \tag{18.282}$$

Donc a est un minimum local strict de f.

(3) Si a est un minimum local, nous savons déjà que $df_a = 0$ par la proposition 18.69. Nous écrivons le développement de Taylor de f à l'ordre 2 de la proposition 13.366 :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\alpha(\|h\|). \tag{18.283}$$

En prenant h assez petit pour que $a+h$ ne sorte pas de la boule dans laquelle a est un minimum, nous avons $f(a+h) - f(a) > 0$. Donc

$$\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\alpha(\|h\|) > 0 \tag{18.284}$$

Nous divisons cela par $\|h\|^2$ et notons $e_h = h/\|h\|$:

$$\frac{1}{2}(d^2f)_a(e_h,e_h) + \alpha(\|h\|) > 0. \tag{18.285}$$

À la limite $h \to 0$, le premier terme est constant tandis que le deuxième tend vers zéro. À la limite,

$$(d^2f)_a(e_h,e_h) \geqslant 0. \tag{18.286}$$

La caractérisation du lemme 11.196(2) nous dit alors que $(d^2f)_a$ est semi-définie positive.

31. Définition 18.68.
32. La fonction f est de classe C^2, donc les dérivées croisées sont égales et d^2f est symétrique. La définition 11.191 s'applique donc.
33. Proposition 13.369.

□

La partie (3) est tout à fait comparable au fait bien connu que, pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si le point a est minimum local, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$.

Notons que le point (3) ne parle pas de minimum strict, et donc pas de matrice *strictement* définie positive.

Exemple 18.71(Proposition 18.70(2) sans point critique)
L'hypothèse de point critique pour l'utilisation de la stricte définition positive de d^2f_a est nécessaire. Soit en effet la fonction

$$f(x) = x^2 + x. \tag{18.287}$$

Elle vérifie $f''(0) = 2$, de telle sorte que sa différentielle seconde en zéro soit strictement définie positive. Le point $x = 0$ n'est cependant même pas un minimum local. Entre autres parce que $f'(0) = 1 \neq 0$. △

La méthode pour chercher les extrema de f est donc de suivre le points suivants :

(1) Trouver les candidats extrema en résolvant $\nabla f = (0, 0)$,

(2) écrire $d^2f(a)$ pour chacun des candidats

(3) calculer les valeurs propres de $d^2f(a)$, déterminer si la matrice est définie positive ou négative,

(4) conclure.

Une conséquence de la proposition 11.194(3) [34] est que si $\det M < 0$, alors le point a n'est pas un extrema dans le cas où $M = d^2f(a)$ par le point (3) de la proposition 18.70.

Exemple 18.72
Soit la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. C'est une fonction différentiable sans problèmes. D'abord sa différentielle est

$$df = \big(4x^3 - 4y; 4y^3 - 4x\big), \tag{18.288}$$

et la matrice des dérivées secondes est

$$M = d^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}. \tag{18.289}$$

Nous avons $fd = 0$ pour les trois points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $-1, -1$.

Pour le point $(0, 0)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18.290}$$

dont les valeurs propres sont 4 et -4. Elle n'est donc semi-définie ou définie rien du tout. Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.

Au contraire pour les points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \tag{18.291}$$

dont les valeurs propres sont 16 et 8. La matrice d^2f y est donc définie positive. Ces deux points sont donc extrema locaux. △

34. La matrice $d^2f(a)$ est toujours symétrique quand f est de classe C^2.

18.10.4 Un peu de recettes de cuisine

(1) Rechercher les points critiques, càd les (x, y) tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

En effet, si (x_0, y_0) est un extrémum local de f, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

(2) Déterminer la nature des points critiques : « test » des dérivées secondes :

$$\text{On pose } H(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2$$

(2a) Si $H(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \implies (x_0, y_0)$ est un minimum local de f.

(2b) Si $H(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \implies (x_0, y_0)$ est un maximum local de f.

(2c) Si $H(x_0, y_0) < 0 \implies f$ a un point de selle en (x_0, y_0).

(2d) Si $H(x_0, y_0) = 0 \implies$ on ne peut rien conclure.

18.10.5 Extrema liés

Soit f, une fonction sur $\mathbb{R}^n$, et $M \subset \mathbb{R}^n$ une variété de dimension m. Nous voulons savoir quelles sont les plus grandes et plus petites valeurs atteintes par f sur M.

Pour ce faire, nous avons un théorème qui permet de trouver des extrema *locaux* de f sur la variété. Pour rappel, $a \in M$ est une **extrema local de f relativement** à l'ensemble M s'il existe une boule $B(a, \epsilon)$ telle que $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in B(a, \epsilon) \cap M$.

Théorème 18.73 (Extrema lié [276])**.**
Soit A, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

(1) une fonction (celle à minimiser) $f \in C^1(A, \mathbb{R})$,

(2) des fonctions (les contraintes) $G_1, \dots, G_r \in C^1(A, \mathbb{R})$,

(3) $M = \{x \in A \text{ tel que } G_i(x) = 0 \, \forall i\}$,

(4) un extrema local $a \in M$ de f relativement à M.

Supposons que les gradients $\nabla G_1(a)$, ...,$\nabla G_r(a)$ soient linéairement indépendants. Alors $a = (x_1, \dots, x_n)$ est une solution de $\nabla L(a) = 0$ où

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i G_i(x_1, \dots, x_n). \tag{18.292}$$

Autrement dit, si a est un extrema lié, alors $\nabla f(a)$ est une combinaisons des $\nabla G_i(a)$, ou encore il existe des λ_i tels que

$$df(a) = \sum_i \lambda_i dG_i(a). \tag{18.293}$$

La fonction L est le **lagrangien** du problème et les variables λ_i sont les **multiplicateurs de Lagrange**.

Démonstration. Si $r = n$ alors les vecteurs linéairement indépendantes $\nabla G_i(a)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ et donc évidemment les λ_i existent. Nous supposons donc maintenant que $r < n$. Nous notons $(z_i)_{i=1\dots n}$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$.

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial z_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial z_n}(a) \end{pmatrix} \tag{18.294}$$

est de rang r parce que les lignes sont par hypothèses linéairement indépendantes. Nous nommons $(y_i)_{i=1,\dots,r}$ un choix de r parmi les (z_i) tels que

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{18.295}$$

Nous identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ dans lequel $\mathbb{R}^r$ est la partie générée par les $(y_i)_{i=1,\dots,r}$. Les coordonnées sur $\mathbb{R}^s$ seront nommées $(x_j)_{j=1,\dots,s}$, de telle sorte que les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ setont $x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_r$. Dans ces coordonnées, nous nommons $a=(\alpha,\beta)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}^s$ et $\beta\in\mathbb{R}^r$.

Si nous notons $G=(G_1,\dots,G_r)$, le théorème de la fonction implicite (théorème 18.49) nous dit qu'il existe un voisinage U' de $\alpha\in\mathbb{R}^n$, un voisinage V' de $\beta\in\mathbb{R}^r$ et une fonction $\varphi\colon U'\to V'$ de classe C^1 telle que si $(x,y)\in U'\times V'$, alors

$$g(x,y)=0 \tag{18.296}$$

si et seulement si $y=\varphi(x)$. Nous posons maintenant

$$\psi(x)=(x,\varphi(x)) \tag{18.297a}$$
$$h(x)=f\big(\psi(x)\big). \tag{18.297b}$$

Nous avons $\psi(\alpha)=a$ et $\psi(x)\in M$ pour tout $x\in U'$. La fonction h a donc un extrema local en α et donc les dérivées partielles de h y sont nulles. Cela signifie que

$$0=\frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \tag{18.298}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial y_k}(a)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha)=0 \tag{18.299}$$

pour tout $i=1,\dots,s$. D'autre part pour tout k, la fonction $l_k(x)=G_k\big(x,\varphi(x)\big)$ est constante et vaut zéro ; ses dérivées partielles sont donc nulles :

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}(\alpha)=\frac{\partial G_k}{\partial x_i}(\alpha)+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial G_k}{\partial y_k}(a)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha)=0 \tag{18.300}$$

pour tout $i=1,\dots,s$ et $k=1,\dots,r$.

Les s premières colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_s} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial x_s} & \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \tag{18.301}$$

s'expriment en terme des r dernières. La matrice est donc au maximum de rang r. Notons que la première ligne est ∇f et les r suivantes sont les ∇G_i. Vu que ces lignes sont des vecteurs liés, il existe $\mu_0,\dots,\mu_r$ tels que

$$\mu_0\nabla f+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\nabla G_i=0. \tag{18.302}$$

Par hypothèse les ∇G_i sont linéairement indépendants, ce qui nous dit que $\mu_0\neq 0$. Donc nous avons ce qu'il nous faut :

$$\nabla f(a)=\sum_i\frac{\mu_i}{\mu_0}\nabla G_i(a). \tag{18.303}$$

Notons qu'au vu de l'expression (18.293), le fait que les formes $\{dG_i(a)\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ forment une partie libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$ implique que les λ_i sont uniques. □

La proposition suivante est la même que 18.73.

Proposition 18.74.
Soit U, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et des fonctions de classe C^1 $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$. Nous considérons

$$\Gamma = \{x \in U \text{ tel que } g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}. \tag{18.304}$$

Soit a un extrémum de $f|_\Gamma$. Supposons que les formes $dg_1, \dots, dg_r$ soient linéairement indépendantes en a. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (dg_i)_a. \tag{18.305}$$

En pratique les candidats extrema locaux sont tous les points où les gradients ne sont pas linéairement indépendants, plus tous les points donnés par l'équation $\nabla L = 0$. Parmi ces candidats, il faut trouver lesquels sont maxima ou minima, locaux ou globaux.

L'existence d'extrema locaux se prouve généralement en invoquant de la compacité, et en invoquant le lemme suivant qui permet de réduire le problème à un compact.

Lemme 18.75.
Soit S, une partie de $\mathbb{R}^n$ et C, un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in \operatorname{Int} S$ est un minimum local relatif à $S \cap C$, alors il est un minimum local par rapport à S.

Démonstration. Nous avons que $\forall x \in B(a, \epsilon_1) \cap S \cap C$, $f(x) \geqslant f(x)$. Mais étant donné que C est ouvert, et que $a \in C$, il existe un ϵ_2 tel que $B(a, \epsilon_2) \subset C$. En prenant $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, nous trouvons que $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in B(a, \epsilon) \cap (S \cap C) = B(a, \epsilon) \cap S$. □

18.11 Fonctions convexes

Définition 18.76 ([295]).
Une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite ***convexe*** *lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I et tout λ dans $[0, 1]$ nous avons*

$$f\big(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \tag{18.306}$$

Si pour tout $\theta \in]0, 1[$ et pour tout $x \neq y$ dans I nous avons

$$f\big(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\big) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \tag{18.307}$$

alors nous disons que la fonction f est ***strictement convexe*** *sur I.*

Une fonction est ***concave*** *si son opposée est convexe.*

18.77 ([295]).
Les différents résultats pour les fonctions convexes s'adaptent généralement sans mal aux fonctions strictement convexes. Une nuance cependant : de même que les fonctions dérivables convexes sont celles qui ont une dérivée croissante, les fonctions dérivables strictement convexes sont celles qui ont une dérivée strictement croissante (proposition 18.81). En revanche, il ne faudrait pas croire que la dérivée seconde d'une fonction dérivable strictement convexe est nécessairement une fonction à valeurs strictement positives (voir théorème 18.82) : la dérivée d'une fonction strictement croissante peut s'annuler occasionnellement, ou plus exactement peut s'annuler sur un ensemble de points d'intérieur vide. Penser à $x \mapsto x^4$ pour un exemple de fonction strictement convexe dont la dérivée seconde s'annule.

18.11.1 Inégalité des pentes

Dans l'étude des fonctions convexes nous allons souvent utiliser la fonction **taux d'accroissement** qui est, pour α dans le domaine de convexité de f définie par

$$\begin{aligned}\tau_\alpha\colon I\backslash\{\alpha\} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}.\end{aligned} \tag{18.308}$$

Proposition 18.78 (Inégalité des pentes[296])**.**
Soit f une fonction convexe sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Alors pour tout $a<b<c$ dans I nous avons[35]

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}. \tag{18.309}$$

En d'autres termes,

$$\tau_a(b)\leqslant\tau_a(c)\leqslant\tau_b(c), \tag{18.310}$$

c'est-à-dire que τ est croissante en ses deux arguments.

Démonstration. D'abord les inégalités $a<b<c$ impliquent $0<b-a<c-a$ et donc

$$\lambda=\frac{b-a}{c-a}<1. \tag{18.311}$$

L'astuce est de remarquer que $(1-\lambda)a+\lambda c=b$. Donc λ a toutes les bonnes propriétés pour être utilisé dans la définition de la convexité :

$$f\big((1-\lambda)a+\lambda c\big)\leqslant\lambda f(c)+(1-\lambda)f(a), \tag{18.312}$$

c'est-à-dire

$$f(b)-f(a)\leqslant\lambda\big(f(c)-f(a)\big) \tag{18.313}$$

ou encore, en remplaçant λ par sa valeur :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}. \tag{18.314}$$

Cela fait déjà une des inégalités à savoir.

D'autre part en partant de $-a<-b<-c$ nous posons

$$0<\lambda=\frac{c-b}{c-a}. \tag{18.315}$$

Nous avons à nouveau $b=(1-\lambda)c+\lambda a$ et nous pouvons obtenir la seconde inégalité

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}. \tag{18.316}$$

□

Géométriquement, l'inégalité des pentes se comprend facilement : le coefficient angulaire de la corde du graphe augmente. Donc si $x<y<z$, le coefficient moyen entre x et y est plus petit que celui entre x et z qui est plus petit que celui entre y et z.

Donc si le coefficient angulaire moyen entre a et $b+u$ vaut celui entre a et b, ce coefficient ne peut qu'être constant entra a et b : sinon il serait plus grand entre b et $b+u$ et la moyenne sur $a\to b+u$ serait plus grande que sa moyenne sur $a\to b$. Mais avoir un coefficient angulaire constant signifie être une droite.

En résumé, si une fonction est convexe et non strictement convexe, alors son graphe est une droite. C'est en gros cela que la proposition 18.86 clarifiera.

35. Les inégalités sont strictes si la fonction f est strictement convexe.

18.11.2 Convexité et régularité

Lemme 18.79 ([295]).
Une fonction convexe sur un ouvert

(1) y admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point,

(2) y est continue.

Démonstration. Soit $I =]a, b[$ un intervalle sur lequel f est convexe et $\alpha \in I$. Nous allons prouver que f est continue en α. Nous considérons τ_α le taux d'accroissement définit par (18.308) ; c'est une fonction croissante comme précisé dans l'inégalité des trois pentes 18.78 et de plus $\tau_\alpha(x)$ est bornée supérieurement par $\tau_\alpha(b)$ pour $x < \alpha$ et inférieurement par $\tau_\alpha(a)$ pour $x > \alpha$. Les limites existent donc et sont finies par la proposition 13.66. Autrement dit les limites

$$\lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^+} \tau_\alpha(x) = \inf_{t>\alpha} \tau_\alpha(t) \tag{18.317a}$$

$$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^-} \tau_\alpha(x) = \sup_{t<\alpha} \tau_\alpha(t). \tag{18.317b}$$

existent et sont finies, c'est-à-dire que la fonction f admet une dérivée à gauche et à droite.

Pour tout x nous avons les inégalités

$$\tau_\alpha(a) \leqslant \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leqslant \tau_\alpha(b). \tag{18.318}$$

En posant $k = \max\{\tau_\alpha(a), \tau_\alpha(b)\}$ nous avons

$$\big|f(x)-f(\alpha)\big| \leqslant k|x-\alpha|. \tag{18.319}$$

La fonction est donc Lipschitzienne et par conséquent continue par la proposition 13.256. □

Remarque 18.80.
Les dérivées à gauche et à droite ne sont a priori pas égales. Penser par exemple à une fonction affine par morceaux dont les pentes augmentent à chaque morceau.

18.11.3 Dérivées d'une fonction convexe

Proposition 18.81 ([297, 298, 1]).
Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

(1) est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

(2) est strictement convexe si et seulement si sa dérivée est strictement croissante sur I

Démonstration. Pour la preuve de (1) et (2), nous allons démontrer les énoncés « non stricts » et indiquer ce qu'il faut changer pour obtenir les énoncés « stricts ».

Sens direct Nous supposons que f est convexe. Soient $a < b$ dans I et $x \in]a, b[$. D'après l'inégalité des pentes 18.78,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{18.320}$$

En faisant la limite $x \to a$ nous avons

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{18.321}$$

et la limite $x \to b$ donne

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b). \tag{18.322}$$

Ici les inégalités sont non a priori strictes, même si f est strictement convexe : même avec des inégalités strictes dans (18.320), le passage à la limite rend l'inégalité non stricte. Quoi qu'il en soit nous avons

$$f'(a) \leqslant f'(b). \tag{18.323}$$

Sens direct : strict Nous savons déjà que f' est croissante. Si (18.323) était une égalité, alors f' serait constante sur $]a,b[$ parce qu'en prenant c entre a et b nous aurions $f'(a) \leqslant f'(c) \leqslant f'(b)$ avec $f'(a) = f'(b)$. Donc $f'(a) = f'(c)$. Avoir f' constante sur un intervalle est contraire à la stricte convexité.

Sens réciproque Nous supposons que f' est croissante et nous considérons $a < b$ dans I ainsi que $\lambda \in [0,1]$. Nous posons $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, et nous savons que $a \leqslant x \leqslant b$. Le théorème des accroissements finis 13.129 donne $c_1 \in]a,x[$ et $c_2 \in]x,b[$ tels que

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{18.324}$$

et

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{18.325}$$

Et en plus $c_1 < c_2$. Vu que f' est croissante nous avons $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ et donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{18.326}$$

En remplaçant x par sa valeur en termes de λ, a et b nous avons $x - a = (1-\lambda)(b-a)$ et $b - x = \lambda(b-a)$, et l'inégalité (18.326) nous donne

$$f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \tag{18.327}$$

Sens réciproque : strict Si f' est strictement croissante, nous avons $f'(c_2) < f'(c_2)$ et les inégalité suivantes sont strictes, ce qui donne

$$f(x) < \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \tag{18.328}$$

□

Théorème 18.82 ([297]).
Soit une fonction f de classe C^2.

(1) Est convexe si et seulement si f'' est positive.

(2) Si f'' est strictement positive, elle est strictement convexe.

Démonstration. En deux parties.

Pour (1) La fonction est C^2, donc f'' est positive si et seulement si f' est croissante (proposition 13.124) alors que la proposition 18.81 nous jure que f sera convexe si et seulement si f' est croissante.

Pour (2) Si f'' est strictement positive, f' sera strictement croissante et donc f strictement convexe (proposition 18.81).

□

Remarque 18.83.
Une fonction peut être strictement convexe sans que sa dérivée seconde ne soit toujours strictement positive. En exemple : $x \mapsto x^4$ est strictement convexe alors que sa dérivée seconde s'annule en zéro.

Exemple 18.84
Quelques exemples utilisant le théorème 18.82

(1) La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe parce que sa dérivée seconde est la constante (positive) 2.

(2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ (sa dérivée seconde est $2x^{-3}$).

(3) La fonction exponentielle est strictement convexe par le théorème 18.82.

(4) La fonction ln est concave parce que la dérivée seconde de $-\ln$ est $\frac{1}{x^2}$ qui est strictement positif.

△

Nous en faisons une en détail ; elle sera utile en analyse fonctionnelle, lors de l'étude des espaces L^p. Voir par exemple le théorème de la projection 28.127.

Lemme 18.85.
Soient $p > 1$ et la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \tag{18.329}$$

est strictement convexe.

Démonstration. La proposition 15.242 nous permet de dire que la fonction f est de classe C^∞ et que la dérivée seconde est donnée par

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2}. \tag{18.330}$$

Cela est strictement positif pour tous les x considérée, le théorème 18.82 conclu. □

18.11.4 Graphe d'une fonction convexe

L'idée principale du graphe d'une fonction convexe est qu'il est toujours au dessus du graphe de ses tangentes (lorsqu'elles existent). Lorsqu'elles n'existent pas, le lemme 18.79 donne des coefficients directeurs de droites qui vont rester en dessous du graphe de la fonction.

Proposition 18.86 ([299]).
Une fonction convexe est strictement convexe si et seulement s'il n'existe aucun intervalle de longueur non nulle sur lequel elle coïncide avec une fonction affine.

Démonstration. Si sur l'intervalle (non réduit à un point) $[x,y]$, la fonction convexe f coïncide avec une fonction affine, alors $f(t) = at + b$ et pour $\lambda \in]0,1[$ nous avons

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = a\lambda x + a(1-\lambda)y + b = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{18.331}$$

où nous avons remplacé b par $\lambda b + (1-\lambda)b$. Par conséquent la fonction n'est pas strictement convexe.

Nous supposons maintenant que la fonction convexe f n'est pas strictement convexe sur l'intervalle I. Il existe $x \neq y \in I$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{18.332}$$

Nous posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ et $u \in]x,z[$ pour écrire des inégalités des pentes entre $x < u < z < y$. Plus précisément si nous notons $a \to b$ la pente de a à b, c'est-à-dire $a \to b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors les inégalités des pentes pour $x < u < z$ puis $u < z < y$ donnent

$$x \to z \leqslant u \to z \leqslant z \to y. \tag{18.333}$$

Voyons maintenant qu'en réalité $z \to y = x \to z$. En effet en replaçant

$$f(y) = \frac{f(z) - \lambda f(x)}{1-\lambda} \tag{18.334}$$

et

$$y = \frac{\lambda x}{1-\lambda} \tag{18.335}$$

dans l'expression $z \to y = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ nous obtenons

$$z \to y = \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = x \to z. \tag{18.336}$$

Les inégalités (18.333) sont donc des égalités :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{f(z)-f(u)}{z-u} = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}. \tag{18.337}$$

Nous avons donc montré que le nombre $a = \frac{f(z)-f(u)}{z-u}$ ne dépend pas de u. Nous avons alors

$$f(z) - f(u) = a(z-u) \tag{18.338}$$

ou encore :

$$f(u) = f(z) - a(z-u), \tag{18.339}$$

ce qui signifie que sur $]x, z[$, la fonction f est affine. □

Proposition 18.87.
Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son graphe est au dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration. En deux parties.

Sens direct Soient $x, y \in I$. Nous voulons :

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x). \tag{18.340}$$

Étant donné que nous aurons besoin, dans le quotient différentiel de quelque chose comme $f(x+t) - f(x)$ nous écrivons la définition (18.306) de la convexité en inversant les rôles de x et y et en manipulant un peu :

$$f\big(ty + (1-t)x\big) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x) \tag{18.341a}$$
$$f\big(x + t(y-x)\big) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x) \tag{18.341b}$$
$$f\big(x + t(y-x)\big) = f(x) \leqslant tf(y) - tf(x) \tag{18.341c}$$

Nous divisons par t :

$$\frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} \leqslant f(y) - f(x). \tag{18.342}$$

Le passage à la limite $t \to 0$ donne

$$(y-x)f'(x) \leqslant f(y) - f(x), \tag{18.343}$$

ce qu'il fallait.

Sens inverse Pour tout $x, y \in I$ nous supposons avoir

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x). \tag{18.344}$$

Si nous supposons $x \neq y$ et si nous posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ nous voulons prouver que

$$f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{18.345}$$

Pour cela nous écrivons l'inégalité (18.344) avec les couples (x, z) et (y, z) :

$$f(x) \geqslant f(z) + f'(z)'(x-z) \tag{18.346a}$$
$$f(y) \geqslant f(z) + f'(z)'(y-z) \tag{18.346b}$$

En multipliant la première par λ et la seconde par $(1-\lambda)$ et en sommant,

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geqslant \lambda f(z) + \lambda f'(z)(x-z) + (1-\lambda)f(z) + (1-\lambda)f'(z)(y-z) \tag{18.347a}$$
$$= f(z) + f'(z)\big(\lambda(x-z) + (1-\lambda)(y-z)\big) \tag{18.347b}$$
$$= f(z). \tag{18.347c}$$

□

Proposition 18.88 ([1]).
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in \mathbb{R}$. Il existe une constante $c_a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout x nous ayons

$$f(x) - f(a) \geqslant c_a(x - a). \tag{18.348}$$

Autrement dit, le graphe de la fonction f est toujours au dessus de la droite d'équation

$$y = f(a) + c_a(x - a). \tag{18.349}$$

Démonstration. Les dérivées à gauche et à droite de f données par le lemme 18.79 sont les candidats tout cuits pour être coefficient directeur de la droite que l'on cherche. Nous allons prouver qu'en posant

$$c_a = \inf_{t>a} \tau_a(t), \tag{18.350}$$

la droite $y = f(a) + c_a(x - a)$ répond à la question [36].

Nous devons prouver que le nombre $\Delta_x = f(x) - \big(f(a) + c_a(x - a)\big)$ est positif pour tout x.

Si $x > a$ Nous divisons par $x - a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est positif :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x}{x-a} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c_a && (18.351a)\\ &= \tau_a(x) - \inf_{t>a} \tau_a(t) && (18.351b)\\ &\geqslant 0 && (18.351c)\end{aligned}$$

parce que $t \to \tau_a(t)$ est croissante et que $x > a$.

Si $x < a$ Nous divisons par $x - a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est négatif :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x}{x-a} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c_a && (18.352a)\\ &= \tau_a(x) - \inf_{t>a} \tau_a(t) && (18.352b)\\ &\leqslant 0 && (18.352c)\end{aligned}$$

parce que $t \to \tau_a(t)$ est croissante et que $x < a$.

□

Proposition 18.89 ([1]).
Si g est une fonction convexe, il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n x + b_n). \tag{18.353}$$

Démonstration. Pour $u \in \mathbb{R}$ nous considérons $a(u)$ et $b(u)$ tels que la droite $y(x) = a(u)x + b(u)$ vérifie $y(u) = g(u)$ et $y(x) \leqslant g(x)$ pour tout x. Cela est possible par la proposition 18.88. Il s'agit d'une droite coupant le graphe de g en $x = u$ et restant en dessous. Nous considérons alors (u_n) une suite quelconque dense dans $\mathbb{R}$ (disons les rationnels pour fixer les idées) et nous posons

$$\begin{cases} a_n = a(u_n) & (18.354a)\\ b_n = b(u_n). & (18.354b)\end{cases}$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $a_n x + b_n \leqslant g(x)$ pour tout n et $g(q)$ est le supremum qui est atteint pour le n tel que $u_n = q$. Si maintenant x n'est pas dans $\mathbb{Q}$ il faut travailler plus.

36. En prenant l'autre, $c_a' = \sup_{t<a} \tau_a(t)$, ça fonctionne aussi. En pensant à une fonction affine par morceaux, on remarque qu'en choisissant un nombre entre les deux, nous avons plus facilement une inégalité stricte dans (18.348).

Nous prenons $(\tilde{q}_n)$, une sous-suite de (q_n) convergeant vers x et N suffisamment grand pour que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|\tilde{q}_n - x| \leqslant \epsilon$ et $|g(\tilde{q}_n) - g(x)| \leqslant \epsilon$; cela est possible grâce à la continuité de g (lemme 18.79). Ensuite les sous-suites $(\tilde{a}_n)$ et $(\tilde{b}_n)$ sont celles qui correspondent :

$$\tilde{a}_n\tilde{q}_n + \tilde{b}_n = g(\tilde{q}_n). \tag{18.355}$$

Nous considérons la majoration

$$|\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - g(x)| \leqslant |\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - (\tilde{a}_n\tilde{q}_n + \tilde{b}_n)| + \underbrace{|\tilde{a}_n\tilde{q}_n + \tilde{b}_n - g(\tilde{q}_n)|}_{=0} + \underbrace{|g(\tilde{q}_n) - g(x)|}_{\leqslant\epsilon} \tag{18.356a}$$

$$\leqslant |\tilde{a}_n||x - \tilde{q}_n| + \epsilon \tag{18.356b}$$

$$= \epsilon\big(|\tilde{a}_n| + 1\big). \tag{18.356c}$$

Il nous reste à montrer que $|\tilde{a}_n|$ est borné par un nombre ne dépendant pas de n (pour les $n > N$).

Vu que la droite de coefficient directeur $\tilde{a}_n$ et passant par le point $\big(\tilde{q}_n, g(\tilde{q}_n)\big)$ reste en dessous du graphe de g, nous avons pour tout n et tout $y \in \mathbb{R}$ l'inégalité

$$g(y) \geqslant \tilde{a}_n(y - \tilde{q}_n) + g(\tilde{q}_n) \in \tilde{a}_n B(y - x, \epsilon) + B\big(g(x), \epsilon\big). \tag{18.357}$$

Si $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le haut, nous prenons y tel que $B(y - x, \epsilon)$ soit minoré par un nombre k strictement positif et nous obtenons

$$g(y) \geqslant k\tilde{a}_n + l \tag{18.358}$$

avec k et l indépendants de n. Cela donne $g(y) = \infty$. Si au contraire $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le bas, nous prenons y tel que $B(y - x, \epsilon)$ est majoré par un nombre k strictement négatif. Nous obtenons encore $g(y) = \infty$.

Nous concluons que $|\tilde{a}_n|$ est bornée. □

Lemme 18.90 ([43]).
L'application

$$\begin{aligned}\phi\colon S^{++}(n, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\ A &\mapsto \det(A)\end{aligned} \tag{18.359}$$

est ***log-convave****, c'est-à-dire que l'application* $\ln \circ \phi$ *est concave*[37]*. De façon équivalente, si* $A, B \in S^{++}$ *et si* $\alpha + \beta = 1$*, alors*

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^\beta. \tag{18.360}$$

Ici S^{++} est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives, définition 11.191.

Démonstration. En plusieurs étapes.

Pseudo-réduction Le théorème de pseudo-réduction simultanée, corollaire 11.274, appliqué aux matrices A et B nous donne une matrice inversible Q telle que

$$\begin{cases} B = Q^t D Q & \text{(18.361a)}\\ A = Q^t Q & \text{(18.361b)}\end{cases}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{18.362}$$

$\lambda_i > 0$. Nous avons alors

$$\det(A)^\alpha \det(B)^\beta = \det(Q)^{2\alpha} \det(Q)^{2\beta} \det(D)^\beta = \det(Q)^2 \det(D)^\beta \tag{18.363}$$

37. La définition 16.58 du logarithme ne fonctionne que pour les réels strictement positifs. C'est le cas du déterminant d'une matrice réelle symétrique strictement définie positive.

(parce que $\alpha+\beta=1$) et

$$\begin{aligned}\det(\alpha A+\beta B)&=\det(\alpha Q^tQ+\beta Q^tDQ) &(18.364a)\\ &=\det\big(Q^t(\alpha\mathbb{1}+\beta D)Q\big) &(18.364b)\\ &=\det(Q)^2\det(\alpha\mathbb{1}+\beta D). &(18.364c)\end{aligned}$$

Ré-expression L'inégalité (18.360) qu'il nous faut prouver se réduit donc à

$$\det(\alpha\mathbb{1}+\beta D)\geqslant\det(D)^\beta. \tag{18.365}$$

Vue la forme de D nous avons

$$\det(\alpha\mathbb{1}+\beta D)=\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta\lambda_i) \tag{18.366}$$

et

$$\det(D)^\beta=\big(\prod_{i=1}^n\lambda_i\big)^\beta. \tag{18.367}$$

Il faut donc prouver que

$$\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta\lambda_i)\geqslant\big(\prod_{i=1}^n\lambda_i\big)^\beta. \tag{18.368}$$

Cette dernière égalité de produit sera prouvée en passant au logarithme.

Logarithme Vu que le logarithme est concave par l'exemple 18.84, nous avons pour chaque i que

$$\ln(\alpha+\beta\lambda_i)\geqslant\alpha\ln(1)+\beta\ln(\lambda_i)=\beta\ln(\lambda_i). \tag{18.369}$$

En sommant cela sur i et en utilisant les propriétés de croissance et de multiplicativité du logarithme nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\ln(\alpha+\beta\lambda_i)&\geqslant\beta\sum_i\ln(\lambda_i) &(18.370a)\\ \ln\big(\prod_i(\alpha+\beta\lambda_i)\big)&\geqslant\ln\Big(\big(\prod_i\lambda_i\big)^\beta\Big) &(18.370b)\\ \prod_i(\alpha+\beta\lambda_i)&\geqslant\big(\prod_i\lambda_i\big)^\beta, &(18.370c)\end{aligned}$$

ce qui est bien (18.368).

□

Rappel de notations : $\mathbb{R}^+=[0,\infty[$. Voir la remarque 1.101.

Lemme 18.91 ([1])**.**
Soit une fonction strictement convexe $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$. Soit une fonction $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ vérifiant

(1) $f(0,0)=0$,
(2) $f(tx,ty)=tf(x,y)$ *pour tout t (tant que ça ne déborde pas du domaine)*
(3) $f(1,y)=g(y)$ *pour tout y*
(4) $f(0,y)=f(y,0)$.

Alors f est convexe.

Démonstration. Nous devons prouver que pour toute paire de points A,B sur le graphe de f, le segment $[A,B]$ est au-dessus du graphe de f. Ledit graphe étant d'ailleurs constitué de droites joignant $(0,0,0)$ et les points du graphe de g (situé en $x=1$).

Nous notons $\mathcal{C}$ le graphe de f.

Une corde alignée à O Soient deux point A et B alignés à l'origine O. Un point quelconque de $[A,B]$ (et même de toute la droite) s'écrit

$$\big(tA_x, tA_y, tf(A_x,A_y)\big) = \big(tA_x, tA_y, f(tA_x,tA_y)\big), \tag{18.371}$$

et donc est sur le graphe de f.

Autre corde Nous prouvons que $[A,B]\cap\mathcal{C} = \{A,B\}$.

Si A et B sont dans le plan $x=0$ alors c'est d'accord parce que le graphe de f dans le plan est le même que celui de la fonction strictement convexe g.

Si A et B ne sont pas alignés à O et si ils ne sont pas dans le plan $x=0$ alors le plan AOB coupe le plan $x=1$ en une droite.

Nous supposons l'existence d'un point $C\in\,]A,B[\,\cap\mathcal{C}$.

Nous considérons la droite (OA) qui est contenue dans ce plan et dans $\mathcal{C}$ (au moins la partie positive) et nous notons A' son intersection avec le plan $x=1$. Même chose pour B et C qui donnent B' et C'.

Cela nous donne des points A', B' et C' qui sont alignés dans le graphe de f en $x=1$. Or le graphe de f en $x=1$ est le graphe de la fonction g qui est strictement convexe et qui ne contient donc pas de points alignés.

Nous en concluons que si $A,B\in\mathcal{C}$ alors $]A,B[$ est soit complètement strictement au-dessus de $\mathcal{C}$ soit complètement strictement en-dessous de $\mathcal{C}$.

Nous prouvons à présent que toutes les cordes sont au-dessus de $\mathcal{C}$. Pour cela, soient $A,B\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[$, deux points non alignés à $O=(0,0)$. Nous considérons les points A',B' qui sont les intersections entre les droites (AO) et (BO) et la droite $x=1$ ainsi que le chemin σ qui parcours le segment $[A,A']$ et le chemin γ qui parcours le segment $[B,B']$:

$$\begin{aligned}\sigma(0)&=A,\quad \gamma(0)=B,\\ \sigma(1)&=A',\quad \gamma(1)=B'.\end{aligned}\tag{18.372}$$

Pour tout u, la seule droite passant par O et par $\sigma(u)$ passe également par A, et pas par B. En conséquence de quoi, pour tout $u_1,u_2\in[0,1]$, la droite $\big(\sigma(u_1)\sigma(u_2)\big)$ ne passe pas par $(0,0)$.

Nous considérons à présent non seulement la corde joignant $\big(A,f(A)\big)$ à $\big(B,f(B)\big)$ et la corde joignant $\big(A',f(A')\big)$ à $\big(B',f(B')\big)$ mais également toutes les cordes intermédiaires (si vous aimez les gros mots, vous pouvez parler d'homotopie) :

$$c(u,t) = t\Big(\sigma(t),f\big(\sigma(u)\big)\Big) + (1-t)\Big(\gamma(t),f\big(\gamma(t)\big)\Big)\tag{18.373}$$

Pour chaque $u\in[0,1]$, cela représente une corde entre deux points non alignés à $(0,0,0)$ et donc une corde qui est soit strictement au-dessus de $\mathcal{C}$ soit strictement en-dessous (à par les points correspondant à $t=0$ et $t=1$ qui, eux, sont sur $\mathcal{C}$).

Soit $t_0\in\,]0,1[$. La courbe $c(u,t_0)$ avec $u\in[0,1]$ ne touche jamais $\mathcal{C}$. Or le point $c(1,t_0)$ est au-dessus de $\mathcal{C}$, donc le point $c(0,t_0)$ est également au-dessus de $\mathcal{C}$.

Nous en concluons que toutes les cordes entre $(A,f(A))$ et $(B,f(B))$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$ et non en-dessous de $\mathcal{C}$.

□

18.11.5 Convexité et hessienne

Définition 18.92.
Soit une partie convexe U de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon U\to\mathbb{R}$.

(1) La fonction f est ***convexe*** *si pour tout $x,y\in U$ avec $x\neq y$ et pour tout $\theta\in\,]0,1[$ nous avons*

$$f\big(\theta x+(1-\theta)y\big)\leqslant\theta f(x)+(1-\theta)f(y).\tag{18.374}$$

(2) Elle est ***strictement convexe*** *si nous avons l'inégalité stricte.*

Proposition 18.93 ([294]).
Soit Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et U convexe dans Ω, et une fonction différentiable $f : U \to \mathbb{R}$.

(1) La fonction f est convexe sur U si et seulement si pour tout $x, y \in U$,

$$f(y) \geqslant f(x) + df_x(y - x). \tag{18.375}$$

(2) La fonction f est strictement convexe sur U si et seulement si pour tout $x, y \in U$ avec $x \neq y$,

$$f(y) > f(x) + df_x(y - x). \tag{18.376}$$

Démonstration. Nous avons quatre petites choses à démontrer.

(1) sens direct Soit une fonction convexe f. Nous avons :

$$f\big((1-\theta)x + \theta y\big) \leqslant (1-\theta)f(x) + \theta f(y), \tag{18.377}$$

donc

$$f\big(x + \theta(y-x)\big) - f(x) \leqslant \theta\big(f(y) - f(x)\big) \tag{18.378}$$

Vu que $\theta > 0$ nous pouvons diviser par θ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{f\big(x + \theta(y-x)\big) - f(x)}{\theta} \leqslant f(y) - f(x). \tag{18.379}$$

Nous prenons la limite $\theta \to 0^+$. Cette limite est égale à a limite simple $\theta \to 0$ et vaut (parce que f est différentiable) :

$$\frac{\partial f}{\partial(y-x)}(x) \leqslant f(y) - f(x), \tag{18.380}$$

et aussi

$$df_x(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \tag{18.381}$$

par le lemme 13.195.

(1) sens inverse Pour tout $a \neq b$ dans U nous avons

$$f(b) \geqslant f(a) + df_a(b - a). \tag{18.382}$$

Pour $x \neq y$ dans U et pour $\theta \in]0, 1[$ nous écrivons (18.382) pour les couples $\big(\theta x + (1-\theta)y, y\big)$ et $\big(\theta x + (1-\theta)y, x\big)$. Ça donne :

$$f(y) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) + df_{\theta x+(1-\theta)y}\big(\theta(y - x)\big), \tag{18.383}$$

et

$$f(x) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) + df_{\theta x+(1-\theta)y}\big((1-\theta)(x - y)\big). \tag{18.384}$$

La différentielle est linéaire ; en multipliant la première par $(1-\theta)$ et la seconde par θ et en la somme, les termes en df se simplifient et nous trouvons

$$\theta f(x) + (1-\theta)f(y) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big). \tag{18.385}$$

(2) sens direct Nous avons encore l'équation (18.379), avec une inégalité stricte. Par contre, ça ne va pas être suffisant parce que le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Nous devons donc être plus malins.

Soient $0 < \theta < \omega < 1$. Nous avons $(1-\theta)x + \theta y \in [x, (1-\omega)x + \omega y]$, donc nous pouvons écrire $(1-\theta)x + \theta y$ sous la forme $(1-s)x + s\big((1-\omega)x + \omega y\big)$. Il se fait que c'est bon pour $s = \theta/\omega$ (et aussi que nous avons $\theta/\omega < 1$). Donc nous avons

$$f\big((1-\theta)x + \theta y\big) = f\Big((1 - \frac{\theta}{\omega})x + \frac{\theta}{\omega}\big((1-\omega)x + \omega y\big)\Big) \tag{18.386a}$$

$$< (1 - \frac{\theta}{\omega})f(x) + \frac{\theta}{\omega}f\big((1-\omega)x + \omega y\big). \tag{18.386b}$$

Cela nous permet d'écrire

$$\frac{f\big((1-\theta)x+\theta y\big)-f(x)}{\theta}<\frac{f\big((1-\omega)x+\omega y\big)}{\omega}<f(y)-f(x). \tag{18.387}$$

Le seconde inégalité est le pendant de (18.379). Maintenant en passant à la limite pour θ nous conservons une inégalité stricte par rapport à $f(y)-f(x)$:

$$df_x(y-x)<f(y)-f(x). \tag{18.388}$$

□

Avant de lire la proposition suivante, il faut relire la proposition 13.271 et ce qui s'y rapporte. Lire aussi la remarque 18.83 qui indique qu'il n'y a pas de réciproque dans l'énoncé (2).

Proposition 18.94 ([294])**.**
Soit une fonction $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ deux fois différentiable sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un convexe $U\subset\Omega$.

(1) La fonction f est convexe sur U si et seulement si

$$(d^2f)_x(y-x,y-x)\geqslant 0 \tag{18.389}$$

pour tout $x,y\in U$.

(2) Si pour tout $x\neq y$ dans U nous avons

$$(d^2f)_x(y-x,y-x)>0 \tag{18.390}$$

alors la fonction f est strictement convexe sur U.

Remarque 18.95.
Notons que la condition (18.389) n'est pas équivalente à demander $(d^2f)_x(h,h)\geqslant 0$ pour tout h. En effet nous ne demandons la positivité que dans les directions atteignables comme différence de deux éléments de U. La partie U n'est pas spécialement ouverte ; elle pourrait n'être qu'une droite dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas, demander que f (qui est C^2 sur l'ouvert Ω) soit convexe sur U ne demande que la positivité de $(d^2f)_x$ appliqué à des vecteurs situés sur la droite U.

Démonstration. Il y a trois parties à démontrer.

(1) sens direct Soit une fonction convexe f sur U. Soient aussi $x,y\in U$ et $h=y-x$. Nous utilisons ma version préférée de Taylor [38] : celui de la proposition 13.366 :

$$f(x+th)=f(x)+tdf_x(h)+\frac{t^2}{2}(d_x^2)(h,h)+t^2\|h\|^2\alpha(th) \tag{18.391}$$

avec $\lim_{s\to 0}\alpha(s)=0$. Le fait que f soit convexe donne

$$0\leqslant f(x+th)-f(x)-tdf_x(h), \tag{18.392}$$

et donc

$$0\leqslant\frac{t^2}{2}(d^2f)_x(h,h)+f^2\|h\|^2\alpha(th). \tag{18.393}$$

En multipliant par 2 et en divisant par t^2,

$$0\leqslant(d^2f)_x(h,h)+2\|h\|^2\alpha(th). \tag{18.394}$$

En prenant $t\to 0$ nous avons bien $(d^2f)_x(y-x,y-x)\geqslant 0$.

38. Si vous présentez ceci au jury d'un concours, vous devriez être capable de raconter ce que signifie d^2f, et pourquoi nous l'utilisons comme une 2-forme.

(1) sens inverse Soient $x, y \in U$. Nous écrivons Taylor en version de la proposition 13.367 :

$$f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \frac{1}{2}(d^2f)_z(y-x, y-x) \tag{18.395}$$

pour un certain $z \in]x, y[$. En vertu de ce qui a été dit dans la remarque 18.95 nous ne pouvons pas évoquer l'hypothèse (18.389) pour conclure que $(d^2f)_z(y-x, y-x) \geqslant 0$. Il y a deux manières de nous sortir du problème :

— Trouver $s \in U$ tel que $y - x = s - z$.

— Trouver un multiple de $y - x$ qui soit de la forme $y - x$.

La première approche ne fonctionne pas parce que $s = y - x + z$ n'est pas garanti d'être dans U ; par exemple avec $x = 1$, $z = 2$, $y = 3$ et $U = [0, 3]$. Dans ce cas $s = 4 \notin U$.

Heureusement nous avons $z = \theta x + (1-\theta)y$, donc $z - x = (1-\theta)(y-x)$. Dans ce cas la bilinéarité de $(d^2f)_z$ donne [39]

$$f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\theta)^2}(d^2f)_z(z-x, z-x)}_{\geqslant 0}. \tag{18.396}$$

Nous en déduisons que f est convexe par la proposition 18.93(1).

(2) Le raisonnement que nous venons de faire pour le sens inverse de (1) tient encore, et nous avons

$$f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\theta)^2}(d^2f)_z(z-x, z-x)}_{>0} \tag{18.397}$$

d'où nous déduisons la stricte convexité de f par la proposition 18.93(2).

□

Corollaire 18.96.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction deux fois différentiable f sur Ω.

(1) La fonction f est convexe si et seulement si pour tout x, la matrice hessienne d^2f_x est semi-définie positive.

(2) Si pour tout x de Ω, la matrice hessienne d^2f_x est strictement définie positive, alors f est strictement convexe.

Démonstration. Nous pouvons voir ce résultat comme une conséquence directe de la proposition 18.94 en posant $U = \Omega$. Nous allons cependant en donner une démonstration directe.

Soit $a \in \Omega$ et posons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(a) - (df)_a(x-a). \end{aligned} \tag{18.398}$$

Nous allons calculer des différentielles de f, et une chose importante à comprendre est que la différentielle de la fonction $x \mapsto df_a(x-a)$ ne fait pas intervenir la différentielle seconde de f ; c'est la différentielle de $a \mapsto df_a(x)$ qui demanderait la différentielle seconde de f. Ici la point a étant donné, df_a est une application linéaire sans histoires. En particulier, $df_a(x-a) = df_a(x) - df_a(a)$.

La fonction g vérifie :

(1) $g(a) = 0$,

(2) $dg_x = df_x - df_a$, parce que la différentielle de $x \mapsto df_a(x)$ est $x \mapsto df_a(x)$ en vertu du lemme 12.137.

(3) $dg_a = 0$. Le point a est un point critique de g.

39. Si vous avez bien suivi, la bilinéarité est contenue dans la proposition 13.271.

(4) $d^2g_x = d^2f_x$ parce que la différentielle de $x \mapsto df_a$ est nulle.

Ceci étant dit, nous pouvons commencer avec la preuve.

(1) sens direct Nous supposons que f est convexe. Alors $g(x) \geqslant 0$ pour tout x par la caractérisation 18.93(1). Cela signifie que $x = 0$ est un minimum global de g. Par conséquent la proposition 18.70(3) nous dit que la Hessienne d^2f_a est semi-définie positive.

(1) sens inverse Nous sommes dans le cas de la proposition 18.70(1). Le point $x = a$ est un minimum local de g, ce qui signifie que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de Ω. Encore une fois la caractérisation 18.93(1) nous permet de conclure.

(2) La fonction g vérifie les conditions de 18.70(2), donc $x = 0$ est un minimum local strict de g. La caractérisation 18.93(2) nous fait conclure que f est strictement convexe.

□

18.97.
Nous rappelons que, avec $p > 1$, la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \tag{18.399}$$

est strictement croissante. La proposition 13.332 est formelle sur ce point.

Lemme 18.98.
Soient un réel a, et $p > 1$. L'équation

$$|x|^p = ax \tag{18.400}$$

possède au plus deux solutions réelles.

Démonstration. En deux parties suivant le signe de a.

Si $a = 0$ Alors l'équation est $|x|^p = 0$, et l'unique solution est $x = 0$

Si $a > 0$ Si $x < 0$ alors $ax < 0$ et $|x|^p - ax > |x|^p > 0$. Cela prouve que notre équation n'a pas de solutions $x < 0$ lorsque $a > 0$.

Cherchons donc des solutions avec $x \geqslant 0$. D'abord $|x| = x$ et ensuite, en posant $p = 1 + \delta$ ($\delta > 0$), nous avons la factorisation

$$x^p - ax = x(x^\delta - a) = 0. \tag{18.401}$$

Poser $x = 0$ est clairement une solution. Si $x \neq 0$, nous avons le raisonnement suivant. Les réels formant un corps, c'est un anneau intègre qui vérifie alors la règle du produit nul [40]. Cela pour dire que si $x \neq 0$, alors

$$x^\delta = a. \tag{18.402}$$

La proposition 13.336 nous dit que cela a une unique solution dans les réels positifs.

Si $a < 0$ Ce cas se traite de façons similaire [41].

□

Proposition 18.99.
Soit $1 < p < \infty$. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|^p \end{aligned} \tag{18.403}$$

est strictement convexe.

40. Voir le lemme 1.64 et la définition 1.54.
41. Vérifiez par vous-même et écrivez-moi si il y a un problème (personnellement, je n'ai pas vérifié.).

Démonstration. La preuve va se diviser en deux parties. D'abord nous allons utiliser la matrice Hessienne pour démontrer le résultat sur l'ouvert $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, et ensuite nous allons un peu bricoler pour ajouter 0 au domaine de stricte convexité [42].

La Hessienne Nous notons

$$f_p(x) = \|x\|^p = \big(\sum_i x_i^2\big)^{p/2}, \tag{18.404}$$

et nous dérivons :

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) = \frac{p}{2}2x_i\big(\sum_i x_i^2\big)^{(p-2)/2} = px_i f_{p-2}(x). \tag{18.405}$$

Cela n'est déjà pas bien défini en $x = 0$ lorsque $p < 2$, mais qu'importe ? Nous dérivons encore en utilisant entre autres la formule (18.405) elle-même avec $p \to p-2$:

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_i}(x) = p_{\delta_{ij}}\|x\|^{p-2} + p(p-2)x_i x_j\|p-4\|. \tag{18.406}$$

Nous avons donc la matrice Hessienne

$$H_{ij}(x) = p\delta_{ij}\|x\|^{p-2} + p(p-2)x_i x_j\|x\|^{p-4}. \tag{18.407}$$

Pour prouver que cette matrice est strictement définie positive, nous avons le choix entre la proposition 11.194(1) ou le lemme 11.196(1). Nous utilisons le second. Nous avons [43] :

$$\begin{aligned}
y \cdot H(x)y &= \sum_{kl} y_k H(x)_{kl} y_l && \text{(18.408a)}\\
&= p\sum_l y_l^2\|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4}\sum_{kl} x_k y_k x_l y_l && \text{(18.408b)}\\
&= p\|y\|^2\|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4}(x\cdot y)^2 && \text{(18.408c)}\\
&= p\|x\|^{p-4}\big(\|y\|^2\|x\|^2 + (p-2)(x\cdot y)^2\big) && \text{(18.408d)}\\
&> p\|x\|^{p-4}\big(\|y\|^2\|x\|^2 - (x\cdot y)^2\big) && \text{(18.408e)}\\
&\geqslant 0. && \text{(18.408f)}
\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour 18.408e. Vu que $p > 1$ nous avons $p - 2 > -1$. Là, l'inégalité est stricte et c'est important.

— Pour 18.408f. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du théorème 11.10.

Voila. La matrice Hessienne est strictement définie positive par le lemme 11.196(1) sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Le corollaire 18.96(1) nous indique que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$f_p\big(\theta x + (1-\theta)y\big) < \theta f_p(x) + (1-\theta)f_p(y) \tag{18.409}$$

pourvu que $\theta x + (1-\theta)y \neq 0$ pour tout θ.

La suite Nous devons prouver que l'inéquation (18.409) tient également lorsque $\theta x + (1-\theta)y = 0$ pour une certaine valeur $\theta = \theta_0 \in]0,1[$.

Les cordes passant par zéro Pour ce faire, nous allons montrer que le segment de droite joignant $\big(a, f_p(a)\big)$ à $\big(b, f_p(b)\big)$ est toujours au-dessus de la courbe $\big(x, f_p(x)\big)$. Nous commençons par $b = 0$. Vu que $p > 1$ et que $\theta \in]0,1[$ nous avons

$$\|\theta a\|^p = |\theta|^p\|a\|^p < \theta\|a\|^p = \theta f_p(a). \tag{18.410}$$

42. Si quelqu'un sait comment éviter ce bricolage en deux parties, je suis preneur.
43. Si vous ne savez pas où placer les indices, voyez (11.421).

Les cordes passant au-dessus de zéro Dans le cas $b \neq 0$ nous considérons

$$\begin{aligned} l_1 \colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto l_1(x) \end{aligned} \tag{18.411}$$

tel que $\big(x, l_1(x)\big)$ soit (le segment) la droite joignant $\big(a, \|a\|^p\big)$ à $\big(b, \|b\|^p\big)$.

Nous considérons aussi, pour $x \in [0,a]$ la fonction l_2 telle que $\big(x, l_2(x)\big)$ soit la droite joignant $(0,0)$ à $\big(a, \|a\|^p\big)$. Nous avons déjà vu que pour $x \in]0,a[$ nous avons $l_1(x) > \|x\|^p$.

Nous avons $l_1(a) = l_2(a) = \|a\|^p$. Donc $l_2(x) - l_1(x)$ ne change pas de signe sur $[0,a]$. Mais comme $l_1(0) > 0 = l_2(0)$ nous avons

$$l_2(x) > l_1(x) \tag{18.412}$$

pour tout $x \in [0,a]$.

Au final, $l_2(x) > l_1(x) > f_p(x)$.

Pour la partie $[b,0]$ nous faisons de même en considérant l_3 de telle sorte que $\big(x, l_3(x)\big)$ soit le segment joignant $(0,0)$ à $\big(b, \|b\|^p\big)$.

□

18.11.6 Quelques inégalités

18.11.6.1 Inégalité de Jensen

Proposition 18.100 (Inégalité de Jensen)**.**
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et des réels $x_1, \dots, x_n$. Soient des nombres positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ formant une combinaison convexe[44]*. Alors*

$$f\big(\sum_i \lambda_i x_i\big) \leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i). \tag{18.413}$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n, en sachant que $n = 2$ est la définition de la convexité de f. Vu que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_n}, \tag{18.414}$$

nous avons

$$f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) f\big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_n}\big). \tag{18.415}$$

La chose à remarquer est que les nombres $\frac{\lambda_k}{1-\lambda_n}$ avec k allant de 1 à $n-1$ forment eux-mêmes une combinaison convexe. L'hypothèse de récurrence peut donc s'appliquer au second terme du membre de droite :

$$f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} f(x_k) = \lambda_n f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k). \tag{18.416}$$

□

44. Définition 10.28.

18.11.6.2 Inégalité arithmético-géométrique

La proposition suivante dit que la moyenne arithmétique de nombres strictement positifs est supérieure ou égale à la moyenne géométrique.

Proposition 18.101 (Inégalité arithmético-géométrique[300]).
Soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres strictement positifs. Nous posons

$$m_a = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{18.417}$$

et

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \tag{18.418}$$

Alors $m_g \leqslant m_a$ et $m_g = m_a$ si et seulement si $x_i = x_j$ pour tout i, j.

Démonstration. Par hypothèse les nombres m_a et m_g sont tout deux strictement positifs, de telle sorte qu'il est équivalent de prouver $\ln(m_g) \leqslant \ln(m_a)$ ou encore

$$\frac{1}{n}\big(\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)\big) \leqslant \ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right). \tag{18.419}$$

Cela n'est rien d'autre que l'inégalité de Jensen de la proposition 18.100 appliquée à la fonction ln et aux coefficients $\lambda_i = \frac{1}{n}$. □

18.11.6.3 Inégalité de Kantorovitch

Proposition 18.102 (Inégalité de Kantorovitch[301]).
Soit A une matrice symétrique strictement définie positive dont les plus grandes et plus petites valeurs propres sont λ_{min} et λ_{max}. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} + \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^2 \|x^4\|. \tag{18.420}$$

Démonstration. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $\|x\| = 1$. Nous diagonalisons [45] la matrice A par la matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$: $A = PDP^{-1}$ et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ où D est une matrice diagonale formée des valeurs propres de A.

Nous posons $\alpha = \sqrt{\lambda_{min}\lambda_{max}}$ et nous regardons la matrice

$$\frac{1}{\alpha}A + \alpha A^{-1} \tag{18.421}$$

dont les valeurs propres sont

$$\frac{\lambda_i}{\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda_i} \tag{18.422}$$

parce que les vecteurs propres de A et de A^{-1} sont les mêmes (ce sont les valeurs de la diagonale de D). Nous allons quelque peu étudier la fonction

$$\theta(x) = \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}. \tag{18.423}$$

Elle est convexe en tant que somme de deux fonctions convexes. Elle a son minimum en $x = \alpha$ et ce minimum vaut $\theta(\alpha) = 2$. De plus

$$\theta(\lambda_{max}) = \theta(\lambda_{min}) = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{18.424}$$

45. Théorème spectral 11.189.

Une fonction convexe passant deux fois par la même valeur doit forcément être plus petite que cette valeur entre les deux[46] : pour tout $x \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$,

$$\theta(x) \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{18.425}$$

Nous sommes maintenant en mesure de nous lancer dans l'inégalité de Kantorovitch.

$$\sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\langle Ax, x\rangle}{\alpha} + \alpha\langle A^{-1}x, x\rangle\right) \tag{18.426a}$$

$$= \frac{1}{2}\langle\left(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right)x, x\rangle \tag{18.426b}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\|\left(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right)x\right\|\|x\| \tag{18.426c}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right\| \tag{18.426d}$$

Justifications :

— 18.426a par l'inégalité arithmético-géométrique, proposition 18.101. Nous avons aussi inséré $\alpha\frac{1}{\alpha}$ dans le produit sous la racine.

— 18.426c par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème 11.10.

— 18.426d par la définition de la norme opérateur de la proposition 12.10

La norme opérateur est la plus grande des valeurs propres. Mais les valeurs propres de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ sont de la forme $\theta(\lambda_i)$, et tous les λ_i sont entre λ_{min} et λ_{max}. Donc la plus grande valeur propre de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ est $\theta(x)$ pour un certain $x \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$. Par conséquent

$$\sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{18.427}$$

□

18.11.6.4 Inégalité de Hölder

Si vous cherchiez l'inégalité de Hölder dans L^p, c'est la proposition 28.33. Les normes ℓ^p sont définies dans 9.46.

Lemme 18.103 ([302])**.**
Soient $x, y > 0$ ainsi que $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$xy \leqslant \alpha x^{1/\alpha} + \beta e^{1/\beta}. \tag{18.428}$$

Nous avons

$$xy = \alpha x^{1/\alpha} + \beta e^{1/\beta} \tag{18.429}$$

si et seulement si $x^{1/\alpha} = y^{1/\beta}$.

Démonstration. Nous utilisons le logarithme[47] et ses propriétés (surtout la proposition 16.6016.179). D'abord

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\alpha\frac{\ln(x)}{\alpha} + \frac{\ln(y)}{\beta}} \tag{18.430}$$

Vu que l'exponentielle est strictement convexe (exemple 18.84(3)) et vu que $\alpha + \beta = 1$, nous avons

$$xye^{\alpha\frac{\ln(x)}{\alpha} + \frac{\ln(y)}{\beta}} \leqslant \alpha e^{\ln(x)/\alpha} + \beta e^{\ln(y)/\beta} = \alpha x^{1/\alpha} + \beta y^{1/\beta}. \tag{18.431}$$

46. Je ne suis pas certain que cette phrase soit claire, non ?
47. Définition 16.58

Vu que α et β ne sont pas nuls, l'inégalité (18.431) est une égalité si et seulement si

$$\frac{\ln(x)}{\alpha} = \frac{\ln(y)}{\beta}. \tag{18.432}$$

Cela signifie $\ln(x^{1/\alpha}) = \ln(y^{1/\beta})$, qui implique $x^{1/\alpha} = y^{1/\beta}$ parce que le logarithme est une bijection. □

Corollaire 18.104.
Si $p, q > 0$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et si $p > 1$ alors nous avons

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \tag{18.433}$$

pour tout $x, y \geqslant 0$, avec une égalité si et seulement si $x^p = y^q$.

Démonstration. Il suffit de poser $\alpha = 1/p$ et $\beta = 1/q$ et appliquer le lemme 18.103. □

Théorème 18.105 (Inégalité de Hölder[302])**.**
Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$|x \cdot y| = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|x\|_q. \tag{18.434}$$

Il y a égalité si et seulement si $x_i y_i$ est de signe constant[48] *et les vecteurs $\sum_i |x_i|^p e_i$ et $\sum_i |y_i|^q e_i$ sont proportionnels.*

Démonstration. En plusieurs parties.

Le cas des vecteurs nuls Si x ou y est nul, les inégalités sont évidentes. Donc nous supposons que non.

Première inégalité En ce qui concerne la première inégalité,

$$|x \cdot y| = |\sum_i x_i y_i| \leqslant \sum_i |x_i||y_i| \leqslant \sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q \right) \tag{18.435}$$

où nous avons utilisé le corollaire 18.104 dans chaque terme de la somme en tenant compte du fait que $|x_i|$ et $|y_i|$ sont positifs.

Seconde inégalité Pour la seconde inégalité, nous commençons avec $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Utilisant encore le corollaire 18.104 pour chaque terme, nous avons

$$\sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \underbrace{\sum_i |x_i|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_i |y_i|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q. \tag{18.436}$$

Si maintenant x et y sont arbitraires non nuls dans $\mathbb{R}^n$, nous posons $x' = x/\|x\|_p$ et $y' = y/\|y\|_q$; nous savons déjà que

$$\sum_i |x'_i y'_i| \leqslant 1. \tag{18.437}$$

En remplaçant x'_i par $x_i/\|x\|_p$ et y'_i par $y_i/\|y\|_q$, l'inégalité (18.437) devient

$$\sum_i \frac{|x_i|y_i}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant 1, \tag{18.438}$$

ce qui signifie

$$\sum_i |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q. \tag{18.439}$$

48. Je n'utilie pas cette hypothèse de signe constant. Il doit y avoir une subtilité qui m'a échappée. Soyez prudente en lisant et écrivez-moi si vous trouvez une erreur.

Cas d'égalité, dans un sens Nous notons

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sum_i |x_i y_i| = \|x\|_p \|y\|_q\}. \tag{18.440}$$

Multiplications D'abord si $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors $(\mu x, \lambda y) \in \mathcal{D}$ pour tout $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\sum_i |(\mu x)_i (\lambda y)_i| = |\mu||\lambda| \sum_i |x_i y_i| = |\mu||\lambda| \|x\|_p \|y\|_q = \|\mu x\|_p \|\lambda y\|_q. \tag{18.441}$$

Avec normes égales à 1 Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Nous avons en particulier,

$$1 = \sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |y_i|^q \tag{18.442}$$

grâce à l'inégalité (18.433) appliquée à chaque terme. Vu que $\|x\|_p = 1$, nous avons $\sum_i |x_i|^p = 1$, de telle sorte que le membre de droite de (18.442) se réduise à $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nous pouvons donc écrire

$$1 = \sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |y_i|^q = 1. \tag{18.443}$$

L'inégalité est donc une égalité :

$$\sum_i |x_i y_i| = \sum_i \left(\frac{1}{p} |x_i|^p + \frac{1}{q} |y_i|^q \right). \tag{18.444}$$

Mais chaque terme à gauche est en inégalité avec le terme correspondant à droite :

$$|x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} |x_i|^p + \frac{1}{q} |y_i|^q. \tag{18.445}$$

Pour que le tout soit une égalité, il faut que chaque inégalité (18.445) soit une égalité. Pour chaque i, nous avons

$$|x_i y_i| = \frac{1}{p} |x_i|^p + \frac{1}{q} |y_i|^q. \tag{18.446}$$

La condition d'égalité du corollaire 18.104 nous dit alors que $|x_i|^p = |y_i|^q$.

Avec normes arbitraires Soit donc $(x, y) \in \mathcal{D}$. Nous savons qu'en posant $x' = x/\|x\|_p$ et $y' = y/\|y\|_q$ nous avons $(x', y') \in \mathcal{D}$ et donc

$$\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^p = \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \right)^q. \tag{18.447}$$

Cela donne tout de suite

$$|x_i|^p = \frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q} |y_i|^q, \tag{18.448}$$

ce qui est bien ce que nous voulions : le vecteur $\sum_i |x_i|^p e_i$ est proportionnel au vecteur $\sum_i |y_i|^q e_i$.

Cas d'égalité dans l'autre sens[1] Nous supposons que les vecteurs $\sum_i |x_i|^p e_i$ et $\sum_i |y_i|^q e_i$ sont proportionnels. Nous nommons c^q le facteur de proportionnalité, c'est à dire que nous posons

$$|x_i|^p = c^q |y_i|^q. \tag{18.449}$$

Dans ce cas, pour chaque i, les nombres $c|y_i|$ et $|x_i|$ sont dans le cas d'égalité du corollaire 18.104. Nous avons alors

$$\sum_i |x_i y_i| = \frac{1}{c}\sum_i c|x_i||y_i| \tag{18.450a}$$
$$= \frac{1}{c}\left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}\big(c|y_i|\big)^q\right) \tag{18.450b}$$
$$= \frac{1}{c}\sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|x_i|^p\right) \tag{18.450c}$$
$$= \frac{1}{c}\sum_i |x_i|^p. \tag{18.450d}$$

Et c'est maintenant que nous subdivisons.

Si $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ Dans ce cas, l'égalité (18.450) se réduisent à

$$\sum_i |x_i y_i| = \frac{1}{c}. \tag{18.451}$$

Mais l'hypothèse sur les normes donne

$$1 = \sum_i |x_i|^p = \sum_i c^q |y_i|^q = c^q \sum_i |y_i|^q = c^q. \tag{18.452}$$

Donc $c = 1$ et nous avons bien

$$\sum_i |x_i y_i| = \frac{1}{c} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q. \tag{18.453}$$

Pour des normes arbitraires Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que $|x_i|^p = c^q |y_i|^q$. Nous posons comme d'habitude $x' = x/\|x\|_p$ et $y' = y/\|y\|_q$. En utilisant le cas « de norme 1 » nous avons

$$1 = \sum_i |x'_i y'_i| = \frac{1}{\|x\|_p \|y_q\|} \sum_i |x_i y_i|. \tag{18.454}$$

Donc $\sum_i |x_i y_i| = \|x\|_p \|y\|_q$ comme nous le voulions.

□

La majoration de la proposition suivante sera utile pour les inégalités de Clarkson du lemme 28.123. Pour d'autres inégalités (plus simples) autour des normes $\|.\|_p$, voir le thème 7.

Proposition 18.106 ([302])**.**
Si $x \in \mathbb{R}^n$ et si $0 < q < p$, alors

$$\|x\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|x\|_p. \tag{18.455}$$

En particulier, si $0 < q < p$, alors

$$\|x\|_p \leqslant \|x\|_p. \tag{18.456}$$

Démonstration. Nous posons $P = p/q$ et $Q = P/(P-1)$. Les nombres P et Q sont des exposants conjugués, parce que

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1. \tag{18.457}$$

Nous posons $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ainsi que

$$v = \sum_i |x_i|^q e_i, \tag{18.458}$$

et nous écrivons l'inégalité de Hölder de la proposition 18.105 sur les vecteurs v et y :

$$\sum_i |v_i y_i| \leqslant \|v\|_P \|y\|_Q. \tag{18.459}$$

En déballant,

$$\sum_i |x_i|^q \leqslant \left(\sum_i (|x_i|^q)^P\right)^{1/P} \big(\underbrace{\sum_i 1^Q}_{=n}\big)^{1/Q} \tag{18.460a}$$

$$= \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{q/p} n^{1/Q} \tag{18.460b}$$

$$= n^{1-q/p}\|x\|_p^q. \tag{18.460c}$$

Cela donne

$$\|x\|_q^q \leqslant n^{1-q/p}\|x\|_p^q. \tag{18.461}$$

En prenant la puissance $1/q$ des deux côtés,

$$\|x\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|x\|_p \tag{18.462}$$

□

18.12 Trucs et astuces de calcul d'intégrales

Afin d'alléger le texte de calculs parfois un peu longs, nous regroupons ici les intégrales à une variable que nous devons utiliser dans les autres parties du cours.

18.12.1 Quelques intégrales « usuelles »

(1) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big)} \tag{18.463}$$

se fait par partie en posant

$$\begin{aligned} u &= \ln(x), \quad dv = x\,dx \\ du &= \frac{1}{x}\,dx, \quad v = \frac{x^2}{2}, \end{aligned} \tag{18.464}$$

et ensuite

$$I = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big). \tag{18.465}$$

(2) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(x^2)dx = x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}.} \tag{18.466}$$

En utilisant le fait que $\ln(u^2) = 2\ln(u)$, nous retombons sur une intégrale du type (1) :

$$I = x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}. \tag{18.467}$$

(3) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)(x^2+1) - x^2 - \frac{1}{2}} \tag{18.468}$$

se traite en posant $v = 1 + x^2$ de telle sorte à avoir $dx = \frac{dv}{2x}$ et donc

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)(x^2+1) - x^2 - \frac{1}{2}. \tag{18.469}$$

(4) L'intégrale

$$I = \int \cos(\theta)\sin(\theta)\ln\left(1+\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)d\theta \tag{18.470}$$

demande le changement de variable $u = \cos(\theta)$, $d\theta = -\frac{du}{\sin(\theta)}$. Nous tombons sur l'intégrale

$$I = -\int u\ln\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right) = -\int u\ln(1+u^2) + \int u\ln(u^2), \tag{18.471}$$

qui sont deux intégrales déjà faites. Nous trouvons

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2(\theta)-1}{\sin^2(\theta)-2}\right)\sin^2(\theta) - \ln\big(\sin^2(\theta)-2\big) + \frac{1}{2}\ln\big(\sin^2(\theta)-1\big) \tag{18.472}$$

(5) L'intégrale

$$\boxed{\int \frac{r^3}{1+r^2}dr = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(r^2+1).} \tag{18.473}$$

commence par faire la division euclidienne de r^3 par r^2+1 ; ce que nous trouvons est $r^3 = (r^2+1)r - r$. Il reste à intégrer

$$\int \frac{r^3}{1+r^2}dr = \int r\,dr - \int \frac{r}{1+r^2}dr. \tag{18.474}$$

La fonction dans la seconde intégrale est $\frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}$ où $f(r) = 1+r^2$, et donc $\int \frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2}\ln(1+r^2)$. Au final,

$$I = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}\ln(r^2+1). \tag{18.475}$$

(6) L'intégrale

$$\boxed{I = \int \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \frac{\sin^2(\theta)}{2}} \tag{18.476}$$

se traite par le changement de variable $u = \sin(\theta)$, $du = \cos(\theta)d\theta$, et donc

$$\int \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2(\theta)}{2}. \tag{18.477}$$

(7) L'intégrale

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x)} \tag{18.478}$$

s'obtient en effectuant le changement de variable $u = \sinh(\xi)$.

(8) L'intégrale

$$\boxed{\int \cos^2(x)\sin^2(x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}} \tag{18.479}$$

s'obtient à coups de formules de trigonométrie. D'abord, $\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin^2(2t)$ fait en sorte que la fonction à intégrer devient

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(x). \tag{18.480}$$

Ensuite nous utilisons le fait que $\sin^2(t) = (1-\cos(2t))/2$ pour transformer la formule à intégrer en

$$f(x) = \frac{1-\cos(4x)}{8}. \tag{18.481}$$

Cela s'intègre facilement en posant $u = 4x$, et le résultat est

$$\int f(x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}. \tag{18.482}$$

(9) La fonction

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{18.483}$$

est le **sinus cardinal** de x. Nous allons montrer que

$$\boxed{\int_0^\infty \big|\operatorname{sinc}(x)\big|dx = \infty}. \tag{18.484}$$

D'abord nous avons

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\big|\sin(t)\big|}{t}dt \geqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\big|\sin(t)\big|}{n\pi}dt, \tag{18.485}$$

mais par périodicité,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \big|\sin(t)\big|dt = \int_0^\pi \sin(t)dt = 2. \tag{18.486}$$

Par conséquent

$$\int_0^{n\pi} \big|\operatorname{sinc}(t)\big|dt \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{18.487}$$

ce qui diverge lorsque $n \to \infty$.

(10) Les intégrales, pour $\epsilon > 0$,

$$\boxed{\int_0^\infty \cos(kx)e^{-\epsilon x}dx = \frac{\epsilon}{k^2+\epsilon^2}} \tag{18.488}$$

et

$$\boxed{\int_0^\infty \sin(kx)e^{-\epsilon x}dx = \frac{k}{k^2+\epsilon^2}} \tag{18.489}$$

se calculent deux fois par partie. Nous posons

$$I = \int_0^\infty \cos(kx)e^{-\epsilon x}dx \tag{18.490a}$$

$$J = \int_0^\infty \sin(kx)e^{-\epsilon x}dx. \tag{18.490b}$$

L'intégrale I s'effectue par partie en posant $u = \cos(kx)$ et $v' = e^{-\epsilon x}$. Un peu de calcul montre que

$$I = \frac{1}{\epsilon} - \frac{k}{\epsilon}J. \tag{18.491}$$

Par ailleurs l'intégrale J se fait également par partie pour obtenir

$$J = \frac{k}{\epsilon}I. \tag{18.492}$$

En résolvant pour I et J les deux équations déduites, nous trouvons

$$I = \frac{\epsilon}{k^2+\epsilon^2} \tag{18.493a}$$

$$J = \frac{k}{k^2+\epsilon^2}. \tag{18.493b}$$

18.12.2 Reformer un carré au dénominateur

Lorsqu'on a un second degré au dénominateur, le bon plan est de reformer un carré parfait. Par exemple :

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1. \tag{18.494}$$

Ensuite, le changement de variable $t = x + 1$ est pratique parce que cela donne $t^2 + 1$ au dénominateur.

Cherchons

$$I = \int \frac{1-x}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1-x}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1-(t-1)}{t^2+1} \tag{18.495}$$

où nous avons fait le changement de variable $t = x+1$, $dt = dx$. L'intégrale se coupe maintenant en deux parties :

$$I = \int \frac{-t}{t^2+1} + \int \frac{2}{t^2+1}. \tag{18.496}$$

La seconde est dans les formulaires et vaut

$$2\arctan(t) = 2\arctan(x+1), \tag{18.497}$$

tandis que la première est presque de la forme f'/f :

$$\int \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^1+1) = \frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2). \tag{18.498}$$

18.12.3 Décomposition en fractions simples

La décomposition en fractions simples décrite en 20.1.6 permet d'intégrer des fractions rationnelles. Elle peut parfois être évitée par la méthode de Rothstein-Trager que nous expliquerons dans 21.14.4.

18.13 Algorithme du gradient à pas optimal

Une idée pour trouver un minimum à une fonction est de prendre un point p au hasard, calculer le gradient $\nabla f(p)$ et suivre la direction $-\nabla f(p)$ tant que ça descend. Une fois qu'on est « dans le creux », recalculer le gradient et continuer ainsi.

Nous allons détailler cet algorithme dans un cas très particulier d'une matrice A symétrique et strictement définie positive.

— Dans la proposition 18.108 nous montrons que résoudre le système linéaire $Ax = -b$ est équivalent à minimiser une certaine fonction.

— La proposition 18.109 donnera une méthode itérative pour trouver ce minimum.

Définition 18.107.
*Si X est un espace vectoriel normé et $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nous disons que f est **coercive** sur le domaine non borné P de X si pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$\{x \in P \text{ tel que } f(x) \leqslant M\} \tag{18.499}$$

est borné.

En langage imagé la coercivité de f s'exprime par la limite

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in P}} f(x) = +\infty. \tag{18.500}$$

Nous rappelons que $S^{++}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives définies en 11.192.

Proposition 18.108.
Soit $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle. \end{aligned} \tag{18.501}$$

Alors :

(1) Il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\bar{x} = -b$.

(2) Il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^n$ minimisant f.

(3) Ils sont égaux : $\bar{x} = x^*$.

Démonstration. Une matrice symétrique strictement définie positive est inversible, entre autres parce qu'elle se diagonalise par des matrices orthogonales (qui sont inversibles) et que la matrice diagonalisée est de déterminant non nul : tous les éléments diagonaux sont strictement positifs. Voir le théorème spectral symétrique 11.189.

D'où l'unicité du $\bar{x}$ résolvant le système $Ax = -b$ pour n'importe quel b.

f est strictement convexe La fonction f s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{kl} A_{kl}x_l x_k + \sum_k b_k x_k. \tag{18.502}$$

Elle est de classe C^2 sans problèmes, et il est vite vu que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij}$, c'est-à-dire que A est la matrice hessienne de f. Cette matrice étant strictement définie positive par hypothèse, la fonction f est strictement convexe par le corollaire 18.96(2).

f est coercive Montrons à présent que f est coercive. Nous avons :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle\right| && \text{(18.503a)}\\ &\geqslant \frac{1}{2}|\langle Ax, x\rangle| - |\langle b, x\rangle| && \text{(18.503b)}\\ &\geqslant \frac{1}{2}\lambda_{max}\|x\|^2 - \|b\|\|x\| && \text{(18.503c)} \end{aligned}$$

Pour la dernière ligne nous avons nommé λ_{max} la plus grande valeur propre de A et utilisé Cauchy-Schwarz pour le second terme. Nous avons donc bien $|f(x)| \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ et la fonction f est coercive.

Soit M une valeur atteinte par f. L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) \leqslant M\} \tag{18.504}$$

est fermé (parce que f est continue) et borné parce que f est coercive. Cela est donc compact [49] et f atteint un minimum qui sera forcément dedans. Cela est pour l'existence d'un minimum.

Pour l'unicité du minimum nous invoquons la convexité : si $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont deux points réalisant le minimum de f, alors

$$f\left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2}f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1), \tag{18.505}$$

ce qui contredit la minimalité de $f(\bar{x}_1)$.

Nous devons maintenant prouver que $\bar{x}$ vérifie l'équation $A\bar{x} = -b$. Vu que $\bar{x}$ est minimum local de f qui est une fonction de classe C^2, le théorème des minima locaux 18.69 nous indique que $\bar{x}$ est solution de $\nabla f(x) = 0$. Calculons un peu cela avec la formule

$$df_x(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} = \frac{1}{2}\big(\langle Ax, u\rangle + \langle Au, x\rangle\big) + \langle b, u\rangle = \langle Ax, u\rangle + \langle b, u\rangle = \langle Ax+b, u\rangle. \tag{18.506}$$

Donc demander $df_x(u) = 0$ pour tout u demande $Ax + b = 0$. □

Proposition 18.109 (Gradient à pas optimal)**.**
Soit $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$ (A est une matrice symétrique strictement définie positive) et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle. \end{aligned} \tag{18.507}$$

49. Théorème 8.9

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous définissons la suite (x_k) par

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \tag{18.508}$$

où

— $d_k = -(\nabla f)(x_k)$

— t_k *est la valeur minimisant la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ sur $\mathbb{R}$.*

Alors pour tout $k \geqslant 0$ nous avons

$$\|x_k - \bar{x}\| \leqslant K \left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right)^k \tag{18.509}$$

où $c_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ est le rapport ente la plus grande et la plus petite valeur propre[50] *de la matrice A et $\bar{x}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ à minimiser f.*

Démonstration. Décomposition en plusieurs points.

Existence de $\bar{x}$ Le fait que $\bar{x}$ existe et soit unique est la proposition 18.108.

Si $(\nabla f)(x_k) = 0$ D'abord si $\nabla f(x_k) = 0$, c'est que $x_{k+1} = x_k$ et l'algorithme est terminé : la suite est stationnaire. Pour dire que c'est gagné, nous devons prouver que $x_k = \bar{x}$. Pour cela nous écrivons (à partir de maintenant « x_k » est la k^{e}composante de x qui est une variable, et non le x_k de la suite)

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{kl} A_{kl} x_l x_k + \sum_k b_k x_k \tag{18.510}$$

et nous calculons $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ en tenant compte du fait que $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}$. Le résultat est que $(\partial_i f)(a) = (Ax + b)_i$ et donc que

$$(\nabla f)(a) = Aa + b. \tag{18.511}$$

Vu que A est inversible (symétrique définie positive), il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie cette relation. Par la proposition 18.108, cet élément est le minimum $\bar{x}$.

Cela pour dire que si $a \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(\nabla f)(a) = 0$ alors $a = \bar{x}$. Nous supposons donc à partir de maintenant que $\nabla f(x_k) \neq 0$ pour tout k.

t_k est bien défini Pour $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x_k + td_k) = f(x_k) + \frac{1}{2} t^2 \langle Ad_k, d_k \rangle + t \langle \underbrace{Ax_k + b}_{=-d_k}, d_k \rangle = \frac{1}{2} t^2 \langle Ad_k, d_k \rangle - t_k \|d_k\|^2 + f(x_k). \tag{18.512}$$

qui est un polynôme du second degré en t. Le coefficient de t^2 est $\frac{1}{2}\langle Ad_k, d_k \rangle > 0$ parce que $d_k \neq 0$ et A est strictement définie positive. Par conséquent la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ admet bien un unique minimum. Nous pouvons même calculer t_k parce que l'on connaît pas cœur le sommet d'une parabole :

$$t_k = -\frac{\langle Ax_k + b, d_k \rangle}{\langle Ad_k, d_k \rangle} = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle} \tag{18.513}$$

parce que $d_k = -\nabla f(x_k) = -(Ax_k + b)$.

La valeur de d_{k+1} Par définition, $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) = -(Ax_{k+1} + b)$. Mais $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, donc

$$d_{k+1} = -Ax_k - t_k Ad_k - b = d_k - t_k Ad_k \tag{18.514}$$

parce que $-Ax_k - b = d_k$.

Par ailleurs, $\langle d_{k+1}, d_k \rangle = 0$ parce que

$$\langle d_{k+1}, d_k \rangle = \langle d_k, d_k \rangle - t_k \langle d_k, Ad_k \rangle = \|d_k\|^2 - \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle} \langle d_k, Ad_k \rangle = 0 \tag{18.515}$$

où nous avons utilisé la valeur (18.513) de t_k.

50. Cela est certainement très lié au conditionnement de la matrice A, voir la proposition 35.108.

Calcul de $f(x_{k+1})$ Nous repartons de (18.512) où nous substituons la valeur (18.513) de t_k :

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} = f(x_k) - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle}. \tag{18.516}$$

Encore du calcul ... Vu que le produit $\langle Ad_k, d_k\rangle$ arrive tout le temps, nous allons étudier $\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle$. Le truc malin est d'essayer d'exprimer ça en termes de $\bar{x}$ et $\bar{f} = f(\bar{x})$. Pour cela nous calculons $f(\bar{x})$:

$$\bar{f} = f(\bar{x}) = f(-A^{-1}b) = -\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b\rangle. \tag{18.517}$$

Ayant cela en tête nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle &= \langle A^{-1}(Ax_k + b), Ax_k + b\rangle && (18.518a)\\
&= \langle x_k, Ax_k\rangle + \langle A^{-1}b, Ax_k\rangle + \langle b, x_k\rangle + \underbrace{\langle A^{-1}b, b\rangle}_{-2\bar{f}} && (18.518b)\\
&= \langle x_k, Ax_k\rangle + 2\langle x_k, b\rangle - 2\bar{f} && (18.518c)\\
&= 2\big(f(x_k) - \bar{f}\big) && (18.518d)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$ parce que A est symétrique.

Erreur sur la valeur du minimum Nous voulons à présent estimer la différence $f(x_{k+1}) - \bar{f}$. Pour cela nous mettons en facteur $f(x_k) - \bar{f}$ dans $f(x_{k+1} - \bar{f})$; et d'ailleurs c'est pour cela que nous avons calculé $\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle$: parce que ça fait intervenir $f(x_k) - \bar{f}$.

$$\begin{aligned}
f(x_{k+1}) - \bar{f} &= f(x_k) - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} - \bar{f} && (18.519a)\\
&= \big(f(x_k) - \bar{f}\big)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\big(f(x_k) - \bar{f}\big)}\right) && (18.519b)\\
&= \big(f(x_k) - \bar{f}\big)\left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle}\right). && (18.519c)
\end{aligned}$$

Nous traitons le dénominateur à l'aide de l'inégalité de Kantorovitch 18.102. Nous avons

$$\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle} \geqslant \frac{\|d_k\|^4}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{c_2(A)} + \frac{1}{\sqrt{c_2(A)}}\right)^2\|d_k\|^4} = \frac{4c_2(A)}{(c_2(A)+1)^2}. \tag{18.520}$$

Mettre cela dans (18.519c) est un calcul d'addition de fractions :

$$f(x_{k+1}) - \bar{f} \leqslant \big(f(x_k) - \bar{f}\big)\left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1}\right)^2. \tag{18.521}$$

Par récurrence nous avons alors

$$f(x_k) - \bar{f} \leqslant \big(f(x_0) - \bar{f}\big)\left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1}\right)^{2k}. \tag{18.522}$$

Notons qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que $\bar{f}$ étant le minimum de f, les deux côtés de l'inégalité sont automatiquement positifs.

Erreur sur la position du minimum Nous voulons à présent étudier la norme de $x_k - \bar{x}$. Pour cela nous l'écrivons directement avec la définition de f en nous souvenant que $b = -A\bar{x}$:

$$f(x_k) - \bar{f} = \frac{1}{2}\langle Ax_k, x_k\rangle + \langle A\bar{x}, x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, \bar{x}\rangle + \langle A\bar{x}, \bar{x}\rangle \tag{18.523a}$$
$$= \frac{1}{2}\langle Ax_k, x_k\rangle - \langle A\bar{x}, x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, \bar{x}\rangle \tag{18.523b}$$
$$= \frac{1}{2}\langle Ax_k, x_k\rangle - \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, x_k\rangle - \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, \bar{x}\rangle \tag{18.523c}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\langle A(x_k - \bar{x}), x_k\rangle + \langle A\bar{x}, \bar{x} - x_k\rangle\Big) \tag{18.523d}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\langle A(x_k - \bar{x}), (x_k - \bar{x})\rangle\Big) \tag{18.523e}$$

où à la dernière ligne nous avons fait $\langle A\bar{x}, \bar{x} - x_k\rangle = \langle \bar{x}, A(\bar{x} - x_k)\rangle$ en vertu de la symétrie de A.

Les produits de la forme $\langle Ay, y\rangle$ sont majorés par $\lambda_{min}\|y\|^2$ parce que λ_{min} est la plus grande valeur propre de A. Dans notre cas,

$$f(x_k) - \bar{f} \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}\|x_k - \bar{x}\|^2 \tag{18.524}$$

Conclusion En combinant les inéquations (18.524) et (18.522) nous trouvons

$$\frac{1}{2}\lambda_{min}\|x_k - \bar{x}\|^2 \leqslant f(x_k) - \bar{f} \leqslant \big(f(x_0) - \bar{f}\big)\left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1}\right)^{2k}, \tag{18.525}$$

c'est-à-dire

$$\|x_k - \bar{x}\| \leqslant \sqrt{\frac{2\big(f(x_0) - \bar{f}\big)}{\lambda_{min} + 1}}^{2k}. \tag{18.526}$$

□

Notons que lorsque $c_2(A)$ est proche de 1 la méthode converge rapidement. Par contre si $c_2(A)$ est proche de zéro, la méthode converge lentement.

18.14 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse

18.110.
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel réel normé de dimension finie n. L'ensemble des formes quadratiques réelles [51] sur E est vu comme l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$; il sera noté $Q(E)$ et le sous-ensemble des formes quadratiques non dégénérées est $S_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ qui sera noté $\Omega(E)$. Nous rappelons que la correspondance est donnée de la façon suivante.

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, la forme quadratique associée est q_A donnée par le produit scalaire $q_A(x) = x \cdot Ax$.

18.111.
Nous noterons encore $Q^+(E)$ les formes quadratiques positives sur E et $Q^{++}(E)$ les formes quadratiques strictement définies positives sur E.

Sur $Q(E)$ nous mettons la norme

$$N(q) = \sup_{\|x\|_E = 1} |q(x)|, \tag{18.527}$$

qui du point de vue de $S_n(\mathbb{R})$ est

$$N(A) = \sup_{\|x\|_E = 1} |x^t Ax|. \tag{18.528}$$

51. Définition 11.199.

Notons que à droite, c'est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

Nous savons par le théorème de Sylvester (théorème 4.110) que dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, toute matrice symétrique de signature (p,q) est semblable à la matrice

$$\mathbb{1}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}. \tag{18.529}$$

Donc deux matrices de S_n sont semblables si et seulement si elles ont la même signature (même si elles ne sont pas de rang maximum, cela soit dit au passage). Si nous notons $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de signature (p,q), alors

$$S_n^{p,q}(\mathbb{R}) = \{P^tAP \text{ tel que } P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\} \tag{18.530}$$

où A est une quelconque ce ces matrices.

Nous voudrions en savoir plus sur ces ensembles. En particulier nous aimerions savoir si la signature est une notion « stable » au sens où ces ensembles seraient ouverts dans S_n. Pour cela nous considérons l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur S_n définie par

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) &\to S_n(\mathbb{R}) \\ (P,A) &\mapsto P^tAP \end{aligned} \tag{18.531}$$

faite exprès pour que les orbites de cette action soient les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

La proposition suivante montre que lorsque $p+q=n$, c'est-à-dire lorsqu'on parle de matrices de rang maximum, les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ sont ouverts, c'est-à-dire que la signature d'une forme quadratique est une propriété « stable » par petite variations des éléments de matrice. Notons tout de suite que si le rang n'est pas maximum, le théorème de Sylvester dit qu'elle est semblable à une matrice diagonale avec des zéros sur la diagonale ; en modifiant un peu ces zéros, on peut modifier évidemment la signature.

Proposition 18.112 ([43])**.**
Soit $(E,\|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

1. *les formes quadratiques non dégénérées forment un ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques,*
2. *les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p+q=n$ sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$,*
3. *les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p+q=n$,*
4. *les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ non dégénérés sont connexes par arc.*

Démonstration. Cette preuve est donnée du point de vue des matrices. La différence entre le point (3) et (4) est que dans le premier nous prouvons la connexité de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, tandis que dans le second nous prouvons la connexité par arc de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité par arc de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$. Bien entendu le second implique le premier.

(1) Il s'agit simplement de remarquer que $Q(E) = S_n(\mathbb{R})$, que $\Omega(E) = S_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et que le déterminant est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

(2) Soit $A_0 \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Le théorème de Sylvester 4.110 nous donne une matrice inversible P telle que $P^tA_0P = \mathbb{1}_{p,q}$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathbb{1}_{p,q}$ contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. À partir de là, l'ensemble $(P^{-1})^t\mathcal{U}P^{-1}$ sera un voisinage de A_0 contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

Nous considérons les espaces vectoriels

$$F = \mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_p\} \tag{18.532a}$$
$$G = \mathrm{Span}\{e_{p+1},\dots,e_n\} \tag{18.532b}$$

La norme euclidienne $\|.\|_p$ sur F est équivalente à la norme $|.|_E$ par le théorème 12.6. Donc il existe une constante $k_1 > 0$ telle que pour tout $x \in F$,

$$\|x\|_p \geqslant k_1\|x\|_E. \tag{18.533}$$

De la même façon sur G, il existe une constante $k_2 > 0$ telle que

$$\|x\|_q \geqslant k_2\|x\|_E. \tag{18.534}$$

Si nous posons $k = \min\{k_1^2, k_2^2\}$, alors nous avons

$$\forall x \in F, \quad \|x\|_p^2 \geqslant k_1^2\|x\|_E^2 \geqslant k\|x\|_E^2 \tag{18.535a}$$
$$\forall x \in G, \quad \|x\|_q^2 \geqslant k_2^2\|x\|_E^2 \geqslant k\|x\|_E^2. \tag{18.535b}$$

Soit une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A-\mathbb{1}_{p,q}) < k$, c'est-à-dire que A est dans un voisinage de $\mathbb{1}_{p,q}$ pour la norme sur $S_n(\mathbb{R})$ donné par (18.528). Si x est non nul dans E, nous avons

$$\left|x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x\right| \leqslant N(\mathbb{1}_{p,q} - A)\|x\|^2 \leqslant k\|x\|^2. \tag{18.536}$$

En déballant la valeur absolue, cela signifie que

$$-k\|x\|_E^2 \leqslant x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x \leqslant k\|x\|^2. \tag{18.537}$$

Si $x \in F$, alors la première inéquation et (18.533) donnent

$$x^tAx \geqslant \|x\|_p^2 - k\|x\|_E^2 > 0 \tag{18.538}$$

Si $x \in G$, alors la seconde inéquation et (18.534) donnent

$$x^tAx \leqslant k\|x\|_E^2 - \|x\|_q^2 < 0. \tag{18.539}$$

Nous avons donc montré que $x \mapsto x^tAx$ est positive sur F et négative sur G, ce qui prouve que A est bien de signature (p, q) et appartient donc à $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Autrement dit nous avons

$$B(\mathbb{1}_{p,q}, k) \subset S_n^{p,q}(\mathbb{R}). \tag{18.540}$$

(3) Cette partie de la preuve provient essentiellement de [303], et fonctionne pour tous les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$, même pour ceux qui ne sont pas de rang maximum.
Soit $A \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Nous savons que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a deux composantes connexes (proposition 14.19). Vu que l'application

$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &\to S_n\\ P &\mapsto P^tAP\end{aligned} \tag{18.541}$$

est continue, l'image d'un connexe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ par α est connexe (proposition 7.84). En particulier, $\alpha\big(\mathrm{GL}^{\pm}(n,\mathbb{R})\big)$ sont deux connexes et nous savons que $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ a au plus ces deux composantes connexes.
Notre but est maintenant de trouver une intersection entre les parties $\alpha\big(\mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R})\big)$ et $\alpha\big(\mathrm{GL}^{-}(n,\mathbb{R})\big)$ [52]. Soit par le théorème de Sylvester, soit par le théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles 11.189, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ diagonalisant A. En suivant la remarque 11.190, et en notant Q la matrice obtenue à partir de P en changeant le signe de sa première ligne, nous avons

$$\alpha(Q) = Q^tAQ = P^tAP = \alpha(P). \tag{18.542}$$

Or si $P \in \mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R})$, alors $Q \in \mathrm{GL}^{-}(n,\mathbb{R})$ et inversement. Donc nous avons trouvé une intersection entre $\alpha\big(\mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R})\big)$ et $\alpha\big(\mathrm{GL}^{-}(n,\mathbb{R})\big)$.

52. À ce point, il me semble que [303] fait erreur parce que la matrice $-\mathbb{1}_n$ est de déterminant 1 lorsque n est pair. L'argument donné ici provient de [43]

(4) Soient A et B dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Par le théorème de Sylvester, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telles que $A = P^t \mathbb{1}_{p,q} P$ et $B = Q^t \mathbb{1}_{p,q} Q$. Par la remarque 11.190 nous pouvons choisir P et Q dans $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$. Ce dernier groupe étant connexe par arc, il existe un chemin

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \tag{18.543}$$

tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$. Alors le chemin

$$s \mapsto \gamma(s)^t \mathbb{1}_{p,q} \gamma(s) \tag{18.544}$$

est un chemin continu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ joignant A à B.

□

Nous savons déjà de la proposition 18.112 que les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ (pas spécialement de rang maximum) sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$. Le lemme suivant nous donne une précision à ce sujet, dans le cas des matrices de rang maximum, en disant que la matrice qui donne la similitude entre A_0 et A est localement un C^1-difféomorphisme de A.

Lemme 18.113.
Soit $A_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n) = S_n \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S_n et une application $\phi\colon V \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui

(1) est de classe C^1,

(2) est telle que pour tout $A \in V$, $\varphi(A)^t A_0 \phi(A) = A$.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to S_n \\ M &\mapsto M^t A_0 M. \end{aligned} \tag{18.545}$$

Étant donné que les composantes de $\varphi(M)$ sont des polynômes en les entrées de M, cette application est de classe C^1 – et même plus. Soit maintenant $H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et calculons $d\varphi_{\mathbb{1}}(H)$ par la formule (13.482) :

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = \frac{d}{dt}\Big[\varphi(\mathbb{1} + tH)\Big]_{t=0} \tag{18.546a}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[(\mathbb{1} + tH^t)A_0(\mathbb{1} + tH)\Big]_{t=0} \tag{18.546b}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[A_0 + tA_0H + tH^tA_0 + t^2H^tA_0H\Big]_{t=0} \tag{18.546c}$$

$$= A_0H + H^tA_0. \tag{18.546d}$$

Donc

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = (A_0H) + (A_0H)^t. \tag{18.547}$$

Par conséquent

$$\ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) = \{H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est antisymétrique}\}, \tag{18.548}$$

et si nous posons

$$F = \{H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est symétrique}\} \tag{18.549}$$

nous avons

$$\mathbb{M}(n,\mathbb{R}) = F \oplus \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \tag{18.550}$$

parce que toute matrice peur être décomposée de façon unique en partir symétrique et antisymétrique. De plus l'application

$$\begin{aligned} f\colon F &\to S_n \\ H &\mapsto A_0H \end{aligned} \tag{18.551}$$

est une bijection linéaire. D'abord $A_0H = 0$ implique $H = 0$ parce que A_0 est inversible, et ensuite si $X \in S_n$, alors $X = A_0A_0^{-1}X$, ce qui prouve que X est l'image par f de $A_0^{-1}X$ et donc que f est surjective.

Maintenant nous considérons la restriction $\psi = \varphi_{|_F}$, $\psi\colon F \to S_n$. Remarquons que $\mathbb{1} \in F$ parce que $A_0 \in S_n$. L'application $d\psi_{\mathbb{1}}$ est une bijection. En effet d'abord

$$d(\varphi_{|_F})_{\mathbb{1}} = (d\varphi_{\mathbb{1}})_{|_F}, \tag{18.552}$$

ce qui prouve que

$$\ker(d\psi_{\mathbb{1}}) = \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \cap F = \{0\}, \tag{18.553}$$

ce qui prouve que $d\psi_{\mathbb{1}}$ est injective. Pour montrer que $d\psi_{\mathbb{1}}$ est surjective, il suffit de mentionner le fait que $\dim F = \dim S_n$ du fait que l'application (18.551) est une bijection linéaire.

Nous pouvons utiliser le théorème d'inversion locale (théorème 18.48) et conclure qu'il existe un voisinage ouvert U de $\mathbb{1}$ dans F tel que ψ soit un difféomorphisme C^1 entre U et $V = \psi(U)$. Vu que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, nous pouvons prendre $U \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et donc supposer que $U \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Pour tout $A \in V$, il existe une unique $M \in U$ telle que $\psi(M) = A$, c'est-à-dire telle que $A = M^tA_0M$. Cette matrice M est $\psi^{-1}(A)$ et est une matrice inversible. Bref, nous posons

$$\begin{aligned} \phi\colon V &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \psi^{-1}(A), \end{aligned} \tag{18.554}$$

et ce ϕ est de classe C^1 sur V parce que c'est ce que dit le théorème d'inversion locale. Cette application répond à la question parce que V est un voisinage de $\varphi(\mathbb{1}) = A_0$ et pour tout $A \in V$ nous avons

$$\phi(A)^tA_0\phi(A) = \varphi^{-1}(A)^tA_0\varphi^{-1}(A) = A. \tag{18.555}$$

□

18.15 Ellipsoïde de John-Loewner

C'est le moment de relire les conventions de notations données en 18.110 et 18.111 ainsi que la définition 11.199 d'une forme quadratique.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de q est diagonale. Dans cette base, la forme q est donnée par la proposition 11.277 :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i \tag{18.556}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de q.

Plus généralement nous notons $mat_{\mathcal{B}}(q)$ la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 18.114.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et l'application[53]

$$\begin{aligned} D\colon Q(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \det\big(mat_{\mathcal{B}}(q)\big). \end{aligned} \tag{18.557}$$

Alors :

1. *La valeur et D ne dépend pas du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$.*
2. *La fonction D est donnée par la formule $D(q) = \prod_i \lambda_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de q.*
3. *La fonction D est continue.*

53. L'ensemble $Q(E)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Démonstration. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation de q :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i \tag{18.558}$$

où les x_i sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$. Par définition, la matrice $mat_{\mathcal{B}}(q)$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de q.

Nous considérons aussi $\mathcal{B}_1$, une autre base orthonormées de $\mathbb{R}^n$. Nous notons $S = mat_{\mathcal{B}_1}(q)$; étant symétrique, cette matrice se diagonalise par une matrice orthogonale : il existe $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ telle que

$$S = P mat_{\mathcal{B}}(q) P^t; \tag{18.559}$$

donc $\det(S) = \det(PP^t) \det\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) = \lambda_1 \dots \lambda_n$. Ceci prouve en même temps que D ne dépend pas du choix de la base et que sa valeur est le produit des valeurs propres.

Passons à la continuité. L'application déterminant $\det\colon S_n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est continue car polynôme en les composantes. D'autre par l'application $mat_{\mathcal{B}}\colon Q(\mathbb{R}^n) \to S_n(\mathbb{R})$ est continue par la proposition 11.276. L'application D étant la composée de deux applications continues, elle est continue. □

Lemme 18.115 (Volume d'un ellipsoïde[43, 1])**.**
Soit une forme quadratique strictement définie positive q sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant r^2\} \tag{18.560}$$

pour un certain $r > 0$.

Alors le volume de $\mathcal{E}$ est donné par

$$V_q = \frac{V_0 r^n}{\sqrt{D(q)}} \tag{18.561}$$

où V_0 est une constante[54] *et D est l'application de la proposition 18.114.*

Démonstration. Vu que la matrice de q est symétrique, elle est diagonalisable par une matrice orthogonale (théorème 11.189). Autrement dit, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \tag{18.562}$$

où $x_i = \langle e_i, x \rangle$ et les a_i sont tous strictement positifs.

A priori nous devrions calculer

$$\int_{\mathcal{E}} dx, \tag{18.563}$$

mais nous effectuons le changement de variable[55] associé à la matrice qui diagonalise q et nous devons simplement calculer

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx \tag{18.564}$$

parce que le jacobien de ce changement de variable est 1 (déterminant d'une matrice orthogonale).

Tout cela pour dire que nous nommons $\mathcal{E}_q$ l'ellipsoïde associée à la forme quadratique q et V_q son volume que nous allons maintenant calculer[56] :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx \tag{18.565}$$

54. C'est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et ce n'est pas tout à fait évident à calculer [304].
55. Théorème 15.252.
56. Le volume ne change pas si nous écrivons l'inégalité stricte au lieu de large dans le domaine d'intégration ; nous le faisons pour avoir un domaine ouvert.

Cette intégrale est écrite de façon plus simple en utilisant le C^1-difféomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathcal{E}_q &\to B(0,1)\\ x &\mapsto \frac{1}{r}\Big(x_1\sqrt{a_1},\dots,x_n\sqrt{a_n}\Big).\end{aligned} \tag{18.566}$$

Le fait que φ prenne bien ses valeurs dans $B(0,1)$ est un simple calcul : si $x\in\mathcal{E}_q$, alors

$$\sum_i \varphi(x)_i^2 = \frac{1}{r^2}\sum_i a_i x_i^2 = \frac{1}{r^2}q(x) < 1. \tag{18.567}$$

Cela nous permet d'utiliser le théorème de changement de variables 15.252 :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2<r^2} dx = \frac{r^n}{\sqrt{a_1\dots a_n}}\int_{B(0,1)} dx. \tag{18.568}$$

La dernière intégrale est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et nous la notons V_0. La proposition 18.114 nous permet d'écrire V_q sous la forme

$$V_q = \frac{V_0 r^n}{\sqrt{D(q)}}. \tag{18.569}$$

□

18.116.
Le théorème suivant dit en substance que si K est compact, alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en l'origine et contenant K. Il faut se rendre compte que l'ellipsoïde n'est pas celui que l'on croirait intuitivement parce que la contrainte *centrée en l'origine* est forte. Si $K = \overline{B\big((4,0),1\big)}$, alors l'ellipsoïde donnée n'est pas du tout K lui-même comme on pourrait s'y attendre. Ce serait probablement quelque chose comme la boule centrée en $(0,0)$ et de rayon 5 [57].

Ce que l'on voudrait est un ellipsoïde qui soit centrée où il faut pour que le volume soit minimal. Nous verrons que c'est possible en la proposition 18.118, mais qu'alors l'unicité est moins évidente (voir la remarque dans [305]). Si vous voulez en entendre parler, vous pouvez lire [306, 307].

Proposition 18.117 (Ellipsoïde de John-Loewner[43])**.**
Soit K compact dans $\mathbb{R}^n$ et d'intérieur non vide. Il existe une unique ellipsoïde [58] (pleine) centrée en l'origine de volume minimal contenant K.

Démonstration. Nous subdivisons la preuve en plusieurs parties.

Volume de l'ellipsoïde Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde centré en l'origine. La proposition 11.285 et son corollaire 11.286 nous indiquent que

$$\mathcal{E} = \{x\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x)\leqslant 1\} \tag{18.570}$$

pour une certaine forme quadratique strictement définie positive q. Le lemme 18.115 nous donne alors le volume de $\mathcal{E}$ par

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}} \tag{18.571}$$

où V_0 est une constante.

Existence de l'ellipsoïde Nous voulons trouver un ellipsoïde contenant K de volume minimal, c'est-à-dire une forme quadratique $q\in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ telle que

— $D(q)$ soit maximal

57. Je ne sais pas très bien si il y a moyen de faire mieux. Ce serait sans doute un bon exercice ; faites-moi savoir si vous avez la réponse.
58. Définition 11.283.

— $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$.

Nous considérons l'ensemble des candidats semi-définis positifs.

$$A = \{q \in Q^+ \text{ tel que } q(x) \leqslant 1 \forall x \in K\}. \tag{18.572}$$

Nous allons montrer que A est convexe, compact et non vide dans $Q(\mathbb{R}^n)$; il aura ainsi un maximum de la fonction continue D définie sur $Q(\mathbb{R}^n)$. Nous montrerons ensuite que le maximum est dans Q^{++}. L'unicité sera prouvée à part.

Non vide L'ensemble K est compact et donc borné par $M > 0$. La forme quadratique $q\colon x \mapsto \|x\|^2/M^2$ est dans A parce que si $x \in K$ alors

$$q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2} \leqslant 1. \tag{18.573}$$

Convexe Soient $q, q' \in A$ et $\lambda \in [0,1]$. Nous avons encore $\lambda q + (1-\lambda)q' \in Q^+$ parce que

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \geqslant 0 \tag{18.574}$$

dès que $q(x) \geqslant 0$ et $q'(x) \geqslant 0$. D'autre part si $x \in K$ nous avons

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1. \tag{18.575}$$

Donc $\lambda q + (1-\lambda)q' \in A$.

Fermé Pour rappel, la topologie de $Q(\mathbb{R}^n)$ est celle de la norme (11.615). Nous considérons une suite (q_n) dans A convergeant vers $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ et nous allons prouver que $q \in A$, de sorte que la caractérisation séquentielle de la fermeture (proposition 9.11) conclue que A est fermé. En nommant e_x le vecteur unitaire dans la direction x nous avons

$$\big|q(x)\big| = \big|\|x\|^2 q(e_x)\big| \leqslant \|x\|^2 N(q), \tag{18.576}$$

de sorte que notre histoire de suite convergente donne pour tout x :

$$\big|q_n(x) - q(x)\big| \leqslant \|x\|^2 N(q_n - q) \to 0. \tag{18.577}$$

Vu que $q_n(x) \geqslant 0$ pour tout n, nous devons aussi avoir $q(x) \geqslant 0$ et donc $q \in Q^+$ (semi-définie positive). De la même manière si $x \in K$ alors $q_n(x) \leqslant 1$ pour tout n et donc $q(x) \leqslant 1$. Par conséquent $q \in A$ et A est fermé.

Borné La partie K de $\mathbb{R}^n$ est borné et d'intérieur non vide, donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset K$. Si par ailleurs $q \in A$ et $x \in \overline{B(0,r)}$ nous avons $a + x \in K$ et donc $q(a+x) \leqslant 1$. De plus $q(-a) = q(a) \leqslant 1$, donc

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q\big(x + a - a\big)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2 \tag{18.578}$$

par l'inégalité de Minkowski 11.281. Cela prouve que si $x \in \overline{B(0,r)}$ alors $q(x) \leqslant 4$. Si par contre $x \in \overline{B(0,1)}$ alors $rx \in \overline{B(0,r)}$ et

$$0 \leqslant q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}, \tag{18.579}$$

ce qui prouve que $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$ et que A est borné.

L'ensemble A est compact parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 8.9. L'application continue $D\colon Q(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ de la proposition 18.114 admet donc un maximum sur le compact A. Soit q_0 ce maximum.

Nous montrons que $q_0 \in Q^{++}(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que l'application $f\colon x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans A et que $D(f) > 0$. Vu que q_0 est maximale pour D, nous avons

$$D(q_0) \geqslant D(f) > 0. \tag{18.580}$$

Donc $q_0 \in Q^{++}$.

Unicité S'il existe une autre ellipsoïde de même volume que celle associée à la forme quadratique q_0, nous avons une forme quadratique $q \in Q^{++}$ telle que $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$. C'est-à-dire que nous avons $q_0, q \in A$ tels que $D(q_0) = D(q)$.

Nous considérons la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ et nous posons $S = mat_{\mathcal{B}_c}(q)$, $S_0 = mat_{\mathcal{B}_c}(q_0)$. Étant donné que A est convexe, $(q_0 + q)/2 \in A$ et nous allons prouver que cet élément de A contredit la maximalité de q_0. En effet

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S+S_0}{2}\right) \tag{18.581}$$

Nous allons utiliser le lemme 18.90 qui dit que le déterminant est log-concave sous la forme de l'équation (18.360) avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S+S_0}{2}\right) > \sqrt{\det(S)}\sqrt{\det(S_0)} = \det(S_0) = D(q_0). \tag{18.582}$$

Nous avons utilisé le fait que $D(q_0) = D(q)$ qui signifie que $\det(S_0) = \det(S)$. L'inéquation (18.582) contredit la maximalité de $D(q_0)$ et donne donc l'unicité.

□

Dans la proposition suivante nous oublions l'unicité, mais nous démontrons qu'il existe un ellipsoïde de volume minimal parmi les ellipsoïdes centrées où l'on veut et non seulement en zéro. La source de cette proposition est [1], et comme toujours avec cette source, vous devez regarder à la fois l'énoncé et la preuve avec un oeil encore plus prudent que d'habitude.

Proposition 18.118 ([1])**.**
Soit un compact d'intérieur non vide K dans $\mathbb{R}^n$. Il existe un ellipsoïde de volume minimal contenant K.

Démonstration. Au lieu de considérer le compact K et de chercher où centrer l'ellipsoïde afin qu'elle puisse contenir K en un volume minimal, nous allons chercher comment translater K pour qu'un ellipsoïde centré en zéro puisse contenir l'image translétée de K en un volume minimal.

Pour $a \in \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathcal{E}_a$ la plus petite ellipsoïde centrée en 0 contenant $K + a$ (translation de K par le vecteur a). Elle est bien définie par la proposition 18.117. Notre jeu est maintenant d'étudier la fonction [59]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^+ \\ a &\mapsto \mathrm{vol}(\mathcal{E}_a). \end{aligned} \tag{18.583}$$

Nous allons montrer que f est continue et qu'elle peut être restreinte à un compact sans risque de rater un minimum.

À propos de forme quadratique Nous notons q la forme quadratique de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ et A sa matrice symétrique associée. Si $x \in K + h$ nous avons, pour un certain $k \in K$:

$$\begin{aligned} q(x) &= q(k+h) && (18.584a)\\ &= \langle k+h, A(k+h)\rangle && (18.584b)\\ &= \langle k, Ak,\rangle + \langle k, Ahx,\rangle + \langle h, Ak\rangle + \langle h, Ah\rangle. && (18.584c) \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $A = A^t$ nous avons aussi $\langle k, Ah\rangle = \langle h, Ak\rangle$ et donc

$$q(x) = 2\langle k, Ah\rangle + q(h). \tag{18.585}$$

En ce qui concerne la norme, pour tout $x \in K + h$ nous avons donc la majoration

$$\begin{aligned} |q(x)| &\leqslant 1 + 2\|k\|\|Ah\| + q(h) && (18.586a)\\ &\leqslant 1 + 2|K|\|Ah\| + q(h) && (18.586b) \end{aligned}$$

59. Notons que cette fonction est bien définie, même sans la partie unicité de 18.117 parce que même si $\mathcal{E}_a$ n'était pas bien définie, son volume, lui, est bien défini.

où nous avons noté $|K| = \sup_{k\in K} \|k\|$. Vu que $q(x)$ est en fait toujours positif nous pouvons oublier la valeur absolue à gauche et conclure que $K + h$ est contenu dans l'ellipsoïde

$$\mathcal{F}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant 1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\}. \tag{18.587}$$

Volumes Nous avons donc $\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{F}_1)$. En reprenant la formule du lemme 18.115 pour le volume de l'ellipsoïde nous avons la majoration

$$\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n. \tag{18.588}$$

Autrement dit, en ce qui concerne notre fonction f :

$$f(h) \leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n. \tag{18.589}$$

Nous pouvons faire le même raisonnement en partant de $K+h$ et en voyant comment modifier le rayon de $\mathcal{E}_h$ pour que $\mathcal{E}_0$ y rentre. Autrement dit, nous refaisons le raisonnement en posant $K' = K + h$ et en étudiant $K' - h$. Si q_1 est la forme quadratique de $\mathcal{E}_h$ et si A_1 est sa matrice symétrique,

$$\text{vol}(\mathcal{E}_0) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \tag{18.590}$$

En termes de f :

$$f(0) \leqslant f(h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \tag{18.591}$$

Encadrement Les majoration (18.589) et (18.591) nous permettent de créer un encadrement pour $f(h)$. En effet, en écrivant (18.591) et en continuant la majoration en remplaçant $f(h)$ par (18.589), nous obtenons

$$\begin{aligned} f(0) &\leqslant f(h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \\ &\leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n. \end{aligned} \tag{18.592}$$

Vu que nous avons dans l'idée de prendre des h petits (en norme) et que les parenthèses tendent vers 1 lorsque h est petit, nous pouvons supposer qu'elles sont non nulles et allègrement les passer au dénominateur. Nous divisons donc tout par le coefficient de $f(h)$:

$$\frac{f(0)}{\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n} \leqslant f(h) \leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n \tag{18.593}$$

Nous utilisons la règle de l'étau [60] pour conclure que

$$\lim_{h\to 0} \text{vol}(\mathcal{E}_h) = \text{vol}(\mathcal{E}_0). \tag{18.594}$$

Continuité Si $a \in \mathbb{R}^n$ nous pouvons appliquer la limite (18.594) pour l'ellipsoïde $\mathcal{E}_a$ au lieu de $\mathcal{E}_0$, c'est-à-dire en partant du compact $K + a$ au lieu de K. Cela donne

$$\lim_{h\to 0} \text{vol}(\mathcal{E}_{a+h}) = \text{vol}(\mathcal{E}_a). \tag{18.595}$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Compact Nous avons en hypothèse que K est d'intérieur non vide. Il existe donc $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$. Soit l'hyperplan affine H passant par a et perpendiculaire à a. Nous notons $S = H \cap B(a, r)$. Nous avons évidemment $S \subset K$ et donc $S \subset \mathcal{E}_0$. Vu que l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ est convexe et contient K, tout le cône de base S et de hauteur a est dans $\mathcal{E}_0$.

Sans rentrer dans le détails du calcul du volume de ce cône, son volume tend vers l'infini si a tend vers l'infini [61]

60. Théorème 13.157.

61. Topologie du complété en un point, j'imagine que vous voyez de quoi il en retourne. Sinon c'est la définition 7.61, et il faut sans doute adapter le lemme 13.92 au cas de $\mathbb{R}^n$ pour tout faire dans les règles.

Nous avons donc une majoration

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_h) \geqslant \text{volume du cône de base } S \text{ et de hauteur } a+h. \tag{18.596}$$

Dès que ce volume est plus grand que $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_0)$, il est impossible que $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \mathrm{vol}(\mathcal{E}_0)$. Soit $R>0$ tel que pour tout $\|h\| \geqslant R$, le volume du cône soit plus grand que $\mathrm{vol}(\mathcal{E}_0)$. Le minimum de f est certainement dans $B(0,R)$ parce que au moins

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_0) \in f\big(B(0,R)\big). \tag{18.597}$$

Minimum Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \overline{B(0,R)} &\to \mathbb{R}^+ \\ h &\mapsto \mathrm{vol}(\mathcal{E}_h). \end{aligned} \tag{18.598}$$

Elle est continue sur un compact, et le théorème de Weierstrass 7.99 nous dit alors qu'elle atteint son minimum. Il n'y a cependant pas unicité de la valeurs de h pour laquelle $f(h)$ est minimum.

Envoi Soit $s \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(s)$ soit minimal. Cela signifie que parmi tous les ellipsoïdes centrés en zéro et contenant des ensembles de la forme $K+h$, le plus petit est celui qui contient $K+s$. Soit $\mathcal{E}_s$ cet ellipsoïde.

Je prétend que $\mathcal{E}_s - s$ est le plus petit ellipsoïde contenant K, tout centres confondus. En effet, si $\mathcal{F}$ est un ellipsoïde centré en a et contenant K, alors $\mathcal{F}-a$ est un ellipsoïde centré en zéro et contenant $K-a$. Nous avons alors

$$\mathrm{vol}(\mathcal{F}-a) \geqslant \mathrm{vol}(\mathcal{E}_s) = \mathrm{vol}(\mathcal{E}_s - s). \tag{18.599}$$

L'invariance de la mesure par translation est le théorème 15.219.

□

18.16 Prolongement de fonctions

Sources : [308]

Lemme 18.119.
Soit E, un espace vectoriel normé complet et (A_n) une suite emboîtée de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ contient exactement un point.

Démonstration. Si l'intersection contenait deux points distincts a et b, alors nous aurions pour tout n la majoration $\mathrm{diam}(A_n) \geqslant \|a-b\|$ qui ne dépend pas de n. Cela contredirait la limite.

Soit une suite (x_n) avec $x_k \in A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est une suite de Cauchy. En effet si $\epsilon > 0$, considérons N tel que $\mathrm{diam}(A_N) < \epsilon$. Dans ce cas dès que $n,m > N$ nous avons $x_n, x_m \in A_N$ et donc $\|x_n - x_m\| \leqslant \epsilon$. La suite x_n converge donc vers un élément dans E.

Nous devons montrer que $x \in A_k$ pour tout k. La queue de suite $(x_n)_{n\geqslant k}$ est une suite de Cauchy dans A_k qui converge donc vers un élément de A_k (ici nous utilisons le fait que A_k est fermé). Par unicité de la limite, cette dernière doit être x. Par conséquent $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

Théorème 18.120 ([309]).
Soient X et Y des espaces vectoriels normés. Pour une application linéaire $f\colon X \to Y$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur X,

(2) f est continue en un point de X,

(3) f est bornée.

Proposition 18.121.
Soit un espace normé X, un espace de Banach F et une partie dense A de X. Si l'application linéaire

$$f\colon \big(A, \|.\|_X\big) \to F \tag{18.600}$$

est continue[62]*, alors il existe une unique application linéaire continue $\tilde{f}\colon X \to F$ prolongeant f. De plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Démonstration. Soient $x \in X$ et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'ensembles définie par

$$A_n = \{y \in A \text{ tel que } \|x - y\| \leqslant 2^{-n}\}. \tag{18.601}$$

Étant donné que A est dense, ces ensembles sont tous non vides. De plus $\operatorname{diam} A_n \to 0$ parce que si $y, y' \in A_n$ alors

$$\|y - y'\| \leqslant \|y - x\| + \|x - y'\| \leqslant 2^{-n+1}. \tag{18.602}$$

Vu que f est bornée, la suite d'ensembles $f(A_n)$ est une suite emboitée d'ensembles non vides de F. De plus leur diamètre tend vers zéro. En effet si $z, z' \in f(A_n)$, nous posons $z = f(y)$, $z' = f(y')$ et nous avons

$$\|z - z'\| \leqslant \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(y')\| \leqslant \|f\|\big(\|y - x\| + \|x - y'\|\big), \tag{18.603}$$

ce qui montre que $\operatorname{diam} f(A_n) \leqslant \|f\|2^{-n+1}$. Notons que nous avons utilisé la linéarité de f. Par le lemme 18.119, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(A_n)}$ contient exactement un point. Nous posons

$$S(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(A_n)}. \tag{18.604}$$

Nous allons montrer que l'application $x \mapsto S(x)$ ainsi définie est l'application que nous cherchons.

Nous commençons par montrer que pour toute suite $y_k \to x$ avec $y_k \in A$ nous avons

$$f(y_k) \to S(x). \tag{18.605}$$

Pour cela nous considérons $n_0 \in \mathbb{N}$ et k_0 tel que $y_{k_0} \in A_{n_0}$. Avec cela nous avons

$$\|f(y_k) - S(x)\| \leqslant \operatorname{diam}(A_{n_0}) \leqslant \|f\|2^{-n_0+1}. \tag{18.606}$$

Pour montrer que S est linéaire, nous considérons deux suites dans A : $y_k \to x$ et $y'_k \to x'$ ainsi que la somme $y_k + y'k \to x + x'$. Nous écrivons la relation (18.605) pour ces trois suites :

$$f(y_k) \to S(x) \tag{18.607a}$$
$$f(y'_k) \to S(x') \tag{18.607b}$$
$$f(y_k + y'_x) \to S(x + x'). \tag{18.607c}$$

Cependant, étant donné que f est linéaire, pour tout k nous avons $f(y_k + y'_k) = f(y_k) + f(y'_k)$ et par conséquent

$$f(y_k + y'_k) \to S(x) + S(x'). \tag{18.608}$$

Par unicité de la limite, $S(x + x') = S(x) + S(x')$. Le même genre de raisonnement montre que $S(\lambda x) = \lambda S(x)$. L'application S est donc linéaire.

En ce qui concerna la continuité, nous avons

$$\|S(x)\| = \lim \|f(y_k)\| \leqslant \|f\| \lim \|y_k\| = \|f\|\|x\|, \tag{18.609}$$

donc $\|S\| \leqslant \|f\|$, c'est-à-dire que S est borné et donc continue parce que linéaire (théorème 18.120).

Nous montrons maintenant que S prolonge f. Si $x \in A$, alors nous avons $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) = f(x)$, et donc $S(x) = f(x)$. Cela montre du même coup que $\|f\| \leqslant \|S\|$ et que par conséquent $\|f\| = \|S\|$.

Passons à la partie sur l'unicité. Soient donc S et T deux prolongements continus de f sur X. Soient $x \in X$ et $x_n \to x$ une suite dans A. Par continuité nous avons $T(x_n) \to T(x)$ et $S(x_n) \to S(x)$. Étant donné que par ailleurs pour tout n nous avons $S(x_n) = T(x_n)$, l'unicité de la limite montre que $T(x) = S(x)$. □

62. Nous avons bien mis sur A la topologie induite de X. Notons que ce n'est pas toujours celle qui est la plus naturelle sur A.

18.16.1 Encore du prolongement

Dans la même veine que la proposition 18.121 nous avons ce résultat.

Théorème 18.122 ([310]).
Soient E et F, deux espaces métriques complets ainsi que A dense dans E. Si $u\colon A \to F$ est uniformément continue, alors elle se prolonge de façon unique en une fonction continue $\tilde{u}\colon E \to F$. De plus ce prolongement est uniformément continu.

Démonstration. Soit $x \in E\backslash A$ et une suite (x_n) contenue dans A et convergente vers x. Nous voulons définir

$$\tilde{u}(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) \tag{18.610}$$

mais pour ce faire nous devons prouver que la suite $\big(u(x_n)\big)$ converge dans F et que la limite ne dépend pas de la suite choisie parmi les suites de A qui convergent (dans E) vers x.

Commençons par montrer que $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy dans F. Pour cela nous prenons $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ telle que $d_E(a,b) < \eta$ implique $d_F\big(u(a),u(b)\big) < \epsilon$ (uniforme continuité de u). Après, il suffit de choisir N tel que pour tout $n,m > N$ nous ayons $d(x_m,x_n) < \eta$ (parce que u_n est de Cauchy). Avec tout ça nous avons

$$d_F\big(u(x_m),u(x_n)\big) < \epsilon, \tag{18.611}$$

ce qui signifie que $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy et donc convergente dans F.

Nous voulons montrer maintenant que si (x_n) et (y_n) sont deux suites dans A convergentes vers x alors $\lim_{n\to\infty} u(x_n) = \lim_{n\to\infty} u(y_n)$. Pour cela nous considérons la suite $z = (x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots)$. Nous avons évidemment $z_n \to x$, et donc $u(z_n)$ converge dans F par ce qui a été dit plus haut. Mais $u(x_n)$ et $u(y_n)$ en sont deux sous-suites convergentes. Donc leurs limites sont égales.

Il reste à montrer que ce $\tilde{u}$ est continue et uniformément continue. Pour cela nous utilisons le module de continuité et le lemme 12.172. Étant donné que $\tilde{u}$ prolonge u nous avons

$$\omega_{\tilde{u}}(h) \geqslant \omega_u(h). \tag{18.612}$$

Soient $h > 0$ et $\epsilon > 0$; soient aussi $x,y \in E$ tels que $d(x,y) < h$. Nous prenons des suites $(a_n) \to x$ et $(y_n) \to y$ tout en choisissant n assez grand pour avoir $d_E(a_n,b_n) < h$. Nous avons

$$d_F\big(\tilde{u}(x),\tilde{u}(y)\big) \leqslant d_F\big(\tilde{u}(x),u(a_n)\big) + d\big(u(a_n),u(b_n)\big) + d_F\big(u(b_n),\tilde{u}(y)\big). \tag{18.613}$$

Si n est assez grand, par construction de $\tilde{u}$, le premier et le dernier terme sont plus petits que ϵ. Par définition du module de continuité nous avons d'autre part $d_F\big(u(a_n),u(b_n)\big) \leqslant \omega_u(h)$. Du coup

$$d_F\big(\tilde{u}(x),\tilde{u}(y)\big) \leqslant \omega_u(h) + 2\epsilon. \tag{18.614}$$

Si nous prenons le supremum sur les x et y vérifiant $d_E(x,y) < h$, à gauche nous obtenons $\omega_{\tilde{u}}(h)$ tandis que le membre de droite ne dépend pas de x et$y$. Donc pour tout ϵ, nous avons

$$\omega_{\tilde{u}}(h) \leqslant \omega_u(h) + 2\epsilon. \tag{18.615}$$

En comparaison avec (18.612), nous trouvons

$$\omega_{\tilde{u}(h)} \leqslant \omega_u(h). \tag{18.616}$$

Les fonctions u et $\tilde{u}$ ayant le même module de continuité, le lemme 12.172 nous enseigne que l'une est uniformément continue si et seulement si l'autre l'est. Vu que u est uniformément continue par hypothèse, le prolongement $\tilde{u}$ est uniformément continu. □

Définition 18.123.
*Un **plongement** de l'espace topologique X dans Y est une application $f\colon X \to Y$ telle que $f\colon X \to f(X)$ soit un homéomorphisme.*

Théorème 18.124 (Extensiton des isométries)**.**
Soit $\tilde{M}$ un espace métrique complet et une application isométrique

$$f\colon A \to \tilde{M} \tag{18.617}$$

où A est une partie dense d'un espace métrique M (pas spécialement complet). Alors f accepte une une unique extension isométrique

$$\tilde{f}\colon M \to \tilde{M} \tag{18.618}$$

Supposons de plus que M soit complet[63]*. Alors $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ est une bijection si et seulement si $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.*

Démonstration. Nous commençons par prouver l'unicité. Soient $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ deux extensions de f et $x \in M$. Si (a_n) est une suite dans A convergeant vers x (possible parce que A est dense dans M), alors nous avons

$$\tilde{f}_1(a_n) = \tilde{f}_2(a_n) \tag{18.619}$$

et donc $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ par continuité (une application isométrique est continue (proposition 9.6)).

Nous démontrons à présent l'existence.

Construction de $\tilde{f}$ Soient $x \in M$ et (a_n) une suite dans A qui converge vers x. Nous définissons

$$\tilde{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f(a_k). \tag{18.620}$$

Note : nous pouvons prouver que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (a_n) convergeant vers x, mais ce serait superflu parce que nous avons déjà prouvé l'unicité de $\tilde{f}$. Par contre nous devons expliquer pourquoi la limite du membre de droite de (18.620) existe dans $\tilde{M}$. D'abord la suite (a_n) est de Cauchy parce qu'elle est convergente (attention : M n'étant pas complet le fait d'être de Cauchy n'implique pas la convergence). Donc, étant donné que f est une isométrie, la suite $\big(f(a_n)\big)$ est de Cauchy dans $\tilde{M}$. Or ce dernier étant complet, la suite des images converge.

Montrons que cette application $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ répond à la question.

$\tilde{f}$ est isométrique Soient $a, b \in M$ et des suites dans A convergeant vers eux : $a_n \to a$, $b_n \to b$.

Nous avons, par continuité de l'application distance,

$$\begin{aligned}
d\big(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)\big) &= \lim_{k\to\infty} d\big(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b)\big) && (18.621a)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b_l)\big) && (18.621b)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(f(a_k), f(b_l)\big) && (18.621c)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(a_k), b_l\big) && (18.621d)\\
&= d(a, b). && (18.621e)
\end{aligned}$$

Cela prouve que $\tilde{f}$ est une isométrie.

Pour la suite nous supposons que M est complet. Notons tout de suite que $\tilde{f}$ est injective parce qu'elle est isométrique.

Bijection (premier sens) Nous supposons que $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ est une bijection. Par l'absurde nous supposons que $f(A)$ n'est pas dense dans $\tilde{M}$, c'est-à-dire que nous avons un point $x \in \tilde{M}$ et une boule n'intersectant par $f(A)$:

$$B(x, r) \cap f(A) = \varnothing. \tag{18.622}$$

Étant donné que $\tilde{f}$ a pour image des limites de suites dans $f(A)$, l'image de $\tilde{f}$ est contenue dans $\overline{f(A)}$. Donc si $\tilde{f}$ est surjective, c'est que $\tilde{M} \subset \overline{f(A)}$ et donc que $\overline{f(A)} = \tilde{M}$. Cela prouve que si $\tilde{f}$ est bijective, alors $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.

63. Il me semble que cette hypothèse manque dans [311].

Bijection (l'autre sens) Nous supposons que $\overline{f(A)} = \tilde{M}$ et nous devons prouver que $\tilde{f}$ est surjective. Soient $x \in \tilde{M}$ et $f(a_n)$ une suite dans $f(A)$ qui converge vers x ; une telle suite existe parce que $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$. Cette suite est de Cauchy dans $\tilde{M}$ parce que dans un espace métrique, une suite convergente est de Cauchy. La suite (a_n) est elle-même également de Cauchy parce que

$$d(a_n, a_m) = d\big(f(a_n), f(a_m)\big). \tag{18.623}$$

Étant donné que (a_n) est de Cauchy dans M, elle converge vers un élément que nous nommons $a \in M$. Par continuité de f nous avons alors

$$\tilde{f}(a) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) = x. \tag{18.624}$$

Cela prouve que x est bien dans l'image de $\tilde{f}$ et donc que $\tilde{f}$ est surjective.

□

18.17 Complétion d'un espace métrique

Une conséquence du théorème de prolongement est le théorème suivant qui permet de compléter un espace métrique.

Théorème 18.125 (Complétion d'un espace métrique[312, 311])**.**
Tout espace métrique se plonge par une isométrie à image dense dans un espace métrique complet. De plus ce dernier est unique à isométrie près.

Plus précisément, soit (M, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\tilde{M}$ muni d'un plongement isométrique $\varphi\colon M \to \tilde{M}$ tel que $\varphi(M)$ soit dense dans $\tilde{M}$.

Ce complété de M est unique au sens suivant. Si $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$ sont deux espaces métriques complets munis de plongements isométriques $f_i\colon M \to \tilde{M}_1$ dont les images sont denses, alors il existe une bijection isométrique $\phi\colon \tilde{M}_1 \to \tilde{M}_2$ telle que $\phi \circ f_1 = f_2$.

Démonstration. Nous ne prouvons que l'existence.

Soit C_M l'ensemble des suites de Cauchy de M. Nous définissons

$$\begin{aligned} f\colon C_M \times C_M &\to \mathbb{R} \\ u, v &\mapsto \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n). \end{aligned} \tag{18.625}$$

Notre première tâche est de nous assurer que cela est bien défini, c'est-à-dire que la limite existe toujours. En effet, si u et v sont des suites de Cauchy dans M, nous avons

$$|d(u_n, v_n) - d(u_m, v_m)| \leqslant d(u_n, v_n) + d(u_m, v_m) \leqslant 2\epsilon \tag{18.626}$$

dès que m et n sont assez grand. Cela prouve que la suite $n \mapsto d(u_n, v_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, elle converge[64].

Nous considérons la relation d'équivalence $u \sim v$ si et seulement si $f(u, v) = 0$. Nous posons $\tilde{M} = C_M/\sim$ et nous y mettons la distance

$$d([u], [v]) = f(u, v) \tag{18.627}$$

et nous devons encore vérifier que cela est bien défini. Prenons $u' \sim u$ et $v' \sim v$. Alors nous avons

$$d(u'_n, v'_n) \leqslant d(u'_n, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, v'_n), \tag{18.628}$$

et donc

$$d(u', v') = \lim_{n\to\infty} d(u'_n, v'n) \leqslant \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = d(u, v). \tag{18.629}$$

64. Ici nous utilisons la complétude de $\mathbb{R}$. Cette dernière doit donc être démontrée indépendamment. De plus nous ne pouvons pas définir $\mathbb{R}$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$ en utilisant ce théorème.

Le même argument en inversant les primes et les non primes montre l'inégalité inverse. Donc $d(u,v)=d(u',v')$ dans C_M, et donc la distance (18.627) est bien définie sur $\tilde{M}$.

Afin de s'assurer que $\tilde{M}$ répond bien à la question du théorème, il faut encore démontrer les points suivants :

— M se plonge isométriquement dans $\tilde{M}$.

— l'image de M par le plongement est dense dans $\tilde{M}$.

— $\tilde{M}$ est complet.

Nous allons maintenant considérer l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon M &\to \tilde{M}\\ x &\mapsto \text{la classe de la suite constante } x.\end{aligned} \tag{18.630}$$

Plongement isométrique Nous allons montrer que cela est une isométrie bijective et que $\varphi(M)$ est dense dans $\tilde{M}$. Le fait que φ soit bijective entre M et $\varphi(M)$ est évident. C'est une isométrie parce que

$$d\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)=\lim_{n\to\infty}d\big(\varphi(x)_n,\varphi(y)_n\big)=d(x,y). \tag{18.631}$$

Densité Soit $[u]\in\tilde{M}$. Tous les termes u_n sont des éléments de M. Nous considérons la suite dans $\varphi(M)$ donnée par

$$a_n=\varphi(u_n) \tag{18.632}$$

Chaque a_n est un élément [65] de $\tilde{M}$. Montrons que (a_n) converge dans $\tilde{M}$ vers u. Nous avons

$$\begin{aligned}d(a_n,u)&=\lim_{k\to\infty}d\big((a_n)_k,u_k\big) && (18.633a)\\ &=\lim_{k\to\infty}d(u_n,u_k) && (18.633b)\\ &=d(u_n,\ell) && (18.633c)\end{aligned}$$

en notant ℓ la limite de la suite (u_n). Ici nous avons utilisé le fait que la fonction distance était continue pour l'inverser avec la limite, par le théorème 13.155. Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty}d(a_n,[u])=\lim_{n\to\infty}d(u_n,\ell)=0. \tag{18.634}$$

Complétude Nous passons maintenant à la preuve du fait que $\tilde{M}$ est complet. Soit (y_n) une suite de Cauchy dans $\tilde{M}$. Soit $\epsilon>0$; nous définissons $K(n)$ par

$$d\big((y_n)_k,(y_n)_l\big)<\epsilon \tag{18.635}$$

dès que $k,l\geqslant K(n)$. Cette définition fonctionne parce que pour chaque n, y_n est une suite de Cauchy dans M. Nous posons

$$x_n=(y_n)_{K(n)}\in M \tag{18.636}$$

et nous allons montrer que (x_n) est de Cauchy dans M –donc est un élément de $\tilde{M}$– et que $y_k\to(x_n)$ dans $\tilde{M}$.

Nous commençons par montrer que (x_n) est de Cauchy dans M. Nous avons

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m)&=d\big((y_n)_{K(n)},(y_m)_{K(m)}\big) && (18.637a)\\ &\leqslant d\big((y_n)_{K(n)},(y_n)_l\big)+d\big((y_n)_l,(y_m)_l\big)+d\big((y_m)_l,(y_m)_{K(m)}\big) && (18.637b)\end{aligned}$$

Nous choisissons n,m tels que $d(y_n,y_m)<\epsilon$, ce qui nous permet de choisir l de telle façon à avoir $d\big((y_n)_k,(y_m)_k\big)<\epsilon$ pour tout $k\geqslant l$. De plus, quitte à encore augmenter l, nous

65. À partir de maintenant nous n'écrivons plus explicitement la classe d'équivalence.

supposons que $l > K(m)$ et $l > K(m)$. Avec ces choix nous voyons que $d(x_n, x_m) < 3\epsilon$, ce qui signifie que la suite (x_n) est de Cauchy dans M.

En ce qui concerne la convergence $y_n \to (x)$, on a

$$d\big(y_n, (x)\big) = \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_k, (y_k)_{K(k)}\big) \tag{18.638a}$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_k, (y_n)_l\big) + \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_l, (y_k)_l\big) + \lim_{k\to\infty} d\big((y_k)_l, (y_k)_{K(k)}\big) \tag{18.638b}$$

Nous devons trouver un n tel que si k est suffisamment grand, le tout est majoré par ϵ. Voici nos choix :

— n tel que $d(y_n, y_m) < \epsilon$ dès que $m \geqslant n$,

— $k > n$,

— $k > K(n)$,

— $l > k$,

— $l > K(k)$,

— l suffisamment grand pour que $d\big((y_n)_l, (y_k)_l\big) < \epsilon$.

Avec tous ces choix, les trois termes de (18.638b) sont plus petits que ϵ.

Ceci prouve que $\tilde{M}$ est complet.

□

Théorème 18.126 (Principe du prolongement analytique)**.**
Soit U un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble D de U contenant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.

18.18 Un petit extra

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que

(1) $f(1) = 1$,

(2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout réels x et y.

Nous pouvons montrer[66] que la seule fonction *continue* qui possède ces propriétés est la fonction identité $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De la même manière, il est aisé de voir que les seules applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ sont de la forme

$$f(x) = Ax \tag{18.639}$$

pour une constante réelle A. Une question naturelle qu'on peut alors se poser est la suivante :

Est-il possible de définir une fonction non continue ayant les propriétés (1) et (2) ?

En fait, il est possible de démontrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ (où F est un espace vectoriel) sera continue. Ceci ne reste plus vrai si l'espace vectoriel E est de dimension infinie. Donc une manière de trouver une réponse positive à la question posée plus haut, serait de voir $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel de dimension infinie. Après un peu de réflexion, la réponse est venue à nous (merci à Nicolas et à Samuel).

Si nous admettons l'axiome du choix, alors nous pouvons appliquer le théorème de Zorn et nous savons que tout espace vectoriel admet une base. En particulier, l'ensemble des réels vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ admet une base, i.e. $\exists (e_i)_{i\in I}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que tout réel s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de ces e_i, i.e.

$$\forall r \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \text{ des éléments de } \mathbb{Q} \text{ tels que } r = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i. \tag{18.640}$$

66. et toi, tu le peux ?

Utilisons cette base pour définir une fonction h de la manière suivante.

$$\forall i \in I, \text{ on définit } h(e_i) = \alpha_i \tag{18.641}$$

où les α_i doivent être bien choisis dans $\mathbb{R}^n$. Pour satisfaire la propriété (1), choisissons sans perte de généralité $e_1 = 1$ et $h(e_1) = 1$. Ajoutons à cette propriété la linéarité en imposant que

$$h(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i \alpha_i. \tag{18.642}$$

Les équations (1) et (2) nous permettent de voir que, moyennant le choix des α_i, la fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}^n$ et linéaire. Il est clair que si nous prenons par exemple

$$\alpha_i = e_i \ \forall i \in I$$

nous obtenons que la fonction h est en fait la fonction identité sur $\mathbb{R}^n$. Par contre, si nous définissons la fonction h comme satisfaisant la propriété (2) et si nous choisissons les α_i dans (1) de la manière suivante

$$\begin{aligned} h(e_1) &= e_2 \\ h(e_2) &= e_1 \\ h(e_i) &= e_i \quad \forall i \in I \backslash \{1, 2\} \end{aligned} \tag{18.643}$$

alors la fonction ainsi obtenue est linéaire et bien définie mais n'est plus l'identité. Donc nous avons trouvé une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas continue.