Le Frido 2026
volume 2
Laurent Claessens

Plusieurs extensions et versions de ce livre.

1. La version courante, régulièrement mise à jour et qui deviendra petit à petit le Frido 2027. Téléchargeable sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf`

2. La version la plus complète, contenant beaucoup de géométrie différentielle

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/giulietta.pdf`

3. Et bien entendu les sources LaTeX

   `https://github.com/LaurentClaessens/mazhe`

Copyright 2011-2026 Laurent Claessens, and many contributors. A complete list could be retrieved from the git log.
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled “GNU Free Documentation License”.

(c) 2015-2026 David Revoy pour les illustrations de couverture CC-BY,
https://www.peppercarrot.com/

ISBN : 979-10-97085-47-6

Chapitre 10

Espaces vectoriels (encore)

10.1 Déterminants

SecGYzHWs

10.2 Applications multilinéaires

À propos d'analyse sur les formes multilinéaires (contiuité, norme), voir 12.8.

DefFRHooKnPCT

Définition 10.1 (Application multilinéaire)**.**
*Soient des espaces vectoriels $V_1, \dots, V_k$ ainsi qu'un espace vectoriel W. Une application $T\colon V^k \to W$ est dite k-**linéaire** ou k-**multilinéaire** si pour tout $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ les applications*

$$\begin{aligned} T_i\colon V_i &\to W \\ x &\mapsto T(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned} \tag{10.1}$$

sont linéaires.

*En particulier lorsque $k = 2$, nous parlons d'applications **bilinéaires**.*

Nous notons $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$ ou $\mathcal{L}_k(V_1, \dots, V_k; W)$ l'ensemble des applications k-linéaires de $V_1 \times \dots \times V_k$ vers W. Lorsque tout les V_i sont identiques nous notons $\mathcal{L}_k(V, W)$.

DEFooZFCKooGIoYrE

Définition 10.2.
*Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme multilinéaire $f\colon E^k \to \mathbb{K}$ est **antisymétrique** si*

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k) \tag{10.2}$$

pour tout couple (i, j).

10.3.
Il serait une erreur[1] de noter $\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$ l'ensemble de applications bilinéaires sur V. En effet, $\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications linéaires $V \times V \to \mathbb{R}$.

Si $S \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$, il n'y a pas de formules particulières pour $S(u, \lambda v)$. Par contre si $T \in \mathcal{L}_2(V, W)$, alors

$$T(u, \lambda v) = \lambda T(u, v). \tag{10.3}$$

Nous avons par contre

$$T(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 T(u, v) \tag{10.4}$$

alors que

$$S(\lambda u, \lambda v) = S\big(\lambda(u, v)\big) = \lambda S(u, v). \tag{10.5}$$

Certains[325] notent $\otimes^k V^*$ l'espace des formes k-linéaires sur V, voir la proposition 12.236.

Exemple 10.4.
Soit une application linéaire $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. L'application de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ associée à A définie par

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x, y &\mapsto x \cdot Ay \end{aligned} \tag{10.6}$$

est une forme bilinéaire.

[1] Mais je crois que c'est fait à plusieurs endroits dans le Frido. Faire attention.

Elle est aussi donnée par la formule

$$T_A(x,y) = x \cdot Ay = \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j. \tag{10.7}$$

△

PROPooXIWIooWVeEJo

Proposition 10.5.
Si $T\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ est une application k-multilinéaire, alors nous avons

$$T\big(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\big) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} S_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k} \tag{10.8}$$

où $S_{i_1,\dots,i_k} = T(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$.

Démonstration. Pour chaque j nous posons $x^{(j)} = \sum_l x^{(j)}_l e_l$ et en utilisant la multilinéarité,

$$T(x^{(1)},\dots,x^{(k)}) = T\big(\sum_{i_1} x^{(1)}_{i_1} e_{i_1},\dots,\sum_{i_k} x^{(k)}_{i_k} e_{i_k}\big) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k} T(e_{i_1},\dots,e_{i_k}). \tag{10.9}$$

□

10.2.1 Formes multilinéaires alternées

DEFooYWOBooUGJojy

Définition 10.6.
*Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application multilinéaire **alternée** sur E est une application k-linéaire $f\colon E^k \to \mathbb{K}$ telle que $f(v_1,\dots,v_k) = 0$ dès que $v_i = v_j$ pour certains $i \neq j$.*

*Une application multilinéaire alternée est une **forme linéaire**.*

LemHiHNey

Lemme 10.7 ([326])**.**
Une forme k-linéaire alternée est antisymétrique[2]*. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, alors une forme antisymétrique est alternée*[3]*.*

Démonstration. Soit f une forme alternée ; quitte à fixer toutes les autres variables, nous pouvons travailler avec une 2-forme et simplement montrer que $f(x,y) = -f(y,x)$. Pour ce faire nous écrivons

$$0 = f(x+y,x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = f(x,y) + f(y,x). \tag{10.10}$$

Pour la réciproque, si f est antisymétrique, alors $f(x,x) = -f(x,x)$. Cela montre que $f(x,x) = 0$ lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de deux. □

ProprbjihK

Proposition 10.8 ([327])**.**
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, où la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas deux. L'espace des n-formes multilinéaires alternées sur E est de $\mathbb{K}$-dimension 1.

Démonstration. Soient $\{e_i\}$, une base de E, une n-forme linéaire alternée $f\colon E \to \mathbb{K}$ ainsi que des vecteurs $(v_1,\dots,v_n)$ de E. Nous pouvons les écrire dans la base

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \tag{10.11}$$

et alors exprimer f par

$$f(v_1,\dots,v_n) = f\big(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{1i_1} e_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{ni_n} e_{i_n}\big) \tag{10.12a}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} \alpha_{1i_1}\dots\alpha_{ni_n} f(e_{i_1},\dots,e_{i_n}). \tag{10.12b}$$

[2] Antisymétrique, définition 10.2.
[3] Définition 10.6.

Étant donné que f est alternée, les seuls termes de la somme sont ceux dont les i_k sont tous différents, c'est-à-dire ceux où $\{i_1,\dots,i_n\}=\{1,\dots,n\}$. Il y a donc un terme par élément du groupe des permutations S_n et

$$f(v_1,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_{\sigma(1)1}\dots\alpha_{\sigma(n)n}f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}).\tag{10.13}$$

En utilisant encore une fois le fait que la forme f soit alternée, $f=f(e_1,\dots,e_n)\Pi$ où

$$\Pi(v_1,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\dots\alpha_{\sigma(n)n}.\tag{10.14}$$

Pour rappel, la donnée des v_i est dans les nombres α_{ij}.

L'espace des n-formes alternées est donc *au plus* de dimension 1. Pour montrer qu'il est exactement de dimension 1, il faut et suffit de prouver que Π est alternée. Par le lemme 10.7, il suffit de prouver que cette forme est antisymétrique[4].

Soient donc $v_1,\dots,v_n$ tels que $v_i=v_j$. En posant $\tau=(1i)$ et $\tau'=(2j)$ et en sommant sur $\sigma\tau\tau'$ au lieu de σ, nous pouvons supposer que $i=1$ et $j=2$. Montrons que $\Pi(v,v,v_3,\dots,v_n)=0$ en tenant compte que $\alpha_{i1}=\alpha_{i2}$:

$$\begin{aligned}\Pi(v,v,v_3,\dots,v_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\dots\alpha_{\sigma(n)n}&\text{(10.15a)}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma\tau)\alpha_{\sigma\tau(1)1}\alpha_{\sigma\tau(2)2}\alpha_{\sigma\tau(3)3}\dots\alpha_{\sigma\tau(n)n}\qquad\text{où }\tau=(12)&\text{(10.15b)}\\&=-\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\alpha_{\sigma(2)2}\alpha_{\sigma(3)3}\dots\alpha_{\sigma(n)n}&\text{(10.15c)}\\&=-\Pi(v,v,v_3,\dots,v_n).&\text{(10.15d)}\end{aligned}$$

□

10.2.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Nous considérons un corps $\mathbb{K}$ et l'espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

DEFooODDFooSNahPb

Définition 10.9 (Déterminant d'une famille de vecteurs[16])**.**
*Le **déterminant** de la famille de vecteurs $(v_1,\dots,v_n)$ dans la base $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ est l'élément de $\mathbb{K}$*

$$\det{}_{(b_1,\dots,b_n)}(v_1,\dots,v_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}b^*_{\sigma(i)}(v_i)\tag{10.16}$$

EQooOJEXooXUpwfZ

où

- *la somme porte sur le groupe symétrique,*
- *le nombre $\epsilon(\sigma)$ est la signature[5] de la permutation σ,*
- *les éléments $\{b_i^*\}$ sont la base duale[6] de $\{b_i\}$.*

10.10.
La base $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et l'élément e_k^* est la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned}e_k^*\colon\mathbb{K}^n&\to\mathbb{K}\\\sum_i x_ie_i&\mapsto x_k.\end{aligned}\tag{10.17}$$

Il n'est pas sous-entendu que $\mathbb{K}^n$ ait un produit scalaire. Il n'est donc pas autorisé de dire que $\{e_i\}$ est une base orthonormée et que $e_k^*(x)=\langle e_k,x\rangle$. Ce genre d'égalités sont vraies dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, mais n'ont pas de sens en général.

Le lemme 12.5 va un peu parler du cas où $\mathbb{K}^n$ est muni d'une base orthonormée.

LemJMWCooELZuho

Lemme 10.11 ([16])**.**
Les propriétés du déterminant. Soit B une base de E.

[4] C'est ici que joue l'hypothèse sur la caractéristique de $\mathbb{K}$.
[5] Définition 2.117.
[6] Définition 6.144.

ITEMooAHOHooDZgtSB

(1) *L'application* $\det_B : E^n \to \mathbb{K}$ *est n-linéaire.*

ITEMooTXXBooBmDtzd

(2) *L'application* $\det_B : E^n \to \mathbb{K}$ *est n-linéaire est antisymétrique et alternée*[7].

ITEMooNFJTooTqGoPr

(3) *Pour toute base,* $\det_B(B) = 1$.

ITEMooALRQooDvBzDQ

(4) *Le déterminant ne change pas si on remplace un vecteur par une combinaison linéaire des autres :*

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) = \det_B\big(v_1 + \sum_{s=2}^{n} a_s v_s, v_2, \dots, v_n\big). \tag{10.18}$$

ITEMooQTTRooMbzqyW

(5) *Si on permute les vecteurs,*

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) = \epsilon(\sigma) \det_B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}). \tag{10.19}$$

ITEMooIPIDooTrerVF

(6) *Si* B' *est une autre base :*

EqAWICooBLTTQY

$$\det_B = \det_B(B') \det_{B'} \tag{10.20}$$

ITEMooXKTAooXynFTE

(7) *Nous avons aussi la formule* $\det_B(B') \det_{B'}(B) = 1$.

ItemDWFLooDUePAf

(8) *Les vecteurs* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *forment une base si et seulement si* $\det_B(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Démonstration. Point par point.

(1) (1) En posant $v_1 = x_1 + \lambda x_2$ nous avons

$$\det_B(x_1 + \lambda x_2, v_2, \dots, v_n) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma(i)}(v_i) \tag{10.21a}$$

$$= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) \Big(e^*_{\sigma(1)}(x_1 + \lambda x_2)\Big) \prod_{i=2}^{n} e^*_{\sigma(i)}(v_i). \tag{10.21b}$$

À partir de là, la linéarité de $e^*_{\sigma(1)}$ montre que $\det_B$ est linéaire en son premier argument. Pour les autres arguments, le même calcul tient.

(2) (2)

Nous prouvons à présent que det est alternée. Si votre corps est de caractéristique différente de deux, vous pouvez lire la proposition 10.12.

Supposons $v_k = v_l$, et considérons la permutation $\beta = (k, l)$. Nous savons par la proposition 7.46 que $S_n = A_n \cup A_n\beta$. Cela nous permet de décomposer la somme sur S_n en deux parties :

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_i \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) = \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^\sigma \prod_i \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) + \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^{\sigma\beta} \prod_i \epsilon^*_{(\sigma\beta)(i)}(v_i). \tag{10.22}$$

EQooWFHQooTrTTWJ

D'abord $(-1)^\sigma = 1$ et $(-1)^{\sigma\beta} = -1$. Ensuite, pour un $\sigma \in A_n$ donné, nous avons

$$\prod_i \epsilon^*_{(\sigma\beta)(i)}(v_i) = \epsilon^*_{(\sigma\beta)(k)}(v_k)\epsilon^*_{(\sigma\beta)(l)}(v_l) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon^*_{(\sigma\beta)(i)}(v_i) \tag{10.23a}$$

$$= \epsilon^*_{\sigma(l)}(v_k)\epsilon^*_{\sigma(k)}(v_l) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) \tag{10.23b}$$

$$= \epsilon^*_{\sigma(l)}(v_l)\epsilon^*_{\sigma(k)}(v_k) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i) \tag{10.23c}$$

$$= \prod_i \epsilon^*_{\sigma(i)}(v_i). \tag{10.23d}$$

Donc les deux termes de la somme (10.22) ne diffèrent que par un signe. Elle est donc nulle, et la forme déterminant est alternée.

La fonction det est antisymétrique parce que alternée, voir le lemme 10.7.

[7] Alternée, définition 10.6. En caractéristique 2, alternée n'est pas équivalent à symétrique.

(3) (3) Nous avons

$$\det_B(B) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \underbrace{e^*_{\sigma(i)}(e_i)}_{=\delta_{\sigma(i),i}}. \tag{10.24}$$

Si σ n'est pas l'identité, le produit contient forcément un facteur nul. Il ne reste de la somme que $\sigma = \mathrm{Id}$ et le résultat est 1.

(4) (4) Vu que $\det_B$ est linéaire en tous ses arguments,

$$\det_B\left(v_1 + \sum_{s=2}^{n} a_s v_s, v_2, \dots, v_n\right) = \det_B(v_1, \dots, v_n) + \sum_{s=2}^{n} a_s \det_B(v_s, v_2, \dots, v_n). \tag{10.25}$$

Chacun des termes de la somme est nul parce qu'il y a répétition de v_s parmi les arguments alors que la forme est alternée.

(5) (5) Nous devons calculer $\det_B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$, et pour y voir plus clair nous posons $w_i = v_{\sigma(i)}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\det_B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) &= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma'(i)}(w_i) && \text{(10.26a)}\\
&= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma'(i)}(v_{\sigma(i)}) && \text{(10.26b)}\\
&= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma^{-1}\sigma'(i)}(v_i) && \text{(10.26c)}\\
&= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma\sigma') \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma'(i)}(v_i) && \text{(10.26d)}\\
&= \epsilon(\sigma) \det_B(v_1, \dots, v_n). && \text{(10.26e)}
\end{aligned}$$

Justifications : nous avons d'abord modifié l'ordre des éléments du produit et ensuite l'ordre des éléments de la somme. Nous avons ensuite utilisé le fait que $\epsilon\colon S_n \to \{0, 1\}$ était un morphisme de groupe (proposition 2.124).

(6) (6) Étant donné que l'espace des formes multilinéaires alternées est de dimension 1, il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_B = \lambda \det_{B'}$. Appliquons cela à B' :

$$\det_B(B') = \lambda \det_{B'}(B'), \tag{10.27}$$

donc $\lambda = \det_B(B')$.

(7) (7) Il suffit d'appliquer l'égalité précédente à B en nous souvenant que $\det_B(B) = 1$.

(8) (8) Si $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ est une base alors $\det_B(B') \neq 0$, sinon il n'est pas possible d'avoir $\det_B(B') \det_{B'}(B) = 1$.

À l'inverse, si B' n'est pas une base, c'est que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est liée par la proposition 6.20. Il y a donc moyen de remplacer un des vecteurs par une combinaison linéaire des autres. Le déterminant s'annule alors.

□

PROPooXNLDooGGkHpd

Proposition 10.12.
Si la caractéristique du corps de base n'est pas deux, le déterminant est antisymétrique et alterné.

Démonstration. Si la caractéristique du corps de base n'est pas deux, une forme antisymétrique est alternée (lemme 10.7).

Pour prouver que le déterminant est antisymétrique, remarquez que permuter v_k et v_l revient à calculer le nombre $\det_B(v_{\sigma_{kl}(1)}, \dots, v_{\sigma_{kl}(n)})$ au lieu de $\det_B(v_1, \dots, v_n)$. Cela revient à changer la somme $\sum_\sigma$ en $\sum_{\sigma\circ\sigma_{kl}}$. Cela multiplie $\epsilon(\sigma)$ par -1 parce qu'on ajoute une permutation.

Donc le déterminant est antisymétrique. Nous en déduisons qu'il est alterné parce que, en permutant trivialement v_1 et v_1, nous obtenons $\det_B(v_1, v_1) = -\det_B(v_1, v_1)$. Si le corps est de caractéristique différente de deux, cela implique que $\det_B(v_1, v_1) = 0$. □

D'après la proposition 10.8, il existe une unique forme n-linéaire alternée égale à 1 sur B, et c'est $\det_B\colon E^n \to \mathbb{K}$.

10.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

L'interprétation géométrique du déterminant en termes d'aires et de volumes est donnée après le théorème 16.274. Pour un déterminant entre deux espaces différents, voir la proposition 12.104.

10.13.
Voici une définition du déterminant d'une application linéaire $f : E \to E$. Comme expliqué dans [328], il est peu probable qu'il existe une définition satisfaisante de déterminant pour une application linéaire $f : E \to F$, même si E et F ont une même dimension finie.

Cela soit dit en passant, ça rend plus compliqué que prévu la preuve que $\mathrm{GL}(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$. Il ne suffira pas de dire que le déterminant est une application continue. Voir la proposition 12.104.

LEMooQTRVooAKzucd

Lemme-Définition 10.14 (Déterminant d'un endomorpisme)**.**
Si $f : E \to E$ est un endomorphisme, et si les parties B et B' sont deux bases, alors[8]

$$\det_B\big(f(B)\big) = \det_{B'}\big(f(B')\big). \tag{10.28}$$

Ce nombre, indépendant de la base choisie est nommé le ***déterminant*** *de f et est noté $\det(f)$.*

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : E^n &\to \mathbb{K} \\ v_1, \dots, v_n &\mapsto \det_B\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big) \end{aligned} \tag{10.29}$$

est n-linéaire et alternée ; il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_B$. En appliquant cela à B :

$$\det_B\big(f(B)\big) = \lambda \det_B(B) = \lambda. \tag{10.30}$$

Nous avons donc déjà prouvé que $\lambda = \det_B\big(f(B)\big)$, c'est-à-dire

$$\det_B\big(f(v)\big) = \det_B\big(f(B)\big) \det_B(v). \tag{10.31}$$

Nous allons maintenant introduire B' là où il y a du v en utilisant les formules (10.20) :

$$\det_B\big(f(v)\big) = \det_B(B') \det_{B'}\big(f(v)\big) \tag{10.32a}$$
$$\det_B(v) = \det_B(B') \det_{B'}(v). \tag{10.32b}$$

Nous obtenons

$$\det_{B'}\big(f(v)\big) = \det_B\big(f(B)\big) \det_{B'}(v). \tag{10.33}$$

Et on applique cela à $v = B'$:

$$\det_{B'}\big(f(B')\big) = \det_B\big(f(B)\big) \underbrace{\det_{B'}(B')}_{=1}. \tag{10.34}$$

□

PropYQNMooZjlY1A

Proposition 10.15.
Principales propriétés géométriques du déterminant d'un endomorphisme.

ItemUPLNooYZMRJy

(1) Si f et g sont des endomorphismes, alors $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.

ITEMooNZNLooODdXeH

(2) L'endomorphisme f est un automorphisme[9] *si et seulement si $\det(f) \neq 0$.*

ITEMooZMVXooLGjvCy

(3) Si $\det(f) \neq 0$ alors $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

ItemooPJVYooYSwqaE

(4) L'application $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un morphisme de groupe.

Démonstration. Point par point.

(1) Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E^n &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto \det_B\big(f(v)\big). \end{aligned} \tag{10.35}$$

[8] Définition de $\det_B(B')$, 10.9.
[9] Endomorphisme inversible, définition 6.41.

Comme d'habitude nous avons $\varphi(v) = \lambda \det_B(v)$. En appliquant à B et en nous souvenant que $\det_B(B) = 1$ nous avons $\det_B\big(f(B)\big) = \lambda$. Autrement dit :

$$\lambda = \det(f). \tag{10.36}$$

Calculons à présent $\varphi\big(g(B)\big)$: d'une part,

$$\varphi\big(g(B)\big) = \det_B\big((f \circ g)(B)\big) \tag{10.37}$$

et d'autre part,

$$\varphi\big(g(B)\big) = \lambda \det_B\big(g(B)\big) = \lambda \det(g) \tag{10.38}$$

En égalisant et en reprenant la la valeur déjà trouvée de λ,

$$\det\big((f \circ g)(B)\big) = \det(f)\det(g), \tag{10.39}$$

ce qu'il fallait.

(2) Supposons que f soit un automorphisme. Alors si B est une base, $f(B)$ est une base. Par conséquent $\det(f) = \det_B\big(f(B)\big) \neq 0$ parce que $f(B)$ est une base (lemme 10.11(8)).

Réciproquement, supposons que $\det(f) \neq 0$. Alors si B est une base quelconque nous avons $\det_B\big(f(B)\big) \neq 0$, ce qui est uniquement possible lorsque $f(B)$ est une base. L'application f transforme donc toute base en une base et est alors un automorphisme d'espace vectoriel.

(3) Vu que le déterminant de l'identité est 1 et que f est inversible, $1 = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f)\det(f^{-1})$.

□

PROPooFKDXooKMSolt

Proposition 10.16.
Soient deux espaces vectoriels E et F de dimension finies n et m sur le corps $\mathbb{K}$ munis de bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$. À une matrice $A \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ nous associons l'application linéaire[10]

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha i} x_i f_\alpha. \tag{10.40}$$

Alors, en ce qui concerne les déterminants[11]*, nous avons*

(1) $\det(f_A) = \det(A)$

(2) $\det(f_{AB}) = \det(f_A)\det(f_B)$

Démonstration. Nous devons étudier la formule

$$\det(f_A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} e^*_{\sigma(i)}\big(f_A(e_i)\big). \tag{10.41}$$

En premier lieu nous avons

$$f_A(e_i) = \sum_{jk} A_{jk}(e_i)_k e_j = \sum_j A_{ji} e_j. \tag{10.42}$$

Nous avons alors

$$e^*_{\sigma(i)}\big(f_A(e_i)\big) = \sum_j A_{ji} \underbrace{e^*_{\sigma(i)}(e_j)}_{\delta_{j\sigma(i)}} = A_{\sigma(i)i}. \tag{10.43}$$

Au final,

$$\det(f_A) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)i} = \det(A^t) = \det(A) \tag{10.44}$$

où la dernière égalité est autorisée par le lemme 6.91.

Cela prouve la formule $\det(f_A) = \det(A)$.

En ce qui concerne la seconde formule, il s'agit de se souvenir de la proposition 6.83 qui donne $f_{AB} = f_A \circ f_B$, et ensuite de la proposition 10.15(1) qui donne $\det(f_A \circ f_B) = \det(f_A)\det(f_B)$. □

[10] Dont nous avons déjà beaucoup parlé entre autres dans la proposition 6.83.
[11] Définition 10.14 pour les applications linéaires et 6.89 pour les matrices.

Exemple 10.17.
Le déterminant de Vandermonde (proposition 6.135) est alterné, semi-symétrique et non symétrique. Le fait qu'il soit alterné est le fait qu'il soit un déterminant. Étant donné qu'il est alterné, il est semi-symétrique parce que sur A_n, nous avons $\epsilon = 1$. Étant donné qu'il est alterné, il change de signe sous l'action des éléments impairs de S_n et n'est donc pas symétrique. △

PropUDqXax

Proposition 10.18.
Un polynôme semi-symétrique $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ se décompose de façon unique en

$$f = P + VQ \tag{10.45}$$

où P et Q sont deux polynômes symétriques.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'unicité en montrant que si $f = P + VQ$ avec P et Q symétrique, alors P et Q sont donnés par des formules explicites en termes de f.

Si σ_1 et σ_2 sont deux permutations impaires de $\{1, \ldots, n\}$, alors $\sigma_1 \cdot f = \sigma_2 \cdot f$ parce que l'élément $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ est pair (proposition 2.124), de telle sorte que $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \cdot f = f$. Nous posons donc $g = \tau \cdot f$ où τ est une permutation impaire quelconque – par exemple une transposition.

Vu que V est alternée et que τ est une transposition nous avons

$$g = \tau \cdot f = P - VQ. \tag{10.46}$$

Donc $f + g = 2P$ et $f - g = 2VQ$. Cela donne P et Q en termes de f et g, et donc l'unicité.

Attention : cela ne donne pas un moyen de prouver l'existence parce que rien ne prouve pour l'instant que $f - g$ peut effectivement être écrit sous la forme VQ, c'est-à-dire que $f - g$ soit divisible par V. C'est cela que nous allons nous atteler à démontrer maintenant.

Nous commençons par prouver que $f + g$ est symétrique et $f - g$ alterné. Si σ est une transposition,

$$\sigma \cdot (f + g) = \sigma \cdot f + \sigma\tau \cdot f = g + f \tag{10.47}$$

parce que $\sigma\tau$ est pair. De la même façon,

$$\sigma \cdot (f - g) = g - f = \epsilon(\sigma)(f - g). \tag{10.48}$$

Dans les deux cas nous concluons en utilisant le fait que toute permutation est un produit de transpositions (proposition 2.116) et que ϵ est un homomorphisme[12].

Soient maintenant deux entiers $h < k$ dans $\{1, \ldots, n\}$ et l'anneau

$$\big(\mathbb{K}[T_1, \ldots, \hat{T}_k, \ldots, T_n]\big)[T_k]. \tag{10.49}$$

Cet anneau contient le polynôme $T_k - T_h$ où T_k est la variable et T_h est un coefficient. Nous faisons la division euclidienne de $f - g$ par $T_k - T_h$ parce que nous avons dans l'idée de faire arriver le déterminant de Vandermonde et donc le produit de toutes les différences $T_k - T_h$:

$$f - g = (T_k - T_h)q + r \tag{10.50}$$

EqSHdgrG

où $\deg_{T_k} r < 1$, c'est-à-dire que r ne dépends pas de T_k. Nous revoyons maintenant l'égalité (10.50) dans $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ et nous y appliquons la transposition τ_{kh}. Nous savons que $\tau_{kh}(f - g) = -(f - g)$ et $\tau_{kh}(T_k - T_h) = -(T_k - T_h)$, et donc

$$-(f - g) = -(T_k - T_h)\tau_{kh} \cdot q + \tau_{kh} \cdot r \tag{10.51}$$

EqVOhiKR

où $\tau_{kh} \cdot r$ ne dépend pas de T_h. Nous appliquons à (10.51) l'application

$$\begin{aligned} t\alpha \colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] &\to \mathbb{K}[T_1, \ldots, \hat{T}_k, \ldots, T_n] \\ \alpha(PT_1, \ldots, \hat{T}_k, \ldots, T_n) &= P(T_1, \ldots, T_h, \ldots, T_n). \end{aligned} \tag{10.52}$$

Cette application vérifie $\alpha\big(\tau_{kh} \cdot r\big) = \alpha(r)$ et nous avons

$$-\alpha(f - g) = \alpha(r). \tag{10.53}$$

Puis en appliquant α à la relation $f - g = (T_k - T_h)q + r$, nous trouvons

$$\alpha(f - g) = \alpha(r), \tag{10.54}$$

[12] Voir -1.1.

et par conséquent $\alpha(r) = 0$. Ici nous utilisons l'hypothèse de caractéristique différente de deux. Dire que $\alpha(r) = 0$, c'est dire que r est divisible par $T_k - T_h$, mais r étant de degré zéro en T_k, nous avons $r = 0$. Par conséquent $T_k - T_h$ divise $f - g$ pour tout $h < k$, et nous pouvons définir un polynôme Q par

$$f - g = 2Q \prod_{h<k} \prod_{k\leqslant n} (T_k - T_h) = 2Q(T_1, \ldots, T_n)V(T_1, \ldots, T_n), \tag{10.55}$$

où nous avons utilisé la formule du déterminant de Vandermonde de la proposition 6.135.

Étant donné que $f+g$ est un polynôme symétrique, nous allons aussi poser $f+g = 2P$ avec P symétrique.

Montrons à présent que Q est un polynôme symétrique. Soit $\sigma \in S_n$; vu que nous savons déjà que $f - g$ est alternée, nous avons

$$\sigma \cdot (f - g) = \epsilon(\sigma)(f - g) = \epsilon(\sigma)2QV, \tag{10.56}$$

Mais en appliquant σ à l'équation (10.55),

$$\sigma \cdot (f - g) = 2(\sigma \cdot V)(T_1, \ldots, , T_n)(\sigma \cdot Q)(T_1, \ldots, T_n) \tag{10.57a}$$
$$= 2\epsilon(\sigma)V(T_1, \ldots, T_n)(\sigma \cdot Q)(T_1, \ldots, T_n). \tag{10.57b}$$

Nous égalisons cela avec (10.56) et nous souvenant que l'anneau $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ est intègre par le théorème 3.260. Ensuite nous simplifions par $2\epsilon(\sigma)V$ pour obtenir

$$Q = \sigma \cdot Q, \tag{10.58}$$

c'est-à-dire que Q est symétrique.

Au final nous avons $f + q = 2P$ et $f - g = 2VQ$ avec P et Q symétriques. En faisant la somme,

$$f = P + VQ. \tag{10.59}$$

□

10.2.4 Déterminant de Gram

Si $x_1, \ldots, x_r$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel, alors le **déterminant de Gram** est le déterminant

$$G(x_1, \ldots, x_r) = \det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big). \tag{10.60}$$

Notons que la matrice est une matrice symétrique.

Proposition 10.19.
Si F est un sous-espace vectoriel de base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et si x est un vecteur, alors le déterminant de Gram est un moyen de calculer la distance entre x et F par

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{10.61}$$

10.2.5 Déterminant de Cauchy

Soient des nombres a_i et b_i $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple (i, j). Le **déterminant de Cauchy** est

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right). \tag{10.62}$$

Proposition 10.20 ([329]).
Le déterminant de Cauchy est donné par la formule

$$D_n = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{ij}(a_i + b_j)}. \tag{10.63}$$

10.2.6 Matrice de Sylvester

Définition 10.21 (Matrice de Sylvester, résultant[330]).
Soient P et Q deux polynômes non nuls, de degrés respectifs n et m :

$$P(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n \tag{10.64a}$$
$$Q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_mx^m. \tag{10.64b}$$

*La **matrice de Sylvester** associée à P et Q est la matrice carrée $m + n \times m + n$ définie ainsi :*

(1) la première ligne est formée des coefficients de P, suivis de 0 :

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \tag{10.65}$$

(2) la seconde ligne s'obtient à partir de la première par permutation circulaire vers la droite ;

(3) les $(m-2)$ lignes suivantes s'obtiennent en répétant la même opération ;

(4) la ligne $(m+1)$ est formée des coefficients de Q, suivis de 0 :

$$\begin{pmatrix} q_m & q_{m-1} & \cdots & q_1 & q_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \tag{10.66}$$

(5) les $(n-1)$ lignes suivantes sont formées par des permutations circulaires.

Le déterminant de la matrice de Sylvester associée à P et Q est appelé le ***résultant*** *de P et Q et noté* $\operatorname{res}(P,Q)$.

Ainsi dans le cas $n=4$ et $m=3$, la matrice obtenue est

$$S_{p,q} = \begin{pmatrix} p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}. \tag{10.67}$$

Attention : si P est de degré n et Q de degré m, il y a m lignes pour P et n pour Q dans le déterminant du résultant (et non le contraire).

Lemme 10.22 ([331])**.**
Si P et Q sont deux polynômes de degrés n et m à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{A}$,

$$\operatorname{res}(\lambda P, Q) = \lambda^m \operatorname{res}(P,Q) \tag{10.68a}$$
$$\operatorname{res}(P, \lambda Q) = \lambda^n \operatorname{res}(P,Q). \tag{10.68b}$$

Démonstration. Cela est simplement un comptage du nombre de lignes. Il y a m lignes contenant les coefficients de P ; donc prendre λP revient à multiplier m lignes dans un déterminant et donc le multiplier par λ^m. □

L'équation de Bézout (8.114) peut être traitée avec une matrice de Sylvester. Soient P et Q, deux polynômes donnés et à résoudre l'équation

$$xP + yQ = 0 \tag{10.69}$$

par rapport aux polynômes inconnus x et y dont les degrés sont $\deg(x) < \deg(Q)$ et $\deg(y) < \deg(P)$. Si nous notons $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ la liste des coefficients de x et y (dans l'ordre décroissant de degré), nous pouvons récrire l'équation (10.69) sous la forme

$$S_{PQ}^t \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0. \tag{10.70}$$

Pour s'en convaincre, écrivons pour les polynômes de l'exemple (10.67) :

$$\begin{pmatrix} p_4 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_4 & 0 & q_2 & q_3 & 0 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_4 & q_1 & q_2 & q_3 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & 0 & q_0 & q_1 & q_2 \\ 0 & p_0 & p_1 & 0 & 0 & q_0 & q_1 \\ 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2p_4 + y_3q_3 \\ p_3x_2 + p_4x_1 + q_2y_3 + q_3y_2 \\ \\ \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{10.71}$$

Nous voyons que sur la ligne numéro k (en partant du bas et en numérotant de à partir de zéro) nous avons les produits p_ix_j et q_iy_j avec $i+j=k$. La colonne de droite représente donc bien les coefficients du polynôme $xP+yQ$.

PropAPxzcUl

Proposition 10.23.
Le résultant de deux polynômes est non nul si et seulement si les deux polynômes sont premiers entre eux.

Un polynôme P a une racine double en a si et seulement si P et P' ont a comme racine commune, ce qui revient à dire que P et P' ne sont pas premiers entre eux.

Une application importante de ces résultats sera le théorème de Rothstein-Trager 22.97 sur l'intégration de fractions rationnelles.

Exemple 10.24.
Si nous prenons $P = aX^2 + bX + c$ et $P' = 2aX + b$ alors la taille de la matrice de Sylvester sera $2 + 1 = 3$ et

$$S_{P,P'} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}. \tag{10.72}$$

Le résultant est alors

$$\operatorname{res}(P, P') = -a(b^2 - 4ac). \tag{10.73}$$

Donc un polynôme du second degré a une racine double si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$. Cela est un résultat qu'on reverra en détail dans la proposition 11.116, mais qui fait toujours plaisir à revoir. △

La matrice de Sylvester permet aussi de récrire l'équation de Bézout pour les polynômes ; voir le théorème 8.47 et la discussion qui s'ensuit.

Une proposition importante du résultant est qu'il peut s'exprimer à l'aide des racines des polynômes.

PropNDBOGNx

Proposition 10.25.
Si

$$P(X) = a_p \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) \tag{10.74a}$$

$$Q(X) = b_q \prod_{j=1}^{q} (X - \beta_i) \tag{10.74b}$$

alors nous avons les expressions suivantes pour le résultant :

$$\operatorname{res}(P, Q) = a_p^q b_q^p \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{q} (\beta_j - \alpha_i) = b_q^p \prod_{j=1}^{q} P(\beta_j) = (-1)^{pq} a_p^q \prod_{i=1}^{p} Q(\alpha_i). \tag{10.75}$$

EqCFUumix

Démonstration. Si P et Q ne sont pas premiers entre eux, d'une part la proposition 10.23 nous dit que $\operatorname{res}(P, Q) = 0$ et d'autre part, P et Q ont un facteur irréductible en commun, ce qui signifie que nous devons avoir un des $X - \alpha_i$ égal à un des $X - \beta_j$. Autrement dit, nous avons $\alpha_i = \beta_j$ pour un couple (i, j). Par conséquent tous les membres de l'équation (10.75) sont nuls.

Nous supposons donc que P et Q sont premiers entre eux. Nous commençons par supposer que les polynômes P et Q sont unitaires, c'est-à-dire que $a_p = b_q = 1$. Nous considérons alors l'anneau

$$\mathbb{A} = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q]. \tag{10.76}$$

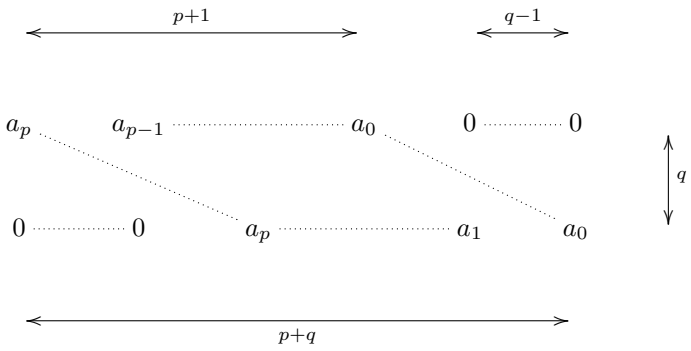
Dans cet anneau, l'élément $\beta_j - \alpha_i$ est irréductible (tout comme $X - Y$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X, Y]$). Le résultant $R = \operatorname{res}(P, Q)$ est un élément de $\mathbb{A}$ parce que tous leurs coefficients peuvent être exprimés à l'aide des α_i et des β_j. Dans $\mathbb{A}$, l'élément $\beta_j - \alpha_i$ divise R. En effet lorsque $\beta_j = \alpha_i$, le déterminant définissant le résultant est nul, ce qui signifie que $\beta_j - \alpha_i$ est un facteur irréductible de R.

Par conséquent il existe un polynôme $T \in \mathbb{A}$ tel que

$$R = T(\alpha_1, \dots, \beta_q) \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{r} (\beta_j - \alpha_i). \tag{10.77}$$

Comptons les degrés. Pour donner une idée de ce calcul de degré, voici comment se présente, au niveau des

dimensions, le déterminant :



EqJCaATQH (10.78)

si les a_i sont les coefficients de P. Mais chacun des a_i est de degré 1 en les α_i, donc le déterminant dans son ensemble est de degré q en les α_i, parce que R contient q lignes telles que (10.78). Le même raisonnement montre que R est de degré p en les β_j. Par ailleurs le polynôme $\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{r}(\beta_j-\alpha_i)$ est de degré p en les β_j et q en les α_i. Nous en déduisons que T doit être un polynôme ne dépendant pas de α_i ou de β_j.

Nous pouvons donc calculer la valeur de T en choisissant un cas particulier. Avec $P(X)=X^p$ et $Q(X)=X^q+1$, il est vite vu que $R(P,Q)=1$ et donc que $T=1$.

Si les polynômes P et Q ne sont pas unitaires, le lemme 10.22 nous permet de conclure.

□

10.2.7 Théorème de Kronecker

Nous considérons K_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

(1) unitaires de degré n,

(2) dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont de modules plus petits ou égaux à 1,

(3) et qui ne sont pas divisés par X.

Un tel polynôme s'écrit sous la forme

$$P=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k. \tag{10.79}$$

ThoOWMNAVp

Théorème 10.26 (Kronecker[112])**.**
Les racines des éléments de K_n sont des racines de l'unité.

Démonstration. Vu que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos nous pouvons considérer les racines $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de P dans $\mathbb{C}$. Nous les considérons avec leurs multiplicités.

Soit $R=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}b_kX^k$ un élément de K_n dont nous notons $\beta_1,\dots,\beta_n$ les racines dans $\mathbb{C}$. Les relations coefficients-racines stipulent que

$$b_k=\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{n-k}\leqslant n}\prod_{j=1}^{n-k}\beta_{i_j}. \tag{10.80}$$

En prenant le module et en se souvenant que $|\beta_l|\leqslant 1$ pour tout l, nous trouvons que

$$|b_k|\leqslant\binom{n}{n-k}. \tag{10.81}$$

Mais comme $b_k\in\mathbb{Z}$, nous avons

$$b_k\in\Big\{-\binom{n}{n-k},-\binom{n}{n-k}+1,\dots,0,\dots,\binom{n}{n-k}\Big\} \tag{10.82}$$

qui est de cardinal $2\binom{n}{n-k}+1$. Nous avons donc

$$\mathrm{Card}(K_n)\leqslant\prod_{k=0}^{n-1}\Big(1+\binom{n}{n-k}\Big)<\infty. \tag{10.83}$$

La conclusion jusqu'ici est que K_n est un ensemble fini.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ nous considérons les polynômes

$$P_k = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i^k) \tag{10.84a}$$

$$Q_k = X^k - Y \in \mathbb{Z}[X, Y], \tag{10.84b}$$

et puis nous considérons le résultant $R_k = \text{res}_X(P, Q_k) \in \mathbb{Z}[Y]$:

$$R_k = \text{res}_X(P, Q_k) = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -Y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -Y & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y \end{pmatrix} \tag{10.85}$$

Cela est un polynôme en Y dont le terme de plus haut degré est $(-1)^n Y^n$. Les petites formules de la proposition 10.25 nous permettent d'exprimer $R_k(Y)$ en termes des racines de P :

$$R_k(Y) = \prod_{i=1}^{n} Q_k(\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i^k - Y) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i^k) = (-1)^n P_k(Y). \tag{10.86}$$

Vu que $P \in K_n$ nous savons que les α_i ne sont pas tous nuls ; donc $P_k \in K_n$. Cependant nous avons vu que K_n est un ensemble fini ; donc parmi les P_k, il y a des doublons (et pas un peu)[13]. Nous regardons même l'ensemble des P_{2^n} dans lequel nous pouvons en trouver deux les mêmes. Soit $l > k$ tels que $P_{2^k} = P_{2^l}$. Si α est racine de P_{2^k}, alors il est de la forme $\alpha = \beta^{2^k}$ pour une certaine racines β de P. Par conséquent

$$\alpha^{2^l/2^k} = \alpha^{2^{l-k}} \tag{10.87}$$

est racine de P_{2^l}. Notons que dans cette expression il n'y a pas de problèmes de définition d'exposant fractionnaire dans $\mathbb{C}$ parce que $l > k$. Vu que (10.87) est racine de P_{2^l}, il est aussi racine de P_{2^k}. Donc

$$\left(\alpha^{2^{l-k}}\right)^{2^{l-k}} = \alpha^{2^{2(l-k)}} \tag{10.88}$$

est racine de P_{2^l} et donc de P_{2^k}. Au final nous savons que tous les nombres de la forme $\alpha^{2^{n(l-k)}}$ sont racines de P_{2^k}. Mais comme P_{2^k} a un nombre fini de racines, nous pouvons en trouver deux égales. Si nous avons

$$\alpha^{2^{n(l-k)}} = \alpha^{2^{m(l-k)}} \tag{10.89}$$

pour certains entiers $m > n$, alors

$$\alpha^{2^{n(l-k)} - 2^{m(l-k)}} = 1, \tag{10.90}$$

ce qui prouve que α est une racine de l'unité. Nous avons donc prouvé que toutes les racines de P_{2^k} sont des racines de l'unité et donc que les racines de P sont racines de l'unité. □

10.3 Orientation

10.3.1 Cas vectoriel

DEFooNVRHooEBHUSu

Proposition-Définition 10.27 ([332]).
Soient deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel réel E. Nous définissons la relation $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$[14].

[13] Ici dans [112], il déduit qu'on a un k tel que $P_k = P_1 = P$. Moi je vois pourquoi on a un k et un l tels que $P_k = P_l$, mais pourquoi on peut en trouver un spécialement égal au premier ? Une réponse à cette question permettrait de solidement réduire la lourdeur de la suite de la preuve.

[14] Définition 10.9.

Cela est une relation d'équivalence[15] *sur l'ensemble des bases de E, et les classes sont les* ***orientations*** *de E.*

Démonstration. Tout est dans le lemme 10.11. D'abord quand $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ ensuite, nous passons en revue les points qu'il faut pour être une relation d'équivalence.

(1) $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ parce que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$.

(2) Vu que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}$, les deux sont positifs en même temps ou pas du tout.

(3) Si $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$, alors en utilisant la formule

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}''), \tag{10.91}$$

nous voyons que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') > 0$.

□

Lemme 10.28.
Soit un espace vectoriel réel E. L'ensemble des bases de E possède exactement deux orientations[16]

Démonstration. Nous considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$[17] à partir de laquelle nous définissons une autre base : $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$. Nous allons prouver que ces deux bases ne sont pas équivalentes, et que toute base de E est équivalente soit à $\mathcal{B}$ soit à $\mathcal{B}'$.

(1) **Au moins deux classes** Le fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$ vient du fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ et que l'application $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire ; en multipliant par -1 le premier argument, la valeur du déterminant est multipliée par -1.

Donc les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ne sont pas équivalentes et il existe au moins deux classes.

(2) **Au plus deux classes** Nous montrons à présent que toute base est équivalente soit à $\mathcal{B}$ soit à $\mathcal{B}'$. Supposons que $\mathcal{B}''$ ne soit pas équivalente à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') < 0$. Nous utilisons encore la formule (10.20),

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')}_{<0} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{<0} \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}''), \tag{10.92}$$

et nous déduisons que $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$.

□

10.29.
Vu qu'il n'y a que deux classes d'équivalence parmi les bases, nous pouvons utiliser le vocable « avoir la même orientation que » ou « avoir l'orientation contraire de ». Ce n'est pas ambigu.

Proposition 10.30 ([332])**.**
Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E de dimension n, et si τ est une transposition[18] *de S_n, alors la base $\tau(\mathcal{B})$ est de sens contraire.*

Démonstration. Le lemme 10.11(2) dit que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme anti-symétrique ; donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -\det_{\mathcal{B}}\big(\tau(\mathcal{B})'\big). \tag{10.93}$$

Si l'un est positif, l'autre est négatif. Elles ont donc des orientations contraires. □

Corolaire 10.31.
Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E de dimension n, et si $\sigma \in S_n$, la base $\sigma(\mathcal{B})$ a même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si $\sigma \in A_n$.

Démonstration. Notons c_1 la classe d'orientation de $\mathcal{B}$ et c_2 l'autre classe. La permutation σ se décompose en produit de transpositions dont la parité est fixée (proposition 2.120). Posons $\sigma = \tau_k \dots \tau_1$.

En posant $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{l+1} = \tau_{l+1}(\mathcal{B}_l)$, pour tout l, la base $\mathcal{B}_l$ est d'orientation contraire à celle de la base $\mathcal{B}_{l-1}$. Une base sur deux a l'orientation de $\mathcal{B}$ et l'autre sur deux a l'orientation contraire.

Donc $\sigma(\mathcal{B})$ a la même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si k est pair. Mais $\sigma \in A_n$ si et seulement si k est pair. C'est bon. □

[15] Définition 1.55.
[16] Définition 10.27.
[17] Nous notons (e_1, e_2) et non $\{e_1, e_2\}$ parce que l'ordre est important.
[18] Définition 2.113.

PROPooNBAXooKNUrnk

Proposition-Définition 10.32 ([332]).
Soit un espace vectoriel réel, et un endomorphisme f de E. Deux définitions.

ITEMooOAXFooLIPHlW

*(1) L'endomorphisme f est **direct** si sont déterminant est strictement positif.*

ITEMooNKYCooXTgKJA

*(2) L'endomorphisme **préserve l'orientation** si il transforme toute base de E en une base de même orientation.*

Un endomorphisme est direct si et seulement si il préserve l'orientation.

Démonstration. En deux sens.

(1) **Direct implique préserve l'orientation** Soit une base $\mathcal{B}$ de E et un endomorphisme direct u. D'abord, u est inversible du fait que son déterminant est non nul par la proposition 10.15(2). Donc u transforme une base en une base par le lemme 6.9.

La définition 10.14 du déterminant de u est que

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) > 0. \tag{10.94}$$

Donc $\mathcal{B}$ et $u(\mathcal{B})$ ont même orientation.

(2) **Préserve l'orientation implique direct** Le fait que u préserve l'orientation signifie en particulier qu'il transforme une base en une base et qu'il est inversible par le lemme 6.9.

Donc si $\mathcal{B}$ est une base, $u(\mathcal{B})$ est encore une base et nous avons, parce que $\mathcal{B}$ et $u(\mathcal{B})$ ont même orientation,

$$0 < \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) = \det(u). \tag{10.95}$$

□

10.3.2 Cas affine

DEFooOTFPooIVkHFP

Définition 10.33.
*Nous disons qu'une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ **préserve l'orientation** si sa partie linéaire préserve l'orientation.*

10.4 Hermitien, orthogonal, adjoint

NORMooWGEJooCtGtqZ

10.34.
Une des choses à retenir de la définition de l'opérateur adjoint est que la notion de A^* dépend du produit scalaire considéré.

Il se fait que le plus souvent, sur $\mathbb{R}^n$, nous considérons le produit scalaire usuel et la base canonique. De ce fait, les notions d'opérateur adjoint et d'opérateur transposés se confondent avec la notion de matrice transposée. Ce sont pourtant, en général, trois notions distinctes.

DEFooROVNooFlTbSK

Proposition-Définition 10.35 (Définition de la transposée[1]).
Soient deux espaces vectoriels euclidiens ou hermitiens E et F et une application linéaire $A\colon E \to F$.

ITEMooRUZWooSZgGnf

(1) Il existe une unique application linéaire $B\colon F \to E$ telle que

EQooHWYKooPzAGgR

$$\langle Ax, y\rangle_F = \langle x, By\rangle_E \tag{10.96}$$

pour tout $x \in E$ et $y \in F$.

ITEMooXXEUooPtfPKY

(2) Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de E et $\{f_\alpha\}$ est une base orthonormée de F, alors la matrice de A et B pour ces bases sont liées par

EQooUSNVooQtRNGL

$$B_{i\alpha} = A_{\alpha i}. \tag{10.97}$$

*L'application B ainsi définie set nommée **adjoint** de A et sera notée $B = A^*$.*

Démonstration. Pour l'unicité, nous écrivons la condition avec $x = e_j$ pour obtenir :

$$\langle Ae_j, y\rangle = \langle e_j, By\rangle = (By)_j \tag{10.98}$$

c'est-à-dire que les coefficients $B(y)_j$ de $B(y)$ dans la base canonique sont fixés par la condition.

Pour l'existence, il suffit de vérifier que poser

$$B(y) = \sum_j \langle Ae_j, y\rangle e_j \tag{10.99}$$

fonctionne. Pour cela il faut utiliser la bilinéarité du produit scalaire et le fait que $\langle x, e_j\rangle = x_j$. Nous avons :

$$\langle x, B(y)\rangle = \langle x, \sum_j \langle A(e_j), y\rangle e_j\rangle \tag{10.100a}$$
$$= \sum_j \langle A(e_j), y\rangle\langle x, e_j\rangle \tag{10.100b}$$
$$= \sum_j \langle A(x_j e_j), y\rangle \tag{10.100c}$$
$$= \langle A(x), y\rangle. \tag{10.100d}$$

En ce qui concerne la matrice de l'application B ainsi définie, nous écrivons la condition (10.96) avec $y = e'_\alpha$ et $x = e_i$, de telle sorte que

$$A(x) = A(e_i) = \sum_\beta A_{\beta i} e'_\beta \tag{10.101}$$

et

$$B(y) = B(e'_\alpha) = \sum_j B_{j\alpha} e_j. \tag{10.102}$$

Alors nous avons :

$$\sum_\beta A_{\beta i}\langle e'_\beta, e'_\alpha\rangle = \sum_j B_{j\alpha}\langle e_i, e_j\rangle, \tag{10.103}$$

donc

$$A_{\alpha i} = B_{i\alpha}. \tag{10.104}$$

□

10.36.
À cause de l'expression (10.97) pour la matrice de A^*, cette application est souvent appelé **transposé** de A et noté A^t. Nous allons cependant voir plus tard (définition10.187) que la transposée de A est une application $A^t : F^* \to E^*$. Il nous arrivera cependant d'écrire des égalités comme $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$.

PROPooSHZMooGwdfBd

Proposition 10.37.
En ce qui concerne le déterminant,

$$\det(A^*) = \det(A)^* \tag{10.105}$$

où l'étoile à droite dénote la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Écrivons l'expression explicite (10.16) du déterminant. Le tout avec la base canonique :

$$\det(A) = \det_{(e_1,\dots,e_n)}(Ae_1, \dots, Ae_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n e^*_{\sigma(i)}(Ae_i). \tag{10.106}$$

Mais nous pouvons développer :

$$e^*_{\sigma(i)}(Ae_i) = \langle e_{\sigma(i)}, Ae_i\rangle = \langle A^* e_{\sigma(i)}, e_i\rangle = \langle e_i, A^* e_{\sigma(i)}\rangle^* = e_i^*(A^* e_{\sigma(i)})^*. \tag{10.107}$$

Notez que dans la dernière expression, les trois * ont trois significations différentes. Par conséquent,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n e_i^*(A^* e_{\sigma(i)})^*. \tag{10.108}$$

Mais $e_i^*(A^* e_{\sigma(i)}) = e^*_{\sigma(j)}(A^* e_j)$ pour $j = \sigma(i)$, donc le produit ne change pas si on déplace le σ :

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n e^*_{\sigma(i)}(A^* e_i)^* = \det(A^*)^*. \tag{10.109}$$

Nous avons donc $\det(A) = \det(A^*)^*$, c'est-à-dire $\det(A)^* = \det(A^*)$. Pour information, la dernière étoile est la conjugaison complexe. □

PROPooVPSYooRuoEFi

Proposition 10.38 ([1]).
Si $A\colon E_2 \to E_3$ et $B\colon E_1 \to E_2$ sont des applications linéaires, alors

$$(AB)^* = B^*A^* \tag{10.110}$$

où la « multiplication » est la composition.

Démonstration. L'existence de $(AB)^*$, de A^* et de B^* ne donne pas lieu à débat parce que la proposition 10.35 ne souffre pas de discussions. La propriété que $(AB)^*$ est unique a avoir est que

$$\langle ABx, y\rangle = \langle x, (AB)^*y\rangle \tag{10.111}$$

pour tout $x \in E_1$ et $y \in E_3$. Or l'application B^*A^* possède également cette propriété parce que

$$\langle x, B^*A^*y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle ABx, y\rangle. \tag{10.112}$$

La partie unicité de la proposition 10.35 nous impose donc d'accepter que les applications $(AB)^*$ et B^*A^* sont en réalité les mêmes[19]. □

10.39.
Un grand moment d'utilisation de la notion d'adjoint pour un opérateur non carré sera la définition d'une intégrale sur une variété ; en particulier dans la proposition 22.9.

Lemme 10.40.
Si E est un espace euclidien, un endomorphisme $f\colon E \to E$ est autoadjoint si et seulement si pour tout $x, y \in E$ nous avons $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$.

Démonstration. Dans le sens direct, nous avons

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle. \tag{10.113}$$

La première égalité est la définition de f^* et la seconde est l'hypothèse $f = f^*$.

Dans l'autre sens, l'hypothèse est que l'endomorphisme f vérifie $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$. Mais la proposition 10.35(1) spécifie que f^* est l'unique endomorphisme à satisfaire cette égalité. Donc $f = f^*$. □

10.4.1 Opérateur orthogonal, matrice orthogonale

DEFooYKCSooURQDoS

Définition 10.41.
*Un opérateur est **orthogonal** lorsque $A^* = A^{-1}$ où A^* est l'adjoint de A défini en 10.35.*

DEFooUHANooLVBVID

Définition 10.42.
*Une matrice U est **orthogonale** si $U^t = U^{-1}$. Le **groupe orthogonal** noté $\mathrm{O}(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$.*

LEMooSSALooSBFzJb

Lemme 10.43.
Soit un opérateur $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Il est orthogonal si et seulement si sa matrice dans la base canonique est orthogonale[20].

Démonstration. Soit la base canonique $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\langle AA^*e_i, e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{10.114}$$

donc $\big((AA^*)e_i\big)_j = \delta_{ij}$, ou encore $(AA^*)_{ij} = \delta_{ij}$, ce qui signifie que la matrice AA^* est l'identité. □

PropKBCXooOuEZcS

Proposition 10.44 (Thème 79).
À propos de matrices orthogonales.

ITEMooHSTAooIbVrwa

(1) L'ensemble des matrices réelles orthogonales forme un groupe noté $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

(2) Si A est une matrice orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

ITEMooOWMBooHUatNb

(3) Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est le groupe des isométries linéaires[21] *de $\mathbb{R}^n$.*

[19] Et ce même si vous croyez les avoir déjà vu ensemble dans la même pièce.
[20] Définition 10.42.
[21] Au sens où, parmi les applications linéaires, les isométries sont les éléments de $\mathrm{O}(n)$. À part ça, il y a aussi les translations, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

Démonstration. Commençons par prouver que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un groupe. La matrice $\mathbb{1}$ est orthogonale. De plus si A et B sont orthogonale, la matrice produit AB est orthogonale :

$$(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = A\mathbb{1}A^t = \mathbb{1}. \tag{10.115}$$

Nous avons donc bien un groupe.

En ce qui concerne le déterminant, $AA^t = \mathbb{1}$ donne $\det(A)\det(A^t) = 1$, mais la proposition 10.37 dit que $\det(A) = \det(A^t)$, donc $\det(A)^2 = 1$. D'où le fait que $\det(A) = \pm 1$.

D'autre part si A est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ nous avons $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. En particulier,

$$\langle A^tAx, y\rangle = \langle x, y\rangle \tag{10.116}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. En prenant $y = e_i$ nous trouvons

$$(A^tAx)_i = x_i, \tag{10.117}$$

ce qui signifie que pour tout x, $A^tAx = x$, ou encore que A^tA est l'identité.

Réciproquement si A^tA est l'identité nous avons

$$\langle x, y\rangle = \langle A^tAx, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle, \tag{10.118}$$

ce qui prouve que A est une isométrie. □

En ce qui concerne les valeurs propres des matrices de $\mathrm{O}(n)$ ainsi que leurs formes canoniques (avec des fonctions trigonométriques) pour $\mathrm{O}(3)$ et $\mathrm{SO}(3)$, ce sera pour la proposition 20.232 et ce qui s'ensuit.

DEFooJLNQooBKTYUy

Définition 10.45.
Le sous-groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 *est le groupe* ***spécial orthogonal*** *noté* $\mathrm{SO}(n)$.

10.5 Topologie

10.5.1 Boules et sphères

Un espace vectoriel normé (définition 9.232) vient avec sa topologie métrique (théorème 9.158). Sphères et boules fermées viennent dans la définition 9.196.

Définition 10.46.
Une partie A de V est dite ***bornée*** *si il existe un réel R tel que $A \subset B(0_V, R)$.*

Une partie est donc bornée si elle est contenue dans une boule de rayon fini.

Exemple 10.47.
Dans $\mathbb{R}$, les boules sont les intervalles ouverts et fermés tandis que la sphère est donnée par les points extrêmes des intervalles :

$$\begin{aligned} B(a,r) &=]a-r, a+r[, \\ \bar{B}(a,r) &= [a-r, a+b], \\ S(a,r) &= \{a-r, a+r\}. \end{aligned} \tag{10.119}$$

△

Exemple 10.48.
Si nous considérons $\mathbb{R}^2$, la situation est plus riche parce que nous avons plus de normes. Essayons de voir les sphères de centre $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Pour la norme $\|.\|_1$, la sphère de rayon r est donnée par l'équation

$$|x| + |y| = r. \tag{10.120}$$

Pour la norme $\|.\|_2$, l'équation de la sphère de rayon r est

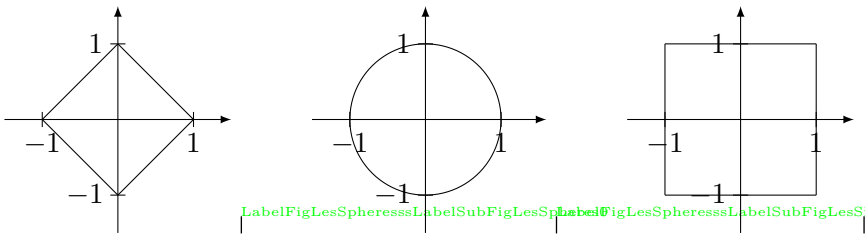
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \tag{10.121}$$

et pour la norme supremum, la sphère de rayon r a pour équation

$$\max\{|x|, |y|\} = r. \tag{10.122}$$

Elles sont dessinées sur la figure 10.1

△



LabelFigLesSpheresssLabelSubFigLesSpheresssLabelFigLesSpheresssLabelSubFigLesSpheresssLabelFigLesSpheresssLabelSubFigLesSpheresssLabelFigLesSpheresssLabelSubFigLesSp

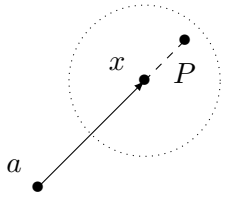
(a) La sphère unité pour la norme $\|.\|_1$ (b) La sphère unité pour la norme $\|.\|_2$ (c) La sphère unité pour la norme $\|.\|_\infty$

FIGURE 10.1 : Les sphères de rayon 1 pour les trois normes classiques. LabelFigLesSpheres

PropBoitPtLoin

Proposition 10.49.
Soient V un espace vectoriel normé, a dans V et x tel que $d(a,x) = r$, c'est-à-dire $x \in S(a,r)$. Dans ce cas, toute boule centrée en x contient un point P tel que $d(P,a) > r$ et un point Q tel que $d(Q,a) < r$.

Démonstration. Soit une boule de rayon δ autour de x. Le but est de trouver un point P tel que $d(P,a) > r$ et $d(P,x) < \delta$. Pour cela, nous prenons P sur la même droite que x (en partant de a), mais juste « un peu plus loin », comme sur la figure suivante :



Plus précisément, nous considérons le point

$$P = x + \frac{v}{N} \tag{10.123}$$

où $v = x - a$ et N est suffisamment grand pour que $d(x,P)$ soit plus petit que δ. Cela est toujours possible parce que

$$d(P,x) = \|P - x\| = \frac{\|v\|}{N} \tag{10.124}$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut par un choix approprié de N. Montrons maintenant que $d(a,P) > d(a,x)$:

$$\begin{aligned} d(a,P) &= \|a - x - \frac{v}{N}\| \\ &= \|a - x + \frac{a}{N} - \frac{x}{N}\| \\ &= \|\big(1 + \frac{1}{N}\big)(a - x)\| \\ &> \|a - x\| = d(a,x). \end{aligned} \tag{10.125}$$

Nous laissons en exercice le soin de trouver un point Q tel que $d(Q,a) < r$ et $d(Q,x) < \delta$. □

10.5.2 Ouverts, fermés, intérieur et adhérence

Définition 10.50.
*Soit $(V, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A, une partie de V. Un point a est dit **intérieur** à A si il existe une boule ouverte centrée en a et contenue dans A.*

*On appelle **l'intérieur** de A l'ensemble des points qui sont intérieurs à A. Nous notons* $\text{Int}(A)$ *l'intérieur de A.*

Notons que $\text{Int}(A) \subset A$ parce que si $a \in \text{Int}(A)$, nous avons $B(a,r) \subset A$ pour un certain r et en particulier $a \in A$.

Exemple 10.51.
Trouver l'intérieur d'un intervalle dans $\mathbb{R}$ consiste à « ouvrir là où c'est fermé ».

(1) $\text{Int}\big([0,1[\big) =]0,1[$.

Prouvons d'abord que $]0,1[\subset \text{Int}([0,1[)$. Si $a \in]0,1[$, alors a est strictement supérieur à 0 et strictement inférieur à 1. Dans ce cas, la boule de centre a et de rayon $\frac{\min\{a,1-a\}}{2}$ est contenue dans $]0,1[$ (voir figure 10.2). Cela prouve que a est dans l'intérieur de $[0,1[$.

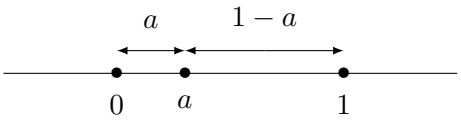


FIGURE 10.2 : Trouver le rayon d'une boule autour de a. Une boule qui serait centrée en a avec un rayon strictement plus petit à la fois de a et de $1-a$ est entièrement contenue dans le segment $]0,1[$. LabelFigIntervalleUn

Prouvons maintenant que $\text{Int}\big([0,1[\big) \subset]0,1[$. Vu que l'intérieur d'un ensemble est inclus dans l'ensemble, nous savons déjà que $\text{Int}\big([0,1[\big) \subset [0,1[$. Nous devons donc seulement montrer que 0 n'est pas dans l'intérieur de $[0,1[$. C'est le cas parce que toute boule du type $B(0,r)$ contient le point $-r/2$ qui n'est pas dans $[0,1[$.

(2) $\text{Int}\Big([0,\infty[\Big) =]0,\infty[$.

(3) $\text{Int}\big(]2,3[\big) =]2,3[$.

△

ExempleIntBoules

Exemple 10.52.
Les intérieurs des boules et sphères sont importantes à savoir.

(1) $\text{Int}\big(B(a,r)\big) = B(a,r)$. Si $x \in B(a,r)$, nous avons $d(a,x) < r$. Alors la boule $B\big(x, r - d(x,a)\big)$ est incluse à $B(a,r)$, et donc x est dans l'intérieur de $B(a,r)$. Conseil : faire un dessin.

(2) $\text{Int}\big(\bar{B}(a,r)\big) = B(a,r)$. Par le point précédent, la boule $B(a,r)$ est certainement dans l'intérieur de la boule fermée. Il reste à montrer que les points de $\bar{B}(a,r)$ qui ne sont pas dans $B(a,r)$ ne sont pas dans l'intérieur. Ces points sont ceux dont la distance à a est *égale* à r. Le résultat découle alors de la proposition 10.49.

(3) $\text{Int}\big(S(a,r)\big) = \varnothing$. Si $x \in S(a,r)$, toute boule centrée en a contient des points qui ne sont pas à distance r de a.

Notez que la sphère est un exemple d'ensemble non vide mais d'intérieur vide.

△

Définition 10.53.
*Une partie A de l'espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ est dite **ouverte** si chacun de ses points est intérieur. La partie A est donc ouverte si $A \subset \text{Int}(A)$. Par convention, nous disons que l'ensemble vide $\varnothing$ est ouvert.*

*Une partie est dite **fermée** si son complémentaire est ouvert. La partie A est donc fermée si $V \setminus A$ est ouverte.*

Remarque : un ensemble A est ouvert si et seulement si $\text{Int}(A) = A$.

Définition 10.54.
*Une partie A de l'espace vectoriel normé V est dite **compacte** si elle est fermée et bornée.*

Nous verrons tout au long de ce cours que les ensembles compacts, et les fonctions définies sur ces ensembles ont de nombreuses propriétés agréables.

ExempleFermeIntevrR

Exemple 10.55.
En ce qui concerne les intervalles de $\mathbb{R}$,

- $]1,2[$ est ouvert ;
- $[3,4]$ est fermé ;
- $[5,6[$ n'est ni ouvert ni fermé ;

Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont toujours compacts. △

PropTopologieAx

Proposition 10.56.
Soit V un espace vectoriel normé.

(1) L'ensemble V lui-même et le vide sont à la fois fermés et ouverts.

(2) Toute union d'ouverts est ouverte.

(3) Toute intersection finie *d'ouverts est ouverte.*

ItemPropTopologieAxiv

(4) Le vide et V sont les seules parties de V à être à la fois fermées et ouvertes.

Démonstration. L'ingrédient principal de cette démonstration est que si a est un point d'un ouvert $\mathcal{O}$, alors il existe une boule autour de a contenue dans $\mathcal{O}$ parce que a doit être dans l'intérieur de $\mathcal{O}$.

(1) Nous avons déjà dit que, par définition, l'ensemble vide est ouvert. Cela implique que V lui-même est fermé (parce que son complémentaire est le vide). De plus, V est ouvert parce que toutes les boules sont inclues à V. Le vide est alors fermé (parce que son complémentaire est V).

(2) Soit une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ d'ouverts[22], et l'union

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i. \tag{10.126}$$

Soit maintenant $a \in \mathcal{O}$. Nous devons prouver qu'il existe une boule centrée en a entièrement contenue dans $\mathcal{O}$. Étant donné que $a \in \mathcal{O}$, il existe $i \in I$ tel que $a \in \mathcal{O}_i$ (c'est-à-dire que a est au moins dans un des $\mathcal{O}_i$). Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{O}_i$ est ouvert et donc tous ses points (en particulier a) sont intérieurs ; il existe donc une boule $B(a,r)$ centrée en a telle que $B(a,r) \subset \mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$.

(3) Soit une famille finie d'ouverts $(\mathcal{O}_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$, et $a \in \mathcal{O}$ où

$$\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k. \tag{10.127}$$

Vu que a appartient à chaque ouvert $\mathcal{O}_k$, nous pouvons trouver, pour chacun de ces ouverts, une boule $B(a,r_k)$ contenue dans $\mathcal{O}_k$. Chacun des r_k est strictement positif, et nous n'en avons qu'un nombre fini, donc le nombre $r = \min\{r_1,\dots,r_n\}$ est strictement positif. La boule $B(a,r)$ est incluse dans toutes les autres (parce que $B(a,r) \subset B(a,r')$ lorsque $r \leqslant r'$), par conséquent

$$B(a,r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} B(a,r_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k = \mathcal{O}, \tag{10.128}$$

c'est-à-dire que la boule de rayon r est une boule centrée en a contenue dans $\mathcal{O}$, ce qui fait que a est intérieur à $\mathcal{O}$.

(4) Je n'ai pas encore de démonstration de ce point[23].

□

La proposition dit que toute intersection *finie* d'ouvert est ouverte. Il est faux de croire que cela se généralise aux intersections infinies, comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[= \{0\}. \tag{10.129}$$

Chacun des ensembles $]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ est ouvert, mais le singleton $\{0\}$ est fermé (pourquoi ?).

Nous reportons à la proposition 4.85 la preuve du fait que tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ possède un infimum et un supremum.

Définition 10.57.
L'ensemble des ouverts de V est la ***topologie*** *de V. La topologie dont nous parlons ici est dite* ***induite*** *par la norme $\|.\|$ de V (parce que cette norme définit la notion de boule et qu'à son tour la notion de boule définit la notion d'ouverts). Un* ***voisinage*** *de a dans V est un ensemble contenant un ouvert contenant a.*

[22] L'ensemble I avec lequel nous « numérotons » les ouverts $\mathcal{O}_i$ est *quelconque*, c'est-à-dire qu'il peut être $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ou n'importe quel autre ensemble, fini ou infini.

[23] Rédigez une preuve, photographiez votre feuille, et envoyez-la moi.

Il existe de nombreuses topologies sur un espace vectoriel donné, mais certaines sont plus fameuses que d'autres. Dans le cas de $V = \mathbb{R}^n$, la topologie **usuelle** est celle induite par la norme euclidienne. Lorsque nous parlons de boules, de fermés, de voisinages ou d'autres notions topologiques (y compris de convergence, voir plus bas) dans $\mathbb{R}^n$, nous sous-entendons toujours la topologie de la norme euclidienne.

Exemple 10.58.
Les ensembles suivants sont des voisinages de 3 dans $\mathbb{R}$:

- $]1, 5[$;
- $[0, 10]$;
- $\mathbb{R}$.

Les ensembles suivants ne sont pas des voisinages de 3 dans $\mathbb{R}$:

- $]1, 3[$;
- $]1, 3]$;
- $[0, 5[\backslash\{3\}$.

△

Proposition 10.59.
Dans un espace vectoriel normé,

(1) toute intersection de fermés est fermée ;

(2) toute union finie *de fermés est fermée.*

Encore une fois, l'hypothèse de finitude de l'intersection est indispensable comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] =]-1, 1[. \tag{10.130}$$

Chacun des intervalles dont on prend l'union est fermé tandis que l'union est ouverte.

LEMooHPQTooHKdoiL

Lemme 10.60.
Soit A, une partie de l'espace vectoriel normé V. Un point $a \in V$ est adhérent[24] *à A dans V si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing. \tag{10.131}$$

Démonstration. En deux implications.

(1) $\Rightarrow$ Soient un point adhérent a et un $\epsilon > 0$. Vu que $B(a, \epsilon)$ est un ouvert contenant a, nous avons $B(a, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$.

(2) $\Leftarrow$ Soit un point a tel que pour tout ϵ, l'intersection $B(a, \epsilon) \cap A$ est non vide. Si S est un ouvert contenant a, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $a \in B(a, \epsilon) \subset S$. Vu que $B(a, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$, nous avons aussi $S \cap A\varnothing$.

□

Un point peut être adhérent à A sans faire partie de A, et nous avons toujours $A \subset \text{Adh}(A)$.

EXooICLBooJzQFNY

Exemple 10.61.
La terminologie « fermeture » de A pour désigner $\bar{A}$ provient de deux origines.

(1) L'ensemble $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Cela signifie que si B est un fermé qui contient A, alors $\bar{A} \subset B$. Cela est fondamentalement le sens de la définition 9.19.

(2) Pour les intervalles dans $\mathbb{R}$, trouver $\bar{A}$ revient à fermer les extrémités qui sont ouvertes, comme on en a parlé dans l'exemple 10.55.

△

[24] Définition 9.19.

Exemple 10.62.
Dans $\mathbb{R}$, l'infimum et le supremum d'un ensemble sont des points adhérents. En effet si M est le supremum de $A \subset \mathbb{R}$, pour tout ε, il existe un $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$, tandis que $M > a$. Cela fait que $a \in B(M, \varepsilon)$, et en particulier que pour tout rayon ε, nous avons $B(M, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Le même raisonnement montre que l'infimum est également dans l'adhérence de A. △

ParlerEncoredeF

Exemple 10.63.
Il ne faut pas conclure de l'exemple précédent qu'un point limite ou adhérent est automatiquement un minimum ou un maximum. En effet, si nous regardons l'ensemble formé par les points de la suite $x_n = (-1)^n/n$, le nombre zéro est un point adhérent et une limite, mais pas un infimum ni un maximum. △

Lemme 10.64.
Si B est une partie fermée de V, alors $B = \bar{B}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $a \in \bar{B}$ tel que $a \notin B$. Alors il n'y a pas d'ouverts autour de a qui soit contenu dans $\complement B$. Cela prouve que $\complement B$ n'est pas ouvert, et par conséquent que B n'est pas fermé. Cela est une contradiction qui montre que tout point de $\bar{B}$ doit appartenir à B lorsque B est fermé. □

Exemple 10.65.
Au niveau des intervalles dans $\mathbb{R}$, prendre l'adhérence consiste à « fermer là où c'est ouvert ». Attention cependant à ne pas fermer l'intervalle en l'infini.

(1) $\overline{[0,2[} = [0,2]$.

(2) $\overline{]3,\infty[} = [3,\infty[$.

Si au lieu de travailler dans $\mathbb{R}$, vous travaillez dans une extension comme le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}$ (définition 9.204) ou dans la droite réelle achevée (définition 14.26), vous devez un peu réfléchir avant de décider si il faut fermer les intervalles en $\pm\infty$ ou en ω. Bref, ne faites rien mécaniquement et posez-vous des questions de topologie quand vous cherchez des fermetures. △

PROPooEURXooHHpkhd

Proposition 10.66.
Soit V un espace vectoriel normé et $a \in V$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $a \in \bar{A}$;

(2) il existe une suite d'éléments x_n dans A qui converge vers a ;

(3) $d(a, A) = 0$.

Notez que dans cette proposition, nous ne supposons pas que a soit dans A.

PropComleIntBar

Proposition 10.67.
Pour toute partie A d'un espace vectoriel normé nous avons

(1) $V \setminus \bar{A} = \text{Int}(V \setminus A)$,

(2) $V \setminus \text{Int}(A) = \overline{V \setminus A}$.

En utilisant les notations du complémentaire (définition 1.6), les deux points de la proposition se récrivent

(1) $\complement \bar{A} = \text{Int}(\complement A)$,

ItemLemPropComplementiv

(2) $\complement \,\text{Int}(A) = \overline{\complement A}$.

Démonstration. Nous avons $a \in V \setminus \bar{A}$ si et seulement si $a \notin \bar{A}$. Or ne pas être dans $\bar{A}$ signifie qu'il existe un rayon ε tel que la boule $B(a, \varepsilon)$ n'intersecte pas A. Le fait que la boule $B(a, \varepsilon)$ n'intersecte pas A est équivalent à dire que $B(a, \varepsilon) \subset V \setminus A$. Or cela est exactement la définition du fait que a est à l'intérieur de $V \setminus A$. Nous avons donc montré que $a \in V \setminus \bar{A}$ si et seulement si $a \in \text{Int}(V \setminus A)$. Cela prouve la première affirmation.

Pour prouver la seconde affirmation, nous appliquons la première au complémentaire de A : $\complement(\overline{\complement A}) = \text{Int}(\complement\complement A)$. En prenant le complémentaire des deux membres nous trouvons successivement

$$\begin{aligned} \complement\complement(\overline{\complement A}) &= \complement \,\text{Int}(\complement\complement A), \\ \overline{\complement A} &= \complement \,\text{Int}(A), \end{aligned} \tag{10.132}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Attention à ne pas confondre $\complement\bar{A}$ et $\overline{\complement A}$. Ces deux ensembles ne sont pas égaux. En effet, en tant que complément d'un fermé, l'ensemble $\complement\bar{A}$ est certainement ouvert, tandis que, en tant que fermeture, l'ensemble $\overline{\complement A}$ est fermé. Pouvez-vous trouver des exemples d'ensembles A tels que $\complement\bar{A} = \overline{\complement A}$?

PROPooRAZUooVMxPic

Proposition 10.68.
Soient A et B deux parties de l'espace vectoriel normé V.

(1) Pour les inclusions, si $A \subset B$, alors $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(2) Pour les unions, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

(3) Pour les intersections, $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(A \cap B)$ et $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Démonstration. (1) Si a est dans l'intérieur de A, il existe une boule autour de a contenue dans A. Cette boule est alors contenue dans B et donc est une boule autour de a contenue dans B, ce qui fait que a est dans l'intérieur de B. Si maintenant a est dans l'adhérence de A, toute boule centrée en a contient un élément de A et donc un élément de B, ce qui prouve que a est dans l'adhérence de B.

(2) Nous avons $A \subset A \cup B$ et donc, en utilisant le premier point, $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. De la même manière, $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. En prenant l'union, $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Réciproquement, soit $a \in \overline{A \cup B}$ et montrons que $a \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Supposons par l'absurde que a ne soit ni dans $\bar{A}$ ni dans $\bar{B}$. Il existe donc des rayons ε_1 et ε_2 tels que

$$\begin{aligned} B(a, \varepsilon_1) \cap A &= \varnothing, \\ B(a, \varepsilon_2) \cap B &= \varnothing. \end{aligned} \tag{10.133}$$

En prenant $r = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, la boule $B(a, r)$ est incluse aux deux boules citées et donc n'intersecte ni A ni B. Donc $a \notin \overline{A \cup B}$, d'où la contradiction.

(3) Si nous appliquons le second point à $\complement A$ et $\complement B$, nous trouvons

$$\overline{\complement A \cup \complement B} = \overline{\complement A} \cup \overline{\complement B}. \tag{10.134}$$

En utilisant les propriétés du lemme 1.49, le membre de gauche devient

$$\overline{\complement A \cup \complement B} = \overline{\complement(A \cap B)} = \complement\,\mathrm{Int}(A \cap B), \tag{10.135}$$

Eq2707CACBCAB

tandis que le membre de droite devient

$$\overline{\complement A} \cup \overline{\complement B} = \complement\,\mathrm{Int}(A) \cup \complement\,\mathrm{Int}(A) = \complement\Big(\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)\Big). \tag{10.136}$$

Eq2707cAcBACAACB

En égalisant le membre de droite de (10.135) avec celui de (10.136) et en passant au complémentaire nous trouvons

$$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B), \tag{10.137}$$

comme annoncé.

La dernière affirmation provient du fait que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$ et de la propriété équivalente pour B.

□

Remarque 10.69.
Nous avons prouvé que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Il arrive que l'inclusion soit stricte, comme dans l'exemple suivant. Si nous prenons $A = [0, 1]$ et $B =]1, 2]$, nous avons $A \cap B = \varnothing$ et donc $\overline{A \cap B} = \varnothing$. Par contre nous avons $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$.

Définition 10.70.
*La **frontière** d'un sous-ensemble A de l'espace vectoriel normé V est l'ensemble des points $a \in V$ tels que*

$$\begin{aligned} B(a, r) \cap A &\neq \varnothing, \\ B(a, r) \cap \complement A &\neq \varnothing, \end{aligned} \tag{10.138}$$

pour tout rayon r. En d'autres termes, toute boule autour de a contient des points de A et des points de $\complement A$. La frontière de A se note ∂A.

PropDescFrpbsmI

Proposition 10.71.
La frontière d'une partie A d'un espace vectoriel normé V s'exprime sous la forme

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathrm{Int}(A). \tag{10.139}$$

Démonstration. Le fait pour un point a de V d'appartenir à $\bar{A}$ signifie que toute boule centrée en a intersecte A. De la même façon, le fait de ne pas appartenir à $\mathrm{Int}(A)$ signifie que toute boule centrée en a intersecte $\complement A$. □

La description de la frontière donnée par la proposition 10.71 est celle qu'en pratique nous utilisons le plus souvent. Dans certains textes, elle est prise comme définition de la frontière.

Lemme 10.72.
La frontière de A peut également s'exprimer des façons suivantes :

$$\partial A = \bar{A} \cap \complement \mathrm{Int}(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A}, \tag{10.140}$$

Démonstration. En partant de $\partial A = \bar{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$, la première égalité est une application de la propriété (4) du lemme 1.49. La seconde égalité est alors la proposition 10.67. □

Exemple 10.73.
Dans $\mathbb{R}$, la frontière d'un intervalle est la paire constituée des points extrêmes. En effet

$$\partial[a,b[= \overline{[a,b[} \setminus \mathrm{Int}\big([a,b[\big) = [a,b] \setminus]a,b[= \{a,b\}. \tag{10.141}$$

Toujours dans $\mathbb{R}$ nous avons

$$\partial\mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing, \tag{10.142}$$

et

$$\partial\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} \setminus \mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}. \tag{10.143}$$

△

Exemple 10.74.
Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\partial B(a,r) = \partial \bar{B}(a,r) = S(a,r). \tag{10.144}$$

Cela est un boulot pour la proposition 10.49. Si $x \in S(a,r)$ alors tout boule autour de x contient des points à distance strictement plus grande et plus petite que $d(a,x)$, c'est-à-dire des points dans $B(a,r)$ et hors de $B(a,r)$. Cela prouve que les points de $S(a,r)$ font partie de $\partial B(a,r)$, c'est-à-dire que $S(a,r) \subset \partial B(a,r)$; et idem pour $\bar{B}(a,r)$.

Pour prouver l'inclusion inverse, soit $x \in \partial B(a,r)$. Vu que toute boule autour de x contient des points intérieurs à $B(a,r)$, pour tout $\epsilon > 0$, $d(a,x) - \epsilon < r$, c'est-à-dire que $d(a,x) \leqslant r$. De la même manière toute boule autour de x contient des points hors de $B(a,r)$ signifie que pour tout ϵ, $d(a,x) + \epsilon > r$ ou encore que $d(a,x) \geqslant r$. Nous avons donc $d(a,x) = r$. △

Remarque 10.75.
Il serait toutefois faux de croire que $\partial A = \partial \bar{A}$ pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$. En effet si $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nous avons $\partial A = \{0\}$ et $\bar{A} = \mathbb{R}$, donc $\partial \bar{A} = \varnothing$.

10.5.3 Point isolé, point d'accumulation

LEMooOMVNooVBlQMD

Lemme 10.76.
Soit un espace vectoriel normé V ainsi qu'une partie D de V.

(1) Un point $a \in D$ est isolé[25] *de D dans V si et seulement si existe un $r > 0$ tel que*

$$B(a,r) \cap D = \{a\}. \tag{10.145}$$

(2) Un point $a \in V$ point d'accumulation[26] *de D si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\Big(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}\Big) \cap D \neq \varnothing. \tag{10.146}$$

[25] Définition 9.47.
[26] Définition 9.46.

Démonstration. Deux parties.

(1) **Pour le point isolé** D'une part si il existe un $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap D = \{a\}$, la définition 9.47 est vérifiée. D'autre part, si la définition 9.47 est vérifiée, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant a et tel que $\mathcal{O} \cap D = \{a\}$. Vu que les boules forment une base de la topologie normée[27], il existe un $r > 0$ tel que $a \in B(a,r) \subset \mathcal{O}$.

(2) **Pour le point d'accumulation** Il s'agit encore de dire que tout voisinage ouvert de a contient une boule centrée en a.

□

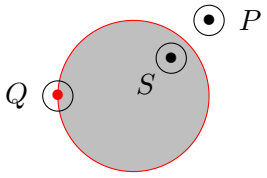


FIGURE 10.3 : L'ensemble décrit par l'équation (10.147). Le point P est un point isolé de D, tandis que les points S et Q sont des points d'accumulation. LabelFigAccumulationIsole

Exemple 10.77.
Considérons la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x,y) \text{ tel que } x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,1)\}. \tag{10.147}$$ Eq2807BouleIso

Comme on peut le voir sur la figure 10.3, le point $P = (1,1)$ est un point isolé de D parce qu'on peut tracer une boule autour de P sans inclure d'autres points de D que P lui-même. Le point $Q = (-1,0)$ est un point d'accumulation de D parce que toute boule autour de Q contient des points de D.

Le point S, étant un point intérieur, est un point d'accumulation : toute boule autour de S intersecte D.

Notez cependant que le point Q lui-même n'est pas dans D parce que l'inégalité qui définit D est stricte. △

Remarque 10.78.
À propos de la position des points d'accumulation et des points isolés.

(1) Les points intérieurs sont tous des points d'accumulation.

(2) Les points isolés ne sont jamais intérieurs.

(3) Certains points d'accumulation ne font pas partie de l'ensemble. Par exemple le point 1 est un point d'accumulation de $E =]0,1[$.

(4) Les points de la frontière sont soit d'accumulation soit isolés.

Exemple 10.79.
Tous les points de $\mathbb{R}$ sont des points d'accumulation de $\mathbb{Q}$ parce que dans toute boule autour d'un réel, on peut trouver un nombre rationnel. △

Remarque 10.80.
L'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble n'est pas exactement son adhérence. En effet, un point isolé dans A est dans l'adhérence de A, mais n'est pas un point d'accumulation de A.

10.5.4 Des exemples

ItemExoEVN3i

Exemple 10.81.
Nous considérons l'ensemble.

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 5x + 6 < y \leqslant 2\}. \tag{10.148}$$

Si un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $x^2 - 5x + 6 < y$, alors dans une boule centrée en (x,y) (de rayon r_1), l'inégalité reste vraie (parce que la fonction $x^2 - 5x + 6 - y$ est une fonction continue). De la même manière,

[27] La définition (9.173) exprime le fait que tout ouvert contenant a contient une boule centrée en a.

si nous avons $y < 2$ en (x, y), alors nous avons encore l'inégalité dans une boule de rayon r_2. En prenant $r = \min\{r_1, r_2\}$, les deux inégalités restent vraies dans la boule de rayon r.

Donc les points (x, y) tels que $x^2 - 5x + 6 < y < 2$ sont dans l'intérieur de A_1.

Pour les mêmes raisons, autour d'un point (x, y) tel que $x^2 - 5x + 6 > y$, nous pouvons trouver une boule dans laquelle l'inégalité reste stricte. Ces points ne sont donc pas dans l'adhérence de A_1. Un point qui vérifie $x^2 - 5x + 6 = y = 2$ est par contre dans l'adhérence parce que dans toute boule, on pourra trouver un x tel que $x^2 - 5x + 6 < y$, et un y. L'adhérence est donc donnée par les inéquations

$$\bar{A}_1 \equiv x^2 - 5x + 6 \leqslant y \leqslant 2. \tag{10.149}$$

La frontière est donnée par les points de l'adhérence qui ne sont pas dans l'intérieur de A_1. Attention : **ne pas dire** que la frontière est alors donnée simplement en remplaçant les inégalités par des égalités : $\partial A_1 \equiv x^2 - 5x + 6 = y = 2$. Quel est cet ensemble ?

Trouver la frontière demande un peu plus de travail. Le point marqué sur la figure 10.4 est sur la frontière parce que toute boule intersecte l'intérieur et l'extérieur. Cela est dû au fait que, sur ce point, nous ayons $x^2 - 5x + 6 = y$ en même temps que $y < 2$. Donc si on prend une boule assez petite, on conserve $y < 2$, mais on obtient des points tels que $x^2 - 5x + 6 < y$.

En voyant le dessin, la chose à faire pour écrire la frontière est de trouver les deux points d'intersection entre la parabole et la droite horizontale. Ces points sont les points (x, y) qui satisfont au système

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y & \text{(10.150a)} \\ y = 2. & \text{(10.150b)} \end{cases}$$

En substituant la seconde équation dans la première, il vient $x^2 - 5x + 6 = 2$, ce qui nous donne à résoudre le polynôme du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$. Les éventuelles solutions entières sont les diviseurs de 4. Par chance[28], on voit que $x = 1$ et $x = 4$ sont des solutions. Le théorème 3.286 nous assure qu'il n'y a pas d'autres racines. Les deux points d'intersection sont les points $P = (1, 2)$ et $Q = (4, 2)$. Les points de la frontière de A_1 sont donc donnés par

$$\begin{aligned} \partial A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 - 5x + 6 = y \text{ et } 1 \leqslant x \leqslant 4\} \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = 2 \text{ et } 1 \leqslant x \leqslant 4\}. \end{aligned} \tag{10.151}$$

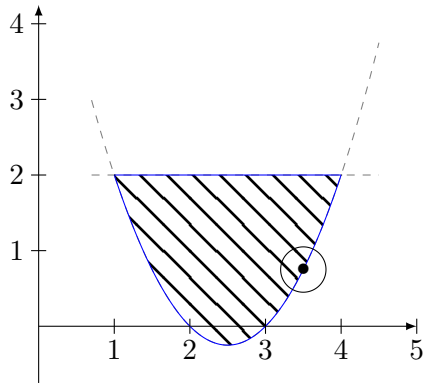


FIGURE 10.4 : En hachuré : l'intérieur ; en trait plein : la frontière. L'adhérence est l'union des deux. Exemple10.81.

LabelFigAdhIntFr

Notez que les points de la parabole qui sont sur la frontière ne font pas partie de l'ensemble A_1 lui-même, tandis que ceux de la frontière qui sont sur la droite horizontale en font partie sauf $(4, 2)$ et $(1, 2)$.

L'intérieur de A_1 n'étant pas égal à A_1, cet ensemble n'est pas ouvert ; de la même manière, vu que $\bar{A}_1 \neq A_1$, l'ensemble n'est pas fermé. L'ensemble A_1 est par contre borné parce qu'il est contenu par exemple dans la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon 5. Les points d'accumulation de A_1 sont les points de sa fermeture. △

ItemExoEVN3ii

Exemple 10.82.
Nous étudions

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 < y < 2x\}. \tag{10.152}$$

Pour les mêmes raisons que dans l'exemple 10.81 l'intérieur est donné par

$$\text{Int}(A_2) \equiv x + 1 < y < 2x; \tag{10.153}$$

[28] Sinon, il aurait fallu utiliser la proposition 11.116.

L'adhérence est donnée par

$$\overline{A_2} \equiv x + 1 \leqslant y \leqslant 2x, \tag{10.154}$$

Pour la frontière, les deux droites dont il est question dans la définition de A_2 (les droites $y = x + 1$ et $y = 2x$) se coupent en $x = 1$ (refaire soi-même le dessin de la figure 10.5). Lorsque $x < 1$, les conditions $x + 1 < y$ et $y < 2x$ sont incompatibles : aucun point de A_2 n'est dans la partie $x < 1$ du plan. Lorsque $x > 1$, alors les points situés *entre* les deux droites font partie de A_2. La frontière est donc donnée par ces deux droites pour $x \geqslant 1$.

Étant donné que $\text{Int}(A_2) = A_2$, cet ensemble est ouvert (et donc pas fermé par la proposition 10.56(4)). Il n'est par contre pas borné parce qu'il contient des points (x, y) avec des x arbitrairement grands. △

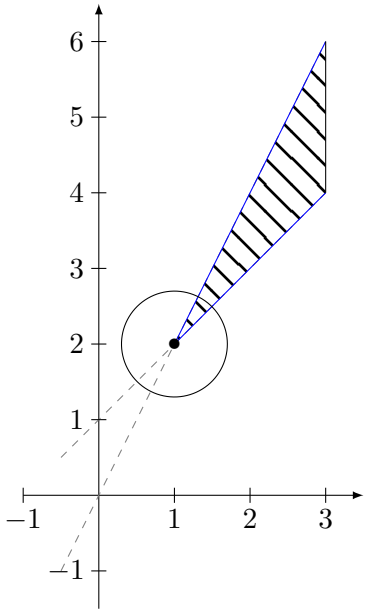


FIGURE 10.5 : Notez que le point d'angle fait partie de la frontière, mais pas de l'ensemble. Exemple 10.82.

Proposition 10.83 ([333]).
Tout partie de $\mathbb{R}$ sans point d'accumulation est dénombrable.

Démonstration. Soit une partie S de $\mathbb{R}$ ne contenant pas de points d'accumulation. Pour chaque $s \in S$, il existe un $\epsilon_s > 0$ tel que

$$B(s, \epsilon_s) \cap S = \{s\}. \tag{10.155}$$

Rien ne garantit cependant que $B(s, \epsilon_s) \cap B(t, \epsilon_t) = \varnothing$, alors que nous en aurons besoin pour la suite.

Le nombre

$$\inf\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\} \tag{10.156}$$

est au moins égal à ϵ_s et est don strictement positif. Nous posons

$$r_s = \frac{\inf\big\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\big\}}{4}, \tag{10.157}$$

et

$$I_s = B(s, r_s). \tag{10.158}$$

Nous avons maintenant $I_s \cap I_t = \varnothing$. Soit en effet $u \in I_s \cap I_t$. Alors

$$|s - t| \leqslant |s - u| + |u - t| \tag{10.159a}$$
$$\leqslant r_s + t_t \tag{10.159b}$$
$$\leqslant 2r_s \tag{10.159c}$$

où nous avons supposé $r_s \geqslant r_t$. Si ce n'est pas le cas, changer s et t dans ce qui suit ; les deux points ont des rôles symétrique. Nous avons donc

$$|s - t| \leqslant 2r_s = \frac{\inf\big\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\big\}}{2} \leqslant \frac{|s - t|}{2}. \tag{10.160}$$

Donc $|s-t|=0$ et $s=t$.

Cela pour dire que I_s ne possède d'intersection avec I_t que si $s=t$.

Nous définissons alors une application

$$\begin{aligned}\varphi\colon S &\to \mathbb{Q}\\ s &\mapsto q_s\end{aligned} \tag{10.161}$$

où q_s est un choix de rationnel dans I_s. C'est le lemme 4.60 qui nous permet de choisir un tel rationnel.

La construction des intervalles I_s garantit que φ est une injection. Le fait qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ vers S et le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable impliquent que S est au plus dénombrable. □

10.6 Valeur propre et vecteur propre

10.6.1 Généralités

Nous savons qu'une application *linéaire* $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est complètement définie par la donnée de son action sur les trois vecteurs de base, c'est-à-dire par la donnée de

$$Ae_1, \quad Ae_2 \quad \text{et} \quad Ae_3. \tag{10.162}$$

La matrice d'une application A se forme en mettant simplement les vecteurs Ae_1, Ae_2 et Ae_3 en colonne. Donc la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{10.163}$$ EqExempleALin

signifie que l'application linéaire A envoie le vecteur e_1 sur $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, le vecteur e_2 sur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur e_3 sur $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Pour savoir comment A agit sur n'importe quel vecteur, on applique la règle de produit vecteur×matrice :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{pmatrix}. \tag{10.164}$$

Une chose intéressante est de savoir quelles sont les directions invariantes de la transformation linéaire. Par exemple, on peut lire sur la matrice (10.163) que la direction $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est invariante : elle est simplement multipliée par 3. Dans cette direction, la transformation est juste une dilatation. Afin de savoir si v est un vecteur d'une direction conservée, il faut voir si il existe un nombre λ tel que $Av=\lambda v$, c'est-à-dire voir si v est simplement dilaté.

L'équation $Av=\lambda v$ se récrit $(A-\lambda\mathbb{1})v=0$, c'est-à-dire qu'il faut résoudre l'équation

$$(A-\lambda\mathbb{1})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{10.165}$$

Nous savons qu'une telle équation ne peut avoir de solutions que si $\det(A-\lambda\mathbb{1})=0$. La première étape est donc de trouver les λ qui vérifient cette condition.

10.6.2 Dans le vif du sujet

DefooMMKZooVcskCc

Proposition-Définition 10.84.
*Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $T\colon E\to E$. Un **vecteur propre** de T est un vecteur $v\neq 0$ tel que $T(v)=\lambda v$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{K}$. Dans ce cas, λ est la **valeur propre** de v.*

*Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. L'ensemble des vecteurs propres de T pour la valeur propre λ est un espace vectoriel nommé **espace propre**.*

Démonstration. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Soient des vecteurs propres v,w pour la valeur propre λ. Si $\alpha\in\mathbb{K}$, en utilisant la linéarité de T, nous avons

$$T(\alpha v+w)=\alpha T(v)+T(w)=\alpha\lambda v+\lambda w=\lambda(\alpha v+w), \tag{10.166}$$

donc $\alpha v+w$ est un vecteur propre de T pour la même valeur propre λ. □

Définition 10.85.
*L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme T est son **spectre** et est noté* $\mathrm{Spec}(T)$.

Remarque 10.86.
Le nombre zéro peut être une valeur propre ; c'est le vecteur zéro qui ne peut pas être vecteur propre. La matrice nulle est une matrice diagonalisable.

LEMooWHWUooFFXlzT

Lemme 10.87 ([334])**.**
Le spectre d'une matrice est égal au spectre de sa transposée : $\mathrm{Spec}(T) = \mathrm{Spec}(T^t)$.

Démonstration. Nous savons que T est inversible si et seulement si T^t l'est parce que si $TS = \mathbb{1}$ alors $S^tT^t = \mathbb{1}$. Nous avons équivalence entre les énoncés suivants :

- λ est une valeur propre de T
- il existe v tel que $(T - \lambda\mathbb{1})v = 0$
- $T - \lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible
- $(T^t - \lambda\mathbb{1})$ n'est pas inversible
- il existe w tel que $T^tw = \lambda w$.
- λ est valeur propre de T^t.

□

LemjcztYH

Lemme 10.88.
Soient un espace vectoriel E, un endomorphisme $T \in \mathrm{End}(E)$, ainsi que ses sous-espaces propres $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathrm{Spec}(T)}$. Toute somme finie de la forme

$$E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p} \tag{10.167}$$

est directe[29].

Démonstration. Nous utilisons le lemme 6.159. Soient $v_i \in E_{\lambda_i}$ un choix de vecteurs tels que

$$\sum_{i=1}^{p} v_i = 0. \tag{10.168}$$

EQooROAXooFpgxxF

Soit un entier j_0 entre 1 et p. Nous allons montrer que $v_{j_0} = 0$. Pour cela nous remarquons d'abord que, pour tout $i \neq j_0$,

$$\prod_{k\neq j_0} (\lambda_i - \lambda_k) = 0. \tag{10.169}$$

EQooGVPYooXRPEVU

Nous appliquons l'opérateur $\prod_{k\neq j_0}(T - \lambda_k\mathbb{1})$ à l'égalité (10.168) :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{p} \prod_{k\neq j_0} (T - \lambda_k)v_i && \text{(10.170a)}\\
&= \sum_{i=1}^{p} \prod_{k\neq j_0} (\lambda_i - \lambda_k)v_i && \text{(10.170b)}\\
&= \prod_{k\neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_k)v_{j_0}. && \text{(10.170c)}
\end{aligned}$$

SUBEQooHHGJooTvCcDb

SUBEQooSHQYooNLVoVZ

Justifications.

- Pour (10.170b). Pour chaque k et i nous avons $(T - \lambda_k)v_i = Tv_i - \lambda_kv_i = \lambda_iv_i - \lambda_kv_i$ parce que v_i est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ_i.
- Pour (10.170c). Dans la somme, seul le terme $i = j_0$ est non nul, à cause de (10.169).

Donc $v_{j_0} = 0$ parce que le produit $\prod_{k\neq j_0}(\lambda_{j_0} - \lambda_k)$, lui, est non nul. □

[29] Définition 6.157.

10.7 Polynômes d'endomorphismes

SECooUEQVooLBrRiE
Soit A un anneau commutatif et $\mathbb{K}$, un corps commutatif. L'injection canonique $A \to A[X]$ se prolonge en une injection

$$\mathbb{M}(A) \to \mathbb{M}\big(A[X]\big). \tag{10.171}$$

10.7.1 Polynômes d'endomorphismes

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi_u\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathrm{End}(E)\\ P &\mapsto P(u).\end{aligned} \tag{10.172}$$
EqOVKooeMJuv

L'image de φ_u est un sous-espace vectoriel. En effet si $A = \varphi_u(P)$ et $B = \varphi_u(Q)$, alors $A + B = \varphi_u(P + Q)$ et $\lambda A = (\lambda P)(u)$. En particulier c'est un espace fermé[30].

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et P, un polynôme. Nous disons que P est un polynôme **annulateur** de u si $P(u) = 0$ en tant qu'endomorphisme de E.

LemQWvhYb
Lemme 10.89.
Si P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ et si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, nous avons

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u). \tag{10.173}$$

Démonstration. Si $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_j b_j X^j$, alors le coefficient de X^k dans PQ est

$$\sum_l a_l b_{k-l}. \tag{10.174}$$
EqCoefGPyVcv

Par conséquent $(PQ)(u)$ contient $\sum_l a_l b_{k-l} u^k$. Par ailleurs $P(u) \circ Q(u)$ est donné par

$$\sum_i a_i u^i \left(\sum_j b_j u^j \right)(x) = \sum_{ij} a_i b_j u^{i+j}(x). \tag{10.175}$$

Le coefficient du terme en u^k est bien le même que celui donné par (10.174). □

ThoDecompNoyayzzMWod
Théorème 10.90 (Décomposition des noyaux ou lemme des noyaux[335])**.**
Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace[31] *vectoriel E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $P(u) = 0$. Nous supposons que P s'écrive comme le produit $P = P_1 \dots P_n$ de polynômes deux à deux étrangers*[32]*. Alors*

(1) Nous avons la formule

$$E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_n(u). \tag{10.176}$$

(2) En posant $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$, il existe des polynômes R_i tels que

$$R_1 Q_1 + \dots + R_n Q_n = 1. \tag{10.177}$$

ITEMooMOBPooPVXuXj
(3) Les projecteurs sur $\ker\big(P_j(u)\big)$ sont donnés par

$$\mathit{proj}_{\ker(P_i(u))} = (R_i Q_i)(u). \tag{10.178}$$

Démonstration. Dans ce qui suit, nous allons beaucoup utiliser le fait que $\mathbb{K}[X]$ soit commutatif (lemme 3.233). Nous posons

$$Q_i = \prod_{j \neq i} P_j. \tag{10.179}$$

(1) **Utilisation de Bézout**

Par le lemme 8.48 ces polynômes sont étrangers entre eux et le théorème de Bézout (théorème 8.47) donne l'existence de polynômes R_i tels que

$$R_1 Q_1 + \dots + R_n Q_n = 1. \tag{10.180}$$
EQooMMCVooRzlXpA

[30] Proposition 9.250.
[31] Le corps $\mathbb{K}$ est commutatif comme tous les corps dans le Frido.
[32] Définition 3.267.

(2) **Une première somme, pas directe** Si nous appliquons cette égalité à u et ensuite à $x \in E$ nous trouvons

$$\sum_{i=1}^{n}(R_iQ_i)(u)(x) = x, \tag{10.181}$$

et en particulier si nous posons $E_i = \text{Image}\big(R_iQ_i(u)\big)$ nous avons

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i. \tag{10.182}$$

Cette dernière somme n'est éventuellement pas une somme directe.

(3) **Q_iQ_j est multiple de P** Si $i \neq j$, en utilisant la commutativité de $\mathbb{K}[X]$,

$$Q_iQ_j = \left(\prod_{k\neq i} P_k\right)\left(\prod_{l\neq j} P_l\right) = \Big(\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} P_k\Big)P_j\left(\prod_{l\neq j} P_l\right) = \prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} P_k \prod_{k} P_l = S_{ij}P, \tag{10.183}$$

où S_{ij} est un polynôme. Nous voyons que Q_iQ_j est multiple de P.

(4) **Une somme directe** Toujours avec $i \neq j$, en utilisant le lemme 10.89,

$$(R_iQ_i)(u) \circ (R_jQ_j)(u) = \big(R_iQ_iR_jQ_j\big)(u) = \big(R_iR_j \underbrace{Q_iQ_j}_{=S_{ij}P}\big)(u) = (R_iR_jS_{ij})(u) \circ P(u) = 0 \tag{10.184}$$

Nous pouvons voir E comme un $\mathbb{K}$-module et appliquer le théorème 3.108. Les opérateurs $R_iQ_i(u)$ ont l'identité comme somme et sont orthogonaux, et nous avons donc la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} R_iQ_i(u)E. \tag{10.185}$$

(5) $R_iQ_i(u)E \subset \ker P_i(u)$ Attention : utilisation massive du lemme 10.89. Un élément de $R_iQ_i(u)E$ est de la forme $(R_iQ_i)(u)x$ avec $x \in E$. Nous appliquons l'endomorphisme $P_i(u)$ à cet élément, et nous vérifions que nous obtenons zéro :

$$\begin{aligned}
P_i(u)\big((R_iQ_i)(u)x\big) &= (P_iR_iQ_i)(u)x && \text{(10.186a)}\\
&= (R_i \underbrace{P_iQ_i}_{=P})(u)x && \text{(10.186b)}\\
&= (R_iP)(u)x && \text{(10.186c)}\\
&= \big(R_i(u) \circ \underbrace{P(u)}_{=0}\big)x && \text{(10.186d)}\\
&= 0. && \text{(10.186e)}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{Image}(R_iQ_i(u)) \subset \ker P_i(u). \tag{10.187}$$

(6) **Et la somme qu'il nous fallait** Le fait que la somme (10.185) soit directe n'est en fait pas crucial. En effet, vu que chacun des termes est inclus dans $\ker P_i(u)$, nous avons la somme (pas directe à priori)

$$E = \sum_{i=1}^{n} R_iQ_i(u)E \subset \sum_{i=1}^{n} \ker P_i(u). \tag{10.188}$$

Mais cette fois, nous prouvons qu'elle est directe en utilisant la caractérisation du lemme 6.159(4). Supposons que, pour un certain k,

$$x \in \ker P_k(u) \cap \Big(\sum_{j\neq k} \ker P_j(u)\Big). \tag{10.189}$$

Nous allons montrer que $x = 0$.

(6a) $Q_i(u)x = 0$ **si** $i \neq k$ Si $i \neq k$, nous avons

$$Q_i(u)x = \Big(\prod_{\substack{j\neq i\\ j\neq k}} P_j\Big)P_k(u)x = 0 \tag{10.190}$$

parce que $x \in \ker P_k(u)$.

(6b) $Q_k(u)x = 0$ Nous savons qu'il existe $z_l \in \ker P_l(u)$ tel que $x = \sum_{l\neq k} z_l$. Nous avons alors

$$Q_k(u)x = \Big(\prod_{j\neq k} P_j\Big)\sum_{l\neq k} z_l = \sum_{l\neq k}\Big(\prod_{j\neq k} P_j(u)\Big)z_l = 0 \tag{10.191}$$

parce que parmi les $P_j(u)$ $(j \neq k)$, il y a $P_l(u)$ qui annule z_l.

(6c) **Et finalement** Nous avons prouvé que $Q_i(u)x = 0$ pour tout i. La formule de Bézout (10.180) donne alors

$$\sum_i R_i \subset \underbrace{Q_i(u)x}_{=0} = x \tag{10.192}$$

et donc $x = 0$.

(6d) **Conclusion pour la somme directe** Nous venons de prouver que les $\ker\big(P_i(u)\big)$ sont en somme directe. L'équation (10.188) donne alors $E \subset \bigoplus_i \ker\big(P_i(u)\big)$ et donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker\big(P_i(u)\big). \tag{10.193}$$

(7) **Les projecteurs** Nous avons déjà tout et pour faire bien, on va poser plein de notations. D'abord $K_i = \ker\big(P_i(u)\big)$, et ensuite $s_i = (R_iQ_i)(u)$. L'équation (10.188) dit que

$$E = \bigoplus_i K_i, \tag{10.194}$$

EQooAEXKooQYaBdR

et (10.187) dit que

$$s_i(E) \subset K_i, \tag{10.195}$$

et aussi, par (10.181) :

$$\sum_i s_i = \mathrm{Id}\,. \tag{10.196}$$

EQooQVPUooUCooGX

Nous devons prouver que s_k est la projection sur K_k parallèle aux autres K_i (définition 6.161). Pour cela nous vérifions les conditions du lemme 6.162.

D'abord s_i est linéaire en tant que composition et somme d'applications linéaires.

Soit $x \in K_i$. En posant $y_l = s_l(x)$ et en utilisant (10.196) :

$$y_1 + \ldots + y_n = \sum_l s_l(x) = x \in K_i. \tag{10.197}$$

Vu que la somme (10.194) est directe nous avons $y_j = 0$ si $j \neq i$ et $y_i = x$. En prenant $i = k$ et $i \neq k$ nous avons les deux conditions du lemme 6.162.

□

10.91.
Ce résultat est utilisé pour prouver que toute représentation est décomposable en représentations irréductibles, proposition 18.10 ainsi que pour le théorème 10.220 qui dit que si le polynôme minimal d'un endomorphisme est scindé à racine simple alors il est diagonalisable.

CorKiSCkC

Corolaire 10.92.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, un endomorphisme semi-simple dont la décomposition du polynôme minimal μ_f en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}[X]$ est $\mu_f = M_1^{\alpha_1}\cdots M_r^{\alpha_r}$. Si F est un sous-espace stable par f, alors

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker M_i^{\alpha_i}(f) \cap F. \tag{10.198}$$

Démonstration. Nous posons $E_i = \ker M_i^{\alpha_i}(f)$ et $F_i = E_i \cap F$. Les polynômes $M_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux étrangers et $\mu_f(f) = 0$, donc le lemme des noyaux (10.90) s'applique et

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r. \tag{10.199}$$

Nous pouvons décomposer $x \in F$ en termes de cette somme :

$$x = x_1 + \cdots + x_r \tag{10.200}$$

EqbBbrdi

avec $x_i \in E_i$. Toujours selon le lemme des noyaux, les projections sur les espaces E_i sont des polynômes en f. Par conséquent F est stable sous toutes ces projections $\texttt{proj}_i : E \to E_i$, et en appliquant $\texttt{proj}_i$ à (10.200), $\texttt{proj}_i(x) = x_i$. Puisque $x \in F$, le membre de gauche est encore dans F et $x_i \in E_i \cap F$. Nous avons donc

$$F \subset \bigoplus_{i=1}^{r} F_i. \tag{10.201}$$

L'inclusion inverse est immédiate parce que $F_i \subset F$ pour chaque i. □

LemVISooHxMdbr

Lemme 10.93.
Si x est un vecteur propre de valeur propre λ pour l'endomorphisme u et si P est un polynôme, alors x est vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration. C'est un simple calcul de $P(u)x$ en ayant noté[33] $P(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^n$:

$$P(u)x = \sum_{k=0}^{n} c_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k x = P(\lambda)x. \tag{10.202}$$

□

10.7.2 Polynôme minimal et minimal ponctuel

Nous avons déjà vu la définition de polynôme minimal en 8.64. Le lemme suivant permet de parler de polynôme minimal d'endomorphisme.

LEMooQJQGooRcAxmJ

Lemme 10.94.
Soit un endomorphisme $f : E \to E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Il existe un unique polynôme annulateur unitaire de degré minimum[34].

Tout endomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède un polynôme minimal[35].

Démonstration. Pour l'unicité, soient P et Q deux polynômes annulateurs de f de même degré minimum N et ayant tous deux 1 comme coefficient de x^N. Alors $P - Q$ est de degré $N - 1$ tout en étant encore annulateur. Vu que nous avions dit que N était le degré minimum, le seul polynôme annulateur de degré $N - 1$ est le polynôme nul. Donc $P - Q = 0$.

Pour l'existence, les endomorphismes Id, f, f^2, … ne peuvent pas être tous linéairement indépendants parce que la dimension de $\mathrm{End}(E)$ est finie. Il existe donc un nombre N et des coefficients a_k tels que $\sum_{k=0}^{N} a_k f^k = 0$. Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ est donc annulateur de f.

Une autre façon de le dire est que l'application linéaire $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathrm{End}(E)$ donnée par $\varphi(P) = P(f)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie vers un espace vectoriel de dimension finie. Il ne peut donc pas être injectif et possède donc un noyau non réduit à zéro.

L'existence d'un polynôme minimal est maintenant seulement dû au fait que, avec les notations de la définition 8.64, l'idéal I_f n'est pas réduit à $\{0\}$. □

Remarque 10.95.
La preuve donnée ci-dessus montre que $\deg(\mu) \leqslant \dim(E)^2$. Comme conséquence du théorème de Cayley-Hamilton 10.116 nous verrons qu'en réalité le degré du polynôme minimal est majoré par la dimension de l'espace.

Dans la suite, l'endomorphisme f du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est fixé. Pour $x \in E$ nous notons

$$E_x = \{P(f)x \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}. \tag{10.203}$$

EqooOAYDooEpZELo

[33] En complète violation de ce qu'on disait dans 3.234.
[34] Degré minimum au sens où il existe peut-être d'autres polynômes annulateurs, mais ils seront de degré plus élevé.
[35] Définition 8.64.

Nous considérons le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}[X] &\to \mathrm{End}(E)\\ P &\mapsto P(f)\end{aligned} \tag{10.204}$$

et si $x \in E$ est donné nous considérons le morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}\varphi_x\colon \mathbb{K}[X] &\to E\\ P &\mapsto P(f)x.\end{aligned} \tag{10.205}$$

Les noyaux de ces applications sont des idéaux, entre autres par le lemme 10.89. Ils ont donc un unique générateur unitaire (chacun) par le théorème 8.43. En termes de vocabulaire, l'ensemble

$$\ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f) = 0\} \tag{10.206}$$

est l'**idéal annulateur** de f et un polynôme P tel que $P(f) = 0$ est un polynôme annulateur de f.

DEFooUICRooBGYhqQ

Proposition-Définition 10.96.
La partie $\ker(\varphi_x)$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$ *qui possède un unique générateur unitaire.*

Le générateur unitaire de $\ker(\varphi_x)$ *est le* ***polynôme minimal ponctuel*** *de* f *en* x*. Il sera noté* $\mu_{f,x}$ *ou* μ_x *lorsque la dépendance en* f *est claire dans le contexte.*

Nous notons μ le générateur unitaire du noyau de φ et μ_x celui de φ_x. Puisque $\mu \in \ker(\varphi_x)$ pour tout x nous avons $\mu_x \mid \mu$ pour tout x.

ExooDTUJooIMqSKn

Exemple 10.97 (Pas en dimension infinie)**.**
En dimension infinie, il n'y a pas toujours de polynôme annulateur. Si E est un espace vectoriel de dimension infinie ayant une base dénombrable $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ alors l'opérateur donné par $f(e_i) = e_{i+1}$ n'a pas de polynôme annulateur. Même pas ponctuel en quel que point que ce soit.

De même l'opérateur donné par $g(e_1) = 0$ et $g(e_i) = e_{i-1}$ si $i \neq 1$ n'a pas de polynôme annulateur, mais il a un polynôme annulateur ponctuel évident en $x = e_1$. L'exemple 17.104 donnera un habillage à peine subtil à cet exemple. △

PropAnnncEcCxj

Proposition 10.98.
Si P *est un polynôme tel que* $P(f) = 0$*, alors le polynôme minimal* μ_f *divise* P*. Autrement dit, le polynôme minimal engendre l'idéal des polynômes annulateurs.*

Démonstration. L'ensemble $\ker(\varphi) = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(f) = 0\}$ est un idéal par le lemme 10.89. Le polynôme minimal de f est un élément de degré plus bas dans I et par conséquent $I = (\mu_f)$ par le théorème 8.43. Nous concluons que μ_f divise tous les éléments de I. □

La proposition suivante permet de caractériser le polynôme minimal.

PROPooVUJPooMzxzjE

Proposition 10.99 ([159])**.**
Soit une application linéaire f *sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Il existe un unique polynôme unitaire*[36] $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*

(1) $P(f) = 0$ *;*

(2) l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \frac{\mathbb{K}[X]}{(P)} &\to \mathrm{End}(E)\\ \bar{Q} &\mapsto Q(f)\end{aligned} \tag{10.207}$$

EQooIBMDooVTaFbf

est injective.

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, il existe le polynôme minimal de f qui satisfait les conditions. Pour l'unicité nous y travaillons maintenant.

Supposons que l'application (10.207) soit injective. Alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$ nous avons $\bar{Q} = 0$, c'est-à-dire $Q = PR$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$. Autrement dit : P est un générateur unitaire de l'idéal annulateur de f. Le théorème 8.43(3) nous dit alors que $P = \mu$ parce que μ est également générateur unitaire. □

[36] À mon avis, « unitaire » manque dans [159].

LemSYsJJj

Lemme 10.100 ([336]).
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Il existe un élément $x \in E$ tel que $\mu_{f,x} = \mu_f$.

Démonstration. Soit une décomposition en irréductibles du polynôme minimal $\mu = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Nous notons $E_i = \ker\big(P_i^{\alpha_i}(f)\big)$. Les polynômes P_i sont étrangers deux à deux (un diviseur commun aurait a fortiori été un diviseur et aurait contredit l'irréductibilité). Le lemme des noyaux 10.90 nous donne la somme directe

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\big(P_i^{\alpha_i}(f)\big). \tag{10.208}$$

Si $x_i \in E_i$ alors μ_{x_i} est une puissance de P_i. En effet $\mu_{x_i} \mid \mu$ et est donc un produit des puissances des P_j. Or si $(QP_j)(f)x_i = 0$ alors $(P_jQ)(f)x_i = 0$, ce qui donne $Q(f)x_i \in E_j \cap E_i = \{0\}$ si $j \neq i$. Donc μ_{x_i} n'est pas de la forme QP_j pour $j \neq i$. Nous en déduisons que μ_{x_i} est une puissance de P_i dès que $x_i \in E_i$. Nous choisissons $x_i \in E_i$ tel que $\mu_{x_i} = P_i^{\alpha_i}$.

Nous posons enfin $a = x_1 + \dots + x_r$; par définition du polynôme annulateur μ_a, nous avons

EqooVIGCooSfuvwB
$$0 = \mu_a(f)a = \mu_a(f)x_1 + \dots + \mu_a(f)x_r. \tag{10.209}$$

Mais $\mu_a(f)x_i \in E_i$, et la somme des E_i est directe, donc l'annulation de la somme (10.209) implique l'annulation de chacun des termes : $\mu_a(f)x_i = 0$ pour tout i. Cela prouve que $\mu_{x_i} \mid \mu_a$. Mais comme les μ_{x_i} sont premiers deux à deux (parce que ce sont les $P_i^{\alpha_i}$), nous concluons que le produit divise encore μ_a :

$$\prod_{i=1}^{r} \mu_{x_i} \mid \mu_a, \tag{10.210}$$

c'est-à-dire $\mu \mid \mu_a$. Comme nous avons aussi $\mu_a \mid \mu$, nous déduisons $\mu_a = \mu$. □

DEFooFEIFooNSGhQE

Définition 10.101 (Matrices, endomorphismes et vecteurs cycliques).
*Une matrice est **cyclique** si elle est semblable à une matrice compagnon. Un endomorphisme $f : E \to E$ est **cyclique** si il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\{f^k(x)\}_{k=0,\dots,n-1}$ est une base de E. Un vecteur ayant cette propriété est un **vecteur cyclique** pour f.*

LemAGZNNa

Lemme 10.102.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme cyclique[37] f de E. Soit un vecteur cyclique v de f, alors le polynôme minimal de f est égal au polynôme minimal de f au point v : $\mu_f = \mu_{f,v}$.

Démonstration. Montrons que $\mu_{f,v}$ est un polynôme annulateur de f, ce qui prouvera que μ_f divise $\mu_{f,v}$ par la proposition 10.98. Étant donné que v est cyclique, tout élément de E s'écrit sous la forme $x = Q(f)v$. Prenons un polynôme P annulateur de f en v : $P(f)v = 0$. Nous montrons que P est alors un polynôme annulateur de f. En effet, nous avons

$$P(f)x = \big(P(f) \circ Q(f)\big)v = \big(Q(f) \circ P(f)\big)v = 0 \tag{10.211}$$

où nous avons utilisé le lemme 10.89. □

LEMooOWDAooWPbPda

Lemme 10.103 ([336]).
Soit $a \in E$ un vecteur cyclique pour f, tel que $\mu_a = \mu$. Alors E_a est un sous-espace stable par f pour lequel il existe un supplémentaire stable.

Démonstration. Soit $l = \deg(\mu) = \deg(\mu_a)$. L'espace E_a étant engendré par les $f^k(a)$ nous savons que $e_1 = a$, $e_2 = f(a)$,..., $e_l = f^{l-1}(a)$ forment une base de E_a. Nous pouvons la compléter en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Et nous posons[38]

$$G = \{x \in E \text{ tel que } e_l^*\big(f^k(x)\big) = 0, \forall k \geqslant 0\} \tag{10.212a}$$
$$= \bigcap_{k \geqslant 0} \ker\{e_l^* \circ f^k\} \tag{10.212b}$$
$$= \bigcap_{k=0}^{l-1} \ker(e_l^* \circ f^k). \tag{10.212c}$$

[37] Voir la définition 10.101.
[38] ici, comme presque partout, e_l^* est le dual de e_l, c'est-à-dire l'application linéaire sur E donnée par $e_l^*(e_i) = \delta_{li}$, voir la définition 6.144.

La dernière égalité est due au fait que l soit le degré de μ. Du coup f^l est une combinaison linéaire des f^i avec $i \leqslant l-1$.

Nous avons $f(G) \subset G$ et de plus $E_a \cap G = \{0\}$ parce qu'un élément de E_a est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $f^j(a)$ $(j \leqslant l)$. Après application de f^{l-j}, ces éléments obtiennent une composante $f^l(a) = e_l$. De plus G est un sous-espace vectoriel du fait que $e_l^* \circ f^i$ est une application linéaire.

Montrons enfin que $\dim(G) = n-l$. Pour cela nous remarquons que G est une intersection d'hyperplans, et nous montrons que les équations définissant ces hyperplans sont linéairement indépendantes. Soit donc

$$\sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j \big(e_l^* \circ f^j\big) = 0 \tag{10.213}$$

EqooOHESooRtBUfc

et montrons que $\lambda_j = 0$ pour tout j est l'unique solution. Soit $x \in E$ et appliquons l'opération (10.213) au vecteur $f^i(x)$; le résultat est zéro :

$$0 = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j (e_l^* \circ f^i \circ f^j) = (e_l^* \circ f^i) P(u) \tag{10.214}$$

où nous avons posé $P(X) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j X^j$. Appliquons cela à a : pour tout i nous avons

$$(e_l^* \circ f^i)\big(P(f)a\big) = 0. \tag{10.215}$$

Mais par définition de E_a, l'élément $P(f)a$ est dans E_a. Nous en déduisons que

$$P(f)a \in G \cap E_a = \{0\}, \tag{10.216}$$

c'est-à-dire que P est un polynôme annulateur de a. Mais P est de degré $l-1$ alors que le polynôme minimal de a est de degré l. Par conséquent $P = 0$ et $\lambda_j = 0$ pour tout j. □

DEFooBOHVooSOopJN

Définition 10.104.
*L'endomorphisme f d'un espace vectoriel est **semi-simple** si tout sous-espace stable par f possède un supplémentaire stable.*

LemrFINYT

Lemme 10.105.
Si le polynôme minimal d'un endomorphisme est irréductible, alors cet endomorphisme est semi-simple[39].

Démonstration. Soit f, un endomorphisme dont le polynôme minimal est irréductible et F, un sous-espace stable par f. Nous devons en trouver un supplémentaire stable. Si $F = E$, il n'y a pas de problème. Sinon nous considérons $u_1 \in E \setminus F$ et

$$E_{u_1} = \{P(f)u_1 \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}, \tag{10.217}$$

qui est un espace stable par f.

Montrons que $E_{u_1} \cap F = \{0\}$. Pour cela nous étudions l'idéal

$$I_{u_1} = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f)u_1 = 0\}. \tag{10.218}$$

C'est un idéal non réduit à $\{0\}$ parce que le polynôme minimal de f par exemple est dans I_{u_1}. Soit P_{u_1} un générateur unitaire de I_{u_1}. Étant donné que $\mu_f \in I_{u_1}$, nous avons P_{u_1} divise μ_f et donc, $P_{u_1} = \mu_f$, parce que μ_f est irréductible par hypothèse.

Soit $y \in E_{u_1} \cap F$. Par définition il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)u_1$ et si $y \neq 0$, cela signifie que $P \notin I_{u_1}$, c'est-à-dire que P_{u_1} ne divise pas P. Étant donné que P_{u_1} est irréductible cela implique que P_{u_1} et P sont premiers entre eux (ils n'ont pas d'autre pgcd que 1).

Nous utilisons maintenant des coefficients de Bézout (théorème 8.47) $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BP_{u_1} = 1. \tag{10.219}$$

Nous appliquons cette égalité à f et puis à u_1 :

$$u_1 = A(f) \circ \underbrace{P(f)u_1}_{=y} + B(f) \circ \underbrace{P_{u_1}(f)u_1}_{=0} = A(f)y. \tag{10.220}$$

Mais $y \in F$, donc $A(f)y \in F$. Nous aurions donc $u_1 \in F$, ce qui est impossible par choix. Nous savons maintenant que l'espace $E_{u_1} \oplus F$ est stable sous f. Si cet espace est E alors nous arrêtons. Sinon nous

[39] Définition 10.104.

reprenons le raisonnement avec $E_{u_1} \oplus F$ en guise de F et en prenant $u_2 \in E \setminus (E_{u_1} \oplus F)$. Étant donné que E est de dimension finie, ce procédé s'arrête à un certain moment et nous aurons

$$E = F \oplus E_{u_1} \oplus \ldots \oplus E_{u_k} \tag{10.221}$$

où chacun des E_{u_i} sont stables. □

ThoFgsxCE

Théorème 10.106.
Un endomorphisme est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles distincts deux à deux.

Démonstration. Supposons que f soit semi-simple et que son polynôme minimal soit donné par $\mu_f = M_1^{\alpha_1} \ldots M_r^{\alpha_r}$ où les M_i sont des polynômes irréductibles deux à deux distincts. Nous devons montrer que $\alpha_i = 1$ pour tout i. Soit i tel que $\alpha_i \geqslant 1$ et $N \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_f = M^2 N$ où l'on a noté $M = M_i$. Nous étudions l'espace

$$F = \ker M(f) \tag{10.222}$$

qui est stable par f, et qui possède donc un supplémentaire S également stable par f. Nous allons montrer que MN est un polynôme annulateur de f.

D'abord nous prenons $x \in S$. Étant donné que F est le noyau de $M(f)$,

$$M(f)\big(MN(f)x\big) = \mu_f(f)x = 0, \tag{10.223}$$

ce qui signifie que $MN(f)x \in F$. Mais puisque S est stable par f nous avons aussi $MN(f)x \in S$. Finalement $MN(f)x \in F \cap S = \{0\}$. Autrement dit, $MN(f)$ s'annule sur S.

Prenons maintenant $y \in F$. Nous avons

$$MN(f) = N(f)\big(M(f)y\big) = 0 \tag{10.224}$$

parce que $y \in F = \ker M(f)$.

Nous avons prouvé que $MN(f)$ s'annule partout et donc que $MN(f)$ est un polynôme annulateur de f, ce qui contredit la minimalité de $\mu_f = M^2 N$.

Nous passons au sens inverse. Soit $m_f = M_1 \ldots M_r$ une décomposition du polynôme minimal de l'endomorphisme f en irréductibles distincts deux à deux. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. Nous notons

$$E_i = \ker(M_i(f)) \tag{10.225}$$

et $f_i = f|_{E_i}$. Par le lemme 10.92 nous avons

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap E_i). \tag{10.226}$$

Les espaces E_i sont stables par f et étant donné que M_i est irréductible, il est le polynôme minimal de f_i. En effet, M_i est annulateur de f_i, ce qui montre que le polynôme minimal de f_i divise M_i. Mais M_i étant irréductible, M_i est le polynôme minimal. Étant donné que $\mu_{f_i} = M_i$, l'endomorphisme f_i est semi-simple par le lemme 10.105.

L'espace $F \cap E_i$ étant stable par l'endomorphisme semi-simple f_i, il possède un supplémentaire stable que nous notons S_i :

$$E_i = S_i \oplus (F \cap E_i). \tag{10.227}$$

Étant donné que sur chaque S_i nous avons $f|_{S_i} = f_i$, l'espace $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_r$ est stable par f. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
E &= E_1 \oplus \ldots \oplus E_r && \text{(10.228a)}\\
&= \big(S_1 \oplus (F \cap E_1)\big) \oplus \ldots \oplus \big(S_r \oplus (F \cap E_r)\big) && \text{(10.228b)}\\
&= \big(\bigoplus_{i=1}^{r} S_i\big) \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{r} F \cap E_i\big) && \text{(10.228c)}\\
&= S \oplus F, && \text{(10.228d)}
\end{aligned}$$

ce qui montre que F a bien un supplémentaire stable par f et donc que f est semi-simple. □

Exemple 10.107 (L'espace engendré par $\mathbb{1}$, A, A^2,...).
Soit A une matrice, et

$$E = \text{Span}\{A^k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \tag{10.229}$$

Nous montrons que $\dim(E)$ est le degré du polynôme minimal de A.

D'abord l'idéal annulateur de A est engendré par le polynôme minimal[40] que nous notons $\mu = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. La partie $\{\mathbb{1}, \dots, A^{p-1}\}$ est libre parce qu'une combinaison linéaire nulle de ces éléments serait un polynôme annulateur en A de degré plus petit que p. Donc $\dim(E) \geqslant p$.

La partie $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^p\}$ est liée à cause du polynôme minimal. Isoler A^p dans $\mu(A) = 0$ donne un polynôme f de degré $p-1$ tel que $A^p = f(A)$.

Nous allons montrer à présent que la famille $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^{p-1}\}$ est génératrice (alors $\dim(E) \leqslant p$). Soit un entier $q \geqslant p$ et de division euclidienne[41] $np + r = q$ avec $r < p$. Nous avons $A^q = A^{np}A^r$. D'une part

$$A^{np} = (A^p)^n = f(A)^n \tag{10.230}$$

est de degré $n(p-1)$. Par conséquent

$$A^q = f(A)^n A^r \tag{10.231}$$

qui est de degré $n(p-1)+r = q-n$. Autrement dit il existe un polynôme g_1 de degré $q-n$ tel que $A^q = g_1(A)$. Si $q - n > p - 1$ alors nous pouvons recommencer et obtenir un polynôme g_2 de degré strictement inférieur à celui de g_1 tel que $A^q = g_2(A)$. Au bout du compte, il existe un polynôme g de degré au maximum $p-1$ tel que $A^q = g(A)$. Cela prouve que la partie $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^{p-1}\}$ est génératrice de E.

La dimension de E est donc p, le degré du polynôme minimal. △

PropooCFZDooROVlaA

Proposition 10.108.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Nous avons l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\mathbb{K}[f] \simeq \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu_f)} \tag{10.232}$$

La dimension en est $\deg(\mu_f)$.

Démonstration. Notons avant de commencer que (μ) est l'idéal engendré par μ. Les classes dont il est question dans le quotient $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ sont

$$\bar{P} = \{P + S\mu\}_{S \in \mathbb{K}[X]}. \tag{10.233}$$

Nous allons montrer que l'application suivante fournit l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi\colon \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu)} &\to \mathbb{K}[f] \\ \bar{P} &\mapsto P(f). \end{aligned} \tag{10.234}$$

(1) **ψ est bien définie** Si $Q \in \bar{P}$ alors $Q = P + S\mu$ pour un certain $S \in \mathbb{K}[X]$. Du coup nous avons

$$\psi(\bar{Q}) = P(f) + (S\mu)(f). \tag{10.235}$$

Mais $\mu(f) = 0$ donc le deuxième terme est nul. Donc $\psi(\bar{P})$ est bien défini.

(2) **Injectif** Si $\psi(\bar{P}) = 0$ nous avons $P(f) = 0$, ce qui signifie que $P = S\mu$ pour un polynôme S. Par conséquent $P \in (\mu)$ et donc $\bar{P} = 0$.

(3) **Surjectif** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. L'élément $P(f)$ de $\mathbb{K}[f]$ est dans l'image de ψ parce que c'est $\psi(\bar{P})$.

En ce qui concerne la dimension, le corolaire 8.44 en parle déjà : une base est donnée par les projections de $1, X, \dots, X^{\deg(\mu_f)-1}$. □

10.7.3 Polynôme caractéristique

DefOWQooXbybYD

Définition 10.109.
Soit un anneau commutatif A. Si $u \in \mathbb{M}(n, A)$, nous définissons le ***polynôme caractéristique de*** *u :*

$$\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1}_n). \tag{10.236}$$

EqkxbdfuI

Nous définissons de même le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u\colon E \to E$.

[40] Proposition 10.98.
[41] Théorème 3.40.

Remarque 10.110.
Quelques remarques à propos du signe[42].

- Certains auteurs définissent le polynôme caractéristique par $\det(X-u)$ au lieu de $\det(u-X)$.
- Wikipédia francophone[337] prend la définition $\det(X-u)$ (donc opposée de la nôtre). Allez lire la page de discussion.
- Sur les Wikipédias en d'autres langues, ça varie.
- Un avantage de $\det(u-X)$ est que $\det(u)=\chi_u(0)$.
- Un avantage de $\det(X-u)$ est qu'il est unitaire.

LemooWCZMooZqyaHd

Lemme 10.111 ([1]).
Soit un endomorphisme $u\colon E\to E$.

ITEMooAALOooGlQYOs

(1) Le polynôme caractéristique χ_u a pour degré la dimension de E.

ITEMooUTDXooFNgHqo

(2) Si la dimension de E est paire, alors le polynôme caractéristique χ_u est unitaire.

Démonstration. Nous considérons une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E. En utilisant la définition 10.14 donne

$$\chi_u(X)=\det(u-X\mathbb{1}_n) \tag{10.237a}$$
$$=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}e^*_{\sigma(i)}\big((u-X)(e_i)\big) \tag{10.237b}$$
$$=\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\Big(e^*_{\sigma(i)}\big(u(e_i)\big)-Xe^*_{\sigma(i)}(e_i)\Big). \tag{10.237c}$$

Par la proposition 3.238, le terme de plus haut degré dans $\chi_u(X)$ serait

$$\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(-)Xe^*_{\sigma(i)}(e_i)=(-1)^nX^n\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}\delta_{i,\sigma(i)}. \tag{10.238}$$

si ce n'est pas nul. Si $\sigma\neq\mathrm{Id}$, alors il y a au moins un des $\delta_{i,\sigma(i)}$ qui est nul, et donc tout le produit est nul. Il reste donc de la somme seulement le terme $\sigma=\mathrm{Id}$. Bref, le terme de plus haut degré dans $\chi_u(X)$ est

$$(-1)^nX^n. \tag{10.239}$$

Cela prouve (1). Quant à (2), c'est également prouvé parce que si n est pair, alors $(-1)^n=1$. □

ThoNhbrUL

Théorème 10.112.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et un endomorphisme $u\in\mathrm{End}(E)$. Alors

(1) Le polynôme caractéristique divise $(\mu_u)^n$ dans $\mathbb{K}[X]$.

(2) Les polynômes caractéristiques et minimaux ont mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

(3) Les polynômes caractéristiques et minimaux ont mêmes racines dans $\mathbb{K}[X]$.

(4) Le polynôme caractéristique est scindé si et seulement si le polynôme minimal est scindé.

ThoWDGooQUGSTL

Théorème 10.113.
Soit $u\in\mathrm{End}(E)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

ItemeXHXhHi

(1) $\lambda\in\mathrm{Spec}(u)$

ItemeXHXhHii

(2) $\chi_u(\lambda)=0$

ItemeXHXhHiii

(3) $\mu_u(\lambda)=0$.

Démonstration. (1) ⇔ (2). Dire que λ est dans le spectre de u signifie que l'opérateur $u-\lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible, ce qui est équivalent à dire que $\det(u-\lambda\mathbb{1})$ est nul par la proposition 10.15(1) ou encore que λ est une racine du polynôme caractéristique de u.

(2) ⇔ (3). C'est une application directe du théorème 10.112 qui précise que le polynôme caractéristique a les mêmes racines dans $\mathbb{K}$ que le polynôme minimal. □

[42] Attention : je crois qu'il y a des incohérences dans le Frido à propos de ce choix

ExICOJcFp

Exemple 10.114.

Sur $\mathbb{R}^2$, nous considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui a pour polynôme caractéristique[43] le polynôme $\chi_A = (X-1)^2$. Le nombre $\lambda = 1$ est une racine double de ce polynôme, et pourtant il n'y a qu'une seule dimension d'espace propre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{10.240}$$

entraine $x = 0$.

Ici la multiplicité algébrique est différente de la multiplicité géométrique. △

PropNrZGhT

Proposition 10.115 ([338]).
Soit f, un endomorphisme de E et $x \in E$. Alors

ItemfzKOCo

(1) L'espace $E_{f,x}$ est stable par f.

(2) L'espace $E_{f,x}$ est de dimension

$$p_{f,x} = \dim E_{f,x} = \deg(\mu_{f,x}) \tag{10.241}$$

où $\mu_{f,x}$ est le générateur unitaire de $I_{f,x}$.

ItemKHNExH

(3) Le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$ est $\mu_{f,x}$.

ItemHMviZw

(4) Nous avons

$$\chi_{f|_{E_{f,x}}}(f)x = \mu_{f,x}(f)x = 0. \tag{10.242}$$

Démonstration. Le fait que $E_{f,x}$ soit stable par f est classique. Le point (4) est une application du point (3). Les deux gros morceaux sont donc les points (2) et (3).

Étant donné que $\mu_{f,x}$ est de degré minimal dans $I_{f,x}$, l'ensemble

$$B = \{f^k(x) \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant p_{f,x} - 1\} \tag{10.243}$$

est libre. En effet une combinaison nulle des vecteurs de B donnerait un polynôme en f de degré inférieur à $p_{f,x}$ annulant x. Nous écrivons

$$\mu_{f,x}(X) = X^{p_{f,x}} - \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i X^i. \tag{10.244}$$

Étant donné que $\mu_{f,x}(f)x = 0$ et que la somme du membre de droite est dans $\text{Span}(B)$, nous avons $f^{p_{f,x}}(x) \in \text{Span}(B)$. Nous prouvons par récurrence que $f^{p_{f,x}+k}(x) \in \text{Span}(B)$. En effet en appliquant f^k à l'égalité

$$0 = f^{p_{f,x}}(x) - \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i f^i(x) \tag{10.245}$$

nous trouvons

$$f^{p_{f,x}+k}(x) = \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i f^{i+k}(x), \tag{10.246}$$

alors que par hypothèse de récurrence le membre de droite est dans $\text{Span}(B)$. L'ensemble B est alors générateur de $E_{f,x}$ et donc une base d'icelui. Nous avons donc bien $\dim(E_{f,x}) = p_{f,x}$.

Nous montrons maintenant que $\mu_{f,x}$ est annulateur de f au point x. Nous savons que

$$\mu_{f,x}(f)x = 0. \tag{10.247}$$

En y appliquant f^k et en profitant de la commutativité des polynômes sur les endomorphismes (proposition 10.89), nous avons

$$0 = f^k\big(\mu_{f,x}(f)x\big) = \mu_{f,x}(f)f^k(x), \tag{10.248}$$

de telle sorte que $\mu_{f,x}(f)$ est nul sur B et donc est nul sur $E_{f,x}$. Autrement dit,

$$\mu_{f,x}\big(f|_{E_{f,x}}\big) = 0. \tag{10.249}$$

Montrons que $\mu_{f,x}$ est même minimal pour $f|_{E_{f,x}}$.

Supposons avoir Q, un polynôme non nul de degré $p_{f,x}-1$ annulant $f|_{E_{f,x}}$. En particulier $Q(f)x = 0$. Cela signifie que B est un système lié, alors que nous avons montré que c'était un système libre. Contradiction. Nous concluons que $\mu_{f,x}$ est le polynôme minimal de $f|_{E_{f,x}}$. □

[43] Définition 10.109.

Cette histoire de densité permet de donner une démonstration alternative du théorème de Cayley-Hamilton.

ThoCalYWLbJQ

Théorème 10.116 (Cayley-Hamlilton)**.**
Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Une démonstration plus simple via la densité des diagonalisables est donnée en théorème 15.31.

Démonstration. Nous devons prouver que $\chi_f(f)x = 0$ pour tout $x \in E$. Pour cela nous nous fixons un $x \in E$, nous considérons l'espace $E_{f,x}$ et $\chi_{f,x}$, le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$. Étant donné que $E_{f,x}$ est stable par f, le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$ divise χ_f, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q_x tel que

$$\chi_f = Q_x \chi_{f,x}, \tag{10.250}$$

et donc aussi

$$\chi_f(f)x = Q_x(f)\big(\chi_{f,x}(f)x\big) = 0 \tag{10.251}$$

parce que la proposition 10.115 nous indique que $\chi_{f,x}$ est un polynôme annulateur de $f|_{E_{f,x}}$. □

Corolaire 10.117.
Le degré du polynôme minimal est majoré par la dimension de l'espace.

Démonstration. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique parce qu'il engendre l'idéal des polynômes annulateurs par la proposition 10.98. Or le degré du polynôme caractéristique est la dimension de l'espace par le lemme 10.111. □

Exemple 10.118 (Calcul de l'inverse d'un endomorphisme)**.**
Le théorème de Cayley-Hamilton donne un moyen de calculer l'inverse d'un endomorphisme inversible pourvu que l'on connaisse son polynôme caractéristique. En effet, supposons que

$$\chi_f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k. \tag{10.252}$$

Nous aurons alors

$$0 = \chi_f(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k. \tag{10.253}$$

Nous appliquons f^{-1} à cette dernière égalité en sachant que $f^{-1}(0) = 0$:

$$0 = a_0 f^{-1} + \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}, \tag{10.254}$$

et donc

$$f^{-1} = -\frac{1}{\det(f)} \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1} \tag{10.255}$$

où nous avons utilisé le fait que $a_0 = \chi_f(0) = \det(f)$. △

PropooBYZCooBmYLSc

Proposition 10.119.
Si $(X-z)^l$ ($l \geqslant 1$) est la plus grande puissance de $(X-z)$ dans le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f alors

$$1 \leqslant \dim(E_z) \leqslant l. \tag{10.256}$$

C'est-à-dire que nous avons au moins un vecteur propre pour chaque racine du polynôme caractéristique.

Démonstration. Si $(X-z)$ divise χ_f alors en posant $\chi_f = (X-z)P(X)$ nous avons

$$\det(f - X\mathbb{1}) = (X-z)P(X), \tag{10.257}$$

ce qui, évalué en $X = z$, donne $\det(f - z\mathbb{1}) = 0$. L'annulation du déterminant étant équivalente à l'existence d'un noyau non trivial, nous avons $v \neq 0$ dans E tel que $(f - z\mathbb{1})v = 0$. Cela donne $f(v) = zv$ et montre que v est vecteur propre de f pour la valeur propre z. Et aussi que $\dim(E_z) \geqslant 1$.

Si $\dim(E_z) = k$ alors le théorème de la base incomplète 6.15 nous permet d'écrire une base de E dont les k premiers vecteurs forment une base de E_z. Dans cette base, la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} z & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & z & * \\ & & & * \end{pmatrix} \tag{10.258}$$

où les étoiles représentent des blocs à priori non nuls. En tout cas, sous cette forme, il est visible que $(X-z)^k$ divise χ_f. □

10.8 Formes bilinéaires et quadratiques

Plus à propos de formes bilinéaires dans le thème 16.

DEFooEEQGooNiPjHz

Définition 10.120 ([339]).
*Soient trois espaces vectoriels E, F et V sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Une application $b\colon E \times F \to V$ est **bilinéaire** si elle est séparément linéaire en ses deux variables, c'est-à-dire si*

(1) $b(u_1 + u_2, v) = b(u_1, v) + b(u_2, v)$,

(2) $b(u, v_1 + v_2) = b(u, v_1) + b(u, v_2)$

(3) $b(\lambda u, v) = b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v)$

pour tout $u, u_1, u_2 \in E$, $v, v_1, v_2 \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

*(1) Dans le cas $E = F$ et $V = \mathbb{K}$, nous parlons de **forme bilinéaire** sur E.*

*(2) Nous parlons de forme bilinéaire **symétrique** si de plus $b(u, v) = b(v, u)$.*

DefBSIoouvuKR

Définition 10.121 ([340]).
*Soit un espace vectoriel E et $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique différente de 2. Une **forme quadratique** sur E est une application $q\colon E \to \mathbb{F}$ pour laquelle il existe une forme bilinéaire symétrique $b\colon E \times E \to \mathbb{F}$ satisfaisant $q(x) = b(x, x)$ pour tout $x \in E$.*
L'ensemble des formes quadratiques réelles sur E est noté $Q(E)$.

La topologie sur $Q(E)$ sera la topologie métrique donnée dans le lemme 10.136.

DEFooJIAQooZkBtTy

Définition 10.122 (Application bilinéaire définie positive, thème 39).
Si b est une application bilinéaire[44] *sur un espace vectoriel E nous disons qu'elle est*

ITEMooRVGDooQmNqyg

*(1) **définie positive** si $b(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et $b(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

*(2) **semi-définie positive** si $b(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. Nous dirons aussi parfois qu'elle est simplement « positive ».*

Note : nous disons souvent « strictement définie positive » pour « définie positive », pour éviter les confusions.

10.123.
Une application bilinéaire $E \times E \to \mathbb{K}$ n'est pas une application linéaire ; la distinction est importante. La linéarité est

$$b(\lambda u, \lambda v) = b\big(\lambda(u, v)\big) = \lambda b(u, v) \tag{10.259}$$

et la bilinéarité est

$$b(\lambda u, v) = b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v). \tag{10.260}$$

En réalité la seule forme qui soit à la fois linéaire et bilinéaire est la forme identiquement nulle : la condition

$$b(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 b(u, v) = \lambda b(u, v) \tag{10.261}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ implique $b(u, v) = 0$.

[44] Définition 10.120.

EXooKFBOooJjXZwu

Exemple 10.124 ([341]).
L'application

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K})\times\mathbb{M}(n,\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ (A,B) &\mapsto \mathrm{Tr}(AB) \end{aligned} \tag{10.262}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

La vérification est un calcul :

$$\mathrm{Tr}(BA)=\sum_i (BA)_{ii}=\sum_{ik} B_{ik}A_{ki}=\sum_{ik} A_{ki}B_{ik}=\sum_k (AB)_{kk}=\mathrm{Tr}(AB). \tag{10.263}$$

△

10.8.1 Dégénérescence d'une forme bilinéaire

Soit b, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2. Nous notons q la forme quadratique associée.

DEFooNUBFooLfCqaK

Définition 10.125.
Une forme bilinéaire est ***non dégénérée*** *si $b(x,z)=0$ pour tout z implique $x=0$.*

LemyKJpVP

Lemme 10.126.
Soit b une forme bilinéaire non dégénérée. Si x et y sont tels que $b(x,z)=b(y,z)$ pour tout z, alors $x=y$.

Démonstration. C'est immédiat du fait de la linéarité en le premier argument et de la non-dégénérescence : si $b(x,z)-b(y,z)=0$ alors

$$b(x-y,z)=0 \tag{10.264}$$

pour tout z, ce qui implique $x-y=0$. □

10.8.2 Orthogonal pour une forme bilinéaire

DEFooENZGooXMWfUy

Définition 10.127.
Soit un espace vectoriel E et une forme bilinéaire symétrique b. Si $A\subset E$ nous notons

$$A^\perp=\{z\in E \text{ tel que } b(z,x)=0\,\forall x\in A\}. \tag{10.265}$$

*C'est l'****orthogonal*** *de A par rapport à la forme b.*

DEFooQQBQooKJdwxO

Définition 10.128.
Soit un espace vectoriel E et une forme bilinéaire symétrique b. Le ***noyau*** *est la partie*

$$\ker(b)=\{z\in E \text{ tel que } b(z,x)=0\forall x\in E\}. \tag{10.266}$$

PROPooWPKRooUAnVzd

Proposition 10.129 ([342]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soit une forme bilinéaire symétrique b sur E. Si A et B sont des parties de E nous avons :

ITEMooCGEIooKpSNXS
(1) $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel.*

ITEMooRRAOooTaVYgm
(2) Si $A\subset B$ alors $B^\perp\subset A^\perp$.

ITEMooBKXFooEpObWC
(3) $A^\perp=\mathrm{Span}(A)^\perp$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)**
Soient $x,y\in A^\perp$, $a\in A$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Nous avons alors

$$b(x+\lambda y,a)=b(x,a)+\lambda b(y,a)=0 \tag{10.267}$$

(2) **Pour (2)**
Soient $x\in B^\perp$ et $a\in A$. Nous avons $b(x,a)=0$ parce que $a\in A\subset B$ et $x\in B^\perp$.

(3) **Pour (3)** Deux inclusions à prouver.

(3a) **Première inclusion** Nous avons $A \subset \text{Span}(A)$, donc le point (2) montre que $\text{Span}(A)^\perp \subset A^\perp$.

(3b) **Deuxième inclusion** Soit $x \in A^\perp$ et $y \in \text{Span}(A)$. Nous avons $y = \sum_i \lambda_i a_i$ pour certains $a_i \in A$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors

$$b(x,y) = \sum_i \lambda_i b(x,a_i) = 0. \tag{10.268}$$

□

PROPooSACFooQTsiJL

Proposition 10.130 ([342]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soit une forme bilinéaire symétrique b sur E. Si V est un sous-espace de E, alors :

ITEMooYHJUooQnbKQc

(1) Si $b_V : V \times V \to \mathbb{K}$ est la restriction de b, alors $V \cap V^\perp = \ker(b_V)$[45].

ITEMooUZZFooDbuddF

(2) $(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.

ITEMooSZAGooLgkzYw

(3) $V \subset (V^\perp)^\perp$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)**
En deux parties.

(1a) $V \cap V^\perp \subset \ker(b_V)$ Soit $x \in V \cap V^\perp$. Si $v \in V$, nous avons $b(x,v) = 0$ parce que $x \in V^\perp$.

(1b) $\ker(b_V) \subset V \cap V^\perp$ Soit $x \in \ker(b_V)$. Nous avons $x \in V$ parce que $x \in \ker(b_V) \subset V$. Pour montrer que $x \in V^\perp$ nous considérons $y \in V$ et nous remarquons que $b(x,y) = 0$ parce que $x \in V^\perp$.

(2) **Pour (2)** En deux parties.

(2a) $(V+W)^\perp \subset V^\perp \cap W^\perp$ Soit $x \in (V+W)^\perp$. Si $v \in V$, alors $v \in V+W$, donc $f(x,v) = 0$. Cela prouve que $x \in V^\perp$. Nous prouvons que $x \in W^\perp$ de même.

(2b) $V^\perp \cap W^\perp \subset (V+W)^\perp$ Un élément de $V+W$ est de la forme $v+w$ avec $v \in V$ et $w \in W$. Nous avons

$$b(x, v+w) = b(x,v) + b(x,w) = 0. \tag{10.269}$$

(3) **Pour (3)** Si $x \in V$, alors $b(x,z) = 0$ pour tout $V^\perp$.

□

PROPooMAZZooRZZoHj

Proposition 10.131.
Soit une forme bilinéaire non dégénérée b sur l'espace vectoriel E de dimension finie. L'application

$$\begin{aligned} \varphi_b : E &\to E^* \\ x &\mapsto b(x,.) \end{aligned} \tag{10.270}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Linéaire**
Le fait que φ_b soit linéaire est une conséquence de la bilinéarité de b.

(2) **Injectif** Si $\varphi_b(v) = \varphi_b(w)$, alors pour tout $x \in E$ nous avons $\varphi_b(v)x = \varphi_b(w)x$, c'est-à-dire

$$b(v-w, x) = 0. \tag{10.271}$$

Vu que b est non dégénérée, cela implique $v - w = 0$.

(3) **Isomorphisme** Nous savons que $\dim(E) = \dim(E^*)$ par le lemme 6.144. Une application linéaire injective entre espaces de même dimension est toujours une bijection par le corolaire 6.56.

□

[45] Définition du noyau de b, définition 10.128.

LEMooRXMMooAvvOjF

Lemme 10.132 ([343]).
Soit une forme bilinéaire non dégénérée b sur l'espace vectoriel E de dimension finie. Soit un sous-espace vectoriel V. Nous avons

$$\dim(E) = \dim(V) + \dim(V^\perp). \tag{10.272}$$

EQooLFJBooNNJHgP

Démonstration. Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} \varphi_b\colon E &\to E^* \\ x &\mapsto b(x,.). \end{aligned} \tag{10.273}$$

et l'application de restriction

$$\begin{aligned} r\colon E^* &\to V^* \\ \alpha &\mapsto \alpha|_F \end{aligned} \tag{10.274}$$

(1) **Théorème du rang** Nous appliquons le théorème du rang 6.55 à l'application r :

$$rang(r) + \dim\big(\ker(r)\big) = \dim(E). \tag{10.275}$$

EQooSABBooUdWyZL

(2) $rang(r) = \dim(V)$

Étant donné que r est surjective, $rang(r) = \dim(V^*) = \dim(V)$. La seconde égalité est l'égalité des dimensions du lemme 6.144.

(3) $\varphi_b(V^\perp) \subset \ker(r)$ Soit $x \in V^\perp$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$r\big(\varphi_b(x)\big)v = \varphi_b(x)v = b(x,v) = 0. \tag{10.276}$$

Donc $\varphi_b(x) \in \ker(r)$.

(4) $\varphi_b\colon V^\perp \to \ker(r)$ **est surjective** Soit $\alpha \in \ker(r)$. Vu que φ_b est une bijection, il existe $x \in E$ tel que $\alpha = \varphi_b(x)$, c'est-à-dire $\alpha = b(x, \cdot\ )$. Nous avons $\alpha(y) = 0$ pour tout $y \in V$, c'est-à-dire $b(x,y) = 0$ pour tout $y \in V$, ce qui signifie que $x \in V^\perp$. Donc $\alpha \in \varphi_b(V^\perp)$.

(5) $\dim(V^\perp) = \dim\big(\ker(r)\big)$ L'application φ_b étant globalement injective, elle est une bijection entre $V^\perp$ et $\ker(r)$. Donc ces deux ont la même dimension.

(6) **Conclusion** Nous pouvons reprendre l'équation (10.275) et y mettre nos découvertes : $rang(r) = \dim(V)$ et $\dim\big(\ker(r)\big) = \dim(V^\perp)$. Cela donne la formule demandée

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E). \tag{10.277}$$

□

LEMooYYGLooYIDmoa

Lemme 10.133.
Si V est un sous-espace de E de dimension finie, alors

$$(V^\perp)^\perp = V. \tag{10.278}$$

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la proposition 10.130 que $V \subset (V^\perp)^\perp$.

Nous écrivons maintenant la formule (10.272) pour V, et pour $V^\perp$ (qui est un sous-espace vectoriel par la proposition 10.129(1)) :

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E) \tag{10.279a}$$

$$\dim(V^\perp) + \dim\Big((V^\perp)^\perp\Big) = \dim(E). \tag{10.279b}$$

En soustrayant ces deux équations membre à membres, nous trouvons $\dim(V) = \dim\Big((V^\perp)^\perp\Big)$. Vu que V s'injecte (par l'identité) dans $(V^\perp)^\perp$ et qu'ils ont la même dimension, ils sont égaux. □

10.8.3 Formes quadratiques

LEMooOQIDooPSOeXL

Lemme 10.134 ([344]).
Soit une forme quadratique Q sur E. Si F est un sous-espace de E, alors

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) \geqslant n \tag{10.280}$$

où $F^\perp$ est l'orthogonal par rapport à Q.

Démonstration. Nous posons $p = \dim(F)$. Nous considérons une base $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E telle que $\{f_i\}_{i=1,\dots,p}$ est une base de F[46]. Nous posons

$$\begin{aligned}\phi\colon E &\to F\\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{p} B(x, f_i) f_i\end{aligned} \tag{10.281}$$

où B est la forme bilinéaire associée à Q. Ce ϕ est une application linéaire à qui nous appliquons le théorème du rang (6.55) :

EQooCLWLooCFxVDq

$$\dim(E) = rang(\phi) + \dim\big(\ker(\phi)\big). \tag{10.282}$$

Mais vu que l'image de ϕ est dans F, nous avons $rang(\phi) \leqslant \dim(F)$. De plus, $\ker(\phi) = F^\perp$. Donc (10.282) devient

$$\dim(E) \leqslant \dim(F) + \dim(F^\perp). \tag{10.283}$$

□

LEMooUOZOooYvEcji

Lemme 10.135 ([344]).
Soit un espace vectoriel E de dimension finie et un sous-espace F sur lequel la forme quadratique Q est strictement définie positive ou négative. Alors

$$E = F \oplus F^\perp. \tag{10.284}$$

Démonstration. D'abord nous montrons que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Si $v \neq 0$ est dans F, alors $Q(v) > 0$, et donc v n'est pas dans $F^\perp$. Donc $F \cap F^\perp \subset \{0\}$. L'inclusion inverse est immédiate.

Nous avons vu dans le lemme 10.134 que

$$\dim(E) \leqslant \dim(F) + \dim(F^\perp). \tag{10.285}$$

Vu que F et $F^\perp$ n'ont pas d'intersection autre que $\{0\}$, nous avons

$$\dim(E) \geqslant \dim(F \oplus F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp) \geqslant \dim(E). \tag{10.286}$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$. □

LEMooWRCIooWkMpoF

Lemme 10.136.
L'application[47]

$$\begin{aligned}N\colon Q(E) &\to \mathbb{R}\\ q &\mapsto \sup_{\|x\|_E=1} |q(x)|,\end{aligned} \tag{10.287}$$

EqZYBooZysmVb

est une norme.

La topologie que nous considérerons sur $Q(E)$ est celle de la norme N.

Démonstration. Il faut vérifier les conditions de la définition 9.232 d'une norme. En deux parties. Si $N(q) = 0$, alors $|q(u)| = 0$ pour tout $u \in B(0,1)$. Mais si $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$ avec $u \in B(0,1)$. Avec ce u nous avons

$$q(x) = q(\lambda u) = \lambda^2 q(u) = 0. \tag{10.288}$$

En ce qui concerne l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}N(q+f) &= \sup_{\|u\|=1} |q(u) + f(u)| && && \text{(10.289a)}\\ &\leqslant \sup_{\|u\|=1} |q(u)| + \sup_{\|u\|=1} |f(u)| && \text{prop. 4.98(1)} && \text{(10.289b)}\\ &= N(q) + N(f). && && \text{(10.289c)}\end{aligned}$$

[46] Théorème de la base incomplète, 6.28.
[47] $Q(E)$ sont les formes quadratiques réelles sur E, définition 10.121.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} N(\lambda q) &= \sup_{\|u\|=1} |(\lambda q)(u)| && (10.290a)\\ &= \sup_{\|u\|=1} \Big(|\lambda| |q(u)| \Big) && (10.290b)\\ &= |\lambda| \sup_{\|u\|=1} |q(u)| && \text{prop. 4.98(2)} \quad (10.290c)\\ &= |\lambda| N(q). && (10.290d) \end{aligned}$$

□

PROPooZLXVooOsXCcB

Proposition 10.137.
*Soit une forme bilinéaire b et la forme quadratique associée q. Alors nous avons l'**identité de polarisation** :*

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x) + q(y) - q(x-y)\big). \tag{10.291}$$

EqMrbspp

Démonstration. Il suffit de substituer dans le membre de droite $q(x) = b(x,x)$ et d'utiliser la bilinéarité :

$$\begin{aligned} q(x) + q(y) - q(x-y) &= b(x,x) + b(y,y) - b(x-y, x-y) && (10.292a)\\ &= b(x,x) + b(y,y) - b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) - b(y,y) && (10.292b)\\ &= 2b(x,y) && (10.292c) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que b est symétrique : $b(x,y) = b(y,x)$. □

PropFSXooRUMzdb

Proposition 10.138 (Matrice associée à une forme bilinéaire)**.**
Soit $\{e_i\}$ une base de E. L'application

$$\begin{aligned} \phi\colon Q(E) &\to S(n,\mathbb{R}) \\ q &\mapsto \big(b(e_i,e_j)\big)_{i,j} \end{aligned} \tag{10.293}$$

où b est forme bilinéaire associée à q est une bijection linéaire et continue[48].

Démonstration. Si $\phi(q) = \phi(q')$; alors

$$q(x) = \sum_{i,j} \phi(q)_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} \phi(q')_{ij} x_i x_j = q'(x). \tag{10.294}$$

Donc $q = q'$. L'application ϕ est donc injective

De plus elle est surjective parce que si $B \in S(n,\mathbb{R})$ alors la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} B_{ij} x_i x_j \tag{10.295}$$

a évidemment B comme matrice associée. L'application ϕ est donc surjective.

Notre application ϕ est de plus linéaire parce que l'association d'une forme quadratique à la forme bilinéaire associée est linéaire.

En ce qui concerne la continuité, nous la prouvons en zéro en considérant une suite convergente $q_n \xrightarrow{Q(E)} 0$. C'est-à-dire que

$$\sup_{\|x\|=1} |q_n(x)| \to 0. \tag{10.296}$$

Nous rappelons l'identité de polarisation[49] :

$$b_n(x,y) = \frac{1}{2}\big(q_n(x-y) - q_n(x) - q_n(y)\big). \tag{10.297}$$

En ce qui concerne deux des trois termes, il n'y a pas de problèmes :

$$\big|\phi(q_n)_{ij}\big| = \big|b_n(e_i,e_j)\big| \leqslant \frac{1}{2}\big|q_n(e_i - e_j)\big| + \frac{1}{2}\big|q_n(e_i)\big| + \frac{1}{2}\big|q_n(e_j)\big|. \tag{10.298}$$

[48] Pour les topologies des normes données dans le lemme 10.136.
[49] Proposition 10.137.

Si n est assez grand, nous avons tout de suite

$$\big|\phi(q_n)_{ij}\big| \leqslant \frac{1}{2}\big|q_n(e_i - e_j)\big| + \epsilon. \tag{10.299}$$

Nous définissons e_{ij} et α_{ij} de telle sorte que $e_i - e_j = \alpha_{ij}e_{ij}$ avec $\|e_{ij}\| = 1$. Si $\alpha = \max\{\alpha_{ij}, 1\}$ alors nous avons

$$q_n(e_i - e_j) = \alpha_{ij}^2 q_n(e_{ij}) \leqslant \alpha^2 q_n(e_{ij}). \tag{10.300}$$

Il suffit maintenant de prendre n assez grand pour avoir $\sup_{\|x\|=1}|q_n(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{\alpha^2}$ pour avoir

$$\big|\phi(q_n)_{ij}\big| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{\alpha^2}. \tag{10.301}$$

□

10.8.4 Isotropie

DefVKMnUEM

Définition 10.139 (Isotropie[345])**.**
Quelques définitions.

(1) *Un vecteur est* ***isotrope*** *pour b si il est perpendiculaire à lui-même. En d'autres termes, x est isotrope si et seulement si $b(x,x) = 0$.*

(2) *Un sous-espace $W \subset E$ est* ***isotrope*** *si $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.*

(3) *Un sous-espace $W \subset E$ est* ***totalement isotrope*** *si pour tout $x, y \in W$, nous avons $b(x,y) = 0$.*

Le ***cône isotrope*** *de b est l'ensemble de ses vecteurs isotropes :*

$$C(b) = \{x \in E \text{ tel que } b(x,x) = 0\}. \tag{10.302}$$

Nous introduisons quelques notations. D'abord pour $y \in E$ nous notons

$$\begin{aligned}\Phi_y\colon E &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto b(x,y)\end{aligned} \tag{10.303}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\Phi\colon E &\to E^*\\ y &\mapsto \Phi_y.\end{aligned} \tag{10.304}$$

DEFooHKQVooPuWZiP

Définition 10.140.
Le fait pour une forme bilinéaire b d'être dégénérée signifie que l'application Φ n'est pas injective. Le ***noyau*** *de la forme bilinéaire est celui de Φ, c'est-à-dire*

$$\ker(b) = \{z \in E \text{ tel que } b(z,y) = 0\, \forall y \in E\}. \tag{10.305}$$

Autrement dit, $\ker(b) = E^\perp$ où le perpendiculaire est pris par rapport à b.

Notons tout de même que nous utilisons la notation $\perp$ même si b est dégénérée et éventuellement pas positive ; c'est-à-dire même si la formule $(x,y) \mapsto b(x,y)$ ne fournit pas un produit scalaire.

LEMooOTVGooRAOyaD

Lemme 10.141.
Si E est de dimension finie, et si V est un sous-espace non isotrope[50] *de E, alors $V^\perp$ est également non-isotrope.*

Démonstration. En dimension finie, le lemme 10.133 nous indique que $(V^\perp)^\perp = V$. Si $V^\perp$ était isotrope nous aurions $V^\perp \cap (V^\perp)^\perp \neq \varnothing$. Cela donne alors immédiatement $V^\perp \cap V \neq \varnothing$, qui serait que V est isotrope. □

10.9 Formes bilinéaires et quadratiques

Plus à propos de formes bilinéaires dans le thème 16.

LEMooLKNTooSfLSHt

Lemme 10.142.
Si q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire b telle que $q(x) = b(x,x)$.

[50] Définition 10.139.

Démonstration. L'existence n'est pas en cause : c'est la définition d'une forme quadratique. Pour l'unicité, étant donné une forme quadratique, la forme bilinéaire b doit forcément vérifier l'identité de polarisation de la proposition 10.137. Elle est donc déterminée par q. □

Notons la division par 2 qui est le pourquoi de la demande de la caractéristique différente de 2 pour $\mathbb{F}$ dans la définition de forme quadratique.

DEFooGECOooCCGVXG

Définition 10.143.
*Soit une forme quadratique q sur E. Nous disons que $v, w \in E$ sont q-**orthogonaux** si $b(v,w) = 0$ où b est la forme bilinéaire associée à q par le lemme 10.142.*

10.9.1 Matrice associée à une forme bilinéaire

DEFooAOGPooXWXUcN

Définition 10.144.
Soit une forme bilinéaire[51] *$b\colon E \times E \to \mathbb{K}$ et une base quelconque $\{f_\alpha\}$ de E. Nous définissons les nombres*

EQooCUGFooRlKUtu
$$B_{\alpha\beta} = b(f_\alpha, f_\beta), \tag{10.306}$$

*qui forment une matrice symétrique dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. Cette matrice est la **matrice associée** à la forme bilinéaire b.*

La matrice d'une forme quadratique est celle associée à sa forme bilinéaire associée.

LEMooDCIOooTlVZMR

Lemme 10.145.
Soit une forme bilinéaire $b\colon E \times E \to \mathbb{K}$ et une base quelconque $\{f_\alpha\}$ de E. Nous notons B la matrice de b (definition 10.144) et q la forme quadratique associée.

Alors nous avons

EQooQFMWooVKYLMx
$$b(x,y) = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta. \tag{10.307}$$

et

$$b(x,y) = x \cdot By. \tag{10.308}$$

où le point est le produit scalaire usuel (composante par composante).

Démonstration. Si $x = \sum_\alpha x_\alpha f_\alpha$ et $y = \sum_\beta y_\beta f_\beta$:

En utilisant la convention (6.100) et les choses autour (voir aussi -1.1),

$$b(x,y) = \sum_\alpha x_\alpha \sum_\beta B_{\alpha\beta} y_\beta = \sum_\alpha x_\alpha (By)_\alpha = x \cdot By. \tag{10.309}$$

□

10.9.2 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire

PROPooOKTGooOYukoB

Proposition 10.146 ([1])**.**
Soient une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. La matrice de $q \circ \phi$ est

$$\phi^t q \phi \tag{10.310}$$

où l'on a noté q la matrice de q et ϕ celle de ϕ.

Démonstration. C'est un calcul direct de $(q \circ \phi)(x)$:

$$q\big(\phi(x)\big) = \sum_{ij} q_{ij} \phi(x)_i \phi(x)_j \tag{10.311a}$$

$$= \sum_{ij} \sum_k \sum_l q_{ij} \phi_{ik} x_k \phi_{jl} x_l \qquad \text{prop. 6.81} \tag{10.311b}$$

$$= \sum_{kl} \Big(\sum_{ij} \phi_{ik} q_{ij} \phi_{jl} \Big) x_k x_l \qquad = \sum_{kl} (\phi^t q \phi)_{kl} x_l x_l. \tag{10.311c}$$

Et voilà. □

[51] Définition 10.120.

PROPooLBIOooUpzxXA

Proposition 10.147 (Voir la section -1.1)**.**
Soit une forme bilinéaire[52] $b: V \times V \to \mathbb{K}$ *dont la matrice*[53] *dans la base* $\{e_i\}$ *est* A *et celle dans la base* $\{f_\alpha\}$ *est* B*. Nous supposons que les bases sont liées par* $f_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$*. Alors*

$$B = Q^t A Q. \tag{10.312}$$

EQooZUVTooKjqnJj

Démonstration. Soit $x, x' \in V$ de coordonnées (x_i) et (x'_i) dans la base $\{e_i\}$ et (y_α), (y'_α) dans la base $\{f_\alpha\}$. Par définition de la matrice associée à une forme bilinéaire,

$$b(x, x') = \sum_{ij} A_{ij} x_i x'_j = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta. \tag{10.313}$$

En remplaçant les x_i et x'_i par leurs valeurs en fonction de y_α et y'_β données par la proposition 6.131, nous trouvons

$$b(x, x') = \sum_{ij\alpha\beta} A_{ij} Q_{i\alpha} y_\alpha Q_{j\beta} y'_\beta \tag{10.314a}$$

$$= \sum_{\alpha\beta} (Q^t A Q)_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta \tag{10.314b}$$

où Q^t désigne la transposée de la matrice Q : $Q^t_{ij} = Q_{ji}$. Vu que les nombres y_α et y'_β sont arbitraires nous déduisons[54] que $B = Q^t A Q$. □

REMooNEJLooSqgeih

Remarque 10.148.
Notons que cette « loi de transformation » n'est pas la même que celle pour une application linéaire[55]. Ici nous avons Q^t alors que pour les applications linéaires nous avions Q^{-1}.

Pour cette raison, tant que nous travaillons avec des bases orthonormées, c'est-à-dire tant que Q est orthogonale[56], nous pouvons confondre une application linéaire avec une application bilinéaire en passant par la matrice. Mais cette identification n'est pas du tout canonique : elle repose sur le fait que les bases soient orthonormées.

Il en découle que la réduction des endomorphismes et la réduction des formes bilinéaires ne sont pas tout à fait les mêmes théories. Par exemple la pseudo-diagonalisation simultanée (corolaire 12.61) est un résultat de réduction de forme bilinéaire et non d'endomorphismes.

10.9.3 Isométrie, forme quadratique et bilinéaire

Exemple 10.149.
La forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$ donne la norme euclidienne. La forme bilinéaire associée est $b(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, qui est le produit scalaire usuel. △

Il ne faudrait pas déduire trop vite que la formule $\|x\|^2 = q(x)$ donne une norme dès que q est non dégénérée. En effet q peut ne pas être définie positive. La forme $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ prend des valeurs positives et négatives. A fortiori $d(x, y) = q(x - y)$ ne donne pas toujours une distance.

DEFooECTUooRxBhHf

Définition 10.150.
Une ***isométrie*** *pour la forme quadratique* q *est une application bijective* $f: V \to V$ *telle que*

$$q(x - y) = q\big(f(x) - f(y)\big). \tag{10.315}$$

Dans les cas où q *donne une distance, alors c'est une isométrie au sens usuel.*

DEFooIQURooMeQuqX

Définition 10.151 (Thème 79)**.**
Soit un espace vectoriel E *muni d'une forme bilinéaire* b*. Une* ***isométrie*** *pour* b *est une bijection* $f: E \to E$ *telle que*

$$b\big(f(x), f(y)\big) = b(x, y) \tag{10.316}$$

pour tout $x, y \in E$*.*

[52] Définition 10.120
[53] Définition 10.306.
[54] Lemme 6.77.
[55] Proposition 6.134.
[56] Définition 6.111.

LemewGJmM

Lemme 10.152.
Soient q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée par le lemme 10.142. Une application $f\colon E\to E$ telle que $f(0)=0$ est une isométrie pour b si et seulement si elle est une isométrie pour q.

Démonstration. Pour une application bijective $f\colon E\to E$ telle que $f(0)=0$, nous devons prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $b\big(f(x),f(y)\big)=b(x,y)$ pour tout $x,y\in E$;

(2) $q\big(f(x)-f(y)\big)=q(x-y)$ pour tout $x,y\in E$.

Dans le sens direct, en posant $x=y$ nous trouvons tout de suite $q(f(x))=q(x)$; ensuite en utilisant la distributivité de b,

$$\begin{aligned}
q\big(f(x)-f(y)\big)&=b\big(f(x)-f(y),f(x)-f(y)\big) && (10.317a)\\
&=q\big(f(x)\big)-2b\big(f(x),f(y)\big)+q\big(f(y)\big) && (10.317b)\\
&=q(x)+q(y)-2b(x,y) && (10.317c)\\
&=q(x-y). && (10.317d)
\end{aligned}$$

Dans l'autre sens, nous commençons par remarquer que l'hypothèse $f(0)=0$ donne $q(x)=q\big(f(x)\big)$. Ensuite nous utilisons l'identité de polarisation (10.291) :

$$\begin{aligned}
b\big(f(x),f(y)\big)&=\frac{1}{2}\big[q\big(f(x)\big)+q\big(f(y)\big)-q\big(f(x-y)\big)\big] && (10.318a)\\
&=\frac{1}{2}\big[q(x)+q(y)-q(x-y)\big] && (10.318b)\\
&=b(x,y). && (10.318c)
\end{aligned}$$

□

10.9.4 Isométries

Voici un théorème pas toujours bien énoncé dans les cours de physique qui font de la relativité. Au moment de « prouver » les transformations de Lorentz[57], beaucoup oublient de justifier pourquoi elles devraient être linéaires.

ThoDsFErq

Théorème 10.153 ([346])**.**
Une isométrie[58] d'une forme bilinéaire non dégénérée est linéaire.

Démonstration. Soient une forme bilinéaire non-dégénérée b sur l'espace vectoriel E ainsi qu'une isométrie f pour icelle. Soit $z\in E$; étant donné que f est bijective nous pouvons considérer l'élément $f^{-1}(z)\in E$ et calculer

$$\begin{aligned}
b\big(f(x+y),z\big)&=b\big(f(x+y),f(f^{-1}(z))\big) && (10.319a)\\
&=b(x+y,f^{-1}(z)) && (10.319b)\\
&=b(x,f^{-1}(z))+b(y,f^{-1}(z)) && (10.319c)\\
&=b(f(x),z)+b(f(y),z) && (10.319d)\\
&=b\big(f(x)+f(y),z\big), && (10.319e)
\end{aligned}$$

donc $f(x+y)=f(x)+f(y)$ par le lemme 10.126.

De la même façon on trouve $b\big(f(\lambda x),z\big)=b\big(\lambda f(x),z\big)$ qui prouve que $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ et donc que f est linéaire. □

Exemple 10.154.
Une isométrie peut ne pas être linéaire quand la forme bilinéaire est dégénérée. Par exemple pour la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$b\big((a,b),(x,y)\big)=ax, \tag{10.320}$$

nous pouvons faire

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ \lambda(x,y)\end{pmatrix} \tag{10.321}$$

où λ est n'importe quoi. △

[57] Théorème 20.211.
[58] Définition 10.151.

DEFooVTXWooVXfUnc

Définition 10.155.
*Soient deux espaces vectoriels E et V. Une application $f\colon E\to V$ est **affine** si il existe une application linéaire $u\colon E\to V$ et un élément $\alpha\in V$ tel que*

$$f(x)=u(x)+\alpha \tag{10.322}$$

pour tout $x\in E$.

THOooHSGHooNCLebs

Théorème 10.156.
Soit un espace vectoriel E muni d'une forme quadratique q. Soit une isométrie $f\colon E\to E$ pour q. Alors

(1) si $f(0)=0$, alors f est linéaire ;

(2) si $f(0)\neq 0$ alors f est affine[59]*.*

Démonstration. Nous considérons la forme bilinéaire associée b. Si $f(0)=0$, nous savons par le lemme 10.152 que $b\big(f(x),f(y)\big)=b(x,y)$. La proposition 10.153 nous dit alors que f est linéaire.

Si $f(0)\neq 0$, alors nous posons $g(x)=f(x)-f(0)$ qui vérifie $g(0)=0$ et

$$q\big(g(x)-g(y)\big)=q\big(f(x)-f(0)-f(y)+f(0)\big)=q(x-y). \tag{10.323}$$

Nous pouvons donc appliquer le premier point à g, déduire que g est linéaire et donc que f est affine. □

PROPooHSWIooKwiibH

Proposition 10.157 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel E. Soient des points $a,x_1,\dots,x_n$ tels que $\{x_i-a\}_{i=1,\dots,n}$ forme une base de E. Si $f\colon E\to E$ est une application affine fixant a et tous les x_i, alors f est l'identité.

Démonstration. Nous décomposons $f(x)=u(x)+\alpha$ où u est linéaire et $\alpha\in E$. Nous avons, pour tout i :

$$\begin{cases} u(a)-a=\alpha & \text{(10.324a)}\\ u(x_i)-x_i=\alpha. & \text{(10.324b)}\end{cases}$$

En faisant la soustraction, nous obtenons $u(x_i-a)=x_i-a$. Donc u est une application linéaire fixant une base. Elle est donc l'identité. À partir de là, il est immédiat que $\alpha=0$. □

Nous pouvons maintenant particulariser tout cela au cas de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée pour voir quel résultat nous avons à peine prouvé.

Nous notons ici $T(n)$ le groupe des translations sur $\mathbb{R}^n$. Un élément de $T(n)$ est une translation τ_v donnée par un vecteur v et agissant sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned}\tau_v\colon \mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto x+v.\end{aligned} \tag{10.325}$$

Ce groupe est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^n,+)$, et nous allons souvent identifier τ_v à v.

Vous savez par culture générale que les isométries de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel sont les matrices orthogonales. En voici une petite généralisation (pensez à $\eta=\mathbb{1}$ dans le cas du produit scalaire usuel).

PROPooSYQMooEnZFdp

Proposition 10.158.
Soit une forme bilinéaire b sur $\mathbb{R}^n$ de matrice symétrique η. Si A est la matrice d'une application linéaire $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ telle que

$$b(Ax,Ay)=b(x,y) \tag{10.326}$$

pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$, alors

$$A^t\eta A=\eta. \tag{10.327}$$

Démonstration. En suivant la formule générale (10.307),

$$b(Ax,Ay)=\sum_{ij}\eta_{ij}(Ax)_i(Ay)_j=\sum_{ijkl}\eta_{ij}A_{ik}A_{jl}x_ky_l. \tag{10.328}$$

En imposant que ce soit égal à $\sum_{kl}\eta_{kl}x_ky_l$ pour tout x,y nous avons la contrainte

$$\sum_{ij}\eta_{ij}A_{ik}A_{jl}=\eta_{kl} \tag{10.329}$$

qui signifie exactement $A^t\eta A=\eta$. □

[59] Définition 10.155.

10.10 Signature, théorème de Sylvester

DEFooWDCLooDkRYLK

Définition 10.159 (Signature[347]).
Soit une forme quadratique[60] Q *sur un espace vectoriel* E *de dimension finie* n. *L'**indice d'inertie** de* Q *est le nombre*

$$q = \max\{\dim(F) \text{ tel que } Q(v) < 0 \, \forall v \in F \setminus \{0\}\}. \tag{10.330}$$

Nous définissons aussi

$$p = \max\{\dim(G) \text{ tel que } Q(v) > 0 \, \forall v \in G \setminus \{0\}\}. \tag{10.331}$$

Le couple (p, q) *est la **signature** de* Q.

DEFooVITQooQaMaTF

Définition 10.160 (Rang d'une forme quadratique).
Si $Q : E \to \mathbb{K}$ *est une forme quadratique, nous considérons l'application*

$$\begin{aligned} f_Q : E &\to E^* \\ x &\mapsto \big[y \mapsto B(x, y)\big]. \end{aligned} \tag{10.332}$$

*Le **rang** de* Q *est le rang de l'application linéaire* f_Q.

PROPooLRZQooSfprff

Proposition 10.161.
Le rang d'une forme quadratique est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.

Démonstration. Nous considérons une forme quadratique Q sur l'espace vectoriel E. Sa trace est, par définition, la trace de l'application linéaire f_Q de la définition 10.160. Or cette dernière trace ne dépend pas des bases choisies sur E et E^*. Nous la calculons donc maintenant.

Soit une base $\{e_i\}$ de E ainsi que sa base duale $\{e_i^*\}$ de E^*. Si $v = \sum_k v_k e_k \in E$, alors

$$f_Q(e_i)v = \sum_k v_k B(e_i, e_k) = \sum_k Q_{ik} v_k \tag{10.333}$$

où nous avons noté B la forme bilinéaire associée à Q et utilisé la définition 10.144 de la matrice associée à la forme quadratique Q. Nous avons donc $f_Q(ei) = \sum_k Q_{ik} e_k^*$ ou encore

$$f_Q(e_i)_k = Q_{ik}, \tag{10.334}$$

ce qui signifie, par (1) que la matrice associée à f_Q est la matrice Q^t.

Le rang de f_Q est donc celui de Q^t, qui est le même que celui de la matrice Q (ici, nous avons noté Q la matrice de la forme quadratique Q). Le rang de f_Q est celui de sa matrice par la proposition 6.120. □

LEMooISHCooVDJEKo

Lemme 10.162 ([347]).
Soient une forme quadratique Q *ainsi que deux bases* Q*-orthogonales* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *et* $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. *Nous posons*

$$r = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} \tag{10.335a}$$
$$r' = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e'_i) > 0\} \tag{10.335b}$$
$$s = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e_i) < 0\} \tag{10.335c}$$
$$s' = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e'_i) < 0\} \tag{10.335d}$$

Alors $r = r'$ *et* $s = s'$.

Démonstration. Nous posons

$$I = \{i \text{ tel que } Q(e_i) \geqslant 0\} \tag{10.336a}$$
$$J = \{j \text{ tel que } Q(e'_j) \leqslant 0\} \tag{10.336b}$$

Nous commençons par prouver que $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e'_j\}_{j\in J}$ est libre. Supposons pour cela que

$$\sum_{i\in I} x_i e_i + \sum_{j\in J} y_j e'_j = 0, \tag{10.337}$$

et posons $z = \sum_{i\in I} x_i e_i$. Nous avons

$$Q(z) = \sum_{i\in I} x_i^2 Q(e_i) \geqslant 0. \tag{10.338}$$

EQooWGKAooElpETd

[60] Définition 10.121.

Mais nous avons aussi $z = -\sum_{j\in J} y_j e'_j$, donc

$$Q(z) = \sum_{j\in J} y_j^2 Q(e'_j) \leqslant 0. \tag{10.339}$$

EQooJYOCooZPXmTf

Donc $Q(z) = 0$. Vu (10.338), et le fait que $Q(e_i) > 0$, avoir $Q(z) = 0$ impose $x_i = 0$ pour tout i. La relation (10.339) nous donne aussi immédiatement que les y_j sont nuls. Donc la partie $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e'_j\}_{j\in J}$ est libre.

Le lemme 6.13 nous indique qu'une partie libre est toujours de cardinal plus petit ou égal à la dimension de l'espace[61]. Tout ça pour dire que

$$\underbrace{\text{Card}(I)}_{=r} + \underbrace{\text{Card}(J)}_{=n-r'} \leqslant n, \tag{10.340}$$

et donc $r \leqslant r'$.

Le même raisonnement, en partant de $I = \{i \text{ tel que } Q(e_i) \leqslant 0\}$ et de $J = \{j \text{ tel que } Q(e'_j) > 0\}$, prouve que $r' \leqslant r$.

La preuve de $s = s'$ est du même tonneau. □

Pour l'équivalence de formes quadratiques, voir la définition 10.253 et la proposition 10.254.

10.11 Produit scalaire, produit hermitien

DefVJIeTFj

Définition 10.163.
*Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel est une forme bilinéaire[62] symétrique strictement définie positive[63].*

La définition suivante est utile pour ceux qui veulent faire de la relativité[64].

DEFooLPBGooXLxubc

Définition 10.164.
*Un **produit pseudo-scalaire** sur un espace vectoriel réel est une forme bilinéaire et symétrique.*

DEFooZBWTooIqXwRp

Définition 10.165.
*Nous dirons que deux vecteurs sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire[65] est nul. Nous écrivons que $u \perp v$ lorsque $\langle u, v\rangle = 0$.*

*Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base de E, nous disons qu'elle est **orthonormée** si*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{10.341}$$

LEMooLPUFooVCvnwW

Lemme 10.166.
Un produit scalaire est toujours non dégénéré[66].

Démonstration. Si b est dégénérée, il existe un $x \neq 0$ tel que $b(x, z) = 0$ pour tout z. En particulier $b(x, x) = 0$, en contradiction avec la condition 10.122(1) de la stricte positivité. □

Vu que nous allons voir un pâté d'espaces avec des produits scalaires, nous leur donnons un nom.

DefLZMcvfj

Définition 10.167 (Espace euclidien)**.**
*Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire (définition 10.163).*

Avouez que c'est drôle qu'un espace vectoriel est euclidien lorsqu'il possède une *multiplication* alors qu'un anneau est euclidien lorsqu'il possède une *division* (voir la définition 3.33). C'est pas très profond, mais si ça peut vous servir de moyen mnémotechnique…

PROPooSKVRooDGVCYj

Proposition-Définition 10.168 (Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, thème 25)**.**
Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous définissons

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{10.342}$$

EQooFITHooEXDCGd

[61] Ici nous utilisons l'hypothèse que V est de dimension finie.
[62] Définition 10.120.
[63] Définition 10.122.
[64] Voir le théorème 20.211 qui établit les transformations de Lorentz.
[65] Définition 10.163.
[66] Définition 10.125.

Cela est un produit scalaire.

Ce produit scalaire est le ***produit scalaire*** *qui sera toujours considéré. C'est de lui qui découle toujours la norme, et la topologie de $\mathbb{R}^n$. Il sera aussi souvent noté $\langle x, y\rangle$.*

Démonstration. Il faut que $b(x,y) = \sum_i x_i y_i$ soit bilinéaire, symétrique, strictement définie positive. Ce sont toutes des vérifications immédiates. Par exemple pour la symétrique, nous avons $\sum_i x_i y_i = \sum_i y_i x_i$. □

Calculons par exemple le produit scalaire de deux vecteurs de la base canonique : $\langle e_i, e_j\rangle$. En utilisant la formule de définition et le fait que $(e_i)_k = \delta_{ik}$, nous avons

$$\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\delta_{jk}. \tag{10.343}$$

Nous pouvons effectuer la somme sur k en remarquant qu'à cause du δ_{ik}, seul le terme avec $k = i$ n'est pas nul. Effectuer la somme revient donc à remplacer tous les k par des i :

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ii}\delta_{ji} = \delta_{ji}. \tag{10.344}$$

Une des propriétés intéressantes du produit scalaire est qu'il permet de décomposer un vecteur dans une base, comme nous le montre la proposition suivante.

PropScalCompDec

Proposition 10.169.
Si nous notons v_i les composantes du vecteur v, c'est-à-dire si $v = \sum_{i=1}^{m} v_i e_i$, alors nous avons $v_j = \langle v, e_j\rangle$.

Démonstration.

$$v \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} \langle v_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i \delta_{ij} \tag{10.345}$$

Eqveiscalcomp

En effectuant la somme sur i dans le membre de droite de l'équation (10.345), tous les termes sont nuls sauf celui où $i = j$; il reste donc

$$v \cdot e_j = v_j. \tag{10.346}$$

□

Le produit scalaire ne dépend en réalité pas de la base orthogonale choisie.

LEMooZMCWooDfbrIq

Lemme 10.170.
Si $\{e_i\}$ est la base canonique, et si $\{f_i\}$ est une autre base orthonormale[67]*, alors si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$, nous avons*

$$\sum_i u_i v_j = \sum_i u'_i v'_j \tag{10.347}$$

où u_i sont les composantes de u dans la base $\{e_i\}$ et u'_i sont celles dans la base $\{f_i\}$.

Démonstration. La preuve demande un peu d'algèbre linéaire. Étant donné que $\{f_i\}$ est une base orthonormale, il existe une matrice A orthogonale ($AA^t = \mathbb{1}$) telle que $u'_i = \sum_j A_{ij} u_j$ et idem pour v. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\sum_i u'_i v'_j &= \sum_i \left(\sum_j A_{ij} u_j\right)\left(\sum_k A_{ik} v_k\right) \\
&= \sum_{ijk} A_{ij} A_{ik} u_j v_k \\
&= \sum_{jk} \underbrace{\sum_i (A^t)_{ji} A_{ik}}_{=\delta_{jk}} u_j v_k \\
&= \sum_{jk} \delta_{jk} u_j v_k \\
&= \sum_k u_k v_k.
\end{aligned} \tag{10.348}$$

□

Cette proposition nous permet de réellement parler du produit scalaire entre deux vecteurs de façon intrinsèque sans nous soucier de la base dans laquelle nous exprimons les vecteurs.

[67] Définition 10.165.

10.11.1 Autoadjoint

PROPooYCSWooBnVwFv

Proposition 10.171 (Adjoint[1]).
Soit un espace euclidien[68] *réel E. Soit un endomorphisme $A\colon E \to E$. Alors il existe un unique opérateur $B \in \mathrm{End}(E)$ tel que*

$$x \cdot Ay = Bx \cdot y \tag{10.349}$$

pour tout $x, y \in E$.

*Cet opérateur est l'**adjoint** de A et sera noté $A^\dagger$ ou A^t.*

DEFooYAWTooGUpAvw

Définition 10.172 (Autoadjoint[1]).
*Si E est un espace euclidien réel, nous disons qu'un opérateur $A \in \mathrm{End}(E)$ est **autoadjoint** si $A^t = A$.*

L'ensemble des opérateur autoadjoints de E sera noté $\mathrm{S}(E)$ ou $S(n, \mathbb{R})$ lorsque ce sera sur $\mathbb{R}^n$. La notation $S(n, \mathbb{R})$ devrait être réservée aux matrices, mais je ne promets rien.

LEMooECJFooXjrBdX

Lemme 10.173 ([1]).
Si A est un opérateur autoadjoint, alors sa matrice est symétrique dans toute base.

10.11.2 Hermitien, unitaire, etc.

DefMZQxmQ

Définition 10.174 ([348]).
*Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $\langle ., . \rangle\colon E \times E \to \mathbb{C}$ est **sesquilinéaire à droite** si pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,*

(1) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, \bar{\lambda} y\rangle$,

(2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

(3) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

Définitions supplémentaires :

- *La forme $\langle ., . \rangle$ est **hermitienne** si de plus*

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}. \tag{10.350}$$

- *Un **produit hermitien** est une forme hermitienne strictement définie positive, c'est-à-dire telle que $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

PROPooRPRRooRYEMCB

Proposition-Définition 10.175.
Soit un espace hermitien $(E, \langle ., . \rangle)$. Soit un opérateur linéaire $A \in \mathrm{End}(E)$. Il existe un unique opérateur $B \in \mathrm{End}(E)$ tel que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \tag{10.351}$$

pour tout $x, y \in E$.

*L'opérateur B ainsi défini est noté $A^\dagger$ et est nommé **hermitien conjugué** de A.*

LEMooBOXMooSDyCfm

Lemme 10.176.
Au niveau des matrices, nous avons

$$A^\dagger_{ij} = A^*_{ji} \tag{10.352}$$

où z^* est le conjugué complexe.

DEFooKEBHooWwCKRK

Définition 10.177.
Quelque définitions.

*(1) Un opérateur A est **hermitien** si $A^\dagger = A$.*

*(2) Un opérateur A est **unitaire** si $A^\dagger = A^{-1}$.*

Note : le conjugué hermitien est parfois noté A^* au lieu de $A^\dagger$.

[68] Avec produit scalaire, définition 10.167.

NORMooYCCGooYyOEdo

10.178.
Le mot « hermitien » est réservé aux opérateurs sur des espaces hermitiens, c'est-à-dire des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Le mot « autoadjoint » par contre est plutôt utilisé dans le cadre d'opérateurs sur les espaces réels. En conséquence de quoi, ces deux mots sont synonymes, mais il est préférable d'utiliser « hermitien » lorsque l'espace vectoriel est sur $\mathbb{C}$ et « autoadjoint » lorsqu'il est sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des opérateurs autoadjoints de E est noté $\mathrm{S}(E)$. Cette notation provient du fait que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, les opérateurs autoadjoints sont les matrices symétriques.

Remarque 10.179.
Le fait d'être hermitien n'implique en rien le fait d'être inversible.

10.180.
Les normes associées aux produits scalaires font intervenir une racine carré, et donc devront être données plus tard. Voir le thème 25.

PROPooMWUCooMbJuaJ

Proposition 10.181 ([1])**.**
Nous considérons $\mathbb{C}^n$ vu comme espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

(1) *La formule, pour $x, y \in \mathbb{C}^n$,*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k \tag{10.353}$$

EqFormSesqQnjvPH

définit une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^n$.

(2) *L'ensemble $\mathbb{C}^n$ devient un espace vectoriel hermitien.*

10.11.3 Éléments de matrice

PROPooZKWXooWmEzoA

Proposition 10.182.
Soit une application linéaire $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Nous considérons le produit scalaire usuel[69] *sur $\mathbb{R}^n$. Alors :*

(1) *Les éléments de matrice de A sont donnés par $A_{ij} = e_i \cdot Ae_j$.*

(2) *Nous avons la formule $x \cdot Ay = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l$.*

Démonstration. Pour Ae_j nous utilisons la formule 6.99 avec des notations plus décontractées : $Ae_j = \sum_k A_{kj} e_k$. Ensuite nous faisons un calcul avec la formule (10.342) :

$$e_i \cdot Ae_j = e_i \cdot \sum_k A_{kj} e_k = \sum_k A_{kj} \delta_{i,k} = A_{ij}. \tag{10.354}$$

La seconde formule à prouver est du même tonneau, en utilisant cette fois la formule (6.100) :

$$x \cdot Ay = \sum_k x_k (Ay)_k = \sum_{kl} x_k A_{kl} y_l = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l. \tag{10.355}$$

□

La proposition suivante est une version plus « pragmatique » de la proposition 6.152.

PROPooNITTooCYcrrT

Proposition 10.183 ([169])**.**
Soient un espace euclidien[70] *de dimension finie V ainsi qu'un sous-espace M. Nous posons*

$$M^\perp = \{x \in V \text{ tel que } x \cdot y = 0 \forall y \in M\}. \tag{10.356}$$

Alors $M \oplus M^\perp = V$.

Démonstration. D'abord si $x \in M \cap M^\perp$, alors $x \cdot x = 0$ et donc $x = 0$. Donc nous avons déjà $M \cap M^\perp = \{0\}$. Nous considérons une base $\{b_1, \dots, b_k\}$ de M, et nous définissons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon V &\to \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto (x \cdot b_1, \dots, x \cdot b_k). \end{aligned} \tag{10.357}$$

[69] Définition 10.168.
[70] Qui possède un produit scalaire, définition 10.167.

Nous avons que $M^\perp = \ker(f)$. Le théorème du rang 6.53 nous indique que

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\text{Image}(f)\big) \leqslant \dim(M^\perp) + k = \dim(M^\perp) + \dim(M). \tag{10.358}$$

Une justification : vu que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^k$, la dimension de son image est majorée par k.

Nous en déduisons que

$$\dim(M) + \dim(M^\perp) \geqslant \dim(V), \tag{10.359}$$

et la proposition 6.160 nous permet de conclure que $M \oplus M^\perp = V$. □

10.11.4 Transposée : pas d'approche naïve

SUBSECooGPXVooEYwIiJ

Il est légitime, si $t\colon E \to E$ est une application linéaire, de dire que sa transposée soit l'application linéaire $t^t\colon E \to E$ dont la matrice est la matrice transposée de celle de t. Lorsque nous travaillons sur $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, cela ne pose pas de problème et nous pouvons écrire des égalités du type $\langle x, Ay\rangle = \langle A^t x, y\rangle$.

PROPooNARVooEuhweD

Proposition 10.184 (Matrice transposée et produit scalaire)**.**
Soit une matrice réelle A. En utilisant l'application linéaire associée[71] *$f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, nous avons*

$$x \cdot f_A(y) = f_{A^t}(x) \cdot y. \tag{10.360}$$

Cette formule est souvent écrite $x \cdot Ay = A^t x \cdot y$ ou $\langle x, Ay\rangle = \langle A^t x, y\rangle$.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul utilisant la formule (6.94) et le produit scalaire (10.342) :

$$x \cdot f_A(y) = \sum_i x_i \big(f_A(y)\big)_i = \sum_i x_i \sum_j A_{ij} y_j = \sum_{ij} A^t_{ji} x_i y_j = \sum_j f_{A^t}(x)_j y_j = f_{A^t}(x) \cdot y. \tag{10.361}$$

□

Hélas nous allons voir que cette façon de définir une transposée est mauvaise.

Soit une application linéaire $t\colon E \to E$ de matrice A dans la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et de matrice B dans la base $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$. Nous notons Q la matrice de passage d'une base à l'autre :

$$e_i = \sum_\alpha Q^{-1}_{\alpha i} f_\alpha. \tag{10.362}$$

Nous nommons t_1 l'application linéaire associée à A^t dans la base $\{e_i\}$ et t_2 l'application linéaire associée à la matrice B^t dans la base $\{f_\alpha\}$. Définir la transposée d'une application linéaire comme étant l'application linéaire associée à la transposée de sa matrice ne sera une bonne définition que si $t_1 = t_2$.

La première chose facile à voir est

$$t_1(e_i)_j = \sum_k (A^t)_{jk}(e_i)_k = A^t_{ji} = A_{ij}. \tag{10.363}$$

EQooAMHPooUQEkJo

Pour calculer $t_2(e_i)_j$, c'est un peu plus laborieux :

$$t_2(e_i) = \sum_\alpha Q^{-1}_{\alpha i} t_2(f_\alpha) = \sum_{\beta\gamma\alpha} Q^{-1}_{\alpha i} B^t_{\gamma\beta} \underbrace{(f_\alpha)_\beta}_{\delta_{\alpha\beta}} f_\gamma = \sum_{\beta\gamma} Q^{-1}_{\beta i} B^t_{\gamma\beta} f_\gamma \tag{10.364a}$$

$$= \sum_{j\gamma} (B^t Q^{-1})_{\gamma i} Q_{j\gamma} e_j \tag{10.364b}$$

$$= \sum_j (QB^t Q^{-1})_{ji} e_j. \tag{10.364c}$$

Donc $t_2(e_i)_j = (QB^tQ^{-1})_{ji}$. En tenant compte du fait que $B = Q^{-1}AQ$ nous avons

$$t_2(e_i)_j = (QQ^tA^t(Q^{-1})^tQ^{-1})_{ji}. \tag{10.365}$$

Ceci est égal à l'expression (10.363) lorsque $Q^t = Q^{-1}$. Nous voyons que confondre transposée d'une application linéaire avec transposée de la matrice associée n'est valable que si nous sommes certain de ne considérer que des changements de base par des matrices orthogonales.

C'est la situation typique dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous considérons des applications linéaires sur $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, et que nous n'avons aucune intention de changer de base, et encore moins de chercher une base non orthonormale. Cette situation est clairement la situation la plus courante.

[71] Définition 6.78. Ici nous considérons la base canonique sur $\mathbb{R}^n$

Exemple 10.185 ([103]).
Soit la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Nous considérons l'application linéaire $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$t(e_1) = e_1 \tag{10.366a}$$
$$t(e_2) = 0. \tag{10.366b}$$

La matrice de t dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.367}$$

Elle est symétrique : elle vérifie $A^t = A$. Si nous comptions sur la transposée de matrice pour définir la transposée de t, nous aurions $t^t = t$.

Soit maintenant la base $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$. Nous avons $t(f_1) = f_1$ et

$$t(f_2) = t(e_1) + t(e_2) = e_1 = f_1. \tag{10.368}$$

Donc la matrice de t dans cette base est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.369}$$

Et là, nous avons $B^t \neq B$. Donc en comptant sur cette base pour définir la transposée de t nous aurions $t^t \neq t$. △

NooMZVRooExWVKJ

10.186.
Autrement dit, la façon « usuelle » de voir la transposée d'une application linéaire, ne fonctionne dans les livres pour enfants uniquement parce qu'on y considère toujours $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique ou de bases orthonormées.

Notons que nous avons tout de même les notions d'opérateur adjoint et autoadjoint pour parler d'application orthogonale sans passer par la transposée, voir 10.41.

10.11.5 Transposée : la bonne approche

DefooZLPAooKTITdd

Définition 10.187.
*Si $f\colon E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, la **transposée** est l'application $f^t\colon F^* \to E^*$ donnée par*

$$f^t(\omega)(x) = \omega\big(f(x)\big). \tag{10.370}$$

pour tout $\omega \in F^*$ et $x \in E$.

PROPooFAVAooDevBrT

Proposition 10.188 (transposée et conjuguée[1]).
Soit une application linéaire $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi que l'isomorphisme canonique $\phi\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Nous avons

$$A^\dagger = \phi \circ A^t \circ \phi \tag{10.371}$$

où A^t est l'opérateur transposé, défini en 10.187, et $A^\dagger$ est l'hermitien conjugué défini en 10.175.

NORMooFUZYooWeXjp

10.189.
Étant données les propositions 10.188, le fait que l'isomorphisme soit canonique, que la matrice de l'hermitien conjugué est la matrice transposée (dans le cas réel, par le lemme 10.176), nous écrirons souvent A^t pour $A^\dagger$, et donc nous écrirons des égalités comme

$$x \cdot Ay = A^t x \cdot y \tag{10.372}$$

alors qu'il faudrait écrire

$$x \cdot Ay = A^\dagger x \cdot y \tag{10.373}$$

Notons également que cette remarque est une raison pour laquelle je préfère noter A^t au lieu de ${}^tA$.

LEMooEMNNooPquZMg

Lemme 10.190.
Soit E muni de la base $\{e_i\}$ et F muni de la base $\{g_i\}$ et une application $f\colon E \to F$. Si A est la matrice de f dans ces bases, alors A^t est la matrice de f^t dans les bases $\{e_i^*\}$ et $\{g_i^*\}$ de E^* et F^*.

Autrement dit, en utilisant l'application $\psi\colon \mathbb{M} \to \mathcal{L}(F^*, E^*)$ de la proposition 6.81,

$$\psi(A^t) = f^t. \tag{10.374}$$

Démonstration. Attention aux indices, ça va chauffer[72].

Nous allons montrer que $f^t = \psi(A^t)$ sur la base $\{g_i^*\}$, et pour cela nous appliquons $f^t(g_i^*)$ à $x \in E$:

$$f^t(g_i^*)x = g_i^*\big(f(x)\big) \qquad \text{Définition 10.187} \tag{10.375a}$$
$$= g_i^*\Big(\sum_k x_k f(e_k)\Big) \tag{10.375b}$$
$$= g_i^*\Big(\sum_{kl} x_k A_{lk} g_l\Big) \qquad \text{eq. (6.99)} \tag{10.375c}$$
$$= \sum_{kl} x_k A_{lk} \underbrace{g_i^*(g_l)}_{=\delta_{i,l}} \tag{10.375d}$$
$$= \sum_k x_k A_{ik} \tag{10.375e}$$
$$= \sum_k (A^t)_{ki} x_k \tag{10.375f}$$
$$= \sum_k (A^t)_{ki} e_k^*(x). \tag{10.375g}$$

Voilà. Donc nous avons

$$f^t(g_i^*) = \sum_k (A^t)_{ki} e_k^* = \psi(A^t) g_i^*. \tag{10.376}$$

□

10.191.
Intuitivement, les rangs de f et de f^t sont égaux parce que le rang est donné par la plus grande matrice carrée de déterminant non nul.

Nous donnons maintenant une vraie preuve de ce résultat.

LemSEpTcW

Lemme 10.192 ([349]).
Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors

$$rang(f) = rang(f^t). \tag{10.377}$$

Démonstration. Soient $n = \dim(E)$ et $r = \dim(F)$. Nous posons $\dim\ker(f) = p$ et donc $rang(f) = n - p$. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de $\ker(f)$ que l'on complète en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Nous considérons maintenant les vecteurs

$$g_i = f(e_{p+i}) \tag{10.378}$$

pour $i = 1, \dots, n-p$. C'est-à-dire que les g_i sont les images des vecteurs qui ne sont pas dans le noyau de f. Prouvons qu'ils forment une famille libre. Si

$$\sum_{k=1}^{n-p} a_k f(e_{p+k}) = 0, \tag{10.379}$$

alors $f\big(\sum_k a_k e_{p+k}\big) = 0$, c'est-à-dire $\sum_k a_k e_{p+k} \in \ker(f)$. Comme une base de $\ker(f)$ est $\{e_1, \dots, e_p\}$, il existe des b_l tels que $\sum_k a_k e_{p+k} = \sum_{l=1}^p b_l e_l$. Autrement dit,

$$\sum_k a_k e_{p+k} - \sum_{l=1}^p b_l e_l = 0, \tag{10.380}$$

qui est une combinaison linéaire nulle des e_i. Donc $a_k = b_l = 0$ pour tout k et l. Tout ça pour dire que les $\{g_i\}_{i=1,\dots,n-p}$ est libre.

Étant donné que les vecteurs $g_1, \dots, g_{n-p}$ sont libres, nous pouvons les compléter en une base de F :

$$\{\underbrace{g_1, \dots, g_{n-p}}_{\text{images}}, \underbrace{g_{n-p+1}, \dots, g_r}_{\text{complétion}}\}. \tag{10.381}$$

Nous prouvons maintenant que $rang(f^t) \geqslant n - p$ en montrant que les formes $\{g_i^*\}_{i=1,\dots,n-p}$ forment une partie libre (et donc l'espace image de f^t est au moins de dimension $n-p$). Pour cela nous prouvons que $f^t(g_i^*) = e_{i+p}^*$. En effet

$$f^t(g_i^*)(e_k) = g_i^*(f(e_k)), \tag{10.382}$$

[72] Et merci à Alain Vigne pour m'avoir fait remarquer qu'il fallait mettre de l'ordre dans les indices.

Si $k=1,\dots,p$, alors $f(e_k)=0$ et donc $g_i^*(f(e_k))=0$; si $k=p+l$ alors

$$f^t(g_i^*)(e_k)=g_i^*(f(e_{k+l}))=g_i^*(g_l)=\delta_{i,l}=\delta_{i,k-p}=\delta_{k,i+p}. \tag{10.383}$$

Donc $f^t(g_i^*)=e_{i+p}^*$. Cela prouve que les formes $f^t(g_i^*)$ sont libres et donc que

$$rang(f^t)\geqslant n-p=rang(f). \tag{10.384}$$

En appliquant le même raisonnement à f^t au lieu de f, nous trouvons

$$rang\big((f^t)^t\big)\geqslant rang(f^t) \tag{10.385}$$

et donc, sachant que $(f^t)^t=f$, nous obtenons $rang(f)=rang(f^t)$.

□

PropWOPIooBHFDdP

Proposition 10.193 ([350]).
Si f est une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F, alors nous avons

$$\text{Image}(f^t)=\ker(f)^\perp. \tag{10.386}$$

Démonstration. Soient donc l'application $f\colon E\to F$ et sa transposée $f^t\colon F^*\to E^*$. Nous commençons par prouver que $\text{Image}(f^t)\subset(\ker f)^\perp$. Pour cela nous prenons $\omega\in\text{Image}(f^t)$, c'est-à-dire $\omega=\alpha\circ f$ pour un certain élément $\alpha\in F^*$. Si $z\in\ker(f)$, alors $\omega(z)=(\alpha\circ f)(z)=0$, c'est-à-dire que $\omega\in(\ker f)^\perp$.

Pour prouver qu'il y a égalité, nous n'allons pas démontrer l'inclusion inverse, mais plutôt prouver que les dimensions sont égales. Après, on sait que si $A\subset B$ et si $\dim A=\dim B$, alors $A=B$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\dim\big(\text{Image}(f^t)\big)&=rang(f^t) && && (10.387a)\\
&=rang(f) && \text{lemme 10.192} && (10.387b)\\
&=\dim(E)-\dim\ker(f) && \text{théorème 6.53} && (10.387c)\\
&=\dim\big((\ker f)^\perp\big) && \text{proposition 6.152.} && (10.387d)
\end{aligned}$$

□

Lemme 10.194 ([159]).
Soit $\mathbb{K}$ un corps, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et une application linéaire $f\colon E\to F$. L'application f est injective si et seulement si sa transposée[73] *f^t est surjective.*

Démonstration. Supposons que f soit injective. Alors par le lemme 6.66, il existe $g\colon F\to E$ tel que $g\circ f=\text{Id}\,|_E$. Nous avons alors aussi $(g\circ f)^t=\text{Id}\,|_{E^*}$, mais $(g\circ f)^t=f^t\circ g^t$, donc f^t est surjective.

Inversement, nous supposons que $f^t\colon F^*\to E^*$ est surjective. Alors en nous souvenant que E et F sont de dimension finie et en faisant jouer les identifications $(f^t)^t=f$ et $(E^*)^*=E$ nous savons qu'il existe $s\colon E^*\to F^*$ tel que $f^t\circ s=\text{Id}\,|_{E^*}$. En passant à la transposée,

$$s^t\circ f=\text{Id}\,|_E, \tag{10.388}$$

qui implique que f est injective. □

10.11.6 Polynômes de Lagrange

Lemme-Définition 10.195.
Soit $E=\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Soient $n+1$ réels distincts $a_0,\dots,a_n$. Nous considérons les formes linéaires associées $f_i\in\mathcal{P}_n(\mathbb{R})^*$,

$$f_i(P)=P(a_i). \tag{10.389}$$

La partie $\{f_1,\dots,f_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})^*$.

*Les **polynômes de Lagrange** aux points (a_i) sont les polynômes de la base préduale de la base $\{f_i\}$.*

Démonstration. Nous prouvons que l'orthogonal est réduit au singleton nul :

$$\text{Span}\{f_0,\dots,f_n\}^\perp=\{0\}. \tag{10.390}$$

La proposition 6.152 conclura. Si $P\in\text{Span}\{f_i\}^\perp$, alors $f_i(P)=0$ pour tout i, ce qui fait que $P(a_i)=0$ pour tout $i=0,\dots,n$. Un polynôme de degré au plus n qui s'annule en $n+1$ points est automatiquement le polynôme nul. □

[73] Définition 10.187.

Proposition 10.196.
Les polynômes de Lagrange aux points $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ sont donnés par

$$P_i = \prod_{k\neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}. \tag{10.391}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $f_j(P_i) = \delta_{i,j}$. Nous avons

$$f_j(P_i) = P_i(a_j) = \prod_{k\neq i} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}. \tag{10.392}$$

Si $j \neq i$ alors un des termes est nul. Si au contraire $i = j$, tous les termes valent 1. □

10.11.7 Dual de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$

PropHOjJpCa

Proposition 10.197 ([112]).
Soit $\mathbb{K}$, un corps. Les formes linéaires sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ sont les applications de la forme

$$\begin{aligned} f_A \colon \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ M &\mapsto \operatorname{Tr}(AM). \end{aligned} \tag{10.393}$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) &\to \mathbb{M}(n, \mathbb{K})^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \tag{10.394}$$

et nous voulons prouver que c'est une bijection. Étant donné que nous sommes en dimension finie, nous avons égalité des dimensions de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ et $(\mathbb{M}(n, \mathbb{K}))^*$, et il suffit de prouver que f est injective. Soit donc A telle que $f_A = 0$. Nous l'appliquons à la matrice $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$:

$$0 = f_A(E_{ij}) = \sum_k (AE_{ij})_{kk} = \sum_{kl} A_{kl}(E_{ij})_{lk} = \sum_{kl} A_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = A_{ji}. \tag{10.395}$$

Donc $A = 0$. □

Corolaire 10.198 ([112]).
Soient un corps $\mathbb{K}$ ainsi qu'une application $\phi \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})^*$ telle que pour tout $M, N \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ on ait

$$\phi(MN) = \phi(NM). \tag{10.396}$$

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda \operatorname{Tr}$.

Démonstration. La proposition 10.197 nous donne une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $\phi = f_A$. L'hypothèse nous dit que $f_A(MN) = f_A(NM)$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Tr}(AMN) = \operatorname{Tr}(ANM) \tag{10.397}$$

pour toutes matrices $M, N \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. L'invariance cyclique de la trace[74] appliqué au membre de droite nous donne $\operatorname{Tr}(AMN) = \operatorname{Tr}(MAN)$, ce qui signifie que

$$\operatorname{Tr}\big((AM - MA)N\big) = 0 \tag{10.398}$$

ou encore que $f_{AM-MA} = 0$, et ce, pour toute matrice M. La fonction f étant injective nous en déduisons que la matrice A doit satisfaire

$$AM = MA \tag{10.399}$$

pour tout $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. En particulier, en prenant pour M les fameuses matrices E_{ij} et en calculant un peu,

$$A_{li}\delta_{j,m} = \delta_{i,l}A_{jm} \tag{10.400}$$

pour tout i, j, l, m. Cela implique que $A_{ll} = A_{mm}$ pour tout l et m et que $A_{jm} = 0$ dès que $j \neq m$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda\mathbb{1}$. En fin de compte,

$$\phi(X) = f_{\lambda\mathbb{1}}(X) = \lambda \operatorname{Tr}(X). \tag{10.401}$$

□

[74] Lemme 6.75.

CorICUOooPsZQrg

Corolaire 10.199 ([112]).
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Tout hyperplan de $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ coupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$. Il existe une forme linéaire ϕ sur $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H}=\ker(\phi)$. Encore une fois la proposition 10.197 nous donne $A\in\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ telle que $\phi=f_A$; nous notons r le rang de A. Par le lemme 6.127 nous avons $A=PJ_rQ$ avec $P,Q\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et

$$J_r=\begin{pmatrix}\mathbb{1}_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{10.402}$$

Pour tout $M\in\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ nous avons

$$\phi(M)=\mathrm{Tr}(AM)=\mathrm{Tr}(PJ_rQM)=\mathrm{Tr}(J_rQMP), \tag{10.403}$$

la dernière égalité découlant de l'invariance cyclique de la trace[75]. Ce que nous cherchons est $M\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $\phi(M)=0$. Nous commençons par trouver $N\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(J_rN)=0$. Celle-là est facile : c'est

$$N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \mathbb{1}_{n-1} & 0\end{pmatrix}. \tag{10.404}$$

Les éléments diagonaux de J_rN sont tous nuls. Par conséquent en posant $M=Q^{-1}NP^{-1}$ nous avons notre matrice inversible dans le noyau de ϕ. □

10.12 Diagonalisation et trigonalisation

Ici encore $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

10.12.1 Matrices semblables

PROPooXGXTooQNAAxw

Proposition-Définition 10.200 (Matrices équivalentes).
Nous définissons, sur l'ensemble $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ des matrices $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la relation $A\sim B$ si et seulement si il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A=PBQ^{-1}$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

*Deux telles matrice sont dite **équivalentes**.*

Démonstration. Il faut vérifier les points de la définition 1.55. D'abord $A\sim A$ en prenant $P=Q=\mathbb{1}$. Si $A\sim B$, alors il existe des matrices P et Q telles que $A=PBQ^{-1}$. En multipliant) gauche par P^{-1} et à droite par Q nous trouvons $B=P^{-1}AQ$, ce qui montre que $B\sim A$ par les matrices P^{-1} et Q^{-1}. Enfin si $A\sim B$ et $B\sim C$, nous avons des matrices P,Q,R,S tells que $A=PBQ^{-1}$ et $B=RCS^{-1}$. Nous avons alors

$$A=PBQ^{-1}=P(RCS^{-1})Q^{-1}=(PR)C(QS)^{-1}. \tag{10.405}$$

Donc A et C sont équivalentes par les matrices PR et $(QS)^{-1}$. □

DefCQNFooSDhDpB

Proposition-Définition 10.201 (matrices semblables[1]).
Nous définissons, sur l'ensemble $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ des matrices $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la relation $A\sim B$ si et seulement si il existe une matrice $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $B=P^{-1}AP$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

*Deux matrices équivalentes en ce sens sont dites **semblables**.*

Démonstration. Comme 10.200, mais en plus facile parce qu'il n'y a qu'une seule matrice au lieu de deux. □

PROPooIXFSooZsFWHm

Proposition-Définition 10.202 (Applications linéaires semblables).
Soit un espace vectoriel E. Nous définissons sur $\mathrm{End}(E)$ la relation $f\sim g$ si et seulement si il existe une application inversible $u\colon E\to E$ telle que $f=u^{-1}\circ g\circ u$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

*Deux endomorphismes équivalents en ce sens sont dits **semblables**.*

Démonstration. Toujours la même chose que 10.200. □

[75] Lemme 6.75.

PROPooBGJBooXlDYEv

Proposition 10.203.
Deux applications linéaires sont semblables si et seulement si leurs matrices sont semblables dans une base. Dans ce cas, les matrices sont semblables dans toutes les bases.

Démonstration. Supposons que $f \sim g$. Il existe un endomorphisme inversible u tel que $f = u^{-1} \circ g \circ u$. En vertu de la proposition 6.84, l'application qui a une application linéaire fait correspondre sa matrice est un morphisme d'algèbres. Donc si A est la matrice de f, si B est celle de g et X celle de u, nous avons

$$A = X^{-1}BX, \tag{10.406}$$

ce qui montre que $A \sim B$. □

LEMooKUHJooDfNKeg

Lemme 10.204.
Le polynôme caractéristique[76] *est un invariant sous les similitudes.*

Démonstration. En effet si P est une matrice inversible,

$$\begin{aligned}
\chi_{P^{-1}AP} &= \det(P^{-1}AP - \lambda X\mathbb{1}) && \text{(10.407a)}\\
&= \det\big(P(P^{-1}AP - \lambda X\mathbb{1})P^{-1}\big) && \text{(10.407b)}\\
&= \det(A - \lambda X\mathbb{1}) && \text{(10.407c)}\\
&= \chi_A. && \text{(10.407d)}
\end{aligned}$$

□

La permutation de lignes ou de colonnes ne sont pas des similitudes, comme le montrent les exemples suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{10.408}$$

Nous avons $\chi_A = X^2 - 5X - 2$ tandis que $\chi_B = X^2 - 5X + 2$ alors que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

10.12.2 Trace de matrices semblables

PROPooRMYQooWkEpJJ

Proposition 10.205 ([1])**.**
Invariance de la trace par similarité.

(1) Soit une application linéaire f. Si la matrice de f dans une base est A et est B dans une autre base, alors

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B). \tag{10.409}$$

(2) Deux opérateurs semblables[77] *ont même trace.*

Démonstration. Les matrices A et B sont liées par la proposition 6.134 : $B = Q^{-1}AQ$ où Q est la matrice qui lie les vecteurs des deux bases. L'invariance cyclique de la trace donnée en le lemme 6.75 implique que

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(Q^{-1}AQ) = \mathrm{Tr}(QQ^{-1}A) = \mathrm{Tr}(A). \tag{10.410}$$

□

LEMooXXEYooKHyQjb

Lemme 10.206.
Soit une matrice A. Nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_{ij} |A_{ij}|^2. \tag{10.411}$$

Démonstration. Utilisant la proposition 10.176 pour les éléments de la matrice $A^\dagger$, nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_k (A^\dagger A)_{kk} = \sum_{kl} A^*_{lk}A_{lk} = \sum_{kl} |A_{lk}|^2. \tag{10.412}$$

□

[76] Définition 10.109.
[77] Opérateurs semblables, définition 10.201

LEMooQXFQooLGPcIt

Lemme 10.207 ([351]).
Si les matrices A et B sont unitairement semblables[78]*, alors*

$$\sum_{ij} |A_{ij}|^2 = \sum_{ij} |B_{ij}|^2. \tag{10.413}$$

Démonstration. Soit une matrice unitaire U telle que $B = UAU^\dagger$. Nous savons par le proposition 10.205 que des matrices semblables ont même trace. Or $B^\dagger B$ est unitairement semblable à $A^\dagger A$ parce que

$$B^\dagger B = UA^\dagger U^\dagger UAU^\dagger = UA^\dagger AU^\dagger. \tag{10.414}$$

Donc $\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \mathrm{Tr}(B^\dagger B)$. Le lemme 10.206 conclut. □

10.12.3 Endomorphismes nilpotents

DEFooHDFBooSbMgZN

Définition 10.208.
*La **trace** d'une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est la somme de ses éléments diagonaux :*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}. \tag{10.415}$$

Une propriété importante est son invariance cyclique.

LemhbZTay

Lemme 10.209.
Quelques propriétés de la trace.

ITEMooBRUGooFWQDss

(1) Si A et B sont des matrices carrées, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

(2) La trace est un invariant de similitude.

Démonstration. C'est un simple calcul :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{ik} A_{ik}B_{ki} = \sum_{ik} A_{ki}B_{ik} = \sum_{ik} B_{ik}A_{ki} = \sum_{i} (BA)_{ii} = \mathrm{Tr}(BA) \tag{10.416}$$

où nous avons simplement renommé les indices $i \leftrightarrow k$.

En particulier, la trace est un invariant de similitude parce que $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{Tr}(A^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(B)$ par l'invariance cyclique démontrée en 6.75(2). □

PROPooSQLOooCbTQOC

Proposition-Définition 10.210.
Soit un espace vectoriel de dimension finie E. Soit une application linéaire $f : E \to E$. Nous considérons deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ pour E. Les matrices A et B sont celles de f dans ces deux bases.

Alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

*Ce nombre est appelé **trace** de f.*

Démonstration. La proposition 6.134 nous dit que les matrices A et B sont liées par $A = QBQ^{-1}$ pour une certaine matrice Q. Nous avons alors, en utilisant 10.209(1),

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(QBQ^{-1}) = \mathrm{Tr}(Q^{-1}QB) = \mathrm{Tr}(B). \tag{10.417}$$

□

PROPooLSBZooKGfeFI

Proposition 10.211.
Si la matrice est diagonalisable, alors la trace est la somme des valeurs propres.

LemzgNOjY

Lemme 10.212 ([121]).
L'endomorphisme $u \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$ pour tout p.

Démonstration. Supposons que u est nilpotent. Alors ses valeurs propres sont toutes nulles et celles de u^p le sont également. La trace étant la somme des valeurs propres, nous avons alors tout de suite $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$.

Supposons maintenant que $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$ pour tout p. Le polynôme caractéristique (10.236) est

$$\chi_u = (-1)^n X^\alpha (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}. \tag{10.418}$$

EqfnCqWq

[78] Définition 10.201.

où les λ_i $(i = 1, \dots, r)$ sont les valeurs propres non nulles distinctes de u.

Il est vite vu que le coefficient de X^{n-1} dans χ_u est $-\operatorname{Tr}(u)$ parce que le coefficient de X^{n-1} se calcule en prenant tous les X sauf une fois $-\lambda_i$. D'autre part le polynôme caractéristique de u^p est le même que celui de u, en remplaçant λ_i par λ_i^p ; cela est dû au fait que si v est vecteur propre de valeur propre λ, alors $u^p v = \lambda^p v$.

Par l'équation (10.418), nous voyons que le coefficient du terme X^{n-1} dans le polynôme caractéristique est

$$0 = \operatorname{Tr}(u^p) = \alpha_1\lambda_1^p + \cdots + \alpha_r\lambda_r^p. \tag{10.419}$$ eqSoDSKH

Donc les nombres $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ sont une solution non triviale[79] du système EqDpvTnu

$$\begin{cases} \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r = 0 & \text{(10.420a)} \\ \quad\vdots & \text{(10.420b)} \\ \lambda_1^r X_1 + \cdots + \lambda_r^r X_r = 0. & \text{(10.420c)} \end{cases}$$

Ce sont les équations (10.419) écrites pour $p = 1, \dots, r$. Le déterminant de ce système est

$$\lambda_1 \dots \lambda_r \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{10.421}$$

qui est un déterminant de Vandermonde (proposition 6.135) valant

$$0 = \lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (\lambda_i - \lambda_j). \tag{10.422}$$

Étant donné que les λ_i sont distincts et non nuls, nous avons une contradiction et nous devons conclure que $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ était une solution triviale du système (10.420). □

PropMWWJooVIXdJp

Proposition 10.213 ([352])**.**
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Un endomorphisme $u \in \operatorname{End}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ Nous faisons la démonstration par récurrence sur la dimension de E. Lorsque $n = 1$ nous avons $u = (a)$ avec $a \in \mathbb{K}$. Puisque $a^k = 0$ pour un certain k nous avons $a = 0$ parce qu'un corps est toujours un anneau intègre[80].

Lorsque $\dim(E) = n$ nous savons que u a un noyau non réduit au vecteur nul (parce qu'il est nilpotent). Soit donc un vecteur non nul $x \in \ker(u)$ et une base

$$\{x, e_2, \dots, e_n\} \tag{10.423}$$

donnée par le théorème de la base incomplète 6.15. La matrice de u dans cette base s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right). \tag{10.424}$$

Un tout petit peu de calcul de produit de matrice montre que la matrice de u^k est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A^k & \\ 0 & & & \end{array}\right). \tag{10.425}$$

Étant donné que l'endomorphisme u est nilpotent, la matrice A l'est aussi. L'hypothèse de récurrence dit alors que A est strictement triangulaire supérieure (ou en tout cas peut le devenir par un changement de base adéquat).

[79] Si $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$, alors les valeurs propres sont toutes nulles et la matrice est en réalité nulle dès le départ.
[80] Lemme 3.23.

(2) $\Leftarrow$ Soit une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure. Alors $u(e_1) = 0$ et plus généralement, $u(e_k) \in \text{Span}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. Voyez par récurrence que $u^l(e_k) \in \text{Span}\{e_1, \dots, e_{k-l}\}$. Donc $u^l(e_k) = 0$ dès que $l \geqslant k$.

□

PROPooWTFWooXHlmhp

Proposition 10.214 (Thème 41)**.**
Soit E un espace de Banach (espace vectoriel normé complet[81]). Si $A \in \mathcal{L}(E, E)$ est nilpotente, alors $(\mathbb{1} - A)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{10.426}$$

où l'infini peut évidemment être remplacé par l'ordre de nilpotence de A.

Démonstration. En ce qui concerne la convergence de la somme, elle ne fait pas de doute parce que A étant nilpotente, la somme contient seulement une quantité finie de termes non nuls.

Montrons à présent que la somme est l'inverse de $\mathbb{1} - A$ en multipliant terme à terme :

$$\sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A) = \sum_{k=0}^{n}(A^k - A^{k+1}) = \mathbb{1} - A^{n+1}. \tag{10.427}$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{1} - \sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A)\| = \|A^{n+1}\| \to 0. \tag{10.428}$$

La dernière limite est en réalité une égalité pour n assez grand. □

10.12.4 Endomorphismes diagonalisables

DefCNJqsmo

Définition 10.215 (Diagonalisable)**.**
Plusieurs notions.

(1) *Une matrice est **diagonalisable** si elle est semblable[82] à une matrice diagonale.*

(2) *Une matrice est **diagonale** si seuls ses éléments diagonaux sont non nuls.*

(3) *Une application linéaire est diagonalisable si elle est semblable[83] à une application linéaire diagonale.*

(4) *Une application linéaire est diagonal si elle admet une base de vecteurs propres.*

Dans une matrice diagonale, certains éléments diagonaux peuvent être nuls. Pour un opérateur diagonal par contre, il faut de vrais vecteurs propres. Donc une matrice diagonale n'est pas toujours la matrice d'un opérateur diagonal.

LEMooOCLHooBMwUtm

Lemme 10.216.
Un opérateur est diagonal si et seulement si il est diagonalisable.

PROPooDEETooSOMiGO

Proposition 10.217.
Si A est un opérateur diagonalisable[84] dont les valeurs propres sont λ_i, alors il existe un opérateur inversible Q tel que

$$A = Q^{-1}DQ \tag{10.429}$$

où D est l'opérateur diagonal contenant les λ_i sur sa diagonale.

Démonstration. Commençons par montrer que si u est un vecteur propre de A, alors $Q^{-1}u$ est un vecteur propre de D, pour la même valeur propre. En effet nous avons $D = Q^{-1}AQ$, et donc

$$D(Q^{-1}u) = Q^{-1}AQQ^{-1}u = Q^{-1}Au = \lambda Q^{-1}u. \tag{10.430a}$$

Donc si $\{e_i\}$ est une base de vecteurs propres de D, alors $\{Qe_i\}$ est une base de vecteurs propres de A. Pour les mêmes valeurs propres. □

[81] Définition 9.339.
[82] Définition 10.201.
[83] Définition 10.202.
[84] Définition 10.215.

Lemme 10.218.
Une matrice triangulaire supérieure avec des 1 *sur la diagonale n'est diagonalisable que si elle est diagonale (c'est-à-dire si c'est la matrice unité).*

Démonstration. Si A est une matrice triangulaire supérieure de taille n telle que $A_{ii} = 1$, alors $\det(A-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^n$, ce qui signifie que $\text{Spec}(A) = \{1\}$. Pour la diagonaliser, il faudrait une matrice $P \in \text{GL}(n,\mathbb{K})$ telle que $\mathbb{1} = P^{-1}AP$, ce qui est uniquement possible si $A = \mathbb{1}$. □

LemgnaEOk

Lemme 10.219.
Soit F un sous-espace stable par u. Soit une décomposition du polynôme minimal

$$\mu_u = P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r} \tag{10.431}$$

où les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires distincts. Si nous posons $E_i = \ker P_i^{n_i}$, alors

$$F = (F \cap E_1) \oplus \dots \oplus (F \cap E_r). \tag{10.432}$$

ThoDigLEQEXR

Théorème 10.220.
Soit E, un espace vectoriel de dimension n sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ et $u \in \text{End}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ItemThoDigLEQEXRiv

(1) L'endomorphisme u est diagonalisable.

ItemThoDigLEQEXRi

(2) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant, scindé sur $\mathbb{K}$, dont toutes les racines sont simples, tel que $P(u) = 0$.

ItemThoDigLEQEXRii

(3) Le polynôme minimal μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et toutes ses racines sont simples[85].

ItemThoDigLEQEXRiii

(4) Tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

ITEMooZNJFooEiqDYp

(5) Dans une base adaptée, la matrice de u est diagonale et les éléments diagonaux sont ses valeurs propres.

Démonstration. Plein d'implications à prouver.

(1) **(2) implique (3)** Étant donné que $P(u) = 0$, il est dans l'idéal des polynômes annulateurs de u, et le polynôme minimal μ_u le divise parce que l'idéal des polynômes annulateurs est généré par μ_u par le théorème 8.43.

(2) **(3) implique (1)** Étant donné que le polynôme minimal est scindé à racines simples, il s'écrit sous forme de produits de monômes tous distincts, c'est-à-dire

$$\mu_u(X) = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_r) \tag{10.434}$$

où les λ_i sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Étant donné que $\mu_u(u) = 0$, le théorème de décomposition des noyaux (théorème 10.90) nous enseigne que

$$E = \ker(u-\lambda_1) \oplus \dots \oplus \ker(u-\lambda_r). \tag{10.435}$$

Mais $\ker(u-\lambda_i)$ est l'espace propre $E_{\lambda_i}(u)$. Donc u est diagonalisable.

(3) **(1) implique (4)** Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base qui diagonalise u, soit F un sous-espace de E et $\{f_1,\dots,f_r\}$ une base de F. Par le théorème 6.19(2), nous pouvons compléter la base de F par des éléments de la base $\{e_i\}$. Le complément ainsi construit est stable par u.

(4) **(4) implique (1)** En dimension un, tout endomorphisme est diagonalisable, nous supposons donc que $\dim E = n \geqslant 2$. Nous procédons par récurrence sur le nombre de vecteurs propres connus de u. Supposons avoir déjà trouvé p vecteurs propres $e_1,\dots,e_p$ de u. Considérons H, un hyperplan qui contient les vecteurs $e_1,\dots,e_p$. Soit F un supplémentaire de H stable par u ; par construction $\dim F = 1$ et si $e_{p+1} \in F$, il doit être vecteur propre de u.

[85] Le polynôme *caractéristique*, lui, n'a pas spécialement ses racines simples ; il peut encore être de la forme

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}, \tag{10.433}$$

mais alors $\dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i$.

(5) **(1) implique (2)** Nous supposons maintenant que u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes, et considérons le polynôme

$$P(x) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r). \tag{10.436}$$

Alors $P(u) = 0$. En effet si e_i est un vecteur propre pour la valeur propre λ_i,

$$P(u)e_i = \prod_{j \neq i} (u - \lambda_j) \circ (u - \lambda_i)e_i = 0 \tag{10.437}$$

par le lemme 10.89. Par conséquent $P(u)$ s'annule sur la base $\{e_i\}$.

(6) **(5) implique (2)** Si la matrice A est diagonale alors le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n} (X - A_{ii})$ est annulateur de A. En effet,

$$P(A)e_k = \prod_{i=1}^{n} (A - A_{ii})x = \prod_{i=1}^{n} \big(u(e_k) - A_{ii}e_k\big) = \prod_{i=1}^{n} \big(A_{kk}e_k - A_{ii}e_k\big) = 0 \tag{10.438}$$

parce que le facteur $i = k$ est nul.

(7) **(3) implique (5)** le polynôme minimal de u s'écrit

$$\mu = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r), \tag{10.439}$$

et les espaces E_i du lemme 10.219 sont les espaces propres $E_i = \ker(u - \lambda_i)$. Nous avons donc une somme directe

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r. \tag{10.440}$$

Dans chacun des espaces propres, u a une matrice diagonale avec la valeur propre correspondante sur la diagonale. Une base de E constituée d'une base de chacun des espaces propres est donc une base comme nous en cherchons.

□

CorQeVqsS

Corolaire 10.221.
Si u est diagonalisable et si F est un sous-espace stable par u, alors

$$F = \bigoplus_{\lambda} E_\lambda(u) \cap F \tag{10.441}$$

où $E_\lambda(u)$ est l'espace propre de u pour la valeur propre λ. En particulier la restriction de u à F, $u|_F$ est diagonalisable.

Démonstration. Par le théorème 10.220, le polynôme μ_u est scindé et ne possède que des racines simples. Notons le

$$\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r). \tag{10.442}$$

Les espaces E_i du lemme 10.219 sont maintenant les espaces propres.

En ce qui concerne la diagonalisabilité de $u|_F$, notons que nous avons une base de F composée de vecteurs dans les espaces $E_\lambda(u)$. Cette base de F est une base de vecteurs propres de u. □

Lemme 10.222.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathrm{End}(E)$. Si $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Spec}(u)\big) = \dim(E)$ alors u est diagonalisable.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de u. Nous savons que les espaces propres correspondants sont en somme directe (lemme 10.88). Par conséquent $\mathrm{Span}\{E_{\lambda_i}(u)\}$ est de dimension $n = \dim(E)$ et u est diagonalisable. □

Voici un résultat de diagonalisation simultanée. Nous donnerons un résultat de trigonalisation simultanée dans le lemme 14.107.

PropGqhAMei

Proposition 10.223 (Diagonalisation simultanée)**.**
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux.

ItemGqhAMei

(1) Si $i, j \in I$ alors tout sous-espace propre de u_i est stable par u_j. Autrement dit $u_j\big(E_\lambda(u_i)\big) \subset E_\lambda(u_i)$.

(2) Si les u_i sont diagonalisables, alors ils le sont simultanément.

Démonstration. Supposons que u_i et u_j commutent et soit x un vecteur propre de u_i : $u_i(x) = \lambda x$. Nous montrons que $u_j(x) \in E_\lambda(u_i)$. Nous avons

$$u_i\big(u_j(x)\big) = u_j\big(u_i(x)\big) = \lambda u_j(x). \tag{10.443}$$

Par conséquent $u_j(x)$ est vecteur propre de u_i de valeur propre λ.

Montrons maintenant l'affirmation à propos des endomorphismes simultanément diagonalisables. Si $\dim E = 1$, le résultat est évident. Nous supposons également qu'aucun des u_i n'est multiple de l'identité. Nous effectuons une récurrence sur la dimension.

Soit u_0 un des u_i et considérons ses valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Pour chaque k nous avons

$$E_{\lambda_k}(u_0) \neq E, \tag{10.444}$$

sinon u_0 serait un multiple de l'identité. Par contre le fait que u_0 soit diagonalisable permet de décomposer E en espaces propres de u_0 :

$$E = \bigoplus_k E_{\lambda_k}(u_0). \tag{10.445}$$

Ce que nous allons faire est de simultanément diagonaliser les $(u_i)_{i\in I}$ sur chacun des E_{λ_k} séparément. Par le point (1), nous avons $u_i \colon E_{\lambda_k}(u_0) \to E_{\lambda_k}(u_0)$, et nous pouvons considérer la famille d'opérateurs

$$\Big(u_i|_{E_{\lambda_k}(u_0)}\Big)_{i\in I}. \tag{10.446}$$

Ce sont tous des opérateurs qui commutent et qui agissent sur un espace de dimension plus petite. Par hypothèse de récurrence nous avons une base de $E_{\lambda_k}(u_0)$ qui diagonalise tous les u_i. □

ExewINgYo

Exemple 10.224.
Soit un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un opérateur **involutif** est un opérateur différent de l'identité dont le carré est l'identité. Typiquement une symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^3$. Le polynôme caractéristique d'une involution est $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$.

Tant que $1 \neq -1$, $X^2 - 1$ est donc scindé à racines simples et les involutions sont diagonalisables (10.220). Cependant si le corps est de caractéristique 2, alors $X^2 - 1 = (X + 1)^2$ et l'involution n'est plus diagonalisable.

Par exemple si le corps est de caractéristique 2, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.447a}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.447b}$$

Cette matrice A représente donc une involution, mais n'est pas diagonalisable. △

10.12.5 Diagonalisation : cas complexe, pas toujours

Il n'est pas vrai qu'une matrice de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ soit toujours diagonalisable. En effet le théorème 10.220(3) dit qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Certes sur $\mathbb{C}$ le polynôme minimal sera scindé, mais il ne sera pas spécialement à racines simples.

Exemple 10.225.
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.448}$$

a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2$. C'est également son polynôme minimal, qui n'est pas à racine simple.

Il est par ailleurs facile de voir que le seul espace propre de A est $\mathrm{Span}\{(1, 0)\}$ (ici le span est sur $\mathbb{C}$). Donc l'espace $\mathbb{C}^2$ ne possède pas de base de vecteurs propres de A. △

Ce qui est vrai, c'est que le polynôme caractéristique a des racines, et que ces racines correspondent à des vecteurs propres. Mais il n'y a pas toujours autant de vecteurs propres que la multiplicité des racines.

10.226.
Lorsque la diagonalisation n'est pas possible, il est souvent possible de trigonaliser. Les matrices triangulaires ne sont pas aussi faciles à manipuler que les matrices diagonales, mais c'est toujours ça de pris.

Nous étudierons ça plus tard, en 14.10.1 parce que ça va nécéssiter le théorème de d'Alembert.

10.12.6 Diagonalisation : cas réel

LemSchureRelnrqfiy

Lemme 10.227 (Lemme de Schur réel)**.**
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_r & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{10.449}$$

EqMtrTSqRTA

Le déterminant de A est le produit des déterminants des blocs diagonaux et les valeurs propres de A sont les $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ et celles de ces blocs.

Démonstration. Si la matrice A a des valeurs propres réelles, nous procédons comme dans le cas complexe. Cela nous fournit le partie véritablement triangulaire avec les valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sur la diagonale. Supposons donc que A n'a pas de valeurs propres réelles. Soit donc $\alpha+i\beta$ une valeur propre ($\beta\neq 0$) et $u+iv$ un vecteur propre correspondant où u et v sont des vecteurs réels. Nous avons

$$Au+iAv = A(u+iv) = (\alpha+i\beta)(u+iv) = \alpha u-\beta v+i(\alpha v+\beta u), \tag{10.450}$$

et en égalisant les parties réelles et imaginaires,

$$Au = \alpha u-\beta v \tag{10.451a}$$
$$Av = \alpha v+\beta u. \tag{10.451b}$$

Sur ces relations nous voyons que ni u ni v ne sont nuls. De plus u et v sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{R}$), en effet si $v=\lambda u$ nous aurions $Au=\alpha u-\beta\lambda u=(\alpha-\beta\lambda)u$, ce qui serait une valeur propre réelle alors que nous avions supposé avoir déjà épuisé toutes les valeurs propres réelles.

Étant donné que u et v sont deux vecteurs réels non nuls et linéairement indépendants, nous pouvons trouver une base orthonormée $\{q_1,q_2\}$ de $\text{Span}\{u,v\}$. Nous pouvons étendre ces deux vecteurs en une base orthonormée $\{q_1,q_2,q_3,\dots,q_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Nous considérons à présent la matrice orthogonale dont les colonnes sont formées de ces vecteurs : $Q=[q_1\,q_2\,\dots,q_n]$.

L'espace $\text{Span}\{e_1,e_2\}$ est stable par $Q^{-1}AQ$, en effet nous avons

$$Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Aq_1 = Q^{-1}(aq_1+bq_2) = ae_1+be_2. \tag{10.452}$$

La matrice $Q^{-1}AQ$ est donc de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} & C_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{10.453}$$

où C_1 est une matrice réelle $2\times(n-1)$ quelconque et A_1 est une matrice réelle $(n-2)\times(n-2)$. Nous pouvons appliquer une récurrence sur la dimension pour poursuivre.

Notons que si A n'a pas de valeurs propres réelles, elle est automatiquement d'ordre pair parce que les valeurs propres complexes viennent par couple complexes conjugués.

En ce qui concerne les valeurs propres, il est facile de voir en regardant (10.449) que les valeurs propres sont celles des blocs diagonaux. Étant donné que $Q^{-1}AQ$ et A ont même polynôme caractéristique, ce sont les valeurs propres de A. □

ThoeTMXla

Théorème 10.228 (Théorème spectral, matrice symétrique[112])**.**
Une matrice symétrique réelle,

ITEMooJWHLooSfhNSW

(1) a un spectre contenu dans $\mathbb{R}$

ITEMooMWWRooXxGONW

(2) est diagonalisable par une matrice orthogonale.

Si M est une matrice symétrique réelle alors $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormée de vecteurs propres de M.

Démonstration. Soit A une matrice réelle symétrique. Elle agit sur l'espace $\mathbb{C}^n$ par la définition 6.78, et en particulier la formule 6.95. Nous munissons de plus $\mathbb{C}^n$ de la forme sesquilinéaire définie en la proposition 10.181.

Si λ est une valeur propre complexe pour le vecteur propre complexe v, alors d'une part $\langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$ et d'autre part $\langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$. Par conséquent $\lambda = \bar{\lambda}$, et λ est réelle.

Le lemme de Schur réel 10.227 donne une matrice orthogonale Q qui trigonalise A. Les valeurs propres étant toutes réelles, la matrice $Q^{-1}AQ$ est même triangulaire (il n'y a pas de blocs dans la forme (10.449)). Prouvons que $Q^{-1}AQ$ est symétrique :

$$(Q^{-1}AQ)^t = Q^tA^t(Q^{-1})^t = Q^{-1}A^tQ = Q^{-1}AQ \tag{10.454}$$

où nous avons utilisé le fait que Q était orthogonale ($Q^{-1} = Q^t$) et que A était symétrique ($A^t = A$). Une matrice triangulaire supérieure symétrique est obligatoirement une matrice diagonale.

En ce qui concerne la base de vecteurs propres, soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et Q une matrice orthogonale telle que $A = Q^tDQ$ avec D diagonale. Nous posons $f_i = Q^te_i$ et en tenant compte du fait que $Q^t = Q^{-1}$ nous avons $Af_i = Q^tDQQ^te_i = Q^t\lambda_ie_i = \lambda_if_i$. Donc les f_i sont des vecteurs propres de A. De plus ils sont orthonormés parce qu'en utilisant la proposition 10.184,

$$\langle f_i, f_j\rangle = \langle Q^te_i, Q^te_j\rangle = \langle e_i, Q^tQe_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{10.455}$$

□

Le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints sera traité plus bas parce qu'il a besoin de notions sur les formes bilinéaires, théorème 12.26.

RemGKDZfxu

Remarque 10.229.
Une matrice symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale. Nous pouvons en réalité nous arranger pour diagonaliser par une matrice de $\mathrm{SO}(n)$. Plus généralement si A est une matrice diagonalisable par une matrice $P \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ alors elle est diagonalisable par une matrice de $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ en changeant le signe de la première ligne de P. Et inversement.

En effet, si nous avons $P^tDP = A$, alors en notant $*$ les quantités qui ne dépendent pas de a, b ou c,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1a^2 + * & \lambda_1ab + * & \lambda_1ac + * \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10.456}$$

Nous voyons donc que si nous changeons les signes de a, b et c en même temps, le résultat ne change pas.

PROPooQHHPooSqpgcb

Proposition 10.230.
Une forme bilinéaire est non-dénénérée[86] *si et seulement si sa matrice associée est inversible.*

Démonstration. Nous savons que la matrice associée est symétrique et qu'elle peut donc être diagonalisée (théorème 10.228). En nous plaçant dans une base de diagonalisation, nous devons prouver que la forme est non-dégénérée si et seulement si les éléments diagonaux de la matrice sont tous non nuls.

Écrivons $b(x,z)$ en choisissant pour z le vecteur de base e_k de composantes $(e_k)_j = \delta_{kj}$:

$$b(x, e_k) = \sum_{ij} x_i(e_k)_j = \sum_i b_{ik}x_i = b_{kk}x_k. \tag{10.457}$$

Si b est dégénérée et si x est un vecteur non nul (disons que la composante x_i est non nulle) de E tel que $b(x,z) = 0$ pour tout $z \in E$, alors $b_{ii} = 0$, ce qui montre que la matrice de b n'est pas inversible.

Réciproquement si la matrice de b est inversible, alors tous les b_{kk} sont différents de zéro, et le seul vecteur x tel que $b_{kk}x_k = 0$ pour tout k est le vecteur nul. □

10.12.7 Matrice définie positive

DefAWAooCMPuVM

Définition 10.231 (Matrice définie positive, opérateur défini positif)**.**
Un opérateur sur un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ est ***défini positif*** *si toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement positives. Il est* ***semi-défini positif*** *si ses valeurs propres sont réelles positives ou nulles.*

Mêmes définitions pour une matrice.

[86] Définition 10.125.

Afin d'éviter l'une ou l'autre confusion, nous disons souvent *strictement* défini positif pour positif.

NORMooAJLHooQhwpvr

10.232.
Quelques ensembles de matrices symétriques.

(1) $S(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles $n\times n$.

(2) $S^+(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques $n\times n$ définies positives.

(3) $S^{++}(n,\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $S^+(n,\mathbb{R})$ des matrices strictement définies positives.

Remarque 10.233.
Nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive pour une matrice non symétrique.

PropcnJyXZ

Proposition 10.234.
Soit M, une matrice symétrique. Nous avons

ITEMooTJVQooYmRkas

(1) $\det(M)>0$ *et* $\mathrm{Tr}(M)>0$ *implique M définie positive*[87],

(2) $\det(M)>0$ *et* $\mathrm{Tr}(M)<0$ *implique M définie négative,*

ItemluuFPN

(3) $\det(M)<0$ *implique ni semi-définie positive, ni définie négative*

(4) $\det(M)=0$ *implique M semi-définie positive ou semi-définie négative.*

Lorsqu'un énoncé parle d'une matrice symétrique, le premier réflexe est de la diagonaliser : considérer une matrice orthogonale Q telle que $Q^tMQ=D$ avec D diagonale. Et les valeurs propres sur la diagonale : $D_{kk}=\lambda_k$. Les matrices symétriques définies positives ont cependant des propriétés même en dehors de leur base de diagonalisation.

Pour rappel, $\langle x,y\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ défini par la proposition 10.168.

LemWZFSooYvksjw

Lemme 10.235.
Soit une matrice symétrique M.

ITEMooSKRAooOgHbGA

(1) Elle est strictement définie positive si et seulement si $\langle x,Mx\rangle>0$ pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$.

ITEMooMOZYooWcrewZ

(2) Elle est semi-définie positive si et seulement si $\langle x,Mx\rangle\geqslant 0$ pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$.

ITEMooRRMFooHSOHxZ

(3) Si elle est seulement définie positive, alors $\langle x,Mx\rangle\geqslant\lambda\|x\|^2$ dès que $\lambda\geqslant 0$ minore toutes les valeurs propres.

Démonstration. Démonstration en trois parties.

(1) **(1)** Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de M dont l'existence est assurée par le théorème spectral 10.228. Nous nommons x_i les coordonnées de x dans cette base. Alors,

$$\langle x,Mx\rangle=\sum_{i,j}x_i\langle e_i,x_jMe_j\rangle=\sum_{i,j}x_ix_j\langle e_i,\lambda_je_j\rangle=\sum_{ij}x_ix_j\lambda_j\delta_{ij}=\sum_i\lambda_ix_i^2 \tag{10.458}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de M. Le produit$\langle x,Mx\rangle$ est strictement positif pour tout x si et seulement si tous les λ_i sont strictement positifs.

(2) **(2)** Nous avons encore

$$\langle x,Mx\rangle=\sum_i\lambda_ix_i^2 \tag{10.459}$$

qui est plus grand ou égal à zéro si et seulement si tous les λ_i sont plus grands ou égaux à zéro.

(3) **(3)**

Soit une matrice orthogonale T diagonalisant M, c'est-à-dire telle que $T^tMT=D$ avec D diagonale. Nous allons vérifier que si $\lambda\leqslant\min\{\lambda_i\}$, alors

$$\langle Tx,MTx\rangle\geqslant\lambda\|Tx\|^2 \tag{10.460}$$

EQooOSFEooCoPnuG

[87] Définition 10.231.

pour tout x. Si nous considérons la base de diagonalisation $\{e_k\}$ pour les valeurs propres λ_k, nous avons le calcul SUBEQSooHBIYooSpkYAl

$$\begin{aligned}\langle Tx, MTx\rangle &= \langle x, T^tMTx\rangle && (10.461a)\\ &= \langle x, Dx\rangle && (10.461b)\\ &= \sum_k \langle x, x_k De_k\rangle && (10.461c)\\ &= \sum_k \lambda_k x_k \underbrace{\langle x, e_k\rangle}_{=x_k} && (10.461d)\\ &\geqslant \sum_k \lambda |x_k|^2 \qquad \text{en posant} \lambda = \min\{\lambda_i\} && (10.461e)\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\langle Tx, MTx\rangle \geqslant \sum_k \lambda |x_k|^2 = \lambda \|x\|^2 = \lambda \|Tx\|^2. \tag{10.462}$$

Au dernier passage nous avons utilisé le fait que T est une isométrie (proposition 10.44). L'inéquation (10.460) est démontrée.

Comme T est une bijection [88], cela implique le résultat pour tout x.

□

Les personnes qui aiment les vecteurs lignes et colonnes écriront des inégalités comme

$$x^tMx \geqslant x^tx. \tag{10.463}$$

Tout à l'autre bout du spectre des personnes névrosées des notations, on trouvera des inégalités comme

$$M(x \otimes x) \geqslant x \cdot x. \tag{10.464}$$

Le penchant personnel de l'auteur de ces lignes est la notation avec le produit tensoriel. Si vous aimez ça, vous pouvez lire la section 12.16.15 et en particulier ce qui suit (12.861).

La notation adoptée ici avec le produit scalaire $\langle x, Mx\rangle$, qui peut aussi être écrite $x \cdot Mx$ est entre les deux. Elle a l'avantage de n'être pas technologique comme le produit tensoriel (si vous y mettez les pieds, vous devez savoir ce que vous faites), tout en évitant de se casser la tête à savoir qui est un vecteur ligne ou un vecteur colonne.

PROPooHROPmNQSEKooEGMDRC

Proposition 10.236.
Une application bilinéaire est définie positive[89] *si et seulement si sa matrice symétrique associée*[90] *l'est.*

Démonstration. La définition 10.122 dit que b est strictement définie positive lorsque $b(x,x) \geqslant 0$ et $b(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

D'autre part, le lemme 10.235 dit que la matrice B est strictement définie positive lorsque $x \cdot Bx \geqslant 0$ et $x \cdot Bx = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Le lien entre les deux est que le lemme 10.145 nous enseigne que pour tout x et y,

$$b(x,y) = x \cdot By \tag{10.465}$$

où B est la matrice de b. □

PROPooCIEUooODqfwm

Proposition 10.237.
Soit une forme quadratique $q\colon E \to \mathbb{K}$ et sa matrice[91] *$(q_{ij}) \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$. Nous avons*

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j. \tag{10.466}$$

EQooAJTUooBSAhKv

Démonstration. La première égalité est seulement l'expression de la matrice de q. Pour la seconde, on découpe la somme sur j en trois parties : $j < i$, $j = i$ et $j > i$:

$$q(x) = \sum_i \sum_{j<i} q_{ij}x_ix_j + \sum_i q_{ii}x_i^2 + \sum_i \sum_{j>i} q_{ij}x_ix_j. \tag{10.467}$$

EQooMKMDooGKqhJi

[88] Une matrice orthogonale a un déterminant qui vaut ± 1.
[89] Définition 10.122.
[90] Par la proposition 10.138.
[91] Matrice associée à une forme quadratique, définition 10.144.

Nous pouvons utiliser le lemme 2.132 en posant $A = \{(i,j) \text{ tel que } j < i\}$, $B = \{(i,j) \text{ tel que } j > i\}$, et en considérant la bijection

$$\begin{aligned} \varphi\colon A &\to b \\ (i,j) &\mapsto (j,i). \end{aligned} \tag{10.468}$$

Nous avons alors

$$\sum_{(i,j)\in A} q_{ij}x_ix_j = \sum_{(i,j)\in B} q_{ji}x_jx_i = \sum_{(i,j)\in B} q_{ij}x_ix_j. \tag{10.469}$$

La première égalité est le lemme et la seconde est la symétrie de q. Bref, dans (10.467), le premier et le dernier termes sont égaux. □

10.238.
De nombreux auteurs préfèrent écrire des choses comme x^tBy ou xB^ty ou xBy^t et se poser de longues questions sur qui est un « vecteur colonne » et qui est un « vecteur ligne », et si la matrice B soit être transposée ou non. Toutes ces notations servent(?) à cacher un bête produit scalaire.

10.239.
Notons que la matrice associée à une forme bilinéaire (ou quadratique associée) est uniquement valable pour une base donnée. Si nous changeons de base, la matrice change. Cependant lorsque nous travaillons sur $\mathbb{R}^n$, la base canonique est tellement canonique que nous allons nous permettre de parler de « la » matrice associée à une forme bilinéaire.

Corolaire 10.240.
Une matrice symétrique strictement définie positive est inversible.

Démonstration. Si $Ax = 0$ alors $\langle Ax, x\rangle = 0$. Mais dans le cas d'une matrice strictement définie positive, cela implique $x = 0$ par le lemme 10.235. □

Lemme 10.241.
Pour une base quelconque, les éléments diagonaux d'une matrice symétrique semi-définie positive sont positifs. Si la matrice est strictement définie positive, alors les éléments diagonaux sont strictement positifs.

Démonstration. Il s'agit d'une application du lemme 10.235. Si A est définie positive et que $\{e_i\}$ est une base, alors

$$A_{ii} = \langle Ae_i, e_i\rangle \geqslant \lambda\|e_i\|^2 = \lambda \geqslant 0. \tag{10.470}$$

Si A est strictement définie positive, alors λ peut être choisi strictement positif. □

10.12.8 Réduction de Gauss

THOooOMMFooKxqICS

Théorème 10.242 (Réduction de Gauss[353, 354])**.**
Soit une forme quadratique non nulle q sur l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Il existe une base $\{l_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E^* et des coefficients $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tels que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i(x)^2. \tag{10.471}$$

Démonstration. Notre point de départ sont les formules (10.466) pour la forme quadratique. Nous allons faire la preuve par récurrence sur la dimension de l'espace. Si $n = 1$, alors nous avons seulement

$$q(x) = \alpha x^2 \tag{10.472}$$

et donc le théorème est fait avec $l(x) = x$.

Nous supposons que le théorème est prouvé pour tout espace de dimension n. Une forme quadratique pour un espace de dimension $n+1$ s'écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j. \tag{10.473}$$

Vu que q est non nulle, un des m_{ij} est non nul. Nous allons diviser en plusieurs cas.

- $m_{11} \neq 0$
- $m_{kk} \neq 0$ avec $k \neq 1$

- $m_{12} \neq 0$ et $m_{ii} = 0$ pour tout i.
- $m_{kl} \neq 0$ avec $(k, l) \neq (1, 2)$ et $m_{ii} = 0$ pour tout i.

Ces cas ne sont pas exclusifs, mais ils couvrent toutes les possibilités.

(1) **Si $m_{11} \neq 0$** Nous écrivons q sous la forme

$$q(x) = m_{11}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i+1}^{n+1} m_{ij}x_ix_j\Big) \tag{10.474a}$$

$$= m_{11}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n+1} m_{1j}x_1x_j + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1}(m_{ij}x_ix_j) \tag{10.474b}$$

$$= m_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n+1} m_{1j}x_k + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \tag{10.474c}$$

$$= m_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n+1}\frac{m_{1j}}{m_{11}}x_j\right) + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \tag{10.474d}$$

$$= m_{11}\big(x_1^2 + 2x_1 f(x_2, \dots, x_{n+1})\big) + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \tag{10.474e}$$

$$= m_{11}\big(x_1 + f(x_2, \dots, x_{n+1})\big)^2 - m_{11}f(x_2, \dots, x_{n+1})^2 + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \tag{10.474f}$$

où

- R est une forme quadratique de $n-1$ variables ;
- nous avons noté $f(x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{j=2}^{n+1}\frac{m_{1j}}{m_{11}}x_j$.

Maintenant, toute la partie $-f(x_2, \dots, x_{n+1})^2 + R(x_2, \dots, x_{n+1})$ est une forme quadratique de n variables. Par hypothèse de récurrence, il existe des coefficients α_i et des formes linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}^n$ $l'_i(x_2, \dots, x_{n+1})$ telles que

$$-f(x_2, \dots, x_{n+1})^2 + R(x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=2}^{n+1}\alpha_i l'_i(x_2, \dots, x_{n+1})^2. \tag{10.475}$$

En posant ensuite $l_j(x_1, \dots, x_{n+1}) = l'_j(x_2, \dots, x_{n+1})$, ainsi que $l_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1 + f(x_2, \dots, x_{n+1})$, nous avons

$$q(x) = m_{11}l_1(x)^2 + \sum_{j=2}^{n+1}\alpha_j l_j(x)^2. \tag{10.476}$$

(2) **Si $m_{kk} \neq 0$ avec $k \neq 1$**

Nous nommons k le plus petit entier pour lequel $m_{kk} \neq 0$, et nous supposons que $k \neq 1$, parce que nous avons déjà couvert ce cas. Dans ce cas, nous avons

$$q(x) = m_{kk}x_k^2 + \sum_{j=k+1}^{n+1} m_{jj}x_j^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i+1}^{n+1} m_{ij}x_ix_j\Big), \tag{10.477}$$

et tout tourne comme dans le premier cas.

(3) **$m_{ii} = 0$ pour tout i et $m_{12} \neq 0$** Nous écrivons q en séparant les termes m_{1k} :

$$q(x) = 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j \tag{10.478a}$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + 2\sum_{2 \leqslant j \leqslant n+1} m_{1j}x_1x_j + 2\sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j \tag{10.478b}$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + 2x_1\sum_{2 \leqslant j \leqslant n+1} m_{1j}x_j + 2\sum_{3 \leqslant j \leqslant n+1} m_{2j}x_2x_j + 2\sum_{3 \leqslant i < j \leqslant n+1} m_{ij}x_ix_j \tag{10.478c}$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + x_1f(x_2, \dots, x_{n+1}) + x_2g(x_3, \dots, x_{n+1}) + T(x_3, \dots, x_{n+1}) \tag{10.478d}$$

SUBEQooLBXBooXoLyuw

où f et g sont linéaires et T est multilinéaire.

À ce moment, nous tentons de factoriser toute la partie concernant x_1 et x_2. L'idée est d'utiliser ceci :

$$(x_1+g)(x_2+f)=x_1x_2+x_1f+x_2g+fg, \tag{10.479}$$

mais en mettant les bons coefficients pour reproduire ce que nous avons dans (10.478d) :

$$(2m_{12}+2g)(x_2+\frac{f}{m_{12}})-\frac{2fg}{m_{12}}=2m_{12}x_1x_2+2x_1f+2x_2g. \tag{10.480}$$

Cela pour dire que

$$q(x)=2(m_{12}x_1+g)(x_2+\frac{f}{m_{12}})-\frac{2fg}{m_{12}}+T \tag{10.481}$$

où $-2fg/m_{12}+T$ est une forme quadratique de $x_3,\dots,x_{n+1}$, c'est-à-dire de $n-1$ variables. L'hypothèse de récurrence nous donne des formes linéaires $(l_i)_{i=3,\dots,n+1}$ telles que

$$\frac{2fg}{m_{12}}+T=\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_i l_i(x)^2. \tag{10.482}$$

Nous pouvons donc déjà écrire

$$q(x)=2l_1'(x)l_2'(x)+\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_i l_i(x)^2 \tag{10.483}$$

où

- Les formes l_i avec $i\geqslant 3$ ne dépendent pas de x_1 et x_2, et sont donc indépendantes de l_1 et l_2.
- La forme l_1' ne dépend pas de x_2,
- La forme l_2' ne dépend pas de x_1.

Ce sont donc $n+1$ formes linéaires indépendantes. Le seul problème résiduel est que les formes l_1' et l_2' arrivent en produit l'une de l'autre. Nous en définissons donc deux de plus :

$$\begin{aligned}l_1(x)&=\frac{1}{2}(l_1'+l_2')\\ l_2(x)&=\frac{1}{2}(l_1'-l_2'),\end{aligned} \tag{10.484}$$

qui sont linéairement indépendantes l'une de l'autre et indépendantes des l_i ($i\geqslant 3$). Au final,

$$q(x)=l_1(x)^2+l_2(x)^2+\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_i l_i(x)^2. \tag{10.485}$$

(4) **Si $m_{ii}=0$ et $m_{12}=0$ et $m_{kl}\neq 0$ avec $k<l$** Nous considérons la permutation

$$\begin{aligned}\sigma\colon\{1,\dots,n+1\}&\to\{1,\dots,n+1\}\\ i&\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } i=k\\ 2 & \text{si } i=l\\ k & \text{si } i=1\\ l & \text{si } i=2\\ i & \text{sinon,}\end{cases}\end{aligned} \tag{10.486}$$

c'est-à-dire que σ permute 1 et k ainsi que 2 et l. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned}s\colon\mathbb{R}^{n+1}&\to\mathbb{R}^{n+1}\\ e_i&\mapsto e_{\sigma(i)}.\end{aligned} \tag{10.487}$$

Nous allons un peu considérer $q\circ s$, pour changer :

$$(q\circ s)(x)=\sum_{i,j}m_{ij}s(x)_is(x)_j=\sum_{ij}x_{\sigma(i)}x_{\sigma(j)}. \tag{10.488}$$

EQooLVAWooAirEzF

parce que $s(x)_i = x_{\sigma(i)}$.

Utilisons un petit abus de notation pour considérer

$$\begin{aligned}\sigma\colon \{1,\dots,n+1\}\times\{1,\dots,n+1\} &\to \{1,\dots,n+1\}\times\{1,\dots,n+1\}\\ (i,j) &\mapsto \big(\sigma(i),\sigma(j)\big).\end{aligned} \tag{10.489}$$

Cela est une bijection ; nous pouvons utiliser le lemme 2.129 pour permuter les termes dans (10.488) :

$$(q\circ s)(x) = \sum_{ij} m_{\sigma(i)\sigma(j)}x_{\sigma\sigma(i)}x_{\sigma\sigma(j)} \tag{10.490a}$$

$$= \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j \tag{10.490b}$$

EQooPCTCooFnMWat

où nous avons posé $a_{ij} = m_{\sigma(i)\sigma(j)}$ et utilisé le fait que $\sigma = \sigma^{-1}$. Le point intéressant de l'histoire est que dans (10.490b), $a_{12} = m_{kl} \neq 0$. La forme $q\circ s$ est donc dans le cas déjà traité et il existe des formes linéaires l'_i telles que

$$(q\circ s)(x) = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i l'_i(x)^2. \tag{10.491}$$

En évaluant cela en $s(x)$, et en tenant compte de $s = s^{-1}$, nous trouvons

$$q(x) = \sum_i \alpha_i (l_i\circ s)(x)^2, \tag{10.492}$$

de telle sorte que $l_i = l'_i\circ s$ soit la réponse à notre théorème.

□

10.12.9 Orthogonalité pour une forme bilinéaire

PROPooYXMMooYIuGRd

Proposition 10.243 ([354]).
Soient un espace vectoriel $(E,\mathbb{K})$ et une forme quadratique[92] q. Une base de E est q-orthogonale[93] si et seulement si la matrice de q dans cette base est diagonale.

Démonstration. La matrice de q est donnée par $Q_{ij} = b(e_i,e_j)$. Donc oui, cette matrice est diagonale si et seulement si les e_i sont orthogonaux. □

PROPooRERSooFHwWtB

Proposition 10.244 ([1]).
Si b est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et si q est la forme quadratique associée, alors il existe une base q-orthogonale.

Les vecteurs de cette base ne sont pas isotropes[94]

Démonstration. Nous considérons une base $\{e_i\}$ de E. Vu que b est symétrique, elle est donnée par une matrice symétrique selon la formule $b(x,y) = \sum_{kl} S_{kl}x_ky_l$. Le théorème 10.228 permet de diagonaliser S par une matrice orthogonale : il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale A telles que $S = A^tDA$.

Nous posons alors $s_i = Ae_i$, et nous vérifions que c'est bon. Nous avons :

$$b(s_i,s_j) = \sum_{kl} S_{kl}(s_i)_k(s_j)_l \tag{10.493a}$$

$$= \sum_{kl} S_{kl}(Ae_i)_k(Ae_j)_l \tag{10.493b}$$

$$= \sum_{kl} S_{kl}A_{ki}A_{lj} \tag{10.493c}$$

$$= \sum_{kl} (A^t)_{ik}S_{kl}A_{lj} \tag{10.493d}$$

$$= D_{ij}. \tag{10.493e}$$

Vu que b n'est pas dégénérée, les éléments diagonaux de D ne sont pas nuls. Donc les vecteurs s_i vérifient $b(s_i,s_i)\neq 0$. □

[92] Définition 10.121.
[93] Définition 10.143.
[94] Définition 10.139.

PROPooZYISooQZNgeo

Proposition 10.245.
Soit une forme quadratique q. Si une base (e_i) de E est q-orthogonale, alors $\mathcal{B} = \{e_i \text{ tel que } q(e_i) = 0\}$ est une base de $\ker(q)$.

Démonstration. Nous considérons un vecteur de base e_j, et nous montrons que $q(e_j) = 0$ si et seulement si $e_j \in \ker(q)$. Nous savons par la proposition 10.243 que la matrice de q dans la base (e_i) est diagonale et que les éléments diagonaux sont les $q(e_i)$. Soit $K = \{i \text{ tel que } q(e_i) = 0\}$.

(1) $\underline{\text{Span}\{e_i\}_{i\in K} \subset \ker(q)}$ Si $x = \sum_{i\in K} x_i e_i$, alors

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{i,j\in K} |x_i|^2 b(e_i,e_j) = \sum_{i,j\in K} |x_i|^2 \delta_{ij} q(e_i) = 0 \tag{10.494}$$

parce que $q(e_i) = 0$ dès que $i \in K$.

(2) $\underline{\ker(q) \subset \text{Span}\{e_i\}_{i\in K}}$ Soit $x \in \ker(q)$ et écrivons-le sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Nous avons

$$0 = q(x) = \sum_i |x_i|^2 q(e_i). \tag{10.495}$$

Mais $|x_i|^2 \geqslant 0$ et $q(e_i) \geqslant 0$, donc si $q(e_i) \neq 0$, alors $x_i = 0$. Donc les seules composantes non nulles de x sont celles sur lesquelles q s'annule. En d'autres termes $x = \sum_i x_i e_i \in \text{Span}\{e_i\}_{i\in K}$.

□

THOooIDMPooIMwkqB

Théorème 10.246 ([354, 1])**.**
Toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie admet une base formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux (pour la forme considérée).

Démonstration. Nous considérons la base $\{l_i\}$ de E^* donnée par la réduction de Gauss (théorème 10.242). La forme quadratique q s'écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i(x)^2. \tag{10.496}$$

La base préduale[95] $\{e_i\}$ de $\{l_i\}$ répond aux conditions. Pour le vérifier, nous considérons la forme bilinéaire associée à q par l'identité de polarisation 10.137 :

$$b(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\big(q(e_i) + q(e_j) - q(e_i - e_j)\big). \tag{10.497}$$

Vu que $l_k(e_i) = \delta_{ki}$, nous avons

$$q(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l_k(e_i)^2 = \alpha_i. \tag{10.498}$$

En utilisant la linéarité,

$$\begin{aligned} q(e_i - e_j) &= \sum_k \alpha_k l_k(e_i - e_j)^2 && \text{(10.499a)}\\ &= \sum_k \alpha_k (\delta_{ki} - \delta_{kj})^2 && \text{(10.499b)}\\ &= \sum_k \alpha_k (\delta_{ki} + \delta_{kj} - 2\delta_{ki}\delta_{kj}) && \text{(10.499c)}\\ &= \alpha_i + \alpha_j - 2\delta_{ij}\alpha_i. && \text{(10.499d)} \end{aligned}$$

Donc

$$b(e_i,e_j) = \delta_{ij}\alpha_i. \tag{10.500}$$

Les vecteurs $\{e_i\}$ sont donc bien deux à deux q-orthogonaux. □

Notons qu'en l'absence de notion de racine carrée sur $\mathbb{K}$, il n'est pas possible de considérer $\sqrt{\alpha_i}$ et donc de base q-orthonormée.

[95] Définition, existence, unicité dans la proposition 6.148.

PROPooPMYCooAAtHsB

Proposition 10.247 ([1]).
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est telle que $\det(A) = 0$, alors il existe des matrices de manipulation de lignes et de colonnes[96] *$G_1,\dots,G_p$ et $H_1,\dots,H_q$ telles que $G_1\dots G_N\, A\, H_1\dots H_q$ ait une colonne de zéros.*

Démonstration. Si la matrice A n'a pas de colonnes de zéros, il existe un i tel que $A_{i1} \neq 0$. Nous utilisons une matrice de permutation de ligne 1 et i :

$$\big(S(n,i,1)A\big)_{11} \neq 0. \tag{10.501}$$

Nous notons s ce nombre. Alors en multipliant la première ligne par $1/s$ nous avons un 1 dans la première case :

$$\big(T(n,1,1/s)S(n,i,1)A\big)_{11} = 1. \tag{10.502}$$

Pour la suite nous n'allons plus être aussi explicite.

Maintenant, en faisant des combinaisons entre la première colonne et les autres, nous pouvons annuler toutes les autres entrées 1_{1i}. Tout ça pour dire qu'il existe des matrices $G_1,\dots,G_{p'}$ et $H_1,\dots,H_{q'}$ telles que

$$G_1\dots G_{p'}AH_1\dots H_{q'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{10.503}$$

Si $A^{(1)}$ ne possède pas de colonnes de zéros, nous pouvons continuer.

Si nous parvenons à faire n pas de la sorte, alors nous aurions

$$G_1\dots G_pAH_1\dots H_q = \delta, \tag{10.504}$$

et donc, par le lemme 6.100, nous aurions $\det(G_1\dots G_p)\det(A)\det(H_1\dots H_q) = 1$, ce qui est impossible lorsque $\det(A) = 0$. Nous en concluons que le processus doit s'arrêter et qu'une des matrices $A^{(k)}$ doit avoir une colonne de zéros[97]. □

PROPooVUDJooLWjmSI

Proposition 10.248.
Une matrice dont le déterminant est nul n'est pas inversible.

Démonstration. Par la proposition 10.247, il existe des matrices de manipulation de lignes et de colonnes $G_1,\dots,G_p$ telles que la matrice $G_1\dots G_p\, A\, H_1\dots H_q$ ait une colonne de zéros. De là, la proposition 6.109 implique que la matrice

EQooQGXBooXxFQtb

$$G_1\dots G_pAH_1\dots H_q \tag{10.505}$$

n'est pas inversible. Vu les déterminants des matrices G_i, la proposition 6.108 implique que $G_1\dots G_p$ et $H_1\dots H_q$ sont inversibles. Si A était inversible, tout le produit serait inversible, ce qui est faux. □

THOooSNXWooSRjleb

Théorème 10.249.
Une matrice sur un corps commutatif est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. Dans un sens c'est la proposition 6.108 et dans l'autre sens c'est la proposition 10.248. □

PROPooHQNPooIfPEDH

Proposition 10.250.
Soient des matrices A et B sur un corps commutatif. Alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{10.506}$$

Démonstration. Les propositions 6.112 et 6.113 ont déjà fait une grosse partie du travail. Il ne reste que le cas où $\det(A) = \det(B) = 0$.

Dans ce cas, les matrices A et B ne sont pas inversibles (proposition 10.249). Le produit AB n'est alors pas inversible non plus[98]. La proposition 10.249, utilisée dans le sens inverse, nous dit alors que $\det(AB) = 0$.

Au final dans le cas $\det(A) = \det(B) = 0$ nous avons $0 = \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$. □

Faisons maintenant le cas général des manipulations de lignes et colonnes.

[96] Les opérations élémentaires sur les lignes sont résumées en 6.98.
[97] En réalité, le processus tel que nous l'avons décrit ne s'arrête que lorsque la première colonne est remplie de zéros.
[98] Citez le lemme 6.106 si vous voulez justifier ça.

PROPooSLLGooSZjQrv

Proposition 10.251.
Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. La matrice B obtenue par la substitution simultanée

$$C_j \to \sum_k a_{kj} C_k \tag{10.507}$$

a pour déterminant

$$\det(B) = \det(a)\det(A). \tag{10.508}$$

Démonstration. L'élément B_{ij} de la matrice B est une combinaison linéaire de tous les éléments de sa ligne :

$$B_{ij} = \sum_k a_{kj} A_{ik} = (Aa)_{ij}. \tag{10.509}$$

Donc $B = Aa$. La proposition 10.250 nous dit alors que $\det(B) = \det(a)\det(A)$. □

ThoQFVsBCk

Théorème 10.252 (de Sylvester[347])**.**
Soit Q une forme quadratique réelle de signature[99] *(p, q) sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant p + q)$. Alors pour toute base Q-orthogonale $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^{p+q}$ nous avons les propriétés suivantes.*

ITEMooCFQHooRWfmpT

(1) Les nombres p et q sont donnée par

SUBEQooONWLooNsgmQY
$$p = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} \tag{10.510a}$$
SUBEQooFKXMooOYwvKR
$$q = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) < 0\}. \tag{10.510b}$$

ITEMooWLPVooSTOOjL

(2) Si A est la matrice de Q dans une base, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_q & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}. \tag{10.511}$$

ITEMooGOHCooPrNQwm

(3) Le rang de Q est $p + q$.

Démonstration. Soit F un sous-espace de dimension maximale q sur lequel Q est définie négative. Le fait que la dimension de F soit q est la définition 10.159 de la signature. Nous notons $F^\perp$ sont Q-orthogonal, c'est-à-dire que

$$F^\perp = \{v \in E \text{ tel que } B(v, x) = 0 \, \forall x \in F\}. \tag{10.512}$$

Le lemme 10.135 nous assure que $E = F \oplus F^\perp$.

Le théorème 10.246 sur l'existence de bases Q-orthogonales nous permet de considérer une base Q-orthogonale de F et une de $F^\perp$. En réunissant les deux, nous avons une base de E. Nous la notons $\{f_1, \dots, f_n\}$ avec

- La partie $\{f_1, \dots, f_q\}$ est une base de F,
- La partie $\{f_{q+1}, \dots, f_n\}$ est une base de $F^\perp$,
- Remarquez cependant qu'il n'est pas dit que $n = q + p$.

Notons que pour $i > q$, nous avons $Q(f_i) \geqslant 0$, sinon la maximalité de F serait contredite par $\text{Span}\{f_1, \dots, f_q, f_i\}$.

Cela prouve que

$$\text{Card}\{i \text{ tel que } Q(f_i) > 0\} = p. \tag{10.513}$$

Le lemme 10.162 nous dit alors que

$$\text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(f_i) > 0\} = p. \tag{10.514}$$

C'est l'égalité (10.510b). L'égalité (10.510a) se prouve de la même façon, en prenant F maximal pour la propriété que Q y est strictement définie positive.

Le point (1) est prouvé.

Dans une base Q-orthogonale, la matrice de Q est diagonale, et contient sur la diagonale les valeurs de $Q(e_i)$. Parmi celles-ci, on en a p strictement positives et q strictement négatives. Les $n - p - q$ autres

[99] Définition 10.159.

sont nulles. Vu que Q est à valeur réelle, nous avons une notion de racine carré, et nous pouvons considérer $e_i/\sqrt{|Q(e_i)|}$ au lieu de e_i. De cette façon, $Q(e_i)$ est normalisé. Avec ça, la matrice de Q est

$$D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.515}$$

Nous venons de prouver qu'il existe une base $\{e_i\}$ dans laquelle la matrice de Q est (10.515). Si A est la matrice de Q dans une base quelconque $\{f_i\}$ et si P est la matrice de changement de base $f_j = \sum_i P_{ij}e_i$, la proposition 10.147 donne $D = P^tAP$.

Le point (2) est prouvé.

Pour (3), la proposition 10.161 nous permet de calculer le rang de Q par le rang de sa matrice dans n'importe quelle base. Nous choisissons la base qui donne la matrice (10.515). Le rang est alors bien $p+q$. □

10.12.10 Équivalence de formes quadratiques

DEFooOLWYooMwhMJp

Définition 10.253 (Équivalence de forme quadratique[340])**.**
*Deux formes quadratiques q et q' sont **équivalentes** si il existe une application linéaire inversible ϕ telle que $q' = q \circ \phi$.*

PROPooBWXMooLsgyKm

Proposition 10.254 ([347])**.**
Deux formes quadratiques sont équivalentes[100] *si et seulement si elles ont même signature*[101]*.*

Démonstration. En deux parties, et en utilisant tout le temps le théorème de Sylvester 10.252. Dans la suite nous allons toujours noter de la même façon les formes quadratiques, les applications linéaires et leurs matrices correspondantes.

(1) $\Rightarrow$ Soient deux formes quadratiques équivalentes q et q'. Nous avons une application linéaire ϕ telle que $q' = q \circ \phi$. Soit une matrice inversible P telle que

$$P^tAP = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{q'} & & \\ & \mathbb{1}_{p'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.516}$$

où (p', q') est la signature de q'. Par équivalence et par le changement de base de la proposition 10.146, nous avons $q' = \phi^t q \phi$, et donc

$$P^tq'P = (\phi P)^t q(\phi P). \tag{10.517}$$

Dans la base des $(\phi \circ P)e_i$, la matrice de q est (10.516). Donc le point 10.252(1) du théorème de Sylvester montre que la signature de q est également (p', q').

(2) $\Rightarrow$ Nous supposons que q et q' ont la même signature. Il existe donc des matrices inversibles P et Q telles que $P^tq'P$ et Q^tqQ aient la même forme (celle de la matrice (10.516)). Autrement dit,

$$q' \circ P = q \circ Q, \tag{10.518}$$

d'où nous déduisons que $q' = q \circ Q \circ P^{-1}$ parce que P est inversible. Comme l'application $Q \circ P^{-1}$ est inversible, les formes quadratiques q et q' sont équivalentes.

□

10.12.11 Diagonalisation

DEFooGVGGooWQEIET

Lemme-Définition 10.255.
Soit une forme quadratique[102] *q sur l'espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$. Soit A la matrice de q dans la base $\{e_i\}$ et B sa matrice dans la base $\{f_\alpha\}$. Nous supposons que le changement de base est orthogonal.*

Alors les valeurs propres de A et B sont les mêmes.

*Ces valeurs sont les **valeurs propres** de q.*

[100] Définition 10.253.
[101] Définition 10.159.
[102] Définition 10.121.

Démonstration. Nous nous rappelons de la définition 10.144 de la matrice associée à q, et à la proposition 10.147 qui parle de changement de base : $B = Q^tAQ$ où Q est orthogonale.

Soit un vecteur propre v de A, de valeur propre λ. Alors nous prouvons que Q^tv est un vecteur propre pour B, de même valeur propre λ. En effet,

$$BQ^tv = Q^tAQQ^tv = Q^tAv = \lambda Q^tv \tag{10.519}$$

où nous avons utilisé $QQ^t = \mathbb{1}$ et $Av = \lambda v$. □

PropFWYooQXfcVY

Proposition 10.256.
Dans la base de diagonalisation de sa matrice associée, une forme quadratique a la forme

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{10.520}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice associée à q.

Démonstration. Soit q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée. Si $\{f_i\}$ est une base de diagonalisation[103] de la matrice de b alors dans cette base nous avons

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{ij} x_ix_jb(f_i,f_j) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{10.521}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice de b. □

Notons que si nous choisissons une autre base de diagonalisation, les λ_i ne changement pas (à part l'ordre éventuellement).

Cela justifie la définition pour dire que nous nous permettrons de parler des **valeurs propres** d'une forme quadratique comme étant les valeurs propres de la matrice associée.

Le théorème 10.246 a déjà donné une base orthogonale pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel $(E,\mathbb{K})$ de dimension finie. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons en donner une preuve basée sur le théorème spectral, c'est la proposition 10.257.

PROPooUKRUooGRIDHt

Proposition 10.257.
Soit une forme bilinéaire symétrique b sur un $\mathbb{R}^n$. Il existe une matrice orthogonale Q telle que

(1) $D = Q^tbQ$ est diagonale

(2) $D(x,y) = b(Qx,Qy)$ pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Il existe une base $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ qui est b-orthogonale.

Dans cet énoncé, nous mélangeons sans vergogne les formes et les matrices, en supposant qu'une base soit fixée[104]*. Par exemple*

$$D(x,y) = \sum_{ij} D_{ij}x_iy_j. \tag{10.522}$$

Démonstration. Pour la matrice diagonale, c'est le théorème spectral 10.228(2) qui joue parce que la matrice d'une forme bilinéaire symétrique est symétrique (c'est vu de la définition (10.306)).

Pour le reste c'est un calcul :

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \sum_{ijkl} Q^t_{ik}b_{kl}Q_{lj}x_iy_j && (10.523a)\\ &= \sum_{ijkl} b_{kl}(Q_{ki}x_i)(Q_{lj}y_j) && (10.523b)\\ &= \sum_{kl} b_{kl}(Qx)_k(Qy)_l && (10.523c)\\ &= b(Qx,Qy). && (10.523d) \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le produit matrice fois vecteur donné par (6.95).

En ce qui concerne l'existence d'une base b-orthogonale, vu que D est diagonale, nous avons, pour $i \neq j$ que $D(e_i,e_j) = 0$. Donc en posant $f_i = Qe_i$, nous trouvons

$$0 = D(e_i,e_j) = b(Qe_i,Qe_j) = b(f_i,f_j). \tag{10.524}$$

La base $(Qe_i)_{i=1,\dots,n}$ est donc b-orthogonale. □

[103] Qui existe parce que la matrice est symétrique, théorème 10.228.

[104] Autrement dit, si vous avez en tête d'utiliser cette proposition pour $\mathbb{R}^n$ c'est bon ; mais sinon vous devez choisir une base et considérer toutes les matrices dans cette base.

10.13 Fonctions

Sect_fonctions

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et une fonction f de E dans F. Il est maintenant facile de définir les notions de limites et de continuité pour de telles fonctions en copiant les définitions données pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et en changeant simplement les valeurs absolues par les normes sur E et F.

La proposition suivante explicite la définition 9.151 dans le cas où la topologie est donnée par des boules.

PropHOCWooSzrMjl

Proposition 10.258 (Caractérisation de la limite)**.**
Soient des espaces vectoriels normés. Soit $f\colon E \to F$ une fonction de domaine $\mathrm{Dom}(f) \subset E$ et soit a un point d'accumulation de $\mathrm{Dom}(f)$.

(1) Si F est séparé[105] et si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

ITEMooSHKNooStKGKH

(2) La fonction f admet une limite en $a \in E$ si et seulement si il existe un élément $\ell \in F$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D = \mathrm{Dom}(f)$,

$$0 < \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon. \tag{10.525}$$

EqDefLimzxmasnbV

*Si la limite existe et est unique, nous écrivons $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et nous disons que ℓ est la **limite** de f lorsque x tend vers a.*

Démonstration. L'unicité est la proposition 9.154.

(1) $\Rightarrow$ La définition 9.151 nous assure de l'existence d'un élément ℓ tel que pour tout voisinage S de ℓ, il existe un ouvert U autour de a tel que $f\big(U \cap D \setminus \{a\}\big) \subset S$.

Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $S = B(\ell, \epsilon)$. Il existe un voisinage U de a tel que $f\big(U \cap D \setminus \{a\}\big) \subset B(\ell, \epsilon)$. Puisque U est un voisinage de a, il contient une boule centrée en a (c'est dans la définition 9.158 de la topologie métrique). Soit donc $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset U$.

Un élément de D qui est dans $B(0, \delta) \setminus \{a\}$ est un élément de D qui vérifie $0 < \|x - a\| < \delta$. Nous avons donc, pour $x \in D$ que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \epsilon. \tag{10.526}$$

(2) $\Leftarrow$ C'est le même raisonnement.

□

Remarque 10.259.
Le fait que nous limitions la formule (10.525) aux x dans le domaine de f n'est pas anodin. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, de domaine $|x| \geqslant 2$. Nous avons

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 4} = 0. \tag{10.527}$$

Nous ne pouvons pas dire que cette limite n'existe pas en justifiant que la limite à gauche n'existe pas. Les points $x < 2$ sont hors du domaine de f et ne comptent dons pas dans l'appréciation de l'existence de la limite.

Vous verrez plus tard que ceci provient de la topologie induite de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $[2, \infty[$.

10.14 Sous-espaces caractéristiques

Lorsqu'un opérateur n'est pas diagonalisable, les valeurs propres jouent quand même un rôle important.

DefFBNIooCGbIix

Définition 10.260.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ nous définissons

$$F_\lambda(f) = \{v \in E \text{ tel que } (f - \lambda\mathbb{1})^n v = 0, n \in \mathbb{N}\} \tag{10.528}$$

*et nous appelons cet ensemble un **sous-espace caractéristique** de f.*

L'espace $F_\lambda(f)$ est l'ensemble de nilpotence de l'opérateur $f - \lambda\mathbb{1}$ et

[105] C'est le cas en dimension finie et en particulier pour $\mathbb{R}^n$. En dimension infinie, il faut être très prudent.

LemBLPooHMAoyJ

Lemme 10.261.
L'ensemble $F_\lambda(f)$ est non vide si et seulement si λ est une valeur propre de f. L'espace $F_\lambda(f)$ est invariant sous f.

Démonstration. Si $F_\lambda(f)$ est non vide, nous considérons $v \in F_\lambda(f)$ et n le plus petit entier non nul tel que $(f-\lambda)^n v = 0$. Alors $(f-\lambda)^{n-1}v$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ. Réciproquement, si v est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, alors $v \in F_\lambda(f)$.

En ce qui concerne l'invariance, remarquons que f commute avec $f-\lambda\mathbb{1}$. Si $x \in F_\lambda(f)$ il existe n tel que $(f-\lambda\mathbb{1})^n x = 0$. Nous avons aussi

$$(f-\lambda\mathbb{1})^n f(x) = f\big((f-\lambda\mathbb{1})^n x\big) = 0, \tag{10.529}$$

par conséquent $f(x) \in F_\lambda(f)$. □

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas vrai que toute matrice à coefficient réel est diagonalisable, même pas sur $\mathbb{C}$. La raison est qu'une telle matrice peut très bien avoir des valeurs propres multiples.

ExBRXUooIlUnSx

Exemple 10.262.
Le théorème 10.220 nous donne une façon simple de trouver des matrices non diagonalisables sur $\mathbb{C}$: il suffit que le polynôme minimal ne soit pas scindé à racines simples. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.530}$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi_A = (1-X)^2$. Ce polynôme n'a manifestement pas des racines simples. Nous pouvons faire le calcul explicite pour montrer que A n'est pas diagonalisable. D'abord l'unique valeur propre de A est 1 et nous pouvons sans peine résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{10.531}$$

qui revient au système

$$\begin{cases} x+y = x & \text{(10.532a)} \\ y = y. & \text{(10.532b)} \end{cases}$$

La première équation donne directement $y = 0$. Le seul espace propre est de dimension 1 et est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. △

Nous donnons maintenant un exemple un peu plus avancé de matrice réelle non diagonalisable, qui montre la multiplicité algébrique et géométrique d'une racine d'un polynôme caractéristique.

RemBOGooCLMwyb

Remarque 10.263.
Considérons l'endomorphisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & a & \gamma \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \tag{10.533}$$

avec $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\alpha \neq 0$, β et γ sont des nombres complexes quelconques. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_f(X) = (a-X)^2(b-X), \tag{10.534}$$

et les valeurs propres sont donc a et b. Nous trouvons les vecteurs propres pour la valeur a en résolvant

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & a & \gamma \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}. \tag{10.535}$$

La troisième équation est $bz = az$ qui oblige $z = 0$ parce que $a \neq b$ et $0 \neq a$. La première est $ax + \alpha y = ax$ qui implique $y = 0$ parce que $\alpha \neq 0$. Enfin la première équation se réduit à $ax = ax$ qui ne donne pas de contraintes sur x. En résumé : l'espace propre $E_a(f)$ est réduit à une seule dimension générée par $(1,0,0)$.

De la même façon l'espace propre correspondant à la valeur propre b est donné par le système

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ & a & \gamma \\ & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx \\ by \\ bz \end{pmatrix} \tag{10.536}$$

La seconde équation donne $ay + \gamma z = by$, et donc

$$y = \frac{\gamma}{b-a} z. \tag{10.537}$$

La première équation est $ax + \alpha y + \beta z = bx$ qui donne

$$x = \frac{1}{b-a}(\alpha y + \beta z). \tag{10.538}$$

En y remettant la valeur déjà trouvée de y, nous trouvons que l'espace propre pour la valeur propre b est engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b-a}\left(\beta + \frac{\alpha\gamma}{b-a}\right) \\ \frac{\gamma}{b-a} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10.539}$$

Vu que nous savons que a et b sont les seules valeurs propres et que nous venons de voir que leurs espaces propres sont de dimension 1, il n'y a donc pas trois vecteurs propres linéairement indépendants, et l'opérateur f n'est pas diagonalisable.

Par contre nous pouvons voir que $(f - a\mathbb{1})^2 e_2 = 0$. En effet :

$$(f - a\mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10.540}$$

de telle sorte que le vecteur $(0, 1, 0)$ est également dans l'espace caractéristique $F_a(f)$.

Dans cet exemple, la multiplicité algébrique de la racine a du polynôme caractéristique vaut 2 tandis que sa multiplicité géométrique vaut seulement 1.

10.14.1 Théorèmes de décomposition

ThoSpectraluRMLok

Théorème 10.264 (Théorème spectral, décomposition primaire)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ et $f \in \mathrm{End}(E)$. Alors

EqCTFHooBSGhYK
$$E = F_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus F_{\lambda_k}(f) \tag{10.541}$$

où la somme est sur les espaces caractéristiques engendrés par les valeurs propres distinctes de f.

Les projecteurs sur les espaces caractéristiques forment un système complet et orthogonal.

Démonstration. Soit P le polynôme caractéristique de f et une décomposition

$$P = (f - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (f - \lambda_r)^{\alpha_r} \tag{10.542}$$

en facteurs irréductibles. Par le théorème des noyaux (10.90) nous avons

EqDeFVSaYv
$$E = \ker(f - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \ker(f - \lambda_r)^{\alpha_r}. \tag{10.543}$$

Les projecteurs sont des polynômes en f et forment un système orthogonal. Il nous reste à prouver que $\ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} = F_{\lambda_i}(f)$. L'inclusion

EqzmNxPi
$$\ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} \subset F_{\lambda_i}(f) \tag{10.544}$$

est évidente. Nous devons montrer l'inclusion inverse.

(1) $F_{\lambda_i}(f) \cap F_{\lambda_j}(f) = 0$

Soit $v \in F_{\lambda_i}(f) \cap F_{\lambda_j}(f)$. Le fait que $v \in F_{\lambda_i}(f)$ implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f - \lambda_i)^n v \neq 0$ et $(f - \lambda_i)^{n+1} v = 0$ (éventuellement $n = 0$ si v est un vecteur propre). Posons $v_1 = (f - \lambda_i)^n v$.

Étant donné que $(f - \lambda_i)$ commute avec $(f - \lambda_j)$, ce v_1 est encore dans $F_{\lambda_j}(f)$. En effet, si k est tel que $(f - \lambda_j)^k v = 0$, alors

$$(f - \lambda_j)^k v_1 = (f - \lambda_j)^k (f - \lambda_i)^n v = (f - \lambda_i)^n (f - \lambda_j)^k v = 0. \tag{10.545}$$

Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $(f-\lambda_j)^m v_1 \neq 0$ et $(f-\lambda_j)^{m+1}v_1 = 0$. En posant $w = (f-\lambda_j)^m v_1$, nous avons

$$\begin{cases} (f-\lambda_i)w = (f-\lambda_j)^m (f-\lambda_i)^{n+1} v = 0 & (10.546a)\\ (f-\lambda_j)w = (f-\lambda_j)^{m+1} v_1 = 0. & (10.546b) \end{cases}$$

Ce w serait donc un vecteur propre simultané pour les valeurs propres λ_i et λ_j. Vu que les espaces propres sont linéairement indépendants, les seules possibilités sont $i = j$ ou $w = 0$.

(2) **Questions de dimension** Étant donné que espaces F_{λ_i} sont en somme directe, la somme de leurs dimensions est au maximum la dimension de E :

$$\sum_i \dim F_{\lambda_i}(f) \leqslant \dim E. \tag{10.547}$$

En tenant compte de l'inclusion (10.544) nous avons même

$$\dim E = \sum_i \dim \ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} \leqslant \sum_i \dim F_{\lambda_i}(f) \leqslant \dim E. \tag{10.548}$$

Vu qu'il y a $\dim(E)$ des deux côtés des inégalités, toutes les inégalités sont des égalités et nous avons

$$\sum_i \dim \ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} = \sum_i \dim F_{\lambda_i}(f). \tag{10.549}$$

EQooQPLMooDXAgZi

L'inclusion (10.544) nous dit qu'il y a une inégalité terme à terme dans les sommes de (10.549). Vu qu'il y a égalité des sommes, il y a en réalité égalité de chacun des termes : $\dim \ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} = \dim F_{\lambda_i}(f)$ et l'égalité des deux espaces de (10.544) :

$$\ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i} = F_{\lambda_i}(f). \tag{10.550}$$

□

Si l'espace vectoriel est sur un corps algébriquement clos, alors les endomorphismes semi-simples[106] sont les endomorphismes diagonaux.

ThoRURcpW

Théorème 10.265 (Décomposition de Dunford)**.**
Soit E un espace vectoriel sur le corps algébriquement clos[107] *$\mathbb{K}$ et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E.*

(1) L'endomorphisme u se décompose de façon unique sous la forme

$$u = s + n \tag{10.551}$$

où s est diagonalisable, n est nilpotent et $[s,n] = 0$[108]*.*

(2) Les endomorphismes s et n sont des polynômes en u et commutent avec u.

ItemThoRURcpWiii

(3) Si notons $\{\lambda_i\}$ les valeurs propres distinctes de u, et $F_{\lambda_i}(u)$ les espaces caractéristiques correspondants, alors les parties s et n sont données par

$$s = \sum_i \lambda_i p_i \tag{10.552a}$$

$$n = \sum_i (s - \lambda_i \mathbb{1}) p_i \tag{10.552b}$$

$p_i \colon E \to F_{\lambda_i}(u)$ est la projection de E sur $F_{\lambda_i}(u)$.

[106] Définition 10.104.
[107] Je crois quo'n peut remplacer l'ypothèse de corps alébriquement clos par une hypothèse de polynôme caractéristique scindé. Écrivez-moi si vous avez une idée à ce propos.
[108] Lorsque a et b sont des opérateurs, la notation $[a,b]$ signifie le commutateur entre a et b, c'est-à-dire $a \circ b - b \circ a$. Dire que $[a,b] = 0$ signifie que $ab = ba$.

Démonstration. Le théorème spectral 10.264 nous indique que

$$E = \bigoplus_i F_{\lambda_i}(f). \tag{10.553}$$

Nous considérons l'endomorphisme s de E qui consiste à dilater d'un facteur λ_i l'espace caractéristique $F_{\lambda_i}(f)$:

$$s = \sum_i \lambda_i p_i \tag{10.554}$$

où $p_i : E \to F_{\lambda_i}(u)$ est la projection de E sur $F_{\lambda_i}(u)$.

Nous allons prouver que $[s, f] = 0$ et $n = f - s$ est nilpotent. Cela impliquera que $[s, n] = 0$.

Si $x \in F_\lambda(f)$, alors nous avons $sf(x) = \lambda f(x)$ parce que $f(x) \in F_\lambda(f)$ tandis que $fs(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Par conséquent f commute avec s.

Pour montrer que $f - s$ est nilpotent, nous en considérons la restriction

$$f - s : F_\lambda(f) \to F_\lambda(f). \tag{10.555}$$

Cet opérateur est égal à $f - \lambda\mathbb{1}$ et est par conséquent nilpotent.

Prouvons à présent l'unicité. Soit $u = s' + n'$ une autre décomposition qui satisfait aux conditions : s' est diagonalisable, n' est nilpotent et $[n', s'] = 0$. Commençons par prouver que s' et n' commutent avec u. En multipliant $u = s' + n'$ par s' nous avons

$$s'u = s'^2 + s'n' = s'^2 + n's' = (s' + n')s' = us', \tag{10.556}$$

par conséquent $[u, s'] = 0$. Nous faisons la même chose avec n' pour trouver $[u, n'] = 0$. Notons que pour obtenir ce résultat nous avons utilisé le fait que n' et s' commutent, mais pas leur propriétés de nilpotence et de diagonalisibilité.

Si $s' + n' = s + n$ est une autre décomposition, s' et n' commutent avec u, et par conséquent avec tous les polynômes en u. Ils commutent en particulier avec n et s. Les endomorphismes s et s' sont alors deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Par la proposition 10.223, ils sont simultanément diagonalisables. Dans la base de diagonalisation simultanée, la matrice de l'opérateur $s' - s = n - n'$ est donc diagonale. Mais $n - n'$ est également nilpotent, en effet si A et B sont deux opérateurs nilpotents,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}. \tag{10.557}$$

Si n est assez grand, au moins un parmi A^k ou B^{n-k} est nul.

Nous savons que $n - n'$ est diagonal et nilpotent. Le seul opérateur diagonal à être nilpotent est l'opérateur nul[109]. Nous en déduisons que $n = n'$. Nous avons alors immédiatement aussi $s = s'$. □

10.266.
Le théorème 14.453 montrera que $A^n x \to 0$ pour tout x si et seulement si $\rho(A) < 1$, mais ça demande un résultat de vitesse comparée entre l'exponentielle et la puissance (lemme 14.451).

Une application de la décomposition de Jordan est l'existence d'un logarithme pour les matrices. La proposition suivante va d'une certaine manière donner un logarithme pour les matrices inversibles complexes. Dans le cas des matrices réelles m telles que $\|m - \mathbb{1}\| < 1$, nous donnerons au lemme 17.171 une formule pour le logarithme sous forme d'une série ; ce logarithme sera réel.

10.14.2 Valeurs singulières

DEFooZSCYooQnBzix

Définition 10.267.
*Soit M une matrice $m \times n$ sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un nombre réel σ est une **valeur singulière** de M si il existe des vecteurs unitaires $u \in \mathbb{K}^m$, $v \in \mathbb{K}^n$ tels que*

$$Mv = \sigma u \tag{10.558a}$$

$$M^*u = \sigma v. \tag{10.558b}$$

THOooSCOLooSKlVvd

Théorème 10.268 (Décomposition en valeurs singulières)**.**
Soit $M \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Alors M se décompose en

$$M = ADB \tag{10.559}$$

où il existe deux matrices unitaires $A \in \mathrm{U}(m \times m)$, $B \in \mathrm{U}(n \times n)$ et une matrice (pseudo)diagonale $D \in \mathbb{M}(m \times n)$ tels que

[109] Parce qu'une puissance d'un opérateur diagonal est diagonal.

(1) $A \in \mathrm{U}(m \times m)$, $B \in \mathrm{U}(n \times n)$ *sont deux matrices unitaires,*

(2) D *est (pseudo)diagonale,*

(3) les éléments diagonaux de D *sont les valeurs singulières de* M*,*

(4) le nombre d'éléments non nuls sur la diagonale de D *est le rang*[110] *de* M*.*

Corolaire 10.269.
Soit $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$*. Il existe un isomorphisme* $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *tel que* fM *soit autoadjoint.*

Démonstration. Si $M = ADB$ est la décomposition de M en valeurs singulières, alors nous pouvons prendre $f = \overline{B}^t A^{-1}$ qui est une matrice inversible. Pour la vérification que ce f répond bien à la question, ne pas oublier que D est réelle, même si M ne l'est pas. □

10.15 Extension du corps de base

SECooAUOWooNdYTZf

Nous avons discuté dans la section 8.4 de ce qui arrive au corps lorsqu'on l'étend. Dans cette section nous allons étudier ce qui arrive aux applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels lorsque nous étendons le corps $\mathbb{K}$ en un corps $\mathbb{L}$.

Soient $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) et une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Soient E et F, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et entrons dans le vif du sujet[111].

10.15.1 Extension des applications linéaires

Définition 10.270 ([355])**.**
L'espace vectoriel obtenu par ***extension du corps de base*** *de* E *est l'espace vectoriel*

$$E_{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E. \tag{10.560}$$

Ce dernier est le quotient $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E = (\mathbb{L} \times E)/\sim$ *par la relation d'équivalence*

$$(\lambda, v) \sim \big(a\lambda, \frac{1}{a}v\big) \tag{10.561}$$

pour tout $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$*. Nous noterons* $[\lambda, v]$ *ou* $\lambda \otimes v$ *ou encore* $\lambda \otimes_{\mathbb{K}} v$ *la classe de* (λ, v) *pour la relation d'équivalence* $\sim$ *:*

$$[\lambda, v] = \{(\mu, w) \in \mathbb{L} \times E \text{ tel que } (\mu, w) \sim (\lambda, v)\}. \tag{10.562}$$

Un élément de $E_{\mathbb{L}}$ est de la forme $\sum_k [\lambda_k, v_k]$ avec $\lambda_k \in \mathbb{L}$ et $v_k \in E$. Si $f\colon E \to F$ est une applications linéaire, nous définissons

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{L}}\colon E_{\mathbb{L}} &\to F_{\mathbb{L}} \\ [\lambda, v] &\mapsto [\lambda, f(v)]. \end{aligned} \tag{10.563}$$

EQooYGVHooHYbMHX

Remarque 10.271.
Si deux vecteurs de $E_{\mathbb{L}}$ sont linéairement indépendants pour $\mathbb{K}$, ils ne le sont pas spécialement pour $\mathbb{L}$. Par exemple si $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors $\{1, i\}$ est une partie libre. Mais dans $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la partie $\{1, i\}$ n'est pas libre.

LEMooJIGTooMqiJSN

Lemme 10.272.
Soient trois $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E*,* F *et* G *ainsi que deux applications linéaires* $f\colon E \to F$ *et* $g\colon G \to E$*. Si* $\mathbb{L}$ *est une extension de* $\mathbb{K}$*, alors*

$$f_{\mathbb{L}} \circ g_{\mathbb{L}} = (f \circ g)_{\mathbb{L}}. \tag{10.564}$$

Démonstration. Il suffit de composer la définition (10.563) :

$$\begin{aligned} (f_{\mathbb{L}} \circ g_{\mathbb{L}})\big([\lambda, v]\big) &= f_{\mathbb{L}}\big([\lambda, g(v)]\big) && \text{(10.565a)} \\ &= [\lambda, (f \circ g)(v)] && \text{(10.565b)} \\ &= (f \circ g)_{\mathbb{L}}\big([\lambda, v]\big). && \text{(10.565c)} \end{aligned}$$

□

[110] Définition 6.51.
[111] Le sujet étant le corps étendu.

Nous définissons aussi l'injection canonique

$$\begin{aligned}\tau\colon E &\to E_{\mathbb{L}}\\ v &\mapsto [1,v].\end{aligned} \tag{10.566}$$

PropooWECLooHPzIHw

Proposition 10.273 ([159]).
Injectivité et surjectivité respectées.

(1) L'application $f_{\mathbb{L}}$ est injective si et seulement si f est injective.

(2) L'application $f_{\mathbb{L}}$ est surjective si et seulement si f est surjective.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Si $f_{\mathbb{L}}$ est injective** Supposons pour commencer que $f_{\mathbb{L}}$ soit injective. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ E_{\mathbb{L}} & \xrightarrow[f_{\mathbb{L}}]{} & F_{\mathbb{L}} \end{array} \tag{10.567}$$

est un diagramme commutatif. En effet

$$(\tau\circ f)(v) = [1, f(v)] \tag{10.568}$$

tandis que

$$(f_{\mathbb{L}}\circ\tau)(v) = f_{\mathbb{L}}[1,v] = [1,f(v)]. \tag{10.569}$$

Donc si $f(v)=0$ avec $v\neq 0$ nous aurions $(\tau\circ f)(v)=0$ et donc aussi $(f_{\mathbb{L}}\circ\tau)(v)=0$, alors que $\tau(v)\neq 0$ dans $E_{\mathbb{L}}$.

(2) **Si f est injecive**
Nous supposons que f est injective et que $f_{\mathbb{L}}(\lambda\otimes v) = f_{\mathbb{L}}(\mu\otimes w)$. Cela signifie que $\lambda\otimes f(v) = \mu\otimes f(w)$, ou encore qu'il existe $a\neq 0$ dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\begin{cases} \mu = a\lambda & \text{(10.570a)}\\ f(w) = \dfrac{1}{a}f(v). & \text{(10.570b)}\end{cases}$$

Par linéarité de f, $f(v)=f(aw)$ et par injectivité de f, nous déduisons que $v=aw$. Enfin nous avons l'injectivité de $f_{\mathbb{L}}$ parce que

$$\mu\otimes w = a\lambda\otimes\frac{v}{a} = \lambda\otimes v. \tag{10.571}$$

□

PROPooMHARooUycAts

Proposition 10.274 ([1, 356]).
Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,p}$ une base de E. Alors $\{1\otimes e_i\}_i$ est une base de $E_{\mathbb{L}} = \mathbb{L}\otimes_{\mathbb{K}} E$.

Démonstration. L'espace vectoriel E peut être écrit comme somme directe $E=\bigoplus_i \mathbb{K}e_i$. Si $\lambda\in\mathbb{L}$ et $k\in\mathbb{K}$ nous avons

$$\lambda\otimes ke_i = \frac{\lambda}{k}\otimes e_i = \frac{\lambda}{k}(1\otimes e_i). \tag{10.572}$$

Cela pour introduire l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathbb{L}\otimes_{\mathbb{K}} E &\to \bigoplus_i \mathbb{L}(1\otimes e_i)\\ \sum_k \lambda_k\otimes v_k &\mapsto \oplus_i \sum_k(\lambda_k v_{ik})(1\otimes e_i)\end{aligned} \tag{10.573}$$

où $v_k=\sum_i v_{ik}e_i$ avec $v_{ik}\in\mathbb{K}$, qui représente un isomorphisme de $\mathbb{L}$-espaces vectoriels. La surjectivité est facile. En ce qui concerne l'injectivité, si

$$\sum_i\sum_k(\lambda_k v_{ik})(1\otimes e_i) = 0 \tag{10.574}$$

alors les quantités suivantes sont nulles également :

$$\sum_i \sum_k (\lambda_k v_{ik})(1 \otimes e_i) = \sum_{ik} (\lambda_k \otimes v_{ik} e_i) = \sum_k (\lambda_k \otimes \sum_i v_{ik} e_i) = \sum_k (\lambda_k \otimes v_k). \tag{10.575}$$

La dernière est l'argument de ψ. Le fait qu'il soit nul implique que ψ est injective. □

Remarque 10.275.
Nous n'avons pas dû prouver que chacun des $\lambda_k \otimes v_k$ était nul. Et encore heureux, parce que cela pouvait très bien être faux, puisqu'il y a plusieurs façons de noter un élément de $E_{\mathbb{L}}$ sous la forme de tels termes.

CORooTQGHooIKhNtr

Corolaire 10.276.
La $\mathbb{L}$-dimension de $E_{\mathbb{L}}$ est égale à la $\mathbb{K}$-dimension de E.

10.15.2 Projections

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 10.277
Nous allons définir `proj`$\colon \mathcal{L}(E_{\mathbb{L}}, F_{\mathbb{L}}) \to \mathcal{L}(E, F)$ *en faisant appel à des bases et en prouvant que les quantités définies ne dépendent pas des bases choisies. Il y a surement une façon plus « intrinsèque » de faire.*

Nous savons que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans lequel nous pouvons voir $\mathbb{K}$ comme un sous-espace (lemme 8.60). Dans cette optique nous choisissons dans $\mathbb{L}$ un supplémentaire de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}$ tel que

$$\mathbb{L} = \mathbb{K} \oplus V. \tag{10.576}$$

Nous avons alors naturellement une projection $\texttt{proj}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$.

Soit $\{e_i\}$ une base de E et $\{e_a\}$ une de F. Nous noterons également e_i et e_a les éléments $\tau(e_i)$ et $\tau(e_a)$ correspondants. Grâce à la proposition 10.274, ce sont des bases de $E_{\mathbb{L}}$ et $F_{\mathbb{L}}$. Si la fonction $f\colon E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ s'écrit dans ces bases comme

$$f(e_i) = \sum_a f_{ai} e_a \tag{10.577}$$

alors nous définissons $\texttt{proj}(f)$ par

$$(\texttt{proj}\, f) e_i = \sum_a \texttt{proj}(f_{ai}) e_a. \tag{10.578}$$

EQooSAFRooJnfkLQ

PROPooOEHTooHyjuZQ

Proposition 10.278 ([1]).
L'application `proj` *définie en (10.578) est indépendante du choix des bases.*

Démonstration. Notons que dans ce qui suit, les sommes sur a ou b et celles sur i ou j ne vont pas jusqu'au même indice (dimensions de E et F). De plus nous manipulons deux quantités qui se notent `proj`. La première est la projection $\texttt{proj}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ qui ne dépend que d'un choix de supplémentaire et que nous supposons fixée ici. D'autre part il y a $\texttt{proj}\colon E_{\mathbb{L}} \to E$ qui dépend à priori des bases choisies.

Nous choisissons de nouvelles bases qui sont liées aux anciennes bases par

$$\begin{cases} e'_b = \sum_a B_{ab} e_a & \text{(10.579a)} \\ e'_j = \sum_i A_{ji} e_i. & \text{(10.579b)} \end{cases}$$

Les matrices A et B sont dans $\mathrm{GL}(\mathbb{K})$. Nous allons écrire l'opérateur $\texttt{proj}'$ qui correspond à ces bases et montrer que pour toute application linéaire $f\colon E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ nous avons $\texttt{proj}(f) = \texttt{proj}'(f)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(e'_j) &= \sum_i A_{ji} f(e_i) && \text{(10.580a)} \\ &= \sum_a \sum_b \sum_i A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} e'b && \text{(10.580b)} \\ &= \sum_b \Big(\sum_{ai} A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} \Big) e'b, && \text{(10.580c)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(\texttt{proj}'\, f) e'_j = \sum_b \Big(\texttt{proj} \left(A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} \right) \Big) e'_b. \tag{10.581}$$

EQooUQNBooMWUBhD

Nous calculons maintenant $(\texttt{proj}'\, f)e_j$ en substituant $e_j = \sum_l (A^{-1})_{lj} e'_l$ et en utilisant (10.581), la linéarité de $\texttt{proj}'$ et la $\mathbb{K}$-linéarité de $\texttt{proj}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$:

$$(\texttt{proj}'\, f)\Big(\sum_l (A^{-1})_{lj} e'_l\Big) = \sum_l (A^{-1})_{lj} \sum_b \sum_{ai} \texttt{proj}\left(A_{li} f_{ai} (B^{-1})_{ba}\right) e_b \tag{10.582a}$$

$$= \sum_a \texttt{proj}(f_{aj}) e_a \tag{10.582b}$$

$$= (\texttt{proj}\, f) e_j. \tag{10.582c}$$

Donc $\texttt{proj} = \texttt{proj}'$. □

Note au passage : il y a un abus systématique de notation entre $e_i \in E$ et $\tau(e_i) = 1 \otimes e_i \in E_{\mathbb{L}}$.

REMooBEXGooLgpHzg

Remarque 10.279 ([1])**.**
L'opération $\texttt{proj}\colon \mathcal{L}(E_{\mathbb{L}}, F_{\mathbb{L}}) \to \mathcal{L}(E, F)$ ne dépend pas des bases choisies un peu partout. Mais elle dépend de l'application $\texttt{proj}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ déjà construite. Et celle-là dépend du choix d'un supplémentaire V qui fournit $\mathbb{L} = \mathbb{K} \oplus V$.

Si $\texttt{proj}(\lambda) = 0$ pour un de ces choix, cela n'implique nullement que $\lambda = 0$. Penser à $i \in \mathbb{C}$ si la projection $\texttt{proj}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est l'application $(x + iy) \mapsto x$ parallèle à l'axe des imaginaires.

Par contre si $\texttt{proj}(\lambda) = 0$ pour tout choix de V, alors nous avons bien $\lambda = 0$. Dans la suite nous « fixons » un choix de V générique, et lorsque nous rencontrerons l'égalité $\texttt{proj}(\lambda) = 0$ nous en déduirons $\lambda = 0$.

PROPooPWDKooFNFWRI

Proposition 10.280.
Si $f\colon E \to F$ et si $f_{\mathbb{L}}(e_j) = \sum_a (f_{\mathbb{L}})_{aj} e_a$ et si $f(e_j) = \sum_a f_{aj} e_a$ alors

(1) $\texttt{proj}\, f_{\mathbb{L}} = f$,

ITEMooNMPYooXosGhI

(2) $(f_{\mathbb{L}})_{aj} = f_{aj} \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Nous avons

$$f_{\mathbb{L}}(e_i) = \sum_a f_{ai}(1 \otimes e_a) = \sum_a f_{ai} \tau(e_a), \tag{10.583}$$

donc

$$(\texttt{proj}\, f_{\mathbb{L}}) e_i = \sum_a \texttt{proj}(f_{ai}) e_a = \sum_a f_{ai} e_a = f(e_i). \tag{10.584}$$

Cela prouve que $\texttt{proj}\, f_{\mathbb{L}} = f$.

Par ailleurs,

$$f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = f_{\mathbb{L}}(1 \otimes e_i) = 1 \otimes f(e_i) = \tau\big(f(e_i)\big) = \sum_a f_{ai} \tau(e_a) \tag{10.585}$$

EQooIOTFooNAdkit

alors que par définition,

$$f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = \sum_a (f_{\mathbb{L}})_{ai} \tau(e_a). \tag{10.586}$$

EQooMYSCooPFWATG

Les éléments $\tau(e_a)$ formant une base[112], la comparaison de (10.585) avec (10.586) donne $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai} \in \mathbb{K}$. □

LEMooWZGSooONEnjZ

Lemme 10.281.
Soient des espaces vectoriels E, F et G ainsi que des applications linéaires

(1) $f\colon E \to F$,

(2) $\tilde{h}\colon G_{\mathbb{L}} \to E_{\mathbb{L}}$.

Alors nous avons

$$\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h}) = \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \circ \texttt{proj}(\tilde{h}). \tag{10.587}$$

De même[113] *si $f\colon E \to F$ et $\tilde{h}\colon F_{\mathbb{L}} \to G_{\mathbb{L}}$, alors*

$$\texttt{proj}(\tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}) = \texttt{proj}(\tilde{h}) \circ \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}). \tag{10.588}$$

[112] Encore la proposition 10.274.
[113] Je n'ai pas vérifié cette deuxième partie. Soyez prudent.

Démonstration. Nous considérons une base $\{e_i\}$ de E, une base $\{e_a\}$ de F, et une base $\{e_\alpha\}$ de G. Pour écrire $\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})$ à partir de la définition (10.578) nous commençons par écrire

$$(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})e_\alpha = \sum_a (f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})_{a\alpha} e_a = \sum_{ai} (f_{\mathbb{L}})_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} e_a = \sum_a \Big(\sum_i f_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_a \tag{10.589}$$

où nous avons utilisé le fait que $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai}$. Donc, en utilisant la $\mathbb{K}$-linéarité de $\texttt{proj}$,

$$\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})e_\alpha = \sum_a \sum_i \texttt{proj}\Big(f_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_a = \sum_a \sum_i f_{ai} \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_a. \tag{10.590}$$

EQooZGCGooQsCBQH

D'autre part,

$$\begin{aligned} \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \circ \texttt{proj}(\tilde{h})e_\alpha &= \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \sum_i \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) e_i \\ &= \sum_i \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) \sum_a f_{ai} e_a \\ &= \sum_{ai} \texttt{proj}\Big((\tilde{h})_{i\alpha} \Big) f_{ai} e_a, \end{aligned} \tag{10.591}$$

et c'est égal à (10.590). □

Remarque 10.282.
Nous n'avons en général pas $\texttt{proj}(xy) = \texttt{proj}(x)\texttt{proj}(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{L}$. Par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ avec la projection canonique,

$$\texttt{proj}(i \cdot i) = \texttt{proj}(-1) = -1 \tag{10.592}$$

alors que $\texttt{proj}(i) = 0$.

PROPooHJJCooTXlzdH

Proposition 10.283.
Soient trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G. Nous considérons deux applications linéaires $f\colon E \to F$ et $g\colon E \to G$.

Il existe une application linéaire $h\colon F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si il existe une application linéaire $\tilde{h}\colon F_{\mathbb{L}} \to G_{\mathbb{L}}$ telle que $g_{\mathbb{L}} = \tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}$.

Démonstration. Dans le sens direct, il suffit de poser $\tilde{h} = h_{\mathbb{L}}$ et d'invoquer le lemme 10.272.

Dans le sens inverse, si nous avons $\tilde{h}\colon F_{\mathbb{L}} \to G_{\mathbb{L}}$ tel que $g_{\mathbb{L}} = \tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}$ alors en appliquant $\texttt{proj}$ des deux côtés et en utilisant le lemme 10.281,

$$\texttt{proj}(g_{\mathbb{L}}) = \texttt{proj}(\tilde{h}) \circ \texttt{proj}(f_{\mathbb{L}}) \tag{10.593}$$

c'est-à-dire

$$g = \texttt{proj}(\tilde{h}) \circ f, \tag{10.594}$$

c'est-à-dire que l'application $\texttt{proj}(\tilde{h})\colon F \to G$ est la réponse à la proposition. □

10.15.3 Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique

PROPooJFQDooZSsxMf

Proposition 10.284 (Stabilité du rang par extension des scalaires[159])**.**
Si $f\colon E \to F$ est linéaire alors nous avons

$$rang(f) = rang(f_{\mathbb{L}}). \tag{10.595}$$

où à droite nous considérons le rang de l'application $\mathbb{L}$-linéaire $f_{\mathbb{L}}\colon E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$.

Démonstration. Il existe un supplémentaire V tel que $E = \ker(f) \oplus V$ avec $\dim(V) = rang(f)$. Nous pouvons factoriser f en

$$f = f_2 \circ f_1 \tag{10.596}$$

avec $f_1\colon E \to V$ est la projection parallèle à $\ker(f)$ et est surjective (vers V) parce que $\dim(V) = rang(f) = \dim\big(\text{Image}(f)\big)$. De plus $f_2\colon V \to F$ est injective parce que si $v \in V$ est tel que $f_2(v) = 0$ alors on aurait

$$f(v) = (f_2 \circ f_1)(v) = f_2(v) = 0. \tag{10.597}$$

Cela donne $v \in \ker(f) \cap V = \{0\}$. Par la proposition 10.273, les applications $(f_1)_{\mathbb{L}}$ et $(f_2)_{\mathbb{L}}$ sont respectivement surjective et injective.

L'application $(f_2)_{\mathbb{L}} : V_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ est forcément surjective sur son image, donc

$$(f_2)_{\mathbb{L}} : V_{\mathbb{L}} \to \text{Image}(f_{\mathbb{L}}) \tag{10.598}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{L}$-espaces vectoriels. Nous avons alors les égalités

$$\dim_{\mathbb{L}}(V_{\mathbb{L}}) = \dim_{\mathbb{L}}\big(\text{Image}(f_{\mathbb{L}})\big) = rang(f_{\mathbb{L}}). \tag{10.599}$$

EQooWLOIooKlYWTL

Mais aussi, par les définitions posées plus haut,

$$\dim(V) = rang(f) = \dim\big(\text{Image}(f)\big). \tag{10.600}$$

EQooEVCGopACjmoU

Mais le corolaire 10.276 nous dit que $\dim_{\mathbb{L}}(V_{\mathbb{L}}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Donc il y a égalité des deux lignes (10.599) et (10.600), ce qui donne $rang(f) = rang(f_{\mathbb{L}})$. □

PROPooZAZFooUFdCUv

Proposition 10.285.
Nous avons

(1) $\det(f) = \det(f_{\mathbb{L}})$

(2) $\chi_f = \chi_{f_{\mathbb{L}}}$.

Démonstration. Dès que l'on a des bases nous avons $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai}$ par la proposition 10.280(2). Le nombre $\det(f) \in \mathbb{K}$ est un polynôme en les f_{ai}. Entendons nous : il existe un polynôme indépendant de f et de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{L}$ donnant le déterminant de n'importe quelle matrice. Donc $\det(f) = \det(f_{\mathbb{L}})$.

Même chose pour le polynôme caractéristique (définition 10.109) : les coefficients de ce polynôme sont des polynômes en les f_{ai} qui sont indépendants de $\mathbb{L}$, de $\mathbb{K}$ et de f.

Notons que $\chi_{f_{\mathbb{L}}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. □

La situation est très différente avec le polynôme minimal[114]. Autant il existe une « recette » pour créer le polynôme caractéristique, il n'en n'existe pas pour le polynôme minimal (ou en tout cas, il ne suffit pas d'appliquer des polynômes en les coefficients de la matrice). La proposition suivante montre que le polynôme minimal est conservé par extension de corps, mais que pour le savoir, il faut travailler plus.

PROPooXVZMooXcJrsJ

Proposition 10.286 ([159, 1])**.**
Soit $\mathbb{L}$ une extension du corps $\mathbb{K}$ et une application linéaire $f : E \to F$ entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $\mu_f = \mu_{f_{\mathbb{L}}}$.

Démonstration. Nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \frac{\mathbb{L}[X]}{(\mu)} &\to \text{End}(E_{\mathbb{L}}) \\ [P] &\mapsto P(f_{\mathbb{L}}) \end{aligned} \tag{10.601}$$

est bien définie et injective. La proposition 10.99 nous dira alors que μ est le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}$.

Pour prouver que l'application $\tilde{g}$ est bien définie, nous commençons par prouver que $P(f_{\mathbb{L}}) = P(f)_{\mathbb{L}}$:

$$\begin{aligned} P(f_{\mathbb{L}})\lambda \otimes v &= \sum_k a_k f_{\mathbb{L}}^k \lambda \otimes v && \text{(10.602a)} \\ &= \lambda \otimes \sum_k a_k f^k(v) && \text{(10.602b)} \\ &= \lambda \otimes P(f)v && \text{(10.602c)} \\ &= P(f)_{\mathbb{L}}\lambda \otimes v. && \text{(10.602d)} \end{aligned}$$

Par conséquent $\mu(f_{\mathbb{L}}) = 0$ et l'application est bien définie.

Sur $\mathbb{L}[X]/(\mu)$ nous considérons la base $\{1, [X], \dots, [X^{\deg(\mu)-1}]\}$, et sur $\text{End}(E_{\mathbb{L}})$ nous considérons une base qui commence[115] par $\{f_{\mathbb{L}}^k\}_{k=0,\dots,\deg(\mu)-1}$. Montrons tout de même que cette partie est libre (sinon le théorème de la base incomplète ne s'applique pas) : si $\sum_k \lambda_k f_{\mathbb{L}}^k = 0$ alors

$$\sum_k \texttt{proj}\left(\lambda_k f_{\mathbb{L}}^k\right) = 0. \tag{10.603}$$

EQooSFHVooLxqUFl

[114] Définition 8.64.
[115] Théorème de la base incomplète 6.15(2).

Pour détailler ce que cela implique, nous calculons ceci :

$$(\lambda f_{\mathbb{L}})(\tau(e_i)) = \lambda f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = \sum_a \lambda f_{ai} e_a, \tag{10.604}$$

par conséquent $\texttt{proj}(\lambda f_{\mathbb{L}})e_i = \sum_a \texttt{proj}(\lambda f_{ai})e_a$, et comme $\texttt{proj}$ est $\mathbb{K}$-linéaire et que $f_{ai} \in \mathbb{K}$,

$$\texttt{proj}(\lambda f_{\mathbb{L}})e_i = \texttt{proj}(\lambda) \sum_a f_{ai} e_a = \texttt{proj}(\lambda)\,\texttt{proj}(f_{\mathbb{L}})e_i = \texttt{proj}(\lambda) f(e_i). \tag{10.605}$$

Appliquer la projection $\texttt{proj}$ à l'équation (10.603) donne alors $\sum_k \texttt{proj}(\lambda)_k f^k = 0$. Mais comme les f^k sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$ nous avons pour tout k : $\texttt{proj}(\lambda_k) = 0$ (égalité dans $\mathbb{K}$). En nous souvenant de la remarque 10.279 nous en déduisons $\lambda_k = 0$ dans $\mathbb{L}$.

Dans les choix de bases effectués, l'application $\tilde{g}$ a la forme

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \tag{10.606}$$

qui est injective.

Puisque $\tilde{g}$ est injective, μ est le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}$ et donc $\mu = \mu_{\mathbb{L}}$. □

10.16 Frobenius et Jordan

10.16.1 Matrice compagnon

DEFooOSVAooGevsda

Définition 10.287.
*Soit le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0$ dans $\mathbb{K}[X]$. La **matrice compagnon** de P est la matrice donnée par*

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{10.607}$$

si $n \geqslant 2$ et par (a_0) si $n = 1$.

En formule :

$$C(P)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i,j+1} & \text{si } j < n \\ a_{i-1} & \text{si } j = n. \end{cases} \tag{10.608}$$

EQooXKMDooCNxcgK

Une matrice est dite compagnon si elle a cette forme.

PROPooNDCLooYMGHmX

Proposition 10.288.
Nous considérons le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Si f est l'endomorphisme associé à la matrice compagnon[116] $C(P)$, alors nous avons

(1)

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } 1 \leqslant i < n \\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases} \tag{10.609}$$

(2) La formule : $P(f)e_1 = 0$.

Démonstration. Nous calculons $f(e_i)$ à partir des éléments de matrice (10.608) et de la relation entre matrice et application linéaire donnée par la proposition 6.81. D'abord si $i \neq n$ nous avons

$$f(e_i) = \sum_j C(P)_{ji} e_j = \sum_j \delta_{j,i+1} e_j = e_{i+1}. \tag{10.610}$$

[116] Définition 10.287.

Ensuite pour $i = n$ nous avons

$$f(e_n) = \sum_j C(P)_{jn} e_j = \sum_j a_{j-1} e_j. \tag{10.611}$$

Pour la seconde partie, notez que $X^k(f)$ est en réalité f^k. Donc si $k < n$,

$$X^k(f)e_i = f^k(e_1) = e_{1+k}. \tag{10.612}$$

Et pour $k = n$,

$$X^n(f)e_1 = f^n(e_1) = f(e_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1}. \tag{10.613}$$

En mettant ensemble,

$$P(f)e_1 = \big(f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\big)(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = 0. \tag{10.614}$$

□

LemkVNisk

Lemme 10.289 ([357]).
Un polynôme sur un corps commutatif est le polynôme caractéristique de sa matrice compagnon. En d'autres termes nous avons $\chi_{C(P)} = P$.

Démonstration. Nous notons f l'endomorphisme associé à $C(P)$. La propriété $P(f)e_1 = 0$ nous indique que le polynôme minimal ponctuel de f en e_1 divise P. L'ensemble des puissances de f appliquées à e_1, $\big(f^k(e_1)\big)_{k=1,\dots,n-1}$ est libre, donc le polynôme minimal ponctuel en e_1 est de degré n au minimum. En reprenant les notations du théorème 8.43, nous avons $I_{e_1} = (P)$ parce que P est de degré minimum dans I_{e_1} et $\chi_f \in I_{e_1}$.

Donc P divise χ_f et est de degré égal à celui de χ_f. Étant donné qu'ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux. □

RemmQjZOA

Remarque 10.290.
Les matrices compagnons ne sont pas les seules dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal. En fait les matrices dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal sont denses dans l'ensemble des matrices. En effet une matrice dont le polynôme minimal n'est pas égal au polynôme caractéristique a un polynôme caractéristique avec une racine double. Il est possible, en modifiant arbitrairement peu la matrice, de séparer la racine double en deux racines distinctes.

10.16.2 Réduction de Frobenius

LEMooKUQDooKFeIYq

Lemme 10.291.
Soit un endomorphisme $f : E \to E$ sur l'espace vectoriel de dimension finie n. Nous notons μ et χ les polynômes minimal et caractéristique. Si f est cyclique, alors $\mu = \chi$.

Le théorème 10.304 donnera une version plus complète de ce lemme.

Démonstration. Soit v un vecteur cyclique de f, c'est-à-dire que $\{f^k(v)\}_{k=0,\dots,n-1}$ est libre. Donc si P est un polynôme de degré jusqu'à $n-1$ nous ne pouvons pas avoir $P(f) = 0$ parce que, appliqué à v, ce serait une combinaisons nulle non triviale des $f^k(v)$. Donc le polynôme minimal est au minimum de degré n. Mais le polynôme caractéristique est annulateur de degré n (Cayley-Hamilton 10.116), donc il est le polynôme minimal. □

THOooDOWUooOzxzxm

Théorème 10.292 (Réduction de Frobenius [358, 359, 360]).
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathrm{End}(E)$. Alors il existe une suite de sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ stables par f tels que

Itemmpwjn Ss

(1) $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$;

(2) pour chaque E_i, l'endomorphisme restreint $f_i = f|_{E_i}$ est cyclique ;

(3) si μ_i est le polynôme minimal de f_i alors μ_{i+1} divise μ_i ;

Une telle décomposition vérifie automatiquement $\mu_1 = \mu_f$ et $\mu_1 \cdots \mu_r = \chi_f$, et la suite $(\mu_i)_{i=1,\dots,r}$ ne dépend que de f, et non du choix de la décomposition du point (1).

Les polynômes μ_i sont les **invariants de similitude** de l'endomorphisme f.

Démonstration. Nous commençons par montrer que si une telle décomposition existe, alors subEqzcGouz

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{r} \mu_i \tag{10.615a}$$ EqTaxevb

$$\mu_f = \mu_1 \tag{10.615b}$$

où χ_f est le polynôme caractéristique de f et μ_f est le polynôme minimal. D'abord le polynôme caractéristique de f devra être égal au produit des polynômes caractéristiques des $f|_{E_i}$, mais ces derniers endomorphismes étant cycliques[117], leurs polynômes caractéristiques sont égaux à leurs polynômes minimaux (lemme 10.291). Cela prouve l'égalité (10.615a). Ensuite tous les μ_i doivent diviser le polynôme minimal, donc $\operatorname{ppcm}(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ divise μ_f. Cependant le polynôme minimal doit contenir une et une seule fois chacun des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique, et chacun de ces facteurs sont dans les polynômes μ_i. Par conséquent $\operatorname{ppcm}(\mu_1, \ldots, \mu_r) = \mu_f$. Mais par ailleurs $\mu_1 = \operatorname{ppcm}(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ parce qu'on a supposé $\mu_{i+1} \mid \mu_i$, donc $\mu_1 = \mu_f$.

Soit d, le degré du polynôme minimal de f et $y \in E$ tel que $\mu_f = \mu_{f,y}$ (voir lemme 10.100). Le plus petit espace stable sous f contenant y est

$$E_y = \operatorname{Span}\{y, f(y), \ldots, f^{d-1}(y)\}. \tag{10.616}$$

Nous notons $e_i = f^{i-1}(y)$. Notons que les vecteurs donnés forment bien une base de E_y parce que si les e_i n'était pas linéairement indépendants, alors nous aurions des a_k tels que $\sum_k a_k e_k = 0$ et avec lesquels

$$\big(\sum_k a_k X^k\big)(f)y = 0, \tag{10.617}$$

ce qui contredirait la minimalité de $\mu_{f,y}$.

La difficulté du théorème est de trouver un complément de E_y qui soit également stable sous f. Nous commençons par étendre[118] $\{e_1, \ldots, e_d\}$ en une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Ensuite nous allons montrer que

$$E = E_y \oplus F \tag{10.618}$$

avec

$$F = \{x \in E \text{ tel que } e_d^*\big(f^k(x)\big) = 0, \forall k \in \mathbb{N}\}. \tag{10.619}$$

qui fait appel aux définitions d'espace dual (définition 6.143) et de base duale (définition 6.144).

Par construction, F est invariant sous f. Montrons pour commencer que $E_y \cap F = \{0\}$. Un élément de E_y s'écrit

$$z = a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k \tag{10.620}$$

avec $k \leqslant d$. Étant donné que f décale les vecteurs de base, nous avons $e_d^*\big(f^{d-k}(z)\big) = a_k$. Du coup $z \in F$ si et seulement si $a_1 = \ldots = a_d = 0$, c'est-à-dire que $E_y \cap F = \{0\}$.

Nous montrons maintenant que $\dim F = n - d$. Pour cela nous considérons l'application

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{K}[f] &\to E^* \\ g &\mapsto e_d^* \circ g. \end{aligned} \tag{10.621}$$

Cette application est injective. En effet un élément général de $\mathbb{K}[f]$ est

$$g = a_1 \operatorname{Id} + a_2 f + \cdots + a_p f^{p-1} \tag{10.622}$$

avec $p \leqslant d$. Si $T(g) = 0$, alors nous avons en particulier

$$0 = T(g)e_{d-p+1} = e_d^*(a_1 e_{d-p+1} + a_2 e_{d-p+2} + \cdots + a_p e_d) = a_p. \tag{10.623}$$

Donc $a_p = 0$ et en appliquant maintenant $T(g)$ à e_{d-p} nous obtenons $a_{p-1} = 0$. Au final nous trouvons que $g = 0$ et donc que T est injective.

Étant donné que $\dim \mathbb{K}[f] = d$ et que T est injective, $\dim \operatorname{Image}(T) = d$. Étudions l'orthogonal[119] de l'image de T :

$$\begin{aligned} (\operatorname{Image}(T))^\perp &= \{x \in E \text{ tel que } T(g)x = 0, \forall g \in \mathbb{K}[f]\} && \text{(10.624a)} \\ &= \{x \in E \text{ tel que } e_d^*\big(g(x)\big) = 0, \forall g \in \mathbb{K}[f]\} && \text{(10.624b)} \\ &= F. && \text{(10.624c)} \end{aligned}$$

[117] Définition 10.101.

[118] Pour autant que j'aie compris, cette extension manque dans [358]. Corrigez-moi si je me trompe.

[119] Définition 6.151.

Par conséquent $F^\perp = \text{Image}(T)$. Puisque $\dim \text{Image}(T) = d$, nous avons donc $\dim F = n - d$ et il est établi que $E = E_y \oplus F$.

Nous avons donc trouvé F, stable par f et tel que $E = E_y \oplus F$. Nous devons maintenant nous assurer que cette décomposition tombe bien pour les polynômes minimaux. Si P_1 est le polynôme minimal de $f|_{E_y}$, alors par le lemme 10.102 nous avons $P_1 = \mu_{f,y} = \mu_f$ parce que $f|_{E_y}$ est cyclique sur E_y. Mettons P_2, le polynôme minimal de $f|_F$. Étant attendu que F est stable par f, le polynôme P_2 divise P_1. En recommençant la construction sur F, nous construisons un nouvel espace F' stable sous F et vérifiant $\mu_{f|_{F'}} = P_2$, etc.

Nous passons maintenant à la partie unicité du théorème. Soient deux suites $F_1, \dots, F_r$ et $G_1, \dots, G_s$ de sous-espaces stables par f et vérifiant

(1) $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$,

(2) $f|_{F_i}$ est cyclique,

(3) $\mu_{f|_{F_{i+1}}}$ divise $\mu_{f|_{F_i}}$,

et, *mutatis mutandis*, les mêmes conditions pour la famille $\{G_i\}$. Nous posons $P_i = \mu_{f|_{F_i}}$ et $Q_i = \mu_{f|_{G_i}}$. Nous allons montrer par récurrence que $P_i = Q_i$ et $\dim F_i = \dim G_i$. Il ne sera cependant pas garanti que $F_i = G_i$. D'abord, $P_1 = Q_1$ parce qu'ils sont tous deux égaux à μ_f par les relations (10.615). Nous supposons que $P_i = Q_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant j-1$ et nous tentons de montrer que $P_j = Q_j$.

Nous avons

$$P_j(f) = P_j(f)|_{F_1} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{F_{j-1}}. \tag{10.625}$$

EqMrCtZQ

En effet étant donné que P_{j+k} divise P_j, il existe un polynôme A tel que $P_j = AP_{j+k}$, et donc tel que[120] $P_j(f) = A(f) \circ P_{j+k}(f)$, mais $P_{j+k}(f)F_{j+k} = 0$, donc $P_j(f)F_{j+k} = 0$. Les espaces G_i n'ayant à priori aucun rapport avec les polynômes P_i, nous écrivons

$$P_j(f) = P_j(f)|_{G_1} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{G_{j-1}} \oplus P_j(f)|_{G_j} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{G_s}. \tag{10.626}$$

EqJxeLiQ

Pour $1 \leqslant i \leqslant j-1$, nous avons supposé $P_i = Q_i$. Étant donné que la matrice de $f|_{F_i}$ est semblable à C_{P_i} et celle de $f|_{G_i}$ est semblable à C_{Q_i}, la matrice de $f|_{F_i}$ est semblable à la matrice de $f|_{G_i}$. En particulier,

$$\dim P_j(f)F_i = \dim P_j(f)G_i. \tag{10.627}$$

En prenant les dimensions des images dans les égalités (10.625) et (10.626), nous trouvons que

$$P_j(f)|_{G_j} = \dots = P_j(f)|_{G_s} = 0. \tag{10.628}$$

Par conséquent P_j est annulateur de $f|G_j$, et il divise donc Q_j, qui est générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de $f|_{G_j}$. La situation étant symétrique entre P et Q, nous montrons de même que Q_j divise P_j et donc que $P_j = Q_j$.

Ceci achève la démonstration du théorème de réduction de Frobenius.

□

REMooPVLEooYDRXQI

Remarque 10.293.
Sous forme matricielle, ce théorème dit que toute matrice est semblable à une matrice de la forme bloc-diagonale

$$f = \begin{pmatrix} C_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{\mu_r} \end{pmatrix} \tag{10.629}$$

où les C_{μ_i} sont des matrices compagnons (définition 10.287).

En particulier, et ceci est très important, deux applications sont semblables si et seulement si elles ont même suite d'invariants de similitude.

Remarque 10.294.
Si nous travaillons sur $\mathbb{R}$, la réduite de Frobenius restera une matrice réelle, même si les valeurs propres sont complexes. En effet le procédé de Frobenius ne regarde absolument pas les valeurs propres, mais seulement les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique. La réduite de Frobenius ne tente pas de résoudre ces polynômes, mais se contente d'en utiliser les matrices compagnon.

La situation sera différente dans le cas de la forme normale de Jordan.

10.16.3 Forme normale de Jordan

Il existe une preuve directe de la réduction de Jordan ne nécessitant pas la réduction de Frobenius[361]. Cette dernière passe par les espaces caractéristiques[121] et est à mon avis plus compliquée que la démonstration

[120] En vertu du lemme 10.89.
[121] Aussi appelés « espaces propres généralisés ».

de Frobenius elle-même. Nous allons donc nous contenter de donner la réduction de Jordan comme un cas particulier de réduction de Frobenius.

ThoGGMYooPzMVpe

Théorème 10.295 (Réduction de Jordan)**.**
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé[122]*. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit sous la forme*

$$M = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \\ 0 & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{10.630}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de f (avec éventuelles répétitions) et $J_{n_i}(\lambda)$ représente le bloc $n_i \times n_i$

$$J_{n_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ & \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}. \tag{10.631}$$

En d'autres termes, $J_{n_i}(\lambda)_{ii} = \lambda$ et $J_n(\lambda)_{i-1,i} = 1$.

Démonstration. Nous commençons par le cas où f est nilpotente ; nous notons M sa matrice. Dans ce cas la seule valeur propre est zéro et le polynôme caractéristique est X^m pour un certain m. Nous savons par le lemme 10.289 que (la matrice de) f est semblable à sa matrice compagnon. En l'occurrence pour f nous avons

$$C_{X^m} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.632}$$

Ensuite le changement de base (qui est une similitude) $(e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto (e_n, \dots, e_2, e_1)$ montre que C_{X^m} est semblable à un bloc de Jordan $J_m(0)$.

Supposons à présent que f ne soit pas nilpotente. Par l'hypothèse de polynôme caractéristique scindé, nous supposons que f a m valeurs propres distinctes et que son polynôme caractéristique est

$$\chi_f = (X - \lambda_1)^{l_1} \dots (X - \lambda_m)^{l_m}. \tag{10.633}$$

Le lemme des noyaux (théorème 10.90) nous enseigne que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \underbrace{\ker(f - \lambda_i \mathbb{1})^{l_i}}_{F_i}. \tag{10.634}$$

La restriction de $f - \lambda_i \mathbb{1}$ à F_i est par construction un endomorphisme nilpotent, et donc peut s'écrire comme un bloc de Jordan avec des zéros sur la diagonale. En utilisant la décomposition

$$f|_{F_i} = (f - \lambda_i \mathbb{1})|_{F_i} + \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}, \tag{10.635}$$

nous voyons que $f|_{F_i}$ s'écrit comme un bloc de Jordan avec λ_i sur la diagonale. □

Remarque 10.296.
Nous pouvons calculer la forme normale de Jordan pour une matrice complexe ou réelle, mais dans les deux cas nous devons nous attendre à obtenir une matrice complexe parce que les valeurs propres d'une matrice réelle peuvent être complexes. Cependant nous demandons que le polynôme caractéristique de f soit scindé sur $\mathbb{K}$. En pratique, la décomposition de Jordan n'est garantie que sur les corps algébriquement clos, c'est-à-dire sur $\mathbb{C}$.

La suite des invariants de similitude sur laquelle repose la réduction de Frobenius, elle, est disponible sur tout corps, y compris $\mathbb{R}$.

[122] Définition 8.39. C'est à cause de cette hypothèse que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ n'est pas le bon exemple de contexte de travail.

10.17 Commutant et endomorphismes cycliques

10.17.1 Endomorphisme cyclique

LemSGmdnE

Lemme 10.297.
Si A est la matrice de l'endomorphisme f alors nous avons équivalence des propriétés suivantes :

(1) *La matrice A est cyclique.*

(2) *L'endomorphisme f est cyclique.*

Si f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et si $x \in E$, nous notons

$$E_{f,x} = \text{Span}\{f^k(x) \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \tag{10.636}$$

DEFooIDMMooHIpUmT

Définition 10.298 (Commutant $\mathcal{C}(f)$ de f)**.**
*Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et un endomorphisme $f\colon E \to E$. Le **commutant** de f est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :*

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E,E) \text{ tel que } g \circ f = f \circ g\}. \tag{10.637}$$

Il n'est pas très compliqué de vérifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,E)$.

Notons l'inclusion évidente $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$. L'inclusion inverse va un peu nous occuper durant les prochaines pages.

10.17.2 Commutant : cas diagonalisable

PROPooRHHEooIRGmtl

Proposition 10.299 ([362])**.**
Si f est diagonalisable, alors

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_\lambda)^2. \tag{10.638}$$

EQooOTFLooPUKAos

où les E_λ sont les espaces propres de f.

Démonstration. D'abord, soit $g \in \mathcal{C}(f)$ alors E_λ est stable par g. En effet si $v \in E_\lambda$ alors $f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$, ce qui montre que $g(v)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, et donc que $g(v) \in E_\lambda$.

Nous considérons ensuite l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{C}(f) &\to \text{End}(E_1) \times \ldots \times \text{End}(E_r) \\ g &\mapsto g|_{E_1} \times \ldots \times g|_{E_r} \end{aligned} \tag{10.639}$$

qui est bien définie parce que g se restreint aux espaces propres de f. Nous allons noter $\psi(g)_\lambda$ la restriction de g à E_λ.

(1) **ψ est injective**

Supposons que $g, h \in \mathcal{C}(f)$ tels que $\psi(g) = \psi(h)$. Puisque f est diagonalisable nous pouvons décomposer $x \in E$ en ses composantes sur les espaces propres[123] :

$$x = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} x_\lambda \tag{10.640}$$

avec $x_\lambda \in E_\lambda$. Nous avons alors

$$g(x) = \sum_\lambda g(x_\lambda) = \sum_\lambda \psi(g)_\lambda(x_\lambda). \tag{10.641}$$

Par hypothèse nous avons $\psi(g)_\lambda = \psi(h)_\lambda$, et donc aussi

$$g(x) = \sum_\lambda \psi(g)_\lambda(x_\lambda) = \sum_\lambda \psi(h)_\lambda(x_\lambda) = \sum_\lambda h(x_\lambda) = h(x). \tag{10.642}$$

Cela prouve $g = h$ et donc que ψ est injective.

[123] Théorème 10.220(5).

(2) **ψ est surjective** Si nous avons pour chaque $\lambda \in \text{Spec}(f)$ un endomorphisme g_λ de E_λ alors en posant

$$g(x) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} g_\lambda(x_\lambda) \tag{10.643}$$

nous avons bien

$$\psi(g) = \big(g_{\lambda_1}, \dots, g_{\lambda_r}\big). \tag{10.644}$$

Nous pouvons donc conclure en écrivant

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim\big(\text{End}(E_\lambda)\big) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_\lambda)^2. \tag{10.645}$$

□

REMooUGFQooVzCOvV

Remarque 10.300.
Nous avons alors immédiatement

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) \geqslant \dim(E) \tag{10.646}$$

lorsque f est diagonalisable.

En suivant la notation (10.203), un endomorphisme est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.

PropooQALUooTluDif

Proposition 10.301 ([362])**.**
Si f est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension n. Nous avons équivalence des points suivants.

ITEMooSOYYooZVibjrii

(1) Le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique : $\mu_f = \chi_f$

ITEMooSOYYooZVibjrvi

(2) L'endomorphisme f est cyclique.

ITEMooSOYYooZVibjrv

(3) $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$[124].

ITEMooSOYYooZVibjriv

(4) $\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = n$

ITEMooSOYYooZVibjriii

(5) L'endomorphisme f possède n valeurs propres distinctes.

ITEMooSOYYooZVibjri

(6) $\dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = n$

Démonstration. Le point important de cette proposition réside dans les équivalences (1)-(3). Les autres sont des résultats intermédiaires. En particulier, dans le cas diagonalisable, nous allons voir que le point (5) est essentiellement une reformulation de (1).

(1) **(4) implique (5)** Par la formule (10.638), les espaces propres de f ont tous une dimension de 1. Par conséquent f possède n valeurs propres distinctes.

(2) **(5) implique (6)** Le théorème 10.220 nous dit que le polynôme minimal est scindé à racines simples. Puisque f possède n valeurs propres distinctes, μ est de degré n. Par l'isomorphisme $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ de la proposition 10.108 nous avons $\dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu) = n$ par la proposition 8.44.

(3) **(6) implique (1)** Par l'isomorphisme $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ de la proposition 10.108 et la proposition 8.44 nous avons $n = \dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu)$. Comme χ est un polynôme annulateur (Caley-Hamilton 10.116), il est divisé par μ. Maintenant μ et χ sont des polynômes unitaires de degré n et μ divise χ. Ils sont donc égaux.

(4) **(1) implique (2)** Le fait que f soit diagonalisable permet d'utiliser le théorème 10.220 pour dire que μ est scindé à racines simples. L'égalisation avec χ nous permet de dire que f possède n valeurs propres distinctes. Soient $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de diagonalisation, et prouvons que le vecteur $v = e_1 + \cdots + e_n$ est cyclique. Nous avons

$$f^k(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i. \tag{10.647}$$

[124] Rappel : $\mathcal{C}(f)$ est le commutant de f, définition 10.298.

Pour prouver que cette famille (avec $k = 0, \dots, n-1$) est libre[125] nous en prenons une combinaison linéaire nulle et nous prouvons que les coefficients sont tous nuls. Soit donc

$$0 = \sum_{l=0}^{n-1} a_l f^l(v) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^l e_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{l=0}^{n-1} a_l \lambda_i^l \Big) e_i. \tag{10.648}$$

Par hypothèse, la double somme est nulle, et nous avons pour tout i :

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_l \lambda_i^l = 0. \tag{10.649}$$

En posant la matrice $A_{ij} = \lambda_i^j$, cela revient à étudier le système $\sum_j A_{ij} a_j = 0$. Ce système n'a des solutions non nulles que si $\det(A) = 0$; sinon il possède une unique solution qui est $a_j = 0$ pour tout j. Nous devons donc calculer le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{10.650}$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde déjà étudié par la proposition 6.135. Nous avons $\det(A) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$. Ce déterminant est bien non nul parce que toutes les valeurs propres sont distinctes.

(5) **(2) implique (3)** Soit v un vecteur cyclique[126] de f. Si g est un endomorphisme, nous définissons des coefficients $(a_k(g))_{k=0,\dots,n-1}$ par

$$g(v) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(g) f^k(v). \tag{10.651}$$

C'est une bonne définition parce que $\{f^k(v)\}$ est une base.

Nous définissons alors l'application

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathcal{C}(f) &\to \mathbb{K}[f] \\ g &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k(g) f^k. \end{aligned} \tag{10.652}$$

C'est une application injective parce que si $\psi(g) = 0$ alors $g(v) = 0$ et pour tout k nous avons $g\big(f^k(v)\big) = f^k\big(g(v)\big) = 0$. L'endomorphisme g s'annulant sur une base, il est nul.

L'application ψ est surjective. En effet si un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ est donné, il suffit de poser

$$g(x) = \sum_k a_k f^k(x) \tag{10.653}$$

pour avoir $\psi(g) = P$.

(6) **(3) implique (4)** Si $n_1, \dots, n_r$ sont les dimensions des différents espaces propres de f, nous avons les inégalités

$$\dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu) \leqslant n = n_1 + \cdots + n_r \leqslant n_1^2 + \cdots + n_r^2 = \dim\big(\mathcal{C}(f)\big). \tag{10.654}$$

Par hypothèse d'égalité entre le premier et le dernier terme de cette suite d'inégalités, toutes les inégalités sont des égalités et en particulier $\dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = n$.

Nous avons fini de prouver toutes les équivalences demandées. □

Exemple 10.302.
Pour mieux comprendre pourquoi le fait d'avoir n valeurs propres distinctes est équivalent à être cyclique, notons que si deux valeurs propres sont identiques, alors un morceau de la matrice de f serait par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et dans ce cas n'importe quelle combinaison $ae_i + be_j$ reste proportionnelle à elle-même après application de f. Si nous avons des valeurs propres différentes par contre, nous avons par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui donne $f(e_1 + e_2) = e_1 + 2e_2$. La partie $\{e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$ est une base. △

[125] Ce sera alors une base parce que n vecteurs libres dans un espace de dimension n est toujours une base, proposition 6.20.
[126] Définition 10.298.

10.17.3 Commutant : cas général

Nous considérons encore un espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $f\colon E\to E$. Nous notons μ son polynôme minimal et μ_x le polynôme minimal ponctuel en x.

LEMooDFFDooJTQkRu

Lemme 10.303 ([363, 358, 159]).
Nous avons

$$\dim\big(\mathcal{C}(f)\big)\geqslant\dim(E) \tag{10.655}$$

Démonstration. Si f est donnée, l'espace $\mathcal{C}(f)$ est l'espace des solutions de $fg=gf$. Supposons avoir choisi une base de E et notons A la matrice de f et X celle de g. L'équation est $AX-XA=0$.

(1) **Si A est trigonalisable** Nous supposons avoir choisi la base de telle sorte que A soit triangulaire supérieure, et nous allons nous contenter de chercher les solutions X qui sont également triangulaires supérieure. Si il y en a déjà plus que n, a fortiori le résultat sera vrai.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures étant une matrice triangulaire supérieure, l'équation $AX-XA$ contient, pour les coefficients de X, $n(n+1)/2$ équations. Mais il se fait que les termes diagonaux ne sont pas de vraies équations parce que

$$(AX-XA)_{kk}=\sum_i\big(A_{ki}X_{ik}-X_{ki}A_{ik}\big)=\sum_{k\leqslant i\leqslant k}(A_{ki}X_{ik}-X_{ki}A_{ik})=0. \tag{10.656}$$

Nous avons donc au maximum

$$\frac{n(n+1)}{2}-n \tag{10.657}$$

équations linéairement indépendantes pour un minimum de $n(n+1)/2$ inconnues. L'espace des solutions est donc de dimension au minimum n.

Cela a l'air d'être une majoration assez large, mais il existe des cas d'égalité.

(2) **Si A n'est pas trigonalisable**

La preuve que nous donnons ici est valable même pour les endomorphismes trigonalisables.

Nous considérons le résultat de Frobenius 10.292. Nous avons donc la structure suivante :

- une décomposition en somme directe $E=E_1\oplus\ldots\oplus E_r$,
- les espaces E_i sont fixés par f,
- les endomorphismes $f_i=f|_{E_i}$ sont cycliques
- le polynôme minimal de f_i est μ_i et $\prod_{i=1}^r\mu_i=\chi_f$.

Les endomorphismes f_i^k commutent évidemment avec f_j, et la partie $\{f_i^k\}_{k=0,\ldots,\deg(\mu_i)-1}$ est libre. Libre en tout cas en tant que partie de $\mathrm{End}(E_i)$. Mais en prolongeant par 0 sur E, ça reste libre en tant que partie de $\mathrm{End}(E)$.

Bien entendu les f_j^k et les f_i^k $(i\neq j)$ sont linéairement indépendants dans $\mathrm{End}(E)$ parce qu'ils n'agissent pas sur les mêmes vecteurs. Donc les endomorphismes $f_i^{k_i}$ avec $k_i=0,\ldots,\deg(\mu_i)-1$ forment une partie libre de $\mathrm{End}(E)$ composée d'endomorphismes qui commutent avec f. Il y en a en tout

$$\sum_{i=1}^r\deg(\mu_i)=\deg(\chi_f)=n. \tag{10.658}$$

Par conséquent $\dim\big(\mathcal{C}(f)\big)\geqslant\dim(E)$.

□

THOooGLMSooYewNxW

Théorème 10.304 ([336]).
Soit un endomorphisme $f\colon E\to E$ sur l'espace vectoriel de dimension finie n. Nous notons μ et χ les polynômes minimal et caractéristique. Nous avons équivalence entre les points suivants :

ITEMooLRXIooLWaYqJi

(1) $\mu=\chi$,

ITEMooLRXIooLWaYqJii

(2) f *est cyclique,*

ITEMooLRXIooLWaYqJiii

(3) $\mathcal{C}(f)=\mathbb{K}[f]$.

Démonstration. Plusieurs implications. Notons que (2) implique (1) a déjà été démontré par le lemme 10.291.

(1) **(1) implique (2)** Conformément à ce que nous permet le lemme 10.100 nous choisissons[127] $a \in E$ de telle sorte à avoir $\mu_a = \mu$. De plus pour $x \in E$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi_x\colon \mathbb{K}[X] &\to E\\ P &\mapsto P(f)x.\end{aligned} \tag{10.659}$$

Nous avons $\varphi_a(P) = P(f)a$. Étant donné que E_a est engendré par les $f^k(a)$ nous avons $\varphi_a\big(\mathbb{K}[X]\big) = E_a$. De plus l'application φ_a passe aux classes pour (μ_a). Pour rappel, un élément de $\mathbb{K}[X]/(\mu_a)$ est de la forme

$$[P] = \{P + Q\mu_a\}_{Q\in\mathbb{K}[X]}. \tag{10.660}$$

Nous considérons donc l'application quotient

$$\begin{aligned}\psi\colon \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu_a)} &\to E_a\\ [P] &\mapsto \varphi_a(P),\end{aligned} \tag{10.661}$$

et nous prouvons que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel.

(1a) **Linéaire** Parce que $(\lambda P + Q)(f) = (\lambda P)(f) + Q(f)$.

(1b) **Injectif** Si $\psi([P]) = 0$, alors $\varphi_a(P) = 0$, c'est-à-dire que $P \in \ker(\varphi_a)$. Mais, par définition 10.96 du polynôme minimal ponctuel, μ_a est générateur de $\ker(\varphi_a)$; donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_a$. Par conséquent $[P] = 0$, ce que nous voulions.

(1c) **Surjectif** Si $x \in E_a$ alors il existe des coefficients $x_k \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=0}^{\deg(\mu_a)-1} x_k f^k(a)$, c'est-à-dire $x = P(f)a = \varphi_a(P) = \psi([P])$.

Mais par hypothèse et par choix de a nous avons $\mu_a = \mu = \chi$, donc en fait $E_a = \mathbb{K}[X]/(\chi)$. Nous savons aussi que $\deg(\chi) = \dim(E)$ et que $\dim\big(\mathbb{K}[X]/P\big) = \deg(P)$ par la proposition 10.108. Au final nous avons $\dim(E_a) = \deg(\chi) = \dim(E)$. Et par conséquent $E_a = E$. Cela prouve que a est un vecteur cyclique pour f.

(2) **(2) implique (3)** Soit $g \in \mathcal{C}(f)$; nous devons prouver que g est un polynôme de f. Par hypothèse nous avons un vecteur cyclique que nous notons v. Nous avons un polynôme P (dépendant de g) tel que $g(v) = P(f)v$. Nous allons voir que $g = P(f)$. Soient $y \in E$ et Q un polynôme tels que $y = Q(f)v$; en notant que g commute avec $P(f)$ nous avons

$$g(y) = g\big(Q(f)v\big) = Q(f)\big(g(v)\big) = Q(f)\big(P(f)v\big) = P(f)Q(f)v = P(f)y. \tag{10.662}$$

Donc $g = P(f)$.

(3) **(3) implique (1)**

Nous avons les inégalités :

$$n \leqslant \dim\big(\mathcal{C}(f)\big) = \dim\big(\mathbb{K}[f]\big) = \deg(\mu) \leqslant \deg(\chi) = n. \tag{10.663}$$

La première inégalité est le lemme 10.303. Ensuite, toutes les inégalités se trouvent être des égalités. En particulier $\deg(\mu) = n$, ce qui signifie que $\mu = \chi$ parce que μ est un polynôme diviseur de χ, de même degré que χ et unitaire tout comme χ.

□

CORooAKQEooSliXPp

Corolaire 10.305 ([159]).
En suivant les notations sur les extensions de corps de base de la section 10.15, l'endomorphisme $f\colon E \to F$ est cyclique si et seulement si l'endomorphisme $f_{\mathbb{L}}\colon E_{\mathbb{L}} \to F_{\mathbb{L}}$ est cyclique.

Démonstration. Nous savons par le théorème 10.304 qu'un endomorphisme est cyclique si et seulement si son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique. Or par les propositions 10.285 et 10.286, nous savons que ces polynômes sont identiques pour f et pour $f_{\mathbb{L}}$. □

THOooHUFBooReKZWG

Théorème 10.306 (Similitude et extension de corps[159]).
Les applications linéaires $f, g\colon E \to E$ sont semblables si et seulement si $f_{\mathbb{L}}$ et $g_{\mathbb{L}}$ le sont.

[127] Dans toute la suite, nous devrions écrire μ_f et $\mu_{f,a}$ mais nous omettons d'indiquer explicitement la dépendance en f.

Démonstration. En ce qui concerne le sens direct, si il existe $m \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $f = mgm^{-1}$ alors il suffit d'appliquer le lemme 10.281 pour avoir $f_{\mathbb{L}} = m_{\mathbb{L}} g_{\mathbb{L}} m_{\mathbb{L}}^{-1}$.

Nous considérons les invariants de similitude de f du théorème 10.292. Il existe une unique suite de polynômes unitaires μ_i $(i = 1, \dots, s)$ tels que $\mu_{i+1} \mid \mu_i$ et pour laquelle nous avons une décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ pour laquelle $f|_{E_i} : E \to E_i$ est cyclique et de polynôme minimal μ_i.

Nous avons aussi $E_{\mathbb{L}} = (E_1)_{\mathbb{L}} \oplus \dots \oplus (E_s)_{\mathbb{L}}$ et les $(E_i)_{\mathbb{L}}$ sont stables sous $f_{\mathbb{L}}$ qui y sera également cyclique (corolaire 10.305). De plus le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}|_{(E_i)_{\mathbb{L}}}$ est également μ_i.

Autrement dit, la suite μ_i est également la suite des invariants de similitude de $f_{\mathbb{L}}$. La remarque 10.293 nous permet de conclure que f et g sont semblables si et seulement si $f_{\mathbb{L}}$ et $g_{\mathbb{L}}$ le sont. □

10.18 Hyperplans et formes linéaires

DEFooEWDTooQbUQws

Proposition-Définition 10.307 (Hyperplan[1, 364, 365])**.**
Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, et un sous-espace vectoriel H. Il y a équivalence entre

ITEMooUCWQooToKrop

(1) E possède une droite vectorielle supplémentaire[128] à H,

ITEMooXVIPooNxijzA

(2) Il existe une forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{K}$ telle que $H = \ker(f)$.

Avec ça nous pouvons poser deux définitions.

*(1) Quand les conditions (1) et (2) sont vérifiées, nous disons que H est un **hyperplan vectoriel** de E.*

*(2) Un **hyperplan** (affin) de E est une partie de la forme $H + a$ où H est un hyperplan vectoriel et $a \in E$.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Soit V une droite vectorielle supplémentaire de H : pour tout $x \in E$, il existe des uniques $x_H \in H$ et $x_V \in V$ tels que $x = x_H + x_V$. Si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base de H, nous prouvons que $B = \{e_i\}_{i\in I} \cup \{v\}$ est une base de E. Le fait que B soit générateur est immédiat. Pour que ce soit libre, nous supposons que $\sum_{i\in I} a_i e_i + bv = 0$ ($a_i \neq 0$ que pour une partie finie de I).

Le vecteur 0 s'écrit dans la décomposition $E = H \oplus V$ de façon unique $0 = 0 + 0$. Nous avons donc $\sum_i a_i e_i = 0$ et $b = 0$. Vu que $\{e_i\}_{i\in I}$ est libre, nous en déduisons également $a_i = 0$ pour tout i.

Maintenant nous posons

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{K} \\ x_H + bv &\mapsto b. \end{aligned} \tag{10.664}$$

C'est une application linéaire et $H = \ker(f)$.

(2) **(2) ⇒ (1)** Nous considérons une application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ et $H = \ker(f)$. Vu que $f \neq 0$, nous pouvons considérer un élément $v \in E$ tel que $f(v) \neq 0$. Par linéarité nous avons aussi $\mathrm{Image}(f) = \mathbb{K}$. Donc $\{f(v)\}$ est une base de $\mathrm{Image}(f)$.

Nous sortons maintenant le théorème du rang 6.53. Si B est une base de H, alors $B \cup \{v\}$ est une base de E. Donc $V = \mathbb{K}v$ est un supplémentaire de H dans E.

□

PROPooUZZDooPAKmvN

Proposition 10.308 ([366])**.**
Soit un espace vectoriel de dimension finie n. Une partie est un hyperplan si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Proposition 10.309 ([158])**.**
Soit un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit un sous-espace vectoriel V de E de dimension s. Alors V est une intersection de $n - s$ hyperplans de E.

Démonstration. Nous considérons une base de V que nous complétons[129] en une base de E : si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, nous avons $x \in V$ si et seulement si $x_{s+1} = \dots = x_n = 0$. Nous considérons les formes linéaires

$$\begin{aligned} \varphi_i : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i, \end{aligned} \tag{10.665}$$

[128] Définition 6.23.
[129] Théorème de la base incomplète, 6.15(4).

et nous considérons les parties $H_i = \ker(\varphi_i)$ qui sont de hyperplans (définition 10.307). Les H_i avec $s+1 \leqslant i \leqslant n$ sont une famille de $n-s$ hyperplans qui vérifient

$$V = \bigcap_{i=s+1}^{n} \ker(\varphi_i) \tag{10.666}$$

parce que $x \in \ker(\varphi_i)$ si et seulement si $x_i = 0$.

Donc V peut être écrit comme intersection de $n-s$ hyperplans de E. □

PROPooRCLNooJpIMMl

Proposition 10.310 ([158]).
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. Si H_i sont des hyperplans de E, alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant n - m. \tag{10.667}$$

Démonstration. N'oubliez pas de prouver que $\bigcap_{i=1}^{m} H_i$ est un espace vectoriel. À part ça, nous faisons une petite récurrence.

(1) **Pour $m = 2$** Nous savons déjà par la proposition 6.55 que

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2). \tag{10.668}$$

De plus $\dim(H_1 + H_2) \leqslant n$. En remplaçant, par les valeurs,

$$\begin{aligned}
\dim(H_1 \cap H_2) &= \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) && \text{(10.669a)}\\
&= n - 1 + n - 1 - \dim(H_1 + H_2) && \text{(10.669b)}\\
&\geqslant 2n - 2 - n && \text{(10.669c)}\\
&= n - 2. && \text{(10.669d)}
\end{aligned}$$

Donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2$.

(2) **La récurrence** Nous calculons $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m \cap H_{m+1})$ en commençant encore par la proposition 6.55 :

$$\begin{aligned}
\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m \cap H_{m+1}) &= \underbrace{\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m)}_{\leqslant n-m} + \dim(H_{m+1}) && \text{(10.670a)}\\
&\quad - \underbrace{\dim\big((H_1 \cap \ldots H_m) + H_{m+1}\big)}_{\leqslant n} && \text{(10.670b)}\\
&\geqslant n - m + (n-1) - n && \text{(10.670c)}\\
&= n - m - 1. && \text{(10.670d)}
\end{aligned}$$

C'est bon pour la récurrence.

□

10.18.1 Hyperplan dans un espace euclidien

PROPooHLRRooHWtHSR

Proposition 10.311 ([1]).
Soit un espace euclidien $(E, \cdot)$. Soit un hyperplan vectoriel[130] *H.*

(1) Il existe $n \in E$ tel que

$$H = \{x \in E \text{ tel que } x \cdot n = 0\}. \tag{10.671}$$

(2) Si $n_1, n_2 \in E$ sont tels que

$$H = \{x \in E \text{ tel que } x \cdot n_1 = 0\} = \{x \in E \text{ tel que } n_2 \cdot x = 0\}, \tag{10.672}$$

alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $n_2 = \lambda n_1$.

[130] Définition 10.307.

10.19 Trouver la matrice d'une symétrie donnée

SecMtrSym

Les notions de déterminants, produit scalaire et vectoriels[131] donnent une bonne intuition géométrique des matrices. Nous pouvons alors chercher les matrices de quelques symétries dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

10.19.0.1 Symétrie par rapport à un plan

Comment trouver par exemple la matrice A qui donne la symétrie autour du plan $z=0$? La définition d'une telle symétrie est que les vecteurs du plan $z=0$ ne bougent pas, tandis que les vecteurs perpendiculaires changent de signe. Ces informations vont permettre de trouver comment A agit sur une base de $\mathbb{R}^3$. En effet :

(1) Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est dans le plan $z=0$, donc il ne bouge pas,

(2) le vecteur $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est également dans le plan, donc il ne bouge pas non plus,

(3) et le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan $z=0$, donc il va changer de signe.

Cela nous donne directement les valeurs de A sur la base canonique et nous permet d'écrire

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{10.673}$$

Pour écrire cela, nous avons juste mis en colonne les images des vecteurs de base. Les deux premiers n'ont pas changé et le troisième a changé.

Et si maintenant on donne un plan moins facile que $z=0$? Le principe reste le même : il faudra trouver deux vecteurs qui sont dans le plan (et dire qu'ils ne bougent pas), et puis un vecteur qui est perpendiculaire au plan[132], et dire qu'il change de signe.

Voyons ce qu'il en est pour le plan $x=-z$. Il faut trouver deux vecteurs linéairement indépendants dans ce plan. Prenons par exemple

$$f_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{10.674}$$

EqfudE

Nous avons

$$\begin{aligned}Af_1&=f_1\\Af_2&=f_2.\end{aligned} \tag{10.675}$$

Afin de trouver un vecteur perpendiculaire au plan, calculons le produit vectoriel :

$$f_3=f_1\times f_2=\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\0&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-e_1-e_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{10.676}$$

Nous avons

$$Af_3=-f_3. \tag{10.677}$$

Afin de trouver la matrice A, il faut trouver Ae_1, Ae_2 et Ae_3. Pour ce faire, il faut d'abord écrire $\{e_1,e_2,e_3\}$ en fonction de $\{f_1,f_2,f_3\}$. La première des équations (10.674) dit que

$$f_1=e_2. \tag{10.678}$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}f_2&=e_1-e_3\\f_3&=-e_1-e_3.\end{aligned} \tag{10.679}$$

[131] Définitions 10.14, 10.163 et 12.49.

[132] Pour le trouver, penser au produit vectoriel.

La somme de ces deux équations donne $-2e_3 = f_2 + f_3$, c'est-à-dire

$$e_3 = -\frac{f_2 + f_3}{2} \tag{10.680}$$

Et enfin, nous avons

$$e_1 = \frac{f_2 - f_3}{2}. \tag{10.681}$$

Maintenant nous pouvons calculer les images de e_1, e_2 et e_3 en faisant

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \frac{Af_2 - Af_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ Ae_2 &= Af_1 = f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Ae_3 &= -\frac{f_2 - f_3}{2} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10.682}$$

La matrice A s'écrit maintenant en mettant les trois images trouvées en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.683}$$

10.19.0.2 Symétrie par rapport à une droite

Le principe est exactement le même : il faut trouver trois vecteurs f_1, f_2 et f_3 sur lesquels on connaît l'action de la symétrie. Ensuite il faudra exprimer e_1, e_2 et e_3 en termes de f_1, f_2 et f_3.

Le seul problème est de trouver les trois vecteurs f_i. Le premier est tout trouvé : c'est n'importe quel vecteur sur la droite. Pour les deux autres, il faut un peu ruser parce qu'il faut impérativement qu'ils soient perpendiculaire à la droite. Pour trouver f_2, on peut écrire

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \tag{10.684}$$

et puis fixer le x pour que le produit scalaire de f_2 avec f_1 soit nul. Si il n'y a pas moyen (genre si f_1 a sa troisième composante nulle), essayer avec $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une fois que f_2 est trouvé (il y a des milliards de choix possibles), trouver f_3 est super facile : prendre le produit vectoriel entre f_1 et f_2.

10.19.0.3 En résumé

La marche à suivre est

(1) Trouver trois vecteurs f_1, f_2 et f_3 sur lesquels on connaît l'action de la symétrie. Typiquement : des vecteurs qui sont sur l'axe ou le plan de symétrie, et puis des perpendiculaires. Pour la perpendiculaire, penser au produit scalaire et au produit vectoriel.

(2) Exprimer la base canonique e_1, e_2 et e_3 en termes de f_1, f_2, f_3.

(3) Trouver Ae_1, Ae_2 et Ae_3 en utilisant leur expression en termes des f_i, et le fait que l'on connaisse l'action de A sur les f_i.

(4) La matrice s'obtient en mettant les images des e_i en colonnes.

10.20 Théorème de Burnside

LemwXXzIt

Lemme 10.312.
Soit P, un polynôme sur $\mathbb{K}$. Une racine de P est une racine simple si et seulement si elle n'est pas racine de P'.

ThoBurnsideoPuCtS

Théorème 10.313.
Toute représentation[133] *d'un groupe abélien d'exposant fini sur $\mathbb{C}^n$ a une image finie.*

Démonstration. Étant donné que G est d'exposant fini, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^\alpha = e$ pour tout $g \in G$. Le polynôme $P(X) = X^\alpha - 1$ est scindé à racines simples. En effet tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé. Le fait qu'il soit à racines simples provient du lemme 10.312 parce que si $a^\alpha = 1$, alors il n'est pas possible d'avoir $\alpha a^{\alpha-1} = 0$.

Par ailleurs $P(g) = 0$. Le fait que nous ayons un polynôme annulateur de g scindé à racines simples implique que g est diagonalisable (théorème 10.220). Le fait que G soit abélien montre qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle tous les éléments de G sont diagonaux. Nous devons par conséquent montrer qu'il existe un nombre fini de matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{10.685}$$

Nous savons que $\lambda_i^\alpha = 1$ parce que $g^\alpha = \mathbb{1}$, par conséquent chacun des λ_i est une racine de l'unité dont il n'existe qu'un nombre fini. □

ThooJLTit

Théorème 10.314 (Burnside[121, 367])**.**
Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est fini si et seulement si il est d'exposant[134] *fini.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Si G est fini, l'ordre de ses éléments divise $|G|$ (corolaire 2.74 au théorème de Lagrange) et l'exposant est le PPCM qui est donc fini également. Le théorème est déjà démontré dans un sens.

Dans l'autre sens, nous notons $e < \infty$ l'exposant de G, et nous allons prouver que l'ensemble G est fini. Nous commençons par remarquer que tous les éléments de G sont des racines du polynôme $X^e - 1$, et ensuite nous nous lançons dans le travail.

(1) **Générateurs**

Le groupe G est une partie de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ dont nous considérons l'algèbre engendrée[135] $\mathcal{G}$. Soit $C_1, \dots, C_r$ une famille génératrice de $\mathcal{G}$ constituée d'éléments de G et la fonction

$$\begin{aligned} \tau\colon G &\to \mathbb{C}^r \\ A &\mapsto \big(\mathrm{Tr}(AC_1), \dots, \mathrm{Tr}(AC_r)\big). \end{aligned} \tag{10.686}$$

(2) **τ est injective** Soient $A, B \in G$ tels que $\tau(A) = \tau(B)$. Si C_i est un générateur de G, nous avons $\mathrm{Tr}(AC_i) = \mathrm{Tr}(BC_i)$ et par la linéarité de la trace, nous avons

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM) \tag{10.687}$$

EquCYmKW

pour tout $M \in G$. Notons par ailleurs

$$N = AB^{-1} - \mathbb{1}, \tag{10.688}$$

qui est diagonalisable parce que $AB^{-1} \in G$ et donc est annulé par le polynôme $X^e - 1$ qui est scindé à racines simples. Du coup AB^{-1} est diagonalisable ; posons $PAB^{-1}P^{-1} = D$, alors $P\big(AB^{-1} - \mathbb{1}\big)P^{-1} = D - \mathbb{1}$ qui est encore diagonale. Donc N est diagonalisable.

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\big((AB^{-1})^p\big) &= \mathrm{Tr}\big(AB^{-1}(AB^{-1})^{p-1}\big) && && (10.689a)\\ &= \mathrm{Tr}\big(BB^{-1}(AB^{-1})^{p-1}\big) && (10.687) && (10.689b)\\ &= \mathrm{Tr}\big((AB^{-1})^{p-1}\big). && && (10.689c) \end{aligned}$$

[133] Définition 6.153.
[134] Définition 3.139.
[135] Définition 3.113.

En continuant nous obtenons

$$\mathrm{Tr}\left((AB^{-1})^p\right) = \mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = n. \tag{10.690}$$

D'autre part,

$$N^k = (AB^{-1} - \mathbb{1})^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{p}{k} (-1)^{k-p} (AB^{-1})^p \tag{10.691}$$

En prenant la trace, et en tenant compte du fait que $\mathrm{Tr}\left((AB^{-1})^p\right) = n$,

$$\mathrm{Tr}(N^k) = \sum_{p=0}^{k} \binom{p}{k} (-1)^{k-p} n = n(1-1)^k = 0. \tag{10.692}$$

Donc la trace de N^k est nulle et le lemme 10.212 nous enseigne que N est alors nilpotente. Étant donné qu'elle est aussi diagonalisable, elle est nulle. Nous en concluons que $AB^{-1} = \mathbb{1}$ et donc que $A = B$. La fonction τ est donc injective.

(3) **Nombre fini de valeurs**

Les éléments de G sont annulés par $X^e - 1$ qui est un polynôme scindé à racines simples. Dons le polynôme minimal d'un élément de G est (a fortiori) scindé à racines simples et le théorème 10.220 nous assure alors que ces éléments sont diagonalisables. Du coup les valeurs propres des matrices de G sont des racines $e$ièmes de l'unité. Par conséquent les traces des éléments de G ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs : toutes les sommes de n racines $e$ièmes de l'unité. Mais vu que les C_i sont dans G, nous avons

$$\mathrm{Image}(\tau) = \{\mathrm{Tr}(A) \text{ tel que } A \in G\}^r, \tag{10.693}$$

qui est un ensemble fini. Par conséquent G est fini parce que τ est injective.

□

10.21 Ellipsoïde

LemYVWoohcjIX

Lemme 10.315.
Toute matrice peut être décomposée de façon unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Cette décomposition est donnée par

$$S = \frac{M + M^t}{2}, \quad A = \frac{M - M^t}{2} \tag{10.694}$$

subEqHIQoovhiWM

Démonstration. L'existence est une vérification immédiate de $S+A = M$ en utilisant (10.694). Pour l'unicité, si $S + A = S' + A'$ alors $S - S' = A - A'$. Mais $S - S'$ est symétrique et $A - A'$ est antisymétrique ; l'égalité implique l'annulation des deux membres, c'est-à-dire $S = S'$ et $A = A'$. □

DefOEPooqfXsE

Définition 10.316.
*Un **ellipsoïde** dans $\mathbb{R}^n$ centré en v est le lieu des points x vérifiant l'équation*

$$\langle x - v, M(x - v)\rangle = 1 \tag{10.695}$$

EqSNWooXfbTH

où M est une matrice symétrique strictement définie positive[136]*.*

Lorsque nous parlons d'ellipsoïde plein*, il suffit de changer l'égalité en une inégalité.*

Remarque 10.317.
Le fait que M soit symétrique n'est pas tout à fait obligatoire ; la chose important est que toutes les valeurs propres soient strictement positives. En effet si M a toutes ses valeurs propres strictement positives, nous nommons S la partie symétrique de M et A la partie antisymétrique (lemme 10.315). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$x^t Ax = \langle x, Ax\rangle = \langle A^t x, x\rangle = -\langle Ax, x\rangle = -\langle x, Ax\rangle, \tag{10.696}$$

donc $x^t Ax = 0$. L'équation $x^t Mx = 1$ est donc équivalente à $x^t Sx = 1$ (elles ont les mêmes solutions).

De plus S reste strictement définie positive parce que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$0 < x^t Mx = x^t Sx. \tag{10.697}$$

[136] Définition 10.231.

PropWDRooQdJiIr

Proposition 10.318.
Si $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde centrée à l'origine, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle son équation est :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1. \tag{10.698}$$

Démonstration. Nous avons une matrice symétrique strictement définie positive S telle que l'équation soit $\langle x, Sx\rangle = 1$. Le théorème spectral 10.228 nous fournit une base orthonormale $\{e_i\}$ dans laquelle $Se_i = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i > 0$. En substituant dans l'équation $\langle x, Sx\rangle = 1$ nous trouvons l'équation

$$\sum_i \lambda_i x_i^2 = 1. \tag{10.699}$$

En posant $a_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$, nous trouvons le résultat. Cette définition des a_i est toujours possible parce que $\lambda_i > 0$. □

CorKGJooOmcBzh

Corolaire 10.319.
Un ellipsoïde plein centré en l'origine admet une équation de la forme $q(x) \leqslant 1$ où q est une forme quadratique strictement définie positive.

Pour rappel de notation, l'ensemble des formes quadratiques strictement définies positives sur l'espace vectoriel E est noté $Q^{++}(E)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ ait pour équation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1. \tag{10.700}$$

Nous considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, e_i\rangle^2}{a_i^2}. \end{aligned} \tag{10.701}$$

Nous avons évidemment $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant 1\}$. De plus la forme q est strictement définie positive parce que dès que $x \neq 0$, au moins un des produits scalaires $\langle x, e_i\rangle$ est non nul et $q(x) > 0$. □

10.22 Système d'équations linéaires : méthode de Gauss

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on procède comme suit :

(1) Écrire le système sous forme matricielle.

$$\text{p.ex. } \begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2) Se ramener à une matrice avec un maximum de 0 dans la partie de gauche en utilisant les transformations admissibles :

(2a) Remplacer une ligne par elle-même + un multiple d'une autre ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{L_1 - 2.L_2 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2b) Remplacer une ligne par un multiple d'elle-même ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{-L_1 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

(2c) Permuter des lignes.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{L_1 \mapsto L_2' \text{ et } L_2 \mapsto L_1'}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

(3) Retransformer la matrice obtenue en système d'équations.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 3 \end{cases}$$

Remarque 10.320.

- Si on obtient une ligne de zéros, on peut l'enlever :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

- Si on obtient une ligne de zéros suivie d'un nombre non-nul, le système d'équations n'a pas de solution :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ 0x + 0y + 0z = 7 \end{cases} \Rightarrow \textbf{Impossible}$$

- Si on a moins d'équations que d'inconnues, alors il y a une infinité de solutions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Chapitre 11

Analyse réelle : topologie et continuité

11.1 Intervalles

PROPooJJRZooACUmWN

Proposition 11.1.
La liste des intervalles[1] *de* $\mathbb{R}$ *est donnée dans la proposition 4.90.*

ITEMooOEUKooRNNzaJ

(1) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < a\}$ *est ouverte.*

ITEMooGYSQooRhqHnX

(2) $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x > a\}$ *est ouvert*

ITEMooCCPRooYPqFpD

(3) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leqslant a\}$ *n'est ni ouvert ni fermé.*

ITEMooDMPGooQPbpmj

(4) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leqslant x \leqslant b\}$ *est fermé.*

ITEMooCIZXooGNZaun

(5) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x \leqslant b\}$ *n'est ni ouvert ni fermé.*

ITEMooIKLSooFzrgXd

(6) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$ *est ouvert.*

ITEMooCHNKooHxCbaQ

(7) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leqslant x < b\}$ *n'est ni ouvert ni fermé.*

ITEMooZIFNooBwwoGC

(8) $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geqslant a\}$ *n'est ni ouvert ni fermé.*

ITEMooLSIPooZimrIK

(9) $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$ *est ouvert et fermé.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Si $x < a$ alors en prenant $\epsilon < |x - a|$ nous avons $B(x, \epsilon) \subset]-\infty, a[$.
Le complémentaire de $[a, b]$ est donc une union d'ouverts. Elle est ouverte.

(2) **Pour (2)** Même raisonnement que pour (1).

(3) **Pour (3)** La partie $]-\infty, a]$ est ouverte parce que son complémentaire est $]a, \infty[$ ouvert par (2).

(4) **Pour (4)** Le complémentaire est $\{x < a\} \cup \{x > b\}$. La partie $\{x < a\}$ est ouverte par (3). Et la partie $\{x > b\}$ est ouverte par (2). Le complémentaire de $[a, b]$ est donc une union d'ouverts. Elle est ouverte.

(5) **Pour (5)** La partie $]a, b]$ n'est pas ouverte parce que b est dedans alors que $B(b, \epsilon)$ contient $b + \epsilon/2$ qui n'est pas dans $]a, b]$. Elle n'est fermée non plus parce le complémentaire contient a qui a alors le même problème : le complémentaire n'est pas ouvert.

(6) **Pour (6)** Soit $x \in]a, b[$. Nous avons $x > a$ et donc l'existence de $\delta_1 > 0$ tel que $x - \delta_1 > a$. De même il existe $\delta_2 > 0$ tel que $x + \delta_2 < b$. En posant $\epsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ nous avons $B(x, \epsilon) \subset]a, b[$. En effet si $y \in B(x, \epsilon)$ nous avons

$$y > x - \epsilon > x - \delta_1 > a \tag{11.1}$$

et

$$y < x + \epsilon < x + \delta_2 < b. \tag{11.2}$$

[1] Définition 1.31.

(7) **Pour (7)** Même raisonnement que pour (5).

(8) **Pour (8)** Même raisonnement que pour (3).

(9) **Pour (9)** Il est ouvert parce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\delta > 0$, $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}$. Il est fermé parce que son complémentaire est $\varnothing$ qui est ouvert.

□

Remarque 11.2.
L'ensemble $\mathbb{R}$ ne contient pas $+\infty$ et $-\infty$. L'intervalle $[-\infty, 5]$ par exemple, n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

PROPooBWXYooDcwXrp

Proposition 11.3 ([1])**.**
Si I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I = [a, b]$.

Exemple 11.4. (1) Les ensembles $]3, 7[$ et $]-\infty, \pi[$ sont des intervalles ouverts.

(2) Les ensembles $[10, 15]$ et $[-1, +\infty[$ sont des intervalles fermés.

(3) L'ensemble $]-4, -2[\cup]2, 9[$ n'est pas un intervalle (il y a un « trou » entre -2 et 2).

(4) L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle ; par convention, il est à la fois ouvert et fermé.
Un intervalle peut n'être ni ouvert ni fermé ; par exemple $]4, 8]$. Cet intervalle est « ouvert en 4 et fermé en 8 » . △

Définition 11.5 (Fonction, domaine, image, graphe)**.**
*Soient X et Y deux ensembles. Une **fonction** f définie sur X et à valeurs dans Y est une partie de $X \times Y$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$.*

11.6.
Notons qu'il n'est pas demandé que pour tout y, il existe x tel que $(x, y) \in f$. Autrement dit, la notation « $f : X \to Y$ » ne suppose pas que f est surjective sur Y. Mais elle doit être définie sur tout X.
Nous écrivons $y = f(x)$ pour dire $(x, y) \in f$.

- La partie de X qui contient tous les x sur lesquels f peut opérer est dite **domaine** de f. Le domaine de f est indiqué par Domaine f.
- L'élément de $y \in Y$ associé par f à un élément $x \in$ Domaine f (c'est-à-dire $f(x) = y$) est appellé **image** de x par f. L'**image** de la fonction f est la partie de Y qui contient les images de tous les éléments de Domaine f. L'image de f est indiquée par $\Im f$.
- Le **graphe** de f est l'ensemble de tous les couples $(x, f(x))$ pour $x \in$ Domaine f. Le graphe de f est une partie de l'ensemble noté $X \times Y$ et il est indiqué par Graph f. Dans ce chapitre $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, donc le graphe de f est contenu dans le plan cartésien.

PROPooVLHWooKiAQTr

Proposition 11.7 ([1])**.**
La fonction $x \mapsto x^2$ est :

(1) Décroissante[2] *sur l'intervalle $]-\infty, 0]$*

(2) Croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$

(3) Ni croissante ni décroissante sur l'intervalle $[-4, 3]$.

11.2 Application réciproque

11.2.1 Définitions

Les définitions d'injection, surjection, bijection et d'application réciproque sont les définitions 1.15 et 1.19.

EXooCWYHooLEciVj

Exemple 11.8. (1) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ parce qu'il n'existe aucun x tel que $x^2 = -1$.

[2] Définition 1.24.

(2) Nous verrons un peu plus tard (14.419) que la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{11.3}$$

est une bijection. Notez que c'est la même fonction que celle de l'exemple précédent. Seul l'intervalle sur lequel nous nous plaçons a changé.

(3) La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [0,\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{11.4}$$

n'est pas une bijection parce qu'il existe plusieurs x pour lesquels $f(x) = 4$.

En conclusion : il est très important de préciser les domaines des fonctions considérées. △

Remarque 11.9.
Dire que la fonction $f\colon I \to J$ est bijective, c'est dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x peut être résolue de façon univoque pour tout $y \in J$.

LEMooSDMMooYYDDLs

Lemme 11.10.
Toute fonction strictement monotone sur un intervalle est injective.

Démonstration. Supposons que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante. Soient $a \neq b$ dans I. Supposons que $a < b$. Alors $f(a) < f(b)$ et donc $f(a) \neq f(b)$. Idem si $a > b$. □

Exemple 11.11.
Trouvons la fonction réciproque de la fonction affine $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. Si $y \in \mathbb{R}$, le nombre $f^{-1}(y)$ est la valeur de x pour laquelle $f(x) = y$. Il s'agit donc de résoudre

$$3x - 2 = y \tag{11.5}$$

par rapport à x. La solution est $x = \frac{y+2}{3}$ et donc nous écrivons

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}. \tag{11.6}$$

△

11.2.2 Graphe de la fonction réciproque

Par définition le graphe de la fonction f est l'ensemble des points de la forme (x, y) vérifiant $y = f(x)$. Afin de déterminer le graphe de la bijection réciproque nous pouvons faire le raisonnement suivant.

Le point (x_0, y_0) est sur le graphe de f

⇔

La relation $f(x_0) = y_0$ est vérifiée

⇔

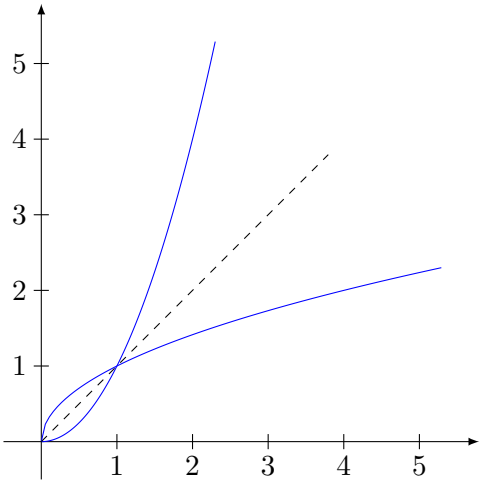
La relation $x_0 = f^{-1}(y_0)$ est vérifiée

⇔

Le point (y_0, x_0) est sur le graphe de f^{-1}.

À retenir 11.12
Dans un repère orthonormal, le graphe de la bijection réciproque est obtenu à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le dessin suivant montre le cas de la courbe de la fonction carré comparé à celle de la racine carrée.



11.3 Topologie sur l'ensemble des réels

SECooGKHYooMwHQaD

Nous allons à présent donner la topologie sur $\mathbb{R}$ et ainsi résoudre les questions laissées en suspens lors de la construction des réels, voir 4.32.

Afin de pouvoir étudier la topologie des espaces métriques, il faut connaître quelques propriétés des réels, parce que nous allons étudier la fonction « distance » qui est une fonction continue à valeurs dans les réels.

La valeur absolue de la définition 1.121 permet de définir une norme sur $\mathbb{R}$.

LEMooBNAPooBTtXnX

Lemme 11.13.
L'application

$$x \mapsto |x| \tag{11.7}$$

est une norme[3] *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Grâce au lemme 1.122(5), on a, pour tout $x,\ y,\ \lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $|x| = 0$ implique $x = 0$,

(2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$,

(3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,

et donc, les conditions de la définition 9.232 sont immédiatement vérifiées. □

DEFooNYGIooVGHSIA

Définition 11.14 (Topologie sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$)**.**
Le lemme 11.13 donne une norme sur $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{Q}$ *à partir de la valeur absolue. La définition 9.158 donne alors une structure d'espace topologique. Hors cas rarissimes qui seront signalés, nous utiliserons toujours cette topologie sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{Q}$.

PropooUHNZooOUYIkn

Proposition 11.15.
Les rationnels sont denses dans les réels[4].

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nous devons prouver l'existence d'un rationnel dans $B(x, \epsilon)$. Le lemme 4.60 dit qu'il existe un rationnel dans $]x - \epsilon/2, x + \epsilon/2[$ et donc dans $B(x, \epsilon)$. □

PropSLCUooUFgiSR

Proposition 11.16 ([1])**.**
Quel que soit le réel x*, il existe une suite croissante de rationnels convergente vers* x.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}$; comme $x - \delta$ et x sont des réels, le lemme 4.60 donne un élément $q_\delta \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x - \delta < q_\delta < x. \tag{11.8}$$

Il suffit alors de pêcher parmi ces q_δ pour trouver une suite croissante, et on montrera que cette suite converge vers x.

[3] Définition 9.232.
[4] Pour les topologies usuelles données en la définition 11.14.

Soit x_0 un rationnel plus petit que x. Nous posons $\delta_0 = x - x_0$ et ensuite :

$$\begin{cases} \delta_i = x - x_i & \text{(11.9a)} \\ x_{i+1} = q_{\delta_i/2} \in \mathbb{Q}. & \text{(11.9b)} \end{cases}$$

Ainsi nous avons pour tout i les inégalités

$$x_i = x - \delta_i < x - \frac{\delta_i}{2} < x_{i+1} < x. \tag{11.10}$$

La suite (x_i) est donc une suite de rationnels, croissante et toujours plus petite que x. Mais nous avons à chaque étape $\delta_{i+1} < \frac{\delta_i}{2}$, ce qui implique que la suite des δ_i converge vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe k_0 tel que pour tout $k > k_0$, $\delta_k < \epsilon$. Pour un tel k, nous avons alors

$$x_{k+1} \in B(x, \frac{\delta_k}{2}) \subset B(x, \epsilon). \tag{11.11}$$

Tous les x_k, pour $k > k_0 + 1$, sont tels que $|x - x_k| < \epsilon$: la suite des x_k converge donc vers x. □

11.3.1 Compacité pour les réels

PROPooBFSAooKSugMj

Proposition 11.17.
Les parties compactes[5] *de* $\mathbb{R}$ *sont fermées et bornées.*

Démonstration. Prouvons d'abord qu'un ensemble compact est borné. Pour cela, supposons que K est un compact non borné vers le haut[6].

Nous posons $A_0 =]-\infty, 1[$ et $A_n =]n-1, n+1[$. Ces ouverts recouvrent $\mathbb{R}$ et donc K. Hélas tout choix d'un nombre fini des A_n est borné, et ne recouvre donc pas K. Les $\{A_i\}_{i=0,\dots,}$ forment un recouvrement de K par des ouverts dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.

Cela prouve que K doit être borné.

Pour prouver que K est fermé, nous allons prouver que le complémentaire est ouvert. Et pour cela, nous allons prouver que si le complémentaire n'est pas ouvert, alors nous pouvons construire un recouvrement de K dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini.

Si $\mathbb{R} \setminus K$ n'est pas ouvert, il possède un point, disons x, tel que tout voisinage de x intersecte K. Soit $B(x, \epsilon_1)$, un de ces voisinages, et prenons $k_1 \in K \cap B(x, \epsilon_1)$. Ensuite, nous prenons ϵ_2 tel que k_1 ne soit pas dans $B(x, \epsilon_2)$, et nous choisissons $k_2 \in K \cap B(x, \epsilon_2)$. De cette manière, nous construisons une suite de $k_i \in K$ tous différents et de plus en plus proches de x. Prenons un recouvrement quelconque par des ouverts de la partie de K qui n'est pas dans $B(x, \epsilon_1)$. Les nombres k_i ne sont pas dans ce recouvrement.

Nous ajoutons à ce recouvrement les ensembles $\mathcal{O} =]k_i, k_{i+1}[$. Le tout forme un recouvrement (infini) par des ouverts dont il n'y a pas moyen de tirer un sous-recouvrement fini, pour exactement la même raison que la première fois. □

ThoBOrelLebesgue

Théorème 11.18 (Borel-Lebesgue)**.**
Un intervalle de $\mathbb{R}$ *est compact si et seulement si il est de la forme* $[a, b]$.

Démonstration. Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont listés dans la proposition 4.90. Un compact est fermé et borné (proposition 11.17). Donc les intervalles dont une borne est $\pm\infty$ ne sont pas compacts. Parmi les intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$, seul le dernier est fermé. Nous avons prouvé que si un intervalle est compact, alors il est de la forme $[a, b]$.

Nous prouvons à présent l'implication inverse : tous les intervalles de la forme $[a, b]$ sont compacts.

Soit Ω, un recouvrement du segment $[a, b]$ par des ouverts, c'est-à-dire que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}. \tag{11.12}$$

Nous notons par M le sous-ensemble de $[a, b]$ des points m tels que l'intervalle $[a, m]$ peut être recouvert par un sous-ensemble fini de Ω. C'est-à-dire que M est le sous-ensemble de $[a, b]$ sur lequel le théorème est vrai. Le but est maintenant de prouver que $M = [a, b]$.

M est non vide En effet, $a \in M$ parce qu'il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega$ tel que $a \in \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ tout seul recouvre l'intervalle $[a, a]$.

[5] Définition 9.125.

[6] Nous laissons à titre d'exercice le cas où K est borné par le haut et pas par le bas.

M **est un intervalle** Soient m_1, $m_2 \in M$. Le but est de montrer que si $m' \in [m_1, m_2]$, alors $m' \in M$. Il y a un sous-recouvrement fini de l'intervalle $[a, m_2]$ (par définition de $m_2 \in M$). Ce sous-recouvrement fini recouvre évidemment aussi $[a, m']$ parce que $[a, m'] \subseteq [a, m_2]$, donc $m' \in M$.

M **est un ensemble ouvert** Soit $m \in M$. Le but est de prouver qu'il y a un ouvert autour de m qui est contenu dans M. Admettons que Ω' soit un sous-recouvrement fini qui contienne l'intervalle $[a, m]$. Dans ce cas, on a un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega'$ tel que $m \in \mathcal{O}$. Tous les points de $\mathcal{O}$ sont dans M, puisqu'ils sont tous recouverts par Ω'. Donc $\mathcal{O}$ est un voisinage de m contenu dans M.

M **est un ensemble fermé** M est un intervalle qui commence en a, en contenant a, et qui finit on ne sait pas encore où. Il est donc soit de la forme $[a, m]$, soit de la forme $[a, m[$. Nous allons montrer que M est de la première forme en démontrant que M contient son supremum s. Ce supremum est un élément de $[a, b]$, et donc il est contenu dans un des ouverts de Ω. Disons $s \in \mathcal{O}_s$. Soit c, un élément de $\mathcal{O}_s$ strictement plus petit que s ; étant donné que s est supremum de M, cet élément c est dans M, et donc on a un sous-recouvrement fini Ω' qui recouvre $[a, c]$. Maintenant, le sous-recouvrement constitué de Ω' et de $\mathcal{O}_s$ est fini et recouvre $[a, s]$.

Nous pouvons maintenant conclure : le seul intervalle non vide de $[a, b]$ qui soit à la fois ouvert et fermé est $[a, b]$ lui-même (proposition 9.121), ce qui prouve que $M = [a, b]$, et donc que $[a, b]$ est compact[7]. □

LemOACGWxV

Lemme 11.19 ([368]).
Si $a < b \in \mathbb{R}$ alors le segment $[a, b]$ est compact[8].

Démonstration. Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts. Nous posons

$$M = \{x \in [a, b] \text{ tel que } [a, x] \text{ admet un sous-recouvrement fini extrait de } \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}\}. \tag{11.13}$$

Notre but est de prouver que $b \in M$.

(1) a **est dans** M Le point a est naturellement dans un des $\mathcal{O}_i$. L'intervalle $[a, a]$ est donc recouvert par un seul des $\mathcal{O}_i$.

(2) M **est un intervalle** Soient $m \in M$ et $m' \in [a, m[$. Le sous-recouvrement fini qui recouvre $[a, m]$ recouvre a fortiori $[a, m']$.

(3) **Les trois possibilités restantes** À ce niveau de la preuve, il reste trois possibilités pour M soit il est de la forme $[a, c]$ ou $[a, c[$ avec $c < b$, soit il est de la forme $[a, b]$. Nous allons maintenant éliminer les deux premiers cas.

(4) **Ce que** M **n'est pas** D'abord M n'est pas de la forme $[a, c[$ avec $c < b$. Par l'absurde, commençons par considérer $\mathcal{O}_{i_0}$ un ouvert du recouvrement qui contient c ; choisissons $m \in \mathcal{O}_{i_0}$ tel que $m < c$. Alors $m \in M$, et, si nous joignons $\mathcal{O}_{i_0}$ à un recouvrement fini de $[a, m]$ alors nous avons un recouvrement fini de $[a, c]$. On en déduit $c \in M$.

Ensuite M n'est pas de la forme $[a, c]$ avec $c < b$. En effet si on a un recouvrement fini de $[a, c]$ par des ouverts, alors un de ces ouverts contient c et donc contient des éléments de $[a, b]$ plus grands que c.

Nous déduisons que $M = [a, b]$ et qu'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini recouvrant $[a, b]$. □

LemCKBooXkwkte

Lemme 11.20 ([1]).
Si K_1 et K_2 sont des compacts dans $\mathbb{R}$ alors $K_1 \times K_2$ est compact dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $K_1 \times K_2$ par des ouverts ; grâce au lemme 9.135 nous pouvons supposer que ce sont des carrés. Pour chaque $x \in K_1$, l'ensemble $\{x\} \times K_2$ est compact et donc recouvert par un nombre fini des $\mathcal{O}_i$. Soit R_x un ensemble fini des $\mathcal{O}_i$ recouvrant $\{x\} \times K_2$.

Comme R_x est une collection finie de carrés, nous pouvons considérer m_x, le minimum des rayons. L'ensemble K_1 est recouvert par les boules $B(x, m_x)$ et il existe donc une collection finie de $\{x_i\}_{i \in A}$ tels que $B(x_i, m_{x_i})$ recouvre K_1.

Alors $\{R_{x_i}\}_{i \in A}$ recouvre $K_1 \times K_2$ parce que R_{x_i} recouvre l'ensemble $B(x_i, m_{x_i}) \times \{K_2\}$. □

DEFooCNCJooWgCCrF

Définition 11.21 (Partie inductive[369, 370]).
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Une partie S de $[a, b]$ est ***inductive*** *si*

(1) $a \in S$,

[7] Si vous n'aimez pas le coup du fermé et ouvert, le lemme 11.19 donne une autre preuve.
[8] Définition 9.125

(2) *Si $a \leqslant x < b$ et si $x \in S$ alors il existe $y > x$ tel que $[x, y] \subset S$.*

(3) *Si $a < x \leqslant b$ et si $[a, x[\subset S$, alors $x \in S$.*

PROPooQVQKooIjWBrk

Proposition 11.22 ([369]).
L'unique partie inductive[9] *de $[a, b]$ est $[a, b]$ lui-même.*

Démonstration. Le fait que $[a, b]$ soit inductif dans $[a, b]$ est immédiat. Nous prouvons que c'est la seule. Soit S inductif dans $[a, b]$. Nous posons $S' = [a, b] \setminus S$. Si S' est non vide, nous pouvons considérer le nombre $\inf(S')$.

(1) **Nous avons$\inf(S') > a$** D'abord nous savons que $\inf(S') \geqslant a$ parce que S' est une partie de $[a, b]$. De plus, vu que $a \in S$ il existe $y > a$ tel que $[a, y] \subset S$. Donc $S' \subset]y, b]$, de telle sorte que $\inf(S') \geqslant y > a$.

(2) **Si $\inf(S') \in S$** Si $\inf(S') = b$ alors $S = [a, b]$ et la preuve est faite. Supposons $\inf(S') < b$. Le nombre $\inf(S')$ vérifie $a < \inf(S') < b$ et $\inf(S') \in S$. Il existe donc $y > \inf(S')$ tel que $[\inf(S'), y] \subset S$. Nous avons alors $[a, y] \subset S$ et donc $\inf(S') > y$. Contradiction.

(3) **Si $\inf(S') \in S'$** Dans ce cas $[a, \inf(S')[\subset S$, et vu que S est inductif, $\inf(S') \in S$, contradiction.

Toutes les possibilités (à part $S' = \varnothing$) portant à des contradictions, nous déduisons que $S' = \varnothing$ et donc que $S = [a, b]$. □

11.3.2 Conséquence : les fermés bornés sont compacts

ThoXTEooxFmdI

Théorème 11.23 (Théorème de Borel-Lebesgue).
Une partie d'un espace vectoriel normé réel de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration. Sens direct.

(1) **Compact implique borné** En effet si K est non borné dans E alors K contient une suite (x_n) avec $\|x_n\| > n$. Les boules $B_i(x_i, \frac{1}{3})$ sont disjointes. On pose $\mathcal{O}_0 = \complement \bigcup_i \overline{B(x_i, \frac{1}{5})}$, qui est ouvert comme complément d'un fermé. Pour $i \geqslant 1$ nous posons $\mathcal{O}_i = B(x_i, \frac{1}{4})$. Nous avons

$$K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_i \tag{11.14}$$

mais puisque x_i est uniquement dans $\mathcal{O}_i$, nous ne pouvons pas extraire de sous-recouvrement fini.

(2) **Compact implique fermé** C'est le lemme 9.137(2).

Sens réciproque.

(1) **Un intervalle fermé et borné est compact dans $\mathbb{R}$** C'est le lemme 11.19.

(2) **Un produit de segments est compact** Le produit de deux compacts de $\mathbb{R}$ est un compact dans $\mathbb{R}^2$ par le lemme 11.20.

(3) **Un fermé et borné est compact** Soit K fermé et borné. Puisque K est borné, il est contenu dans un produit de segments. L'ensemble K est donc compact parce que fermé dans un compact, lemme 9.137.

□

LEMooNNHYooITNbyz

Lemme 11.24.
Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors la partie $[a, b]$ est compacte[10] *dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous prouvons que c'est fermé et borné. Le théorème 11.23 fera le reste. Borné, c'est par définition 1.31 d'un intervalle. Pour montrer que $K = [a, b]$ est fermé, nous prouvons que le complémentaire est ouvert. Soit $x \in K^c$; nous allons montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subset K^c$. Il y a deux possibilités : $x < a$ et $x > a$. Nous traitons la seconde.

Étant donné que $a \leqslant x \leqslant b$ est contenu dans K nous avons $x > b$. Le lemme 4.60(1) donne un élément q tel que $b < q < x$. En posant $r = |x - q|/2$ nous avons $B(x, r) \subset \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y > q\}$. Donc si $y \in B(x, r)$ alors $y > q > b$ et donc $y \in K^c$. □

[9] Définition 11.21.
[10] Définition 9.125.

Exemple 11.25 (Compacité de la boule unité)**.**
La boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte parce que fermée et bornée. En dimension infinie, cela n'est plus le cas. Certes la boule unité est encore fermée et bornée, mais elle n'est plus compacte. En effet nous allons donner un recouvrement par des ouverts duquel il ne sera pas possible d'extraire un sous-recouvrement fini.

Autour de chacune des extrémités des vecteurs de base, nous considérons la boule $A_i = B(e_i, \frac{1}{3})$. Ensuite nous considérons aussi l'ouvert

$$B(0,1) \setminus \bigcup_i \overline{B(e_i, \frac{1}{4})}. \tag{11.15}$$

Le tout recouvre $B(0,1)$ mais toutes les premières boules sont nécessaires. △

Le théorème de Bolzano-Weierstrass 9.363 nous permettra de prouver plus simplement la non compacité en dimension infinie. Voir l'exemple 9.214.

11.3.3 Suites et limites dans les réels

11.3.3.1 Limites, convergence

PROPooOSXCooJWXkWH

Proposition 11.26.
Une suite (x_n) dans un espace vectoriel normé E est convergente[11] *si et seulement si il existe un élément $\ell \in E$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - \ell\| < \varepsilon. \tag{11.16}$$

EQooJRAMooEphzcm

Dans ce cas, ℓ est la limite de la suite (x_n).

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Si $x_n \to \ell$ et si $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geqslant N$ nous avons $x_n \in B(\ell, \epsilon)$ (parce que cette boule est un ouvert contenant ℓ). Considérant la définition d'une boule, cette condition s'écrit bien $\|x_n - \ell\| < \epsilon$.

(2) **Sens inverse** Dans l'autre sens, soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenant ℓ. Par définition de la topologie, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. La condition (11.16) nous assure qu'il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geqslant N_\epsilon$ nous ayons

$$x_n \in B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{O}, \tag{11.17}$$

ce qui assure que la suite (x_n) converge vers ℓ pour la topologie métrique de E.

□

Une façon équivalente d'exprimer le critère (11.16) est de dire que pour tout ϵ positif, il existe un rang $N \in \mathbb{R}$ tel que l'intervalle $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ contient tous les termes x_n au-delà de N.

Il est à noter que le rang N dont il est question dans la définition de suite convergente dépend de ϵ.

11.3.4 Opérations sur les limites

PROPooIQOAooJPMoDD

Proposition 11.27 ([1])**.**
Soient des suites à valeurs réelles (a_i) et (b_j). Si elles sont convergentes, alors la suite ab est convergente et

$$\big(\lim_i a_i\big)\big(\lim_j b_j\big) = \lim_i (a_i b_i). \tag{11.18}$$

Démonstration. Nous nommons a et b les limites des suites (a_i) et (b_j). Soit $\epsilon > 0$ ainsi que $i \in \mathbb{N}$. Nous avons la majoration

$$|a_i b_i - ab| \leqslant |a_i b_i - a_i b| + |a_i b - ab| \tag{11.19a}$$
$$\leqslant |a_i||b_i - b| + |b||a_i - a|. \tag{11.19b}$$

Comme la suite (a_i) est convergente, elle est bornée[12]. Nous pouvons donc majorer $|a_i|$ par $R > 0$ qui ne dépend pas de i. Soit $\eta > 0$ tel que $(R + b)\eta < \epsilon$. Alors en prenant i assez grand pour que $|b_i - b| < \eta$ et $|a_i - a| < \eta$, nous avons bien

$$|a_i b_i - ab| \leqslant (R + b)\eta < \epsilon. \tag{11.20}$$

□

[11] Définition 9.14.
[12] Par 9.176. Attention : soyez capable d'adapter au cas présent.

PROPooICZMooGfLdPc

Proposition 11.28.
Soient des suites (x_n) et (y_n) dans un espace vectoriel normé E. Si $x_n \xrightarrow{E} x$ et $y_n \xrightarrow{E} y$, alors

$$x_n + y_n \xrightarrow{E} x + y. \tag{11.21}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons N tel que si $n \geqslant N$, alors $\|x_n - x\| \leqslant \epsilon$ et $\|y_n - y\| \leqslant \epsilon$. En utilisant l'inégalité 9.232(4),

$$\|x_y + y_n - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \leqslant 2\epsilon. \tag{11.22}$$

Donc la suite $(x_n + y_n)$ converge vers $x + y$. □

LEMooGKIPooWgpFTB

Lemme 11.29.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \tag{11.23}$$

est continue.

Démonstration. Pour rappel, la topologie considérée sur $\mathbb{R}^n$ est celle de la définition 9.305. En vertu de la proposition 9.173, il est suffisant de prouver la continuité séquentielle. Soit donc une suite convergente

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (x, y). \tag{11.24}$$

Nous devons prouver que

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x, y). \tag{11.25}$$

La proposition 9.93 nous permet de déduire la convergence composante par composante : $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ et $y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x$. En permutant somme et limite (proposition 11.28) nous avons le calcul

$$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x + y = f(x, y). \tag{11.26}$$

D'où la convergence demandée. □

PROPooQNXVooNtBaxH

Proposition 11.30 ([1, 2])**.**
Le maximum de fonctions continues est continue.

Plus précisément. Soit un espace topologique X. Soit un ensemble fini d'applications continues $f_i\colon X \to \mathbb{R}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max_i f_i(x) \end{aligned} \tag{11.27}$$

est continue.

Démonstration. Nous faisons avec deux fonctions. Pour plus, il suffit de faire une récurrence. Nous avons :

$$\max(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2}. \tag{11.28}$$

Étant donné que la valeur absolue $|.|$ est continue, le résultat découle de la continuité de fonctions composée, de sommes et de produit par un scalaire $(1/2)$. □

11.3.5 Exemples

LEMooNDSKooMsexOq

Lemme 11.31.
Quelques suites usuelles.

ITEMooWTAYooRisBLO

(1) La suite $x_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.

ITEMooOYSEooROKIKs

(2) La suite $x_n = (-1)^n$ ne converge pas.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit $\epsilon > 0$. Le lemme 4.57 nous permet de considérer $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\epsilon}$. Grâce à la proposition 4.70, si $n > N$ nous avons

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon. \tag{11.29}$$

Donc $x_n < \epsilon$ pour tout $n > N$. Et comme $x_n > 0$ pour tout n, nous avons $|x_n| < \epsilon$ et donc $x_n \to 0$.

(2) **Pour (2)** Nous supposons que (x_n) converge vers l. Il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous ayons $|x_n - l| < \frac{1}{2}$. Pour $n = 2N$ nous avons $x_n = 1$ et donc $|1 - l| < \frac{1}{2}$. Pour $n = 2N + 1$ nous avons $x_n = -1$ et donc $|-1 - l| < \frac{1}{2}$.

Le lemme 4.79 donne alors $l > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $l < -1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Contradiction.

□

11.3.6 Limites infinies

Deux limites pour voir comment ça fonctionne.

LEMooWCRSooWXVvcc

Lemme 11.32.
Si $r > 1$ nous avons :

(1) $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = \infty$.

Démonstration. Puisque $r > 1$ nous pouvons écrire $r = 1 + \delta$ avec $\delta > 0$. La formule du binôme de Newton (3.119) nous donne

$$(1 + \delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k > \binom{n}{1} \delta = n\delta. \tag{11.30}$$

La proposition 4.59 ($\mathbb{R}$ est archimédien) nous indique que $n\delta$ est arbitrairement grand lorsque n est grand, quelle que soit $\delta > 0$. Cela finit la preuve de la première limite.

Pour la seconde, nous posons $a_n = \frac{r^n}{n}$. Nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} r. \tag{11.31}$$

Comme $\frac{n}{n+1} \to 1$, la suite $\frac{n}{n+1} r$ tend vers $r > 1$, et en particulier pour tout $\delta > 0$ tel que $r > 1 + \delta$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$,

$$\frac{n}{n+1} r > 1 + \delta. \tag{11.32}$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. En utilisant un produit télescopique,

$$a_{N+k} = a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} > a_N (1 + \delta)^{k-1}. \tag{11.33}$$

Or $(1 + \delta)^{k-1}$ tend vers ∞ lorsque $k \to \infty$ par le premier point. Donc nous avons $\lim_{n\to\infty} r^n/n = \infty$. □

DEFooEWRTooKgShmT

Définition 11.33.
*Nous disons que deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si il existe une application $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que*

(1) pour tout n à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \alpha(n)$

(2) $\alpha(n) \to 1$.

11.3.7 Topologie et matrices

DEFooCQHDooYpUAhG

Lemme-Définition 11.34 (Topologie sur les matrices)**.**
Si $\mathbb{K}$ est un corps valué[13]*, alors l'opération*

$$\begin{aligned} \|.\|_{\mathbb{M}}\colon \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) &\to \mathbb{R}^+ \\ M &\mapsto \max_{kl} \|M_{kl}\|_{\mathbb{K}}. \end{aligned} \tag{11.34}$$

[13] Définition 1.118.

est une norme[14].

Cette norme est appelée ***norme maximum*** *et nous considérons sur* $\mathbb{M}(n\times m,\mathbb{K})$ *la topologie associée à cette norme*[15]

PROPooOEETooPhqWuf

Proposition 11.35.
La multiplication matricielle

$$\begin{aligned} m\colon \mathbb{M}(n,s)\times\mathbb{M}(s,l)&\to\mathbb{M}(n,l)\\ (A,B)&\mapsto AB \end{aligned} \tag{11.35}$$

est une opération continue[16].

Démonstration. D'après la proposition 9.304, nous pouvons tout faire avec la métrique produit. Supposons que $(A_k,B_k)\overset{\mathbb{M}(n,s)\times\mathbb{M}(s,l)}{\longrightarrow}\mathbb{M}(n,l)$, et montrons que $\|m(A_k,B_k)-m(A,B)\|\to 0$. Notre hypothèse nous dit que

$$\|(A_k-A,B_k-B)\|\to 0, \tag{11.36}$$

c'est-à-dire (métrique produit)

$$\max\big\{\|A_k-A\|,\|B_k-B\|\big\}\to 0, \tag{11.37}$$

et donc $A_k\to A$ et $B_k\to B$ séparément. La définition 11.34 nous dit alors que pour tout (ij) nous avons

$$\begin{aligned}(A_k)_{ij}&\to A_{ij}\\ (B_k)_{ij}&\to B_{ij}.\end{aligned} \tag{11.38}$$

Nous avons[SUBEQSooHPHLooXdtxYY]

$$\Big(m(A_k,B_k)-m(A,B)\Big)_{ij}=(A_kB_k)_{ij}-(AB)_{ij} \tag{11.39a}$$

$$=\sum_l\Big((A_k)_{il}(B_k)_{lj}-A_{il}B_{lj}\Big). \tag{11.39b}$$

Soit $\epsilon>0$. Par la proposition 11.27, pour chaque triple (i,j,l), il existe un $u_{ijk}\in\mathbb{N}$ tel que si $k\geqslant u_{ijl}$ nous avons

$$|(A_k)_{il}(B_k)_{lj}-A_{il}B_{lj}|<\epsilon. \tag{11.40}$$

Nous pouvons reprendre (11.39) avec un tel k. Nous avons :

$$\|(A_knB_k)-(A,B)\|<\sum_l\epsilon<s\epsilon. \tag{11.41}$$

□

11.3.8 Suites croissantes et bornées

Une suite est dite **contenue** dans un ensemble A si $x_n\in A$ pour tout n. Une suite est **bornée supérieurement** si il existe un M tel que $x_n\leqslant M$ pour tout n. De la même manière, la suite est bornée inférieurement si il existe un m tel que $x_n\geqslant m$ pour tout n.

Le lemme suivant est souvent utilisé pour prouver qu'une suite est convergente. Une version pour les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sera la proposition 14.58.

LemSuiteCrBorncv

Lemme 11.36 ([1])**.**
Une suite croissante et bornée supérieurement converge. Une suite décroissante bornée inférieurement est convergente.

Démonstration. Supposons que (x_n) soit une suite croissante non convergente. En particulier, par le théorème 9.360, cette suite n'est pas de Cauchy et il existe $\epsilon>0$ tel que pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $p>N$ vérifiant

$$|x_p-x_N|>\epsilon. \tag{11.42}$$

Vu que $p>N$, et vu que la suite est croissante, nous pouvons récrire cette condition sous la forme $x_p\geqslant x_N+\epsilon$.

Nous définissons ainsi une application $p\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$x_{p(N)}>x_N+\epsilon. \tag{11.43}$$

[14] Définition 9.232.
[15] Définition 9.238.
[16] Topologies de la norme 11.34.

Une telle application n'est pas du tout unique, mais nous en considérons une telle.

Il est vite vu par récurrence que

$$x_{p^k(0)} \geqslant x_0 + k\epsilon. \tag{11.44}$$

La suite $n \mapsto x_{p^n(0)}$ est donc une sous-suite qui tend vers l'infini. Or cela n'est pas possible parce que la suite (x_n) est bornée. Donc contradiction, donc (x_n) est convergente. □

Une erreur courante est de croire que la borne est la limite : le lemme n'affirme pas ça. Par contre il est vrai que la borne donne … hum … une borne inférieure (ou supérieure) pour la limite.

PropCvRpComposante

Proposition 11.37.
Une suite (x_n) dans $\mathbb{R}^m$ est convergente dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si les suites de chaque composante sont convergentes dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas nous avons

$$\lim x_n = \Big(\lim(x_n)_1, \lim(x_n)_2, \dots, \lim(x_n)_m \Big) \tag{11.45}$$

où $(x_n)_k$ dénote la k-ième composante de (x_n).

Démonstration. Dans les deux sens. Nous notons $y_n^{(i)}$ la i-ième composante de x_n.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^m} a$. Supposons que $y_n^{(i)}$ ne soit pas une suite convergente vers a_i. Il existe δ tel que pour tout $N > 0$, il existe $n > N$ vérifiant $|y_n^{(i)} - a_i| > \delta$. Pour un tel n nous avons alors

$$\begin{aligned} \|x_n - a\|^2 &= \sum_k |y_n^{(k)} - a_k|^2 && \text{(11.46a)}\\ &\geqslant |y_n^{(i)} - a_i| && \text{(11.46b)}\\ &> \delta. && \text{(11.46c)} \end{aligned}$$

Donc la suite (x_n) ne converge pas vers a.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que pour chaque i nous ayons $y_n^{(i)} \to a_i$. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque i, il existe N_i tel que si $n > N_i$ alors $|y_n^{(i)} - a_i| < \epsilon$. En posant $N = \max_i\{N_i\}$, nous avons

$$\begin{aligned} \|x_n - a\|^2 &= \sum_i |y_n^{(i)} - a_i|^2 && \text{(11.47a)}\\ &\leqslant \sum_i \epsilon^2 && \text{(11.47b)}\\ &= m\epsilon^2. && \text{(11.47c)} \end{aligned}$$

Cela prouve que $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}^m} a$.

□

Exemple 11.38.
La suite $x_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ converge vers $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet, en utilisant la proposition 11.37, nous devons calculer séparément les limites

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{n} &= 0\\ \lim \big(1 - \frac{1}{n}\big) &= 1. \end{aligned} \tag{11.48}$$

△

Exemple 11.39.
Étant donné que la suite $(-1)^n$ n'est pas convergente, la suite $x_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}^2$. △

11.3.9 Suites adjacentes

DEFooDMZLooDtNPmu

Définition 11.40 ([371]).
*Les suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $a_n - b_n \to 0$.*

THOooZJWLooAtGMxD

Théorème 11.41 (Théorème des suites adjacentes)**.**
Nous considérons des suites adjacentes (a_n) et (b_n) avec (a_n) croissante et (b_n) décroissante. Alors

(1) $b_n \geqslant a_n$ pour tout n,

(2) $a_n \leqslant b_q$ pour tout n et q. C'est-à-dire que toute la suite a est plus petite que toute la suite b.

(3) les suites a et b sont convergentes,

(4) les suites a et b convergent vers la même limite, notée ℓ,

(5) nous avons $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout n.

Démonstration. La suite $n \mapsto b_n - a_n$ est décroissante parce que $b_n - a_n \geqslant b_{n+1} - a_{n+1}$. Comme en plus $b_a - a_n \to 0$ nous avons

$$b_n - a_n \geqslant 0 \tag{11.49}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $a_n \leqslant b_0$ pour tout n parce que si $a_N > b_0$ alors, b étant décroissante, $a_N > b_0 \geqslant b_N$ qui est contraire à ce que nous venons de prouver. La suite a étant croissante et majorée, elle est convergente[17] ; notons ℓ sa limite.

La suite b peut maintenant être écrite par

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n \tag{11.50}$$

qui est une somme de deux suites convergentes. Elle est donc convergente et sa limite est la somme des limites[18], donc

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \ell = \ell. \tag{11.51}$$

Voilà. Donc les suites a et b convergent et ont la même limite.

Pour tout $n, q \in \mathbb{N}$ nous avons l'inégalité $a_n \leqslant b_q$. En prenant la limite $n \to \infty$ nous trouvons

$$\ell \leqslant b_q \tag{11.52}$$

pour tout q. Et de la même façon, $b_n \geqslant a_q$ donne $\ell \geqslant a_q$. L'un avec l'autre donne

$$a_q \leqslant \ell \leqslant b_q \tag{11.53}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$. □

PROPooXOOCooGMqJNe

Proposition 11.42 ([372])**.**
Soit une suite (a_n) dans $\mathbb{R}$. Nous supposons que les suites extraites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite notée ℓ.

Alors $a_n \to \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|a_{2n} - \ell| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N_1$. Il existe également N_2 dès que $|a_{2n+1} - \ell| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N_2$.

Nous posons $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 2\}$ et nous avons, pour tout $n \geqslant N$:

$$|a_n - \ell| \leqslant \epsilon, \tag{11.54}$$

c'est-à-dire que $a \to \ell$. □

11.3.10 Limite supérieure et inférieure

ooMVZAooVVCOnP

Lemme-Définition 11.43.
Soit (a_n) une suite dans $\bar{\mathbb{R}}$. Les limites suivantes existent dans $\bar{\mathbb{R}}$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \tag{11.55}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geqslant n} a_k\big). \tag{11.56}$$

Elles sont nommées ***limite supérieure*** *et* ***limite inférieure*** *de la suite (a_n).*

[17] Proposition 11.36.
[18] Proposition 11.28.

Démonstration. Pour la limite supérieure, l'ensemble des $k \geqslant n$ est de plus en plus petit lorsque n grandit. Donc les ensembles $A_n = \{a_k \text{ tel que } k \geqslant n\}$ sont emboîtés et la suite $n \to \sup A_n$ est une suite décroissante. Elle a donc une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$. □

ooEEQJooRMFzVR

11.44.
En ce qui concerne les suites d'ensembles, utiles en théorie des probabilités, nous définissons de même. Si les A_n sont des parties d'un ensemble Ω, nous définissons la **limite supérieure** et la **limite inférieure** de la suite A_n par

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k \tag{11.57}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \tag{11.58}$$

Nous avons

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}. \tag{11.59}$$

ooAQTEooYDBovS

Lemme 11.45.
Nous avons les formules pratiques suivantes :

$$\limsup a_n = \inf_{n\geqslant 1} \big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \tag{11.60a}$$

$$\liminf a_n = \sup_{n\geqslant 1} \big(\inf_{k\geqslant n} a_k\big). \tag{11.60b}$$

Démonstration. La suite $n \mapsto \sup_{k\geqslant n} a_k$ est une suite décroissante, donc la limite est l'infimum. Même argument pour l'autre. □

ooIQIKooXWwAmM

Lemme 11.46.
La suite (a_n) dans $\mathbb{R}$ converge si et seulement si

$$\limsup a_n = \liminf a_n. \tag{11.61}$$

Dans ce cas, $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $\limsup a_n = \liminf a_n = l$, et nous prouvons que $\lim a_n$ existe et vaut l. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que si $n \geqslant N$ nous avons

$$\big|\sup_{k\geqslant n} a_k - l\big| < \epsilon \tag{11.62}$$

et

$$\big|\inf_{k\geqslant n} a_k - l\big| < \epsilon. \tag{11.63}$$

Si $i \geqslant N$, alors[19] $a_i \leqslant \sup_{k\geqslant N}(a_k) \leqslant \ell + \epsilon$, et $a_i \geqslant \inf_{k\geqslant N}(a_k) \geqslant \ell - \epsilon$. Cela signifie que $a_n \in B(l, \epsilon)$, c'est-à-dire $a_k \to l$ par la proposition 11.26.

Dans l'autre sens, nous supposons que $\lim_n a_n = l$ et nous prouvons que la limite supérieure est égale à l[20]. Soit $\epsilon > 0$ et N_ϵ tel que $|a_n - l| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N_\epsilon$. Si $n \geqslant N_\epsilon$ nous avons

$$\big|\sup_{k\geqslant n} a_k - l\big| \leqslant \epsilon \tag{11.64}$$

et donc la limite de $\sup_{k\geqslant n} a_k$ lorsque $n \to \infty$ est bien l. □

LEMooHGJVooCbgOEK

Lemme 11.47.
Soit une suite (a_i) dans $\mathbb{R}$. Notons $L = \limsup_i(a_i)$. Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble

$$S_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \geqslant L + \epsilon\} \tag{11.65}$$

est fini.

[19] Voir le lemme 3.253(1).
[20] Je vous laisse faire la démonstration correspondante pour la limite inférieure. Contactez-moi si ça pose un problème.

Démonstration. Nous y allons par récurrence. Juste pour le sport, nous allons au passage montrer en détail comment on utilise le théorème 1.131.

Supposons que S_ϵ est infini. Alors pour tout n, la partie $S_\epsilon \setminus \{0,\dots,n\}$ est non vide (lemme 2.25) et nous pouvons considérer l'application

$$\begin{aligned} g\colon S_\epsilon &\to S_\epsilon \\ n &\mapsto \min\big(S_\epsilon \setminus \{0,\dots,n\}\big). \end{aligned} \tag{11.66}$$

Nous prenons $b > 1$ dans S_ϵ et considérons la fonction $f\colon \mathbb{N} \to S_\epsilon$ donnée par le théorème 1.131.

L'application f est strictement croissante parce que $f(n+1) = g\big(f(n)\big) \in \mathbb{N}\setminus\{0,\dots,f(n)\}$. En particulier $f(n) > n$ parce que nous avons décidé de commencer avec $f(0) = b > 1$.

Nous sommes maintenant armés pour contredire la définition 11.43 de la limite supérieure. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vu que $f(n) \in S_\epsilon$ nous avons

$$a_{f(n)} \geqslant L + \epsilon, \tag{11.67}$$

et donc $\sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant a_{f(n)} \geqslant L + \epsilon$ parce que $f(n) \geqslant n$.

Nous avons prouvé que $\sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant L + \epsilon$ pour tout n, donc

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \geqslant L + \epsilon > L. \tag{11.68}$$

Voilà. Donc si S_ϵ est infini, $\limsup_i a_i \geqslant L + \epsilon > L$. □

LEMooMTRDooBMxFmn

Lemme 11.48.
Si (a_n) est une suite réelle,

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n) = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n). \tag{11.69}$$

Démonstration. En utilisant la proposition 4.87, nous avons

$$\limsup(a_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{k\geqslant n}(a_k)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(-\inf_{k\geqslant n}(-a_k)\Big) = -\liminf(-a_n). \tag{11.70}$$

□

PROPooUOYTooGwGZHz

Proposition 11.49 ([1]).
Si $a_n \to a$, alors

$$\liminf_n |a_n| = |a|. \tag{11.71}$$

11.3.11 Ouverts, voisinage, topologie

Lorsque $x \in E$, nous rappelons qu'un voisinage[21] de x est n'importe quel sous-ensemble de E qui contient une boule ouverte centrée en x. La proposition 9.8 nous dit qu'un ensemble est ouvert si il contient un voisinage de chacun de ses points. Au passage, rappelons que l'ensemble vide est ouvert.

Pour rappel, la proposition 9.159 dit que l'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique génère la topologie de l'espace.

Nous rappelons qu'une partie A d'un espace métrique est dite bornée[22] si il existe une boule[23] qui contient A.

Mais revenons à $\mathbb{R}$…

LemSupOuvPas

Lemme 11.50.
Une partie ouverte de $\mathbb{R}$ ne contient pas son supremum.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$, un ensemble ouvert et s, son supremum. Si s était dans $\mathcal{O}$, on aurait un voisinage $B = B(s,r)$ de s contenu dans $\mathcal{O}$. Le point $s + r/2$ est alors à la fois dans $\mathcal{O}$ et plus grand que s, ce qui contredit le fait que s soit un supremum de $\mathcal{O}$. □

Par le même genre de raisonnement, on montre que l'union et l'intersection de deux ouverts, sont encore des ouverts.

[21] Définition 9.4.
[22] Définition 9.209.
[23] À titre d'exercice, convainquez-vous que l'on peut dire boule *ouverte* ou *fermée* au choix sans changer la définition.

Remarque 11.51.
L'intersection d'une infinité d'ouverts n'est pas spécialement un ouvert comme le montrent les parties $\{\mathcal{O}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ donnés par

$$\mathcal{O}_k =]1, 2 + \frac{1}{k}[. \tag{11.72}$$

Tous les ensembles $\mathcal{O}_k$ contiennent le point 2 qui est donc dans l'intersection. Mais nous allons montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n tel que $2 + \epsilon \notin \mathcal{O}_n$. Il suffit de prendre n tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$ (lemme 4.60(2)).

PROPooANIOooIJHelX

Proposition 11.52.
Quelles que soient les parties A et B de $\mathbb{R}$, nous avons

$$\sup(A \cap B) \leqslant \sup A \leqslant \sup(A \cup B). \tag{11.73}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(A)$ Soit $s = \sup(A)$. En particulier, s est un majorant de A. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $s \geqslant x$. Donc s est également un majorant de $A \cap B$. Le lemme 4.86 conclut que $s \geqslant \sup(A \cap B)$.

(2) $\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)$ Soit $s = \sup(A \cup B)$. Par définition, s est un majorant de $A \cup B$. A fortiori, s est un majorant de A et donc est plus grand ou égal à $\sup(A)$.

□

11.3.12 Intervalles et connexité

Nous allons déterminer tous les sous-ensembles connexes[24] de $\mathbb{R}$. Pour cela nous relisons d'abord la notion d'intervalle donnée en 1.31 ainsi que la proposition 4.90 qui liste tous les intervalles de $\mathbb{R}$. La partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $a, b \in I$, tout nombre entre a et b est également dans I. Cette définition englobe tous les exemples connus d'intervalles ouverts, fermés avec ou sans infini : $[a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, a]$, … L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle.

Si I est un intervalle, les nombres $\inf(I)$ et $\sup(I)$[25] sont les **extrémités** de I.

DefLISOooDHLQrl

Définition 11.53.
*Étant donnés deux points a et b dans $\mathbb{R}^p$ on appelle **segment** d'extrémités a et b, et on note $[a, b]$, l'image de $[0, 1]$ par l'application $s : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$, $s(t) = (1 - t)a + tb$. On pose $]a, b[= s(]0, 1[)$, et $]a, b] = s(]0, 1])$.*

Il faut observer que le segment $[a, b]$ est une courbe orientée : certes en tant que ensembles, $[a, b] = [b, a]$, mais si nous regardons la fonction de t correspondante à $[b, a]$, nous voyons qu'elle va dans le sens inverse de celle qui correspond à $[a, b]$. Nous approfondirons ces questions lorsque nous parlerons d'arcs paramétrés autour de la section 23.7.

Le segment $[b, a]$ est l'image de l'application $r\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ donnée par $r(t) = (1 - t)b + ta$.

PropInterssiConn

Proposition 11.54.
Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle[26].

Démonstration. La preuve est en deux parties. D'abord nous démontrons que si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est connexe, alors c'est un intervalle ; et ensuite nous démontrons que tout intervalle est connexe.

Afin de prouver qu'un ensemble connexe est toujours un intervalle, nous allons prouver que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il n'est pas connexe. Prenons A, une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. Il existe donc a, $b \in A$ et un x_0 entre a et b qui n'est pas dans A. Comme le but est de prouver que A n'est pas connexe, il faut couper A en deux ouverts disjoints. L'élément x_0 qui n'est pas dans A est le bon candidat pour effectuer cette coupure. Prenons M, un majorant de A et m, un minorant de A, et définissons

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &=]m, x_0[\\ \mathcal{O}_2 &=]x_0, M[.\end{aligned}$$

Si A n'a pas de minorant, nous remplaçons la définition de $\mathcal{O}_1$ par $]-\infty, x_0[$, et si A n'a pas de majorant, nous remplaçons la définition de $\mathcal{O}_2$ par $]x_0, \infty[$. Dans tous les cas, ce sont deux ensembles ouverts dont l'union recouvre tout A. En effet, $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ contient tous les nombres entre un minorant de A et un majorant sauf x_0, mais on sait que x_0 n'est pas dans A. Cela prouve que A n'est pas connexe.

[24] Définition 9.118.
[25] Qui existent par la proposition 4.85, quitte à poser $\pm\infty$ comme infimum et supremum lorsque I n'est pas borné.
[26] Définition 1.31.

Jusqu'à présent nous avons prouvé que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il ne peut pas être connexe. Pour remettre les choses à l'endroit, prenons un ensemble connexe, et demandons-nous si il peut être autre chose qu'un intervalle ? La réponse est *non* parce que si il était autre chose, il ne serait pas connexe.

Prouvons à présent que tout intervalle est connexe. Pour cela, nous refaisons le coup de la contraposée. Nous allons donc prendre une partie A de $\mathbb{R}$, supposer qu'elle n'est pas connexe et prouver qu'elle n'est alors pas un intervalle. Nous avons deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Notons $A_1 = A \cap \mathcal{O}_1$ et $A_2 = A \cap \mathcal{O}_2$; et prenons $a \in A_1$ et $b \in A_2$. Pour fixer les idées, on suppose que $a < b$. Maintenant, le jeu est de montrer qu'il existe un point x_0 entre a et b qui ne soit pas dans A (cela montrerait que A n'est pas un intervalle). Nous allons prouver que c'est le cas du point

$$x_0 = \sup\{x \in \mathcal{O}_1 \text{ tel que } x < b\}.$$

Étant donné que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{O}_1 \text{ tel que } x < b\}$ est ouvert[27], le point x_0 n'est pas dans l'ensemble par le lemme 11.50. Nous avons donc

- soit x_0 n'est pas dans $\mathcal{O}_1$,
- soit $x_0 \leqslant b$,
- soit les deux en même temps.

Nous allons montrer qu'un tel x_0 ne peut pas être dans A. D'abord, remarquons que $\sup \mathcal{A} \leqslant \sup \mathcal{O}_1$ parce que $\mathcal{A}$ est une intersection de $\mathcal{O}$ avec quelque chose. Ensuite, il n'est pas possible que x_0 soit dans $\mathcal{O}_2$ parce que tout élément de $\mathcal{O}_2$ possède un voisinage contenu dans $\mathcal{O}_2$. Un point de $\mathcal{O}_2$ est donc toujours strictement plus grand que le supremum de $\mathcal{O}_1$.

Maintenant, en remarquant que si $x_0 \leqslant b$, alors $x_0 = b$ sinon b serait un majorant de $\mathcal{A}$ plus petit que x_0, ce qui n'est pas possible puisque x_0 est le supremum de $\mathcal{A}$ et donc le plus petit majorant. Oui mais si $x_0 = b$, c'est que $x_0 \in \mathcal{O}_2$, ce qu'on vient de montrer être impossible. Nous voilà déjà débarrassés des deuxièmes et troisièmes possibilités.

Si la première possibilité est vraie, alors x_0 n'est pas dans A parce qu'on a aussi prouvé que $x_0 \notin \mathcal{O}_2$. Or n'être ni dans $\mathcal{O}_1$ ni dans $\mathcal{O}_2$ implique de ne pas être dans A. Ce point $x_0 = \sup \mathcal{A}$ est donc hors de A.

Oui, mais comme $a \in \mathcal{A}$, on a obligatoirement $x_0 \geqslant a$. Mais par construction, on a aussi $x_0 \leqslant b$ (ici, l'inégalité est même stricte, mais ce n'est pas important). Donc

$$a \leqslant x_0 \leqslant b$$

avec a, $b \in A$, et $x_0 \notin A$. Cela finit de prouver que A n'est pas un intervalle. □

Le lemme suivant dit que si on recouvre un intervalle avec des ouverts, alors on peut ordonner ces ouverts de telle sorte qu'ils s'enchainent bien : on peut sauter de l'un à l'autre en passant par les intersections. C'est donc un lemme qui permet de passer du local au global.

LEMooNMGWooTfQDeO

Lemme 11.55.
Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi qu'un recouvrement $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1,\dots,n}$ de I par des ouverts connexes tels que $\mathcal{O}_i \cap I \neq \varnothing$ pour tout i[28]. Alors il existe une bijection $\psi\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ telle que

(1)

$$\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\psi(i)} \tag{11.74}$$

est connexe pour tout m.

(2)

$$\mathcal{O}_{\psi(m)} \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_{\psi(i)} \neq \varnothing. \tag{11.75}$$

Démonstration. Nous allons construire ψ par récurrence ; plus précisément nous allons construire des applications $\psi_k\colon \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\}$ telle que

(1) ψ_k est injective.

(2) Si $i \leqslant k$ alors $\psi_k(i) = \psi_i(i)$.

[27] C'est l'intersection entre l'ouvert $\mathcal{O}_1$ et l'ouvert $\{x \text{ tel que } x < b\}$.
[28] Il est cependant possible que les $\mathcal{O}_i$ ne soient pas inclus dans I.

(3) La partie

$$\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{11.76}$$

est connexe pour tout $m \leqslant k$.

(4) Nous avons

$$\mathcal{O}_{\psi_k(m)} \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \neq \varnothing \tag{11.77}$$

pour tout $m \leqslant k$.

Nous commençons en douceur par

$$\begin{aligned} \psi_1 \colon \{1\} &\to \{1, \dots, n\} \\ 1 &\mapsto 1. \end{aligned} \tag{11.78}$$

Ai-je besoin de vous prouver que c'est injectif ?

Nous supposons que les applications ψ_i sont correctement définies pour $i \leqslant k$, et nous construisons ψ_{k+1}. Nous posons

$$A = \psi_k\big(\{1, \dots, k\}\big) \tag{11.79a}$$
$$B = \{1, \dots, n\} \setminus A \tag{11.79b}$$
$$P = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{11.79c}$$
$$Q = \bigcup_{i=k+1}^{n} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{11.79d}$$

En tant qu'unions d'ouverts, les parties P et Q sont ouvertes dans $\mathbb{R}$. Elles recouvrent l'intervalle I qui est connexe par la proposition 11.54. De plus $P \cap I \neq \varnothing$ et $Q \cap I \neq \varnothing$; donc, par définition de la connexité nous avons $P \cap Q \neq \varnothing$.

Il existe donc $i_0 \in B$ tel que $P \cap \mathcal{O}_{i_0} \neq \varnothing$. Nous posons

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} \colon \{1, \dots, k+1\} &\to \{1, \dots, n\} \\ i &\mapsto \begin{cases} \psi_k(i) & \text{si } i \neq k+1 \\ i_0 & \text{si } i = k+1. \end{cases} \end{aligned} \tag{11.80}$$

Vérifions que ce ψ_{k+1} vérifie les conditions.

(1) ψ_{k+1} est injective. Soient i, j tels que $\psi_{k+1}(i) = \psi_{k+1}(j)$. Si $i = k+1$ et $j \neq k+1$ alors $\psi_{k+1}(i) = i_0 \in B$, alors que $\psi_{k+1}(j) = \psi_k(j) \in A$. Donc le cas $i = k+1$, $j \neq k+1$ n'est pas possible.

Si $i, j \neq k+1$, alors $\psi_{k+1}(i) = \psi_k(i)$ et $\psi_{k+1}(j) = \psi_k(j)$. L'injectivité de ψ_k implique que $i = j$.

(2) Si $i \leqslant k$, nous avons $\psi_{k+1}(i) = \psi_k(i) = \psi_i(i)$ en utilisant la récurrence.

(3) Nous séparons les cas $m = k+1$ et $m \neq k+1$. Si $m \neq k+1$ alors tous les ψ_{k+1} dans (11.76)[29] sont des ψ_k et la récurrence fonctionne. Si $m = k+1$ alors

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(i)} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \cup \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(k+1)} = P \cup \mathcal{O}_{i_0}. \tag{11.81}$$

Le nombre i_0 a été choisi pour avoir $\mathcal{O}_{i_0} \cap P \neq \varnothing$. Comme $\mathcal{O}_{i_0}$ et P sont des connexes, la proposition 9.123(1) implique que $P \cup \mathcal{O}_{i_0}$ est connexe.

(4) Encore une fois, si $m \neq k+1$, tous les ψ_{k+1} de (11.77) deviennent des ψ_k et la récurrence fonctionne. Avec $m = k+1$ nous avons

$$\mathcal{O}_{\psi_{k+1}(k+1)} \cap \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(i)} = \mathcal{O}_{i_0} \cap P. \tag{11.82}$$

Cette intersection est non vide, par choix du i_0.

[29] Nous sommes en train de parler de cette équation avec $k+1$ au lieu de k, parce que nous sommes dans un processus de récurrence. Il est donc normal de dire qu'il y a des ψ_{k+1} dans cette équation.

Quand tous les ψ_k $(k = 1, \dots, n)$ sont construits, en posant $\psi = \psi_n$ nous avons le résultat annoncé. □

ThoMKKooAbHaro

Théorème 11.56 (Théorème des bornes atteintes)**.**
Une fonction à valeurs réelles continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

C'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x) \text{ tel que } x \in K\}$ ainsi que x_1 tel que $f(x_1) = \sup\{f(x) \text{ tel que } x \in K\}$.

Démonstration. Soient un espace topologique compact K et une fonction continue $f\colon K \to \mathbb{R}$. Alors le théorème 9.298 indique que $f(K)$ est compact. Par conséquent $f(K)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ par le théorème de Borel-Lebesgue 11.23. Puisque $f(K)$ est borné, la fonction f est bornée.

De plus $f(K)$ étant fermé, son infimum est un minimum et son supremum est un maximum : il existe $x \in K$ tel que $f(x) = \sup f(K)$ et il existe $y \in K$ tel que $f(y) = \inf f(K)$. □

DEFooIVFZooLLlahl

Définition 11.57 (propriété de valeurs intermédiaires[373])**.**
*Un espace topologique X a la **propriété de valeurs intermédiaires** si pour toute fonctions continue $f\colon X \to \mathbb{R}$, si pour tout $a, b \in X$, nous avons $[r_1, r_2] \subset f(X)$.*

PROPooGURQooAwKNUJ

Proposition 11.58 ([373])**.**
Un espace topologique a la propriété des valeurs intermédiaires si et seulement si il est connexe.

Démonstration. Les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Soit un espace topologique X que nous supposons ne pas être connexe. Nous considérons des ouverts A et B tels que $A \cup B = X$ et $A \cap B = \varnothing$. Ensuite nous prenons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned} \tag{11.83}$$

Cette fonction ne vérifie manifestement pas la propriété des valeurs intermédiaires. Et pourtant elle est continue. En effet si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ peut valoir $\varnothing$, A, B ou X suivant que 1 ou -1 sont ou non dans $\mathcal{O}$. Or toutes ces parties sont ouvertes. Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons maintenant que X est connexe, nous considérons une fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$, et nous montrons qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Le lemme 9.296 dit que $f(X)$ est un connexe de $\mathbb{R}$. La proposition 11.54 dit alors que $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

□

11.3.13 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est essentiellement inutile pour les raisons suivantes :

- Il est un cas particulier du théorème 9.213 qui donne pour tout espace métrique, l'équivalence entre la compacité et la compacité séquentielle.
- Il est un cas particulier du théorème 9.363 qui le donne pour tous les espaces compacts.

Bref, nous ne le laissons que pour le lecteur qui n'aurait pas en tête d'autres définitions de « compact » à part « fermé borné ».

ThoBolzanoWeierstrassRn

Théorème 11.59 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**
Toute suite contenue dans un compact de $\mathbb{R}^m$ admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Nous rappelons qu'une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ est fermée et bornée par le théorème de Borel-Lebesgue 11.23.

Soit (x_n) une suite contenue dans une partie bornée de $\mathbb{R}^m$. Considérons (a_n), la suite réelle des premières composantes des éléments de (x_n) : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le nombre a_n est la première composante de x_n. Étant donné que la suite (x_n) est bornée, il existe un M tel que $\|x_n\| < M$. La croissance de la fonction racine carrée donne

$$|a_n| \leqslant \|x_n\| \leqslant M. \tag{11.84}$$

La suite (a_n) est donc une suite réelle bornée et donc contient une sous-suite convergente par le théorème correspondant dans $\mathbb{R}$: 9.213. Soit a_{I_1} une sous-suite convergente de a_n. Nous considérons maintenant x_{I_1},

c'est-à-dire la suite de départ dont on a enlevé tous les éléments qu'il faut pour qu'elle converge en ce qui concerne la première composante.

Si nous considérons la suite b_{I_1} des *secondes* composantes de x_{I_1}, nous en extrayons, de la même façon que précédemment, une sous-suite convergente, c'est-à-dire que nous avons un $I_2 \subset I_1$ tel que b_{I_2} est convergent. Notons que a_{I_2} est une sous-suite de la (sous) suite convergente x_{I_1}, et donc a_{I_2} est encore convergente.

En continuant ainsi, nous construisons une sous-sous-sous-suite x_{I_3} telle que la suite des *troisièmes* composantes est convergente. Lorsque nous avons effectué cette procédure m fois, la suite x_{I_m} est une suite dont toutes les composantes convergent, et donc est une suite convergente par la proposition 11.37.

Le tableau suivant donne un petit schéma de la façon dont nous procédons. Les $\bullet$ sont les éléments de la suite que nous gardons, et les $\times$ sont ceux que nous « jetons ».

$$\begin{array}{lcccccccccc} x_{\mathbb{N}} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ x_{I_1} & \times & \bullet & \bullet & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ x_{I_2} & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \bullet & \times & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ x_{I_m} & \times & \times & \times & \times & \bullet & \times & \times & \times & \bullet & \times & \dots \end{array} \tag{11.85}$$

La première ligne, $x_{\mathbb{N}}$, est la suite de départ. □

CorFHbMqGGyi

Corolaire 11.60.
Si une suite est croissante et bornée alors elle est convergente.

Démonstration. Nous nommons (x_n) la suite et nous prenons un majorant M. Toute la suite est alors contenue dans le compact $[x_0, M]$, ce qui donne une sous-suite $(x_{\alpha(n)})$ convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass 9.363. Si ℓ est la limite de cette sous-suite alors nous avons $\ell \geqslant x_n$ pour tout n.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe K tel que si $n > K$ alors $|\ell - x_{\alpha(n)}| < \epsilon$. Comme ℓ majore la suite nous avons même

$$x_{\alpha(n)} + \epsilon > \ell. \tag{11.86}$$

Puisque la suite est croissante pour tout $m > \alpha(K)$ nous avons $x_m + \epsilon > \ell$, ce qui signifie $|x_m - \ell| < \epsilon$. □

Nous aurons une version pour les fonctions croissantes et bornées en la proposition 14.57.

La proposition suivante dit que la notion d'ensemble non dénombrable ne prend pas réellement de force entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$: il n'y a pas moyen de caser $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ de façon à ce qu'il y tienne à son aise.

Proposition 11.61.
Une partie non dénombrable de $\mathbb{R}^n$ possède un point d'accumulation[30].

Démonstration. Soit une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ sans point d'accumulation. Nous allons prouver que A est dénombrable.

Soient les compacts $K_n = \overline{B(0,n)}$. La partie $A \cap K_n$ est finie ; sinon elle aurait une partie en bijection avec $\mathbb{N}$ (proposition 2.49) et donc une suite. Or une suite dans un compact possède un point d'accumulation par le théorème 9.363.

Donc tous les $A \cap K_n$ sont finis. Puisque $A = \bigcup_n A \cap K_n$, l'ensemble A est une réunion dénombrable d'ensembles finis. Il est donc dénombrable. □

11.3.14 Recouvrement par des intervalles ouverts

Soit un ensemble E et un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de E. Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous aimerions savoir quels sont les éléments de $\mathcal{A}$ qui sont atteignables en partant de A et en ne « sautant » que d'intersection en intersection.

Nous notons $\mathcal{A} = \{B_i\}_{i \in I}$ où I est un ensemble d'indices (un ensemble quelconque).

$$s_1(A) = \{i \in I \text{ tel que } B_i \cap A \neq \varnothing\} \tag{11.87a}$$

$$\sigma_1(A) = \bigcup_{B \in s_1(A)} B. \tag{11.87b}$$

Et ensuite :

$$s_{k+1}(A) = \{i \in I \text{ tel que } B_i \cap \sigma_k(A) \neq \varnothing\} \tag{11.88a}$$

$$\sigma_{k+1}(A) = \bigcup_{B \in s_{k+1}(A)} B \tag{11.88b}$$

[30] Définition 9.46.

LEMooJHMTooXwxSAa

Lemme 11.62.
Soient un intervalle A de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{I_i\}_{i=1,\dots,N}$ un recouvrement de A par des intervalles ouverts. Si $I_1 \cap A \neq \varnothing$ alors

(1) $\sigma_N = \sigma_{N+1}$

(2) $A \subset \sigma_N(I_1)$.

Démonstration. Si $\sigma_{k+1} = \sigma_k$, alors tous les σ_{k+l} sont identiques. De plus si $\sigma_{k+1} \neq \sigma_k$, alors σ_{k+1} contient au moins un élément de plus que σ_k. Donc $\text{Card}(\sigma_k) \geqslant k$ et en particulier $N \leqslant \text{Card}(\sigma_N) \leqslant N$. Cela prouve le premier point.

L'ensemble $\sigma_N(I_1)$ est une union d'ouverts et est donc un ouvert. Quitte à renuméroter, nous écrivons

$$\sigma_N(I_1) = I_1 \cup \dots \cup I_n. \tag{11.89}$$

L'ensemble

$$\tau = \bigcup_{k=n+1}^{N} I_k \tag{11.90}$$

est ouvert et est disjoint de $\sigma_N(I_1)$ parce que si I_l $(l \geqslant n+1)$ intersectait $\sigma_N(I_1)$, nous aurions $l \in s_{N+1}$ ou encore $I_l \subset \sigma_{N+1} \setminus \sigma_N$.

Donc τ et σ_N sont deux ouverts disjoints qui recouvrent A. Puisque A est un intervalle, il est connexe[31]. Donc, soit $A \subset \tau$, soit $A \subset \sigma_N$. Comme $I_1 \cap A \neq \varnothing$ nous sommes dans le cas $A \subset \sigma_N$. □

LEMooGHPTooKgFvGb

Lemme 11.63.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{A} = \{I_s\}_{s\in S}$ est un ensemble d'intervalles contenant x, alors $I = \bigcup_{s\in S} I_s$ est un intervalle[32].

Démonstration. Soient $a, b \in I$ (nous supposons $a < b$). Nous devons prouver que $[a, b] \subset I$. Pour cela nous considérons $y \in [a, b]$; il y a deux possibilités : soit $y < x$ soit $y > x$ (si $y = x$ alors $y \in I_s$).

Si $y < x$, alors $a \leqslant y < x$ et donc $y =\in I$. Si $y > x$, alors $x < y \leqslant b$ et $y \in I$. □

PROPooTXMBooZaSKFF

Proposition 11.64 ([374, 375])**.**
Un ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Plus précisément, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe un ensemble $\mathcal{F} = \{I_s\}_{s\in S}$ où

(1) Chaque I_s est un intervalle ouvert contenu dans $\mathcal{O}$,

(2) Pour $s, t \in S$, si $I_s \neq I_t$, alors $I_s \cap I_t = \varnothing$.

(3) S est dénombrable,

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{O}$, nous définissons J_x comme étant l'union de tous les intervalles ouverts contenus dans $\mathcal{O}$ et contenant x. Les J_x ne sont pas vides parce qu'ils contiennent toujours une boule centrée en x[33].

En tant qu'union d'intervalles, J_x est un intervalle par le lemme 11.63. De plus, J_x est ouvert parce que toute union d'ouverts est ouverte[34].

Nous notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des intervalles ouverts contenus dans $\mathcal{O}$, et

$$\mathcal{A}_x = \{I \in \mathcal{A} \text{ tel que } x \in I\}. \tag{11.91}$$

(1) **Si $y \in J_x$, alors $J_x = J_y$** Puisque $y \in J_x$, nous pouvons considérer $J = \mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_y$. Nous avons

$$J_y = \bigcup_{I\in\mathcal{A}_y} I \subset \bigcup_{I\in\mathcal{A}_y} \underbrace{(I \cup J)}_{\in\mathcal{A}_x} \subset \bigcup_{I\in\mathcal{A}_x} I = J_x. \tag{11.92}$$

L'inclusion dans l'autre sens s'obtient en écrivant la même équation en échangeant x et y.

(2) **Les J_x sont disjoints** Nous prouvons à présent que pour $x, y \in \mathcal{O}$, nous avons $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. En effet si $a \in J_x \cap J_y$, alors $J_a = J_x$ et $J_a = J_y$. Donc $J_x = J_y$.

[31] Définition 9.118 et proposition 11.54.
[32] Définition 1.31.
[33] C'est la définition 9.173 de la topologie métrique.
[34] C'est dans la définition 9.1 d'une topologie.

(3) **Dénombrable** C'est le moment d'écrire $\mathcal{F} = \{J_x\}_{x\in\mathcal{O}}$. Comme tout intervalle contient au moins un rationnel (proposition 11.15), nous avons aussi

$$\mathcal{F} = \{J_x\}_{x\in\mathcal{O}} = \{J_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap\mathcal{O}}. \tag{11.93}$$

Cet ensemble $\mathcal{F}$ vérifie les conditions demandées.

□

11.4 Connexité par arcs

11.4.1 Composition d'arcs

Un petit lemme pour commencer.

LEMooMMTBooYExLZH

Lemme 11.65 ([1]).
Deux façons de « normaliser » des chemins.

ITEMooEKYEooMDHSHH

(1) Soient un espace topologique X et $a, b, c \in X$. Nous supposons qu'il existe des applications continues $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,1] \to X$ telles que $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = b$ et $\gamma_2(1) = c$.

Alors il existe une application continue $\gamma \colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = c$.

ITEMooSBTKooKOtFfw

(2) Soient $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$ dans $\mathbb{R}$. Si nous avons une application continue $\delta \colon [\alpha, \beta] \to X$ telle que $\sigma(t_1) = a$ et $\sigma(t_2) = b$, alors il existe une application continue $\gamma \colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Il suffit de poser

$$\begin{aligned} \gamma \colon [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \leqslant 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t > 1/2. \end{cases} \end{aligned} \tag{11.94}$$

C'est une application continue, en particulier en $t = 1/2$ parce que $\gamma_2(2t-1) = \gamma_1(2t)$ lorsque $t = 1/2$.

(2) **Pour (2)** Il suffit de poser $\gamma(t) = \sigma\big((t_2 - t_2)t + t_1\big)$.

□

11.4.2 Connexité par arcs

DEFooOXVCooBizpgK

Définition 11.66.
*Une partie A d'un espace topologique est **connexe par arcs** si pour tout $a, b \in A$, il existe une application continue $\gamma \colon [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

11.67.
Un exemple d'ensemble connexe mais pas connexe par arcs est donné par la proposition 23.56. L'idée de cet exemple est de construire un ensemble en deux parties reliées par un chemin de longueur infinie.

Un espoir fou nous prend alors de croire que nous pouvons produire un exemple plus simple avec $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ parce que, dans cet ensemble, 1 et $+\infty$ sont reliés par un chemin de longueur infinie. La proposition 14.59 nous montrera que non.

LEMooQPYMooRKVSrv

Lemme 11.68.
Une partie connexe par arcs est connexe.

PROPooQUPRooPtyHoP

Proposition 11.69 ([1]).
Soient C_1 et C_2 des composantes connexes de l'espace topologique X. Si il existe $x_i \in C_i$ et un arc continue joignant x_1)à x_2, alors $C_1 = C_2$.

Beaucoup d'espaces connexe sont connexes par arcs. La proposition suivante couvre entre autres le cas de tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé comme l'espace euclidien.

PROPooYFDBooHbBjzF

Proposition 11.70 ([376]).
Tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

LEMooTVQMooFxrFaT

Lemme 11.71.
Soient des espaces topologiques X et Y. Nous considérons une partie connexe par arcs[35] *$A \subset X$. Si $f\colon X \to Y$ est continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $x, y \in f(A)$. Nous considérons $a, b \in A$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Étant donné que A est connexe par arcs, il existe une application continue $f\colon [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Le chemin

$$\begin{aligned} \sigma\colon [0,1] &\to Y \\ t &\mapsto (f \circ \gamma)(t) \end{aligned} \tag{11.95}$$

est à valeurs dans $f(A)$ et vérifie $\sigma(0) = x$ et $\sigma(1) = y$. Il est continu en tant que composée d'applications continues[36]. □

Pour conclure l'exercice, par l'absurde, on prend un voisinage connexe et ouvert V de 0 dans le cône, homéomorphe à un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^2$. Or $V \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs, alors que l'ouvert dont on retire un point reste connexe par arcs. C'est impossible, donc l'homéomorphisme n'existe pas, et le cône n'est pas une variété de dimension 2.

11.4.3 Des exemples

Exemple 11.72.
Nous étudions l'exemple suivant :

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y^2 + 4y + 2 < x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ y \in [-1.5, 0.5[\}. \tag{11.96}$$

On commence par tracer la parabole $x = 2y^2 + 4y + 2$, la circonférence $x^2 + y^2 = 4$ et les droites $y = -1.5$ et $y = 1/2$. On voit tout de suite que l'aire délimitée par les quatre courbes est donnée par l'union de deux parties. Dans la première $\sqrt{4 - y^2} \leqslant x \leqslant 2y^2 + 4y + 2$, $y \in [0, 0.5]$ et dans l'autre $2y^2 + 4y + 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}$, $y \in [-1.5, 0]$. L'ensemble A_1 est contenu dans la deuxième, 11.1. L'intérieur de A_1 est donné par $\mathrm{Int}(A_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y^2 + 4y + 2 < x < \sqrt{4 - y^2},\ y \in]-1.5, 0[\}$, et sa frontière est l'union de 3 morceaux de courbe ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{(x,y) \,|\, x = 2y^2 + 4y + 2,\ y \in [-1.5, 0]\} \\ \ell_2 &= \{(x,y) \,|\, x = \sqrt{4 - y^2},\ y \in [-1.5, 0]\} \\ \ell_3 &= \{(x,y) \,|\, x \in [0.5, \sqrt{7/4}]\ y = -1.5\}. \end{aligned} \tag{11.97}$$

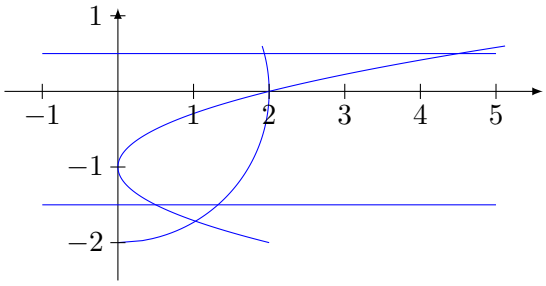


FIGURE 11.1 :

LabelFigLAfWmaN

△

EXooEJWBooDjBfKV

Exemple 11.73.
Nous étudions

$$A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Q}\}. \tag{11.98}$$

L'ensemble A_3 n'est pas ouvert, ni fermé, ni borné dans la topologie de $\mathbb{R}^2$. Le lemme 9.43 dit que $\mathbb{Q}$ a un intérieur vide et sa fermeture est $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{N}$, par contre est fermé et non borné. On peut remarquer que tous les points de $\mathbb{N}$ sont points isolés. La fermeture de A_3 est alors $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et son intérieur est vide. On peut dessiner la fermeture de cet ensemble comme une famille de droites verticales $x = n$, pour tout n dans $\mathbb{N}$. △

[35] Définition 11.66
[36] Proposition 9.290.

Exemple 11.74.
Nous étudions l'ensemble

$$A_3 = \{(t, 2t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1] \}. \tag{11.99}$$

L'ensemble A_3 est un petit segment de droite. Son intérieur est vide parce que toute boule centrée en un point de la droite intersecte l'extérieur de la droite. Son adhérence et sa frontière sont A_3 lui-même parce que nous considérons les valeurs de t dans $[0, 1]$ qui est un intervalle fermé. Si l'intervalle avait été ouvert, l'adhérence et la frontière auraient été trouvés en fermant :

$$\overline{\{(t, 2t) \text{ tels que } t \in [0, 1[\}} = \{(t, 2t) \text{ tels que } t \in [0, 1]\} \tag{11.100}$$

Étant donné que son adhérence est égal à lui-même, cet ensemble est fermé (et donc pas ouvert). Il est également borné parce qu'il est contenu dans une boule de rayon 3. △

Exemple 11.75.
Nous étudions l'ensemble

$$A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}. \tag{11.101}$$

Dans $\mathbb{R}$ nous savons que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ et $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ parce que toute boule centrée en un rationnel contient un irrationnel, et inversement, toute boule centrée en un irrationnel contient un rationnel. Dans $\mathbb{R}^2$ nous avons le même phénomène parce dans la boule $B\big((p, q), r\big)$ avec $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, se trouvent en particulier les points de la forme (p, x) avec $x \in B(q, r) \subset \mathbb{R}$. Évidemment, certains de ces x ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ et par conséquent, la boule $B\big((p, q), r\big)$ contient les points $(p, x) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

De la même manière, si (x, y) est un point de $\mathbb{R}^2$, dans toute boule centrée en (x, y), il y aura un élément de $\mathbb{Q}^2$.

Par conséquent, $\text{Int}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \varnothing$, $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\partial(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$.

Il n'est ni ouvert ni fermé (parce qu'il n'est égal ni à son intérieur ni à sa fermeture). Il n'est pas borné non plus parce qu'il existe des nombres rationnels arbitrairement grands. △

Exemple 11.76.
Nous étudions l'ensemble

$$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, 1[, \sin \frac{1}{x} < y < 3\}. \tag{11.102}$$

La fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est une des fonctions dont le graphe doit être connu. La figure 11.2 montre la situation. Comme d'habitude, il est fortement recommandé de refaire le dessin soi-même.

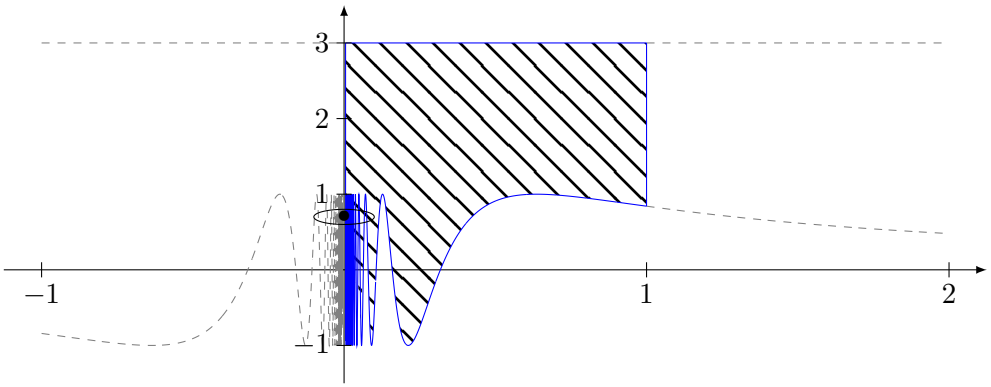


FIGURE 11.2 : Les points qui sont sur l'axe vertical entre 0 et 3 sont sur la frontière, mais pas dans l'ensemble A_5.
LabelFigAdhIntFrTrois

L'ensemble A_5 est ouvert parce que les conditions $x \in]0, 1[$ et $\sin \frac{1}{x} < y < 3$ sont des conditions « ouvertes » au sens où si un point les vérifient, alors on peut trouver une boule dans lequel ces conditions restent vérifiées. Cela prouve que $\text{Int}(A_5) = A_5$.

La fermeture de A_5 contient en outre les points tels que $\sin \frac{1}{x} = y$ entre $x = 0$ et $x = 1$ (les bornes étant incluses) ainsi que les points des trois segments de droites suivants :

$$\begin{aligned} \{(0, y) \text{ tels que } y \in [-1, 3]\} \\ \{(x, 3) \text{ tels que } x \in [0, 1]\} \\ \{(1, y) \text{ tels que } y \in [\sin(1), 3]\}. \end{aligned} \tag{11.103}$$

La frontière est composée de ces trois segments et du graphe de la fonction $\sin \frac{1}{x}$ entre 0 et 1.

L'ensemble A_5 est borné parce qu'il est contenu par exemple dans la boule centrée en $(0,0)$ et de rayon 10. Il est ouvert et donc pas fermé. △

ItemexoEspVectoNorme0003iv

Exemple 11.77.
Nous étudions l'ensemble

$$A_6 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in [0,1]\}. \tag{11.104}$$

L'ensemble A_6 est une union infinie de segments de droites verticaux, voir figure 11.3

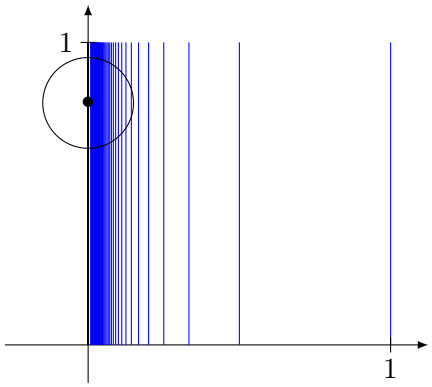


FIGURE 11.3 : Le segment sur l'axe vertical entre $y = 0$ et $y = 1$ fait partie de l'adhérence et de la frontière, mais pas de l'ensemble A_6 lui-même.

LabelFigAdhIntFrSix

L'intérieur est vide parce qu'autour de tout réel de la forme $\frac{1}{n}$, il y a un réel qui n'est pas de cette forme. En ce qui concerne la frontière et l'adhérence, il s'agit de l'union de tous ces segments plus le segment en $x = 0$.

En effet, la boule de rayon r autour du point $(0, y)$ contient le point $(\frac{1}{n}, y)$ avec n assez grand pour que $\frac{1}{n} < r$. △

11.4.4 Quelques mots à propos de la droite réelle achevée

Définition 11.78.
*La **droite réelle achevée** est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ où $\pm\infty$ sont deux nouveaux éléments. Nous la notons $\overline{\mathbb{R}}$ pour des raisons que nous verrons à peine plus bas.*

Cette définition ne servirait à rien si nous n'y mettions pas une topologie pour positionner les éléments $\pm\infty$ par rapport à ceux qui existaient déjà dans $\mathbb{R}$.

Définition 11.79 (Topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$)**.**
La topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ est celle sur $\mathbb{R}$ à laquelle nous ajoutons les voisinages de $\pm\infty$ de la façon suivante. Une partie V de $\bar{\mathbb{R}}$ est un voisinage de $+\infty$ si il existe $m > 0$ tel que $]m, +\infty] \subset V$.

Le lemme suivant justifie la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour la droite réelle achevée[37].

LEMooPZXHooEEXsTC

Lemme 11.80.
L'adhérence[38] de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Il suffit de prouver que $+\infty$ et $-\infty$ sont dans l'adhérence de $\mathbb{R}$. Nous le faisons pour $+\infty$. Ce n'est pas très compliqué : si A est un ouvert contenant $+\infty$, il contient une partie de la forme $]a, +\infty]$, et donc contient des éléments de $\mathbb{R}$. □

Pour la suite nous utilisons la notation (pratique en probabilité)

$$\{f < a\} = \{x \in S \text{ tel que } f(x) < a\}. \tag{11.105}$$

[37] Notez que l'espace métrique $\mathbb{R}$ est déjà complet. Il ne s'agit donc pas d'une completion.
[38] Définition 9.19.

11.5 Continuité

La définition de fonction continue est la définition 9.48.

(1) Dans le cas d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la définition de la continuité devient la proposition 11.81.

(2) Une application continue vers un espace normé est localement bornée, proposition 9.177.

PROPooVNGEooPwbxXP

Proposition 11.81.
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. La fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ est continue[39] *en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $x \in B(a,\delta) \cap A$ alors $|f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si f est continue** Soit $\epsilon > 0$. L'ouvert $W = B\big(f(a),\epsilon\big)$ contient $f(a)$. La définition de la continuité en a dit qu'il existe un ouvert V de A contenant a et tel que $f(V) \subset B\big(f(a),\epsilon\big)$.

Vu que V est un ouvert de A[40], il contient une partie de la forme $B(a,\delta) \cap A$ pour un certain $\delta > 0$. Pour ce δ, nous avons bien que $f(x) \in B\big(f(a),\epsilon\big)$ dès que $x \in B(a,\sigma) \cap A$.

(2) **Si f dans l'autre sens** Soit un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant $f(a)$. Nous avons un $\epsilon > 0$ tel que $B\big(f(a),\epsilon\big) \subset W$. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que

$$f\big(B(a,\delta) \cap A\big) \subset B\big(f(a),\epsilon\big) \subset W. \tag{11.106}$$

La partie $B(a,\delta) \cap A$ est un voisinage de a dans A.

□

Nous allons maintenant étudier quelques conséquences de la continuité sur $\mathbb{R}$.

(1) D'abord on voit que la continuité n'a été définie qu'en un point. On peut dire que la fonction f est continue *en tel point donné*, mais nous n'avons pas dit ce qu'est une fonction continue *dans son ensemble*.

(2) Le théorème 9.286 nous précise que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

(3) Comme la définition de f continue en a fait intervenir $f(x)$ pour tous les x pas trop loin de a, il faut au moins déjà que f soit définie sur ces x. En d'autres termes, dire que f est continue en a demande que f existe sur un intervalle autour de a.

Ceci couplé à la définition précédente laisse penser qu'il est surtout intéressant d'étudier les fonctions qui sont continues sur un intervalle.

(4) L'intuition qu'une fonction continue doit pouvoir être tracée sans lever la main correspond aux fonctions continues sur des intervalles. Au moins sur l'intervalle où elle est continue, elle devrait être traçable en un coup. Cette intuition est complètement fausse (comme pratiquement toutes les intuitions), comme le montre l'exemple 11.82.

EXooJBGSooBOGSse

Exemple 11.82.
Il est très possible d'être continue en un seul point. Par exemple la fonction

$$f(x) = x(1 - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)) \tag{11.107}$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. △

PROPooUBUAooNIxjfg

Proposition 11.83.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point $a \in \mathbb{R}$ et si $f(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas.

Démonstration. Si f s'annulait sur tout voisinage de a (mais pas en a lui-même), nous aurions, pour tout n un réel

$$x_n \in B\big(a,\frac{1}{n}\big) \setminus \{a\} \tag{11.108}$$

tel que $f(x_n) = 0$. Cela donnerait une suite $x_n \to a$ avec $f(x_n) \to 0$, ce qui contredit la continuité de f en a en vertu de la proposition 9.168 sur la continuité séquentielle en un point. □

Notons que ce résultat se généralise : si f est continue et pas égale à r en a, alors il existe un voisinage de a sur lequel elle ne prend pas la valeur r.

[39] Définition 9.48(1).
[40] Topologie induite et tout ça.

11.5.1 Opération sur la continuité

Nous allons démontrer maintenant une série de petits résultats qui permettent de simplifier la démonstration de la continuité de fonctions.

Théorème 11.84.
Si la fonction f est continue au point a, alors la fonction λf est également continue en a.

Démonstration. Commençons par exprimer la continuité de f en a. Soit $\epsilon_1 > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$

En travaillant avec λf au lieu de f,

$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1. \tag{11.109}$$

Passons à la continuité de λf. Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $\epsilon_1 = \epsilon/|\lambda|$ et nous considérons le δ_1 correspondant :

$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1 = \epsilon.$$

Ce δ_1 est celui que l'on cherchait. □

PROPooBUJCooBHmKEG

Proposition 11.85 ([1])**.**
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ne s'annulant pas, alors $x \mapsto 1/f(x)$ est une fonction continue.

THOooWRXOooUvKgkQ

Théorème 11.86.
Si f et g sont deux fonctions continues en a, alors

(1) La fonction $f+g$ est continue en a.

ITEMooSHMVooZPNtCv

(2) La fonction fg est continue en a.

Démonstration. Deux continuités à prouver en utilisant la caractérisation 11.81 de la continuité.

(1) **La somme**

La continuité des fonctions f et g au point a fait en sorte que pour tout choix de ϵ_1 et ϵ_2, il existe δ_1 et δ_2 tels que

$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$

et

$$(|x-a| \leqslant \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon_2.$$

La quantité que nous souhaitons analyser est $|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)|$. Tout le jeu de la démonstration de la continuité est de triturer cette expression pour en tirer quelque chose en termes de ϵ_1 et ϵ_2. Si nous supposons avoir pris $|x-a|$ plus petit en même temps que δ_1 et que δ_2, nous avons

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon_1 + \epsilon_2$$

en utilisant la formule générale $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. Maintenant, si on choisit ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 < \epsilon$, et les δ_1, δ_2 correspondants, on a

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leqslant \epsilon,$$

pourvu que $|x-a|$ soit plus petit que δ_1 et δ_2. Le bon δ à prendre est donc le minimum de δ_1 et δ_2 qui eux-mêmes sont donnés par un choix de ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leqslant \epsilon$.

(2) **Le produit** Soit $\epsilon' > 0$. Nous considérons $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \epsilon'$ et $|g(x) - g(a)| < \epsilon'$ pour tout $x \in B(a, \delta)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| && \text{(11.110a)}\\
&\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(x)| && \text{(11.110b)}\\
&= |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)|\underbrace{|f(x) - f(a)|}_{<\epsilon'} && \text{(11.110c)}\\
&\leqslant \epsilon'\big(|f(x)| + |g(a)|\big). && \text{(11.110d)}
\end{aligned}$$

Notons que $x \in B(a,\delta)$, donc $|f(x)-f(a)|<\epsilon'$ et donc $|f(x)|\leqslant |f(a)|+\epsilon'$. Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon'>0$, il existe un $\delta>0$ tel que si $x\in B(a,\delta)$, alors

$$|(fg)(x)-(fg)(a)|<\epsilon'\big(M+\epsilon'\big) \tag{11.111}$$

où $M=|f(a)|+|g(a)|$.

Soit maintenant $\epsilon>0$. En posant $\epsilon'<\min\{1,\epsilon/(M+1)\}$ nous avons bien $\epsilon'(M+\epsilon')<\epsilon$, et donc l'inégalité (11.111) donne la continuité de fg.

□

Pour résumer ces deux théorèmes, on dit que si f et g sont continues en a, alors la fonction $\alpha f+\beta g$ est également continue en a pour tout α, $\beta\in\mathbb{R}$.

Proposition 11.87.
Soient des parties Ω_f et Ω_g dans $\mathbb{R}$. Soient $f\colon\Omega_f\to\mathbb{R}$ ainsi que $g\colon\Omega_g\to\mathbb{R}$ telles que

(1) g est continue en a et vaut $g(a)=\ell$.

(2) f est continue en ℓ et vaut $f(\ell)=b$.

(3) $g(\Omega_g)\subset\Omega_f$.

Alors $f\circ g$ est continue en a.

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. La continuité de f dit que il existe $\eta>0$ tel que

$$y\in B(\ell,\eta)\cap\Omega_f \Rightarrow |f(y)-f(\ell)|<\epsilon. \tag{11.112}$$

La continuité de g donne $\delta>0$ tel que

$$x\in B(a,\delta)\cap\Omega_g \Rightarrow |g(x)-g(a)|<\eta. \tag{11.113}$$

Si $x\in B(a,\delta)\cap\Omega_g$, alors $g(x)\in B(\ell,\eta)\cap\Omega_f$. Donc

$$|(f\circ g)(x)-f(\ell)|<\epsilon. \tag{11.114}$$

Mais $f(\ell)=(f\circ g)(a)$. Tout cela est la continuité de $f\circ g$ en a. □

Parmi les propriétés immédiates de la continuité d'une fonction, nous avons ceci qui est souvent bien utile.

Corolaire 11.88.
Si la fonction f est continue en a et si $f(a)>0$, alors f est positive sur un intervalle autour de a.

Démonstration. Prenons $\epsilon<f(a)$ et voyons[41] ce que la continuité de f en a nous offre : il existe un δ tel que

$$(|x-a|\leqslant\delta)\Rightarrow|f(x)-f(a)|\leqslant\epsilon<f(a).$$

Nous en retenons que sur un intervalle (de largeur δ), nous avons $|f(x)-f(a)|\leqslant f(a)$. Par hypothèse, $f(a)>0$, donc si $f(x)<0$, alors la différence $f(x)-f(a)$ donne un nombre encore plus négatif que $-f(a)$, c'est-à-dire que $|f(x)-f(a)|>f(a)$, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. D'où la conclusion que $f(x)>0$. □

11.5.2 La fonction la moins continue du monde

Parmi les exemples un peu sales de fonctions non continues, il y a celle-ci :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Par exemple, $\chi_{\mathbb{Q}}(0)=1$, et[42] $\chi_{\mathbb{Q}}(\pi)=\chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2})=0$. Bien que $\chi_{\mathbb{Q}}(0)=1$, il n'existe *aucun* voisinage de 1 sur lequel la fonction reste proche de 1, parce que tout voisinage va contenir au moins un irrationnel. À chaque millimètre, cette fonction fait une infinité de bonds !

[41] ici, nous insistons sur le fait que nous prenons ϵ *strictement* plus petit que $f(a)$.

[42] Pour prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est pas trop compliqué, mais pour prouver que π ne l'est pas non plus, il faudra encore manger de la soupe.

Cette fonction n'est donc continue nulle part.

À partir de là, nous pouvons construire la fonction suivante qui n'est continue qu'en un point :

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est continue en zéro. En effet, prenons $\delta > 0$; il nous faut un ϵ tel que $|x| \leqslant \epsilon$ implique $f(x) \leqslant \delta$ parce que $f(0) = 0$. Bon ben prendre simplement $\epsilon = \delta$ nous contente. Cette fonction est donc très facilement continue en zéro.

Et pourtant, dès que l'on s'écarte un tant soit peu de zéro, elle fait des bonds une infinité de fois par millionième de millimètre ! Cette fonction est donc la plus discontinue du monde en tous les points, sauf un (zéro), où c'est une fonction continue !

11.89.
J'ai longtemps cru que cette fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ était la plus discontinue du monde. Je me trompais lourdement. Celle-ci est encore plus incroyable :

Numberphile : Conway's Base 13 Function
https://www.youtube.com/watch?v=zsBaApyf_Ns

Divulgâchis : avec cette fonction, chaque ouvert de $\mathbb{R}$ est surjectif sur $\mathbb{R}$. Elle fait donc une infinité non dénombrable de sauts sur chaque intervalle.

11.5.3 Approche topologique

Nous avons vu que sur tout ensemble métrique, nous pouvons définir ce qu'est un ouvert : c'est un ensemble qui contient une boule ouverte autour de chacun de ses points. Quand on est dans un ensemble ouvert, on peut toujours un peu se déplacer sans sortir de l'ensemble.

Le théorème suivant est une très importante caractérisation des fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) en termes de topologie, c'est-à-dire en termes d'ouverts.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 11.90
Le théorème suivant n'a aucun sens parce que c'est pratiquement la définition de la continuité d'une fonction, définition 9.48. Peut-être que ce qu'on a en tête est la proposition 9.49 qui donne l'équivalence entre application continue et continu en chaque point.

ThoContInvOuvert

Théorème 11.91.
Si I est un intervalle ouvert contenu dans $\operatorname{dom} f$*, alors f est continue sur I si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$, l'image inverse $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.*

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons transformer le critère de continuité en termes de boules ouvertes, et ensuite, nous passerons à la démonstration proprement dite. Le critère de continuité de f au point x dit que

$$\forall \delta > 0, \exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } \big(|x - a| < \epsilon\big) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta. \tag{11.115}$$

EqDEfCOntAn

Cette condition peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } a \in B(x, \epsilon) \Rightarrow f(a) \in B\big(f(x), \delta\big),$$

ou encore

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } f\big(B(x, \epsilon)\big) \subset B\big(f(x), \delta\big). \tag{11.116}$$

EqRedefContBoules

Jusque ici, nous n'avons fait que du jeu de notations. Nous avons exprimé en termes de topologie des inégalités analytiques. La condition (11.116) est le plus souvent utilisée comme définition de la continuité d'une fonction en x, lorsque le contexte ne demande pas de définitions plus générales. Si tel est le choix, il faut pouvoir retrouver (11.115) à partir de (11.116).

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème.

D'abord, supposons que f est continue sur I, et prenons $\mathcal{O}$, un ouvert quelconque. Le but est de prouver que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela, nous prenons un point $x_0 \in f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ et nous allons trouver un ouvert autour de ce point, contenu dans $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$. Nous écrivons $y_0 = f(x_0)$. Évidemment, $y_0 \in \mathcal{O}$, donc on a une boule autour de y_0 qui est contenue dans $\mathcal{O}$, soit donc $\delta > 0$ tel que

$$B(y_0, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Par hypothèse, f est continue en x_0, et nous pouvons donc y appliquer le critère (11.116). Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big) \subset \mathcal{O}.$$

Cela prouve que $B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}(\mathcal{O})$.

Dans l'autre sens, maintenant. Nous prenons $x_0 \in I$ et nous voulons prouver que f est continue en x_0, c'est-à-dire que pour tout δ, nous cherchons un ϵ tel que $f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big)$. Oui, mais $B\big(f(x_0),\delta\big)$ est ouverte, donc par hypothèse, $f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big)$ est ouvert, inclus dans I et contient x_0. Donc il existe un ϵ tel que

$$B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big),$$

et donc tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big),$$

ce qu'il fallait prouver. □

ThoValInter

Théorème 11.92 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$, et supposons que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout y tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, il existe un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. Nous savons que $[a,b]$ est connexe parce que c'est un intervalle (proposition 11.54). Donc $f\big([a,b]\big)$ est connexe (lemme 9.296) et donc est un intervalle (à nouveau la proposition 11.54). Étant donné que $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle, il contient toutes les valeurs intermédiaires entre n'importe quels deux de ses éléments. En particulier toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. □

PROPooIJZWooCAFPRn

Proposition 11.93.
Si $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ est continue et vérifie $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, alors f est surjective.

Démonstration. Soit $y \in [0,\infty[$. Vu que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, il existe $a \in [0,\infty[$ tel que $f(a) > y$. Le théorème de valeurs intermédiaires 11.92 dit qu'il existe $x \in [0,a]$ tel que $f(x) = y$. □

CorImInterInter

Corolaire 11.94.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soient I un intervalle, $\alpha < \beta \in f(I)$ et $\gamma \in]\alpha,\beta[$. Nous considérons $a,b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires 11.92, il existe $t \in]a,b[$ tel que $f(t) = \gamma$. Par conséquent $\gamma \in f(I)$. □

CORooQXHDooWjSiKm

Corolaire 11.95 ([1])**.**
Soit une application continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(a) > 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors $f(b) > 0$.

Démonstration. Supposons que $f(b) < 0$. Alors le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous indique que pour tout y tel que $f(b) < y < f(a)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$. En prenant $y = 0$ nous avons une contradiction. □

11.5.4 Limite sur des chemins

PROPooREUUooUNDFRi

Proposition 11.96.
Soit une application $f\colon X \to Y$ entre espaces topologiques. Nous supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Alors pour toute application continue $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ telle que $\gamma(0) = a$, nous avons

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = b. \tag{11.117}$$

11.5.5 Racine carrée

DEFooGQTYooORuvQb

Corolaire-Définition 11.97 (Existence de la racine carrée)**.**
Si $x \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $y \geqslant 0$ tel que $y^2 = x$. Ce nombre est noté $\sqrt{x}$ et est nommé ***racine carrée*** *de x.*

Démonstration. La fonction $f\colon t \mapsto t^2$ est continue et strictement croissante. Nous avons $f(0) = 0$ et[43] $f(x+1) > x$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous assure qu'il existe un unique $y \in [0,x+1]$ tel que $f(y) = x$. □

[43] Faites deux cas suivant $x \geqslant 1$ ou non si vous le voulez, moi je prends $x+1$.

PROPooPVUSooOIClj

Proposition 11.98 ([1]).
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = y^2$. Alors $x = \pm y$.

Démonstration. Étant donné que $y^2 \geqslant 0$, ce que dit le corolaire 11.97 est qu'il y a un unique $p \geqslant 0$ tel que $p^2 = y^2$. Nous faisons quelques cas suivant la positivité de x et y.

(1) **Si $x, y \geqslant 0$** Alors les nombres $p_1 = x$ et $p_2 = y$ vérifient tous les deux $p_i \geqslant 0$ et $p_i^2 = y^2$. Donc $p_1 = p_2$.

(2) **Si $x \geqslant 0$ et $y < 0$** Alors les nombres $p_1 = x$ et $p_2 = -y$ vérifient tous les deux $p_i \geqslant 0$ et $p_i^2 = y^2$. Donc $p_1 = p_2$. Donc $x = -y$.

(3) **Si $x < 0$ et $y < 0$** Se traite de même.

(4) **Si $x < 0$ et $y \geqslant 0$** Allez-y.

□

LEMooWSVNooKsymDy

Lemme 11.99.
Quelques formules.

(1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ *si* $x, y \geqslant 0$.

ITEMooEPHBooCEeJOD

(2) $\sqrt{\lambda^2 x} = |\lambda|\sqrt{x}$ *si* $x \geqslant 0$.

Démonstration. Nous utilisons la proposition 11.98. Les nombres $\sqrt{xy}$ et $\sqrt{x}\sqrt{y}$ sont deux nombres positifs dont le carré vaut xy qui est positif. Donc ils sont égaux.

De même nous avons $(\sqrt{\lambda^2 x})^2 = \lambda^2 x$ et $(|\lambda|\sqrt{x})^2 = \|\lambda\|^2 x$. Encore une fois les deux sont égaux. □

LEMooSBOAooOOIotR

Lemme 11.100.
La fonction racine carrée est strictement croissante.

Démonstration. Supposons que $x < y$. Si $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, alors la croissance de la fonction carré donne $x > y$ qui est contraire à l'hypothèse. □

11.5.6 Module sur les nombres complexes

LEMooVHDAooJyoakR

Lemme-Définition 11.101.
Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z\bar{z}$ est un réel positif.

Nous définissons le ***module*** *sur $\mathbb{C}$ par*[44]

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \tag{11.118}$$

Démonstration. Prouvons que $z\bar{z}$ est un réel positif. En effet si $z = a + bi$ alors

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 \geqslant 0. \tag{11.119}$$

□

PROPooXLARooYSDCsF

Proposition 11.102.
Si z_1 et z_2 sont des nombres complexes, alors

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|. \tag{11.120}$$

Nous avons aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

EQooATTQooRnJeCo

$$|z^n| = |z|^n. \tag{11.121}$$

Démonstration. D'abord $(a + bi)(c + di) = ac - db + (ad + bc)i$, de telle sorte que

$$|(a + bi)(c + di)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \tag{11.122}$$

Mais en calculant d'autre part $|a + bi|^2|c + di|^2$, nous tombons sur la même valeur.

Une simple récurrence permet de conclure que $|z^n| = |z|^n$. □

Voilà. Vous êtes déjà content d'apprendre que l'on peut démontrer $|z^n| = |z|^n$ sans faire appel à la forme trigonométrique des nombres complexes.

[44] Définition de la racine carrée : 11.97.

PROPooUMVGooIrhZZg

Proposition 11.103 ([377]).
Pour tout nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + ib'$, nous avons

ITEMooYBJVooGXiDSd

(1) $z\bar{z} = \bar{z}z = a^2 + b^2$;

ITEMooKIDXooYANMUz

(2) $|z|^2 = z\bar{z}$.

ITEMooCGLSooKHbzkn

(3) $\bar{\bar{z}} = z$

ITEMooYXVXooObkeTM

(4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

ITEMooGVWGooPQBUHC

(5) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

ITEMooDKWDooUjEuZA

(6) $|z| = |\bar{z}|$;

ITEMooFXKYooUOXbwH

(7) $|zz'| = |z|\,|z'|$;

ITEMooUJHPooUFdvqB

(8) $|z + z'| = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Calcul direct :

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2. \tag{11.123}$$

Pour être honnête, vous devriez aussi faire le calcul pour $\bar{z}z$.

(2) **Pour (2)** C'est juste une réexpression de (1)

(3) **Pour (3)** On a : $\bar{\bar{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi$.

(4) **Pour (4)** Calcul direct en partant et

$$\overline{(a + bi) + (a' + b'i)} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b'). \tag{11.124}$$

(5) **Pour (5)** Soit $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\operatorname{Re}(z). \tag{11.125}$$

(6) **Pour (6)** Même calcul que pour (1).

(7) **Pour (7)** Puisque les deux membres de l'égalité à prouver sont positifs, il est suffisant de prouver l'égalité des carrés (lemme 11.100). Nous avons

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + i(ab' + ba'), \tag{11.126}$$

donc

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2 && \text{(11.127a)}\\ &= (aa')^2 + (bb')^2 - 2aa'bb' + (ab')^2 + (ba')^2 + 2ab'ba' && \text{(11.127b)}\\ &= a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(b'^2 + a'^2) && \text{(11.127c)}\\ &= (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2). && \text{(11.127d)} \end{aligned}$$

D'autre part,

EQooRSGGooGfWTrS

$$\big(|z||z'|\big)^2 = |z|^2|z'|^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2). \tag{11.128}$$

(8) **Pour (8)** En utilisant (5) pour $z'\bar{z}$, nous avons :

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}'). \tag{11.129}$$

□

PROPooPAXZooDijojx

Proposition 11.104.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z| \tag{11.130}$$

et nous avons l'égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **L'inégalité** Par croissance de la fonction racine carrée nous avons, en posant $z = a + bi$:

$$|\operatorname{Re}(z)| = |a| = \sqrt{|a|^2} \leqslant \sqrt{|a|^2 + |b|^2} = |z|. \tag{11.131}$$

EQooBFANooKcSsWi

(2) **Égalité dans un sens** Si $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$, alors toutes les inégalités dans (11.131) sont des égalités. En particulier

$$\sqrt{|a|^2} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}. \tag{11.132}$$

Par stricte croissance de la fonction racine carré, nous déduisons que $|b|^2 = 0$ et donc que $b = 0$.

(3) **Égalité dans l'autre sens** Si $z \in \mathbb{R}$, alors $\operatorname{Re}(z) = z$, et nous avons l'égalité.

□

PROPooYLVPooCVnpFw

Proposition-Définition 11.105 ([1, 377]).
Soient deux nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$a\bar{b} \in \mathbb{R}^+ \tag{11.133}$$

si et seulement si $a = 0$ ou $\exists \lambda \geqslant 0$ tel que $b = \lambda a$.

*Dans ce cas nous disons que a et b sont **positivement liés***

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $a\bar{b} \in \mathbb{R}^+$. En posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ nous avons

$$a\bar{b} = (a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2). \tag{11.134}$$

Pour avoir $a\bar{b} \in \mathbb{R}^+$, il faut :

$$\begin{cases} a_2b_1 - a_1b_2 = 0 & \text{(11.135a)} \\ a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant 0. & \text{(11.135b)} \end{cases}$$

Supposons que $a \neq 0$. Vu que $a \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b_1 = \lambda a_1$. En substituant dans la première condition, nous trouvons $\lambda a_2 a_1 - a_1 b_2 = 0$, et en simplifiant par a_1, il reste $b_2 = \lambda a_2$. Nous avons prouvé que $b = \lambda a$.

En substituant dans la seconde condition, $\lambda a_1^2 + \lambda a_2^2 \geqslant 0$ et donc $\lambda \geqslant 0$.

(2) $\Leftarrow$ Si $a = 0$, alors $a\bar{b} = 0 \in \mathbb{R}^+$. Si $b = \lambda a$ alors $a\bar{b} = \lambda |a|^2 \in \mathbb{R}^+$.

□

PROPooEEFGooACcCll

Proposition 11.106 (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$[377]).
Soient deux nombres complexes a et b. Nous avons :

ITEMooDVMDooFDmOur

(1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

ITEMooSZOEooZuiEVg

(2) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a + b|$

ITEMooWGAQooTvMOaG

(3) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$

Dans tous les cas, il y a égalité si et seulement si a et b sont positivement liés[45] *: $a\bar{b} \in \mathbb{R}^+$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)**
Nous comparons les carrés : [SUBEQSooZRPBooOXRRDm]

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)\overline{(a + b)} && & \text{(11.136a)} \\ &= a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} && & \text{(11.136b)} \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) && \text{prop. 11.103(5)} & \text{(11.136c)} \\ &\leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2|a\bar{b}| && \text{prop. 11.104} & \text{(11.136d)} \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| && \text{prop. 11.103(6)} & \text{(11.136e)} \\ &= \big(|a| + |b|\big)^2. && & \text{(11.136f)} \end{aligned}$$

Vu que la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur les réels positifs, l'inégalité (11.136) sur les carrés implique l'inégalité sur les non-carrés : $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

[45] Voir proposition 11.105 pour des conditions équivalentes.

(2) **Pour (2)**
Nous utilisons deux fois le point (1) :

$$\begin{cases} |a| = |a+b-b| \leqslant |a+b| + |b| & (11.137a)\\ |b| = |a+b-a| \leqslant |a+b| + |a|. & (11.137b) \end{cases}$$

En isolant $|a+b|$ dans chacune des deux inégalités,

$$\begin{cases} |a| - |b| \leqslant |a+b| & (11.138a)\\ |b| - |a| \leqslant |a+b|. & (11.138b) \end{cases}$$

C'est le moment d'utiliser la proposition 4.68 :

$$\big||a| - |b|\big| = \max\big(|a|-|b|, |b|-|a|\big) \leqslant |a+b|. \tag{11.139}$$

(3) **Pour (3)** C'est juste (2) avec $-b$ au lieu de b.

(4) **Égalité pour (1)** Vu que $|a+b|$ et $|a|+|b|$ sont positifs, ils sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux. Nous avons donc

$$\begin{aligned} |a+b| = |a| + |b| &\Leftrightarrow |a+b|^2 = \big(|a|+|b|\big)^1 && (11.140a)\\ &\Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \quad \text{prop. 11.103(5)} && (11.140b)\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(a\bar{b}) = |a||b| && (11.140c)\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(a\bar{b}) = |a\bar{b}| \text{prop. 11.103(7)(6)} && (11.140d)\\ &\Leftrightarrow a\bar{b} \in \mathbb{R}^+ && (11.140e) \end{aligned}$$

(5) **Égalité pour (3)**

En développant $\big||a|-|b|\big|^2 = |a-b|^2$, nous trouvons

$$|a|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|. \tag{11.141}$$

Il s'agit de la même relation que dans (1), et donc la conclusion est la même.

□

PROPooZJAXooYwSSvo

Proposition 11.107.
La paire $(\mathbb{C}, |.|)$ est un espace vectoriel normé[46].

Démonstration. Nous devons prouver les différents points de la définition 9.232.

(1) $|z| \geqslant 0$ parce que la racine carrée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

(2) Si $|z| = 0$, alors, en notant $z = a + bi$ nous avons $a^2 + b^2 = 0$. Cela implique $a = b = 0$ (vous pouvez soit invoquer le lemme 4.52, soit ne rien dire et faire comme si c'était évident).

(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda z)(\overline{\lambda z}) = \lambda^2 z\bar{z}$ et nous avons

$$|\lambda z| = \sqrt{\lambda^2 z\bar{z}} = |\lambda|\sqrt{z\bar{z}} = |\lambda||z|. \tag{11.142}$$

(4) L'inégalité $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ est la proposition 11.106(1).

□

LEMooNIXZooDxfpNM

Lemme 11.108.
Soient des réels strictement positifs a_{ij} et des complexes $z_i \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $j = 1, \dots, n$ nous ayons

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|z_i| = |\sum_i a_{ij} z_i|. \tag{11.143}$$

Alors les z_i sont colinéaires au sens où il existe des nombres réels positifs s_i et un $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $z_i = s_i z_0$.

[46] Définition d'une norme : 9.232.

11.5.7 Théorème de Perron-Frobenius

Définition 11.109.
*Pour une matrice carrée T, nous notons $T \geqslant 0$ si $T_{ij} \geqslant 0$ pour tout i et j. Dans ce cas nous disons que T est **positive**.*

*Une matrice carré positive est **primitive** si il existe un entier $k > 0$ tel que $T^k > 0$.*

DEFooRFQCooQrLPVw

Définition 11.110.
Si T est une matrice $n \times n$ et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous notons

$$xT = \sum_{ij} x_i T_{ij} e_j. \tag{11.144}$$

*Et nous disons que $x \in \mathbb{R}^n$ est un **vecteur propre à gauche** pour la valeur propre à gauche $\lambda \in \mathbb{C}$ si $xT = \lambda x$.*

THOooRSPJooMCFeeP

Théorème 11.111 (Perron-Frobenius[378])**.**
Soit une matrice positive et primitive T. Il existe une valeur propre ρ telle que

(1) $\rho > 0$,

(2) La matrice T a des vecteurs propres strictement positifs à gauche et à droite pour la valeur propre ρ.

(3) Pour toute valeur propre $\lambda \neq \rho$ nous avons $\rho > |\lambda|$

(4) Les espaces propres à gauche et à droite de T pour la valeur propre ρ sont de dimension 1.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois parties. La première va tout démontrer pour les vecteurs propres à gauche, la seconde fera la même chose pour les vecteurs propre à droite, et la troisième fera la synthèse.

– À gauche –

Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x \neq 0, x \geqslant 0\}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} r\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min_j \frac{(xT)_j}{x_j} \end{aligned} \tag{11.145}$$

où la fraction vaut ∞ si $x_j = 0$.

(1) r **est majorée supérieurement** Pour chaque j (y compris ceux pour qui $x_j = 0$) nous avons l'inégalité suivante dans $\mathbb{R}$:

$$x_j r(x) \leqslant (xT)_j. \tag{11.146}$$

En multipliant par e_j et en faisant la somme, $r(x)x \leqslant xT$. Nous posons $u = \sum_i e_i$ et nous prenons le produit scalaire :

$$r(x)x \cdot u \leqslant xT \cdot u = x \cdot Tu. \tag{11.147}$$

EQooBRRSooUtIPXc

En posant $K = \max_j \sum_i T_{ij}$ nous avons $Tu \leqslant Ku$ parce que

$$(Tu)_k = \sum_l T_{kl} \underbrace{u_l}_{=1} = \sum_l T_{kl} \leqslant K = (Ku)_k. \tag{11.148}$$

Pour tout $x \in D$ nous avons $r(x) \leqslant K$. Nous utilisons ça pour continuer (11.147) :

$$r(x)x \cdot u \leqslant xT \cdot u = x \cdot Tu \leqslant Kx \cdot u. \tag{11.149}$$

Vu que $x \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$, nous avons $x \cdot u \geqslant 0$ nous nous pouvons simplifier : $r(x) \leqslant K$ pour tout $x \in D$.

(2) **Une minoration** Nous savons que T est une matrice positive et même primitive, de telle sorte que T n'ait aucune colonne nulle. Donc

$$r(u) = \min_j \frac{\sum_i u_i T_{ij}}{u_j} = \min_j \sum_i T_{ij} > 0. \tag{11.150}$$

Nous avons donc

$$r(u) > 0. \tag{11.151}$$

(3) **Définition de ρ** Nous posons

$$\rho = \sup_{x\in D} r(x). \tag{11.152}$$

Vu que que nous avons déjà prouvé nous avons $0 < \rho \leqslant K$.

Notons que si $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $r(x) = r(\lambda x)$, de telle sorte que

$$\rho = \sup_{\substack{x\in D\\ \|x\|\leqslant 1}} r(x). \tag{11.153}$$

(4) **Un compact** En posant

$$D' = \big(D \cap \overline{B(0,1)}\big) \setminus B(0,\epsilon) \tag{11.154}$$

avec $\epsilon < 1$, nous avons $r(D') = r(D)$ parce que $r(x) = r(\lambda x)$. La partie D' est évidemment bornée.

Vu que D et $\overline{B(0,1)}$ sont fermés, l'intersection est fermée (lemme 9.6(1)). La différence entre un fermé et un ouvert est fermée (lemme 9.7). Donc D' est fermé. Le théorème de Borel-Lebesgue 11.23 nous dit alors que D' est compact.

(5) **r est continue** Sur D', chacune des applications $x \mapsto (xT)_j/x_j$ est continue. Donc le minimum est continu et $r\colon D' \to \mathbb{R}$ est une application continue sur un compact.

(6) **v et ρ** Le théorème de Weierstrass 9.215 nous indique que r est bornée et atteint ses bornes sur D'. Il existe $v \in D'$ tel que $r(v) \geqslant r(x)$ pour tout $x \in D'$. Vu que par définition

$$\rho = \sup_{\substack{x\in D\\ \|x\|\leqslant 1}} r(x) = \sup_{x\in D'} r(x), \tag{11.155}$$

nous avons en fait $r(v) = \rho$.

(7) **Un mini sous-résultat** SPITEMooBKGPooQDQWdK Nous démontrons un sous-résultat qui sera utilisé quelques fois dans la suite. Si $x \in \mathbb{R}^n$ vérifie $x \geqslant 0$ et $(xT)_j \geqslant \rho x_j$ pour tout j, alors

(7a) $xT = \rho x$, c'est-à-dire que x est un vecteur propre à gauche de T.

(7b) $x > 0$.

Par hypothèse du théorème, il existe $k > 0$ tel que $T^k > 0$. Nous posons $y = xT^k$. Alors, si $xT - \rho x \neq 0$ nous avons

$$yT - \rho y = (xT - \rho x)T^k > 0. \tag{11.156}$$

La dernière inégalité est parce que $xT - \rho x \geqslant 0$ et $T^k > 0$. En développant, cette inégalité signifie que pour tout j,

$$\sum_i y_i T_{ij} > \rho y_j, \tag{11.157}$$

ou encore que $\rho < \frac{\sum_i y_i T_{ij}}{y_j}$ pour tout j. En particulier pour le j qui réalise le minimum, $\rho < r(y)$, ce qui contredit ma maximalité de ρ. Nous en déduisons que $xT - \rho x = 0$.

À partir de là, nous déduisons que $x > 0$. En effet, en appliquant k fois l'égalité $xT = \rho x$, nous avons $xT^k = \rho^k x$. Comme $x \geqslant 0$ et $T^k > 0$, nous avons $xT^k > 0$. Vu que $\rho \neq 0$ nous en déduisons que $x > 0$.

(8) **v et ρ, suite** Nous avons $r(v) = \rho$. En particulier pour tout j nous avons $\rho v_j \leqslant \sum_i v_i T_{ij}$. Et comme $v \in D'$ nous avons aussi $v \geqslant 0$. En vertu de notre sous-résultat, nous déduisons que v est un vecteur propre à gauche de T : $vT = \rho v$, et que $v > 0$.

Cela prouve que T a un vecteur propre à gauche strictement positif.

(9) **Le plus grand** Nous prouvons que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons $\rho > |\lambda|$. Soit une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Vu que le spectre « à gauche » et le spectre « à droite » sont identiques[47], T possède un vecteur propre à gauche : $xT = \lambda x$. Pour chaque j nous avons

$$\sum_i x_i T_{ij} = \lambda x_j, \tag{11.158}$$

[47] Lemme 10.87.

et en passant au module, $|\lambda x_j| \leqslant |x_i|T_{ij}$. En posant $y = \sum_i |x_i|e_i$ nous avons $y \geqslant 0$ et

$$|\lambda|y_j \leqslant \sum_i y_i T_{ij}, \tag{11.159}$$

et donc

$$|\lambda| \leqslant \sum_i \frac{y_i T_{ij}}{y_j} \tag{11.160}$$

En passant au minimum sur j, cela donne $|\lambda| \leqslant r(y) \leqslant \rho$.

Nous avons montré que $|\lambda| \leqslant \rho$. Nous prouvons à présent que $|\lambda| \neq \rho$ en supposant que $|\lambda| = \rho$. Toujours en posant $y_i = |x_i|$, nous avons

$$\rho y_j \leqslant \sum_i y_i T_{ij} = (yT)_j. \tag{11.161}$$

Le sous-résultat (7) nous indique qu'alors y est un vecteur propre à gauche de T pour la valeur propre ρ : $yT = \rho u$. En itérant et en déballant, pour chaque j nous avons

$$\sum_i |x_i| T_{ij}^k = \rho^k |x_j|. \tag{11.162}$$

En faisant de même à partir de $xT^k = \lambda^k x$, nous trouvons

$$|\sum_i x_i T_{ij}^k| = |\lambda|^k |x_j|. \tag{11.163}$$

Vu que $|\lambda| = \rho$, nous pouvons égaliser les membres de droite de (11.162) et (11.163) :

$$\sum_i |x_i| T_{ij}^k = |\sum_i x_i T_{ij}^k|. \tag{11.164}$$

Le lemme 11.108 nous indique que les x_i sont colinéaires (dans $\mathbb{C}$), c'est-à-dire qu'il existe des réels $s_i \geqslant 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $x_i = s_i z_0$ pour tout i.

En utilisant ce fait dans l'équation $xT = \lambda x$, nous trouvons $\sum_i x_i T_{ij} = \lambda x_j$ et

$$\sum_i s_i T_{ij} = \lambda s_j. \tag{11.165}$$

Cela prouve que λ est réel et positif parce que l'équation (11.165) est valable pour tout j et qu'il y en a bien un pour lequel $s_j \neq 0$. Le nombre réel positif λ vérifiant $|\lambda| = \rho$, nous déduisons que $\lambda = \rho$.

(10) **Espace propre de dimension 1** Nous avons déjà la vecteur propre v : $vT = \rho v$. Considérons un second vecteur propre à gauche $y \neq 0$: $yT = \rho y$. Supposons que y et v ne sont pas colinéaires et voyons les fonctions

$$\begin{aligned} \eta_i \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ c &\mapsto (v - cy)_i. \end{aligned} \tag{11.166}$$

Pour tout i nous avons $\eta_i(0) = v_i > 0$. Supposons pour fixer les idées qu'au moins un des y_i est positif. Alors pour chaque i, il existe un $c_i > 0$ tel que $v_i - cy_i = 0$. Nous prenons pour valeur de c le plus petit de ceux-là. Nous avons donc

$$\eta = v - cy \geqslant 0, \tag{11.167}$$

alors qu'au moins une des composantes de η est nulle. Et en plus $\eta T = \rho\eta$. Notre sous-résultat préféré nous dit qu'alors $\eta > 0$. Ah tiens, ça c'est une contradiction. Nous en déduisons que v et y sont colinéaires dans $\mathbb{R}^n$.

Nous avons terminé de prouver tout ce que nous devions faire « à gauche ».

À droite

En reprenant exactement les mêmes étapes[48], nous prouvons qu'il existe une valeur propre à droite ρ' telle que

(1) $\rho' > 0$

[48] Je n'ai pas vérifié ; écrivez-moi si cela pose problème.

(2) ρ' a des vecteurs propres strictement positifs à droite.

(3) $\rho' > |\lambda|$ pour toute valeur propre $\lambda \neq \rho'$.

(4) L'espace propre à droite pour la valeur propre ρ' est de dimension 1.

Conclusion

Les nombres réels strictement positifs ρ et ρ' sont des valeurs propres. Si $\rho \neq \rho'$, alors les propriétés de ρ disent que $\rho > \rho'$. De même les propriétés de ρ' disent que $\rho' > \rho$. Bref $\rho = \rho'$.

Le nombre ρ vérifie toutes les propriétés du théorème. □

11.5.8 Limite à gauche et à droite

DEFooIBBQooFEwyMc

Définition 11.112 ([1]).
Soient un espace topologique X et une application $\gamma\colon I \to X$ où I est un voisinage ouvert de $a \in \mathbb{R}$.

*L'élément $b \in E$ est une **limite à gauche** de γ quand $t \to a$ lorsque b est une limite de la restriction de γ à $]-\infty, a[$. Dans ce cas nous parlons de limite lorsque t tend vers a^-.*

*L'élément $b \in E$ est une **limite à droite** de γ quand $t \to a$ lorsque b est une limite de la restriction de γ à $]a, \infty[$. Dans ce cas nous parlons de limite lorsque t tend vers a^+.*

Lorsqu'il y a unicité de la limite, nous notons les limites à gauche et à droite par

$$\lim_{t\to a^-} \gamma(t) \quad et \quad \lim_{t\to a^+} \gamma(t) \tag{11.168}$$

PROPooGUNLooSQrJKg

Proposition 11.113 ([1]).
Soient un espace topologique X et une application $\gamma\colon I \to X$ où I est un voisinage ouvert de $a \in \mathbb{R}$. L'élément $b \in E$ est une limite à gauche[49] et à droite de γ quand $t \to a$ si et seulement si il est une limite.

Dans le cas où la limite est unique[50], nous pouvons dire que

$$\begin{cases} \lim_{t\to a^+} \gamma(t) = b & \text{(11.169a)} \\ \lim_{t\to a^-} \gamma(t) = b & \text{(11.169b)} \end{cases}$$

si et seulement si[51]

$$\lim_{t\to a} \gamma(t) = b. \tag{11.170}$$

Démonstration. Nous nommons $I^+ = I \cap]a, \infty[$ et $I^- = I \cap]-\infty, a[$. Nous supposons que γ admet b comme limite à gauche et à droite. Soit un voisinage U de b dans X. La limite à gauche donne l'existence de $\delta_1 > 0$ tel que

$$\gamma\big(B(a, \delta_1) \cap I^-\big) \subset U, \tag{11.171}$$

EQooEGOHooHauKRX

et la limite à droite donne un $\delta_2 > 0$ tel que

$$\gamma\big(B(a, \delta_2) \cap I^+\big) \subset U. \tag{11.172}$$

EQooXTMBooYBGxei

Notez que nous avons choisi δ_1 et δ_2 de telle sorte à ce que $B(a, \delta_1)$ et $B(a, \delta_2)$ soient contenus dans I.

Nous considérons $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, et nous prenons $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$. Il y a deux possibilités : $x > a$ et $x < a$. Si $x > a$, alors nous avons $x \in B(a, \delta) \cap I^+ \subset B(a, \delta_1) \cap I^+$, de telle sorte que $\gamma(x) \in U$ par (11.172). Si $x < a$, alors nous avons également $\gamma(x) \in U$, en utilisant (11.171). □

11.5.9 Continuité de la racine carrée, invitation à la topologie induite

Pourquoi nous intéresser particulièrement à la fonction racine carrée ? Parce qu'elle a une sale condition d'existence : son domaine de définition n'est pas ouvert. Or dans tous les théorèmes de continuité d'approche topologique que nous avons vus, nous avons donné des conditions *pour tout ouvert*. Nous nous attendons donc à avoir des difficultés avec la continuité de $\sqrt{x}$ en zéro.

Prenons I, n'importe quel intervalle ouvert dans $\mathbb{R}^+$, et voyons que la fonction[52]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{11.173}$$

[49] Définition 11.112.
[50] Par exemple lorsque X est séparé, voir la proposition 9.154.
[51] Cet énoncé doit être un tout petit peu modifié si vous utilisez la limite pointée au lieu de la limite épointée.
[52] La racine carrée est définie en 11.97.

est continue sur I. Remarquons déjà que si I est un ouvert dans $\mathbb{R}^+$, il ne peut pas contenir zéro. Avant de nous lancer dans notre propos, nous prouvons un lemme qui fera tout le travail[53].

Lemme 11.114.
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert dans $\mathbb{R}^+$. Alors $\mathcal{O}^2 = \{x^2 \text{ tel que } x \in \mathcal{O}\}$ est également ouvert.

Démonstration. Un élément de $\mathcal{O}^2$ s'écrit sous la forme x^2 pour un certain $x \in \mathcal{O}$. Le but est de trouver un ouvert autour de x^2 qui soit contenu dans $\mathcal{O}^2$. Étant donné que $\mathcal{O}$ est ouvert, on a une boule centrée en x contenue dans $\mathcal{O}$. Nous appelons δ le rayon de cette boule :

$$B(x, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Étant donné que cet ensemble est connexe, nous savons par le lemme 9.296 que $B(x,\delta)^2$ est également connexe (parce que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue). Son plus grand élément est $(x+\delta)^2 = x^2 + \delta^2 + 2x\delta > x^2 + \delta^2$, et son plus petit élément est $(x-\delta)^2 = x^2 + \delta^2 - 2x\delta$.

Ce qui serait pas mal, c'est que ces deux bornes entourent x^2 ; de cette façon elles définiraient un ouvert autour de x^2 qui soit dans $\mathcal{O}^2$. Hélas, c'est pas gagné que $x^2 + \delta^2 - 2x\delta$ soit plus petit que x^2.

Heureusement, en fait c'est vrai, parce que d'une part, comme $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^+$, on a $x > 0$, et d'autre part, pour que $\mathcal{O}$ soit positif, il faut que $\delta < x$. Donc on a évidemment $\delta < 2x$, et donc

$$x^2 + \delta^2 - 2x\delta = x^2 + \delta \underbrace{(\delta - 2x)}_{<0} < x^2.$$

Et nous en avons fini : l'ensemble

$$B(x,\delta)^2 =]x^2 + \delta^2 - 2x\delta, x^2 + \delta^2 + 2x\delta[\subset \mathcal{O}^2$$

est un intervalle qui contient x^2, et donc qui contient une boule ouverte centrée en x^2. □

Maintenant nous pouvons nous attaquer à la continuité de la racine carrée sur tout ouvert positif en utilisant le théorème 11.91.

PROPooLMIMooKGDHUw

Proposition 11.115.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{11.174}$$

est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset \mathcal{O}$. Nous allons restreindre plus fortement r plus tard. Soit $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$; nous allons prouver que $B(x,\epsilon) \cap [0,\infty[\subset f^{-1}(\mathcal{O})$ pour un ϵ assez petit. Le théorème 9.8 dira alors que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

Nous notons $y = f(x)$. Par croissance de la fonction racine carrée, nous avons

$$f\Big(B(x,\epsilon)\Big) =]\sqrt{x-\epsilon}, \sqrt{x+\epsilon}[. \tag{11.175}$$

Pour avoir $f\Big(B(x,\epsilon)\Big) \subset \mathcal{O}$, nous devons avoir

$$\begin{cases} \sqrt{x-\epsilon} > y - r & \text{(11.176a)} \\ \sqrt{x+\epsilon} < y + r. & \text{(11.176b)} \end{cases}$$

La première condition donne $x - \epsilon > (y-r)^2$. En développant le carré et en tenant compte de $y^2 = x$ nous demandons

$$\epsilon < 2ry - r^2. \tag{11.177}$$

Nos choix sont donc de demander $0 < r < 2y$, et ensuite $0 < \epsilon < 2ry - r^2$. Le premier est fait pour avoir $2ry - r^2 > 0$. □

[53] C'est toujours ingrat d'être un lemme : on fait tout le travail et c'est toujours le théorème qui est nommé.

11.5.10 Second degré (parabole)

Nous résolvons à présent le polynôme du second degré.

PROPooEZIKooKjJroH

Proposition 11.116 (Second degré[379]).
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2+bx+c \end{aligned} \tag{11.178}$$

avec $a\neq 0$. Nous notons $\Delta=b^2-4ac$.

ITEMooMKUSooWwNTba

(1) Nous avons la formule

$$f(x)=a\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2+c-\frac{b^2}{4a}. \tag{11.179}$$

EQooFKPQooAhIhCx

ITEMooHQTBooZuaPAs

(2) Si $a>0$, alors f a un minimum global en $x_m=-b/2a$.

ITEMooQMXVooWsqiXz

(3) Si $a<0$, alors f a un maximum global en $x_M=-b/2a$.

ITEMooMAMHooNWZVQI

(4) Si $\Delta<0$ alors f ne possède pas de racine réelle.

ITEMooKUUJooTsIHhI

(5) Si $\Delta=0$, alors f possède une unique racine $x_0=-b/2a$.

ITEMooQZGFooEGhMkX

(6) Si $\Delta>0$ alors f possède exactement deux racines distinctes données par

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{11.180}$$

EQooGHDPooVkqINr

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** C'est un calcul immédiat.

(2) **Pour (2)** Nous partons de la formule du point (1). Puisque $c-\frac{b^2}{4a}$ est constant, minimiser f revient à minimiser $x\mapsto\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2$. Comme cette dernière fonction est toujours positive, elle a un minimum global là où elle est nulle, c'est-à-dire en $x_m=-b/2a$.

(3) **Pour (3)** Idem que pour (2).

Pour la suite nous effectuons quelques manipulations à partir de (11.179). Nous avons $f(x)=0$ lorsque

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{11.181}$$

EQooRHNGooVsKRNt

(1) **Pour (4)** À gauche de (11.181) nous avons un nombre toujours positif ou nul. À droite, $4a^2>0$. Donc si $b^2-4ac<0$, l'égalité est impossible et il n'y a pas de x vérifiant $f(x)=0$.

(2) **Pour (5)** Si $b^2-4ac=0$, alors la condition (11.181) devient

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0, \tag{11.182}$$

et donc $x=-b/2a$ est l'unique solution.

(3) **Pour (6)** Si $b^2-4ac>0$, nous pouvons prendre la racine carré[54] des deux côtés de (11.181), et la condition devient

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}, \tag{11.183}$$

ce qui donne

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{11.184}$$

Ce sont là les deux seuls candidats pour vérifier $f(x)=0$.

Un calcul direct montre que

$$f\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0 \tag{11.185}$$

[54] Définition 11.97.

et que

$$f\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0. \tag{11.186}$$

Donc ce sont bien des racines de f et ce sont les seules. Notez aussi qu'elles sont distinctes parce que $\Delta\neq 0$.

□

PROPooVXIQooXmdlWk

Proposition 11.117 ([1])**.**
Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a>0$ et considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto ax^2+bx+c \end{aligned} \tag{11.187}$$

Nous posons $m=-b/2a$. Soit $r>0$. Alors

ITEMooFXUPooURDqPK

(1) $f(m-r)=f(m+r)$

(2) Pour tout $x\in]m-r,m+r[$ nous avons $f(x)<f(m-r)$.

Démonstration. Notons tout d'abord que le théorème liant croissance et dérivée ne sera vu que dans la proposition 14.214 ; nous allons donc devoir nous débrouiller sans. Nous allons seulement pas mal calculer en utilisant le produit remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Pour le point (1) nous avons ce calcul :

$$\begin{aligned} f(m-r)-f(m+r)&=a\Big[(m-r)^2-(m+r)^2\Big]+b\Big[(m-r)-(m+r)\Big] && \text{(11.188a)}\\ &=\dots && \text{(11.188b)}\\ &=-4mra-2br && \text{(11.188c)}\\ &=2br-2br && \text{(11.188d)}\\ &=0. && \text{(11.188e)} \end{aligned}$$

Le même type de calcul donne, pour $\lambda\in]0,1[$:

$$\begin{aligned} f(m-r)-f(m-\lambda r)&=a(m-r)^2+b(m-r)+c-a(m-\lambda r)^2-b(m-\lambda r)-c && \text{(11.189a)}\\ &=a\Big[\big(2m-(\lambda+1)r\big)(\lambda-1)r\Big]+b(\lambda-1)r && \text{(11.189b)}\\ &=\big(\underbrace{2ma}_{=-b}-a(\lambda+1)r\big)(\lambda-1)r+br(\lambda-1) && \text{(11.189c)}\\ &=\dots && \text{(11.189d)}\\ &=-ar^2(\lambda^2-1). && \text{(11.189e)} \end{aligned}$$

Étant donné que $a>0$ et que $\lambda^2<1$, nous avons bien que $f(m-r)-f(m-\lambda r)>0$.

Vous pouvez faire un calcul similaire pour$f(m+r)-f(m+\lambda r)$. □

Chapitre 12

Espaces vectoriels normés

Plusieurs notions sur les espaces vectoriels normés (dont la définition 9.232) ont déjà été abordées dans la section 9.16. Voir aussi le thème 25.

12.0.1 Norme, produit scalaire et Cauchy-Schwarz (cas réel)

Dans la suite, le produit scalaire de x et y pourra être noté indifféremment par $x \cdot y$, $\langle x, y\rangle$ ou $b(x, y)$ lorsque une forme bilinéaire est donnée.

Nous rappelons au passage que les espaces vectoriels réels sont susceptibles de recevoir un produit scalaire, alors que les espaces vectoriels complexes sont susceptibles de recevoir un produit hermitien. Bien que de nombreux résultats soient identiques ou très similaires, ces deux notions sont à ne pas confondre.

Nous commençons par prouver qu'un produit scalaire étant donné, nous pouvons définir une norme par la formule $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Pour cela nous aurons besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ThoAYfEHG

Théorème 12.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas réel)**.**
Soit un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire[1] *$(x, y) \mapsto x \cdot y$. Nous posons*[2]

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}. \tag{12.1}$$

Alors :

(1) Il y a l'inégalité

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{12.2}$$

EQooZDSHooWPcryG

pour tout $x, y \in E$.

(2) Il y a égalité $|x \cdot y| = \|x\|\|y\|$. si et seulement si x et y sont multiples l'un de l'autre.

(3) L'opération $\|.\|$ est une norme[3]*.*

(4) Cette norme vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{12.3}$$

EqYCLtWfJ

Démonstration. Étant donné que les deux membres de l'inéquation sont positifs, nous allons travailler en passant au carré afin d'éviter les racines carrés dans le second membre.

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \|x + ty\|, \end{aligned} \tag{12.4}$$

et nous calculons un peu :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|x + ty\|^2 && \text{(12.5a)}\\ &= (x + ty) \cdot (x + ty) && \text{(12.5b)}\\ &= x \cdot x + x \cdot ty + ty \cdot x + t^2 y \cdot y && \text{(12.5c)}\\ &= \|y\|^2 t^2 + 2(x \cdot y)t + \|x\|^2. && \text{(12.5d)} \end{aligned}$$

[1] Produit scalaire, définition 10.163.

[2] Attention à la notation : pour l'instant nous ne savons pas que c'est une norme ; c'est justement un des points de ce théorème. Par ailleurs, la racine carrée est définie par 11.97.

[3] Définition 9.232.

Nous avons utilisé la bilinéarité (pour sortir les t) et la symétrique du produit scalaire.

Nous voyons que P est un polynôme du second degré en t à valeurs dans $[0,\infty[$. Par la proposition 11.116 nous en déduisons que le fameux b^2-4ac doit être négatif ou nul. Nous avons donc

$$\Delta = 4(x\cdot y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0, \tag{12.6}$$

ce qui donne immédiatement

$$(x\cdot y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2. \tag{12.7}$$

En ce qui concerne le cas d'égalité, si nous avons $x\cdot y = \|x\|\|y\|$, alors le discriminant Δ ci-dessus est nul et le polynôme P admet une racine double t_0. Pour cette valeur nous avons

$$P(t_0) = |x+t_0y| = 0, \tag{12.8}$$

ce qui implique $x+t_0y=0$ et donc que x et y sont liés.

(1) **C'est une norme** Nous allons nous contenter de prouver l'inégalité triangulaire. Si $x,y\in E$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2x\cdot y} && (12.9a)\\
&\leqslant \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2|x\cdot y|} && (12.9b)\\
&\leqslant \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|} && (12.9c)\\
&= \sqrt{\big(\|x\|+\|y\|\big)^2} && (12.9d)\\
&= \|x\|+\|y\|. && (12.9e)
\end{aligned}$$

SUBEQooRISGooBUgBzj SUBEQooPQPYooBRRBzK

Justifications.

- Pour (12.9b). La fonction racine carrée est croissante, lemme 11.100.
- Pour (12.9c). Inégalité de Cauchy-Schwarz 12.1.

(2) **Inégalité du parallélogramme** Cette assertion est seulement un calcul :

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2+\|x+y\|^2 &= (x-y)\cdot(x-y)+(x+y)\cdot(x+y)\\
&= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y\\
&\quad + x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y \qquad (12.10)\\
&= 2x\cdot x + 2y\cdot y\\
&= 2\|x\|^2+2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

□

Toute norme dérivant d'un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme. Ce résultat sert souvent à prouver que des normes ne dérivent pas d'un produit scalaire. C'est le cas de la norme $N(x,y)=|x|+|y|$ du lemme 12.32 ainsi que du théorème de Weinersmith 29.57.

PROPooVSVMooZrqxdc

Proposition 12.2.
La norme euclidienne[4] *a les propriétés suivantes :*

(1) Pour tout vecteur x et réel λ,

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|. \tag{12.11}$$

(2) Pour tout vecteurs x et y,

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \tag{12.12}$$

ITEMooXXDMooDMVlak

(3) Si $\|x-y\|\leqslant\lambda$, alors $\|x\|\leqslant\|y\|+\lambda$.

[4] Un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, définition 10.167. Ici nous considérons la norme associée par le théorème 12.1.

Démonstration. Un produit scalaire est en particulier une forme bilinéaire, et vérifie les conditions de la définition 10.120.

Pour le premier point nous avons

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x) \cdot (\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 x \cdot x} = |\lambda| \|x\|. \tag{12.13}$$

Nous avons utilisé la formule du lemme 11.99(2).

Pour le second point, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y & \text{(12.14a)} \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|x \cdot y| & \text{(12.14b)} \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 & \text{(12.14c)} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé d'abord la majoration $|x| \geqslant x$ qui est évidente pour tout nombre x ; et ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz 12.1.

Pour (3), nous avons

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \leqslant \lambda + \|y\|. \tag{12.15}$$

□

DEFooJAGXooMgaUsR

Définition 12.3 (Norme sur $\mathbb{R}^n$)**.**
Sauf mention du contraire, nous considérons toujours sur $\mathbb{R}^n$ la norme (et donc la topologie) associée au produit scalaire de la proposition 10.168 par le théorème 12.1, c'est-à-dire

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{12.16}$$

PropHIWjdMX

Proposition 12.4 ([380])**.**
Soit b une forme bilinéaire et symétrique. Alors

(1) $\ker(b) \subset C(b)$ *(cône d'isotropie, définition 10.139)*

(2) si b est positive alors $\ker(b) = C(b)$.

Démonstration. En deux parties.

(1) Si $z \in \ker(b)$ alors pour tout $y \in E$ nous avons $b(z,y) = 0$. En particulier pour $y = z$ nous avons $b(z,z) = 0$ et donc $z \in C(b)$.

(2) Soit b positive et $x \in C(b)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 12.1) nous avons

$$|b(x,y)| \leqslant \sqrt{b(x,x)b(y,y)} = 0. \tag{12.17}$$

Donc pour tout y nous avons $b(x,y) = 0$.

□

LEMooEZFIooXyYybe

Lemme 12.5.
Soit un espace vectoriel euclidien[5] *E. Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de E et si $f : E \to E$ est un endomorphisme, alors*

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \langle e_{\sigma(i)}, f(e_i) \rangle. \tag{12.18}$$

EQooQAZLooZutFUz

Démonstration. Nous utilisons la définition 10.14 du déterminant d'un endomorphisme $\det(f) = \det_B\big(f(B)\big)$ en prenant la liste des vecteurs $\{e_i\}$ comme B. En l'occurrence, le i^{e} vecteur de la famille $f(B)$ est $f(e_i)$.

Puisque la base est orthonormée, nous avons $e_k^*(v) = \langle e_k, v \rangle$ et donc aussi

$$e^*_{\sigma(i)}(v_i) = \langle e^*_{\sigma(i)}, f(e_i) \rangle. \tag{12.19}$$

□

Et si vous avez tout suivi, vous aurez remarqué que les produits scalaires impliqués dans la formule (12.18) sont les éléments de la matrice de f dans la base $\{e_i\}$ parce que $\langle e_i, f(e_j) \rangle$ est la composante i de l'image de e_j par f. Si la matrice est composée en mettant en colonne les images des vecteurs de base, le compte est bon.

[5] C'est-à-dire qu'il possède un produit scalaire, voir la définition 10.167.

12.0.2 Topologie

PROPooEKTIooEKmWfn

Proposition-Définition 12.6 ([1]).
Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, alors

$$\begin{aligned} d\colon E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned} \tag{12.20}$$

est une distance[6].

La ***topologie*** *associée à la norme $\|.\|$ est la topologie métrique de d*[7].

PROPooWIGWooXPyDjp

Proposition 12.7 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie. Soit un sous-espace vectoriel $F \subset E$. Nous posons

$$\begin{aligned} n\colon F &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned} \tag{12.21}$$

Alors

(1) (F, n) est un espace vectoriel normé.

(2) La topologie métrique[8] *de (F, n) est la topologie induite de E.*

Démonstration. L'application n est une norme parce que toutes les propriétés de la définition 9.232 passent directement de $\|.\|$ à n. Pour le reste, remarquons d'abord que

$$B_F(x, r) = B_E(x, r) \cap F. \tag{12.22}$$

Nous notons τ_i la topologie induite de E vers F, et τ_n la topologie sur F pour la norme n. Nous allons prouver que $\tau_i = \tau_n$.

(1) $\underline{\tau_i \subset \tau_n}$ Soit $A \in \tau_i$. Pour prouver que $A \in \tau_n$, nous prenons $x \in A$ et nous prouvons qu'il existe $r > 0$ tel que $B_F(x, r) \subset A$. Par définition de la topologie induite, il existe un ouvert A' de E tel que $A = F \cap A'$. Vu que A' est ouvert pour la topologie métrique, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x, r) \subset A'$. Pour ce r nous avons

$$B_F(x, r) = B_E(x, r) \cap F \subset A' \cap F = A. \tag{12.23}$$

(2) $\underline{\tau_n \subset \tau_i}$ Soient $A \in \tau_n$ et $x \in A$. Il existe $r > 0$ tel que $x \in B_F(x, r) \subset A$, et donc aussi

$$x \in B_E(x, r) \cap F \in \tau_i. \tag{12.24}$$

□

PROPooEZETooTNStnO

Proposition 12.8 ([1]).
Soient des ouverts $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ d'un espace vectoriel normé. La frontière de l'union est inclue dans l'union des frontières :

$$\partial\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \partial A_i. \tag{12.25}$$

Démonstration. Soit $p \in \partial \bigcup_i A_i$. Soient des réels strictement positifs $r_k \to 0$. Pour chaque k, il y a un $i_k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $B(p, r_k) \cap A_{i_k} \neq \varnothing$. Cela définit une application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{N} &\to \{1, \dots, n\} \\ k &\mapsto i_k. \end{aligned} \tag{12.26}$$

Par la proposition 1.82, il existe un $s \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\phi^{-1}(s)$ est infini. Nous avons donc $p \in \mathrm{Adh}(A_s)$. Mais p n'est pas dans l'intérieur de A_s, sinon p serait à l'intérieur de $\bigcup_i A_i$. Donc $p \in \partial A_s$. □

[6] Définition 9.155.
[7] Définition 9.158.
[8] Voir la définition 9.158.

12.0.3 Le tore

12.0.3.1 Tore sur $\mathbb{R}$

Pour rappel, nous avons la relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathbb{R}^n$ en 4.104 : $a \sim b$ lorsque $a_i - b_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.

Pour définir la distance entre a et b sur le tore, nous allons d'abord construire une application $x \mapsto \tau_a(x)$ qui aura pour effet de « rapprocher » x au maximum de a tout en restant dans $[x]$. Ensuite, ce sera la distance entre a et x.

LEMooJRQZooLCXOWQ

Lemme 12.9 ([1]).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

ITEMooBDAQooSYWkMX

(1) $\overline{B(a,1/2)} \cap [b] \neq \varnothing$

ITEMooRSAKooLzvllq

(2) Si $a - 1/2 \in [b]$, alors $\overline{B(a,1/2)} \cap [b] = \{a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\}$.

ITEMooANPJooAdrPTK

(3) Si $a - 1/2 \notin [b]$, alors $\overline{B(a,1/2)} \cap [b]$ contient un unique élément et il est dans $B(a,1/2)$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous posons

$$b_{max} = \max\{x \in [b] \text{ tel que } x \leqslant a - 1/2\} \tag{12.27a}$$
$$b_{min} = \min\{x \in [b] \text{ tel que } x \geqslant a + 1/2\} \tag{12.27b}$$

Si $b_{max} = a - 1/2$ alors on est bon. Si au contraire $b_{max} \neq a - 1/2$ alors $b_{max} < a - 1/2$. Dans ce cas $b_{max} + 1 > a - 1/2$ (sinon ça aurait contredit la maximalité de b_{max}). Mais

$$b_{max} + 1 < a - 1/2 + 1 = a + 1/2. \tag{12.28}$$

Donc $b_{max} + 1 \in B(a, 1/2)$.

(2) **Pour (2)** Nous supposons que $a - 1/2 \in [b]$. Dans ce cas nous avons aussi $a + 1/2 \in [b]$. Si $x \in B(a, 1/2)$ alors

$$|x - (a - 1/2)| \leqslant |x - a| + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \tag{12.29}$$

Or il n'y a pas deux éléments dans $[b]$ ayant une distance plus petite que 1. Donc x n'est pas dans $[b]$.

(3) **Pour (3)** Si $a - 1/2 \notin [b]$. Vu que $[b] \cap \overline{B(a,1/2)}$ est non vide, et que ni $a - 1/2$ ni $a + 1/2$ ne sont dans $[b]$, nous en déduisons que $[b] \cap \overline{B(a,1/2)} \subset B(a, 1/2)$. Dans ce cas l'intersection contient un seul élément parce que si $x, y \in B(a, 1/2)$ nous avons $|x - y| < 1$.

□

DEFooPXMUooTOQCLa

Définition 12.10 ([1]).
Pour $a \in \mathbb{R}$ nous considérons les applications

$$\begin{aligned} d_a \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ b &\mapsto \min_{x \in [b]} |a - x|, \end{aligned} \tag{12.30}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_a \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min\Big([x] \cap \overline{B(a,1/2)}\Big). \end{aligned} \tag{12.31}$$

LEMooRMLSooNOKXkQ

Lemme 12.11 ([1]).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

ITEMooHRISooLsqKqd

(1) Si $a - 1/2 \in [b]$, alors $d_a(b) = \frac{1}{2}$.

ITEMooXMNYooKQYaee

(2) Si $a - 1/2 \notin [b]$, alors $d_a(b) < \frac{1}{2}$.

ITEMooMUCXooBWrRMz

(3) $d_a(b) = |a - \tau_a(b)|$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Si $a - 1/2 \in [b]$, nous savons par le lemme 12.9 que $\overline{B(a,1/2)} \cap [b] = \{a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\}$. Donc

$$d_a(b) = \min_{x\in[b]} |a - x| \leqslant |a - (a - \frac{1}{2})| = \frac{1}{2}. \tag{12.32}$$

Mais en même temps, $[b] \cap B(0, \frac{1}{2})$ est vide, donc pour tout $x \in [b]$ nous avons $|a - x| \geqslant \frac{1}{2}$. Nous en déduisons que $d_a(b) = \frac{1}{2}$.

(2) **Pour (2)** Si $a - \frac{1}{2} \notin [b]$, alors l'ensemble $\overline{B(a, \frac{1}{2})} \cap [b]$ contient un seul élément x_0, qui sera dans $B(a, \frac{1}{2})$. Donc

$$d_a(b) = \min_{x\in[b]} |a - x| \leqslant |a - x_0| < \frac{1}{2}. \tag{12.33}$$

(3) **Pour (3)** Il y a deux possibilités : $a - \frac{1}{2}$ appartient à $[b]$ ou non.

Si $a - \frac{1}{2} \in [b]$, alors nous avons déjà vu que $\tau_a(b) = a - \frac{1}{2}$ et $d_a(b) = \frac{1}{2}$. Dans ce cas nous avons bien

$$|a - \tau_a(b)| = |a - (a - 1/2)| = 1/2 = d_a(b). \tag{12.34}$$

Si par contre $a - \frac{1}{2} \notin [b]$, alors nous notons x_0 l'unique élément de $[b] \cap B(a, \frac{1}{2})$. Notez que $x_0 = \tau_a(b)$.

Nous avons $d_a(b) \leqslant |a - x_0|$. Mais nous ne pouvons pas avoir $d_a(b) < |a - x_0|$ parce que ça voudrait dire qu'il existe un élément $x_1 \in B(a, 1/2) \cap [b]$ autre que x_0, ce qui n'est pas possible. Donc $d_a(b) = |a - x_0|$.

□

LEMooAXVLooCmtsPb

Lemme 12.12 ([1]).
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ nous avons

ITEMooTELUooJoLYEF

(1) $\tau_{a+k}(b) = \tau_a(b) + k$,

ITEMooUWLDooLsDhmI

(2) $\tau_a(b) = \tau_a(b + k)$.

Démonstration. Vu que $\tau_a(b) \in [b]$, il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau_a(b) = b + l$.

(1) $a + k - \frac{1}{2} \in [b]$ Dans ce cas, $\tau_{a+k}(b) = a + k - \frac{1}{2}$. Mais dans ce cas nous avons aussi $a - \frac{1}{2} \in [b]$ et donc aussi $\tau_a(b) = a - \frac{1}{2}$. Au final,

$$\tau_{a+k}(b) = a + k - \frac{1}{2} = \tau_a(b) + k. \tag{12.35}$$

(2) **Si $a + k - 1/2$ n'est pas dans $[b]$** Nous avons alors que $\tau_{a+k}(b)$ est l'unique élément de $[b] \cap B(a + k, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, $a - \frac{1}{2}$ n'est pas non plus dans $[b]$, et donc $\tau_a(b)$ est l'unique élément de $[b] \cap B(a, \frac{1}{2})$. Donc nous avons aussi $\tau_a(b) + k \in [b] + B(a + k, \frac{1}{2})$, et comme $[b] \cap B(a + k, 1/2)$ contient un seul élément qui est $\tau_{a+k}(b)$, nous avons $\tau_a(b) + k = \tau_{a+k}(b)$.

Pour voir que (2) est vraie, il suffit de remarquer que $[b] = [b + k]$. □

LEMooSCXBooVXlqpp

Lemme 12.13 ([1]).
Les applications τ_a et d_a sont assez bien adaptées aux classes :

ITEMooLYTMooUdTFWw

(1) $d_a(b) = d_b(a)$,

ITEMooEIGSooQXMNYq

(2) Si $a' \in [a]$, alors $d_a(b) = d_{a'}(b)$.

ITEMooVLHWooVGQSKU

(3) Si $b' \in [b]$, alors $d_a(b) = d_a(b')$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau_a(b) = b + k$. Pour ce k, nous avons $d_a(b) = |a - b - k|$. Nous avons :

$$\tau_b(a) = \min_{x\in[a]} |b - x| \leqslant |b - (a - k)| = |a - b - k| = \tau_a(b). \tag{12.36}$$

Le même type raisonnement montre que $\tau_a(b) \leqslant \tau_b(a)$.

(2) **Pour (2)** Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a' = a + k$. Un petit calcul utilisant les lemmes précédents :

$$\begin{aligned} d_{a'}(b) &= d_{a+k}(b) && && (12.37a)\\ &= |a + k - \tau_{a+k}(b)| && \text{lem. 12.11(3)} && (12.37b)\\ &= |a + k - \tau_a(b) - k| && \text{lem. 12.12(1)} && (12.37c)\\ &= |a - \tau_a(b)| && && (12.37d)\\ &= d_a(b). && && (12.37e) \end{aligned}$$

(3) **Pour (3)** Si $b' \in [b]$, alors en utilisant le lemme 12.12(2),

$$d_a(b') = |a - \tau_a(b')| = |a - \tau_a(b)| = d_a(b) \tag{12.38}$$

□

THOooLUOHooCBuOPX

Théorème 12.14 ([1]).
La formule

$$d\big([a],[b]\big) = d_a(b) \tag{12.39}$$

(1) est bien définie.

(2) est une distance sur $\mathbb{R}/\sim$.

Démonstration. Le fait que la formule soit correcte est l'indépendance des classes du lemme 12.13(2)(3). Il nous reste à montrer que c'est une distance en vérifiant les propriétés de la définition 9.155. Commençons par les points faciles.

(1) Nous avons $d\big([a],[b]\big) = d\big([b],[a]\big)$ par le lemme 12.13(1).

(2) Nous avons $d\big([a],[b]\big) = |\tau_a(b) - a| \geqslant 0$.

(3) Si $d\big([a],[b]\big) = 0$, alors $|\tau_a(b) - a| = 0$. Mais cela signifie que $\tau_a(b) = a$. Et comme $\tau_a(b) \in [b]$, nous avons $a \in [b]$ et donc $[a] = [b]$.

Et maintenant nous faisons l'inégalité triangulaire.

L'astuce est de noter que $\tau_a(x) \in [x]$, de telle sorte que $[\tau_a(x)] = [x]$ et que

$$d\big([x],[b]\big) = d\big([\tau_a(x)],[b]\big). \tag{12.40}$$

Nous avons alors ceci pour l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d\big([a],[x]\big) + d\big([x],[b]\big) &= |\tau_a(x) - a| + |\tau_a(x) - \tau_{\tau_a(x)}(b)| && && (12.41a)\\ &\geqslant |\tau_{\tau_a(x)} - a| && \text{ineg trig dans } \mathbb{R} && (12.41b)\\ &\geqslant \min_{y\in[b]} |y - a| && && (12.41c)\\ &= d_a(b) && && (12.41d)\\ &= d\big([a],[b]\big) && && (12.41e) \end{aligned}$$

□

12.0.4 Le tore

SUBSDCEoZVNFQoGBqHuk

Définition 12.15 ([1]).
Pour $a \in \mathbb{R}^2$ *et* $r > 0$ *nous posons*

$$Q(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x_i - a_i| < r,\ i = 1,2\}. \tag{12.42}$$

Et en nous servant de la fonction τ *déjà définie dans le cas réel, nous posons*

$$\begin{aligned} \tau_a\colon \mathbb{R}^2 &\to \overline{Q(a,1/2)}\\ x &\mapsto \big(\tau_{a_1}(x_1), \tau_{a_2}(x_2)\big). \end{aligned} \tag{12.43}$$

LEMooWYCAooYVhcoD

Lemme 12.16 ([1]).
Pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ *nous avons*

$$\|\tau_a(b) - a\| = \min_{x\in[b]} \|a - x\|. \tag{12.44}$$

Démonstration. Soit $y \in [b]$, c'est-à-dire $y_1 \in [b_1]$ et $y_2 \in [b_2]$. Donc nous avons $|a_i - y - 2| \geqslant |a_1 - \tau_{a_1}(y_1)|$ et donc

$$\|a - y\| = \sqrt{(a_1 - y_1)^2 + (a_2 - y_2)^2} \geqslant \sqrt{\big(a_1 - \tau_{a_1}(y_1)\big)^2 + \big(a_2 - \tau_{a_2}(y_2)\big)^2} = \|a - \tau_a(y)\|. \tag{12.45}$$

□

LEMooTDKOooXBbqzK

Lemme 12.17 ([1]).
Pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{Z}^2$ nous avons

$$\tau_{a+k}(b) = \tau_a(b) + k. \tag{12.46}$$

Nous avons aussi $\tau_a(b + l) = \tau_a(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ et $l \in \mathbb{Z}^2$.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul tenant compte de la propriété correspondante dans $\mathbb{R}$ (lemme (1)(1)) :

$$\begin{aligned}
\tau_{a+k}(b) &= \big(\tau_{a_1+k_1}(b_1), \tau_{a_2+k_2}(b_2)\big) && (12.47a)\\
&= \big(\tau_{a_1}(b_1) + k_1, \tau_{a_2}(b_2) + k_2\big) && (12.47b)\\
&= \big(\tau_{a_1}(b_1), \tau_{a_2}(b_2)\big) + (k_1, k_2). && (12.47c)
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la second égalité, c'est juste le fait que $[b + l] = [b]$. □

PROPooUVTXooYxwdtb

Proposition 12.18 ([1]).
La formule

$$d\big([a], [b]\big) = \|\tau_a(b) - a\| \tag{12.48}$$

est bien définie et est une distance sur $\mathbb{R}^2/\sim$.

Démonstration. Pour montrer que la formule est bien définie, nous utilisons les deux points du lemme 12.17. Si $a, b \in \mathbb{R}^2$ et si $k, l \in \mathbb{Z}^2$ nous avons

$$\|\tau_{a+k}(b + l) - (a + k)\| = \|\tau_a(b + l) + k - a - k\| = \|\tau_a(b) - a\|. \tag{12.49}$$

Nous montrons maintenant l'inégalité triangulaire[9]. Comme avant, nous avons

$$d\big([x], [b]\big) = d\big([\tau_a(x)], [b]\big) = \|\tau_a(x) - \tau_{\tau_a(x)}(b)\|, \tag{12.50}$$

et donc

$$\begin{aligned}
d\big([a], [x]\big) + d\big([x], [b]\big) &= \|\tau_a(x) - a\| + \|\tau_a(x) - \tau_{\tau_a(x)}(b)\| && (12.51a)\\
&\geqslant \|\tau_{\tau_a(x)}(b) - a\| && (12.51b)\\
&\geqslant \min_{y \in [b]} \|y - a\| && (12.51c)\\
&= d\big([b], [a]\big). && (12.51d)
\end{aligned}$$

□

LEMooDKGCooBIPJqn

Lemme 12.19 ([1]).
Nous considérons la projection $p\colon \mathbb{R}^2 \to T$. Si $\alpha \in T$ nous avons

$$p^{-1}\big(B(\alpha, r)\big) = \bigcup_{s \in \alpha} B(s, r). \tag{12.52}$$

Démonstration. En deux inclusions.

(1) **Première inclusion** Soit $x \in p^{-1}\big(B(\alpha, r)\big)$. La condition $p(x) \in B(\alpha, r)$ signifie $d\big(p(x), \alpha\big) < r$. En choisissant $a \in \alpha$ nous avons

$$r > d\big(p(x), \alpha\big) = d\big([x], [a]\big) = \|\tau_x(a) - x\|. \tag{12.53}$$

Donc $x \in B\big(\tau_x(a), r\big)$. Mais $\tau_x(a) \in \alpha$, donc

$$x \in B\big(\tau_x(a), r\big) \subset \bigcup_{s \in \alpha} B(s, r). \tag{12.54}$$

[9] Je n'ai pas vérifié les autres conditions. Faites-les.

(2) **L'autre inclusion** Soient $s \in \alpha$, $r > 0$ et $x \in B(s,r)$. Nous allons prouver que $p(x) \in B(\alpha, r)$. Soit $a \in \alpha$. En tenant compte du fait que $s, a \in \alpha$ nous avons $\tau_x(a) = \tau_x(s)$ et le calcul suivant :Nous avons

$$\begin{aligned}
d\big(p(x),\alpha\big) &= d\big([x],[a]\big) && && (12.55a)\\
&= \|\tau_x(a) - x\| && && (12.55b)\\
&= \|\tau_x(s) - x\| && \text{pcq. } \tau_x(a) = \tau_x(s) && (12.55c)\\
&= \min_{y\in[s]} \|x - y\| && \text{lem. 12.16} && (12.55d)\\
&\leqslant \|x - s\| && && (12.55e)\\
&< r && && (12.55f)
\end{aligned}$$

Cela prouve que $p(x) \in B(\alpha, r)$.

□

LEMooQQZMooMpdZTU

Lemme 12.20 ([1]).
La projection canonique $p\colon \mathbb{R}^2 \to (T, \tau_d)$ est continue.

Démonstration. Soient $A \in \tau_d$, et $a \in p^{-1}(A)$. Nous allons trouver $\epsilon > 0$ tel que $B(a,\epsilon) \subset p^{-1}(A)$. Soit $\alpha \in p(a)$. Il existe $r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset A$. Par le lemme 12.19,

$$p^{-1}\big(B(\alpha,r)\big) = \bigcup_{s\in\alpha} B(s,r). \tag{12.56}$$

En particulier $a \in \alpha$ et donc

$$B(a,r) \subset \bigcup_{s\in\alpha} B(s,r) = p^{-1}\big(B(\alpha,r)\big) \subset p^{-1}(A). \tag{12.57}$$

Donc $\epsilon = r$ fonctionne. □

PROPooFUQHooKZMoMm

Proposition 12.21 ([1]).
Sur le tore T, la topologie quotient[10] *τ_Q est la même que la topologie métrique τ_d.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\tau_Q \subset \tau_d$ Le lemme 12.20 dit que p est continue pour τ_d ; donc la proposition 9.58(3) implique que $\tau_Q \subset \tau_d$.

(2) $\tau_d \subset \tau_Q$ Soit $A \in \tau_d$. Nous allons prouver que $S = p^{-1}(A)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$; de cette façon A sera l'image par p d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Notez que par rapport à l'énoncé de la proposition 9.58, ici p joue le rôle de φ_i^{-1}.

Soit $s \in p^{-1}(A)$. Vu que $p(s) \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_d\big(p(s),r\big) \subset A$. En prenant p^{-1} des deux côtés,

$$p^{-1}\Big(B\big(p(s),r\big)\Big) \subset p^{-1}(A) = S. \tag{12.58}$$

Mais le lemme 12.19 dit que

$$p^{-1}\Big(B\big(p(s),r\big)\Big) = \bigcup_{x\in[s]} B(x,r), \tag{12.59}$$

donc $\bigcup_{x\in[s]} B(x,r) \subset S$ et à fortiori $B(s,r) \subset S$. Nous avons prouvé que S est ouvert.

□

LEMooGUUCooWujZAv

Lemme 12.22 ([1]).
Soit $q \in \mathbb{R}^2$. Si $r < 1/2$ alors

$$p\colon B(q,r) \to p\big(B(q,r)\big) \tag{12.60}$$

est injective.

[10] Définition 9.72.

Démonstration. Soient $a, b \in B(q,r)$ tels que $[a] = [b]$. Il existe $k \in \mathbb{Z}^2$ tel que $b = a + k$. Nous avons alors d'une part

$$\|a - b\| = \|k\|. \tag{12.61}$$

Et d'autre part,

$$\|a - b\| \leqslant \|a - q\| + \|b - q\| < 2r < 1. \tag{12.62}$$

Donc $\|k\| < 1$ et donc $k = 0$. □

PROPooUENHooYsXspd

Proposition 12.23 ([1]).
Soit $q \in \mathbb{R}^2$. Si $r < 1/2$, alors l'application

$$p\colon B(q,r) \to B\big([q],r\big) \tag{12.63}$$

est une bijection bicontinue[11].

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $p\big(q,r\big) \subset B\big([q],r\big)$ Soit $s \in B(q,r)$. Nous avons

$$\begin{aligned} d\big([q],[s]\big) &= \|\tau_q(s) - q\| && && (12.64a)\\ &= \min_{x\in[s]} \|q - x\| && \text{lem. 12.16} && (12.64b)\\ &\leqslant \|q - s\| && && (12.64c)\\ &< r. && && (12.64d) \end{aligned}$$

(2) **Injective** Si $r < 1/2$ alors le lemme 12.22 dit que $p\colon B(q,r) \to B([q],r)$ est injective.

(3) **Surjective** Soit $[s] \in B([q],r)$. Nous avons :

$$d([s],[q]) = \|\tau_q(s) - q\| < r. \tag{12.65}$$

Mais $\tau_q(s) = \min\big([s] \cap \overline{B(q,1/2)}\big)$. Donc $\tau_q(s) \in [s]$ et il existe $k \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\tau_q(s) = s + k$. En posant $s_0 = \tau_q(z)$, nous avons $p(s_0) = [s]$, et $\|s_0 - q\| < r$.

(4) **Continue** L'application p est continue par définition de la topologie quotient sur $\mathbb{R}^2/\sim$.

(5) **Inverse continue** Si $r < 1/2$, l'application $p\colon B(q,r) \to B([q],r)$ est une bijection continue. Prenons $r_2 < r$. Alors l'application restreinte

$$p\colon \overline{B(q,r_2)} \to p\big(\overline{B(q,r_2)}\big) \tag{12.66}$$

est une bijection continue définie sur un compact. Le lemme 9.300 dit que la réciproque

$$p^{-1}\colon p\big(\overline{B(q,r_2)}\big) \to \overline{B(q,r_2)} \tag{12.67}$$

est continue.

Donc l'application $p^{-1}\colon p\big(B(q,r_2)\big) \to B(q,r_2)$ est continue. Et comme $p\big(B(q,r_2)\big) = B([q],r_2)$, nous concluons que

$$p\colon B(q,r_2) \to B([q],r_2) \tag{12.68}$$

est une bijection continue de réciproque continue.

□

12.0.5 La sphère

LEMooQFQFooDlxkw

Lemme 12.24.
Une sphère de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $n > 1$

Démonstration. En plein de parties. Nous commençons par considérer seulement la sphère unité $S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$.

[11] Continue, inverse continue.

(1) **Pour le cercle ($n = 2$)** SPITEMooGDRIopZJXAIC Nous considérons les chemins parcourant le haut et le bas du cercle :

$$\begin{aligned} H\colon [-1,1] &\to S^1 \\ t &\mapsto \big(t, \sqrt{1-t^2}\big) \end{aligned} \tag{12.69}$$

et

$$\begin{aligned} B\colon [-1,1] &\to S^1 \\ t &\mapsto \big(t, -\sqrt{1-t^2}\big). \end{aligned} \tag{12.70}$$

Soient $a, b \in S^1$. Si ils sont tous les deux dans l'image de h, le lemme 11.65(2) construit un chemin continu dans S^1 allant de a à b à l'aide de H. Si ils sont tous les deux dans l'image de B, c'est la même chose en utilisant B.

Si l'un est dans l'image de H et l'autre dans l'image de B, nous commençons par utiliser 11.65(2) (avec H ou B suivant le signe de a_2) pour joindre a à $(1,0)$ et idem pour joindre b à $(1,0)$. Le lemme 11.65(1) permet alors de composer les deux chemins.

(2) **Si $n > 2$, cas non antipodaux** Soient $a, b \in S$. Nous supposons que a et b ne sont pas alignés avec 0. Nous considérons le plan $P = \{\alpha a + \mu b \text{ tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Les éléments de P qui sont sur S sont ceux qui vérifient $\|\lambda a + \mu b\|^2 = (\lambda a + \mu b) \cdot (\lambda a + \mu b) = 1$, c'est-à-dire

$$\lambda^2 \|a\|^2 + 2\lambda\mu a \cdot b + \mu \|b\|^2 = 1. \tag{12.71}$$

Ici $\|a\| = \|b\| = 1$. Résolvons[12] ça pour avoir μ en termes de λ :

$$\mu = -\lambda\alpha \pm \sqrt{\lambda^2(\alpha^2 - 1) + 1} \tag{12.72}$$

où nous avons noté $\alpha = a \cdot b$. Grâce à Cauchy-Schwarz (théorème 12.1) nous avons $|\alpha| = |a \cdot b| \leqslant \|a\|\|b\| = 1$. Donc $(\alpha^1 - 1) \in]-1, 0]$. Nous pouvons donc considérer

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to S \\ \lambda &\mapsto \lambda a + \big(-\alpha\lambda + \sqrt{\lambda^2(\alpha^2-1)+1}\big). \end{aligned} \tag{12.73}$$

Par construction nous avons toujours $\gamma(t) \in S$. Mais nous avons aussi $\gamma(0) = b$ et $\gamma(1) = a$. En plus γ est continue entre autres parce que la racine carrée est continue par la proposition 11.115.

(3) **Si a et b sont antipodaux** Alors nous prenons un point c ailleurs, et nous appliquons deux fois le cas non antipodal : une fois pour joindre a à c et une fois pour joindre c à b.

Si ce n'est pas la sphère unité, alors nous avons $m \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x - m\| = R\}. \tag{12.74}$$

Nous considérons la sphère unité $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$ que nous savons déjà être connexe par arcs. Nous avons la bijection continue

$$\begin{aligned} f\colon S_0 &\to S \\ x &\mapsto Rx + m. \end{aligned} \tag{12.75}$$

Si $a, b \in S$, alors la connexité par arcs de S_0 permet de trouver une application continue $\gamma_0\colon [0,1,] \to S_0$ telle que $\gamma_0(0) = f^{-1}(a)$ et $\gamma_0(1) = f^{-1}(b)$. Il suffit maintenant de prendre $\gamma = f \circ \gamma_0$ pour avoir une application continue qui joint a et b dans S. □

LEMooDYNSooOmJbYq

Lemme 12.25.
Un ouvert connexe par arcs dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) reste connexe par arcs même si on lui enlève un point.

Démonstration. Soit A ouvert et connexe par arcs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in A$; nous devons prouver que $A \setminus \{p\}$ est connexe par arcs. Soient $a, b \in A \setminus \{p\}$ ainsi qu'un chemin γ liant a à b dans A.

Si p n'est pas dans l'image de γ, alors c'est bon.

Sinon nous supposons que $\gamma(t_0) = p$. Vu que A est ouvert, il contient une boule autour de p. En diminuant le rayon de cette boule, nous pouvons supposer que $\overline{B(p,r)} \subset A$ et $a, b \notin \overline{B(p,r)}$.

Nous considérons l'application continue

$$\begin{aligned} d\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \|\gamma(t) - p\|. \end{aligned} \tag{12.76}$$

[12] En suivant la proposition 11.116.

Elle vérifie $d(0) > r$, $d(t_1) = 0$ et $d(1) > r$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires 11.92, il existe $u_0 \in]0, t_0[$ tel que $d(u_0) = r$ et $u_1 \in]t_0, 1[$ tel que $d(u_1) = r$.

La partie

$$Z = \{t \in [0,1] \text{ tel que } d(t) = r\} \tag{12.77}$$

est bornée (parce que dans $[0,1]$) et fermée (son complémentaire est ouvert par continuité de d). Donc elle est compacte[13]. Elle a donc un maximum et un minimum. Soit $u_m = \min(Z)$ et $u_M = \max(Z)$. Nous notons $x = \gamma(u_m)$ et $y = \gamma(u_M)$.

Par la connexité du cercle (lemme 12.24, point (1)), il existe un chemin γ_c sur le cercle $\|x - m\| = r$ liant x à y. Il suffit maintenant de mettre bout à bout (lemme 11.65(1)) les chemins γ entre a et x puis le chemin γ_c liant x à y et encore γ entre y et b pour avoir un chemin liant a et b.

Ce chemin reste dans A parce que γ y reste et γ_c reste dans $\overline{B(p,r)} \subset A$. De plus ce chemin ne passe pas par p parce que γ reste en dehors de $B(p,r)$ lorsque $t \in [0, u_m] \cup [u_M, 1]$. □

12.1 Théorème spectral autoadjoint

ThoRSBahHH

Théorème 12.26 (Théorème spectral autoadjoint)**.**
Un endomorphisme autoadjoint[14] *d'un espace euclidien*

(1) est diagonalisable dans une base orthonormée,

(2) a son spectre réel.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la dimension de E, et nous commençons par $n = 1$[15]. Soit donc $f : E \to E$ avec $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Étant donné que f est également linéaire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$. Tous les vecteurs de E sont donc vecteurs propres de f.

Passons à la récurrence. Nous considérons $\dim(E) = n + 1$ et $f \in \mathrm{S}(E)$. Nous considérons la forme bilinéaire symétrique Φ_f et la forme quadratique associée ϕ_f. Pour rappel,

$$\Phi_f(x,y) = \langle x, f(y)\rangle \tag{12.78a}$$
$$\phi_f(x) = \Phi_f(x,x). \tag{12.78b}$$

Et nous allons laisser tomber les indices f pour noter simplement Φ et ϕ. Étant donné que $\overline{B(0,1)}$ est compacte et que ϕ est continue, il existe $x_0 \in \overline{B(0,1)}$ tel que

$$\lambda = \phi(x_0) = \sup_{x \in \overline{B(0,1)}} \phi(x). \tag{12.79}$$

Notons aussi que $\|x_0\| = 1$: le maximum est pris sur le bord. Nous posons

$$g = \lambda \,\mathrm{Id} - f \tag{12.80}$$

ainsi que

$$\Phi_1(x,y) = \langle x, g(y)\rangle. \tag{12.81}$$

C'est une forme bilinéaire et symétrique parce que

$$\Phi_1(y,x) = \langle y, g(x)\rangle = \langle g(y), x\rangle = \langle x, g(y)\rangle = \Phi_1(x,y) \tag{12.82}$$

où nous avons utilisé le fait que g était autoadjoint et la symétrie du produit scalaire. De plus Φ_1 est semi-définie positive parce que

$$\Phi_1(x,x) = \langle x, \lambda x - f(x)\rangle = \lambda\|x\|^2 - \phi(x). \tag{12.83}$$

Puisque λ est le maximum, nous avons tout de suite $\Phi_1(x) \geqslant 0$ tant que $\|x\| = 1$. Et si x n'est pas de norme 1, c'est le même prix parce qu'on se ramène à $\|x\| = 1$ en multipliant par un nombre positif. Attention cependant :

$$\Phi_1(x_0, x_0) = \lambda\|x_0\|^2 - \phi(x_0) = 0. \tag{12.84}$$

Donc Φ_1 a un noyau contenant x_0 par la proposition 12.4. Nous en déduisons que $\mathrm{Image}(g) \neq E$ en effet, $x_0 \in \mathrm{Image}(g)^\perp$, mais nous avons la proposition 6.152 sur les dimensions :

$$\dim E = \dim(\mathrm{Image}(g)) + \dim(\mathrm{Image}(g)^\perp). \tag{12.85}$$

[13] Borel-Lebesgue 11.23.
[14] Définition 10.167.
[15] Dans [112], l'auteur commence avec $n = 0$ mais moi je n'en ai pas le courage..

Comme $\text{Image}(g)^\perp$ est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, la dimension de $\text{Image}(g)$ ne peut pas être celle de E. L'endomorphisme g n'étant pas surjectif, il ne peut pas être injectif non plus parce que nous sommes en dimension finie ; il existe donc $e_1 \in E$ tel que $g(e_1) = 0$ et tant qu'à faire nous choisissons $\|e_1\| = 1$ (ici la norme est bien celle de l'espace euclidien considéré). Par définition,

$$f(e_1) = \lambda e_1, \tag{12.86}$$

c'est-à-dire que $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Et ϕ étant une forme quadratique réelle nous avons $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous posons à présent $H = \text{Span}\{e_1\}^\perp$. C'est un sous-espace stable par f parce que si $x \in H$ alors

$$\langle e_1, f(x)\rangle = \langle f(e_1), x\rangle = \lambda\langle e_1, x\rangle = 0. \tag{12.87}$$

Nous pouvons donc considérer la restriction de f à H : $f_H \colon H \to H$. Cet endomorphisme est bilinéaire et symétrique sur l'espace H de dimension inférieure à celle de E, donc la récurrence nous donne une base orthonormée

$$\{e_2, \dots, e_n\} \tag{12.88}$$

de vecteurs propres de f_H. De plus les valeurs propres sont réelles, toujours par récurrence. Donc

$$\text{Spec}(f) = \{\lambda\} \cup \text{Spec}(f_H) \subset \mathbb{R}. \tag{12.89}$$

Notons pour être complet que si $i \geqslant 2$ alors

$$\langle e_1, e_i\rangle = 0 \tag{12.90}$$

parce que le vecteur e_i est par construction choisi dans l'espace $H = e_1^\perp$. Nous avons donc bien une base orthonormée de E construite sur des vecteurs propres de f. □

CorSMHpoVK

Corolaire 12.27.
Soit E un espace vectoriel ainsi que des formes bilinéaires ϕ et ψ sur E. Si ψ est définie positive, alors il existe une base ψ-orthonormale dans laquelle ϕ est diagonale.

Démonstration. Il suffit de considérer l'espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \psi(x, y)$. Ensuite nous diagonalisons la matrice (symétrique) de ϕ pour ce produit scalaire à l'aide du théorème 12.26. □

12.2 Norme euclidienne

DefNormeEucleApp

Définition 12.28.
*La **norme euclidienne** d'un élément de $\mathbb{R}^m$ est définie par $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$*[16].

Cette définition est motivée par le fait que le produit scalaire $u \cdot u$ donne exactement la norme usuelle donnée par le théorème de Pythagore :

$$u \cdot u = \sum_{i=1}^{m} u_i u_i = \sum_{i=1}^{m} u_i^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2. \tag{12.91}$$

Le fait que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ signifie que la base canonique est **orthonormée**, c'est-à-dire que les vecteurs de la base canonique sont orthogonaux deux à deux et qu'ils ont tout 1 comme norme.

LemSclNormeXi

Lemme 12.29.
Pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, il existe un $\xi \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|u\| = \xi \cdot u$ et $\|\xi\| = 1$.

Démonstration. Vérifions que le vecteur $\xi = u/\|u\|$ ait les propriétés requises. D'abord $\|\xi\| = 1$ parce que $u \cdot u = \|u\|^2$. Ensuite

$$\xi \cdot u = \frac{u \cdot u}{\|u\|} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|. \tag{12.92}$$

□

[16] La racine carrée est définie en 11.97.

12.2.1 Inégalité de Minkowski

Ce qui est couramment nommé « inégalité de Minkowski » est la proposition 29.45 dans les espaces L^p. Nous allons en donner ici un cas très particulier.

PropACHooLtsMUL

Proposition 12.30.
Si q est une forme quadratique[17] *sur $\mathbb{R}^n$ et si $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors*

$$\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}. \tag{12.93}$$

Démonstration. La proposition 10.256 nous permet de « diagonaliser » la forme quadratique q. Quitte à ne plus avoir une base orthonormale, nous pouvons renormaliser les vecteurs de base pour avoir

$$q(x) = \sum_i x_i^2. \tag{12.94}$$

Le résultat n'est donc rien d'autre que l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne usuelle, laquelle est démontrée dans le théorème 12.1. □

12.31.
Un produit scalaire fournit donc toujours une norme et donc une topologie. Il ne faudrait cependant pas croire que toute norme dérive d'un produit scalaire, même pas en dimension finie. Et ce, malgré l'équivalence de toutes les normes du théorème 12.70 dont vous avez déjà peut-être entendu parler.

L'intérêt du lemme suivant sera apparent en 12.72.

LEMooRWJYooOIJkZc

Lemme 12.32.
Sur $\mathbb{R}^2$, l'application $N(x,y) = |x| + |y|$ est une norme[18] *qui ne dérive pas d'un produit scalaire*[19].

Démonstration. Nous commençons par montrer que N est une norme. Il faut vérifier les trois conditions de la définition 9.232.

(1) Il faut utiliser le lemme 1.122(2) dans les deux sens. Si $(x,y) = (0,0)$, alors $N(x,y) = |0| + |0| = 0 + 0 = 0$. Dans l'autre sens, si $N(x,y) = 0$ nous avons

$$0 = |x| + |y| \geqslant |x|. \tag{12.95}$$

Donc $|x| \leqslant 0$, mais comme $|x| \geqslant 0$, nous avons $|x| = 0$ et donc $x = 0$. Le même raisonnement tient pour y.

(2) En tenant compte du fait que $|\lambda x| = |\lambda||x|$, nous avons

$$N\big(\lambda(x,y)\big) = N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda||x| + |\lambda||y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| N(x,y). \tag{12.96}$$

(3) Nous avons le calcul

$$\begin{aligned} N\big((x,y) + (a,b)\big) &= N(x+a, y+b) && \text{(12.97a)}\\ &= |x+a| + |y+b| && \text{(12.97b)}\\ &\leqslant |x| + |a| + |y| + |b| = N(x,y) + N(a,b) && \text{(12.97c)} \end{aligned}$$

SUBEQooIXKWooTNQFnu

Justification : pour (12.97c) nous avons utilisé $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, du lemme 1.122.

Pour voir qu'elle ne dérive pas d'un produit scalaire, nous montrons qu'elle ne vérifie pas l'identité du parallélogramme du théorème 12.1.

Voici un petit bout de code qui nous permet de ne pas faire de recherches à la main :

```
# Dans un cas réel, vous avez nettement intérêt à
# créer une classe 'Vecteur' qui implémente somme, différence
# et norme.
def N(v):
    return abs( v[0] )+abs(v[1])
```

[17] Définition 10.121.
[18] Définition 9.232.
[19] La norme d'un produit scalaire est le théorème 12.1.

```
6
7  def parall(v,w):
8      # La différence v-w
9      d=( v[0]-w[0],v[1]-w[1] )
10     # La somme v+w
11     s=( v[0]+w[0],v[1]+w[1] )
12
13     return N(d)**2+N(s)**2-2*N(v)**2-2*N(w)**2
```

tex/sage/sageSnip018.sage

Il est vite vu qu'avec $v = (-1, 1)$ et $w = (1, 1)$, l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. □

LemLPOHUme

Lemme 12.33 ([112]).
Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire[20] *et de la norme associée. Si $x, y \in V$ satisfont à $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, alors il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $x = \lambda y$.*

Démonstration. Quitte à raisonner avec $x/\|x\|$ et $y/\|y\|$, nous supposons que $\|x\| = \|y\| = 1$. Dans ce cas l'hypothèse signifie que $\|x + y\|^2 = 4$. D'autre part en écrivant la norme en termes de produit scalaire,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle, \tag{12.98}$$

ce qui nous mène à affirmer que $\langle x, y\rangle = 1 = \|x\|\|y\|$. Nous sommes donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz[21], ce qui nous donne un λ tel que $x = \lambda y$. Étant donné que $\|x\| = \|y\| = 1$ nous avons obligatoirement $\lambda = \pm 1$, mais si $\lambda = -1$ alors $\langle x, y\rangle = -1$, ce qui est le contraire de ce qu'on a prétendu plus haut. Par souci de cohérence, nous allons donc croire que $\lambda = 1$. □

PropVectsOrthLibres

Proposition 12.34 ([381]).
si $v_1, \cdots, v_k$ sont des vecteurs non nuls, orthogonaux deux à deux, alors ces vecteurs forment une famille libre.

Démonstration. Soit une combinaison linéaire nulle des v_i : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$. Nous multiplions scalairement par v_k :

$$0 = \sum_i \lambda_i v_k \cdot v_i = \sum_i \lambda_i \delta_{ki} \|v_i\|^2 = \lambda_k \|v_k\|^2. \tag{12.99}$$

Donc $\lambda_k = 0$. □

LEMooYXJZooWKRFRu

Lemme 12.35.
Une isométrie d'un espace euclidien fixe l'origine.

Démonstration. Soit une isométrie f d'un espace euclidien : $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ pour tout $x, y \in E$. En particulier pour $x = 0$ nous avons

$$f(0) \cdot f(y) = 0 \tag{12.100}$$

pour tout y. Parce que f est une bijection, nous avons $f(0) \cdot x = 0$ pour tout x. Comme le produit scalaire est non dégénéré[22] cela implique que $f(0) = 0$. □

12.2.2 Cauchy-Schwarz etc. cas complexe

THOooSUCBooFnpkaF

Théorème 12.36 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas complexe[382]).
Soit un espace vectoriel complexe muni d'un produit hermitien $\langle ., .\rangle$. Alors pour tous vecteurs x, y nous avons

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \tag{12.101}$$

où nous avons posé $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Démonstration. Si $\langle x, y\rangle = 0$, le résultat est évident. Nous nous concentrons donc sur le cas où $\langle x, y\rangle \neq 0$. Nous posons

$$\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|}. \tag{12.102}$$

[20] Définition 10.163.
[21] Théorème 12.1.
[22] Lemme 10.166.

C'est un élément de $\mathbb{C}$ de norme 1. Nous avons

$$\langle \frac{1}{\theta}x, y\rangle = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| \geqslant 0 \tag{12.103}$$

où le symbole « $\geqslant$ » signifie « est réel et positif ». Nous posons $x' = \frac{1}{\theta}x$ et nous considérons $t \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\|x'\|^2 = \|x\|^2$:

$$\|x'\|^2 = \langle x', x'\rangle = \frac{1}{\theta\bar{\theta}}\langle x,x\rangle = \|x\|^2 \tag{12.104}$$

parce que $|\theta| = 1$.

En utilisant le fait que $\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = \operatorname{Re}(\langle a,b\rangle)$ nous avons :

$$0 \leqslant \|x' + ty\|^2 = \|x'\|^2 + t\langle x',y\rangle + t\langle y,x'\rangle + t^2\|y\|^2 \tag{12.105a}$$
$$= \|y\|^2t^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x',y\rangle)t + \|x'\|^2. \tag{12.105b}$$

C'est un polynôme de degré 2 en t qui n'est jamais strictement négatif. Autrement dit, il a au maximum une seule racine, ce qui signifie que son discriminant est négatif ou nul :

$$\operatorname{Re}(\langle x',y\rangle)^2 - \|y\|^2\|x'\|^2 \leqslant 0. \tag{12.106}$$

Mais nous avons choisi x' de telle sorte que $\langle x',y\rangle = |\langle x,y\rangle| \in \mathbb{R}$ et $\|x'\|^2 = \|x\|^2$; nous avons donc

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2, \tag{12.107}$$

comme il se devait. □

12.3 Norme à partir d'un produit scalaire

PROPooSSYJooHAXAnC

Proposition 12.37 (Identité du parallélogramme[383])**.**
Soit un espace vectoriel complexe E muni d'un produit hermitien $\langle .,.\rangle$. Nous posons $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Nous avons

(1) $\|.\|$ est une norme.

(2) Elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{12.108}$$

pour tout $x, y \in E$.

Démonstration. En ce qui concerne le fait que $\|.\|$ soit une norme, tout est essentiellement dans la définition 10.174 d'un produit hermitien. Voyons tout de même l'inégalité triangulaire. Nous avons :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \tag{12.109a}$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \tag{12.109b}$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\big(\langle x,y\rangle\big) \tag{12.109c}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\Re\big(\langle x,y\rangle\big)| \tag{12.109d}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \tag{12.109e}$$
$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \tag{12.109f}$$
$$= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \tag{12.109g}$$

SUBEQooQGQBooMRJcUc

Pour (12.109f) nous avons utilisé Cauchy-Schwarz 12.36. □

DEFooGUXNooXwCsrq

Définition 12.38.
Dans le cas de $\mathbb{C}^n$, nous considérons toujours la norme associée à la forme (10.353) par la proposition 12.37, c'est-à-dire, pour rappel :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}, \tag{12.110}$$

EQooRRVCooVmcRrp

et

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{12.111}$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

LEMooSYTWooMDzrnX

Lemme 12.39 ([1]).
La conjugaison complexe est continue.

Démonstration. La norme sur $\mathbb{C}$ est donnée par la définition 12.38 à partir de laquelle on voir que la conjugaison complexe est une isométrie :

$$\|\bar{z}\| = \|z\|. \tag{12.112}$$

□

LEMooGEVOooKeVQbb

Lemme 12.40 ([1]).
Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ nous avons

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|. \tag{12.113}$$

12.3.1 Diagonalisation : cas complexe, ce qu'on a

LEMooVCEOooIXnTpp

Lemme 12.41 (Théorème spectral hermitien).
Nous considérons un espace vectoriel complexe hermitien. Pour un opérateur hermitien[23]*,*

(1) le spectre est réel,

(2) deux vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux[24]*.*

Démonstration. Soit v un vecteur de valeur propre λ. Nous avons d'une part

$$\langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \lambda\|v\|^2, \tag{12.114}$$

et d'autre part, en utilisant le fait que A est hermitien,

$$\langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = \langle v, Av\rangle = \bar{\lambda}\|v\|^2, \tag{12.115}$$

par conséquent $\lambda = \bar{\lambda}$ parce que $v \neq 0$.

Soient λ_i et v_i $(i = 1, 2)$ deux valeurs propres de A avec leurs vecteurs propres correspondants. Alors d'une part

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle, \tag{12.116}$$

et d'autre part

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, Av_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle. \tag{12.117}$$

Nous avons utilisé le fait que λ_2 était réel. Par conséquent, soit $\lambda_1 = \lambda_2$, soit $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

REMooMLBCooTuKFmz

Remarque 12.42.
Un opérateur de la forme A^*A est évidemment hermitien. De plus ses valeurs propres sont toutes positives parce que si $A^*Av = \lambda v$ alors

$$0 \leqslant \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle. \tag{12.118}$$

Donc $\lambda \geqslant 0$.

12.3.2 Projection et orthogonalité

La définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est 10.168 et le lien avec la matrice d'une application linéaire est la proposition 10.182.

Remarque 12.43.
Outre l'orthogonalité, le produit scalaire permet de connaître l'angle entre deux vecteurs à travers la définition 20.58. D'autres interprétations géométriques du déterminant sont listées dans le thème 45.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer, pour deux vecteurs quelconques u et v, la projection orthogonale de u sur v. Ce sera le vecteur $\bar{u}$ parallèle à v tel que $u - \bar{u}$ est orthogonal à v. Nous avons donc

$$\bar{u} = \lambda v \tag{12.119}$$

et

$$(u - \lambda v) \cdot v = 0. \tag{12.120}$$

[23] Définition 10.177.
[24] Pour la forme (10.353).

La seconde équation donne $u \cdot v - \lambda v \cdot v = 0$, ce qui fournit λ en fonction de u et v :

$$\lambda = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}. \tag{12.121}$$

Nous avons par conséquent

$$\bar{u} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v. \tag{12.122}$$

Armés de cette interprétation graphique du produit scalaire, nous comprenons pourquoi nous disons que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Nous pouvons maintenant savoir quel est le coefficient directeur d'une droite orthogonale à une droite donnée. En effet, supposons que la première droite soit parallèle au vecteur X et la seconde au vecteur Y. Les droites seront perpendiculaires si $X \cdot Y = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{12.123}$$

Cette équation se développe en

$$x_1 y_1 = -x_2 y_2. \tag{12.124}$$

Eqxuyuklisca

Le coefficient directeur de la première droite est $\frac{x_2}{x_1}$. Isolons cette quantité dans l'équation (12.124) :

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{y_1}{y_2}. \tag{12.125}$$

Donc le coefficient directeur de la première est l'inverse et l'opposé du coefficient directeur de la seconde.

Exemple 12.44.
Soit la droite $d \equiv y = 2x + 3$. Le coefficient directeur de cette droite est 2. Donc le coefficient directeur d'une droite perpendiculaires doit être $-\frac{1}{2}$. △

PROBooLOEKooZxNpJZ

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 12.45
La « preuve alternative » qui suit … je ne sais plus du tout à quoi elle faisait référence. Si vous avez une idée de l'énoncé, faites-le moi savoir.

Sinon, vous pouvez certainement ne pas la lire.

Preuve alternative. La preuve peut également être donnée en ne faisant pas référence au produit scalaire. Il suffit d'écrire toutes les quantités en termes des coordonnées de X et Y. Si nous posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{12.126}$$

l'inégalité à prouver devient

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \tag{12.127}$$

Nous considérons la fonction

$$\varphi(t) = (x_1 + t y_1)^2 + (x_2 + t y_2)^2 + (x_3 + t y_3)^2 \tag{12.128}$$

En tant que norme, cette fonction est évidemment positive pour tout t. En regroupant les termes de chaque puissance de t, nous avons

$$\varphi(t) = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)t^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)t + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{12.129}$$

C'est un polynôme du second degré en t. Par conséquent le discriminant doit être négatif[25]. Nous avons donc

$$4(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \leqslant 0. \tag{12.130}$$

La thèse en découle aussitôt. □

[25] Proposition 11.116.

12.3.3 Théorème de Pythagore

THOooHXHWooCpcDan

Théorème 12.46 (Pythagore[1]).
Soient un espace euclidien[26] *E ainsi que trois points $a, b, c \in E$ formant un triangle rectangle en a, c'est-à-dire tel que*

EQooRAWAooBxlBcZ
$$(b-a) \cdot (a-c) = 0 \tag{12.131}$$

Alors

$$\|b-c\|^2 = \|b-a\|^2 + \|a-c\|^2. \tag{12.132}$$

Démonstration. D'abord pour développons l'hypothèse (12.131) :

$$b \cdot a - b \cdot c - \|a\|^2 + a \cdot c = 0, \tag{12.133}$$

et nous isolons un bout qui va nous servir plus tard :

EQooWPWZooLjlVJk
$$b \cdot a + a \cdot c = b \cdot c + \|a\|^2. \tag{12.134}$$

Maintenant nous calculons un peu :

$$\begin{aligned}
\|b-a\|^2 + \|a-c\|^2 &= \|b\|^2 - 2b \cdot a + \|a\|^2 + \|a\|^2 - 2a \cdot c + \|c\|^2 && \text{(12.135a)}\\
&= 2\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2(b \cdot c + \|a\|^2) && \text{(12.135b)}\\
&= \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2b \cdot c && \text{(12.135c)}\\
&= \|b-c\|^2. && \text{(12.135d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooHCWXooQHpGTO

Pour (12.135b), nous avons substitué (12.134). □

12.47.
Je profite de l'occasion pour montrer mon scepticisme quant aux preuves de Pythagore basées sur différents pliages et découpages des carrés construits sur les côtés du triangle.

Si, comme ici, nous considérons la géométrie dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire, alors le théorème 12.46 est le théorème de Pythagore et il n'est pas loin d'être la définition de la distance entre deux points. Ce serait exactement la définition pour le triangle $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, $C = (a,b)$.

Pour autant que je le sache, la géométrie dans « le plan » (celle du collège) ne définit pas « longueur » et « aire ». Donc bon … Il y a peut-être un moyen de s'en sortir, mais je ne le connais pas.

Bref, soit on se met d'accord sur les définitions (et dans ce cas je serais étonné qu'il existe une démonstration de Pythagore très différente de ce qu'on a ici), soit il faudrait se calmer avec les soi-disant preuves du théorème de Pythagore.

LEMooKDGRooMmJqnn

Lemme 12.48.
Soit un carré de côté c. Alors deux points du carré sont au maximum éloignés d'une distance égale à $c\sqrt{2}$.

12.3.4 Produit vectoriel

DEFooTNTNooRjhuJZ

Définition 12.49.
*Soient u et v, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le **produit vectoriel** de u et v est le vecteur $u \times v$ défini par*

EQooCUJRooFuFPaZ
$$u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \tag{12.136}$$

où les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

LEMooYKNPooGVMuse

Lemme 12.50.
Le produit vectoriel $u \times v$ est également exprimé par EQSooOWGZooNYruoy

SEBEQooVRQKooBnUQIr
$$\begin{aligned}
u \times v &= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3 && \text{(12.137a)}\\
&= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} v_i w_j e_k && \text{(12.137b)}
\end{aligned}$$

où ϵ_{ijk} est défini par $\epsilon_{xyz} = 1$ et ensuite ϵ_{ijk} est 1 ou -1 suivant que la permutation des x, y et z est paire ou impaire. C'est-à-dire que ϵ_{ijk} est la signature de la permutation qui amène $(1,2,3)$ sur (i,j,k).

[26] Définition 10.167.

Démonstration. Il s'agit seulement de développer explicitement le déterminant (12.136). □

NORMooARQCooCAapiy

12.51.
Admettons que $a \times b = v$. En calculant le même produit vectoriel dans la base $f_i = -e_i$, les composantes de a et b changent de signe et la formule (12.137) dit que le produit vectoriel ne change pas. On serait tenté d'écrire, dans la base $\{f_i\}$

$$(-a) \times (-b) = v, \tag{12.138}$$

tout en pleurant parce que dans la base des f_i, le vecteur v devient $-v$.

Il y a des personnes que cela tracasse tellement qu'on entend parler de « le produit vectoriel est un pseudo-vecteur sous SO(2) ». Les physiciens en théorie quantique des champs sont terribles sur ce sujet[27].

Il suffit d'être clair. Le produit vectoriel n'est défini que sur $\mathbb{R}^3$, et est défini par sa formule dans la base canonique, point barre. Si vous avez des vecteurs a et b dont vous connaissez les composantes dans une autre base, vous devez calculer les composantes dans la base canonique, utiliser la formule pour trouver les composantes de $a \times b$ dans la base canonique. Ensuite, si ça vous chante, vous pouvez calculer à nouveau les composantes de $a \times b$ dans une autre base.

Tout cela pour dire que le produit vectoriel n'est pas une opération très généralisable. Il est possible, pour sembler plus intrinsèque, de tenter cette définition : le produit vectoriel $a \times b$ est le vecteur perpendiculaire à a et b, de longueur égale à l'aire du parallélogramme construit sur a et b.

Cette « définition » a plusieurs inconvénients.

- Elle demande quand même un produit scalaire et des aires ; bref, elle demande une structure métrique,
- Elle ne donne pas le sens. En effet, dans $\mathbb{R}^3$, il y a deux vecteurs de longueur donnée perpendiculaires à a et b. Il faut donc préciser le sens. Cela revient à donner une orientation et donc, fondamentalement, à choisir une base.

Bref, on retiendra que le produit vectoriel est une opération accrochée à $\mathbb{R}^3$ et à sa base canonique.

Lemme-Définition 12.52.
Nous avons l'égalité suivante pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$(u \times v) \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}. \tag{12.139}$$

EQooKJYUooSQefXU

Le résultat est nommé le ***produit mixte*** *de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

12.53.
Nous avons donné un nom à la combinaison $(u \times v) \cdot w$. J'imagine que vous voyez pourquoi nous ne considérons pas la combinaison $(u \cdot v) \times w$.

Le lemme suivant donne un moyen compliqué et peu pratique de calculer la valeur absolue du produit mixte. La formule (12.140) ne sera utilisée que pour faire le lien entre un jacobien et un élément de volume en dimension trois lorsque nous verrons les intégrales sur des variétés. Voir l'équation (22.38).

LEMooSMWNooCmEZeY

Lemme 12.54 ([1])**.**
Le produit mixte peut également être exprimé par

$$|(u \times v) \cdot w|^2 = \det \begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & \|v\|^2 & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix}. \tag{12.140}$$

EQooWZUQooXydphW

Démonstration. Si nous notons

$$a = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \tag{12.141}$$

il faut simplement remarquer que

$$\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & \|v\|^2 & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix} = aa^t. \tag{12.142}$$

[27] D'autant plus que, au lieu d'écrire un produit scalaire $a \cdot b$, il écrivent $a_i b^i$ en disant que b^i est un covecteur. Avec toutes les complications que ça implique sur les « lois de transformation » d'un covecteur sous tel ou tel groupe.

Donc au niveau des déterminants, en utilisant les propositions 10.250 et le lemme 6.91 nous avons

$$\det\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u\cdot v & u\cdot w \\ v\cdot u & \|v\|^2 & v\cdot w \\ w\cdot u & w\cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix} = \det(aa^t) = \det(a)\det(a^t) = \det(a)^2. \tag{12.143}$$

Et maintenant, par définition, $\det(a) = (u\times w)\cdot w$. Donc le résultat annoncé. □

PropScalMixtLin

Proposition 12.55.
Les applications produit scalaire, vectoriel et mixte sont multilinéaires. Spécifiquement, nous avons les propriétés suivantes.

(1) *Les applications produit scalaire et vectoriel sont bilinéaires. C'est-à-dire que pour tout vecteurs a, b, c et pour tout nombre α et β nous avons*

$$\begin{aligned} a\times(\alpha b+\beta c) &= \alpha(a\times b)+\beta(a\times c)\\ (\alpha a+\beta b)\times c &= \alpha(a\times c)+\beta(b\times c). \end{aligned} \tag{12.144}$$

(2) *Le produit mixte est trilinéaire.*

(3) *Le produit vectoriel est antisymétrique, c'est-à-dire $u\times v = -v\times u$.*

(4) *Nous avons $u\times v = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si l'équation $\alpha u+\beta v = 0$ a une solution différente de la solution triviale $(\alpha,\beta) = (0,0)$.*

PROPooMXAIooJureOD

Proposition 12.56 (Identité de Lagrange[384])**.**
Si $x, y\in\mathbb{R}^n$, alors

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2 = \sum_j\sum_{i<j}(x_iy_j - x_jy_i)^2. \tag{12.145}$$

Et si $n = 3$ alors

$$\|x\times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2. \tag{12.146}$$

Démonstration. C'est un calcul. D'abord nous avons

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2 = \sum_i x_i^2\sum_j y_j^2 - \big(\sum_k x_ky_k\big)^2 = \sum_{ij}x_i^2y_j^2 - \sum_{kl}x_ky_kx_ly_l. \tag{12.147}$$

Ensuite nous coupons les sommes de la façon suivante

$$\sum_{ij} = \sum_j\sum_{i<j} + \sum_j(i=j) + \sum_j\sum_{i>j} \tag{12.148}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2 = &\sum_j\sum_{i<j}x_i^2y_j^2 + \sum_j x_j^2y_j^2 + \sum_j\sum_{i>j}x_i^2y_j^2\\ &- \sum_l\sum_{k<l}x_ky_kx_ly_l - \sum_k x_k^2y_k^2 - \sum_l\sum_{k>l}x_ky_kx_ly_l. \end{aligned} \tag{12.149}$$

Il y a deux termes qui se simplifient. Notez que si A_{kl} est symétrique en kl nous avons

$$\sum_l\sum_{k<l}A_{kl} = \sum_k\sum_{l<k}A_{lk} = \sum_k\sum_{l<k}A_{kl}. \tag{12.150}$$

La première égalité était seulement un renommage des indices. Le coup des indices symétriques est justement ce qu'il se passe dans les deux termes en$x_ky_kx_ly_l$, donc nous les regroupons :

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2 = \sum_j\big(\sum_{i<j}x_i^2x_j^2 + \sum_{i>j}x_i^2y_j^2 - 2\sum_{i>j}x_iy_ix_jy_j\big) \tag{12.151a}$$

$$= \sum_j\sum_{i<j}(x_i^2y_j^2 + x_j^2y_i^2 - 2x_iy_ix_jy_j) \tag{12.151b}$$

$$= \sum_j\sum_{i<j}(x_iy_j - x_jy_i)^2. \tag{12.151c}$$

Voilà qui prouve la première formule. Pour la seconde, il faut seulement poser $n = 3$ et écrire les sommes explicitement.

- Pour $j = 1$, la somme sur i est $\sum_{i<1}$, c'est-à-dire aucun termes.
- Pour $j = 2$, il y a seulement $i = 1$, donc le terme $(x_1y_2 - x_2y_1)^2$.
- Pour $j = 3$, il y a les termes $i = 1$ et $i = 2$, donc les termes $(x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2$.

Ces trois termes collectés sont justement les composants (au carré) de $x \times y$ données dans la formule (12.137a). □

Les trois vecteurs de base e_x, e_y et e_y ont des produits vectoriels faciles à retenir :

$$\begin{aligned} e_x \times e_y &= e_z \\ e_y \times e_z &= e_x \\ e_z \times e_x &= e_y \end{aligned} \tag{12.152}$$

Les deux formules suivantes, qui mêlent le produit scalaire et le produit vectoriel, sont souvent utiles en analyse vectorielle :

$$\begin{aligned} (u \times v) \cdot w &= u \cdot (v \times w) \\ (u \times v) \times w &= -(v \cdot w)u + (u \cdot w)v \end{aligned} \tag{12.153}$$

EqFormExpluxxx

pour tout vecteurs u, v et w dans $\mathbb{R}^3$. Nous les admettons sans démonstration. La seconde formule est parfois appelée **formule d'expulsion**.

Exemple 12.57.
Calculons le produit vectoriel $v \times w$ avec

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{12.154}$$

Les vecteurs s'écrivent sous la forme $v = 3e_x - e_y + e_z$ et $w = e_x + 2e_y - e_z$. Le produit vectoriel s'écrit

$$\begin{aligned} (3e_x - e_y + e_z) \times (e_x + 2e_y - e_z) &= 6e_x \times e_y - 3e_x \times e_z \\ &\quad - e_y \times e_x + e_y \times e_z \\ &\quad + e_z \times e_x + 2e_z \times e_y \\ &= 6e_z + 3e_y + e_z + e_x + e_y - 2e_x \\ &= -e_x + 4e_y + 7e_z. \end{aligned} \tag{12.155}$$

△

12.3.5 Produit mixte

Si a, b et c sont trois vecteurs, leur **produit mixte** est le nombre $a \cdot (b \times c)$. En écrivant le produit vectoriel sous forme de somme de trois déterminants 2×2, nous avons

$$\begin{aligned} & a \cdot (b \times c) \\ &= (a_1e_x + a_2e_y + a_3e_z) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{12.156}$$

Le produit mixte s'écrit donc sous forme d'un déterminant. Nous retenons cette formule :

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{12.157}$$

EqProduitMixteDet

12.3.6 Complétion de bases, procédé de Gram-Schmidt

Un grand intérêt du produit vectoriel est qu'il fournit un vecteur qui est simultanément perpendiculaire aux deux vecteurs donnés.

PROPooTUVKooOQXKKl

Proposition 12.58.
Le produit vectoriel[28] $a \times b$ *est un vecteur orthogonal à* a *et* b.

Démonstration. Vérifions que $a \perp (a \times b)$. Pour cela, nous calculons $a \cdot (a \times b)$, c'est-à-dire le produit mixte

$$a \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.158}$$

L'annulation de ce déterminant est due au fait que deux de ses lignes sont égales. □

Ces résultats admettent une intéressante généralisation.

LEMooFRWKooVloCSM

Lemme 12.59.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ *ainsi que* $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. *Alors*

(1) Nous avons

$$\det(X, v_1, \dots, v_{n-1}) = X \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \tag{12.159}$$

EQooMQNPooRHHBiz

(2) Le vecteur

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \tag{12.160}$$

est orthogonal à tous les v_i.

Démonstration. Puisque les deux côtés de (12.159) vus comme fonctions de X, sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier l'égalité sur une base.

Nous posons $\tau_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\tau_i(v)_k = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } k \geqslant i. \end{cases} \tag{12.161}$$

et nous avons d'une part

$$e_k \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \tau_k v_1 \\ \vdots \\ \tau_k v_{n-1} \end{pmatrix} \tag{12.162}$$

et d'autre part,

$$\det(e_k, v_1, \dots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det(\tau_k v_1, \dots, \tau_k v_{n-1}). \tag{12.163}$$

La première assertion est démontrée.

En ce qui concerne la seconde, il suffit d'appliquer la première et se souvenir qu'un déterminant est nul lorsque deux lignes sont égales[29]. En effet :

$$v_k \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det(v_k, v_1, \dots, v_n) = 0. \tag{12.164}$$

[28] Définition 12.49.
[29] Corolaire 6.94.

□

PropUMtEqkb

Proposition 12.60 (Procédé de Gram-Schmidt)**.**
Un espace euclidien possède une base orthonormée.

Démonstration. Soit E un espace euclidien et $\{v_1, \dots, v_n\}$, une base quelconque de E. Nous posons d'abord

$$f_1 = v_1, \quad e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}. \tag{12.165}$$

Ensuite

$$f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1, \quad e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}. \tag{12.166}$$

Notons que $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\text{Span}\{v_1, v_2\}$. De plus elle est orthogonale :

$$\langle e_1, f_2\rangle = \langle e_1, v_2\rangle - \langle v_2, e_1\rangle \underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=1} = 0. \tag{12.167}$$

Le fait que $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ est par construction. Nous avons donc donné une base orthonormée de $\text{Span}\{v_1, v_2\}$.

Nous continuons par récurrence en posant

$$f_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i\rangle e_i, \quad e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}. \tag{12.168}$$

Pour tout $j < k$ nous avons

$$\langle e_j, f_k\rangle = \langle e_j, v_k\rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i\rangle \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = 0 \tag{12.169}$$

□

Cet algorithme de Gram-Schmidt nous donne non seulement l'existence de bases orthonormée pour tout espace euclidien, mais aussi le moyen d'en construire à partir de n'importe quelle base. Il est également possible de compléter une base avec des vecteurs perpendiculaires aux vecteurs déjà donnés en utilisant le lemme 12.59.

12.3.7 Pseudo-réduction simultanée

CorNHKnLVA

Corolaire 12.61 (Pseudo-réduction simultanée[385])**.**
Soient $A, B \in \text{S}(n, \mathbb{R})$ avec A définie positive[30]*. Alors il existe $Q \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que Q^tBQ soit diagonale et $Q^tAQ = \mathbb{1}$.*

Démonstration. Nous allons noter $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ sa base canonique.

Comme A est définie positive, l'expression $\langle x, y\rangle = x \cdot Ay$ donne un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons donc deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, et nous allons travailler avec les deux.

La proposition 12.60 appliquée à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \langle ., .\rangle)$ dit qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ pour ce produit scalaire. Nous considérons l'application linéaire P définie par

$$Pe_i = f_i. \tag{12.170}$$

Nous démontrons à présent que $P^tAP = \mathbb{1}$. Pour cela, nous calculons

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle f_i, f_j\rangle && \text{(12.171a)}\\
&= f_i \cdot Af_j && \text{(12.171b)}\\
&= Pe_i \cdot APe_j && \text{(12.171c)}\\
&= e_i \cdot P^tAPe_j && \text{(12.171d)}\\
&= (P^tAP)_{ij}. && \text{(12.171e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooGZDJooVMuWNn

SUBEQooQNVUooNbvIzM

SUBEQooITBKooCEmqxx

Justifications :

[30] Définition 10.231.

- Pour (12.171a), la base (f_j) est orthonormée pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
- Pour (12.171d), la proposition 10.184 sur la transposée.
- Pour (12.171e), la formule du produit scalaire usuel pour avoir les éléments de matrice, proposition 10.182.

La matrice P^tBP est une matrice symétrique, donc le théorème spectral 10.228 nous donne une matrice $R \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ telle que R^tP^tBPR soit diagonale. En posant maintenant $Q = PR$ nous avons la matrice cherchée. □

REMooDDUEooJXZIfE

Remarque 12.62.
Plusieurs remarques :

(1) Nous n'avons pas prouvé l'existence d'une matrice P telle que $P^{-1}BP$ et $P^{-1}AP$ soient diagonales. Au contraire, nous avons Q^tBQ et Q^tAQ qui sont diagonales. Tant que Q n'est pas orthogonale, ce n'est pas la même chose.

Autrement dit, nous n'avons pas ici une vraie diagonalisation, parce que les matrices A et B ne sont pas semblables à des matrices diagonales. Voir les définitions 10.215 (diagonalisable) et 10.201 (semblable).

C'est pour cela que nous parlons de *pseudo*-diagonalisation.

(2) Dans le même ordre d'idée, la démonstration de la pseudo-diagonalisation simultanée parle clairement de formes bilinéaires, et non d'endomorphismes. Or en comparant les lois de transformations (6.255) et (10.312), nous voyons bien que la réduction en passant par Q^tAQ est bien une réduction de forme bilinéaire et non une réduction d'endomorphismes.

(3) Nous avons prouvé la pseudo-réduction simultanée comme corolaire du théorème de diagonalisation des matrices symétriques 10.228. Il aurait aussi pu être vu comme un corolaire du théorème spectral 12.26 sur les opérateurs autoadjoints via son corolaire 12.27.

12.4 Approximations

Le lemme suivant est surtout intéressant en dimension infinie.

Lemme 12.63.
Soit un espace vectoriel normé V et un sous-espace vectoriel dense A. Soit $v \in V$; il existe une suite (v_n) dans A telle que $v_n \xrightarrow{V} v$ et $\|v_n\| \leqslant \|v\|$ pour tout n.

Démonstration. Puisque A est dense, il existe une suite a_n dans A telle que $a_n \to v$. Ensuite il suffit de poser

$$v_n = \frac{n}{n+1}\frac{\|v\|}{\|a_n\|}a_n. \tag{12.172}$$

Par construction nous avons toujours

$$\|v_n\| = \frac{n}{n+1}\|v\| \leqslant \|v\|. \tag{12.173}$$

Et de plus, la norme étant continue[31],

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{\|v\|}{\|a_n\|} \lim_{n\to\infty} a_n = v. \tag{12.174}$$

Le fait que v_n soit dans A est dû au fait que A soit vectoriel. □

PROPooVEMGooYKhMFy

Proposition 12.64.
Soit un espace vectoriel normé V et un sous-espace vectoriel dense A. Soit $v \in V$. Nous avons

$$\sup\{|v \cdot a| \text{ tel que } a \in A \text{ et } \|a\| \leqslant \lambda\} = \lambda\|v\|. \tag{12.175}$$

Démonstration. D'abord pour tout $a \in A$ vérifiant $\|a\| \leqslant \lambda$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz 12.1 donne

$$|v \cdot a| \leqslant \|v\|\|a\| \leqslant \lambda\|v\|. \tag{12.176}$$

[31] Où dans le calcul suivant utilisons-nous la continuité de la norme ? Posez-vous la question.

Donc le supremum dont on parle est majoré par $\lambda\|v\|$.

Il nous faut l'inégalité dans l'autre sens. Par densité nous pouvons choisir une suite $v_n \in A$ tel que $v_n \to v$. Ensuite nous posons

$$a_n = \frac{\lambda}{\|v_n\|} v_n. \tag{12.177}$$

Nous avons $\|a_n\| = \lambda$ pour tout n et

$$|v \cdot a_n| = \frac{\lambda}{\|v_n\|} |v \cdot v_n|, \tag{12.178}$$

et en passant à la limite,

$$\lim_{n\to\infty} |v \cdot a_n| = \frac{\lambda}{\|v\|} \|v \cdot v\| = \lambda\|v\|. \tag{12.179}$$

Donc l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum contient une suite convergente vers $\lambda\|v\|$. Le supremum est donc au moins aussi grand que cela. □

12.4.1 Quelques exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$

Il est possible de définir de nombreuses normes sur $\mathbb{R}^n$. Citons-en quelques-unes parmi les normes $\|.\|_p$. Le cas général $p \geqslant 1$ sera fait dans 19.134.

PROPooCLZRooIRxCnZ

Proposition-Définition 12.65 ([386, 276]).
Les formules suivantes définissent des normes[32] *sur* $\mathbb{R}^n$.

ITEMooQBLGooPQKSev

(1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,

ITEMooXQUFooLHrITI

(2) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,

ITEMooSOVDooTuhEik

(3) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

La norme $\|.\|_\infty$ *est nommée* ***norme supremum****.*

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Déjà fait dans le lemme 12.32.

(2) **Pour (2)** Le cas $p = 2$ provient de l'inégalité

$$\sqrt{(a+b)^2} \leqslant \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}, \tag{12.180}$$

laquelle se démontre en passant au carré :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2|ab| = \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\right)^2. \tag{12.181}$$

EQooRYNYooTzZpPz

(3) **Pour (3)** Pour l'inégalité triangulaire, nous faisons

$$\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leqslant \max_i \big(|x_i| + |y_i|\big) \leqslant \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \tag{12.182}$$

Les autres points de la définition 9.232 sont faciles quand on se rappelle que $x = 0$ si et seulement si $x_i = 0$ pour tout i.

□

Parmi ces normes, celles qui seront le plus souvent utilisées sont les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ qui, pour des raisons que nous verrons beaucoup plus tard[33] sont souvent notées $\|.\|_{L^p}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^1} &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_{L^2} &= \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{12.183}$$

[32] Définition 9.232.
[33] La proposition 29.19, par exemple.

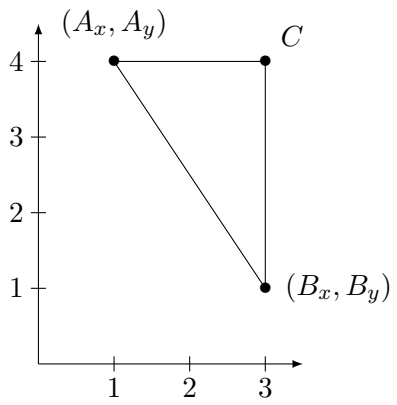


FIGURE 12.1 : La *norme* euclidienne induit la *distance* euclidienne. D'où son nom. Le point C est construit aux coordonnées (A_x, B_y).

LabelFigDistanceEuclide

Soient $A = (A_x, A_y)$ et $B = (B_x, B_y)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. La distance[34] euclidienne entre A et B est donnée par $\|A - B\|_2$. En effet, sur la figure 12.1, la distance entre les points A et B est donnée par

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 = |A_x - B_x|^2 + |A_y - B_y|^2, \tag{12.184}$$

par conséquent,

$$|AB| = \sqrt{|A_x - B_x|^2 + |A_y - B_y|^2} = \|A - B\|_2. \tag{12.185}$$

Remarque 12.66.
Si A, B et C sont trois points dans le plan $\mathbb{R}^2$, alors l'inégalité triangulaire $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$ est précisément la propriété (4) de la norme (définition 9.232). En effet l'inégalité triangulaire s'exprime de la façon suivante en termes de la norme $\|.\|_2$:

EqNDeuxAmBNNdd

$$\|A - B\|_2 \leqslant \|A - C\|_2 + \|C - B\|_2. \tag{12.186}$$

En notant $u = A - C$ et $v = C - B$, l'équation (12.186) devient exactement la propriété de définition de la norme :

$$\|u + v\|_2 \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2. \tag{12.187}$$

Ceci explique pourquoi cette propriété des normes est appelée « inégalité triangulaire ».

12.5 Équivalence des normes

normes_equiv

Au premier coup d'œil, les notions dont nous parlons dans ce chapitre ont l'air très générales. Nous prenons en effet n'importe quel espace vectoriel V de dimension finie, et nous le munissons de n'importe quelle norme. Rien que dans $\mathbb{R}^m$ nous allons en définir une infinité par l'équation (19.563)). À partir de ces données, nous définissons les boules, la topologie, l'adhérence, etc.

12.5.1 En dimension finie

Dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|.\|_{L^1}$, $\|.\|_{L^2}$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas égales. Cependant elles ne sont pas complètement indépendantes au sens où l'on sent bien que si un vecteur sera grand pour une norme, il sera également grand pour les autres normes ; les normes « vont dans le même sens ». Cette notion est précisée par le concept de norme équivalente.

LEMooHAMEqWdNoAN

Proposition-Définition 12.67 ([387]).
Soient deux normes N_1 et N_2 sur l'espace vectoriel E de dimension finie. Nous disons que $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe des réels strictement positifs k_1, k_2 tels que

$$k_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant k_2 N_1(x). \tag{12.188}$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence[35] sur l'ensemble des normes de E.
*Si $N_1 \sim N_2$ nous disons que les normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^m$ sont **équivalentes**.*

[34] Ne pas confondre « distance » et « norme ».
[35] Définition 1.55.

Démonstration. Vu que tous les nombres sont strictement positifs, nous pouvons multiplier et diviser sans changer le sens des inégalités. Gardant cela en tête, nous faisons les trois vérifications.

(1) **réflexive** Nous avons $N_1 \sim N_1$ avec $k_1 = k_2 = 1$.

(2) **Symétrique** Supposons avoir k_1, k_2 tels que $k_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant k_2 N_1(x)$. Alors nous avons aussi

$$\frac{1}{k_2} N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \frac{1}{k_1} N_2(x). \tag{12.189}$$

(3) **Transitive** Supposons $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$. Nous avons donc des nombres k_1, k_2, l_1 et l_2 tels que

$$\begin{aligned} k_1 N_1(x) &\leqslant N_2(x) \\ N_2(x) &\leqslant k_2 N_1(x) \\ l_1 N_2(x) &\leqslant N_3(x) \\ N_3(x) &\leqslant l_2 N_2(x). \end{aligned} \tag{12.190}$$

En combinant,

$$k_1 l_1 N_1(x) \leqslant l_1 N_2(x) \leqslant N_3(x) \leqslant l_2 N_2(x) \leqslant l_2 k_2 N_1(x). \tag{12.191}$$

En particulier, $k_1 l_1 N_1(x) \leqslant N_3(x) \leqslant l_2 k_2 N_1(x)$. □

PropLJEJooMOWPNi

Proposition 12.68.
Pour $\mathbb{R}^n$, nous avons les équivalences de normes $\|.\|_{L^1} \sim \|.\|_{L^2}$, $\|.\|_{L^1} \sim \|.\|_\infty$ et $\|.\|_{L^2} \sim \|.\|_\infty$. Plus précisément nous avons les inégalités[36]

ItemABSGooQODmLNi

(1) $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$

ItemABSGooQODmLNii

(2) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$

ItemABSGooQODmLNiii

(3) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Démonstration. En mettant au carré la première inégalité nous voyons que nous devons vérifier l'inégalité

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqslant \big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big)^2 \tag{12.192}$$

qui est vraie parce que le membre de droite est égal au carré de chaque terme plus les doubles produits. La seconde inégalité provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 12.1) sur les vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}. \tag{12.193}$$

Nous trouvons

$$\frac{1}{n} \sum_i |x_i| \leqslant \sqrt{n \cdot \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_i |x_i|^2}, \tag{12.194}$$

et par conséquent

$$\sum_i |x_i| \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2. \tag{12.195}$$

La première inégalité de (3) se démontre en remarquant que si a et b sont positifs, $a \leqslant \sqrt{a^2 + b}$. En appliquant cela à $a = \max_i |x_i|$, nous avons

$$\max_i |x_i| \leqslant \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \tag{12.196}$$

parce que $\max_i |x_i|$ est évidemment un des termes de la somme. Pour la seconde inégalité de (3), nous avons

$$\sqrt{\sum_k |x_k|^2} \leqslant \left(\sum_k \max_i |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty. \tag{12.197}$$

Pour obtenir cette inégalité, nous avons remplacé tous les termes $|x_k|$ par le maximum. □

[36] Les racines carrés sont définies en 11.97.

Pour les autres normes $\|.\|_p$, il y a des inégalités dans 19.135 et 19.127 ; voir aussi le thème 25.
Une dernière avant l'équivalence de toutes les normes.

Proposition-Définition 12.69.
Les topologies suivantes sont égales sur $\mathbb{R}^n$.

ITEMooWACPooFBAWhx

(1) La topologie produit $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ des espaces topologiques $(\mathbb{R}, |.|)$,

ITEMooJPJHooGTuLen

(2) La topologie de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_i\{|x_i|\}, \tag{12.198}$$

ITEMooEBYQooXiOOtb

(3) La topologie de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \tag{12.199}$$

Elle est la topologie que nous allons toujours considérer sur $\mathbb{R}^n$ (sauf mention très explicite du contraire).

Démonstration. Les topologies (1) et (2) sont identiques par le lemme 9.306. Les topologies (2) et (3) sont identiques par la proposition 12.68. □

En réalité, toutes les normes $\|.\|_{L^p}$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes et, plus généralement, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

ThoNormesEquiv

Théorème 12.70 ([388, 389]).
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit un espace vectoriel V de dimension finie. Nous allons montrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$. Soit donc une norme N sur V.

(1) **Inégalité dans un sens** Vu que V est de dimension finie, il accepte une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. En posant $D = \sum_{i=1}^n N(e_i)$, nous avons

$$N(x) = N(\sum_i x_i e_i) \leqslant \sum_i |x_i| N(e_i) \leqslant n\|x\|_\infty D. \tag{12.200}$$

Nous avons donc l'inégalité[37]

$$N(x) \leqslant nD\|x\|_\infty. \tag{12.201}$$

(2) **Dans l'autre sens** La proposition 9.233 donne

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y) \leqslant Dn\|x - y\|_\infty. \tag{12.202}$$

Donc l'application $N : (V, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue. Vu que la sphère

$$S = \{x \in V \text{ tel que } \|x\|_\infty = 1\} \tag{12.203}$$

est compacte[38], la fonction continue N y prend un minimum[39]. Il existe donc $m > 0$ tel que $m \leqslant N(x)$ pour tout $x \in S$.

Soit $x \in V$. Nous avons $x/\|x\|_\infty \in S$, de telle sorte que

$$m \leqslant N(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x), \tag{12.204}$$

ou encore $N(x) \geqslant m\|x\|_\infty$.

(3) **Conclusion** Pour tout $x \in V$ nous avons les inégalités

$$m\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant nD\|x\|_\infty. \tag{12.205}$$

Donc toutes les normes sont équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$.

Comme l'équivalence de norme est transitive, toutes les normes sont équivalentes.

[37] Dans 12.70, le n n'apparaît pas dans la majoration. C'est lui ou moi qui fait une erreur ? Pourquoi ?
[38] La partie S est fermée et bornée de $(V, \|.\|_\infty)$, voir le théorème 11.23.
[39] Théorème de Weierstrass 9.215.

□

CORooBRDYooLmGJDE

Corolaire 12.71.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ deux normes sur V. Alors l'identité $i\colon V \to V$ est un isomorphisme d'espace topologique $(V, \|.\|_1) \to (V, \|.\|_2)$.

De plus les ouverts sont les mêmes : une partie de V est ouverte dans $(V, \|.\|_1)$ si et seulement si elle est ouverte dans $(V, \|.\|_2)$.

Démonstration. Le théorème 12.70 nous dit qu'il existe des nombres $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1 \tag{12.206}$$

pour tout $x \in V$. Soit un 2-ouvert $\mathcal{O}$. Nous prouvons que $i^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ est un 1-ouvert. Pour cela, soit $a \in \mathcal{O}$. Vu que $\mathcal{O}$ est un 2-ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_2(a, r) \subset \mathcal{O}$. Prouvons que $B_1(a, r/\beta) \subset B_2(a, r)$. En effet si $y \in B_1(a, r/\beta)$, alors

$$\|y - a\|_2 \leqslant \beta\|y - a\|_1 \leqslant r. \tag{12.207}$$

Nous avons donc

$$B_1(a, r/\beta) \subset B_2(a, r) \subset \mathcal{O} = i^{-1}(\mathcal{O}). \tag{12.208}$$

Donc $i^{-1}(\mathcal{O})$ contient un 1-ouvert autour de chacun de ses points. Il est donc 1-ouvert.

Pour prouver que i^{-1} est continue, c'est la même chose. □

NORMooNKBCooKziIjx

12.72.
Le lemme 12.32 donnera une norme sur $\mathbb{R}^2$ qui ne dérive pas d'un produit scalaire. Vu que toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ produisent la même topologie (c'est le corolaire 12.71), il y a parfaitement moyen pour deux espaces vectoriels topologiques d'être isomorphes alors que l'un a une norme dérivant d'un produit scalaire et l'autre non.

12.73.
Le théorème d'équivalence de norme sera utilisé pour montrer que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signature (p, q) est ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques, proposition 19.146. Plus généralement il est utilisé à chaque fois que l'on fait de la topologie sur les espaces de matrices en identifiant $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, pour se rassurer en se disant que ce qu'on fait ne dépend pas de la norme choisie.

Voir aussi ce qu'on en fait en 14.322 pour démontrer la différentiabilité à partir des dérivées partielles.

PROPooNTCFooEcwZwt

Proposition 12.74 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour une base $B = \{e_i\}$ de V nous définissons

$$\|\sum_k v_k e_k\|_B = \sqrt{\sum_k |v_k|^2}. \tag{12.209}$$

EQooEGXVooLASQIC

(1) La formule (12.209) définit une norme sur V.

(2) Si B et B' sont des bases de V, alors les topologies induites par le norme $\|.\|_B$ et $\|.\|_{B'}$ sont égales.

Démonstration. Nous commençons par fixer une base $B = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de V. Cette base nous permet de définir

$$\begin{aligned} \varphi\colon V &\to \mathbb{C}^n \\ \sum_k v_k e_k &\mapsto (v_1, \dots, v_n). \end{aligned} \tag{12.210}$$

Cette application linéaire permet d'écrire

$$\|v\|_V = \|\varphi(v)\|_{\mathbb{C}^n}. \tag{12.211}$$

À partir de là, la vérification des propriétés de la définition 9.232 est immédiate. Par exemple :

$$\|v + w\| = \|\varphi(v + w)\| = \|\varphi(v) + \varphi(w)\| \leqslant \|\varphi(v)\| + \|\varphi(w)\| = \|v\| + \|w\|. \tag{12.212}$$

En ce qui concerne la seconde assertion, c'est le théorème 12.70. □

12.5.2 Contre-exemple en dimension infinie

SubSecPOlynomesCE

Lorsque nous considérons des espaces vectoriels de dimension infinie, les choses ne sont plus aussi simples. Nous voyons ici sur l'exemple de l'espace des polynômes que le théorème 12.70 n'est plus valable si on enlève l'hypothèse de dimension finie.

On considère l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels sur l'intervalle $[0,1]$.

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0,1]) = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, p : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{N}\}. \tag{12.213}$$

Cet ensemble, muni des opérations usuelles de somme entre polynômes et multiplications par les scalaires, est un espace vectoriel.

Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ on définit les normes suivantes

$$\begin{aligned} \|p\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \{p(x)\}, \\ \|p\|_1 &= \int_0^1 |p(x)|\, dx, \\ \|p\|_2 &= \left(\int_0^1 |p(x)|^2\, dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{12.214}$$

Les inégalités suivantes sont immédiates

$$\begin{aligned} \|p\|_1 &= \int_0^1 |p(x)|\, dx \leqslant \|p\|_\infty, \\ \|p\|_2 &= \left(\int_0^1 |p(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant \|p\|_\infty, \end{aligned} \tag{12.215}$$

mais la norme $\| \cdot \|_\infty$ n'est équivalente ni à $\| \cdot \|_1$, ni à $\| \cdot \|_2$. Soit $p_k(x) = x^k$. Alors

$$\begin{aligned} \|p_k\|_\infty &= 1, \\ \|p_k\|_1 &= \int_0^1 x^k\, dx = \frac{1}{k+1}, \\ \|p_k\|_2 &= \left(\int_0^1 x^{2k}\, dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2k+1}}. \end{aligned} \tag{12.216}$$

Pour $k \to \infty$ les normes $\|p_k\|_1$, $\|p_k\|_2$ tendent vers zéro, alors que la norme $\|p_k\|_\infty$ est constante, donc les normes ne sont pas équivalentes parce que il n'existe pas un nombre positif m tel que

$$\begin{aligned} m\|p_k\|_\infty &\leqslant \|p_k\|_1, \\ m\|p_k\|_\infty &\leqslant \|p_k\|_2, \end{aligned} \tag{12.217}$$

uniformément pour tout k dans $\mathbb{N}$.

PROPooILSOooPdUyFu

Proposition 12.75 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé E de dimension n ainsi qu'un ouvert $U \subset E$. Il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et une bijection isométrique $g : V \to U$.

12.6 Norme opérateur

La proposition suivante donne une norme (au sens de la définition 9.232) sur $\mathcal{L}(V,W)$ dès que V et W sont des espaces vectoriels normés.

DefNFYUooBZCPTr

Définition 12.76 (Norme opérateur[390], thème 40).
Soient des espaces vectoriels normés $(V, \|.\|_V)$ et $(W, \|.\|_W)$. Soient une application linéaire $T : V \to W$, et le nombre

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{x\in V \\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V}. \tag{12.218}$$

*Le nombre $\|T\|_{\mathcal{L}}$ est la **norme opérateur** de T. Nous disons que cette norme est **subordonnée** aux normes choisies sur V et W.*

Si $\|T\| < \infty$, nous disons que T est borné[40]*. Nous notons*

$$\mathcal{L}^0(V,W) = \{T \in \mathcal{L}(V,W) \text{ tel que } \|T\| < \infty\}. \tag{12.219}$$

[40] Nous verrons plus tard que si V est de dimension infinie, ce n'est pas garanti.

PROPooQMZLooOxBrmt

Proposition 12.77.
Si V est de dimension finie, alors $\|T\|_{\mathcal{L}} < \infty$ pour tout $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

Démonstration. Si V est de dimension finie alors l'ensemble $\{x \in V \text{ tel que } \|x\| = 1\}$ est compact par le théorème de Borel-Lebesgue 11.23. Alors la fonction

$$x \mapsto \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \tag{12.220}$$

est une fonction continue sur un compact. Le corolaire 9.368 nous dit alors qu'elle est bornée. Le supremum est donc un nombre réel fini. □

PROPooZBJXooNDsqax

Proposition 12.78.
À propos d'opérateurs bornés.

(1) La partie $\mathcal{L}^0(V,W)$ des applications linéaires bornées est un espace vectoriel.

(2) Le couple $\big(\mathcal{L}^0(V,W), \|.\|\big)$ est un espace vectoriel normé[41].

Démonstration. Nous vérifions que l'application $\|.\|$ de $\mathcal{L}(V,W)$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie est effectivement une norme.

(1) $\|T\|_{\mathcal{L}} = 0$ signifie que $\|T(x)\| = 0$ pour tout x dans V. Comme $\| \cdot \|_W$ est une norme nous concluons que $T(x) = 0$ pour tout x dans V, donc T est l'application nulle.

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout T dans $\mathcal{L}(V,W)$ nous avons

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\|(\lambda T)(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup \frac{|\lambda| \|T(x)\|_W}{\|x\|} = |\lambda| \|T\|_{\mathcal{L}}. \tag{12.221}$$

(3) Pour tous T_1 et T_2 dans $\mathcal{L}(V,W)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|T_1 + T_2\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} && \text{(12.222a)} \\
&\leqslant \sup \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} && \text{(12.222b)} \\
&= \sup \left(\frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} \right) && \text{(12.222c)} \\
&= \leqslant \sup \frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \sup \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} && \text{(12.222d)} \\
&= \|T_1\| + \|T_2\|. && \text{(12.222e)}
\end{aligned}$$

□

PROPooWHJCooXxCSWp

Proposition 12.79.
Nous avons la formule

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x \in V} \frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|T(x)\|_W \tag{12.223}$$

EqFZPooIoscGH

Démonstration. Nous allons montrer que les ensembles sur lesquels ont prend le supremum sont en réalité les mêmes :

$$\underbrace{\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\}_{x \neq 0}}_{A} = \underbrace{\{\|Ax\| \text{ tel que } \|x\| = 1\}}_{B}. \tag{12.224}$$

Attention : ce sont des sous-ensembles de réels ; pas de sous-ensembles de $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ ou des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

[41] Espace vectoriel normé, définition 9.232.

Pour la première inclusion, prenons un élément de A, et prouvons qu'il est dans B. C'est-à-dire que nous prenons $x \in V$ et nous considérons le nombre $\|Ax\|/\|x\|$. Le vecteur $y = x/\|x\|$ est un vecteur de norme 1, donc la norme de Ay est un élément de B, mais

$$\|Ay\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{12.225}$$

Nous avons donc $A \subset B$.

L'inclusion $B \subset A$ est immédiate. □

12.6.1 Matrice bloc-diagonale

Avec un dessin, on comprend bien ce que c'est. À faire réellement, c'est beaucoup de soucis. Mais bon. Nous sommes courageux et nous nous y collons.

DEFooBPPGooFFMXny

Définition 12.80 (Matrice bloc-diagonale[1])**.**
Soient des matrices carrées $B_i \in \mathbb{M}(n_i, \mathbb{K})$. Nous posons : $n = \sum_i n_i$,

$$\sigma_k = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i, \tag{12.226}$$

et

$$s(\alpha) = \max\{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sigma_l \leqslant \alpha\}. \tag{12.227}$$

En ce qui concerne vos dessins, σ_k est l'endroit dans A où la matrice B_k commence et $s(\alpha)$ est le numéro i de la matrice B_i qui se trouve à la position α.

*La matrice **bloc-diagonale** A de blocs B_i est la matrice $n \times n$ donnée par*

$$A_{\alpha,\beta} = (B_{s(\alpha)})_{\alpha-\sigma_{s(\alpha)}+1,\beta-\sigma_{s(\alpha)}+1} \tag{12.228}$$

si $1 \leqslant \alpha - \sigma_{s(\alpha)} + 1 \leqslant n_i$ et $1 \leqslant \beta - \sigma_{s(\alpha)} + 1 \leqslant n_i$ et

$$A_{\alpha,\beta} = 0 \tag{12.229}$$

sinon.

12.81.
Au vu de cette longue définition, je crois qu'il vaut en réalité mieux définie une matrice bloc-diagonale comme étant la matrice d'une application bloc-diagonale.

DEFooSIAIooFOAPvu

Définition 12.82 (Application bloc-diagonale[1])**.**
*Soient des espaces vectoriels V_i. Nous supposons que tous ces espaces sont différents. Nous posons $V = \bigoplus_i V_i$. Une application linéaire $f : V \to V$ est **bloc-diagonale** si elle peut être écrite sous la forme*

$$f = \sum_i s_i \circ f_i \circ \texttt{proj}_i \tag{12.230}$$

où

(1) $f_i : V_i \to V_i$ est une application linéaire,

(2) $\texttt{proj}_i : V \to V_i$ est la projection canonique.

(3) $s_i : V_i \to V$ est l'inclusion canonique.

LEMooHGCKooBzfAtg

Lemme 12.83.
Si f est une application bloc-diagonale[42] formée des sous-applications (f_i), alors f^k $(k \in \mathbb{Z})$ est une application bloc-diagonale formée des sous-applications f_i^k.

Démonstration. Nous avons

$$f^2 = \sum_{ij} s_i \circ f_i \circ \texttt{proj}_i \circ s_j \circ f_j \circ \texttt{proj}_j . \tag{12.231}$$

Notez que si $i \neq j$, alors $\texttt{proj}_i \circ s_j = 0$. Nous pouvons donc enlever une somme et obtenir

$$f^2 = \sum_i s_i \circ f_i^2 \circ \texttt{proj}_i, \tag{12.232}$$

qui est la forme bloc-diagonale que nous voulions. □

[42] Définition 12.82.

PROPooJUYCooHnlFef

Proposition 12.84 ([1]).
Si A est une matrice bloc-diagonale, alors la norme de A majore la norme de chacun de ses blocs.

Démonstration. Soient des matrices carrées $B_i \in \mathbb{M}(n_i, \mathbb{R})$. La matrice A est celle dont les blocs sont les B_i. Nous fixons i et nous considérons un vecteur $u \in \mathbb{R}^{n_i}$ tel que $\|u\| = 1$ et $\|B_i\| = \|B_i u\|$.

Nous considérons aussi l'application $f_k \colon \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^n$ qui consiste à ajouter des zéros au-dessus et en-dessous de telle façon à avoir $A \circ f_k = f_k \circ B_k$. Nous avons alors

$$\|A\| \geqslant \|(A \circ f_i)(u)\| = \|(f_i \circ B_i)(u)\| = \|B_i(u)\| = \|B_i\|. \tag{12.233}$$

□

En d'autres termes, il y a autant de normes opérateur sur $\mathcal{L}(E, F)$ qu'il y a de paires de choix de normes sur E et F. En particulier, cela donne lieu à toutes les normes $\|A\|_p$ qui correspondent aux normes $\|.\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$.

EXooXPXAooYyBwMX

Exemple 12.85.
Voyons la norme opérateur subordonnée à la norme $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ sur $\mathbb{C}^n$. Par la proposition 12.79,

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty. \tag{12.234}$$

Vu que $(Ax)_i = \sum_k A_{ik} x_k$, lorsque $\|x\|_\infty \leqslant 1$ nous avons $|(Ax)_i| \leqslant \sum_k |A_{ik}|$. Donc nous avons toujours

$$\|A\|_\infty \leqslant \max_i \sum_k |A_{ik}|. \tag{12.235}$$

EQooPLCIooVghasD

△

Définition 12.86.
*La **topologie forte** sur l'espace des opérateurs est la topologie de la norme opérateur.*

Lorsque nous considérons un espace vectoriel d'applications linéaires, nous considérons toujours[43] dessus la topologie liée à cette norme.

12.6.2 Norme d'algèbre

DefJWRWQue

Définition 12.87 (Norme d'algèbre[390]).
*Si A est une algèbre[44], une **norme d'algèbre** sur A est une norme telle que pour toute $x, y \in A$,*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{12.236}$$

La norme opérateur est une norme d'algèbre, comme nous le verrons dans le lemme 12.97.

Un des intérêts d'utiliser une norme d'algèbre est que l'on a l'inégalité $\|x^k\| \leqslant \|x\|^k$. Cela sera particulièrement utile lors de l'étude des séries entières, voir par exemple 17.13.

DEFooEAUKooSsjqaL

Définition 12.88 ([391]).
*Le **rayon spectral** d'une matrice carrée A, noté $\rho(A)$, est défini de la manière suivante :*

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \tag{12.237}$$

EQooNVNOooNiIbSS

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

12.89.
Quelques remarques sur la définition du rayon spectral.

- Même si A est une matrice réelle, les valeurs propres sont dans $\mathbb{C}$. Donc dans (12.237), $|\lambda_i|$ est le module dans $\mathbb{C}$ de λ_i.
- Puisque les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique (théorème 10.113), il y en a un nombre fini et le maximum est bien défini.
- La définition s'applique uniquement pour les espaces de dimension finie.

[43] Sauf lorsque les événements nous forceront à trahir.
[44] Définition 3.111.

LEMooIBLEooLJczmu

Lemme 12.90.
Soient des espaces vectoriels normés E et F, sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $A \in \mathcal{L}(E,F)$, et pour tout $u \in E$ nous avons la majoration

$$\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\| \tag{12.238}$$

où la norme sur A est la norme opérateur subordonnée à la norme sur u.

Démonstration. Si $u \in E$ alors, étant donné que le supremum d'un ensemble est plus grand ou égal à chacun des éléments qui le compose,

$$\|A\| = \sup_{x\in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|Au\|}{\|u\|}, \tag{12.239}$$

donc le résultat annoncé : $\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|$. □

Le lemme suivant est valable en dimension infinie. Nous en toucherons un mot dans l'exemple 12.102.

LEMooWFNXooLyTyyX

Lemme 12.91.
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Soit $x \in E$. Alors l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_x\colon \mathcal{L}(E,F) &\to F \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{12.240}$$

est continue.

Démonstration. Si $x = 0$, alors par linéarité de f nous avons $ev_0(f) = 0$ pour tout f. Donc d'accord pour la continuité.

Soit une suite convergente $f_k \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} f$. Nous voulons prouver que $ev_x(f_k) \xrightarrow{F} ev_x(f)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k(x) - f(x)\| = 0. \tag{12.241}$$

Par hypothèse si k est grand, alors $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \epsilon$, c'est-à-dire que[45]

$$\sup_{y\in E} \frac{\|f_k(y) - f(y)\|}{\|y\|} \leqslant \epsilon. \tag{12.242}$$

En particulier pour notre x nous avons

$$\frac{\|f_k(x) - f(x)\|}{\|x\|} \leqslant \epsilon, \tag{12.243}$$

c'est-à-dire $\|f_k(x) - f(x)\| \leqslant \|x\|\epsilon$. Vu que $\|x\|$ est une simple constante et que ϵ est arbitraire, cela implique $f_k(x) \to f(x)$. □

12.6.3 Applications linéaires dans un espace de Banach

PROPooUZEHooRiEnOG

Proposition 12.92 ([392]).
Soit un espace normé E et un espace de Banach F. Alors l'espace $\mathcal{L}^0(E,F)$ des applications linéaires continues est un espace de Banach.

Démonstration. L'espace des application linéaires bornées $\mathcal{L}^0(E,F)$ est un espace vectoriel normé pour la norme opérateur de la définition 12.76.

Soit une suite de Cauchy $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^0(E,F)$.

(1) **$(T_n(x))$ est de Cauchy** Soit $x \in E$. Nous prouvons que la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $p > 0$ tel que si $n, m \geqslant p$ alors $\|T_n - T_m\| < \epsilon$. Pour de tels n, m nous avons

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| \leqslant \epsilon\|x\|. \tag{12.244}$$

Étant donné que $\|x\|$ est une constante, la suite $(T_n(x))$ est bien de Cauchy.

(2) **L'application T** Étant donné que F est de Cauchy, la suite $n \mapsto T_n(x)$ converge. Cela nous permet de définir

$$\begin{aligned} T\colon E &\to F \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} T_n(x). \end{aligned} \tag{12.245}$$

[45] Définition 12.76 de la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

(3) **Une formule** Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons encore $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ dès que $n, m \geqslant p$. Soit $x \in \overline{B_E(0,1)}$. Nous avons

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| \tag{12.246a}$$
$$\leqslant \|T_n - T_m\| \tag{12.246b}$$
$$< \epsilon. \tag{12.246c}$$

Nous faisons $m \to \infty$ en tenant compte du fait que la limite commute avec la norme :

$$\lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|T_n(x) - \lim_{n\to\infty} T_m(x)\| \tag{12.247a}$$
$$\|T_n(x) - T(x)\|. \tag{12.247b}$$

Nous avons donc montré que pour tout $n \geqslant p$ nous avons :

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \epsilon. \tag{12.248}$$

(4) **T est bornée** Nous avons

$$\sum_{\|x\|\leqslant 1} \|T(x)\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \Big(\|T(x) - T_p(x)\| + \|T_p(x)\| \Big) \tag{12.249a}$$
$$\leqslant \epsilon + \|T_p\|. \tag{12.249b}$$

Donc $\|T\| \leqslant \|T_p\| + \epsilon < \infty$.

(5) **Limite** Nous prouvons que T est bien la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est simple :

$$\|T_n - T\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \epsilon \tag{12.250}$$

dès que $n \geqslant N$. Cela prouve que $\|T_n - T\| \to 0$.

□

PROPooOVGGooNffWJW

Proposition 12.93 ([392]).
Le dual[46] *d'un espace de Banach*[47] *est de Banach.*

Démonstration. Si E est un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K}$, son dual est $\mathcal{L}^0(E, \mathbb{K})$. La proposition 12.92 en fait un Banach. □

PROPooUNVAooRDxkyI

Proposition 12.94.
Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach est de Banach pour la norme induite.

PROPooAPVCooFyMigL

Proposition 12.95 ([1]).
Soit un espace ce Banach E. Soient $v_k \in E$. Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge, alors $\{|v_k|\}_{k\in\mathbb{N}}$ est borné.

12.7 Application linéaire continue et bornée

NORMooUKURooIkcRoS

12.96.
Quelque notations. Par analogie avec C^0 qui est l'ensemble des applications continues, nous notons $\mathcal{L}^0(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F. De même, $\mathrm{End}^0(E)$ est l'ensemble des endomorphismes continus de E.

LEMooFITMooBBBWGI

Lemme 12.97 (La norme opérateur est une norme d'algèbre[1]).
Soient des espaces vectoriels normés E, F et G. Soient des opérateurs linéaires bornés $B\colon E \to F$, $A\colon F \to G$. Alors

$$\|A \circ B\| \leqslant \|A\|\|B\|. \tag{12.251}$$

C'est-à-dire que la norme opérateur est une norme d'algèbre[48].

[46] Définition 9.338.
[47] Définition 9.339.
[48] Définition 12.87.

Démonstration. Nous avons les (in)égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \sup_{x\in E} \frac{\|ABx\|_G}{\|x\|_E} && (12.252a)\\
&= \sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|}\frac{\|Bx\|_F}{\|Bx\|_F} && (12.252b)\\
&= \sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} && (12.252c)\\
&\leqslant \underbrace{\sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}}_{\leqslant\|A\|}\underbrace{\sup_{\substack{y\in E\\ By\neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|y\|}}_{=\|B\|} && (12.252d)\\
&\leqslant \|A\|\|B\|. && (12.252e)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient que dans $\sup_{\substack{x\in E\\ Bx\neq 0}} \|ABx\|/\|x\|$, le supremum est pris sur un ensemble plus petit que celui sur lequel porte la définition de la norme de A : seulement l'image de B au lieu de tout l'espace de départ de A. □

La proposition suivante dit qu'une application linéaire est continue si et seulement si elle est bornée. Un résultat similaire pour les applications multilinéaires est dans la proposition 12.116.

PROPooQZYwoGYJYbGo

Théorème 12.98 (Bornée si et seulement si continue[393, 394])**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés. Pour une application linéaire $f\colon E\to F$, les assertions suivantes sont équivalentes :

ITEMooIQDEooUVuQxu

(1) f est continue en un point de E,

ITEMooQMQPooXCyQXyBV

(2) f est continue sur E,

ITEMooBOYYooGjePma

(3) f est bornée.

Démonstration. La proposition 9.243 donne déjà l'équivalence (1) ⇔ (2).

Nous commençons par supposer que A est bornée. Par le lemme 12.97, pour tout $x, y\in E$, nous avons

$$\|A(x)-A(y)\| = \|A(x-y)\| \leqslant \|A\|\|x-y\|. \tag{12.253}$$

En particulier si $x_n \xrightarrow{E} x$ alors

$$0\leqslant \|A(x_n)-A(x)\| \leqslant \|A\|\|x_n-x\| \to 0 \tag{12.254}$$

et A est continue en vertu de la caractérisation séquentielle de la continuité, proposition 9.206.

Nous supposons maintenant que $\|A\|$ n'est pas borné : l'ensemble $\{\|A(x)\| \text{ tel que } \|x\|=1\}$ contient des valeurs arbitrairement grandes. Alors pour tout $k\geqslant 1$ il existe $x_k\in B(0,1)$ tel que $\|A(x_k)\|>k$. La suite x_k/k tend vers zéro parce que $\|x_k\|=1$, mais $\|A(x_k)\|\geqslant 1$ pour tout k. Cela montre que A n'est pas continue. □

ExHKsIelG

Exemple 12.99 (Une application linéaire non continue)**.**
Soit V l'espace vectoriel normé des suites *finies* de réels muni de la norme usuelle $\|c\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty}|c_i|^2}$ où la somme est finie. Nous nommons $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la base usuelle de cet espace, et nous considérons l'opérateur $f\colon V\to V$ donnée par $f(e_k)=ke_k$. C'est évidemment linéaire, mais ce n'est pas continu en zéro. En effet la suite $u_k=e_k/k$ converge vers 0 alors que $f(u_k)=e_k$ ne converge pas. △

Cet exemple aurait pu également être donnée dans un espace de Hilbert, mais il aurait fallu parler de domaine.

EXooDMVJooAJywMU

Exemple 12.100 (Une autre application linéaire non continue[395])**.**
En dimension infinie, une application linéaire n'est pas toujours continue. Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. L'application de dérivation $\varphi\colon E\to E$, $\varphi(P)=P'$ n'est pas continue.

Pour la voir nous considérons la suite $P_n=\frac{1}{n}X^n$. D'une part nous avons $P_n\to 0$ dans E parce que $P_n(x)=\frac{x^n}{n}$ avec $x\in[0,1]$. Mais en même temps nous avons $\varphi(P_n)=X^{n-1}$ et donc $\|\varphi(P_n)\|=1$.

Nous n'avons donc pas $\lim_{n\to\infty}\varphi(P_n)=\varphi(\lim_{n\to\infty}P_n)$ et l'application φ n'est pas continue en 0. Elle n'est donc continue nulle part par linéarité.

Nous avons utilisé le critère séquentiel de la continuité, voir la définition 9.166 et la proposition 9.206. △

RemOAXNooSMTDuN

Remarque 12.101.
Cette proposition permet de retrouver l'exemple 12.99 plus simplement. Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une base d'un espace vectoriel normé formée de vecteurs de norme 1, alors l'opérateur linéaire donné par $u(e_k)=ke_k$ n'est pas borné et donc pas continu.

C'est également ce résultat qui montre que le produit scalaire est continu sur un espace de Hilbert par exemple.

EXooTQPEooRRdddt

Exemple 12.102.
Nous avons vu dans le lemme 12.91 que pour un $x\in E$ donné, l'application

$$\begin{aligned} ev_x\colon \mathcal{L}(E,F)&\to F\\ f&\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{12.255}$$

est continue. Puisque ev_x est linéaire, la proposition 12.98 nous indique que ev_x est bornée. Vérifions-le directement. Le calcul n'est pas très compliqué :

$$\|ev_x\|=\sup_{\|f\|=1}\|ev_x(f)\|=\sup_{\|f\|=1}\|f(x)\|\leqslant\sup_{\|f\|=1}\|x\|\|f\|=\|x\| \tag{12.256}$$

où nous avons utilisé le lemme 12.90 en passant. Donc la norme de ev_x est majorée par $\|x\|$.

Elle est même égale à $\|x\|$. En effet, pour chaque $f\in\mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|f\|=1$, nous avons

$$\|ev_x\|\geqslant\|ev_x(f)\|=\|f(x)\|. \tag{12.257}$$

En prenant $f=\mathrm{Id}$ nous trouvons $\|ev_x\|\geqslant\|x\|$. △

12.7.1 Déterminant entre espaces différents

Il n'existe à priori pas de façons naturelles de définir le déterminant d'une application linéaire $f\colon E\to F$ lorsque E et F sont des espaces vectoriels différents[328].

DEFooJEOMooEXvnUU

Définition 12.103 ([1]).
Si $f\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{L}^n$ alors le déterminant de f est celui de la matrice dans la base canonique.

PROPooQCPJooFSzaPc

Proposition 12.104 ([328, 1]).
Soient E et F, deux espaces vectoriels de même dimension. Nous considérons une bijection linéaire $\varphi\colon E\to F$, et nous définissons

$$\begin{aligned} \det{}_\varphi\colon \mathcal{L}(E,F)&\to\mathbb{R}\\ f&\mapsto\det(\varphi^{-1}\circ f). \end{aligned} \tag{12.258}$$

ITEMooERPIooBvkAPo

(1) L'application $f\colon E\to F$ est inversible si et seulement si $\det_\varphi(f)\neq 0$.

ITEMooTLJEooKyPOVs

(2) Si E et F sont des espaces vectoriels normés, alors l'application $\det_\varphi\colon\mathcal{L}(E,F)\to\mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Vu que φ est une bijection, nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} f\text{ est inversible}&\Leftrightarrow\varphi^{-1}\circ f\text{ est inversible} && && \text{(12.259a)}\\ &\Leftrightarrow\det(\varphi^{-1}\circ f)\neq 0 && \text{prop. 10.15(2)} && \text{(12.259b)}\\ &\Leftrightarrow\det{}_\varphi(f)\neq 0. && && \text{(12.259c)} \end{aligned}$$

(2) **Pour (2)** Nous posons

$$\begin{aligned} s\colon\mathcal{L}(E,F)&\to\mathcal{L}(E,E)\\ f&\mapsto\varphi^{-1}\circ f, \end{aligned} \tag{12.259d}$$

et nous commençons par prouver que s est continue. Le lemme 12.97 dit que

$$\|\varphi^{-1}\circ f\|\leqslant\|\varphi^{-1}\|\|f\|, \tag{12.260}$$

de telle sorte que

$$\|s\| = \sup_{\|f\|=1} \|s(f)\| \tag{12.261a}$$
$$\leqslant \sup_{\|f\|=1} \|\varphi^{-1}\|\|f\| \tag{12.261b}$$
$$= \|\varphi^{-1}\|. \tag{12.261c}$$

Donc s est bornée, et donc elle est continue (proposition 12.98). Finalement l'application $\det_\varphi = \det \circ s$ est continue comme composée d'applications continues.

□

PROPooPNMXooLaJDGc

Proposition 12.105 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés E et F de même dimension finie. La partie $\mathrm{GL}(E,F)$ des applications linéaires inversibles est ouverte dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Pour la preuve, il faudra utiliser la proposition 12.104.

12.7.1.1 Mini bonus

NORMooUDZOooKxAPit

12.106 ([281]).
Vous vous souvenez de la définition 9.248 d'une somme directe topologique ? Si V est normé, il existe une façon plus directe (mais pas spécialement plus simple) de prouver l'implication (1) ⇒ (2), et en particulier la continuité de s^{-1}. Rappelons que dans le cas normé, nous avons plusieurs façons équivalentes de décrire les topologies[49].

- Sur V_1 et V_2 nous avons la topologie induite, définition 9.30, qui est la même que celle de la restriction de la norme de V (lemme 9.178).
- La topologie sur $V_1 \times V_2$ est la définition 9.66. C'est la même que celle de la norme produit par le lemme 9.306.
- La topologie sur V/V_1 est la topologie quotient 9.72. La proposition 9.428 dit que la norme induite donne la même topologie.

L'espace $V_1 \times V_2$ est muni de sa norme produit de la définition 9.306 : $\|(v_1,v_2)\| = \max\{\|v_1\|,\|v_2\|\}$. Par hypothèse $\psi^{-1}\colon V_1 \oplus V_2 \to V_1 \times V_2$ est linéaire et continue. La proposition 12.98 nous indique qu'elle est alors bornée. Il existe donc un nombre $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|\psi^{-1}(v_1+v_2)\| = \max\{\|v_1\|,\|v_2\|\} \leqslant C\|v_1+v_2\|. \tag{12.262}$$

Nous allons montrer que s^{-1} est séquentiellement continue[50] en partant d'une suite $\alpha_n \xrightarrow{V/V_1} 0$. En vertu de la proposition 9.428, nous avons $d(\alpha_n, V_1) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$.

Chacun des α_n contient un unique élément x_n de V_1, qui est donné par s^{-1} : $x_n = s^{-1}(\alpha_n)$. Nous avons

$$\|\alpha_n\| = \inf_{u\in\alpha_n} \|u\| = \inf_{v\in V_1} \|x_n+v\|. \tag{12.263}$$

Vu que $\|\alpha_n\|$ est donné par un infimum, nous pouvons, pour chaque n, choisir $v \in V_1$ de telle sorte que $x_n + v_n$ ne soit pas trop loin d'être l'infimum :

$$\big|\|x_n+v_n\| - \|\alpha_n\|\big| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{12.264}$$

Un tel choix nous donne une suite (v_n) dans V_1 telle que

$$\big|\|x_n+v_n\| - \|\alpha_n\|\big| \to 0. \tag{12.265}$$

Vu que $\|\alpha_n\| \to 0$, cela implique $\|x_n+v_n\| \to 0$.

En remettant tout ensemble,

$$\|x_n\| \leqslant \max\{\|x_n\|,\|v_n\|\} \leqslant C\|x_n+v_n\| \to 0. \tag{12.266}$$

Donc $s^{-1}(\alpha_n) = x_n \to 0$, et s^{-1} est séquentiellement continue.

[49] Voir le thème 27.
[50] Définition 9.166. La continuité séquentielle est équivalente à la continuité par la proposition 9.173.

12.7.2 Suites

Nous allons maintenant parler de suites dans $V \times W$. Nous noterons (v_n, w_n) la suite dans $V \times W$ dont l'élément numéro n est le couple (v_n, w_n) avec $v_n \in V$ et $w_n \in W$. La notion de convergence de suite découle de la définition de la norme via la proposition 11.26. Il se fait que dans le cas des produits d'espaces, la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des composantes. Plus précisément, nous avons le lemme suivant.

LemCvVxWcvVW

Lemme 12.107.
La suite (v_n, w_n) converge vers (v, w) dans $V \times W$ si et seulement les suites (v_n) et (w_n) convergent séparément vers v et w respectivement dans V et W.

Démonstration. Pour le sens direct, nous devons étudier le comportement de la norme de $(v_n, w_n) - (v, w)$ lorsque n devient grand. En vertu de la définition de la norme dans $V \times W$ nous avons

$$\big\|(v_n, w_n) - (v, w)\big\|_{V\times W} = \max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\}. \tag{12.267}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence de la suite (v_n, w_n), il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique

$$\max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\} < \varepsilon, \tag{12.268}$$

et donc en particulier les deux inéquations

$$\|v_n - v\| < \varepsilon \tag{12.269a}$$
$$\|w_n - w\| < \varepsilon. \tag{12.269b}$$

De la première, il ressort que $(v_n) \to v$, et de la seconde que $(w_n) \to w$.

Pour le sens inverse, nous avons pour tout ε un N_1 tel que $\|v_n - v\|_V \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N_1$ et un N_2 tel que $\|w_n - w\|_W \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N_2$. Si nous posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ nous avons les deux inégalités simultanément, et donc

$$\max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\} < \varepsilon, \tag{12.270}$$

ce qui signifie que la suite (v_n, w_n) converge vers (v, w) dans $V \times W$. □

PROPooPESUooGAmqCW

Proposition 12.108.
Si A est une partie d'un espace vectoriel normé V et si B est une partie d'un espace vectoriel normé W, alors $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\overline{A \times B} \subset \bar{A} \times \bar{B}$. Un élément (a, b) dans $\overline{A \times B}$ peut toujours être vu comme la limite d'une suite dans $A \times B$. Soit donc (a_n, b_n) une suite telle que $\lim(a_n, b_n) = (a, b)$ avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Par le lemme 12.107, nous avons une convergence « composante par composante » : $a_n \to a$ et $b_n \to b$. Mais la suite (a_n) est contenue dans A, donc sa limite, a, est dans $\bar{A}$. De la même manière, $b \in \bar{B}$. Par conséquent $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{B}$.

Il faut maintenant prouver l'inclusion inverse. Soit $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{B}$. Nous avons des suites (a_n) et (b_n) dans A et B respectivement qui convergent vers a et b. En utilisant à nouveau le lemme 12.107 (mais cette fois dans le sens inverse), nous avons

$$\lim \underbrace{(a_n, b_n)}_{\in A\times B} = (a, b) \in \overline{A \times B}. \tag{12.271}$$

La dernière appartenance est simplement le fait qu'une suite convergente contenue dans $A \times B$ converge dans $\overline{A \times B}$. □

PROPooKDGOooDjWQct

Proposition 12.109 ([1]).
Soit un espace V muni d'un produit scalaire à valeurs dans $\mathbb{K}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nous supposons le produit hermitien, mais ce n'est pas très important ici). Alors l'application

$$\begin{aligned} a\colon V \times V &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y\rangle \end{aligned} \tag{12.272}$$

est continue.

Démonstration. Nous ne disons pas que l'espace $V \times V$ est muni d'un produit scalaire. Mais en tout cas c'est un espace métrique, et $\mathbb{K}$ l'est aussi. Donc a est une application entre deux espaces métriques et elle sera continue si et seulement si elle est séquentiellement continue (propositions 9.206 et 9.168).

Soit donc une suite convergente dans $V \times V$, c'est-à-dire $(x_k, y_k) \xrightarrow{V\times V} (x, y)$. Nous devons démontrer que $\langle x_k, y_k\rangle \xrightarrow{\mathbb{R}} \langle x, y\rangle$. Les majorations usuelles donnent

$$\begin{aligned}\big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| &\leqslant \big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y_k\rangle\big| + \big|\langle x, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| &\text{(12.273a)}\\ &= \big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| + \big|\langle x, y_k - y\rangle\big|. &\text{(12.273b)}\end{aligned}$$

Nous savons du lemme 12.107 que les suites (x_k) et (y_k) sont séparément convergentes : $x_k \xrightarrow{V} x$ et $y_k \xrightarrow{V} y$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz 12.2 nous trouvons

$$\big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| \leqslant \|x_k - x\|\|y_k\|. \tag{12.274}$$

Nous avons $\|x_k - x\| \to 0$ et $\|y_k\| \to \|y\|$, et par la règle du produit de limites dans $\mathbb{R}$ nous avons que $\big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| \to 0$. □

RemTopoProdPasRm

Remarque 12.110.
Il faut remarquer que la norme (9.335) est une norme *par défaut*. C'est la norme qu'on met quand on ne sait pas quoi mettre. Or il y a au moins un cas d'espace produit dans lequel on sait très bien quelle norme prendre : les espaces $\mathbb{R}^m$. La norme qu'on met sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{12.275}$$

et non la norme « par défaut » de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui serait

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}. \tag{12.276}$$

Les théorèmes que nous avons donc démontré à propos de $V \times W$ ne sont donc pas immédiatement applicables au cas de $\mathbb{R}^2$.

Cette remarque est valable pour tous les espaces $\mathbb{R}^m$. À moins de mention contraire explicite, nous ne considérons jamais la norme par défaut (9.335) sur un espace $\mathbb{R}^m$.

Étant donné la remarque 12.110, nous ne savons pas comment calculer par exemple la fermeture du produit d'intervalle $]0, 1, [\times [4, 5[$. Il se fait que, dans $\mathbb{R}^m$, les fermetures de produits sont quand même les produits de fermetures.

PropovlAxBbarAbraB

Proposition 12.111.
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient $A \subset V$ et $B \subset W$. Alors

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B} \tag{12.277}$$

pour la norme produit[51] *sur $V \times W$.*

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\overline{A \times B} \subset \bar{A}\times\bar{B}$. Soit donc $(x, y) \in \overline{A \times B}$. La proposition 9.170 nous assure de l'existence d'une suite dans $A \times B$ convergent vers (x, y). Nous considérons donc une suite (x_n, y_n) dans $A \times B$ telle que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{V\times W} (x, y). \tag{12.278}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si n est assez grand nous avons

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \leqslant \epsilon. \tag{12.279}$$

Mais

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, y_n - y)\| = \max\big(\|x_n - x\|_V, \|y_n - y\|_W\big). \tag{12.280}$$

Donc pour ce n nous avons $\|x_n - x\| \leqslant \epsilon$ et $\|y_n - y\| \leqslant \epsilon$. Nous en déduisons que $x_n \xrightarrow{V} x$ et $y_n \xrightarrow{W} y$. Donc $x \in \bar{A}$ et $y \in \bar{B}$.

Dans l'autre sens maintenant. Soit $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$. Nous considérons deux suites (x_n) dans A et (y_n) dans B telles que $x_n \xrightarrow{V} x$ et $y_n \xrightarrow{W} y$. Soit n suffisamment grand pour que $\|x_n - x\| \leqslant \epsilon$ et $\|y_n - y\| \leqslant \epsilon$. Nous avons alors

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \max\{\|x_n - x\|, \|y_n - y\|\} \leqslant \epsilon. \tag{12.281}$$

□

exoEspVectoNorme0002

Proposition 12.112.
Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$.

[51] Définition 9.306.

(1) *La partie A est ouverte dans $\mathbb{R}^2$.*

(2) *L'adhérence de A est donnée par*

$$\bar{A} = A \cup \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{12.282}$$

(3) *La frontière de A est donnée par*

$$\partial A = \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{12.283}$$

Démonstration. Point par point.

(1) Prenons $(x,y) \in A$, et tâchons de trouver une boule autour de (x,y) qui soit contenue dans A. Par définition, $x > 0$ et $y > 0$. Donc si nous prenons $r = \min\{x,y\}/2$, la boule $B\big((x,y),r\big)$ est encore contenue dans A.

Notez que l'ensemble des boules du type $\mathcal{O}_{(x,y)} = B\big((x,y), \frac{\min\{x,y\}}{2}\big)$ est un recouvrement de A par des ouverts.

(2) L'adhérence est constituée des points qui « touchent » presque l'ensemble. Intuitivement, nous devinons que l'adhérence de A va être l'ensemble des points (x,y) tels que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. D'abord, un point (a,b) avec $a < 0$ n'est pas dans $\bar{A}$ parce qu'il existe une boule autour de (a,b) telle que $x < 0$ pour tout (x,y) dans la boule (même chose pour les points avec $y < 0$).

Ensuite, prouvons que les points de la forme $(0,y)$ et $(x,0)$ avec $x,y \geqslant 0$ sont dans $\bar{A}$. Pour cela, rien de tel qu'une suite. La suite $(\frac{1}{n}, y)$ avec $y \geqslant 0$ est contenue dans A, et sa limite est clairement le point $(0,y)$. Nous en concluons que $(0,y)$ est un point de $\bar{A}$.

De la même façon, la suite $(x, \frac{1}{n})$ montre que le point $(x,0)$ est dans $\bar{A}$. Donc

$$\bar{A} = A \cup \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{12.284}$$

En particulier, le point $(0,0)$ est dans $\bar{A}$.

(3) En ce qui concerne la frontière, nous utilisons la caractérisation $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$. Étant donné que A est ouvert, $\text{Int}(A) = A$. Les points qui sont dans $\bar{A}$ et pas dans A sont les points avec $x = 0$ ou $y = 0$. Donc

$$\partial A = \{(x,0) \text{ tels que } x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \text{ tels que } y \geqslant 0\}. \tag{12.285}$$

L'adhérence peut aussi être trouvée en utilisant la proposition 12.111. Nous avons $A =]0,\infty[\times]0,\infty[$, et par conséquent, la fermeture de A est la produit des fermetures :

$$\bar{A} = [0,\infty[\times [0,\infty[. \tag{12.286}$$

Nous insistons sur le fait que la fermeture de $]0,\infty[$ n'est pas $[0,\infty]$. Ce dernier ensemble n'est pas une partie de $\mathbb{R}$. □

12.7.3 Continuité du produit de matrices

SUBSECooOAWAooFcyUfI

Nous avons introduit des normes sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, entre autres la norme opérateur de la définition 12.76. Qui dit norme dit topologie. Il advient alors la question évidente : est-ce que des opérations aussi élémentaires que le produit de matrices sont continues pour ces topologies ?

Une façon simple de répondre à cela est d'introduire sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ une nouvelle norme très simple : celle de $\mathbb{K}^n$. C'est la topologie par composante. Pour cette topologie, il est simple de voir que le produit matriciel est continu parce que les éléments de AB sont des polynômes en les éléments de A B. Ensuite il suffit d'invoquer l'équivalence de toutes les normes (théorème 12.70).

Voyons comment montrer cela de façon plus directe (bien que le raisonnement précédent soit une démonstration qui devrait déjà avoir convaincu les plus sceptiques). La preuve suivante va donc s'amuser à bien préciser les topologies et caractérisations utilisées.

LEMooRGNRooPovBQw

Lemme 12.113.
Si $\|.\|$ est une norme algébrique sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors l'application

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) \\ (A,B) &\mapsto AB \end{aligned} \tag{12.287}$$

est continue.

Démonstration. L'espace $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})\times\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est métrique (définition 9.305), donc la caractérisation séquentielle de la continuité (proposition 9.173) s'applique. Nous considérons donc une suite (A_k,B_k) dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})\times\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ convergente vers (A,B), et nous allons prouver que $p(A_k,B_k)\to p(A,B)$.

Nous savons que la topologie sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})\times\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est la topologie produit (lemme 9.305) et que celle-ci donne la convergence composante par composante dès que nous avons convergence d'une suite ; c'est la proposition 9.93. Nous avons donc $A_k\xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})}A$ et $B_k\xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})}B$.

Voilà pour le contexte. Maintenant, la preuve de la continuité. Nous effectuons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\|p(A_k,B_K)-AB\|&\leqslant\|p(A_k,B_k)-p(A_k,B)\|+\|p(A_k,B)-AB\|&\text{(12.288a)}\\&=\|A_kB_k-A_kB\|+\|A_kB-AB\|&\text{(12.288b)}\\&=\|A_k(B_k-B)\|+\|(A_k-A)B\|&\text{(12.288c)}\\&\leqslant\underbrace{\|A_k\|}_{\to\|A\|}\underbrace{\|B_k-B\|}_{\to0}+\underbrace{\|A_k-A\|}_{\to0}\|B\|.&\text{(12.288d)}\end{aligned}$$

□

12.8 Applications multilinéaires

SECooBNZHooGfhPRK

12.8.1 Norme

LEMooIEXNooPOHokX

Lemme 12.114 ([1, 3])**.**
Soit un espace de Banach F. Nous considérons une application k-multilinéaire $A\colon(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}$. Nous posons

$$\begin{aligned}a\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto A(x,\dots,x).\end{aligned}\tag{12.289}$$

Alors

ITEMooHELXooHqYioG

(1) Il existe un unique[52] *choix de $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_k}$ tel que*

$$a(x)=\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha x^\alpha.\tag{12.290}$$

Ce choix est donné par

$$a_\alpha=\frac{k!}{\alpha!}A(e_1^{\alpha_1},\dots,a_n^{\alpha_n}).\tag{12.291}$$

ITEMooHMZUooGjtmEB

(2) Nous avons l'inégalité, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{|\alpha|=k}\|a_\alpha x^\alpha\|\leqslant\|A\|\big(|x_1|+\dots+|x_n|\big)^k\leqslant n^{k/2}\|A\|\|x\|^k.\tag{12.292}$$

Démonstration. Nous commençons par le point (1). En plusieurs parties.

(1) **Plein de Définitions** Soit $x\in\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$a(x)=A\Big(\sum_{i_1}x_{i_1}e_{i_1},\dots,\sum_{i_k}x_{i_k}e_{i_k}\Big)=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}A(e_{i_1},\dots,e_{i_k})x_{i_1}\dots x_{i_k}.\tag{12.293}$$

EQooAJCPooQnXdyJ

Pour les besoins de la preuve nous posons

$$M=\big\{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k\big\}\tag{12.294}$$

et

$$\Lambda_k=\big\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n\text{ tel que }\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=k\big\}.\tag{12.295}$$

Pour chaque $s\in M$ et $i\in\{1,\dots,n\}$ considérons les indices de s égaux à i, c'est-à-dire

$$P_i(s)=\big\{j\in\{1,\dots,k\}\text{ tel que }s_j=i\big\},\tag{12.296}$$

[52] L'unicité n'est pas démontrée. Écrivez une démonstration sur une feuille de papier, et envoyez-moi une photo de la feuille.

et le nombre de fois que i apparaît dans s, c'est-à-dire

$$f_i(s) = \text{Card}\big(P_i(s)\big), \tag{12.297}$$

et enfin nous posons

$$f(s) = \big(f_1(s), \dots, f_n(s)\big). \tag{12.298}$$

(2) **Les $P_i(s)$ forment une partition de $\{1, \dots, k\}$** D'abord si $l \in P_j(s) \cap P_i(s)$ alors $s_l = i$ et $s_l = j$, ce qui donne $i = j$. Donc $P_i(s) \cap P_j(s) = \varnothing$ dès que $i \neq j$. Ensuite si $l \in \{1, \dots, k\}$, en posant $j = s_l$ nous avons $l \in P_j(s) \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i(s)$.

Bref nous avons bien

$$\{1, \dots, k\} = \bigcup_{i=1}^{n} P_i(s) \tag{12.299}$$

EQooNLPRooFFwhYb

et l'union est disjointe.

(3) **$f(s) \in \Lambda_k$** Étant donné que $f_i(s) = \text{Card}\big(P_i(s)\big)$, et que l'union (12.299) est disjointe[53] nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(s) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(P_i(s)) = \text{Card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} P_i(s)\Big) = \text{Card}\{1, \dots, k\} = k. \tag{12.300}$$

(4) **$f\colon M \to \Lambda_k$ est surjective** Pour $\alpha \in \Lambda_k$ nous posons

$$s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n \text{ fois}}). \tag{12.301}$$

Vu que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, ce s est bien dans $M = \{1, \dots, n\}^k$. Avec ça, l'ensemble des positions dans s où apparaît le 1 est $\{1, \dots, \alpha_1\}$, de telle sorte que $P_1(s) = \{1, \dots, \alpha_1\}$ et donc $f_1(s) = \alpha_1$. De même pour les autres $i = 1, \dots, n$. Donc $\text{Card}\big(P_i(s)\big) = \alpha_i$, et

$$f(s) = \alpha. \tag{12.302}$$

(5) **Stabilisateur** Le groupe symétrique S_k agit sur M par $\sigma(s)_i = s_{\sigma(i)}$. Soient $\alpha \in \Lambda_k$ et $s \in f^{-1}(\alpha)$. Question : quel est le stabilisateur[54] de s dans S_k ?

Étant donne que s contient α_i fois le nombre i aux positions $P_i(s)$, le groupe S_{α_i} peut agir sur $P_i(s)$ sans changer s. Le stabilisateur de s est donc

$$\text{Stab}(s) = S_{\alpha_1} \times \dots \times S_{\alpha_n}. \tag{12.303}$$

(6) **Orbite** Soit encore $s \in f^{-1}(\alpha)$. Quelle est l'orbite de s sous S_k ? Si S_k agit sur s, alors le nombre de $1, \dots, n$ dans $\sigma(s)$ sera le même que dans s ; ils auront juste changé de place. Autrement dit, les ensembles $P_i(s)$ et $P_i\big(\sigma(s)\big)$ ne sont pas identiques, mais leur cardinal sont égaux. Donc $\sigma(s)$ est encore dans $f^{-1}(\alpha)$. Autrement dit, pour l'orbite de s nous avons

$$\mathcal{O}_s = f^{-1}(\alpha). \tag{12.304}$$

EQooFIBBooVcZiOB

(7) **Quelques factorielles** C'est le moment d'utiliser le théorème orbite-stabilisateur 5.20 :

$$\text{Card}(\mathcal{O}_s) = \frac{\text{Card}(S_k)}{\text{Card}\big(\text{Stab}(s)\big)} = \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}. \tag{12.305}$$

En utilisant (12.304) et les notations 3.289,

$$\text{Card}\big(f^{-1}(\alpha)\big) = \frac{k!}{\alpha!}. \tag{12.306}$$

EQooFQONooJhLQER

(8) **$\{f^{-1}(\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda_k}$ est une partition de M** D'une part si $s \in f^{-1}(\alpha) \cap f^{-1}(\beta)$, alors $f(s) = \alpha$ et $f(s) = \beta$ de telle sorte que $\alpha = \beta$. D'autre part si $s \in M$, en posant $\alpha = f(s)$ nous avons bien $s \in f^{-1}(\alpha)$. Bref

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_k} f^{-1}(\alpha) \tag{12.307}$$

et l'union est disjointe.

[53] Nous utilisons le lemme 2.29(1).
[54] Définition 5.15.

(9) **Retour à la fonction a** Nous pouvons maintenant décomposer la somme (12.293) en

$$a(x) = \sum_{s\in M} A(e_{s_1},\dots,e_{s_k})x_{s_1}\dots x_{s_k} \tag{12.308a}$$
$$= \sum_{\alpha\in\Lambda_k}\sum_{s\in f^{-1}(\alpha)} A(e_{s_1},\dots,e_{s_k})x_{s_1}\dots x_{s_k}. \tag{12.308b}$$

Notez que si $f(s) = f(t)$ alors $\text{Card}(P_i(s)) = \text{Card}\big(P_i(t)\big)$, c'est-à-dire que $A(e_{s_1},\dots,e_{s_k})$ et $A(e_{t_1},\dots,e_{t_k})$ contiennent autant de e_i l'un que l'autre. Étant donné que A est symétrique, ça donne $A(e_{s_1},\dots,e_{s_k}) = A(e_{t_1},\dots,e_{t_k})$. Idem pour $x_{s_1}\dots x_{s_k} = x_{t_1}\dots x_{t_k}$.
Donc tous les termes de

$$\sum_{s\in f^{-1}(\alpha)} A(e_{s_1},\dots s_k)x_{s_1}\dots x_{s_k} \tag{12.309}$$

sont égaux et valent

$$A(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{\alpha_1\text{ fois}},\dots,\underbrace{e_n,\dots,e_n}_{\alpha_n\text{ fois}})x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} = A(e_1^{\alpha_1},\dots,e_n^{\alpha_n})x^\alpha. \tag{12.310}$$

EQooCUAOooWhhAY

La seconde égalité est juste une notation plus compacte.

(10) **Et enfin** En utilisant (12.306) et (12.310) nous trouvons bien

$$a(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha \tag{12.311}$$

avec

$$a_\alpha = \frac{k!}{\alpha!}A(e_1^{\alpha_1},\dots,e_n^{\alpha_n}). \tag{12.312}$$

Cela termine la preuve de (1).

Nous passons à la preuve de (2). Pour chaque $\alpha\in\Lambda_k$ nous avons

$$\|a_\alpha x^\alpha\| = \|\frac{k!}{\alpha!}A(e_1^{\alpha_1},\dots,e_n^{\alpha_n})x^\alpha\| \leqslant \frac{k!}{\alpha!}\|A\||x|^\alpha \tag{12.313}$$

où $|x|^\alpha = |x_1|^{\alpha_1}\dots|x_n|^{\alpha_n}$. En posant $y = \big(|x_1|,\dots,|x_n|\big)$ nous avons donc

$$\|a_\alpha x^\alpha\| \leqslant \frac{k!}{\alpha!}\|A\|y^\alpha. \tag{12.314}$$

En sommant et en utilisant le théorème multinomial 3.178, il vient

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\|a_\alpha x^\alpha\| \leqslant \sum_{\alpha\in\Lambda_k}\frac{k!}{\alpha!}\|A\|y^\alpha \tag{12.315a}$$
$$= \|A\|(y_1+\dots+y_n)^k \tag{12.315b}$$
$$= \|A\|\big(|x_1|+\dots+|x_n|\big)^k. \tag{12.315c}$$

Cela est la première inégalité de (2). Pour la seconde, il suffit d'utiliser l'équivalence de norme de la proposition 12.68(1). □

12.8.2 Continuité

LEMooGQWQooUfqURv

Lemme 12.115 ([396]).
Soit une forme n-multilinéaire $\alpha\in\mathcal{L}_n(E_1,\dots,E_n;F)$. Nous avons la formule

$$\alpha(x_1,\dots,x_n) - \alpha(a_1,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^n \alpha(a_1,\dots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\dots,x_n). \tag{12.316}$$

Démonstration. Nous y allons par récurrence.

(1) $n=2$ Vu que α est multilinéaire, nous avons $\alpha(x_1,x_2) = \alpha(x_1-a_1,x_2)+\alpha(a_1,x_2)$. Avec ça, nous avons

$$\alpha(x_1,x_2)-\alpha(a_1,a_2) = \alpha(x_1-a_1,x_2)+\alpha(a_1,x_2)-\alpha(a_1,a_2) \tag{12.317a}$$
$$= \alpha(x_1-a_1,x_2)+\alpha(a_1,x_2-a_2). \tag{12.317b}$$

(2) **La récurrence** Nous supposons que la formule est valable pour toute application n-multilinéaire, et nous considérons une application $n+1$-multilinéaire $\alpha \in \mathcal{L}_{n+1}(E,F)$. Nous considérons aussi des éléments $x_i, a_i \in E_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$. Nous posons

$$\begin{aligned} \alpha' \colon E_1 \times \dots \times E_n &\to F \\ y_1, \dots, y_n &\mapsto \alpha(y_1, \dots, y_n, x_{n+1}). \end{aligned} \tag{12.318}$$

Cela est une application n-multilinéaire. Nous avons ce calcul :

$$\begin{aligned} &\alpha(x_1, \dots, x_{n+1}) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) \\ &= \alpha'(x_1, \dots, x_n) - \alpha'(a_1, \dots, a_n) + \alpha'(a_1, \dots, a_n) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) && \text{(12.319a)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha'(a_1, \dots, a_n) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) && \text{(12.319b)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha(a_1, \dots, a_n, x_{n+1}) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) && \text{(12.319c)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha(a_1, \dots, a_n, x_{n+1} - a_{n+1}) && \text{(12.319d)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) && \text{(12.319e)} \end{aligned}$$

□

PROPooDQBOooByBvmj

Proposition 12.116 ([397]).
Soient des espaces vectoriels normés $E_1, \dots, E_n$ et F. Une application n-multilinéaire $\alpha \colon E_1 \times \dots E_n \to F$ est continue[55] *si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \lambda \|x_1\| \dots \|x_n\|. \tag{12.320}$$

EQooGTVEooZsqzAM

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que α est continue. En particulier, elle est continue en $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Nous considérons $r > 0$ tel que

$$\alpha\big(B(0,2r)\big) \subset B(0,1). \tag{12.321}$$

Nous posons $\lambda = 1/r^n$, et nous allons voir que ça fait le boulot. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ avec $x_i \neq 0$ pour tout i. Nous posons $z_i = r x_i / \|x_i\|$, de telle sorte que $\|z_1\| = \dots = \|z_n\| = r$ et donc que $(z_1, \dots, z_n) \in B(0,2r)$ et donc

$$\|\alpha(z_1, \dots, z_n)\| < 1. \tag{12.322}$$

Mais $\alpha(z_1, \dots, z_n) = r^n / \prod_i \|x_i\|$. Donc avec $\lambda = 1/r^n$ nous trouvons

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \lambda \prod_i \|x_i\|. \tag{12.323}$$

Si $x_i = 0$, alors c'est encore plus simple parce que la relation (12.320) se réduit à $0 \leqslant 0$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $\lambda > 0$ vérifie $\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \lambda \prod_i \|x_i\|$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. En utilisant le lemme 12.115, nous avons, pour tout x_i et a_i :

$$\begin{aligned} \|\alpha(x_1, \dots, x_n) - \alpha(a_1, \dots, a_n)\| &= \| \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \| && \text{(12.324a)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda \|x_i - a_i\| \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \|a_j\| \cdot \prod_{j=i+1}^{n} \|x_j\|. && \text{(12.324b)} \end{aligned}$$

SUBEQooYDGCooJFBaxN

Et maintenant nous prenons $0 < \epsilon < 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in B\big((a_1, \dots, a_n), \epsilon\big)$, de telle sorte que $\|x_i - a_i\| < \epsilon$ pour tout i et que

$$\|x_i\| < \|a_i\| + \epsilon \leqslant \|a_i\| + 1. \tag{12.325}$$

[55] Pour la topologie sur $E_1 \times \dots \times E_n$, c'est celle de la norme produit 9.306.

Nous posons $M = \max_{j=1,\dots,n} \|a_j\| : \|x_j\| \leqslant \|a_i\| + 1 \leqslant M + 1$ et nous majorons sauvagement chacun des produits de (12.324b) par $(M+1)^n$:

$$\|\alpha(x_1,\dots,x_n) - \alpha(a_1,\dots,a_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda \|x_i - a_i\| (M+1)^{2n} \tag{12.326a}$$

$$\leqslant n\lambda\epsilon(M+1)^{2n}. \tag{12.326b}$$

Nous avons donc bien prouvé que $\alpha(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow{F} \alpha(a_1,\dots,a_n)$ lorsque $(x_1,\dots,x_n) \xrightarrow{E_1\times\dots\times E_n} (a_1,\dots,a_n)$.

□

12.8.3 Continuité de la composition

PROPooIPILooZMtYSP

Proposition 12.117 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé E. L'application

$$\begin{aligned} \alpha\colon \operatorname{End}(E)^n &\to \operatorname{End}(E) \\ (A_1,\dots,A_n) &\mapsto A_1 \circ \dots \circ A_n \end{aligned} \tag{12.327}$$

est une application multilinéaire continue.

Démonstration. Le fait que α soit multilinéaire est une simple vérification[56]. Pour la continuité, nous utilisons le lemme 12.97 qui donne

$$\|\alpha(A_1,\dots,A_n)\| \leqslant \|A_1\| \dots \|A_n\|. \tag{12.328}$$

Donc $\lambda = 1$ fait fonctionner la proposition 12.116. □

12.8.4 Norme

Voir la définition 10.6 des applications multilinéaires.

La proposition suivante doit surement beaucoup à la proposition 12.116.

DEFooTAUWooNDJJEO

Proposition-Définition 12.118 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés $E_1,\dots,E_n$ et F. Si $\alpha\colon E_1 \times \dots \times E_n \to F$ est n-multilinéaire[57], alors

(1) Nous avons

$$\begin{aligned} &\inf\{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall (x_1,\dots,x_n) \in E_1 \times \dots E_n, \|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \lambda \|x_1\| \dots \|x_n\|\} \\ &\quad = \sup\{\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \text{ tel que } \|x_i\| \leqslant 1\} \end{aligned} \tag{12.329}$$

(2) Ce nombre est définit une norme sur l'espace des applications n-linéaires.

Voir aussi la définition 12.119 pour la norme sur les applications k-multilinéaires.

Démonstration. Nous posons

$$A = \{\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \text{ tel que } \|x_i\| \leqslant 1\}, \tag{12.330}$$

et

$$B = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \lambda \|x_1\| \dots \|x_n\|\}, \tag{12.331}$$

et ensuite $M = \sup(A)$, $m = \inf(B)$.

$\underline{m \leqslant M}$ Pour cela nous prouvons que $M \in B$. Pour $x_1,\dots,x_n \in E_1 \times \dots \times E_n$ nous posons $y_i = x_i/\|x_i\|$ de telle sorte que

$$\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| = \|x_1\| \dots \|x_n\| \|\alpha(y_1,\dots,y_n)\| \tag{12.332a}$$

$$\leqslant M\|x_1\| \dots \|x_n\|. \tag{12.332b}$$

Cela prouve que $M \in B$ et donc que $M \geqslant m$ parce que $m = \inf(B)$.

[56] Que je n'ai pas faite, alors faites-la.
[57] Définition 10.1.

$\underline{M \leqslant m}$ Nous montrons que $M \leqslant \lambda$ pour tout $\lambda \in B$. Soient donc $\lambda \in B$ et $\|x_i\| \leqslant 1$. Vu que $\lambda \in B$ nous avons

$$\lambda \geqslant \frac{\|\alpha(x_1)\dots\alpha(x_n)\|}{\|x_1\|\dots\|x_n\|}. \tag{12.333}$$

Nous avons

$$\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \frac{\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\|}{\|x_1\|\dots\|x_n\|} \tag{12.334a}$$
$$\leqslant \lambda. \tag{12.334b}$$

En prenant le supremum sur les $\|x_i\| \leqslant 1$ nous trouvons $M \leqslant \lambda$. Étant donné que cela est vrai pour tout $\lambda \in B$ nous avons $M \leqslant \inf(B) = m$.

C'est une norme Pour $\alpha \in \mathcal{L}_k(E_1,\dots,E_n,F)$ nous notons

$$N(\alpha) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall (x_1,\dots,x_n) \in E_1 \times \dots E_n,\ \|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \lambda\|x_1\|\dots\|x_n\|\} \tag{12.335a}$$
$$= \sup\{\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \text{ tel que } \|x_i\| \leqslant 1\} \tag{12.335b}$$

Nous prouvons que N est une norme sur $\mathcal{L}_k$.

$\underline{N(\alpha) = 0}$ **implique** $\alpha = 0$ Nous supposons que $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe $a_1,\dots,a_n$ tels que $\alpha(a_1,\dots,a_n) \neq 0$. Nous posons $y_i = a_i/\|a_i\|$. Nous avons

$$\alpha(y_1,\dots,y_n) = \frac{\alpha(a_1,\dots,a_n)}{\|a_1\|\dots\|a_n\|}, \tag{12.336}$$

et donc

$$\|\alpha\| = \sup\{\|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| \text{ tel que } \|x_i\| \leqslant 1\} \tag{12.337a}$$
$$\geqslant \|\alpha(y_1,\dots,y_n)\| \tag{12.337b}$$
$$> 0. \tag{12.337c}$$

Inégalité triangulaire Soient $x_1,\dots,x_n$ tels que $\|x_i\| \leqslant 1$. Nous avons

$$N(\alpha+\beta) \leqslant \|(\alpha+\beta)(x_1,\dots,x_n)\| \tag{12.338a}$$
$$= \|\alpha(x_1,\dots,x_n) + \beta(x_1,\dots,x_n)\| \tag{12.338b}$$
$$\leqslant \|\alpha(x_1,\dots,x_n)\| + \|\beta(x_1,\dots,x_n)\| \tag{12.338c}$$
$$\leqslant N(\alpha) + N(\beta). \tag{12.338d}$$

□

LEMooORANooRLJYWw

Lemme-Définition 12.119 ([1]).
Soit une forme k-multilinéaire $A\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ ainsi que

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A(x,\dots,x). \end{aligned} \tag{12.339}$$

Si nous notons

$$a(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha, \tag{12.340}$$

alors l'opération[58]

$$\begin{aligned} N\colon \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \max_{\alpha\in\Lambda_k} |a_\alpha| \end{aligned} \tag{12.341}$$

est une norme.

Démonstration. Il faut vérifier les conditions de la définition 9.232 parmi lesquelles nous n'allons faire que l'inégalité triangulaire. Soient les applications k-multilinéaires A et B donnant

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha \\ b(x) &= \sum_{\alpha\in\Lambda_k} b_\alpha x^\alpha. \end{aligned} \tag{12.342}$$

[58] Qui est bien définie par le lemme 12.114(1).

Étant donnée l'associativité des sommes finies, nous avons

$$(a+b)(x)=\sum_{\alpha\in\Lambda_k}(a_\alpha+b_\alpha)x^\alpha, \tag{12.343}$$

et donc le calcul suivant :

$$\begin{aligned}N(A+B)&=\max_{\alpha\in\Lambda_k}|a_\alpha+b_\alpha| &(12.344a)\\ &\leqslant\max_{\alpha\in\Lambda_k}\big(|a_\alpha|+|b_\alpha|\big) &(12.344b)\\ &\leqslant\max_{\alpha\in\Lambda_k}|a_\alpha|+\max_{\alpha\in\Lambda_k}|b_\alpha| &(12.344c)\\ &=\|A\|+\|B\|. &(12.344d)\end{aligned}$$

□

12.9 Applications multilinéaires

PropUADlSMg

Proposition 12.120.
Soient des espaces vectoriels normés E_i et F. Une application n-linéaire[59]

$$T\colon E_1\times\ldots\times E_n\to F \tag{12.345}$$

est est continue si et seulement si il existe un réel $L\geqslant 0$ tel que

$$\|T(x_1,\ldots,x_n)\|_F\leqslant L\|x_1\|_{E_1}\cdots\|x_n\|_{E_n},\qquad\forall x_i\in E_i. \tag{12.346}$$

limitatezza

Démonstration. Pour simplifier l'exposition nous nous limitons au cas $n=2$ et nous notons $T(x,y)=x*y$
Supposons que l'inégalité (12.346) soit satisfaite.

$$\begin{aligned}\|x*y-x_0*y_0\|&=\|(x-x_0)*y-x_0*(y-y_0)\|\\ &\leqslant\|(x-x_0)*y\|+\|x_0*(y-y_0)\|\\ &\leqslant L\|x-x_0\|\|y\|+L\|x_0\|\|y-y_0\|.\end{aligned} \tag{12.347}$$

LimImplCont

Si $x\to x_0$ et $y\to y_0$ on voit que T est continue en passant à la limite aux deux côtés de l'inégalité (12.347).

Soit T continue en $(0,0)$. Évidemment[60] $0*0=0$, donc il existe $\delta>0$ tel que si $x\in B_{E_1}(0,\delta)$ et $y\in B_{E_2}(0,\delta)$ alors $\|x*y\|\leqslant 1$. En particulier si $(x,y)\in B_{E_1\times E_2}(0,\delta)$ nous sommes dans ce cas. Soient maintenant $x\in E_1\setminus\{0\}$ et $y\in E_2\setminus\{0\}$

$$x*y=\left(\frac{\|x\|}{\delta}\frac{\delta x}{\|x\|}\right)*\left(\frac{\|y\|}{\delta}\frac{\delta y}{\|y\|}\right)=\frac{\|x\|\|y\|}{\delta^2}\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)*\left(\frac{\delta y}{\|y\|}\right). \tag{12.348}$$

On remarque que $\delta x/\|x\|_m$ est dans la boule de rayon δ centrée en 0_m et que $\delta y/\|y\|_n$ est dans la boule de rayon δ centrée en 0_n. On conclut

$$x*y\leqslant\frac{\|x\|_m\|y\|_n}{\delta^2}.$$

Il faut prendre $L=1/\delta^2$. □

PROPooOPCVooEWeWha

Proposition 12.121.
Si T est une application 2-linéaire, nous avons

$$\|T(u,v)\|\leqslant\|T\|\|u\|\|v\|. \tag{12.349}$$

EqYLnbRbC

Et nous notons que cette norme est uniquement définie pour les applications linéaires continues. Ce n'est pas très grave parce qu'alors nous définissons $\|T\|=\infty$ si T n'est pas continue. Cela pour retrouver le principe selon lequel on est continue si et seulement si on est borné.

isom_isom

Proposition 12.122.
On définit les fonctions

$$\begin{aligned}\omega_g:&\quad\mathcal{L}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\quad\to\quad\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)),\\ \omega_d:&\quad\mathcal{L}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\quad\to\quad\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)),\end{aligned} \tag{12.350}$$

[59] Définition 10.1.
[60] Dans la formule suivante, les trois zéros sont les zéros de trois espaces différents.

par

$$\omega_g(T)(x) = T(x, \ \cdot \ ), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

et

$$\omega_d(T)(y) = T(\ \cdot \ , y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions ω_g et ω_d sont des isomorphismes qui préservent les normes.

12.10 Séries

SECooYCQBooSZNXhd

La notion de somme sur un ensemble infini est donnée en 12.140, voir aussi le thème 53 pour plus de notions de sommes finies et infinies.

DefGFHAaOL

Définition 12.123.
*Soit (a_k) une suite dans un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$. La suite des **sommes partielles** associée est la suite (s_k) définie par*

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \tag{12.351}$$

*La **série** associée est la limite des sommes partielles*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{12.352}$$

si elle existe.

*Si une telle limite existe nous disons que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** dans V. Si la limite de la suite des sommes partielles n'existe pas nous disons que la série **diverge**.*

Remarque 12.124.
Si la limite de la suite des sommes partielles n'existe pas dans V, alors elle peut parfois exister dans des extensions de V. Par exemple une série de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Autre exemple : avec une bonne topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$, une série peut ne pas converger dans $\mathbb{R}$ mais converger vers $\pm\infty$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

12.125.
Il y a d'autres moyens de sommer. Celle de la définition 12.123 tronque la somme de façon très violente en N et fait $N \to 0$. Des façons plus douces ici : https://youtu.be/beakj767uG4.

DEFooEYYDooQvZGEx

Définition 12.126 (Norme uniforme)**.**
Soit un ensemble X et un espace normé $(E, \|.\|)$. L'application

$$\begin{aligned} N\colon \operatorname{Fun}(X, E) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup_{x\in X} \|f(x)\| \end{aligned} \tag{12.353}$$

est une norme sur $\operatorname{Fun}(X, E)$.

LEMooHUZEooSyPipb

Lemme 12.127.
Soit une suite (a_k) dans un espace métrique complet[61] *dont la série converge.*

ITEMooPFSQooDhKFGL

(1) Pour tout N nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k. \tag{12.354}$$

ITEMooQNHMooUPjupB

(2) La suite des queues de série converge vers 0, c'est-à-dire que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0. \tag{12.355}$$

[61] Définition 9.335.

Démonstration. Voici un petit calcul :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\big(\sum_{k=0}^{N}a_k+\sum_{k=N+1}^{n}a_k\big) \tag{12.356a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N}a_k+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n}a_k \tag{12.356b}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}a_k+\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k. \tag{12.356c}$$

Justifications :

- Pour (12.356a). Pour chaque n, la somme est finie et nous pouvons la décomposer. Si vous voulez vraiment couper les cheveux en quatre, vous devez fixer un ϵ, et un n de telle sorte à avoir $n>N$, parce que N est fixé dans l'énoncé du lemme.
- Pour (12.356b). Nous sommes dans un cas $\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)$ où (u_n) est constante et où (u_n+v_n) converge. Nous pouvons donc permuter limite et somme[62].

Voilà que (1) est prouvé.

Nous écrivons $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$; l'hypothèse est que la suite (s_n) est une suite convergente dans un espace métrique. Elle est donc de Cauchy par la proposition 9.343.

Soit $\epsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p,q>N$, nous ayons $\|s_p-s_q\|\leqslant\epsilon$. Soit $p>N$. Pour tout $n\geqslant 0$ nous avons

$$\epsilon>\|s_{p+n}-s_{p+1}\|=\|\sum_{k=p}^{p+n}a_k\|. \tag{12.357}$$

En prenant la limite $n\to\infty$ nous avons

$$\|\sum_{k=p}^{\infty}a_k\|\leqslant\epsilon. \tag{12.358}$$

Nous avons donc démontré qu'il existe N tel que si $p>N$, alors $\|\sum_{k=p}^{\infty}a_k\|\leqslant\epsilon$. Cela signifie exactement que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}a_k=0$. □

12.11 Sommes de familles infinies

SECooHHDXooUgLhHR

12.11.1 Suites

Ne pas confondre la norme supremum avec la norme L^∞ (définition 29.28), bien que les deux peuvent être écrites $\|f\|_\infty$.

DEFooSFNFooBygeXX

Définition 12.128 (norme supremum[388])**.**
Soient un ensemble Ω, une partie A de Ω et un espace normé V. Lorsque g est une fonction $g\colon\Omega\to V$, nous notons

$$\|g\|_A=\sup_{x\in A}\|g(x)\| \tag{12.359}$$

*C'est la **norme supremum** limitée à la partie A.*

DEFooOHRYooWUsYTi

Définition 12.129 (Convergence uniforme de suites)**.**
*Nous disons qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble A **converge uniformément sur** A vers la fonction f si*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_A=0 \tag{12.360}$$

EQooGPPEooNKQilx

où $\|.\|_A$ est la norme supremum 12.128.

[62] Pour rappel, la proposition 11.28 demande la convergence des deux suites pour fonctionner.

12.11.2 Séries

Trois notions de convergence à ne pas confondre :

(1) La convergence absolue, définition 12.130,

(2) la convergence normale, définition 12.131. C'est la même que la convergence absolue, mais dans le cas particulier d'un espace de fonctions muni de la norme uniforme.

(3) la convergence uniforme, définition 12.132.

Voici les définitions.

DefVFUIXwU

Définition 12.130 (Convergence absolue)**.**
*Nous disons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace vectoriel normé V **absolument sommable** si la série $\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Pour une suite indexée par $\mathbb{Z}$, nous disons que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable si $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|a_n\|$ converge. Ici la somme est $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\|a_n\|$.

Attention : il n'est pas dit qu'une suite absolument sommable soit sommable dans le sens de la définition 12.140. Comme le dit régulièrement David Madore, un foobar bleuté n'est pas spécialement un foobar. Et pas toujours bleuté non plus d'ailleurs.

Pour cette raison, il n'est pas très prudent à priori de dire « la série $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge absolument ». Parce qu'on ne sait pas si la limite $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n$ existe. Nous allons cependant parler comme ça parce que la proposition 12.165 dira que, au moins dans le cas d'applications à valeurs dans un Banach, si une suite est absolument sommable, alors elle a une série qui converge.

DefVBrJUxo

Définition 12.131 (Convergence normale)**.**
*Soit un espace topologique X et un espace vectoriel normé V. Une suite d'application $(u_n\colon X\to V)_{n\in\mathbb{Z}}$ est **normalement sommable** si la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|u_n\|_\infty=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\|u_n\|_\infty \tag{12.361}$$

converge, c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable dans $\big(\mathrm{Fun}(X,V),\|.\|_\infty\big)$.

DEFooPABSooPMXMOV

Définition 12.132 (Convergence uniforme)**.**
*Soit un espace topologique X et un espace vectoriel normé V. Une suite d'application $(f_n\colon X\to V)_{n\in\mathbb{Z}}$ est **uniformément sommable** de somme F si la suite des sommes partielles converge uniformément, c'est-à-dire si*

$$\lim_{N\to\infty}\|\sum_{n=-N}^{N}f_n-F\|_\infty=0. \tag{12.362}$$

EqLNCJooVCTlw

12.11.3 Terme général

PROPooYDFUooTGnYQg

Proposition 12.133.
Si une série converge dans un espace complet, la norme de son terme général converge vers 0 : si $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge, alors

$$\|a_n\|\to 0. \tag{12.363}$$

Démonstration. Soit une suite (a_n) dont la série converge vers s. Soit $\epsilon>0$. La suite des sommes partielles (s_n) est de Cauchy et converge vers s : $s_n\to s$. En particulier il existe un N tel que si $n>N$, nous avons $\|s_n-s_{n-1}\|<\epsilon$. Pour de telles valeurs de n nous avons :

$$\|a_n\|=\|s_n-s_{n-1}\|\leqslant\epsilon. \tag{12.364}$$

Cela prouve que $a_n\to 0$. □

Dans le même ordre d'idée nous avons la convergence des queues de suites.

LEMooFUCOooCOqLRj

Lemme 12.134 ([1])**.**
Soit une suite $a\colon\mathbb{N}\to V$ où V est un espace vectoriel normé. Si $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ converge, alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}a_k=0. \tag{12.365}$$

Démonstration. Ne nous en voulez pas si on décale l'énoncé de 1 : nous allons prouver que $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$. Nous nommons (s_n) la suite des sommes partielles de a : $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$; pour tout $N > n$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} a_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{N} a_k \tag{12.366}$$

En prenant la limite $N \to \infty$ nous trouvons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s_n + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} a_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{12.367}$$

Cela étant valable pour tout n, nous prenons la limite $n \to \infty$. Par définition $s_n \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k$; pour le reste

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{12.368}$$

La dernière somme est donc nulle et nous avons prouvé le lemme. □

12.11.4 Convergence commutative

DEFooORAGooZslkyS

Définition 12.135.
*Soit x_k une suite dans un espace vectoriel normé E. Nous disons que la suite **converge commutativement** vers $x \in E$ si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ et si pour toute bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nous avons aussi*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\tau(n)} - x\| = 0. \tag{12.369}$$

La notion de convergence commutative est surtout intéressante pour les séries.

DEFooYMOHooMKzTSJ

Définition 12.136.
La somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \tag{12.370}$$

converge commutativement vers x si $\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{k=0}^{N} x_k\| = 0$ et si pour toute bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{k=0}^{N} x_{\tau(k)}\| = 0. \tag{12.371}$$

*Dans ce cas nous disons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est **commutativement sommable**.*

PROPooOGOEooBkZoEJ

Proposition 12.137.
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite absolument sommable[63] dans $\mathbb{C}$. Alors elle est commutativement sommable[64].

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a$ et nous considérons N tel que

$$|\sum_{i=0}^{N} a_i - a| < \epsilon. \tag{12.372}$$

Étant donné que la série des $|a_i|$ converge, il existe N_1 tel que pour tout $p, q > N_1$ nous ayons $\sum_{i=p}^{q} |a_i| < \epsilon$. Nous considérons maintenant une bijection $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Prouvons que la série $\sum_{i=0}^{\infty} |a_{\tau(i)}|$ converge. Nous choisissons M de telle sorte que pour tout $n > M$, $\tau(n) > N_1$. Si s_k est la somme partielle de la suite $(a_{\tau(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ et si $M < p < q$ nous avons

$$|s_q - s_p| = |\sum_{i=p}^{q} a_{\tau(i)}| \leqslant \sum_{i=p}^{q} |a_{\tau(i)}| < \epsilon. \tag{12.373}$$

Cela montre que (s_k) est une suite de Cauchy. Elle est alors convergente et nous en déduisons que la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{\tau(i)} \tag{12.374}$$

[63] Définition 12.130.
[64] Définition 12.136.

converge. Nous devons montrer à présent qu'elle converge vers la même limite que la somme « usuelle » $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N}a_i$.

Soit $n>\max\{M,N\}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n}a_{\tau(k)}-\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{M}a_{\tau(k)}-\sum_{k=0}^{N}a_k+\underbrace{\sum_{M+1}^{n}a_{\tau(k)}}_{<\epsilon}-\underbrace{\sum_{k=N+1}^{n}a_k}_{<\epsilon}. \tag{12.375}$$

Par construction les deux derniers termes sont plus petits que ϵ parce que M et N sont les constantes de Cauchy pour les séries $\sum a_{\tau(i)}$ et $\sum a_i$. Afin de traiter les deux premiers termes, quitte à redéfinir M, nous supposons que $\{1,\dots,N\}\subset\tau\{1,\dots,M\}$; par conséquent tous les a_i avec $i<N$ sont atteints par les $a_{\tau(i)}$ avec $i<M$. Dans ce cas, les termes qui restent dans la différence

$$\sum_{k=0}a_{\tau(k)}-\sum_{k=0}^{N}a_k \tag{12.376}$$

sont des a_k avec $k>N$. Cette différence est donc en valeur absolue plus petite que ϵ, et nous avons en fin de compte que

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_{\tau(k)}-\sum_{k=0}^{n}a_k\right|<\epsilon. \tag{12.377}$$

□

PROPooVVHKooZjXQiP

Proposition 12.138 ([1]).
Si (a_k) est une suite réelle avec $a_k\geqslant 0$ et si $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\infty$, alors $\sum_{k=0}^{\infty}a_{\tau(k)}=\infty$ pour toute permutation τ de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soient $m>0$. Il existe $N>0$ tel que si $n\geqslant N$, alors $\sum_{k=0}^{n}a_k>m$. Vu que τ est une permutation, il existe N_1 tel que $\tau\{0,\dots,N_1\}$ contient $\{0,\dots,N\}$.

Alors pour tout $n\geqslant N_1$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{n}a_{\tau(k)}\geqslant\sum_{k=0}^{N}a_k>m. \tag{12.378}$$

□

PropyFJXpr

Proposition 12.139 (Théorème de réarrangement de Riemann[398, 399, 400, 1]).
Soit $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ une série réelle qui converge mais qui ne converge pas absolument. Alors pour tout $b\in\mathbb{R}$, il existe une bijection $\tau\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty}a_{\tau(i)}=b$.

Démonstration. Nous posons

$$N^+=\{n\in\mathbb{N}\text{ tel que }a_n\geqslant 0\} \tag{12.379a}$$
$$N^-=\{n\in\mathbb{N}\text{ tel que }a_n<0\} \tag{12.379b}$$

(1) **N^+ ou N^- est infini**

Vu que $N^+\cup N^-=\mathbb{N}$, au moins un des deux est infini (lemme 2.292.29), ce qui n'est pas possible.

(2) **N^- est infini**

Supposons que N^- est fini. Posons $n_0=\max(N^-)$. Pour tout $k>n_0$ nous avons $a_k\geqslant 0$. Soit $N>n_0$. Nous avons

$$\sum_{k=0}^{N}a_k=\sum_{k=0}^{n_0}a_k+\sum_{n_0+1}^{N}a_k \tag{12.380a}$$
$$=\sum_{k=0}^{n_0}a_k-\sum_{k=0}^{n_0}|a_k|+\sum_{k=0}^{n_0}|a_k|+\sum_{k=n_0+1}^{N}|a_k| \tag{12.380b}$$
$$=\sum_{k=0}^{n_0}\big(a_k-|a_k|\big)+\sum_{k=0}^{N}|a_k|. \tag{12.380c}$$

En prenant la limite $N\to\infty$, à gauche nous avons ∞ par hypothèse, alors que nous avons un nombre fini à droite (aussi par hypothèse). Contradiction, nous en concluons que N^- est infini.

(3) N^+ **est infini** Même type de raisonnement[65].

(4) **Construction de** $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ITEMooKATRooVrnUBv

Nous allons construire par récurrence. D'abord

$$T_0 = \{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_l \geqslant 0\} = N^+ \tag{12.381a}$$
$$S_0 = \{l \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_l < 0\} = N^-. \tag{12.381b}$$

Si $\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} \leqslant b$, alors nous posons

- $\tau(n+1) = \min(T_n) \in N^+$
- $T_{n+1} = T_n \setminus \tau(n+1)$
- $S_{n+1} = S_n$

Si $\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} > b$, alors nous posons

- $\tau(n+1) = \min(S_n) \in N^-$
- $S_{n+1} = S_n \setminus \tau(n+1)$
- $T_{n+1} = T_n$.

Les parties T_n et S_n sont les parties de $\mathbb{N}$ qui restent à attribuer lorsque $\tau(n)$ est fixé.

Nous prouvons maintenant quelques propriétés qui disent que τ prends les éléments de N^+ et N^- dans l'ordre sans en oublier.

(5) $T_n = T_0 \setminus \tau\{0, \dots, n\}$ ITEMooLBLUooYypSZd

Cela se prouve par récurrence. Si $T_n = T_0 \setminus \{\tau(1), \dots, \tau(n)\}$, il y a deux possibilités pour T_{n+1}. Soit $\tau(n+1) \in N^+$, soit $\tau(n+1) \in N^-$. Dans le premier cas, T_{n+1} est défini comme étant $T_n \setminus \{\tau(n+1)\}$. Dans le second cas, $\tau(n+1) \notin T_n$, et donc $T_{n+1} = T_n = T_n \setminus \tau(n+1)$.

(6) $S_n = S_0 \setminus \tau\{0, \dots, n\}$

Même raisonnement.

(7) $k_1 < k_2 \in N^+$ **avec** $k_2 \in \tau(\mathbb{N})$ **alors** $k_1 \in \tau(\mathbb{N})$

Soient $k_1 < k_2$ dans N^+. Nous supposons que $k_2 = \tau(n+1)$ pour un certain n. Donc $k_2 = \min(T_n)$, ce qui signifie que k_1 n'est pas dans T_n. Or $T_n = T_0 \setminus \{\tau(0), \dots, \tau(n)\}$. Nous en déduisons que $k_1 \in \{\tau(0), \dots, \tau(n)\}$.

(8) $k_1 < k_2 \in N^-$ **avec** $k_2 \in \tau(\mathbb{N})$ **alors** $k_1 \in \tau(\mathbb{N})$

Même raisonnement.

(9) τ **est injective** Supposons que $\tau(k) = \tau(l)$ avec $k < l$. Vu que $S_n \subset S_0$ et $T_n \subset T_0$ et $S_0 \cap T_0 = \varnothing$, nous devons avoir tous les deux dans T_0 ou tous les deux S_0.

Supposons pour fixer les idées que $\tau(k)$ et $\tau(l)$ sont tous les deux dans T_0. Nous avons $\tau(k) \in T_{k-1}$, mais, par construction $\tau(k) \notin T_k$. Vu que $T_l \subset T_k$, il est impossible d'avoir $\tau(k) = \tau(l) \in T_l$.

La même chose tient si $\tau(k)$ et $(\tau(l))$ sont dans S_0.

(10) τ **est surjective**

Nous supposons que τ n'est pas surjective. Supposons que n_0 n'est pas dans l'image de τ, et supposons que $n_0 \in T_0$. Alors aucun élément de N^+ plus grand que n_0 n'est dans $\tau(\mathbb{N})$ par le point (5).

Soit $N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \tau(k) \in N^+\}$. Ça existe et c'est fini parce que $\tau(\mathbb{N})$ ne prend aucun élément de N^+ au-delà de n_0. Donc pour tout $k \geqslant N+1$ nous avons $a_{\tau(k)} < 0$. Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{\tau(k)} \tag{12.382a}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} + \sum_{k=0}^{N} |a_{\tau(k)}| - \sum_{k=0}^{N} |a_{\tau(k)}| - \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{\tau(k)}| \tag{12.382b}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \Big(a_{\tau(k)} + |a_{\tau(k)}|\Big) - \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\tau(k)}|. \tag{12.382c}$$

[65] Je n'ai pas vérifié. Alors soyez prudent.

Par la proposition 12.138, la dernière somme diverge parce que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\tau(k)}| = \infty$. Nous venons de prouver que $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = -\infty$.

Prenons $K > N$. Nous devons avoir

$$\sum_{k=0}^{K} a_{\tau(k)} \geqslant b \tag{12.383}$$

parce que sinon on aurait $\tau(K+1) \in N^+$. Vu qu'à partir de K les sommes partielles sont décroissantes et bornées vers le bas, nous en déduisons la convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)}$. Contradiction.

(11) **La somme converge vers b**

(11a) **Trouver un N assez grand**

Il est temps de montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = b$. Soit $\epsilon > 0$. Vu que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant n_1$ (proposition 12.133).

Vu que τ est bijective, la partie $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \tau(n) \leqslant n_1\}$ est finie, et même de cardinal $n_1 + 1$ parce qu'elle est en bijection avec $\{0, \dots, n_1\}$. Nous posons

$$n_0 = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \tau(k) \leqslant n_1\}. \tag{12.384}$$

Si $n > n_0$, alors $\tau(n) > n_1$ et alors $|a_{\tau(n)}| < \epsilon$. En posant

$$N_0 = \min\{k > n_0 \text{ tel que } \tau(k) \in N^+\} \tag{12.385a}$$
$$N = \min\{k > N_0 \text{ tel que } \tau(k) \in N^-\} - 1, \tag{12.385b}$$

nous avons un $N > n_0$ tel que

$$\begin{cases} \tau(N) \in N^+ & (12.386a) \\ \tau(N+1) \in N^- & (12.386b) \\ |a_{\tau(n)}| < \epsilon, \forall n \geqslant N. & (12.386c) \end{cases}$$

(11b) **Travail sur les sommes partielles**

Nous posons[66] $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}$. Vu que $\tau(N) \in N^+$, nous avons $S_{N-1} \leqslant b$. Vu que $\tau(N+1) \in N^-$, nous avons $S_N > b$. Or

$$|S_n - S_{n-1}| = |a_{\tau(N)} < \epsilon|. \tag{12.387}$$

Nous avons donc les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |S_N - S_{N-1}| < \epsilon & (12.388a) \\ S_{N-1} \leqslant b & (12.388b) \\ S_N > b. & (12.388c) \end{cases}$$

(11c) **Si $S_n > b + \epsilon$, alors contradiction** Soit $n > N$, et supposons que $S_n > b + \epsilon$. Vu que $|S_n - S_{n-1}| < \epsilon$, nous avons encore $S_{n-1} > b$, et donc, par construction de τ (point (4)), nous avons $S_n < S_{n-1}$. Au final,

$$b + \epsilon < S_n < S_{n-1} < S_{N-1}. \tag{12.389}$$

Et là, il y a une contradiction parce que $S_{N-1} \leqslant b$.

Nous en déduisons que nous avons toujours $S_n \leqslant b + \epsilon$.

(11d) **Idem : $S_n \geqslant b - \epsilon$**

Cela se prouve de la même façon.

Au final nous avons prouvé que pour tout $n > N$, $|S_n - b| \leqslant \epsilon$, ce qui montre bien que $S_n \to b$.

□

[66] Je sais, la notation S_n est déjà prise plus haut. Mais nous n'en avons plus besoin.

12.11.5 Famille sommable

Pour une revue des définitions de sommes dans le cas de $\{0,\dots,n\}$, des ensembles finis quelconques, voir le thème 53. Maintenant nous donnons la définition pour une somme sur un ensemble infini.

DefIkoheE

Proposition-Définition 12.140 (Famille sommable)**.**
*Si $\{v_i\}_{i\in I}$ est une famille de vecteurs dans un espace vectoriel normé indexée par un ensemble quelconque I. Nous disons que cette famille est **sommable** de somme v si pour tout $\epsilon>0$, il existe un I_0 fini dans I tel que pour tout ensemble fini K tel que $I_0\subset K$ nous avons*[67]

$$\|\sum_{j\in K} v_j - v\|<\epsilon. \tag{12.390}$$

Si tel est le cas, alors un tel v est unique[68]*.*

Nous notons

$$\sum_{i\in I} v_i = v. \tag{12.391}$$

Dans cette définition, il faut comprendre que J_0 est l'ensemble minimum de termes qu'il faut prendre pour être ϵ-proche de v. Ensuite, K est là pour dire qu'en prenant plus de termes, on ne s'éloignera pas tellement.

LEMooHFNXooFHfwzf

Lemme 12.141.
Soit une famille sommable $(v_i)_{i\in I}$ dans un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, la famille $(\lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}\lambda v_i = \lambda\sum_{i\in I} v_i. \tag{12.392}$$

LEMooSBYEooNXzqJU

Lemme 12.142.
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$. Si $J\subset I$, alors la famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable

LEMooAYFUooLMBBDn

Lemme 12.143.
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs. Si $J\subset I$, alors la famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{i\in I} a_i. \tag{12.393}$$

Dans le cas de familles de nombres réels positifs, nous avons une caractérisation plus commode.

PROPooOYNRooQFpBly

Proposition 12.144 (Somme de réels positifs[1])**.**
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs indexés par un ensemble quelconque I.

ITEMooAYKKooVxXp

(1) La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable[69] *si et seulement si*

$$\sup_{J\text{ fini dans }I}\sum_{j\in J} a_j<\infty. \tag{12.394}$$

ITEMooSDCYooNsbHez

(2) Si la famille est sommable, alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\text{ fini dans }I}\sum_{j\in J} a_j. \tag{12.395}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1), $\Rightarrow$** Soit v comme dans la définition. Soit $\epsilon>0$. Nous considérons une partie finie $J_0\subset I$ comme il faut. Vu que tous les termes sont positifs,

$$\sup_{J\text{ fini dans }I}\sum_{j\in J} a_j = \sup_{\substack{J\text{ fini dans }I\\ J_0\subset J}}\sum_{j\in J} a_j. \tag{12.396}$$

Pour chaque J fini contenant J_0 dans I nous avons $\|\sum_{j\in J} a_j - v\|\leqslant\epsilon$ et donc

$$\|\sum_{j\in J} a_j\|\leqslant\|v\|+\epsilon. \tag{12.397}$$

[67] La somme sur la partie finie K est la définition 2.129.
[68] Attention : je n'ai pas vérifié. Écrivez-moi si vous avez une preuve.
[69] Définition 12.140.

Donc le supremum sur les J est majoré par $\|v\|+\epsilon$.

Vu que cela est valable pour tout ϵ, c'est aussi majoré par $\|v\|$ lui-même, mais ce n'est pas utile pour notre propos.

(2) **Pour (1), $\Leftarrow$** Nous supposons maintenant que $\sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j < \infty$. Soit $v < \infty$ ce supremum. Il existe un J_0 fini dans I tel que

$$\| \sum_{j\in J_0} a_j - v\| \leqslant \epsilon. \tag{12.398}$$

Étant donné que tous les termes sont positifs, nous pouvons même dire que

$$\sum_{j\in J_0} a_j \in [v-\epsilon, v]. \tag{12.399}$$

Pour tout K contenant J_0 nous avons la même majoration et donc

$$v-\epsilon \leqslant \sum_{j\in J_0} a_j \leqslant \sum_{k\in K} a_k \leqslant v. \tag{12.400}$$

(3) **Pour (2)** Nous nommons $v = \sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j$. Soit $\epsilon > 0$; il existe J_0 fini dans I tel que

$$v-\epsilon \leqslant \sum_{j\in J_0} a_j \leqslant v. \tag{12.401}$$

Pour tout K fini contenant J_0 nous avons aussi $\sum_{j\in J_0} a_j \leqslant \sum_{k\in K} a_k$ et donc

$$\sum_{k\in K} a_k \in [v-\epsilon, v]. \tag{12.402}$$

Au final nous avons bien prouvé que

$$\| \sum_{k\in K} a_k - v\| \leqslant \epsilon. \tag{12.403}$$

EQooTWURooBsVfQS

Vu que pour tout ϵ, il existe un K qui réalise (12.403), la définition 12.140 nous dit que $\sum_{i\in I} a_i = v$.

□

PROPooAJRYooMuDaJI

Proposition 12.145 ([1]).
Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs. Nous considérons une partition $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de I telle que chacun des $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable de somme S_k. Si $\sum_{k=0}^{\infty} S_k < \infty$ alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{\infty} S_k. \tag{12.404}$$

Démonstration. Nous posons $S = \sum_{k=0}^{\infty} S_k$. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que

(1) Pour tout $N' > N$ nous avons $|\sum_{k=0}^{N'} S_k - S| < \epsilon$.

(2) Pour tout $p \geqslant N$ nous avons $\sum_{k=p}^{\infty} S_k < \epsilon$.

Nous posons $I_0 = \bigcup_{k=0}^{N} I_k$.

Soit K fini dans I tel que $I_0 \subset K \subset I$. Nous devons évaluer $|\sum_{k\in K} u_k - S|$. Nous posons

$$M = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } I_k \cap K \neq \varnothing\}, \tag{12.405}$$

de telle sorte à avoir l'union disjointe

$$K = I_0 \cup \bigcup_{k=N+1}^{M} (I_k \cap K). \tag{12.406}$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\Big|\sum_{j\in K} u_j - S\Big| = \Big|\sum_{j\in I_0} + \sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k\cap K} u_j - S\Big| \tag{12.407a}$$

$$\leqslant \Big|\sum_{j\in I_0} -S\Big| + \Big|\sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k\cap K} u_j\Big| \tag{12.407b}$$

$$\leqslant \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k\cap K} u_j\Big| \tag{12.407c}$$

$$\leqslant \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{M}\sum_{j\in I_k} u_j\Big| \qquad \text{ajoute termes positifs} \tag{12.407d}$$

$$= \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{M} S_k\Big| \tag{12.407e}$$

$$\leqslant \epsilon + \Big|\sum_{k=N+1}^{\infty} S_k\Big| \tag{12.407f}$$

$$\leqslant 2\epsilon. \tag{12.407g}$$

□

PROPooIJHFooXYOuiZ

Proposition 12.146 ([1]).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit un réel $0 < q < 1$. Nous notons $\Lambda = \mathbb{N}^n$. Pour $\alpha \in \Lambda$ nous notons $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Alors la famille

$$(q^{|\alpha|})_{\alpha\in\Lambda} \tag{12.408}$$

est une famille sommable.

Démonstration. Les parties

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k\} \tag{12.409}$$

forment une partition de Λ. Vu que chacun des Λ_k est fini nous pouvons poser

$$S_k = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} q^{|\alpha|} = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} q^k = q^k \operatorname{Card}(\Lambda_k). \tag{12.410}$$

La proposition 3.71 nous donne une valeur pour le cardinal de Λ_k, et c'est

$$\operatorname{Card}(\Lambda_k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}. \tag{12.411}$$

Nous avons donc

$$S_k = q^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{q^k}{(n-1)!}\prod_{j=1}^{n-1}(k+j) = q^k P(k) \tag{12.412}$$

où P est un polynôme de degré $n-1$.

La proposition 12.146 dit qu'alors $\sum_{k=0}^{\infty} S_k < \infty$. Vu que chacun de S_k est positif, la proposition 12.145 dit que $(q^{|\alpha|})_{\alpha\in\Lambda}$ est sommable et que

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} q^{|\alpha|} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k. \tag{12.413}$$

□

PROPooHCLZooLjQNDl

Proposition 12.147 ([1]).
Soit une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans un espace de Banach E. Nous supposons que

(1) La série est convergente : $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = v$,

(2) La série est absolument convergente : $\sum_{i=0}^{\infty} \|a_i\| < \infty$.

Alors $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille sommable.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$,

$$\| \sum_{i=0}^{n} a_i - v \| < \epsilon \text{ et } \quad \sum_{i=n}^{\infty} \| a_i \| < \epsilon. \tag{12.414}$$

Nous posons ensuite $J_0 = \{0, \ldots, N\}$. Soit une partie finie $K \subset \mathbb{N}$ telle que $J_0 \subset K$. Nous posons $K_c = K \subset J_0$ et $m = \min(K_c)$. Nous avons ce calcul :

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i \in K} a_i - v \| &= \| \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i \in K_c} a_i - v \| && (12.415a)\\
&\leqslant \| \sum_{i=0}^{N} a_i - v \| + \| \sum_{i \in K_c} a_i \| && (12.415b)\\
&\leqslant \epsilon + \sum_{i \in K_c} \| a_i \| && (12.415c)\\
&\leqslant \epsilon + \sum_{i=m}^{\infty} \| a_i \| && (12.415d)\\
&\leqslant 2\epsilon. && (12.415e)
\end{aligned}$$

Si nous avions pris $\epsilon/2$ dans (12.414), ça aurait été juste bon. □

Attention : dans le lemme suivant, nous supposons que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable. Sans cette hypothèse, il n'est pas vrai que $\sum_{k=0}^{\infty} a_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_i$. Et il n'est même pas vrai que l'existence de la première implique la sommabilité de la seconde.

LEMooGXPGooZTJPoN

Lemme 12.148 ([1])**.**
Soient un espace vectoriel normé V ainsi qu'une suite sommable $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans V. Alors

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} a_k. \tag{12.416}$$

La somme à gauche est celle de la définition 12.140 et celle de droite est donnée par la définition 2.79.

Démonstration. Par hypothèse, le membre de gauche existe, et nous le nommons v. Soit $\epsilon > 0$. Il existe J_0 fini dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout K fini dans $\mathbb{N}$ tel que $J_0 \subset K$, nous avons

$$\| \sum_{k \in K} a_k - v \| < \epsilon. \tag{12.417}$$

Ici, la somme est celle de la définition 2.129. Nous nommons $m_0 = \max(J_0)$; pour tout $m > m_0$ nous avons

$$J_0 \subset \{0, \ldots, m_0\} \subset \{0, \ldots, m\} \tag{12.418}$$

et donc

$$\| \sum_{k \in \{0, \ldots, m\}} a_k - v \| < \epsilon. \tag{12.419}$$

La bijection à prendre dans la définition (2.129) pour faire la somme sur $\{0, \ldots, m\}$ peut être l'identité, de telle sorte que $\sum_{k \in \{0, \ldots, m\}} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k$.

Nous notons s_i la somme partielle $s_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$. Ce que nous avons prouvé jusqu'ici est que pour tout ϵ, il existe m_0 tel que si $m \geqslant m_0$, alors $\| s_i - v \| \leqslant \epsilon$. Cela signifie exactement que $\lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_k = v$, c'est-à-dire que le membre de droite de (12.416) vaut v, ce qu'il fallait. □

Exemple 12.149.
La suite $a_i = (-1)^i$ n'est pas sommable parce que quel que soit J_0 fini dans $\mathbb{N}$, nous pouvons trouver J fini contenant J_0 tel que $\sum_{j \in J} (-1)^j > 10$. Pour cela il suffit d'ajouter à J_0 suffisamment de termes pairs. De la même façon en ajoutant des termes impairs, on peut obtenir $\sum_{j \in J'} (-1)^i < -10$. △

Exemple 12.150.
De temps en temps, la somme peut sortir d'un espace. Si nous considérons l'espace des polynômes $[0, 1] \to \mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, la somme de l'ensemble

$$\{1, -1, \pm \frac{x^n}{n!}\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{12.420}$$

est zéro.

Par contre la somme de l'ensemble $\{1, \frac{x^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est l'exponentielle qui n'est pas un polynôme. △

PROPooJLQAooAEbIvZ

Proposition 12.151 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé V, deux ensembles disjoints A et B ainsi que $v\colon A\cup B\to V$. Si $\sum_{k\in A} v_k$ et $\sum_{k\in B} v_k$ sont sommables[70]*, alors $(v_k)_{k\in A\cup B}$ est sommable et*

$$\sum_{k\in A\cup B} v_k = \sum_{k\in A} v_k + \sum_{k\in B} v_k. \tag{12.421}$$

Démonstration. Nous nommons

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k\in A} v_k \\ t &= \sum_{k\in B} v_k, \end{aligned} \tag{12.422}$$

et nous prouvons que $s+t$ vérifie la propriété qu'il faut (définition 12.140) pour être $\sum_{k\in A\cup B} v_k$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe I_0 fini dans A tel que $\| \sum_{k\in I} v_k - s\| < \epsilon$ dès que $I_0 \subset I \subset A$. Il existe également J_0 fini dans B tel que $\| \sum_{k\in J} v_k - t\| < \epsilon$ dès que $J_0 \subset J \subset B$.

Nous posons $S_0 = I_0 \cup J_0$. Si S est fini dans $A\cup B$ et vérifie $S_0 \subset S \subset A\cup B$, nous notons $S_a = S\cap A$ et $S_b = S\cap B$. Étant donné que $I_0 \subset S_a$ et $J_0 \subset S_b$, nous avons

SUBEQooPZSMooRNVSOt

$$\| \sum_{k\in S} v_k - (s+t)\| = \| \sum_{k\in S_a} v_k + \sum_{k\in S_b} v_k - (s+t)\| \qquad \text{cf. justif.} \tag{12.423a}$$

$$\leqslant \| \sum_{k\in S_a} v_k - s\| + \| \sum_{k\in S_b} v_k - t\| \tag{12.423b}$$

$$\leqslant 2\epsilon. \tag{12.423c}$$

Justifications.

- Pour 12.423a. Vu que les sommes sont finies et que S_a et S_b sont disjoints d'union S, nous pouvons couper la somme en utilisant le lemme 2.134.

□

12.11.6 Sommation associative

PROPooHGXZooXHIHeh

Proposition 12.152 (Associativité[1]).
Soit une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs. Soit une partition (disjointe) $\{I_j\}_{j\in J}$ de I. Nous posons[71]

$$S_j = \sum_{i\in I_J} u_i. \tag{12.424}$$

Alors $(S_j)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_I = \sum_{j\in J} S_j = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right). \tag{12.425}$$

Démonstration. Notons $v = \sum_{i\in I} u_i$. Soit $\epsilon > 0$. Il nous faut un J_0 fini dans J tel que si $K \subset J$ est fini et $J_0 \subset K$ alors $\| \sum_{j\in K} S_j - v\| \leqslant \epsilon$.

Étant donné que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, il existe I_0 fini dans I tel que pour tout L fini dans I tel que $I_0 \subset K$, nous ayons $\| \sum_{i\in L} u_i - v\| \leqslant \epsilon$.

Nous posons

$$J_0 = \{j \in J \text{ tel que } I_j \cap I_0 \neq 0\}. \tag{12.426}$$

Cela est une partie finie de J parce que I_0 est fini et les I_j sont disjoints. Si $K \subset J$ est fini et vérifie $J_0 \subset K$, alors en posant $L = \bigcup_{j\in K} I_j$ nous avons (avec la proposition 12.151) :

$$\sum_{j\in K} S_j = \sum_{j\in K} \sum_{i\in I_j} u_I = \sum_{i\in L} u_i \tag{12.427}$$

et donc

$$\| \sum_{j\in K} s_j - v\| = \| \sum_{i\in L} u_i - v\| < \epsilon. \tag{12.428}$$

□

[70] Définition 12.140.
[71] Existe par le lemme 12.142.

12.11.7 Somme non dénombrables

Nous allons voir que les sommes non dénombrables ne sont pas intéressantes : si le nombre de valeurs non nulles parmi les $(x_i)_{i\in I}$ est non dénombrable, alors la somme est infinie. La bonne généralisation de somme infinie dans le cas non dénombrable est l'intégrale qui viendra seulement avec la définition 16.169 et la mesure de Lebesgue 16.145.

LEMooYJCVooHajEbg

Lemme 12.153.
Si A est non dénombrable dans $\mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $A \cap \{|x| \geqslant \delta\}$ est non dénombrable.

Démonstration. Nous y allons par l'absurde, et nous supposons que A ne contient pas zéro (sinon il faut ajouter zéro aux A_n ci-dessous, et ça alourdit les notations). Nous supposons donc que les parties

$$A_n = A \cap \{|x| \geqslant \frac{1}{n}\} \tag{12.429}$$

sont dénombrables. Mais

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{12.430}$$

Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable[72]. Vu qu'un ensemble non dénombrable ne peut être inclus dans un ensemble dénombrable[73], nous avons une contradiction. □

LEMooQIMGooOUpZjk

Lemme 12.154.
Soit un ensemble I et une « suite » $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \geqslant 0$ pour tout i. Si l'ensemble

$$F = \{i \in I \text{ tel que } x_i > 0\} \tag{12.431}$$

est non dénombrable, alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \infty. \tag{12.432}$$

Démonstration. Nous considérons l'ensemble des valeurs non nulles atteintes par x :

$$V = \{x_i \text{ tel que } i \in F\}. \tag{12.433}$$

Il y a deux possibilités : soit V est dénombrable (ou fini), soit il est non dénombrable.

(1) **V est fini ou dénombrable** Dans ce cas, l'application $x\colon F \to [0,\infty[$ est une application d'un ensemble indénombrable vers un ensemble dénombrable. Le lemme 2.51 nous indique qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x^{-1}(y)$ est indénombrable et en particulier infini. La somme $\sum_{i\in x^{-1}(y)} x_i$ est une somme indénombrable de termes tous égaux et strictement positifs. Elle est infinie.

(2) **V est indénombrable** La partie V de $\mathbb{R}$ est non dénombrable ; elle est donc sujette au lemme 12.153 : il existe $\delta > 0$ tel que $W = V \cap \{x \geqslant \delta\}$ est indénombrable. Vu que $x_i \geqslant \delta$ pour tout i dans $x^{-1}(W)$ nous avons

$$\sum_{i\in x^{-1}(W)} x_i = \infty. \tag{12.434}$$

□

12.11.8 Sommes dénombrables

La proposition suivante nous enseigne que les sommes infinies se comportent normalement au moins en ce qui concerne les majorations termes à termes.

PropMpBStL

Proposition 12.155 ([1]).
Soit I un ensemble dénombrable.

ITEMooZSDSooFUqXDO

(1) Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$, deux familles de réels positifs telles que $a_i \leqslant b_i$ et telles que (b_i) est sommable[74]. Alors (a_i) est sommable.

ITEMooREEYooOtklRb

(2) Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels telle que $(|a_i|)$ est sommable, alors (a_i) est sommable.

[72] Proposition 2.42.
[73] Proposition 2.50.
[74] Définition 12.140.

ITEMooFIGGooWADdLs

(3) Si $(z_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes telle que $(|z_i|)$ est sommable, alors (z_i) est sommable.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous pouvons utiliser la caractérisation 12.144 ; dans un premier temps nous avons

$$\sum_{i\in I} b_i = \sup_{J \text{ fini dans } I} b_i < \infty. \tag{12.435}$$

Pour chaque J fini dans I, le lemme 2.137 nous assure que

$$\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{j\in J} b_j \tag{12.436}$$

Donc le supremum existe et est plus petit pour (a_j) que pour (b_j). En utilisant à nouveau la caractérisation de la proposition 12.144(1) (mais dans l'autre sens), nous concluons que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

(2) **Pour (2)** Nous posons $I^+ = \{i \in I \text{ tel que } a_i \geqslant 0\}$ et $I^- = \{i \in I \text{ tel que } a_i < 0\}$.

Vu que $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(a_i)_{i\in I^+}$ est sommable par le lemme 12.142. La famille $(a_i)_{i\in I^-}$ est également sommable par le même lemme appliqué à $(-a_i)_{i\in I^-}$ qui est sommable par le lemme 12.141. Nous posons

$$S^+ = \sum_{i\in I^+} a_i \tag{12.437a}$$

$$S^- = \sum_{i\in I^-} a_i, \tag{12.437b}$$

et nous allons prouver que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S^+ + S^-$. Soit $\epsilon > 0$. Nous choisissons J_0^+ et J_0^- tels que $J_0^+ \subset I^+$, $J_0^- \subset I^-$ et

$$\| \sum_{k\in K^+} a_k - S^+ \| \leqslant \epsilon \tag{12.438a}$$

$$\| \sum_{k\in K^-} a_k - S^- \| \leqslant \epsilon \tag{12.438b}$$

pour tout K^+ et K^- vérifiant $J_0^+ \subset K^+ \subset I^+$ et $J_0^- \subset K^- \subset I^-$.

Nous posons $J_0 = J_0^+ \cup J_0^-$ (qui est une union disjointe). Pour tout K fini dans I contenant J_0, nous avons

$$\| \sum_{k\in K} a_k - (S^+ + S^-) \| = \| \sum_{k\in K\cap I^+} a_k + \sum_{k\in K\cap I^-} a_k - S^+ - S^- \| \tag{12.439a}$$

$$\leqslant \| \sum_{k\in K\cap I^+} a_k - S^+ \| + \| \sum_{k\in K\cap I^-} a_k - S^- \| \tag{12.439b}$$

$$\leqslant 2\epsilon \tag{12.439c}$$

parce que $J_0^+ \subset K \cap I^+$ et $J_0^- \subset K \cap I^-$.

(3) **Pour (3)** Similaire à (2), mais en coupant en 4 morceaux au lieu de 2 : les parties réelles et imaginaires en plus des parties positives et négatives.

□

EXooULLXooTDFYqf

Exemple 12.156.
Au sens de la définition 12.140 la famille

$$\frac{(-1)^n}{n} \tag{12.440}$$

n'est pas sommable. En effet la somme des termes pairs est ∞ alors que la somme des termes impairs est $-\infty$. Quel que soit $J_0 \subset \mathbb{N}$, nous pouvons concocter, en ajoutant des termes pairs, un J avec $J_0 \subset J$ tel que $\sum_{j\in J}(-1)^j/j$ soit arbitrairement grand. En ajoutant des termes négatifs, nous pouvons également rendre $\sum_{j\in J}(-1)^j/j$ arbitrairement petit. △

PropVQCooYiWTs

Proposition 12.157.
Si (a_{ij}) est une famille de nombres positifs indexés par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ alors

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{12.441}$$

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 12.144 pour traiter la somme de gauche. Nous considérons $J_{m,n} = \{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}$ et nous avons pour tout m et n :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{(i,j)\in J_{m,n}} a_{ij} = \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\Big). \tag{12.442}$$

Si nous fixons m et que nous prenons la limite $n\to\infty$ (qui commute avec la somme finie sur i) nous trouvons

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{i=0}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{12.443}$$

Cette inégalité étant valable pour tout m, elle est encore valable à la limite $m\to\infty$ et donc

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{12.444}$$

Pour l'inégalité inverse, il faut remarquer que si J est fini dans $\mathbb{N}^2$, il est forcément contenu dans $J_{m,n}$ pour m et n assez grands. Alors

$$\sum_{(i,j)\in J} a_{ij} \leqslant \sum_{(i,j)\in J_{m,n}} a_{ij} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{12.445}$$

Cette inégalité étant valable pour tout ensemble fini $J\subset\mathbb{N}^2$, elle reste valable pour le supremum. □

La définition générale de la somme 12.140 est compatible avec la définition usuelle dans les cas où cette dernière s'applique.

PropoWHdjw

Proposition 12.158 (commutative sommabilité)**.**
Soit I un ensemble dénombrable et une bijection $\tau\colon\mathbb{N}\to I$. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille dans un espace vectoriel normé. Si $\sum_{i\in I} a_i$ existe, alors il est donné par

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)}. \tag{12.446}$$

Démonstration. Nous posons $a = \sum_{i\in I} a_i$. Soit $\epsilon>0$ et J_0 comme dans la définition. Nous choisissons

$$N > \max_{j\in J_0}\{\tau^{-1}(j)\}. \tag{12.447}$$

En tant que sommes sur des ensembles finis, nous avons l'égalité

$$\sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} = \sum_{j\in J} a_j \tag{12.448}$$

où J est un sous-ensemble de I contenant J_0. Soit J fini dans I tel que $J_0\subset J$. Nous avons alors

$$\|\sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} - a\| = \|\sum_{j\in J} a_j - a\| < \epsilon. \tag{12.449}$$

Nous avons prouvé que pour tout ϵ, il existe N tel que $n>N$ implique $\|\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} - a\|<\epsilon$. □

La réciproque n'est pas vraie. Même en supposant que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n$ existe, il n'est pas forcé que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ existe. Cela est une conséquence de l'exemple 12.156.

PROPooWLEDooJogXpQ

Proposition 12.159 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé E et une famille sommable[75] $\{v_i\}_{i\in I}$ *d'éléments de E. Soit $f\colon E\to\mathbb{C}$ une application sur laquelle nous supposons*

(1) f est linéaire et continue ;

(2) la partie $\{f(v_i)_{i\in I}\}$ est sommable.

Alors nous pouvons permuter la somme et f :

EQooONHXooKqIEbY
$$f(\sum_{i\in I} v_i)=\sum_{i\in I} f(v_i). \tag{12.450}$$

Démonstration. Soit $\epsilon>0$; vu que les familles $\{v_i\}_{i\in I}$ et $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ sont sommables, nous pouvons considérer les parties finies J_1 et J_2 de I telles que

$$\Big\|\sum_{j\in J_1} v_j-\sum_{i\in I} v_i\Big\|\leqslant\epsilon \tag{12.451}$$

et

$$\Big\|\sum_{j\in J_2} f(v_j)-\sum_{i\in I} f(v_i)\Big\|\leqslant\epsilon \tag{12.452}$$

Ensuite nous posons $J=J_1\cup J_2$. Avec cela nous calculons un peu avec les majorations usuelles :

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i)-\sum_{i\in I} f(v_i)\|\leqslant\|f(\sum_{i\in I} v_i)-f(\sum_{j\in J} v_j)\|+\|f(\sum_{j\in J} v_j)-\sum_{i\in I} f(v_i)\|. \tag{12.453}$$

Le second terme est majoré par ϵ, tandis que le premier, en utilisant la linéarité de f possède la majoration

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i)-f(\sum_{j\in J} v_j)\|=\|f(\sum_{i\in I} v_i-\sum_{j\in J} v_j)\|\leqslant\|f\|\|\sum_{i\in I} v_i-\sum_{j\in J} v_j\|\leqslant\epsilon\|f\|. \tag{12.454}$$

Donc pour tout $\epsilon>0$ nous avons

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i)-\sum_{i\in I} f(v_i)\|\leqslant\epsilon(1+\|f\|). \tag{12.455}$$

D'où l'égalité (12.450). □

12.12 Liens entre différents types de sommabilité

Une grande partie du jeu est maintenant de trouver des liens entre $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ (définition 12.140), $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k$ dans les cas où la suite (a_n) est sommable absolument sommable, normalement sommable ou uniformément sommable.

PROPooYLCRooOXsOkb

Proposition 12.160 ([1]).
Soit un espace topologique X et un espace vectoriel normé V. Soit une suite de fonctions $(f_n\colon X\to V)_{n\in\mathbb{Z}}$.

ITEMooKBVSooPeUnSa
(1) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable si et seulement si la suite des sommes partielles est uniformément convergente (définition 12.129).

ITEMooAASMooIRSIgr
(2) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable vers F, alors pour tout $x\in X$, nous avons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)=F(x), \tag{12.456}$$

c'est-à-dire que nous avons convergence ponctuelle de la suite des sommes partielles.

Démonstration. Pour (1), nous considérons la suite des sommes partielles $s_n=\sum_{k=-n}^{n} f_n$. La condition d'uniforme sommabilité de la suite est (12.362) : $\lim_{N\to\infty}\|s_n-F\|_\infty=0$. La condition d'uniforme convergence des sommes partielles vers F est (12.360) ; c'est la même.

Pour (2), nous supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable vers F. En ce qui concerne la convergence ponctuelle, soit $x\in X$. Nous avons

$$\lim_{N\to\infty}\|s_n(x)-F(x)\|\leqslant\lim_{N\to\infty}\|s_n-F\|_\infty=0. \tag{12.457}$$

□

[75] Définition 12.140.

12.12.0.1 Critère de Cauchy pour les séries

PROPooNNMFooUHMcSE

Proposition 12.161 ([1]).
Soit une suite (u_n) dans un espace de Banach telle que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$. Alors

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=p}^{q} u_k = 0, \tag{12.458}$$

plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que si $q \geqslant p \geqslant N$, alors

$$|\sum_{k=p}^{q} u_k| < \epsilon. \tag{12.459}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La suite des sommes partielles

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \tag{12.460}$$

est convergente dans $\mathbb{C}$ et est donc une suite de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geqslant N$, $|s_p - s_p| < \epsilon$ et donc tel que

$$|\sum_{k=p+1}^{q} u_k| < \epsilon. \tag{12.461}$$

□

12.12.0.2 Critère de Cauchy uniforme

Grosso modo, cela dit que si qu'une suite de Cauchy pour la norme uniforme est une suite uniformément convergente. Le fait que la suite converge fait partie du résultat et n'est pas une hypothèse. Ce critère sera utilisé pour montrer que $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ est complet, proposition 14.398.

PropNTEynwq

Proposition 12.162 (Critère de Cauchy uniforme[401]).
Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace topologique complet. La suite de fonctions $f_n \colon X \to Y$ converge uniformément sur A si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{12.462}$$

pour tout $x \in A$.

Démonstration. Si $f_n \xrightarrow{unif} f$ alors le critère est satisfait ; c'est dans l'autre sens que la preuve est intéressante.

Soit donc une suite de fonctions satisfaisant au critère et montrons qu'elle converge uniformément. Pour tout $x \in X$ la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans l'espace complet Y ; nous avons donc convergence ponctuelle $f_n \to f$. Nous devons prouver que cette convergence est uniforme. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{12.463}$$

pour tout $x \in X$. Si nous nous fixons un tel k et un $x \in A$ nous considérons l'inégalité

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{12.464}$$

qui est vraie pour tout l. En passant à la limite $l \to \infty$ (limite qui commute avec la fonction distance par définition de la topologie) nous avons

$$d\big(f_k(x), f(x)\big) \leqslant \epsilon. \tag{12.465}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $x \in X$, cela signifie que $f_n \xrightarrow{unif} f$. □

PROPooEBYWooOXUwry

Proposition 12.163 (Critère de Cauchy uniforme pour les séries[402]).
Soit un ensemble X et un espace vectoriel normé V. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications $f_n \colon X \to V$ est uniformément sommable sur X si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q \geqslant N$, alors pour tout $x \in X$ nous avons

$$\big|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\big| < \epsilon. \tag{12.466}$$

Démonstration. Nous considérons les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Nous avons équivalence entre :

(1) La sa suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément sommable

(2) la suite des sommes partielles converge uniformément sur X

(3) la suite des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme pour les suites (proposition 12.162)

(4) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q \geqslant N$, nous avons $d\big(s_p(x), s_q(x)\big) < \epsilon$.

Dans le cas d'un espace normé, la dernière condition signifie

$$d\big(s_p(x) - s_q(x)\big) = \|s_p(x) - s_q(x)\| = \| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\|. \tag{12.467}$$

□

LEMooJZTBooIopLok

Lemme 12.164.
Soient un espace topologique X, un espace vectoriel normé, et une suite de fonctions $f_n : X \to V$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement sommable[76]*, alors elle est uniformément sommable.*

Démonstration. Nous allons montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de la proposition 12.163. Soit $\epsilon > 0$. La normale sommabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dit que la suite des sommes partielles $t_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty$ converge dans $\mathbb{R}$. Étant donné le théorème 9.360, nous savons que $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$, alors $|t_p - t_q| < \epsilon$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|_\infty < \epsilon. \tag{12.468}$$

Avec ces mêmes N, p, q nous avons

$$|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \|f_k\|_\infty < \epsilon. \tag{12.469}$$

□

PropAKCusNM

Proposition 12.165.
Une série absolument convergente dans un espace de Banach[77] *y converge au sens usuel.*

Démonstration. Soit (a_k) une suite dans un espace vectoriel normé complet dont la série converge absolument. Nous allons montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Cela suffira à montrer sa convergence par hypothèse de complétude.

Nous avons

$$\|s_p - s_l\| = \| \sum_{k=l+1}^{p} a_k\| \leqslant \sum_{k=l+1}^{p} \|a_k\| = \bar{s}_p - \bar{s}_l \tag{12.470}$$

où $\bar{s}_n = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|$ est la suite des sommes partielles de la série des normes (qui converge). Vu que la suite $(\bar{s}_n)$ converge dans $\mathbb{R}$, elle y est de Cauchy par la proposition 4.22. Donc il existe un N tel que $p, l > N$ implique

$$\|s_p - s_l\| = \bar{s}_p - \bar{s}_l \leqslant \epsilon. \tag{12.471}$$

Cela signifie que (s_n) est une suite de Cauchy et donc convergente. □

Exemple 12.166 (Si l'espace n'est pas complet[1])**.**
Dans un espace qui n'est pas complet, il est possible de construire un série qui converge absolument sans converger au sens usuel.

Nous allons trouver dans $\mathbb{Q}$ une série qui converge simplement vers $\sqrt{2}$ (et donc ne converge pas dans $\mathbb{Q}$) mais absolument vers 4.

La base est que si $A, B \in \mathbb{Q}$ avec $A < B$ il est possible de résoudre

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = A & \text{(12.472a)} \\ |r_1| + |r_2| = B & \text{(12.472b)} \end{cases}$$

[76] Définition 12.131

[77] Un espace vectoriel normé complet. Typiquement $\mathbb{R}$.

pour $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Ce n'est pas très compliqué : la solution est $r_1 = (A+B)/2$ et $r_2 = (A-B)/2$.

Nous considérons l'espace $\mathbb{Q}$ qui n'est pas complet dans $\mathbb{R}$. Soit une série (a_k) dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2}$ (convergence dans $\mathbb{R}$) nous nommons (s_k) la suite des ses sommes partielles. Soit aussi la suite (b_k) qui converge vers 4 (zéro serait encore plus facile mais bon, juste pour faire un peu de généralité).

Nous supposons que $a_k < b_k$ pour tout k et que les deux suites sont constituées de rationnels positifs. Nous nommons (s_k) et (s'_k) les sommes partielles. En particulier $s_n < s'_n$ et ce sont des suites croissantes.

Nous savons comment trouver $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $r_1 + r_2 = s_1$ et $|r_1| + |r_2| = s'_1$. Par récurrence, si nous savons $r_1, \dots, r_k$ tels que

$$\begin{cases} r_1 + \dots + r_k = s_n & (12.473a) \\ |r_1| + \dots + |r_k| = s'_n & (12.473b) \end{cases}$$

(avec, soit dit en passant $k = 2n$), alors nous pouvons trouver des rationnels r_{k+1}, r_{k+2} tels que

$$\begin{cases} r_1 + \dots + r_k + r_{k+1} + r_{k+2} = s_{n+1} & (12.474a) \\ |r_1| + \dots + |r_k| + |r_{k+1}| + |r_{k+2}| = s'_{n+1}, & (12.474b) \end{cases}$$

en effet il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} r_{k+1} + r_{k+2} = s_{n+1} - r_1 - \dots - r_k = s_{n+1} - s_n > 0 & (12.475a) \\ |r_{k+1}| + |r_{k+2}| = s'_{n+1} - |r_1| - \dots - |r_k| = s'_{n+1} - s'_n > 0. & (12.475b) \end{cases}$$

Cela se résout comme ci-dessus. Au final nous pouvons construire une suite (r_k) dans $\mathbb{Q}$ telle que

$$\sum_{k=0}^{2n} r_k = s_n \tag{12.476}$$

et

$$\sum_{k=0}^{2n} |r_k| = s'_n. \tag{12.477}$$

△

Remarque 12.167.
Nous savons que sur les espaces vectoriels de dimension finie toutes les normes sont équivalentes (théorème 12.67). La notion de convergence de série ne dépend alors pas du choix de la norme. Il n'en est pas de même sur les espaces de dimension infinie. Une série peut converger pour une norme mais pas pour une autre.

LEMooTXMGooQyPwGi

Lemme 12.168 (Critère de Cauchy[1])**.**
Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $a_n \geqslant 0$ pour tout n. Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ converge, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que si $p > q > N$, alors

$$\sum_{p\leqslant|k|<q} a_k < \epsilon. \tag{12.478}$$

Démonstration. Nous posons $S_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k$. L'hypothèse est que suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donc elle est de Cauchy par le théorème 9.360(2). Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$ alors $|S_p - S_q| < \epsilon$. Donc notre cas, ça donne

$$|\sum_{p\leqslant|k|<q} a_k| < \epsilon, \tag{12.479}$$

et comme les a_k sont positifs, nous pouvons supprimer la valeur absolue. □

PROPooAMKFooFnjOwI

Proposition 12.169 (Test M de Weierstrass[1, 403])**.**
Soit un ensemble X et un espace vectoriel normé V. Nous considérons une suite de fonctions $f_n : X \to V$ indexée par $n \in \mathbb{Z}$. Nous supposons qu'il existe des $M_n \in \mathbb{R}$ tels que

ITEMooTKDBooXiCqaH

(1) $\|f_n(x)\| \leqslant M_n$ pour tout $x \in X$,

ITEMooVQGCooIuznHD

(2) La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ converge.

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k(x)$ converge vers un nombre que nous notons $F(x)$.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable vers F et absolument sommable.

Démonstration. Nous considérons les fonctions $S_n = \sum_{k=-n}^{n} f_k$. Par hypothèse $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = F(x)$ pour tout $x \in X$.

(1) **Uniformément sommable** Nous vérifions la définition 12.132 :

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - F\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|S_n(x) - F(x)\| \tag{12.480a}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|S_n(x) - \lim_{m\to\infty} S_m(x)\| \tag{12.480b}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \lim_{m\to\infty} \|S_n(x) - S_m(x)\| \qquad \|.\| \text{ est continue} \tag{12.480c}$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \lim_{m\to\infty} \epsilon \tag{12.480d}$$
$$= \epsilon. \tag{12.480e}$$

(2) **Absolument sommable** Nous posons $g_n(x) = \|f_n(x)\|$ qui est une suite d'applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette suite vérifie manifestement les conditions pour que le point (1) soit valide. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément sommable et nous notons $G\colon X \to \mathbb{R}$ sa somme. En particulier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x) = G(x). \tag{12.481}$$

□

PROPooGFBBooNpczQo

Proposition 12.170 (Test M de Weierstrass[1, 403]).
Soit un ensemble X et un espace de Banach V. Nous considérons une suite de fonctions $f_n\colon X \to V$ indexée par $n \in \mathbb{Z}$. Nous supposons qu'il existe des $M_n \in \mathbb{R}$ tels que

(1) $\|f_n(x)\| \leqslant M_n$ pour tout $x \in X$,

(2) La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ converge.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est uniformément et absolument sommable.

Démonstration. Nous posons $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k(x)$. Soit $\epsilon > 0$. La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ converge. Le critère de Cauchy 12.168 nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que si $p > q > N$ alors $\sum_{p\leqslant|k|<q} M_k < \epsilon$. Pour de tels N, p, q nous avons

$$|S_p(x) - S_q(x)| = |\sum_{p\leqslant|k|<q} f_k(x)| \leqslant \sum_{p\leqslant|k|<q} |f_k(x)| \leqslant \sum_{p\leqslant|k|<q} M_k < \epsilon. \tag{12.482}$$

Donc (pour chaque x séparément) la suite $\big(S_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans V. Étant donné que V est complet, nous avons une limite que nous nommons $F(x)$.

Nous sommes maintenant dans les hypothèses de la proposition 12.169. □

PROPooZMLAooCUEqQK

Proposition 12.171 (Sommabilité absolue et sommabilité[1]).
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite dans un espace vectoriel normé V. Nous supposons que

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument sommable,

(2) nous avons la convergence simple[78] *$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k = a$.*

Alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k = a \tag{12.483}$$

où $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$ est la somme de la définition 12.140.

Démonstration. Nous prouvons que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k = a$ en suivant la définition 12.140. Soit $\epsilon > 0$.

Soit $N_1 > 0$ tel que si $p < q < N_1$ nous avons $\sum_{p\leqslant|k|<q} \|a_k\| < \epsilon$. Soit $N_2 > 0$ tel que $\|\sum_{k=-n}^{n} a_k - a\| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N_2$. Nous considérons $N > \max\{N_1, N_2\}$, et $J_0 = \{-N, \dots, N\}$.

Soit une partie finie K de $\mathbb{Z}$ telle que $J_0 \subset K$. Nous allons montrer que $\|\sum_{j\in K} a_j - a\| < \epsilon$.

[78] Si V est de Banach, cette condition est vérifiée par la proposition 12.165.

Pour cela, nous considérons la partie $K_0 = \{-\max(|K|), \max(|K|)\}$, c'est-à-dire que K_0 est symétrique et « rebouche les trous » laissés par K et nous calculons

$$\| \sum_{j\in K} a_j - a\| \leqslant \| \sum_{j\in K} a_j - \sum_{j\in K_0} a_j\| + \| \sum_{j\in K_0} a_j - a\|. \tag{12.484}$$

Pour le second terme, vu que $M > N > N_2$ nous avons

$$\| \sum_{j\in K_0} a_j - a\| = \| \sum_{j=-M}^{M} a_j - a\| < \epsilon. \tag{12.485}$$

En ce qui concerne le premier terme

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j\in K} a_j - \sum_{j\in K_0} a_j\| &= \| \sum_{j\in K_0\setminus K} a_j\| && \text{(12.486a)}\\
&\leqslant \sum_{j\in K_0\setminus K} \|a_j\| && \text{(12.486b)}\\
&\leqslant \sum_{j=-M}^{-} N\|a_j\| + \sum_{j=N}^{M} \|a_j\| && \text{(12.486c)}\\
&= \sum_{N\leqslant|k|\leqslant M} \|a_j\| && \text{(12.486d)}\\
&< \epsilon. && \text{(12.486e)}
\end{aligned}$$

Au final nous avons prouvé que si N est suffisamment grand, en posant $J_0 = \{-N, \dots, N\}$, et en prenant n'importe que K fini dans $\mathbb{Z}$ tel que $J_0 \subset K$, nous avons $\| \sum_{j\in K} a_j - a\| < 2\epsilon$. □

12.12.1 Séries entières

LEMooKMCIooItDMRo

Lemme 12.172 ([1]).
Soit un groupe additif $(G, +)$. Si $a\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to G$ alors

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a(n,k) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a(n,k) \tag{12.487}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a(n,k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a(n,k) \tag{12.488}$$

PROPooUEBWooUQBQvP

Proposition 12.173 (Somme de séries entières).
À propos de sommes de séries.

ITEMooDHVSooBkVWOP

(1) Si les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergent, alors $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ converge et

$$\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k. \tag{12.489}$$

ITEMooJUZTooUzSKxe

(2) Si $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ diverge, alors $\sum_k (a_k + b_k)z^k$ diverge.

Démonstration. Supposons que $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ convergent tous deux. Alors nous avons pour tout N :

$$\sum_{k=0}^{N}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=0}^{N} b_k. \tag{12.490}$$

Mais si deux limites existent alors la somme commute avec la limite. C'est le cas pour la limite $N \to \infty$, donc

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}(a_k + b_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \tag{12.491}$$

Cela prouve le point (1). En ce qui concerne le point (2), si la série entière $\sum_k (a_k + b_k)z^k$ convergeait, la somme $\sum_k a_k z^k - \sum_k (a_k + b_k)z^k$ convergerait, et elle vaudrait $-\sum_k b_k z^k$. □

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 12.174
Je n'ai pas vérifié la proposition 12.175. Écrivez-moi pour m'envoyer une preuve, ou pour me dire qu'elle n'est pas correcte. En tout cas ne la prenez pas comme vraie trop facilement.

PROPooQCOBooAMnljj

Proposition 12.175.
Si $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n). \tag{12.492}$$

Ici les sommes vallent éventuellement ∞.

12.12.2 Somme téléscopique

PROPooQLOUooTDWfFF

Proposition 12.176 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé E. Soit une série convergente $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_0. \tag{12.493}$$

Démonstration. Pour chaque N nous avons $\sum_{k=0}^{N}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{N+1}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = \lim_{N\to\infty}(a_0 - a_{N+1}). \tag{12.494}$$

Vu que le terme général tend vers zéro (proposition 12.133), nous avons le résultat annoncé. □

12.12.3 Distributivité

Nous allons parler d'exponentielle de matrice. Avant cela, quelques propriétés qui sont valables sur des algèbres normées. Le principal exemple que nous avons en tête est $\mathbb{A} = \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$.

PROPooMZZQooEhQsgQ

Proposition 12.177 (Distributivité de la somme infinie[1]).
Soit une algèbre normée $\mathbb{A}$. Soient une suite d'éléments $A_k \in \mathbb{A}$ et un élément B.

ITEMooVWMQooLqerEc

(1) Si la somme $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge, alors

$$B\sum_k A_k = \sum_k (BA_k). \tag{12.495}$$

EQooPOFWooGNWIUF

ITEMooRLRYooQodIkq

(2) Si la somme $\sum_k A_k$ ne converge pas, alors la somme $\sum_k (BA_k)$ ne converge pas non plus.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$\| \sum_{k=0}^{N} BA_k - B\sum_{k=0}^{\infty} A_k \| = \| B \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \| \tag{12.496a}$$

SUBEQooDTNAooWpXQKP

$$\leqslant \|B\| \| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \| \tag{12.496b}$$

SUBEQooJPSJooAqXtQJ

Justifications :

- Pour (12.496a). Linéarité du produit matriciel.
- Pour (12.496b). La norme est une norme d'algèbre[79].

À droite, la limite $N \to \infty$ donne zéro car $\|B\|$ est un simple nombre, et $\| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k \|$ est une queue de suite convergente par hypothèse.

Nous avons donc bien convergence

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} BA_k = B \sum_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{12.497}$$

En ce qui concerne le point (2), si la somme $\sum_k (BA_k)$ convergeait, nous pourrions utiliser la partie (1) avec $1/B$ au lieu de B et nous aurions la convergence de $\sum_k A_k$. □

[79] Définition 12.87. Pour rappel, la norme opérateur en est une par le lemme 12.97.

12.12.4 Produit de Cauchy

PROPooFMEXooCNjdhS

Proposition 12.178 (Produit de Cauchy dans une algèbre normée[1])**.**
Soient une algèbre normée $\mathbb{A}$, un élément $A \in \mathbb{A}$, ainsi que des séries convergentes $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ et $\sum_{l=0}^{\infty} b_l A^l$. Alors

$$\left(\sum_k a_k A^k\right)\left(\sum_l b_l A^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right) A^n. \tag{12.498}$$

Démonstration. Un calcul :

$$\left(\sum_k a_k A^k\right)\left(\sum_l b_l A^l\right) = \sum_k \left(\sum_l b_l A^l\right) a_k A^k \tag{12.499a}$$

SUBEQooFAECooWECaNW

$$= \sum_k \left(\sum_l b_l a_k A^{l+k}\right) \tag{12.499b}$$

SUBEQooDZTHooMwmKxJ

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \left(\lim_{L\to\infty} \sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l}\right) \tag{12.499c}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \lim_{L\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l} \tag{12.499d}$$

SUBEQooISSHooJsyMTv

$$= \lim_{K\to\infty} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{K+L} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^n \tag{12.499e}$$

SUBEQooAWUQooZCHIXH

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{12.499f}$$

SUBEQooUVOBooSPGivA

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{12.499g}$$

SUBEQooCGRGooGIDCYv

Justifications :

- Pour (12.499a), la proposition 12.177 nous permet d'entrer l'élément $\sum_l b_l A^l \in \mathbb{A}$ dans la somme sur k.
- Pour (12.499b), c'est la même chose.
- Pour (12.499d), la somme sur k étant finie (pour chaque K), elle commute avec la limite sur L.
- Pour (12.499e), c'est une manipulation de sommes finies. On regroupe les termes selon les puissances de A.
- Pour (12.499f), c'est effectuer la limite sur L pour K fixé.
- Pour (12.499g), l'expression dans la limite sur K ne dépend pas de K. Donc nous pouvons simplement supprimer la limite.

□

12.13 Série réelle

secseries

La notion de série formalise le concept de somme infinie[80]. L'absence de certaines propriétés de ces objets (problèmes de commutativité et même d'associativité) incite à la prudence et montre à quel point une définition précise est importante.

12.13.1 Critères de convergence absolue

Étant donné le terme général d'une série, il est souvent –dans les cas qui nous intéressent– difficile de déterminer la somme de la série. L'exemple de la série géométrique est particulier[81], puisqu'on connaît une formule pour chaque somme partielle, mais pour l'exemple des séries de Riemann il n'y a aucune formule simple pour un α général. D'où l'intérêt d'avoir des critères de convergence ne nécessitant aucune connaissance de l'éventuelle limite de la série.

[80] La caractérisation qui nous intéresse est celle de la proposition 12.144.
[81] Voir la proposition 12.186.

LemgHWyfG

Lemme 12.179 (Critère de comparaison)**.**
Soient $\sum_i a_i$ et $\sum_j b_j$ deux séries à termes positifs vérifiant

$$0 \leqslant a_i \leqslant b_i$$

alors

(1) si $\sum_i a_i$ diverge, alors $\sum_j b_j$ diverge,

ITEMooBBWTooYDHnuH

(2) si $\sum_j b_j$ converge, alors $\sum_i a_i$ converge (absolument).

PROPooEEACooOYmtxd

Proposition 12.180 (Critère d'équivalence[388])**.**
Soient $\sum_i a_i$ et $\sum_j b_j$ deux séries à termes positifs. Supposons l'existence de la limite (éventuellement infinie) suivante

$$\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = \alpha \tag{12.500}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \infty$, alors

$$\sum_i a_i \text{ converge} \iff \sum_j b_j \text{ converge}, \tag{12.501}$$

(2) si $\alpha = 0$ et $\sum_j b_j$ converge, alors $\sum_i a_i$ converge (absolument),

(3) si $\alpha = +\infty$ et $\sum_j b_j$ diverge, alors $\sum_i a_i$ diverge.

Démonstration. (1) Le fait que la suite a_n/b_n converge vers α signifie que tant sa limite supérieure que sa limite inférieure convergent vers α. En particulier la suite $\frac{a_n}{b_n}$ est bornée vers le haut et vers le bas. À partir d'un certain rang N, il existe M tel que

$$\frac{a_n}{b_n} < M \tag{12.502}$$

et il existe m tel que

$$\frac{a_n}{b_n} > m. \tag{12.503}$$

Nous avons donc $a_n < Mb_n$ et $a_n > mb_n$. La série de (a_n) converge donc si et seulement si la série de (b_n) converge.

(2) Si $\alpha = 0$, cela signifie que pour tout ϵ, il existe un rang tel que $\frac{a_n}{b_n} < \epsilon$, et donc tel que $a_n < \epsilon b_k$. La série de (a_i) converge donc dès que la série de (b_i) converge.

(3) Pour tout M, il existe un rang dans la suite à partir duquel on a $\frac{a_i}{b_i} > M$, et donc $a_k > Mb_k$. Si la série de (b_k) diverge, la série de (a_k) doit également diverger.

□

PropOXKUooQmAaJX

Proposition 12.181 (Critère du quotient[404])**.**
Soit $\sum_i a_i$ une série. Supposons l'existence de la limite (éventuellement infinie) suivante

$$\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = L \tag{12.504}$$

avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) si $L < 1$, la série converge absolument,

(2) si $L > 1$, la série diverge,

(3) si $L = 1$ le critère échoue : il existe des exemples de convergence et des exemples de divergence.

Démonstration. (1) Soit b tel que $L < b < 1$. À partir d'un certain rang K, on a $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < b$. En particulier,

$$|a_{K+1}| < b|a_K|, \tag{12.505}$$

et pour a_{K+2} nous avons

$$|a_{K+2}| < b|a_{K+1}| < b^2|a_K|. \tag{12.506}$$

Au final,

$$|a_{K+n}| < b^n|a_K|. \tag{12.507}$$

Étant donné que la série $\sum_{n\geqslant K} b^n$ converge (parce que $b<1$), la queue de suite $\sum_{i\geqslant K} a_i$ converge, et par conséquent la suite au complet converge.

(2) Si $L>1$, on a

$$|a_K| < |a_{K+1}| < |a_{K+2}| < \dots \tag{12.508}$$

Il est donc impossible que la suite (a_i) converge vers zéro. La série ne peut donc pas converger.

(3) Par exemple la suite harmonique $a_n = \frac{1}{n}$ vérifie $L=1$, mais la série ne converge pas. Par contre, la suite $a_n = \frac{1}{n^2}$ vérifie aussi le critère avec $L=1$ tandis que la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge.

□

Proposition 12.182 (Critère de la racine[388])**.**
Soit $\sum_i a_i$ une série, et considérons

$$\limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = L$$

avec $L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Alors

(1) si $L<1$, la série converge absolument,

(2) si $L>1$, la série diverge,

(3) si $L=1$ le critère échoue.

Démonstration. (1) Si $L<1$, il existe un $r\in\,]0,1[$ tel que $|a_n|^{1/n} < r$ pour les grands n. Dans ce cas, $|a_n| < r^n$, et la série converge absolument parce que la série $\sum_n r^n$ converge du fait que $r<1$.

(2) Si $L>1$, il existe un $r>1$ tel que $|a_n|^{1/n} > r > 1$. Cela fait que $|a_n|$ prend des valeurs plus grandes que n pour une infinité de termes. Le terme général a_n ne peut donc pas être une suite convergente. Par conséquent la suite diverge au sens où elle ne converge pas.

□

12.13.2 Critères de convergence simple

Les critères de comparaison, d'équivalence, du quotient et de la racine sont des critères de convergence absolue. Pour conclure à une convergence simple qui n'est pas une convergence absolue, le critère d'Abel sera notre outil principal.

12.13.2.1 Critère d'Abel

Proposition 12.183 (Critère d'Abel)**.**
Soit la série $\sum_i c_i z_i$ avec

(1) (c_i) est une suite réelle décroissante qui tend vers zéro,

(2) (z_i) est une suite dans $\mathbb{C}$ dont la suite des sommes partielles est bornée dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un $M>0$ tel que pour tout n,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant M. \tag{12.509}$$

Alors la série $\sum_i c_i z_i$ est convergente.

Remarquons que ce critère ne donne pas de convergence absolue.

12.13.3 Quelques séries usuelles

SPRSHCooDATWhoKZjXLvlf

Proposition 12.184 (Série harmonique)**.**
*La **série harmonique** converge vers l'infini*[82] *:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \tag{12.510}$$

Démonstration. Considérons la sommes partielles $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Considérons la différence

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \tag{12.511}$$

Cette somme contient $n+1$ termes, tous plus grands que $\frac{1}{2n}$, donc

$$H_{2n} - H_n > n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{12.512}$$

Nous prouvons donc par récurrence que $H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$. D'abord pour $n = 1$ nous avons

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2}. \tag{12.513}$$

Ensuite la récurrence :

$$H_{2^n} > H_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}. \tag{12.514}$$

□

12.185.
À quel point la série harmonique diverge-t-elle lentement ? Allez regarder
https://www.youtube.com/watch?v=_AtkIpi6KP0.

PROPooWOWQooWbzukS

Proposition-Définition 12.186 (Série géométrique)**.**
*La **série géométrique** de raison $q \in \mathbb{C}$ est*

EqZQTGooIWEFxL

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i. \tag{12.515}$$

ITEMooAFAMooGuXqBm

(1) Elle converge si et seulement si $|q| < 1$.

ITEMooBJHBooBMEmiG

(2) Si $|q| < 1$ alors

EqRGkBhrX

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{12.516}$$

ITEMooVZHKooNGpDkx

(3) Si la somme commence en $n = 1$ au lieu de $n = 0$ alors

EqPZOWooMdSRyY

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}. \tag{12.517}$$

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1) et (2)** La somme partielle est déjà donnée dans le lemme 4.116 :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}. \tag{12.518}$$

En vertu de (11.121), la limite $\lim_{N\to\infty} S_N$ existe si et seulement si $|q| \leqslant 1$ et dans ce cas nous avons le résultat parce que $q^{N+1} \to 0$.

(2) **Pour (3)** Il s'agit seulement du calcul

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}. \tag{12.519}$$

[82] Vous pouvez aussi dire qu'elle diverge, mais si on met la bonne topologie sur $\mathbb{R}$, la convergence vers $+\infty$ est plus précise que la non-convergence.

□

Un cas particulier de la formule (4.174) est le calcul de $\sum_{j=1}^{N} q^{-j}$ bien utile lorsque l'on joue avec des nombres binaires (voir l'exemple 36.12). Nous avons

$$\sum_{j=1}^{N} q^{-j} = \sum_{j=0}^{N} q^{-j} - 1 = \frac{1-q^{-N}}{q-1}. \tag{12.520}$$

EQooFMBAooEJkHWT

ExIJMHooOEUKfj

Lemme 12.187 (Série exponentielle)**.**
La série

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}. \tag{12.521}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Elle est nommée . Pour tout savoir de l'exponentielle et de ses variations, voir le thème 50.

Démonstration. Si $a_k = t^k/k!$ alors $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{t}{k}$ dont la limite $k \to \infty$ est zéro (quel que soit t). En vertu du critère du quotient 12.181 la série exponentielle converge (absolument) pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

LEMooCVIQooUtuzgE

Lemme 12.188 (Série arithmético-géométrique[405])**.**
*Une **suite arithmético-géométrique** est une suite vérifiant pour tout n la relation*

$$u_{n+1} = au_n + b \tag{12.522}$$

avec a et b non nuls. Nous nommons u_0 le premier terme.

(1) Si la suite possède une limite, alors elle est donnée par

$$l = \frac{b}{1-a}. \tag{12.523}$$

EQooMZSSooQWpZUp

(2) Pour tout n nous avons la formule

$$u_n = a^n(u_0 - l) + l. \tag{12.524}$$

Démonstration. Si la suite possède une limite, cette dernière doit résoudre $l = al + b$, et donc être égale à (12.523).

Il n'est pas très compliqué de trouver le terme général de la suite en fonction de a et de b. Il suffit de considérer la suite $v_n = u_n - l$, et de remarquer que cette suite est géométrique :

$$v_{n+1} = av_n. \tag{12.525}$$

Par conséquent $v_n = a^n v_0$, ce qui donne pour la suite (u_n) la formule

$$u_n = a^n(u_0 - l) + l. \tag{12.526}$$

□

LEMooKDHPooPlFTIT

Lemme 12.189 ([406])**.**
Nous avons :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1}. \tag{12.527}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{12.528}$$

Démonstration. Nous posons

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \tag{12.529a}$$

$$g(n) = \frac{n}{n+1} \tag{12.529b}$$

et nous montrons par récurrence que $f(n) = g(n)$. Pour $n = 1$ nous avons $f(1) = g(1) = \frac{1}{2}$.

Nous supposons que $f(n)=g(n)$ et nous prouvons que $f(n+1)=g(n+1)$. Facile :

$$f(n+1)=f(n)+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{12.530a}$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{12.530b}$$
$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \tag{12.530c}$$
$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \tag{12.530d}$$
$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \tag{12.530e}$$
$$=\frac{n+1}{n+2} \tag{12.530f}$$
$$=g(n+1). \tag{12.530g}$$

En ce qui concerne la seconde formule, par définition[83]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1. \tag{12.531}$$

□

12.13.4 Séries alternées

THOooOHANooHYfkII

Théorème 12.190 (Critère des séries alternées[372])**.**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante à limite nulle. Nous notons S_n la somme partielle de la série alternée : $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Alors

(1) les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes[84]*.*

ITEMooWNCXooWAYRdm

(2) La série $\sum_n(-1)^n a_n$ converge.

ITEMooWEPWooXhLMYL

(3) Si nous considérons le reste

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k, \tag{12.532}$$

nous avons

$$\operatorname{sgn}(R_n)=(-1)^{n+1} \tag{12.533a}$$
$$|R_n|\leqslant a_{n+1}. \tag{12.533b}$$

Démonstration. En termes de notations, nous allons écrire (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Nous notons (S_{2n}) la suite des termes pairs de cette suite. C'est donc la suite $n\mapsto S_{2n}$. Nous divisons en plusieurs morceaux.

(1) **S_{2n} est croissante** Nous avons simplement

$$S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+2}-a_{2n+1}\leqslant 0. \tag{12.534}$$

(2) **(S_{2n+1}) est décroissante** Même calcul.

(3) **Les suites (S_{2n}) et S_{2n+1} sont adjacentes** Nous avons simplement

$$S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}\to 0. \tag{12.535}$$

Nous concluons par le théorème des suites adjacentes 11.41 que les sous-suites des termes pairs et impairs sont convergentes et convergent vers la même limite.

[83] Définition d'une série, 12.123.
[84] Définition 11.40.

C'est le moment d'utiliser la proposition 11.42 qui convaincra la lectrice que (S_n) converge vers la même limite, que nous notons S. Le théorème des suites adjacentes nous dit encore que

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \tag{12.536}$$

et donc que $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$. Cela donne la majoration

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}. \tag{12.537}$$

Nous faisons le même genre de majorations pour R_{2n+1}. □

12.13.5 Moyenne de Cesàro

La moyenne de Cesàro est le premier pas dans la direction des supersommes[5] qui permettent de sommer des choses de moins en moins convergentes, jusqu'à sommer la fameuse série $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -1/12$.

DEFooLVRLooTeowkn

Définition 12.191.
*Si $a\colon \mathbb{N} \to V$ est une suite dans l'espace vectoriel V, alors sa **moyenne de Cesàro** est la limite (si elle existe) de la suite*

$$\sigma_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{12.538}$$

En un mot, c'est la limite des moyennes partielles.

LemyGjMqM

Lemme 12.192.
Si la suite (a_n) converge vers la limite ℓ alors la suite admet une moyenne de Cesàro qui vaudra ℓ.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n > N$. En remarquant que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell), \tag{12.539}$$

nous avons

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \ell\Big| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|a_k - \ell|\Big| + \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\underbrace{|a_k - \ell|}_{\leqslant\epsilon}\Big| \tag{12.540a}$$

$$\leqslant \epsilon + \frac{n - N - 1}{n}\epsilon \tag{12.540b}$$

$$\leqslant 2\epsilon. \tag{12.540c}$$

Dans ce calcul nous avons redéfini N de telle sorte que le premier terme soit inférieur à ϵ. □

12.13.6 Écriture décimale d'un réel

Nous avons déjà vu la fonction (2.142) qui permet d'écrire des naturels dans une base $b \geqslant 2$ donnée. Nous allons maintenant construire une fonction du même type, pour la partie décimale d'un réel.

NORMALooTZWYooPMgOIm

12.193.
Soit $b \geqslant 2$ un entier qui sera la base dans laquelle nous allons écrire les nombres. Nous considérons l'ensemble $\mathbb{D}_b$ des suites dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ qui n'ont pas une queue de suite uniquement formée de $b-1$. Autrement dit une suite (c_n) est dans $\mathbb{D}_b$ lorsque pour tout N, il existe $k > N$ tel que $c_k \neq b-1$. Associé à cet ensemble nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi_b\colon \mathbb{D}_b &\to [0,1[\\ c &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{b^n}.\end{aligned} \tag{12.541}$$

EqXXXooOTsCK

Lemme 12.194.
La fonction φ_b est bien définie au sens où elle converge et prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Démonstration. Tout se base sur la somme de la série géométrique (12.516) sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{b^k} = \frac{b}{b-1}. \tag{12.542}$$

EqWZGooYJgwl

La somme (12.541) est donc majorée par $\sum_n \frac{b-1}{b^n}$ qui converge.

Pour prouver que l'image de φ_b est bien $[0,1[$, nous savons qu'au moins un des c_n (en fait une infinité) est plus petit que $b-1$, donc nous avons la majoration stricte[85]

$$\varphi_b(c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = (b-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} - 1\right) = 1 \tag{12.543}$$

□

Le fait d'introduire l'ensemble $\mathbb{D}$ au lieu de l'ensemble de toutes les suites est justifié par la proposition suivante. Elle explique pourquoi un nombre possède au maximum deux écritures décimales distinctes et que ces deux sont obligatoirement de la forme, par exemple en base 10 :

$$0.34599999999\ldots = 0.34600000\ldots \tag{12.544}$$

mais qu'un nombre commençant par 0.347 ne peut pas être égal. C'est pour cela que dans la définition de $\mathbb{D}_b$ nous avons exclu les suites qui terminent par tout des $b-1$.

La proposition suivante complète ce qui est déjà dit dans le lemme 9.348.

PropSAOoofRlQR

Proposition 12.195.
Soit la fonction

$$\begin{aligned}\varphi\colon \{0,\ldots,b-1\}^{\mathbb{N}} &\to [0,1[\\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}.\end{aligned} \tag{12.545}$$

Si $\varphi(x)=\varphi(y)$ et si n_0 est le plus petit entier tel que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ alors soit

$$x_{n_0} - y_{n_0} = 1 \tag{12.546}$$

et $x_n = 0$, $y_n = b-1$ pour tout $n > n_0$, soit le contraire : $y_{n_0} - x_{n_0} = 1$ avec $y_n = 0$ et $x_n = b-1$ pour tout $n > n_0$.

Démonstration. Nous nous basons sur la formule (facilement dérivable depuis (12.542)) suivante :

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{b^k} = \frac{1}{b^{n_0+1}} \frac{b}{b-1}. \tag{12.547}$$

Nous avons

$$0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{b^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n} \geqslant \frac{x_{n_0} - y_{n_0}}{b^{n_0}} - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{x_{n_0} - y_{n_0} - 1}{b^{n_0}}. \tag{12.548}$$

Le dernier terme étant manifestement positif[86], il est nul et nous avons $x_{n_0} - y_{n_0} = 1$.

Nous avons donc maintenant

$$0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \frac{1}{b^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n}. \tag{12.549}$$

EqHWOootPnb

Nous majorons la dernière somme de la façon suivante, en supposant que $|x_n - y_n| \neq b-1$ pour un certain $n > n_0$:

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n}\right| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{b^n} < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = \frac{1}{b^{n_0}}. \tag{12.550}$$

Étant donné cette inégalité stricte, l'équation (12.549) ne peut pas être correcte (valoir zéro). Nous avons donc $|x_n - b_n| = b-1$ pour tout $n > n_0$. Donc pour chaque $n > n_0$ nous avons soit $x_n = 0$ et $y_n = b-1$, soit $a_n = b-1$ et $b_n = 0$. Pour conclure il faut encore prouver que le choix doit être le même pour tout n.

Nous nous mettons dans le cas $x_{n_0} - y_{n_0} = 1$; dans ce cas nous avons bien l'égalité (12.549) sans petites nuances de signes. Nous écrivons

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{b^n} = (b-1) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{(-1)^{s_n}}{b^n} \tag{12.551}$$

[85] Notez que la somme (12.541) commence à un tandis que la série géométrique (12.542) commence à zéro.

[86] C'est ici qu'intervient la subdivision entre le cas $x_{n_0} - y_{n_0} = 1$ ou le contraire. En effet si « ce dernier terme était manifestement *négatif* », il aurait fallu majorer avec de $1-b$ au lieu de $1-b$.

où s_n est pair ou impair suivant que $x_n = 0$, $y_n = b-1$ ou le contraire. Si un des $(-1)^{s_n}$ est pas -1 alors nous avons l'inégalité stricte

$$(b-1)\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{(-1)^{s_n}}{b^n} > (b-1)\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{-1}{b^n} = -\frac{1}{b^{n_0}}. \tag{12.552}$$

Dans ce cas il est impossible d'avoir $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$. Nous en concluons que $(-1)^{s_n}$ est toujours -1, c'est-à-dire $x_n - y_n = 1 - b$, ce qui laisse comme seule possibilité $x_n = 0$ et $y_n = b-1$. □

ThoRXBootpUpd

Théorème 12.196.
L'application $\varphi_b\colon \mathbb{D}_b \to [0,1[$ est bijective.

Démonstration. En ce qui concerne l'injection, nous savons de la proposition 12.195 que si $\varphi_b(x) = \varphi_b(y)$ pour $x, y \in \{0,\dots,b-1\}^{\mathbb{N}}$, alors soit x soit y a une queue de suite composée uniquement de $b-1$, ce qui est exclu dans $\mathbb{D}_b$. Nous en déduisons que φ_b est bien injective en prenant $\mathbb{D}_b$ comme ensemble départ.

La partie lourde est la surjectivité. Nous prenons $x \in [0,1[$ et nous allons construire par récurrence une suite $a \in \mathbb{D}_b$ telle que $\varphi_b(a) = x$. Si il existe $a_1 \in \{0,\dots,b-1\}$ tel que $x = a_1/b$ alors nous prenons la suite $(a_1, 0, \dots,)$ et nous avons évidemment $\varphi(a) = x$. Sinon il existe $a_1 \in \{0,\dots,b-1\}$ tel que

$$\frac{a_1}{b} < x < \frac{a_1+1}{b} \tag{12.553}$$

parce que les autres possibilités pour x sont dans l'ensemble $[0,1[\setminus \{\frac{k}{b}\}_{k=0,\dots,b-1}$ que nous subdivisons en

$$]0,\frac{1}{b}[\cup]\frac{1}{b},\frac{2}{b}[\cup\dots\cup]\frac{b-1}{b},1[. \tag{12.554}$$

Pour la récurrence nous supposons avoir trouvé $a_1,\dots,a_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b^k} < x < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b^k} + \frac{a_n+1}{b^n}. \tag{12.555}$$

Encore une fois si il existe $a_{n+1} \in \{0,\dots,b-1\}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{b^k} = x$ alors nous prenons ce a_{n+1} et nous complétons la suite avec des zéros pour avoir $\varphi(a) = x$. Sinon , pour simplifier les notations nous notons $x' = x - \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b^k}$ et nous avons

$$0 < x' < \frac{a_n+1}{b^n}. \tag{12.556}$$

Le nombre x' est forcément dans un des intervalles

$$]\frac{s}{b^{n+1}},\frac{s+1}{b^{n+1}}[\tag{12.557}$$

avec $s \in \{0,\dots,b-1\}$. Nous prenons le s correspondant à x' comme a_{n+1}. Dans ce cas nous avons

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{b^k} < x < \sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{b^k} + \frac{1}{b^{n+1}}. \tag{12.558}$$

Note : les deux inégalités sont strictes. La première parce que si il y avait égalité, nous nous serions déjà arrêté en complétant avec des zéros. La seconde parce que

$$\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{a_k}{b^k} \leqslant \sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{b-1}{b^k} = \frac{1}{b^{n+1}} \tag{12.559}$$

où l'égalité n'est possible que si $a_k = b-1$ pour tout $k \geqslant n+2$. Dans ce cas nous aurions eu

$$x = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b^k} + \frac{a_{n+1}+1}{b^{n+1}} \tag{12.560}$$

et nous aurions choisi le nombre a_{n+1} autrement et complété la suite par des zéros à partir de là. Notons que cela prouve au passage que la suite que nous sommes en train de construire est bien dans $\mathbb{D}_b$ parce qu'elle ne contiendra pas de queue de suite composée de $b-1$.

Ceci termine la construction par récurrence de la suite $a \in \mathbb{D}_b$. Par construction nous avons pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{b^k} \leqslant x \leqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{b^k} + \frac{1}{b^{N+1}}, \tag{12.561}$$

autrement dit : $\varphi_b(a_1,\dots,a_N)\in B(x,\frac{1}{b^{N+1}})$. Nous avons donc bien convergence

$$\lim_{N\to\infty}\varphi_b(a_1,\dots,a_N)=x \tag{12.562}$$

et l'application φ_b est surjective. □

L'application $\varphi_b^{-1}\colon [0,1[\to\mathbb{D}_b$ est la **décomposition décimale** en base b des nombres de $[0,1[$.

Tout cela nous permet de montrer entre autres que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Vu qu'il y a une bijection entre $[0,1[$ et $\mathbb{D}_b$, il suffit de prouver que $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable. De plus il suffit de démontrer que $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable pour un entier $b\geqslant 2$ donné.

PropNNHooYTVFw

Proposition 12.197 ([407]).
Il n'existe pas de surjection $\mathbb{N}\to\mathbb{D}_b$. Autrement dit $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable.

Démonstration. Nous prenons $b\neq 2$ pour des raisons qui seront claires plus tard. Soit $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{D}_b$. Pour $i\in\mathbb{N}$ nous notons

$$f(n)=(c_i^{(n)})_{i\geqslant 1}, \tag{12.563}$$

et nous définissons la suite

$$c_k=\begin{cases}0 & \text{si } c_k^{(k)}\neq 0\\ 1 & \text{si } c_k^{(k)}=0.\end{cases} \tag{12.564}$$

C'est une suite dans $\mathbb{D}_b$ parce que $b\neq 2$ et que la suite ne contient que des 0 et des 1. Mais nous n'avons $f(n)=c$ pour aucun $n\in\mathbb{N}$ parce que nous avons $c_n\neq f(n)_n$.

Si $b=2$ alors nous savons que $\mathbb{D}_2\sim[0,1[\sim\mathbb{D}_3$. Donc $\mathbb{D}_2\sim\mathbb{D}_3$ et $\mathbb{D}_2$ ne peut pas plus être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ que $\mathbb{D}_3$. □

Remarque 12.198.
Le cas de la base $b=2$ doit être fait à part parce que rien n'empêche d'avoir une queue de 1. Il y a alors toutefois moyen de se débrouiller en construisant la suite c de façon plus subtile. Si $b=2$ et $n\in\mathbb{N}$ alors $f(n)$ est une suite de 0 et 1 contenant une infinité de 0 (parce qu'il n'y a pas de queue de suite ne contenant que des 1). Nous construisons alors c de la façon suivante : d'abord nous recopions $f(0)$ jusqu'à son *deuxième* zéro que nous changeons en 1 ; nommons n_0 le rang de ce deuxième zéro. Ensuite nous recopions les éléments de $f(1)$ à partir du rang n_0+1 jusqu'au second zéro que nous changeons en 1, etc.

Le fait de prendre le deuxième zéro nous garantit que la suite c n'aura pas de queue de suite ne contenant que des 1.

Notons que cette construction s'adapte à tout b ; il suffit de prendre le second terme qui n'est pas $b-1$ et le remplacer par $b-1$.

Corolaire 12.199.
L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. L'ensemble $[0,1[$ est en bijection avec $\mathbb{D}_b$ que nous venons de prouver n'être pas dénombrable. □

12.13.7 Théorème de Banach-Steinhaus

LEMooPIPLooMppGSO

Lemme 12.200 ([408]).
Soient des espaces vectoriels normés X et Y ainsi qu'une application linéaire bornée $T\colon X\to Y$. Pour tout $a\in X$ et pour tout $r>0$ nous avons

$$\sup_{x\in B(a,r)}\|Tx\|\geqslant r\|T\| \tag{12.565}$$

Démonstration. Nous commençons avec $a=0$. En utilisant la définition 12.76 de la norme opérateur,

$$\|T\|=\sup_{x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{x\in B(0,r)}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant\frac{1}{r}\sup_{x\in B(0,r)}\|Tx\|. \tag{12.566}$$

Donc

$$\sup_{x\in B(0,r)}\|Tx\|\geqslant r\|T\|. \tag{12.567}$$

Il y a maintenant une astuce. Nous considérons un maximum :

SUBEQooPJPMooDkqRHs

$$\max\{\|T(a+x),\|T(a-x)\|\} \geqslant \frac{1}{2}\big(\|T(a+x)\|+\|T(a-x)\|\big) \tag{12.568a}$$

SUBEQooEZUUooVlKifn

$$\geqslant \frac{1}{2}\big(\|T(a+x)-T(a+x)\|\big) \tag{12.568b}$$

$$= \frac{1}{2}\|T(2x)\| \tag{12.568c}$$

$$= \|Tx\|. \tag{12.568d}$$

Justifications :

- Pour (12.568a), la moyenne est plus petite que le maximum.
- Pour (12.568b), inégalité triangulaire : $\|\alpha-\beta\| \leqslant \|\alpha\|+\|\beta\|$.

Si maintenant $y \in B(a,r)$, nous avons $y = a+x$ pour un certain $x \in B(0,r)$, donc

$$\sup_{y\in B(a,r)} \|Ty\| = \sup_{x\in B(0,r)} \|T(a+x)\| \tag{12.569a}$$

SUBEQooACJSooTHCAWs

$$= \sup_{x\in B(0,r)} \max\{\|T(a+x)\|,\|T(a-x)\|\} \tag{12.569b}$$

$$\geqslant \sup_{x\in B(0,r)} \|Tx\| \tag{12.569c}$$

$$\geqslant r\|T\|. \tag{12.569d}$$

Pour (12.569b), l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum n'est pas modifié fondamentalement si nous regroupons les éléments deux à deux en prenant le maximum : les éléments exclus sont majorés. □

Une version avec des seminormes sera le théorème 29.8.

THOooJHVNooIDDxyT

Théorème 12.201 (Théorème de Banach-Steinhaus[408])**.**
Soient un espace de Banach[87] *X et un espace vectoriel normé Y. Soit une famille $\mathcal{F}$ d'opérateurs linéaire bornés. Si pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty, \tag{12.570}$$

alors

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty. \tag{12.571}$$

Démonstration. Nous supposons que $\sup_{T\in\mathcal{F}}\|T\| = \infty$, de telle sorte que nous pouvons choisir une suite (T_n) dans $\mathcal{F}$ telle que $\|T_n\| \to \infty$. Cette suite peut diverger arbitrairement vite, et nous fixerons exactement cela plus tard.

Soit par ailleurs une suite $\alpha_n > 0$ d'éléments petits et tels que $\alpha_n \to 0$. Nous supposons que $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n < \infty$.

Si $a \in X$, le lemme 12.200 dit que

$$\sup_{x\in B(a,\alpha_n)} \|T_n x\| \geqslant \|T_n\|\alpha_n. \tag{12.572}$$

En posant $x_0 = 0$, nous construisons une suite (x_n) par récurrence en imposant

(1) $x_n \in B(x_{n-1},\alpha_n)$

(2) $\|T_n x_n\| \geqslant \|T_n\|\alpha_n$.

En utilisant une série télescopique et l'inégalité triangulaire $\|x_k - x_{k+1}\| \leqslant \alpha_n$ à chaque étage,

$$\|x_p - x_q\| \leqslant \sum_{k=p}^{q}\alpha_k \leqslant \sum_{k=p}^{\infty}\alpha_k. \tag{12.573}$$

Mais puisque la somme des α_n converge, la suite des queues de somme converge vers zéro[88] : $\lim_{p\to\infty}\sum_{k=p}^{\infty}\alpha_n = 0$. Cela implique que (x_n) est une suite de Cauchy[89]. Vu que X est de Banach, la suite (x_n) a une limite dans X. Soit x cette limite.

[87] Définition 9.339.
[88] Lemme 12.127(2).
[89] Proposition 9.343.

Nous avons $\beta_n = \|x_n - x\| \to 0$. Il y aurait moyen de calculer β_n en fonction de α_n (surtout si nous avions donné une forme explicite à α_n), mais c'est sans importance ici. L'important est que c'est une suite qui tend vers zéro.

Nous avons

$$x \in B(x_n, \beta_n), \tag{12.574}$$

et donc il existe $a_n \in B(0, \beta_n)$ tel que $x = x_n + a_n$. Avec cela, pour chaque n nous avons :

$$\begin{aligned}
\|T_n x\| &= \|T_n(x_n + a_n)\| && \text{(12.575a)}\\
&\geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n a_n\| && \text{(12.575b)}\\
&\geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n\|\beta_n && \text{(12.575c)}\\
&\geqslant \|T_n\|\alpha_n - \|T_n\|\beta_n = \|T_n\|(\alpha_n - \beta_n). && \text{(12.575d)}
\end{aligned}$$

SUBEQooPLVQooCLVCLU

Pour 12.575c, nous avons utilisé $\|T_n a_n\| \leqslant \|T_n\|\beta_n$. En résumé,

$$\|T_n x\| \geqslant \|T_n\|(\alpha_n - \beta_n). \tag{12.576}$$

Il suffit de choisir $\|T_n\|$ suffisamment rapidement croissant pour que[90]

$$\|T_n\|(\alpha_n - \beta_n) \to \infty, \tag{12.577}$$

et nous avons $\|T_n x\| \to \infty$, qui est contraire aux hypothèses. □

ThoPFBMHBN

Théorème 12.202 (Théorème de Banach-Steinhaus[112, 409])**.**
Soit E un espace de Banach[91] et F un espace vectoriel normé. Nous considérons une partie $H \subset \mathcal{L}^0(E, F)$ (espace des applications linéaires continues). Alors H est uniformément borné si et seulement si il est simplement borné.

Démonstration. Si H est uniformément borné, il est borné ; pas besoin de rester longtemps sur ce sens de l'équivalence. Supposons donc que H soit borné. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ nous considérons l'ensemble

$$\Omega_k = \{x \in E \text{ tel que } \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k\}. \tag{12.578}$$

(1) **Les Ω_k sont ouverts** Soit $x_0 \in \Omega_k$; nous avons alors une fonction $f \in H$ telle que $\|f(x_0)\| > k$, et par continuité de f il existe $\rho > 0$ tel que $\|f(x)\| > k$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$. Par conséquent $B(x_0, \rho) \subset \Omega_k$ et Ω_k est ouvert par le théorème 9.8.

(2) **Les Ω_k ne sont pas tous denses dans E** Nous supposons que les ensembles Ω_k soient tous dense dans E. Le théorème de Baire 9.438 nous indique que E est un espace de Baire (parce que de Banach) et donc que

$$\overline{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k} = E. \tag{12.579}$$

En particulier l'intersection des Ω_k n'est pas vide. Soit $x_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Nous avons alors

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\| = \infty, \tag{12.580}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les ouverts Ω_k ne sont pas tous denses dans E.

(3) **La majoration** Il existe $k \geqslant 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E, et nous voulons prouver que $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$ est un ensemble borné. Soit donc $k \geqslant 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E ; il existe un $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que

$$B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \varnothing. \tag{12.581}$$

Si $x \in B(x_0, \rho)$ alors x n'est pas dans Ω_k et donc

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\| \leqslant k. \tag{12.582}$$

Afin d'évaluer $\|f\|$ nous devons savoir ce qu'il se passe avec les vecteurs sur une boule autour de 0. Pour tout $x \in B(0, \rho)$ et pour tout $f \in H$, la linéarité de f donne

$$\|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leqslant \|f(x + x_0) + f(x_0)\| \leqslant 2k. \tag{12.583}$$

[90] Le point important ici est que α_n (et donc β_n) est choisi sans référence à $\|T_n\|$.
[91] Définition 9.339.

Par continuité nous avons alors $\|f(x)\| \leqslant 2k$ pour tout $x \in \overline{B(0,\rho)}$. Si maintenant $x \in F$ vérifie $\|x\| = 1$ nous avons

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho}\|f(\rho x)\| \leqslant \frac{2k}{\rho}, \tag{12.584}$$

et donc $\|f\| \leqslant \frac{2k}{\rho}$, ce qui montre que $2k/\rho$ est un majorant de l'ensemble $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$.

□

Une application du théorème de Banach-Steinhaus est l'existence de fonctions continues et périodiques dont la série de Fourier ne converge pas. Ce sera l'objet de la proposition 31.57.

12.13.8 Convergence forte

Lorsque nous avons une suite d'opérateurs linéaires, nous pouvons considérer la convergence d'une suite pour la norme opérateur : $A_k \to A$ lorsque $\|A_k - A\| \to 0$.

DEFooNREQooElLvec

Définition 12.203 ([410]).
*Soient un espace vectoriel E et un espace vectoriel normé V. Nous disons que la suite d'opérateur $T_k : E \to V$ **converge fortement** vers l'opérateur T si pour tout $x \in E$ nous avons*

$$\|T_k x - Tx\| \to 0. \tag{12.585}$$

Cette notion s'appelle *forte* par opposition à la convergence *faible* dont nous ne parlerons pas. Elle est cependant moins forte que la convergence en norme dont nous avons déjà parlé.

PROPooRFBLooUjSirP

Proposition 12.204.
Soient des espaces vectoriels normés E et F et une suite d'opérateurs $T_k : E \to F$ convergeant vers T[92]. Alors cette suite converge également fortement.

Démonstration. Soit $x \in E$ que nous supposons non nul. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$ avec $\|y\| = 1$. Nous avons

$$\|T_k x - Tx\| = |\lambda|\|T_k y - Ty\| \leqslant |\lambda| \sup_{\|z\|=1} \|T_k z - Tz\| = |\lambda|\|T_k - T\| \to 0. \tag{12.586}$$

La dernière étape est la convergence en norme $T_k \to T$. □

PROPooESZVooJNCidk

Proposition 12.205.
Soient E et F, des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit une suite (A_n) d'applications linéaires $E \to F$. Si elle converge fortement vers A, alors elle converge en norme vers A.

Démonstration. En plusieurs coups.

(1) **Si une sous-suite converge** Commençons par montrer que si (B_n) est une sous-suite de (A_n) qui converge vers B, alors $B = A$. Autrement dit, A est le seul candidat limite pour A_n.

Soit $\|x\| = 1$. Nous avons

$$\|B_n x - Bx\| \leqslant \|B_n - B\|\|x\| = \|B_n - B\|, \tag{12.587}$$

mais pour la sous-suite (B_n) nous avons supposé $\|B_n - B\| \to 0$. Donc $\|B_n x - Bx\| \to 0$, ce qui signifie que $B_n x \to Bx$. Mais par hypothèse, $B_n x \to Ax$. Par unicité de la limite, $Bx = Ax$ pour tout x de norme 1. Pour les autres x, c'est la linéarité qui conclut.

(2) **Utilisation de deux gros résultats** Par l'hypothèse de convergence, pour chaque x nous avons $\sup_n \|A_n x\| < \infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus 12.201 nous indique alors que l'ensemble $\mathcal{F} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|A_n\| < M$ pour tout n.

Nous utilisons à présent l'hypothèse de dimension finie en disant que l'espace des applications linéaires $E \to F$ est de dimension finie, de telle sorte que ses boules fermées soient compactes.

Donc la suite (A_n) est contenue dans un compact.

(3) **Les sous-suite convergentes** La suite (A_n) est contenue dans un compact. Toutes ses sous-suites sont dans ce compact et possèdent donc une sous-suite convergente (théorème 9.213). Toutes ces sous-sous-suites convergent nécessairement vers A par ce que nous avons dit dans la première étape de la preuve. Le lemme 9.94 nous dit alors que $A_n \to A$.

□

[92] Sans précisions, ce sera toujours la convergence en norme.

12.14 Application ouverte

Définition 12.206 (application ouverte)**.**
*Soient deux espaces topologiques X et Y. Une application $f\colon X\to Y$ est **ouverte** si l'image de tout ouvert de X par f est un ouvert de Y.*

Nous disons que f est ouverte en $a\in X$ si l'image de tout ouvert contenant a est ouverte.

PROPooXGEGooHoMsne

Proposition 12.207.
Une application bijective est ouverte si et seulement si son inverse est continue.

Démonstration. Ce n'est seulement que la définition, mais pour le sport nous démontrons le sens direct.

Soit donc une application $f\colon X\to Y$ bijective et ouverte entre les espaces topologiques X et Y. Prouvons que $f^{-1}\colon Y\to X$ est continue. Pour cela nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ dans X, et nous prouvons que $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans Y. Par définition de l'inverse, $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})=f(\mathcal{O})$ et vu que f est ouverte, $f(\mathcal{O})$ est ouvert. □

LEMooHHIPooEpGfCg

Lemme 12.208.
Une application $f\colon X\to Y$ est ouverte si et seulement si pour tout $x\in X$ et pour tout voisinage U de x, la partie $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$.

Démonstration. La preuve suit celle de la proposition 9.285. Le sens direct est un à fortiori.

Dans l'autre sens. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X. Pour prouver que $f(\mathcal{O})$ est ouvert, nous considérons $y\in f(\mathcal{O})$, ainsi que $x\in\mathcal{O}$ tel que $f(x)=y$. Vu que $\mathcal{O}$ est un voisinage de x, la partie $f(\mathcal{O})$ est un voisinage de $y=f(x)$.

Il existe donc un ouvert V de Y tel que $y=f(x)\in V\subset f(\mathcal{O})$. Donc la partie $f(\mathcal{O})$ contient un ouvert autour de chacun de ses points, et elle est ouverte par le théorème 9.8. □

Lemme 12.209 ([411])**.**
Une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est ouverte si et seulement si elle est ouverte en 0.

Démonstration. Le sens direct est un à fortiori.

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ et $a\in\mathcal{O}$. La partie $\mathcal{O}-a$ est ouverte et contient 0. Donc $f(\mathcal{O}-a)$ est un ouvert parce que f est ouverte en 0. Nous en déduisons, par linéarité, que $f(\mathcal{O})-f(a)$ est ouvert et donc que $f(\mathcal{O})$ est ouverte. □

Lemme 12.210 ([411])**.**
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Une application linéaire ouverte $f\colon E\to F$ est surjective.

Démonstration. Soit un ouvert $B(0,r)$ dans E. Puisque f est ouverte, la partie $f\big(B(0,r)\big)$ est ouverte dans F, et contient donc une boule $B_F(0,r')$ pour un certain $r'>0$.

Soit $v\in F$. Nous considérons

$$v'=r'\frac{v}{2\|v\|}. \tag{12.588}$$

Nous avons $\|v'\|=r'/2$, et donc $v'\in B_F(0,r')$. Il existe donc $x\in E$ (et même dans $B_E(0,r)$) tel que $f(x)=v'$. Nous avons alors

$$f\big(\frac{2\|v\|}{r'}x\big)=v, \tag{12.589}$$

ce qui prouve que v est dans l'image de f, et donc que f est surjective. □

THOooATZKooXHWCRD

Théorème 12.211 (théorème de l'application ouverte[411, 412, 413])**.**
Soient des espaces de Banach[93] E et F. Si l'application $f\colon E\to F$ est linéaire, surjective et continue, alors elle est ouverte.

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Une union de fermés** Soit $y\in F$. Comme f est surjective, il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $x\in B(0,n)$. Nous avons alors

$$y\in f\big(B(0,n)\big)\subset\overline{f\big(B(0,n)\big)} \tag{12.590}$$

En notant

$$F_n=\overline{f\big(B_E(0,n)\big)}, \tag{12.591}$$

[93] Espace de Banach : vectoriel, normé, complet. Définition 9.339.

nous avons

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{12.592}$$

(2) **Théorème de Baire** Le théorème 9.438 nous indique que F est un espace de Baire. La définition 9.436 nous dit alors qu'il existe un n tel que F_n soit d'intérieur non vide. Mettons F_N d'intérieur non vide.

(3) **Boule unité** Puisque F_N est d'intérieur non vide, il existe $y \in F_N$ et $\eta > 0$ tels que $B_F(y, \eta) \subset F_N$. Nous avons aussi

$$B_F(0, \eta) = B_F(y, \eta) - y, \tag{12.593}$$

et comme $y \in F_N$ nous avons $B_F(0, \eta) \subset F_N - F_N$, et vu qu'en plus $-F_N = F_N$, nous avons

$$B_F(0, \eta) \subset 2F_N = \overline{f\big(B_E(0, 2N)\big)}. \tag{12.594}$$

Nous avons ensuite

$$B_F(0, 1) = \frac{1}{\eta} B_F(0, \eta) \subset \frac{1}{\eta} \overline{f\big(B_E(0, 2N)\big)} = \overline{f\big(B_E(0, 2N/\eta)\big)}. \tag{12.595}$$

Ceci pour dire qu'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$B_F(0, 1) \subset \overline{f\big(B_E(0, M)\big)}. \tag{12.596}$$

Nous avons de même que

$$B_F\big(0, \frac{1}{2^n}\big) \subset \overline{f\big(B_E(0, M/2^n)\big)}. \tag{12.597}$$

EQooCMSPooYtzAuC

Nous voudrions maintenant avoir la même inclusion sans la fermeture.

(4) **Une suite par récurrence** Soit $z \in B_F(0, 1)$. Nous allons définir par récurrence une suite (x_n) dans E telle que

SUBEQSooLJEMooOaFncH

$$\begin{cases} x_n \in B_E\big(0, \frac{M}{2^{n-1}}\big) & \text{(12.598a)} \\ \|z - f(x_1 + \ldots + x_n)\| < \frac{1}{2^n}. & \text{(12.598b)} \end{cases}$$

(4a) **Le premier élément** Puisque $z \in B_F(0, 1) \subset \overline{f\big(B_E(0, M)\big)}$, nous avons

$$B(z, \frac{1}{2}) \cap f\big(B_E(0, M)\big) \neq \varnothing. \tag{12.599}$$

Nous pouvons donc considérer $x_1 \in B_E(0, M)$ tel que $f(x_1) \in B(z, \frac{1}{2})$.
Ce x_1 vérifie les conditions (12.598).

(4b) **La récurrence** En utilisant l'hypothèse de récurrence et (12.597),

$$z - f(x_1 + \ldots + x_n) \in B_F\big(0, \frac{1}{2^n}\big) \subset \overline{f\big(B_E(0, M/2^n)\big)}, \tag{12.600}$$

de telle sorte que

$$B_F\big(z - f(x_1, \ldots, x_n), \frac{1}{2^{n+1}}\big) \cap f\big(B_E(0, M/2^n)\big) \neq \varnothing. \tag{12.601}$$

Nous pouvons donc considérer $x_{n+1} \in B_E(0, M/2^n)$ tel que

$$f(x_{n+1}) \in B_F\big(z - f(x_1 + \ldots + x_n), \frac{1}{2^{n+1}}\big). \tag{12.602}$$

Donc

$$z - f(x_1 + \ldots + x_n) - f(x_{n+1}) \in B_F\big(0, \frac{1}{2^{n+1}}\big). \tag{12.603}$$

Nous avons donc bien

$$\|z - f(x_1 + \ldots + x_{n+1})\| < \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{12.604}$$

(5) **Convergence** Nous avons, pour tout n, $\|x_n\| < \frac{M}{2^{n-1}}$. Donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2^{n-1}} \tag{12.605}$$

converge. Autrement dit, la série des x_n converge absolument[94]. Puisque E est un espace de Banach, la proposition 12.165 nous dit que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge dans E. Nous posons

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n. \tag{12.606}$$

En utilisant la série géométrique de la proposition 12.186(2), nous trouvons

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2M. \tag{12.607}$$

(6) **Passage à la limite** Nous avons $x \in B_E(0, 2M)$, et

$$\lim_{n\to\infty} \|z - f(x_1 + \ldots + x_n)\| = 0. \tag{12.608}$$

Puisque les applications $\|.\|$, $t \mapsto z - t$ et f sont continues[95], nous pouvons rentrer la limite de partout et écrire

$$\|z - f(x)\| = 0, \tag{12.609}$$

ce qui signifie que $z = f(x)$. Comme z est un élément arbitraire de $B_F(0, 1)$ nous avons prouvé que

$$B_F(0, 1) \subset f\big(B_E(0, 2M)\big). \tag{12.610}$$

Nous avons donc aussi que pour tout $r > 0$, il existe r' tel que

$$B_F\big(0, r\big) \subset f\big(B_E(0, r')\big). \tag{12.611}$$

En l'occurrence, $r' = r/2M$.

(7) **Passage aux voisinages** Nous montrons que l'image de tout voisinage de $x \in E$ contient un voisinage de $f(x)$ dans F. Soit $x \in E$ ainsi qu'un voisinage V de x. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. Vu que f est linéaire,

$$f\big(B(x, r)\big) = f(x) + f\big(B(0, r)\big), \tag{12.612}$$

et il existe un r' tel que $B_F(0, r') \subset f\big(B_E(0, r)\big)$. Cela pour dire que

$$f(x) + B_F(0, r') \subset f\big(B(x, r)\big) \subset f(V). \tag{12.613}$$

Vu que $f(x) + B_F(0, r')$ est un ouvert autour de $f(x)$, nous avons prouvé que $f(V)$ contient un ouvert autour de $f(x)$, c'est-à-dire que $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$.

(8) **Conclusion** Le lemme 12.208 conclut que f est ouverte.

□

12.15 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Si vous êtes pressés, vous pouvez aller lire la définition 12.223 de produit tensoriel d'espaces vectoriels. Mais si vous étiez vraiment pressés, vous ne seriez pas en train de lire des choses sur le produit tensoriel (il vous suffit de croire que $x \otimes y$ n'est finalement que la concaténation de x et y).

PROPooYONEooWvwPZT

Proposition-Définition 12.212.
Soient un espace vectoriel V et un sous-espace N. Le ***quotient*** *de V par N, noté V/N est l'ensemble des classes d'équivalence*[96] *pour la relation $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in N$.*

Les définitions

[94] Définition 12.130.
[95] Oui, la continuité de f est une hypothèse en plus de sa linéarité parce que nous n'avons pas d'hypothèses sur la dimension de E et F.
[96] Définition 1.56.

(1) $[v]+[w]=[v+w]$

(2) $\lambda[v]=[\lambda v]$

ont un sens et définissent une structure d'espace vectoriel sur V/N.

En ce qui concerne la topologie, ce sera la définition 9.72.

Démonstration. Un élément général de la classe $[v]$ est de la forme $v+n$ avec $n\in N$. Le calcul suivant montre que la somme fonctionne :

$$[v+n_1]+[w+n_2]=[v+w+n_1+n_2]=[v+w] \tag{12.614}$$

parce que $n_1+n_2\in N$. De même,

$$\lambda[v+n]=[\lambda v+\lambda n]=[\lambda v] \tag{12.615}$$

toujours parce que $\lambda n\in N$.

Notons que nous avons utilisé de façon on ne peut plus cruciale le fait que N soit un sous-espace vectoriel. □

Proposition 12.213.
Si $\{e_i\}$ est une base de V et si N est un sous-espace de V, alors $\{[e_i]\}$ est une partie génératrice de V/N.

Démonstration. Si $x=\sum_k x_ke_k$, alors $[x]=\sum_k x_k[e_k]$, donc oui. □

PROPooDJLTooHZjSrA

Proposition 12.214 ([1]).
Si E est un espace vectoriel de dimension n et si N est un sous-espace de dimension k, alors

$$\dim(E/N)=n-k. \tag{12.616}$$

PROPooZWQWooBkdLfv

Proposition 12.215 (Continuité des appplication linéaires[284]).
Soit un espace vectoriel topologique Hausdorff de dimension finie d sur le corps $\mathbb{K}$. Alors :

ITEMooVOTHooLiauZy

(1) E est topologiquement isomorphe à $\mathbb{K}^d$.

ITEMooZEFFooUQOJuv

(2) Toute application linéaire $E\to\mathbb{K}$ est continue.

ITEMooSEPKooZVfyoD

(3) Si Y est un espace topologique vectoriel, alors toute fonction linéaire $E\to Y$ est continue.

Démonstration. Soit E, un espace vectoriel topologique Hausdorff de dimension d. Nous considérons une base $\{e_1,\ldots,e_d\}$ de E et l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{K}^d&\to E\\ (x_1,\ldots,x_d)&\mapsto\sum_i x_ie_i.\end{aligned} \tag{12.617}$$

Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels par la proposition 6.24.

(1) <u>φ **est continue**</u> ITEMooXXKTooEsRBbJ Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}A\colon E^d&\to E\\ (v_1,\ldots,v_d)&\mapsto\sum_i v_i.\end{aligned} \tag{12.618}$$

Elle est continue parce que E est un espace vectoriel topologique.

En utilisant les application T_{e_i} de la proposition 9.240 et les applications produit de la proposition 9.257, nous avons

$$\varphi(x_1,\ldots,x_d)=A\big(R_{e_1}(x_1),\ldots,T_{e_d}(x_d)\big)=A\circ(T_{e_1}\times\ldots\times T_{e_d})(x_1,\ldots,x_d). \tag{12.619}$$

Donc φ est une composée d'applications continues.

(2) <u>φ^{-1} **est continue si** $d=1$</u> Tout élément de E est de la forme λe_1 et nous avons

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\colon E&\to\mathbb{K}\\ \lambda e_1&\mapsto\lambda.\end{aligned} \tag{12.620}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\ker(\varphi^{-1}) &= \{x \in E \text{ tel que } \varphi^{-1}(x) = 0\} && \text{(12.621a)}\\ &= \{\lambda e_1 \text{ tel que } \varphi^{-1}(\lambda e_1) = 0\} && \text{(12.621b)}\\ &= \{\lambda e_1 \text{ tel que } \lambda = 0\} && \text{(12.621c)}\\ &= \{0\}. && \text{(12.621d)}\end{aligned}$$

Étant donné que E est Hausdorff, la partie $\{0\}$ est fermée. Donc φ^{-1} est continue par la proposition 9.256.

(3) **(1) si $d = 1$** Le point (1) est prouvé dans le cas $d = 1$ parce que φ fait l'isomorphisme.

(4) **$L\colon E \to \mathbb{K}$ est continue si $d = 1$** Nous supposons encore que $d = 1$ et nous prouvons que toute application linéaire $L\colon E \to \mathbb{K}$ est continue. Soit $a \neq 0 \in E$ tel que $L(a) \neq 0$. Si $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a$. Nous avons

$$L(x) = L(\lambda a) = \lambda L(a), \tag{12.622}$$

et donc $L = L(a)\varphi^{-1}$. Étant donné que φ^{-1} est continue, L est continue.

(5) **Noyau de L** Nous supposons maintenant que $\dim(E) = d \geqslant 1$. Soit une application linéaire non nulle $L\colon E \to \mathbb{K}$. Soit $a \neq 0$ dans E tel que $L(a) \neq 0$. Nous posons $\lambda = 1/L(a)$ et nous avons

$$L(x - \lambda L(x)a) = L(x) - \lambda L(x)L(a) = L(x) - L(x) = 0. \tag{12.623}$$

Donc

$$x - \lambda a L(x) \in \ker(L) \tag{12.624}$$

EQooBVAAqqVQzdbo

Nous considérons la projection canonique

$$\begin{aligned}\phi\colon E &\to E/\ker(L)\\ x &\mapsto [x]\end{aligned} \tag{12.625}$$

La relation (12.624) montre que $[x] = [\lambda a L(x)]$ ou encore que

$$\phi(x) = L(x)\lambda\phi(a). \tag{12.626}$$

(6) **$E/\ker(L) = \text{Span}\big(\phi(a)\big)$** Tout élément de $E/\ker(L)$ est de la forme $[x]$ pour un certain $x \in E$. Donc tout élément de $E/\ker(L)$ est de la forme $\lambda L(x)[a]$. Donc

$$E/\ker(L) \subset \text{Span}\big(\phi(a)\big). \tag{12.627}$$

L'inclusion inverse est simplement le fait que $\phi(a) \in E/\ker(L)$.

(7) **Déductions** Par 12.214, nous avons $\dim\big(\ker(L)\big) = d - 1$. Par hypothèse de récurrence, nous avons que $\ker(L)$ est topologiquement isomorphe à $\mathbb{K}^{d-1}$.

(8) **$\ker(L)$ est complet puis fermé** Soit un isomorphisme d'espaces topologiques $\alpha\colon \ker(L) \to \mathbb{K}^{d-1}$. Soit une suite de Cauchy $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\ker(L)$. La suite $\alpha(c_k)$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}^{d-1}$. Étant donné que $\mathbb{K}^{d-1}$ est complet[97], il existe $c \in \mathbb{K}^{d-1}$ tel que $\alpha(c_k) \xrightarrow{\mathbb{K}^{d-1}} c$. Étant donné que α^{-1} est continue, nous avons

$$c_k \to \alpha^{-1}(c) \in \ker(L). \tag{12.628}$$

Cela montre que $\ker(L)$ est complet.

La proposition 9.244(1) montre alors que $\ker(L)$ est fermé.

(9) **(2), $d \geqslant 1$** Vu que $\ker(L)$ est fermé, la proposition 9.256 déduit que L est continue.

(10) **φ^{-1} est continue pour $d \geqslant 1$** Nous devons prouver que E est topologiquement isomorphe à $\mathbb{K}^d$. Pour cela nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}^d &\to E\\ (x_1, \dots, x_d) &\mapsto \sum_i x_i e_i.\end{aligned} \tag{12.629}$$

[97] Proposition 9.255(3).

Nous avons déjà prouvé que φ est continue dans le point (1). Nous devons encore prouver que φ^{-1} est continue. Nous considérons les applications coordonnées

$$\begin{aligned} L_j : x &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto x_j \end{aligned} \tag{12.630}$$

de telle sorte que $x = \sum_i L_i(x)e_i$. En tant qu'application $E \to \mathbb{K}$, chacune des L_j est continue. Nous avons

$$\varphi^{-1}(x) = \big(L_1(x), \dots, L_d(x)\big) = (L_1 \times \dots \times L_d)(x). \tag{12.631}$$

Donc φ^{-1} est continue en tant que composée d'applications continues.

(11) **(1) pour $d \geqslant 1$** Nous avons montré que φ et φ^{-1} sont continues (le fait que φ soit une bijection provient du fait que $\{e_i\}_{i=1,\dots,d}$ est une base). Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(12) **Pour (3)** Soient un espace vectoriel topologique Y et une application linéaire $f : E \to Y$. Nous devons prouver que f est continue. Soit une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,d}$ de E. Nous posons $b_i = f(e_i)$ de sorte que

$$f(\sum_i x_i e_i) = \sum_i x_i b_i. \tag{12.632}$$

Nous reprenons les applications T_v de la proposition 9.240. Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_x x_i b_i && \text{(12.633a)} \\ &= A\big(x_1 b_1, \dots, x_d b_d\big) && \text{(12.633b)} \\ &= A \circ (T_{b_1} \times \dots \times T_{b_d})(x_1, \dots, x_d) && \text{(12.633c)} \\ &= \big(A \circ (T_{b_1 \times \dots \times T_{b_d}}) \circ \varphi^{-1}\big)(x). && \text{(12.633d)} \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$f = A \circ (T_{b_1} \times \dots \times T_{b_d}) \circ \varphi^{-1}. \tag{12.634}$$

Donc f est continue en tant que composition d'applications continues.

□

PROPooBEHTooBrLWuh

Proposition 12.216.
Toute application linéaire entre espaces vectoriels topologiques de dimension finie est continue. Si E est un espace vectoriel topologique Hausdorff de dimension finie et si Si Y est un espace topologique vectoriel, alors toute fonction linéaire $E \to Y$ est continue.

Démonstration. C'est la proposition 12.215(3). □

12.16 Produit tensoriel

Nous allons faire les choses suivantes :

- Définir ce qu'est *un* produit tensoriel de V et W, définition 12.218.
- Prouver que tous les produits tensoriels sont isomorphes, définition 12.219 et proposition 12.220.
- Construire un produit tensoriel relativement abstrait à base d'espace librement engendré par $V \times W$, définition 12.223 et proposition 12.225.
- Construire un produit tensoriel assez concret en tant qu'espace de formes bilinéaires sur $V \times W$, proposition 12.245.

12.217.
Dans le Frido, la notation $V \otimes W$ pourra désigner (au moins) trois choses différentes.

- Un produit tensoriel quelconque, c'est-à-dire un espace quelconque vérifiant les conditions de la définition 12.218.
- L'espace $F_{\mathbb{K}}(V \times W)/N$ défini en 12.223.
- L'espace $\mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{K})$ des formes bilinéaires.

Dans tous les cas l'espace T qui veut prétendre être le produit tensoriel $V \otimes W$ doit venir avec une application h. Lorsque (T, h) est un produit tensoriel de V et W, nous notons $v \otimes w$ l'élément $h(v, z) \in T$.

12.16.1 Définition générale

DEFooXKKQooAvWRNp

Définition 12.218 ([414]).
*Soient deux espaces vectoriels V et W. Un **produit tensoriel** de V et W est un couple (T,h) où T est un espace vectoriel et $h\colon V\times W\to T$ est une application*

(1) bilinéaire[98]

ITEMooJCNYooGvjjtL

(2) telle que pour tout espace vectoriel Z et toute application bilinéaire $f\colon V\times W\to Z$, il existe une unique application linéaire $\tilde{f}\colon T\to Z$ telle que $f=\tilde{f}\circ h$.

*La propriété (2) est appelée **propriété universelle** du produit tensoriel.*
L'élément $h(v,w)$ est souvent noté $v\otimes w$.

DEFooPLHTooRiHjlE

Définition 12.219.
*Un **morphisme** entre (T,h) et (T',h') est une application linéaire $\psi\colon T\to T'$ telle que $h'=\psi\circ h$.*
*Nous parlons d'**isomorphisme** si ψ a un inverse qui est également un morphisme.*

PROPooROPHooQXqNzZ

Proposition 12.220 ([414]).
Si V et W sont des espaces vectoriels, tous les produits tensoriels entre V et W sont isomorphes entre eux au sens de la définition 12.219.
Plus précisément, si (T,h) et (T',h') sont deux produits tensoriels de V et W, alors

(1) il existe une unique application linéaire $g\colon T\to T'$ telle que $h'=g\circ h$,

(2) cette application g est inversible.

En particulier, l'application g est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Soient deux produits tensoriels (T,h) et (T',h').

(1) **Existence**

L'application $h'\colon V\oplus W\to T'$ est bilinéaire, et (T,h) est un produit tensoriel. Donc il existe $g\colon T\to T'$ tel que $h'=g\circ h$. De même, il existe une application $g'\colon T'\to T$ telle que $h=g'\circ h$.

(2) **Unicité**

En ce qui concerne l'unicité, vu que $h\colon V\oplus W\to T$ est surjective, la relation $h'=g\circ h$ prescrit les valeurs de g sur tous les éléments de T.

(3) **Inversible**

Ces deux applications g et g' vérifient $h'=gg'h$ et $h=g'gh$, et de plus $h\colon V\oplus W\to T$ est surjective. Soient $t\in T$ et $x\in V\oplus W$ tel que $t=h(x)$. Nous avons $h(x)=g'gh(x)$. C'est-à-dire $t=(g'\circ g)(t)$. De même dans l'autre sens, il existe $x'\in V\oplus W$ tel que $t=h'(x')$. En appliquant l'égalité $h'=gg'h'$ à x', nous trouvons $t=(g\circ g')(t)$.

Tout cela pour dire que $g'=g^{-1}$. Cette application g est donc un isomorphisme de produits tensoriels entre (T,h) et (T',h').

Au final, l'application $g\colon T\to T'$ étant linéaire et inversible, elle est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Proposition 12.221 ([415]).
Soient deux espaces vectoriels V et W sur le corps $\mathbb{K}$ ainsi que $u,a\in V$ et $v,b\in W$ tous non nuls. Si

$$u\otimes v=a\otimes b,\tag{12.635}$$

alors il existe λ et μ tels que $a=\lambda u$ et $b=\mu v$.

Démonstration. Pour toute applications linéaires $f\colon V\to\mathbb{K}$ et $g\colon W\to\mathbb{K}$ nous posons

$$\begin{aligned}f*g\colon V\times W&\to\mathbb{K}\\(v,w)&\mapsto f(v)g(w).\end{aligned}\tag{12.636}$$

Cette application $f*g$ étant bilinéaire, il existe une application $s_{fg}\colon V\otimes W\to\mathbb{K}$ telle que $s_{fg}\circ h=f*g$.

[98] Définition 10.120.

Nous considérons maintenant des bases $\{e_i\}$ de V et $\{e'_j\}$ de W, et nous considérons l'application linéaire $f_i\colon V\to\mathbb{K}$ donnant la i^{e} composante dans la base $\{e_i\}$; autrement dit

$$f_i(e_k)=\delta ik. \tag{12.637}$$

De même nous considérons l'application $g_j\colon W\to\mathbb{K}$. Comme dit plus haut, l'application $f_i*g_j\colon V\times W\to\mathbb{K}$ se relève en une application $s_{ij}\colon V\otimes W\to\mathbb{K}$ vérifiant

$$s_{ij}(u\otimes v)=(f_i*g_j)(u,v)=f_i(u)g_j(v). \tag{12.638}$$

Par hypothèse, $s_{ij}(u\otimes v)=s_{ij}(a\otimes b)$, donc

$$f_i(u)g_j(v)=f_i(a)g_j(b). \tag{12.639}$$

EQooBEXAooDMSEpG

Étant donné que $u\neq 0$, il existe i_0 tel que $f_{i_0}(u)\neq 0$. De même nous considérons j_0 tel que $g_{j_0}(v)\neq 0$. Dans l'égalité

$$f_{i_0}(u)g_{j_0}(v)=f_{i_0}(a)g_{j_0}(b), \tag{12.640}$$

le membre de gauche est non nul. Donc les deux facteurs du membre de droite sont non nuls. Donc en posant

$$\mu=\frac{f_{i_0}(a)}{f_{i_0}(u)}, \tag{12.641}$$

nous définissons bien un élément non nul $\mu\in\mathbb{K}$.

En repartant de (12.639) avec $i=i_0$ nous trouvons

$$g_i(v)=\mu g_j(b) \tag{12.642}$$

pour tout i. Donc $v=\mu b$, ce qu'il fallait démontrer. Un raisonnement similaire montre que $u=\lambda a$ pour un certain λ non nul dans $\mathbb{K}$. □

PROPooMMOPooEkqkpk

Proposition 12.222.
Tous les espaces vectoriels sont sur le corps $\mathbb{K}$. Si $h\colon V\times W\to T$ est un produit tensoriel et si $f\colon T\to Z$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors

$$f\circ h\colon V\times W\to Z \tag{12.643}$$

est un produit tensoriel.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **$f\circ h$ est bilinéaire** Soient $v_1,v_2\in V$ et $w\in W$ ainsi que $\lambda\in\mathbb{K}$. Nous avons

$$\begin{aligned}(f\circ h)(\lambda v_1+v_2,w)&=f(\lambda v_1\otimes w+v_2\otimes w) && h \text{ est bilin.} && (12.644a)\\ &=\lambda f(v_1\otimes w)+f(v_2\otimes w) && f \text{ est lin.} && (12.644b)\\ &=\lambda(f\circ h)(v_1,w)+(f\circ h)(v_2,w), && && (12.644c)\end{aligned}$$

ce qui montre que $f\circ h$ est linéaire en sa première variable. La vérification de la linéarité en la seconde variable est le même type de vérification.

(2) **Propriété universelle** Soient un espace vectoriel Y et une application bilinéaire $b\colon V\times W\to Y$. Nous devons trouver une application linéaire $b'\colon Z\to Y$ telle que $b'\circ(f\circ h)=b$.

Vu que (T,h) est un produit tensoriel, il existe une application bilinéaire $\tilde{b}\colon T\to Y$ telle que $\tilde{b}\circ h=b$. Vu que f est linéaire et inversible, l'application $b'=\tilde{b}\circ f^{-1}$ est linéaire et fait l'affaire :

$$b'\circ f\circ h=\tilde{b}\circ f^{-1}\circ f\circ h=\tilde{b}\circ h=b. \tag{12.645}$$

□

12.16.2 Constructions du produit tensoriel

Tout cela est fort bien : nous avons unicité à isomorphisme près du produit tensoriel d'espaces vectoriels. Mais nous n'avons pas encore de certitudes à propos de l'existence d'un couple (T,h) vérifiant les propriétés demandées pour être un produit tensoriel.

Nous allons maintenant construire un produit tensoriel.

12.16.3 Construction abstraite

C'est le moment pour vous de relire la définition 6.31 d'espace vectoriel librement engendré, et surtout le lemme 6.32 qui en donne une base.

DEFooKTVDooSPzAhH

Définition 12.223 ([414]).
Soient deux espaces vectoriels V et W sur le corps commutatif[99] $\mathbb{K}$. *Dans $F_{\mathbb{K}}(V\times W)$*[100] *nous considérons les sous-espaces suivants :*

$$A_1=\{\delta_{(v_1,w)}+\delta_{(v_2,w)}-\delta_{(v_1+v_2,w)} \text{ tel que } v_1,v_2\in V, w\in W\} \tag{12.646a}$$
SUBEQooSHBJooJLPVbK
$$A_2=\{\delta_{(v,w_1)}+\delta_{(v,w_2)}-\delta_{(v,w_1+w_2)} \text{ tel que } v\in V, w_1,w_2\in W\} \tag{12.646b}$$
$$A_3=\{\lambda\delta_{v,w}-\delta_{(\lambda v,w)} \text{ tel que } v\in V, w\in W, \lambda\in\mathbb{K}\} \tag{12.646c}$$
$$A_4=\{\lambda\delta_{v,w}-\delta_{(v,\lambda w)} \text{ tel que } v\in V, w\in W, \lambda\in\mathbb{K}\}. \tag{12.646d}$$

Nous considérons alors $N=\mathrm{Span}(A_1,A_2,A_3,A_4)$ et le quotient

$$V\otimes_{\mathbb{K}}W=F_{\mathbb{K}}(V\times W)/N. \tag{12.647}$$

Ce dernier espace vectoriel est le ***produit tensoriel*** *de V par W.*

REMooSLEGooWEiutz

Remarque 12.224.
Quelques remarques.

(1) Les éléments de $V\otimes W$ ne s'écrivent pas tous sous la forme $v\otimes w$. Certains ont vraiment besoin d'être écrits avec des sommes. En cela, la situation de $V\otimes W$ est réellement différente de celle de $V\times W$. Dans ce dernier, tous les éléments sont des couples.

(2) La classe de l'élément $\delta_{(v,w)}\in F(V\times W)$ sera d'habitude noté $v\otimes w$.

(3) Pour insister sur la notion de classe, nous allons aussi noter $[x]$ la classe de $x\in F(V\times W)$.
ITEMooPVWHooMkgQoT

(4) L'arithmétique dans $V\otimes W$ est relativement simple. En ajoutant et soustrayant le même élément de A_3 nous avons par exemple

$$(\lambda v)\otimes w=(\lambda v)\otimes w+\lambda(v\otimes w)-(\lambda v)\otimes w. \tag{12.648}$$

Nous obtenons de cette façon

$$\lambda(v\otimes w)=(\lambda v)\otimes w=v\otimes(\lambda w), \tag{12.649}$$

que nous noterons $\lambda v\otimes w$ sans plus de précision.

PROPooIWZDooRRZNCf

Proposition 12.225 ([414]).
L'espace vectoriel $V\times W$ muni de

$$\begin{aligned}h\colon V\oplus W&\to V\otimes W\\(v,w)&\mapsto v\otimes w\end{aligned} \tag{12.650}$$

est un produit tensoriel entre V et W.

Démonstration. Nous devons prouver les conditions de la définition 12.218.

(1) h **est bilinéaire**
Ce sont des calculs tels que faits dans la remarque 12.224(4) qui font le travail.

(2) h **est surjective**
Un élément de $V\otimes W$ est la classe d'un élément de $F(V\times W)$, c'est-à-dire de la forme

$$\Big[\sum_{i\alpha}\delta_{(v_i,w_\alpha)}\Big]=\sum_{i\alpha}v_i\otimes w_\alpha. \tag{12.651}$$

Cet élément est dans l'image de h comme le montre le calcul suivant[101] :

$$h\Big(\sum_{i\alpha}(v_i,w_\alpha)\Big)=\sum_{i\alpha}h(v_i,w_\alpha)=\sum_{i\alpha}v_i\otimes w_\alpha. \tag{12.652}$$

[99] À part mention du contraire, tous les corps du Frido sont commutatifs.
[100] Espace vectoriel librement engendré, voir la définition 6.32 et le lemme 6.32.
[101] Faites bien la distinction entre $\delta_{v,w}$, (v,w) et $v\otimes w$. Sachez dans quel ensemble se trouvent chacun de ces trois objets.

(3) **Propriété universelle**

Soient un espace vectoriel U et une application linéaire $f\colon V\oplus W\to U$. Nous devons trouver une application linéaire $g\colon V\otimes W\to U$ telle que $f=g\circ h$. Pour cela nous commençons par considérer l'application

$$\begin{aligned} g\colon F(V\times W)&\to U\\ \delta_{(v,w)}&\mapsto f(v,w) \end{aligned} \tag{12.653}$$

définie sur tout $F(V\times W)$ par linéarité sans encombres parce que les $\delta_{v,w}$ forment une base par le lemme 6.32.

Nous démontrons que $g(N)=0$ pour avoir le droit de passer g aux classes et le considérer comme application partant de $V\otimes W$ au lieu de $F(V\times W)$. Prenons par exemple

$$\begin{aligned} g\big(\delta_{(v_1,w)}+\delta_{(v_2,w)}-\delta_{(v_1+v_2,w)}\big)&=g(\delta_{(v_1,w)})+g(\delta_{(v_2,w)})-g(\delta_{v_1+v_2,w}) &(12.654a)\\ &=f(v_1,w)+f(v_2,w)-f(v_1+v_2,w) &(12.654b)\\ &=0 &(12.654c) \end{aligned}$$

par la bilinéarité de f. Cela montre que $g(A_1)=0$. Nous montrons de même que $g(A_2)=g(A_3)=g(A_4)=0$, et enfin toujours par linéarité que $g(N)=0$. Pour rappel, les éléments de N sont les combinaisons linéaires finies d'éléments de A_1, A_2, A_3 et A_4.

Par passage aux classes, nous avons une application (que nous notons également g)

$$g\colon F(V\times W)/N\to U \tag{12.655}$$

vérifiant $g(v\otimes w)=f(v,w)$. Mais comme $h(v,w)=v\otimes w$, nous avons $g\circ h\colon V\oplus W\to U$ vérifiant $g\circ h=f$.

L'espace vectoriel $V\otimes W$ est donc un produit tensoriel. □

12.226.
Vu que $V\otimes W$ est un produit tensoriel de V et W, et vu qu'il y a unicité par la proposition 12.220, nous avons bien le droit de dire que $V\otimes W$ est *le* produit tensoriel. Cela justifie le titre.

12.227.
Les prochains lemmes et propositions vont nous dire que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V^*\otimes W&\to\mathcal{L}(V,W)\\ \alpha\otimes w&\mapsto\big(v\mapsto\alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{12.656}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels lorsque V est de dimension finie. Vu que nous aimons les énoncés très explicites, ça va être découpé en plusieurs morceaux, l'énoncé va devenir un peu long ; mais c'est pour la bonne cause.

LEMooOJEBooQruWEp

Lemme 12.228.
Soient deux espaces vectoriels V et W dont W est de dimension finie. Alors l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi\colon F(V^*\times W)&\to\mathcal{L}(V,W)\\ \delta_{(\alpha,w)}&\mapsto\big(v\mapsto\alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{12.657}$$

sur la base « canonique » de $F(V^*\times W)$ passe aux classes.

Démonstration. Avec les notations de la définition 12.223 nous devons prouver que $\varphi(N)=0$. Nous montrons que $\varphi(A_4)=0$, et nous vous laissons faire les autres. Pour $\lambda\in\mathbb{K}$, $\alpha\in V^*$ et $w\in W$ en utilisant la linéarité de φ nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi\big(\lambda\delta_{(\alpha,w)}-\delta_{(\alpha,\lambda w)}\big)v&=\lambda\varphi(\delta_{(\alpha,w)})(v)-\varphi(\delta_{(\alpha,\lambda w)})(v) &(12.658a)\\ &=\lambda\alpha(v)w-\alpha(v)(\lambda w) &(12.658b)\\ &=0 &(12.658c) \end{aligned}$$

parce que $\alpha(v)(\lambda w)=\lambda\alpha(v)w$ du fait que $\mathbb{K}$ est commutatif. La commutativité de $\mathbb{K}$ est ce qui permet de permuter le produit $\lambda\alpha(v)$.

Nous laissons à la lectrice le soin de prouver que $\varphi(A_1)=\varphi(A_2)=\varphi(A_3)=0$. □

LEMooUQZHooWjIGsy

Lemme 12.229.
Si W est de dimension finie, alors $\mathcal{L}(V,W)$ muni de

$$\begin{aligned} h\colon V^* \oplus W &\to \mathcal{L}(V,W) \\ (\alpha, w) &\mapsto \big(v \mapsto \alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{12.659}$$

est un produit tensoriel[102] *de V^* par W.*

Démonstration. Nous devons prouver que

- h est bilinéaire,
- h est surjective
- pour tout espace vectoriel U, et pour toute application bilinéaire $f\colon V^* \oplus W \to U$, il existe une application linéaire $g\colon \mathcal{L}(V,W) \to U$ tel que $f = g \circ h$.

(1) **Bilinéaire** Le fait que h soit bilinéaire est une simple vérification.

(2) **Surjective** L'espace W étant de dimension finie, nous pouvons en considérer une base $\{z_i\}_{i\in I}$. Soit $\alpha \in \mathcal{L}(V,W)$. Si $v \in V$, l'élément $\alpha(v)$ peut être décomposé dans la base $\{z_i\}$, ce qui définit des applications linéaires $\alpha_i\colon V \to \mathbb{K}$ par

$$\alpha(v) = \sum_{i\in I} \alpha_i(v) z_i. \tag{12.660}$$

Notons que $\alpha_i \in V^*$. En comparant avec la définition de h, nous voyons que

$$\alpha(v) = \sum_i h(\alpha_i, z_i)(v), \tag{12.661}$$

c'est-à-dire $\alpha = \sum_i h(\alpha_i, w_i) = h\big(\sum_i (\alpha_i, z_i)\big)$. Nous avons donc bien $\alpha \in h(V^* \oplus W)$.

(3) **Propriété universelle**
Soient un espace vectoriel U et une application bilinéaire $f\colon V^* \oplus W \to U$. Pour $\alpha \in \mathcal{L}(V,W)$ nous définissons $g(\alpha)$ comme suit. D'abord nous écrivons α sous la forme

$$\alpha(v) = \sum_i \alpha_i(v) z_i, \tag{12.662}$$

et nous posons

$$g(\alpha) = \sum_i f(\alpha_i, z_i). \tag{12.663}$$

Avec cette définition, en posant $w = \sum_i w_i z_i$, nous avons

$$\begin{aligned} (g \circ h)(\alpha, w) &= g\big(v \mapsto \alpha(v)w\big) && \text{(12.664a)} \\ &= g\big(v \mapsto \sum_i \alpha(v) w_i z_i\big) && \text{(12.664b)} \\ &= \sum_i f(w_i\alpha, z_i) && \text{(12.664c)} \\ &= \sum_i f(\alpha, w_i z_i) && \text{(12.664d)} \\ &= f(\alpha, \sum_i w_i z_i) && \text{(12.664e)} \\ &= f(\alpha, w). && \text{(12.664f)} \end{aligned}$$

Cela prouve que $g \circ h = f$.

□

PROPooKJTCooVTXWAQ

Proposition 12.230 ([416]).
Soient deux espaces vectoriels V et W dont V est de dimension finie. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V^* \otimes W &\to \mathcal{L}(V,W) \\ \alpha \otimes w &\mapsto \big(v \mapsto \alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{12.665}$$

est bien définie[103] *et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

[102] Définition 12.218.
[103] Au sens où il existe une fonction φ définie sur tout $V^* \otimes W$ qui se réduit à cela pour les éléments de la forme $\alpha \otimes w$.

Démonstration. Le lemme 12.229 donne une structure de produit tensoriel de V^* par W sur $\mathcal{L}(V,W)$. Rappelons les structures :

$$\begin{aligned} h\colon V^*\oplus W &\to V^*\otimes W\\ (\alpha,w)&\mapsto \alpha\otimes w \end{aligned} \tag{12.666}$$

et

$$\begin{aligned} h'\colon V^*\oplus W &\to \mathcal{L}(V,W)\\ (\alpha,w)&\mapsto \big[v\mapsto \alpha(v)w\big]. \end{aligned} \tag{12.667}$$

La proposition 12.220 a déjà fait tout le boulot. La seule chose à faire est de vérifier qu'il existe une application $\varphi\colon V^*\otimes W\to\mathcal{L}(V,W)$ vérifiant simultanément les deux conditions suivantes : ITEMooVNNSooNIXRoG

(1) $\varphi(\alpha\otimes w)=\big[v\mapsto\alpha(v)w\big]$

(2) $h'=\varphi\circ h$.

La seconde condition assure que φ sera un isomorphisme d'espaces vectoriels.

L'existence de φ vérifiant la condition (1) est un effet du lemme 12.228 qui donne une fonction sur $F(V^*\times W)$ dont le φ qui nous concerne est un quotient. Il reste à voir que cette application vérifie $h'=\varphi\circ h$.

En nous rappelant que $\alpha\otimes w=[\delta_{(\alpha,w)}]$ et en écrivant φ à la fois l'application et son passage au quotient,

$$(\varphi\circ h)(\alpha,w)=\varphi(\alpha\otimes w)=\varphi\big([\delta_{(\alpha,w)}]\big)=\varphi(\delta_{(\alpha,w)}). \tag{12.668}$$

En appliquant à $v\in V$ nous avons :

$$(\varphi\circ h)(\alpha,w)v=\varphi(\delta_{(\alpha,w)})v=\alpha(v)w=h'(\alpha,w)v. \tag{12.669}$$

Et voilà. Nous avons $\varphi\circ h=h'$. □

Une conséquence de la proposition 12.230 est que

$$\dim(V\otimes W)=\dim(V)\dim(W) \tag{12.670}$$

via le lemme 6.47(2).

12.16.4 Bases

LEMooXFIMooDkTSrq

Lemme 12.231 ([1]).
Si $\tau\colon V_1\to V_2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi\colon V_1\otimes W\to V_2\otimes W$ tel que $\varphi(v\otimes w)=\tau(v)\otimes w$[104].

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi_0\colon F(V_1\times W)&\to F(V_2\times W)\\ \delta_{(v,w)}&\mapsto\delta_{\big(\tau(v),w\big)} \end{aligned} \tag{12.671}$$

est un isomorphisme.

Cette application passe aux classes, mais pas au sens où $x\in[y]$ impliquerait $\varphi_0(x)=\varphi_0(y)$; au sens où si $x\in[y]$, alors $\varphi_0(x)\in[\varphi_0(y)]$. Par exemple

$$\varphi_0\big(\lambda\delta_{(v,w)}-\delta_{(v,\lambda w)}\big)=\lambda\delta_{\big(\tau(v),w\big)}-\delta_{\big(\tau(v),\lambda w\big)}\in[0]. \tag{12.672}$$

Nous vous laissons le soin de vérifier les égalités correspondantes pour les autres parties de N.

Le passage au classes de φ_0 signifie que l'on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V_1\otimes W&\to V_2\otimes W\\ [x]&\mapsto[\varphi_0(x)] \end{aligned} \tag{12.673}$$

où vous aurez noté que la prise de classe à gauche n'est pas la même que celle à droite.

Il faut prouver que ce φ est un isomorphisme. En ce qui concerne la linéarité,

$$\begin{aligned} \varphi\big([x]+[y]\big)&=\varphi\big([x+y]\big) && \text{(12.674a)}\\ &=[\varphi_0(x+y)] && \text{(12.674b)}\\ &=[\varphi_0(x)+\varphi_0(y)] && \text{(12.674c)}\\ &=[\varphi_0(x)]+[\varphi_0(y)] && \text{(12.674d)}\\ &=\varphi([x])+\varphi([y]). && \text{(12.674e)} \end{aligned}$$

Je vous laisse le reste de la linéarité. Et en ce qui concerne le fait que ce soit une bijection, allez-y. □

[104] La proposition 12.232 dira que cette condition fixe complètement φ, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

PROPooTHDPooWgjUwk

Proposition 12.232 ([416]).
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V et W. Soient une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{f_\alpha\}$ de W.

Alors : ITEMooQCILooUncdGl

(1) La partie $\{e_i \otimes f_\alpha\}$ est une base de $V \otimes W$.

ITEMooGCRHooJjAYPr

(2) Au niveau des dimensions, $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

Démonstration. Vu que V est de dimension finie, nous avons un isomorphisme d'espaces vectoriels $V^* = V$, et même un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \tau\colon V &\to (V^*)^* \\ \tau(v)\mu &= \mu(v). \end{aligned} \tag{12.675}$$

Recopions l'isomorphisme de la proposition 12.230 en utilisant V^* au lieu de V :

$$\begin{aligned} \psi_0\colon (V^*)^* \otimes W &\to \mathcal{L}(V^*, W) \\ \tau(v) \otimes w &\mapsto \big(\mu \mapsto \tau(v)(\mu)w = \mu(v)w\big). \end{aligned} \tag{12.676}$$

En écrivant cela, nous avons tenu compte du fait que tout élément de $(V^*)^*$ peut être écrit de façon univoque sous la forme $\tau(v)$ pour un certain $v \in V$.

Vu que τ est un isomorphisme, l'application suivante est encore un isomorphisme[105] :

$$\begin{aligned} \psi\colon V \otimes W &\to \mathcal{L}(V^*, W) \\ v \otimes w &\mapsto \big(\mu \mapsto \mu(v)w\big). \end{aligned} \tag{12.677}$$

EQooAEFRooPfmAnj

Nous avançons. Vu que nous avons un isomorphisme, nous pouvons faire passer des bases. Le lemme 6.47 nous donne une base de $\mathcal{L}(V^*, W)$ en les éléments $\beta_{i\alpha}\colon V^* \to W$ définies par

$$\beta_{ij}(\mu) = \mu(e_i)f_\alpha. \tag{12.678}$$

Donc $\{\psi^{-1}(\beta_{i\alpha})\}$ est une base de $V \otimes W$.

Pour $a = \sum_i a_i e_i^*$ (base duale, définition 6.144) nous avons :

$$\psi(e_i \otimes f_\alpha)a = a(e_i)f_\alpha = \beta_{i\alpha}(a). \tag{12.679}$$

Cela prouve que $\psi^{-1}(\beta_{i\alpha}) = e_i \otimes f_\alpha$, et donc que ces $e_i \otimes f_\alpha$ est une base de $V \otimes W$.

La formule concernant les dimensions est simplement la définition 6.17 de la dimension : le nombre d'éléments dans une base. □

LEMooYJIQooRCkHMq

Lemme 12.233.
Dans le produit tensoriel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, nous avons

(1) $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x(1 \otimes 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Si $x \geqslant 0$ nous avons aussi $x \otimes 1 = \sqrt{x} \otimes \sqrt{x}$.

LEMooKPWNooNjkAru

Lemme 12.234.
Le produit tensoriel est associatif.

Plus précisément, si U, V, W sont des espaces vectoriels, nous avons des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$U \otimes (V \otimes W) = (U \otimes V) \otimes W. \tag{12.680}$$

Dans la suite, nous écrirons $U \otimes V \otimes W$ sans plus de précisions et même $\otimes^k V$ pour le produit de k copies de V.

Définition 12.235.
*Un k-**tenseur** sur V est un élément de $\otimes^k V^*$.*

PROPooIODGooYajpiy

Proposition 12.236.
Il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\otimes^k V^* \to \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$.

Exemple 12.237.
Pour $k = 2$, l'isomorphisme de la proposition 12.236 est

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{L}(V, V^*) &\to \mathcal{L}_2(V, \mathbb{R}) \\ \psi(\alpha)(u, v) &= \alpha(u)v. \end{aligned} \tag{12.681}$$

Il faut se rappeler que le proposition 12.230 donne déjà un isomorphisme entre $V^* \otimes V^*$ et $\mathcal{L}(V, V^*)$. △

[105] Lemme 12.231.

12.16.5 Construction par les formes multilinéaires

LEMooCXPRooGfJMMV

Lemme 12.238.
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V, W et Z. Soient une application bilinéaire $f\colon V\times W\to Z$ ainsi que des bases $\{e_i\}$ de V et $\{d_j\}$ de W.

Il existe des éléments f_{ij} dans Z tels que

$$f(v,w)=\sum_{ij}v_iw_jf_{ij} \tag{12.682}$$

pour tout $v\in V$ et $w\in W$.

12.239.
Ce que nous allons noter $h(T,S)$ est souvent noté $T\otimes S$, parce que la proposition 12.245 montrera qu'il s'agit bien d'un produit tensoriel. Cependant nous avons besoin de pas mal de propriétés de h avant de pouvoir l'affirmer.

DEFooUUMYooOUCzWk

Proposition-Définition 12.240.
Si $T\in\mathcal{L}_k(V,\mathbb{R})$ et $S\in\mathcal{L}_l(V,\mathbb{R})$, nous définissons

$$\begin{aligned}h(T,S)\colon V^{k+l}&\to\mathbb{R}\\(v_1,\dots,v_{k+l})&\mapsto T(v_1,\dots,v_k)S(v_{k+1},\dots,v_{k+l}).\end{aligned} \tag{12.683}$$

(1) L'application $h(T,S)$ est multilinéaire[106] *: $h(T,S)\in\mathcal{L}_{k+l}(V,\mathbb{R})$.*

(2) L'application h est associative : $h\big(h(T,S),R\big)=h\big(T,h(S,R)\big)$.

(3) L'application $h\colon\mathcal{L}_k(V,\mathbb{R})\times\mathcal{L}_l(V,\mathbb{R})\to\mathcal{L}_{k+l}(V,\mathbb{R})$ est bilinéaire.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **multilinéaire** Nous fixons des $v_i\in V$, nous considérons $h(T,S)_i$ et nous calculons (en supposant $i\leqslant k$, sinon on adapte)

$$\begin{aligned}h(T,S)_i(v)a&=h(T,S)(v_1,\dots,v,\dots,v_{k+l})&(12.684a)\\&=T(v_1,\dots,v,\dots,v_k)S(v_{k+1},\dots,v_{k+l})&(12.684b)\\&=T_i(v)S(\dots).&(12.684c)\end{aligned}$$

Vu que T_i est linéaire, nous en déduisons que $h(T,S)_i$ est linéaire et donc que $h(T,S)$ est multilinéaire.

Associativité Facile de vérifier que

$$h\big(h(T,S),R\big)(v_1,\dots,v_{k+l+m})=T(v_1,\dots,v_k)S(v_{k+1},\dots,v_{k+l})R(v_{k+l+1},\dots,v_{k+l+m}). \tag{12.685}$$

Bilinéaire En utilisant directement la définition, on vérifie que $h(T,\lambda S)=\lambda h(T,S)$ et $h(T,S_1+S_2)=h(T,S_1)+h(T,S_2)$.

□

12.241 (Quelques notations)**.**
Si V_i sont des espaces vectoriels, si $v_i\in V_i$, et si $\xi_i\in V_i^*$, nous notons

$$h(\xi_1,\dots,\xi_n)(v_1,\dots,v_n)=\prod_{i=1}^n\xi_i(v_i). \tag{12.686}$$

Si I est un multiindice ($I=(i_1,\dots,i_n)$), et si v est quelque chose qui peut avoir des indices, alors nous écrivons $v_I=(v_{i_1},\dots,v_{i_n})$.

Nous écrivons en particulier $\delta_{IJ}=\prod_{k=1}^n\delta_{i_kj_k}$.

LEMooPUNAooUnQTpJ

Lemme 12.242 (égalité sur une base[1])**.**
Soient des espaces vectoriels $(V_i)_{i=1,\dots,N}$ de dimensions n_i. Soient deux formes N-linéaires $S,T\colon V_1\times\dots\times V_N\to\mathbb{R}$. Si pour tout multiindice I nous avons $S(e_I)=T(e_I)$, alors $S=T$.

Si les ξ_i sont des formes linéaires, nous notons ξ_I la forme multilinéaire $h(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

[106] Application multilinéaire, définition 10.1.

Démonstration. Nous considérons les bases $\{e_i^{(k)}\}_{i=1,\dots,n_i}$ de V_k. Un élément générique de $V_1 \times \dots \times V_N$ est de la forme

$$\Big(\sum_{j_1}^{n_1} x_{j_1}^{(1)} e_{j_1}^{(1)}, \dots, \sum_{j_N=1}^{n_N} x_{j_N}^{(N)} e_{j_N}^{(N)} \Big). \tag{12.687}$$

Nous appliquons S à cela en tenant compte de la multilinéarité :

$$S\Big(\sum_{j_1}^{n_1} x_{j_1}^{(1)} e_{j_1}^{(1)}, \dots, \sum_{j_N=1}^{n_N} x_{j_N}^{(N)} e_{j_N}^{(N)} \Big) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_N=1}^{n_N} \prod_{i=1}^{N} x_{j_i}^{(i)} S(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_N}^{(N)}) \tag{12.688a}$$

$$= \sum_J \prod_{i=1}^{N} x_{j_i}^{(i)} S(e_J). \tag{12.688b}$$

Le même calcul avec T donne la même chose, compte tenu de l'hypothèse $S(e_J) = T(e_J)$. □

THOooTAGKooDscwFG

Théorème 12.243 ([325]).
Soient des espaces vectoriels $(V_i)_{i=1,\dots,N}$ de dimensions n_i. Nous notons, pour chaque i une base $\{e_j^{(i)}\}_{j=1,\dots,n_i}$ de V_i. Nous notons $\{\alpha_j^{(i)}\}$ les bases duales.

Alors $\{\alpha_I\}_I$ est une base de $\mathcal{L}_N(V_1 \times \dots \times V_N, \mathbb{R})$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\{\alpha_I\}$ est libre. Supposons que $\sum_I a_I \alpha_I = 0$. En l'appliquant à e_J, nous avons

$$0 = \sum_I a_I \alpha_I(e_J) = \sum_I a_I \delta_{IJ} = a_J. \tag{12.689}$$

Cela prouve que tous les a_I sont nuls, et donc que la partie est libre.

Pour prouver que la partie est génératrice nous considérons $T \in \mathcal{L}_N(V_1 \times \dots \times V_N, \mathbb{R})$ et nous posons $T_I = T(e_I)$ pour tout multiindice I. En posant $S = \sum_I T_I \alpha_I$, nous

$$S(e_J) = \sum_I T_I \alpha_I(e_J) = \sum_I T_I \delta_{IJ} = T_J. \tag{12.690}$$

Donc $S(e_J) = T(e_J)$. Le lemme 12.242 conclu. □

LEMooPBLRooJePqlk

Lemme 12.244.
Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W. Nous notons $\{\alpha_i\}$ une base de V^* et $\{\beta_j\}$ une base de W^*. Pour chaque $\xi \in V^*$ et $\sigma \in W^*$ nous considérons l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} h(\xi,\sigma)\colon V \times W &\to \mathbb{R} \\ (v,w) &\mapsto \xi(v)\sigma(w). \end{aligned} \tag{12.691}$$

La partie $\{h(\alpha_i, \beta_j)\}$ forment une base de l'espace des applications bilinéaires sur $V \times W$.

PROPooIFVBooGiMskq

Proposition 12.245 ([1, 417]).
Nous considérons l'application $h\colon V^* \times W^* \to \mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R})$ donnée par

$$h(\xi,\sigma)(v,w) = \xi(v)\sigma(w). \tag{12.692}$$

Le couple $\big(\mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R}), h\big)$ est un produit tensoriel de V^* et W^*.

Démonstration. Nous devons prouver que l'application h satisfait à la propriété universelle 12.218(2). Nous considérons une base $\{\alpha_i\}$ de V^* et $\{\beta_j\}$ de W^*. Si $f\colon V^* \times W^* \to Z$ est bilinéaire, le lemme 12.238 nous dit que f est déterminée par les éléments $f_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$.

(1) **Existence** Nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon \mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R}) &\to Z \\ \sum_{ij} a_{ij} h(\alpha_i, \beta_j) &\mapsto \sum_{ij} a_{ij} f_{ij}. \end{aligned} \tag{12.693}$$

Notez deux choses.

(1a) C'est une bonne définition parce que les $h(\alpha_i, \beta_j)$ forment une base de $\mathcal{L}_2(V \times W, \mathbb{R})$ (lemme 12.244).

(1b) L'application $\tilde{f}$ est linéaire.

Nous devons prouver que $\tilde{f}\circ h=f$. Soient $\xi=\sum_i\xi_i\alpha_i$ et $\sigma=\sum_j\sigma_j\beta_j$. Par bilinéarité nous avons

$$h(\xi,\sigma)=\sum_{ij}\xi_i\sigma_j h(\alpha_i,\beta_j). \tag{12.694}$$

Nous avons donc

$$(\tilde{f}\circ h)(\xi,\sigma)=\sum_{ij}\xi_i\sigma_j f_{ij}=\sum_{ij}\xi_i\sigma_j(\alpha_i,\beta_j)=f(\xi,\sigma), \tag{12.695}$$

et donc bien $\tilde{f}\circ h=f$.

(2) **Unicité** Nous savons que les éléments $h(\alpha_i,\beta_j)$ forment une base de $\mathcal{L}_2(V\times W,\mathbb{R})$. Si $\tilde{f}\colon\mathcal{L}_2(V\times W,\mathbb{R})\to Z$ est une application linéaire vérifiant $\tilde{f}\circ h=f$, alors nous avons

$$\tilde{f}\big(h(\alpha_i,\beta_j)\big)=(\tilde{f}\circ h)(\alpha_i,\beta_j)=f(\alpha_i,\beta_j)=f_{ij}. \tag{12.696}$$

Donc l'application $\tilde{f}$ est entièrement déterminée sur une base par les éléments $f_{ij}\in Z$.

□

12.246.
Lorsque V et W sont des espaces vectoriels, si rien n'est précisé, le produit tensoriel

$$V\otimes W \tag{12.697}$$

sera celui de la proposition 12.245, et lorsque $\xi_1\in V^*$ et $\xi_2\in W^*$ nous notons

$$\xi_1\otimes\xi_2 \tag{12.698}$$

l'élément $h(\xi_1,\xi_2)$.

Ce serait mieux de garder la notation $V\otimes W$ pour un produit tensoriel abstrait (définition 12.218), mais bon … Nous n'allons pas non plus nous tuer sur les notations.

12.16.6 Décomposabilité

DEFooTSSVooUGybzL

Définition 12.247 ([325]).
*Une application $T\in\mathcal{L}_k(V,\mathbb{R})$ est **décomposable** si il existe des formes $\xi_1,\dots,\xi_k\in V^*$ telles que*

$$T(v_1,\dots,v_k)=\prod_{i=1}^{k}\xi_i(v_i) \tag{12.699}$$

autrement dit $T=h(\xi_1,\dots,\xi_k)$, ou encore $T=\xi_1\otimes\dots\otimes\xi_k$.

LEMooLEIBooROVcim

Lemme 12.248 ([325, 1]).
Une forme 2-multilinéaire $T=\sum_{ij}a_{ij}h(\alpha_i,\alpha_j)$ est décomposable[107] si et seulement si la matrice a est de rang 1.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Soient $f_1,f_2\in V^*$ tels que $T(v_1,v_2)=f_1(v_1)f_2(v_2)$ pour tout $v_1,v_2\in V$. Nous appliquons T à $(e_1),e_2$:

$$T(e_k,e_l)=\sum_{ij}a_{ij}(\alpha_i\otimes\alpha_j)(e_k,e_l)=\sum_{ij}a_{ij}\alpha_i(e_i)\alpha_j(e_l)=a_{kl}, \tag{12.700}$$

mais aussi

$$T(e_k,e_l)=f_1(e_k)f_2(e_l). \tag{12.701}$$

Donc $a_{kl}=f_1(e_k)f_2(e_l)$. Notons A la matrice (et l'application linéaire) formée par ces nombres. Nous avons :

$$A(e_i)=\sum_k a_{ki}e_k=\sum_k f_1(e_k)f_2(e_i)e_k=f_2(e_i)\sum_k f_1(e_k)e_k. \tag{12.702}$$

En notons v le vecteur $\sum_k f_1(e_k)e_k$, nous avons

$$A(\mathbb{R}^n)=\mathrm{Span}(v). \tag{12.703}$$

Cela montre que la dimension de l'image de A est 1, et donc que A est de rang 1.

[107] Définition 12.247.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que a est de rang 1, et nous posons

$$\begin{aligned} T\colon V^2 &\to \mathbb{R} \\ (v,w) &\mapsto \sum_{kl} a_{kl} v_k w_l. \end{aligned} \tag{12.704}$$

Vu que $rang(a) = 1$, il existe $u \in V$ tel que $a(\mathbb{R}^n) = \text{Span}(u)$. En particulier pour chaque i, il existe λ_i tel que $a(e_i) = \lambda_i u$. Donc

$$a(v) = \sum_i v_i a(e_i) = \sum_i v_i \lambda_i u = (v \cdot \lambda)u, \tag{12.705}$$

et

$$a_{kl} = a(e_k)_l = \lambda_k u_l. \tag{12.706}$$

Avec tout ça,

$$T(v,w) = \sum_{kl} a_{kl} v_k w_l = (\lambda \cdot v)(u \cdot w). \tag{12.707}$$

Donc nous avons $T = f_1 \otimes f_2$ avec

$$\begin{aligned} f_1\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned} \tag{12.708}$$

et $f_2(x) = u \cdot x$.

□

12.249.
Il est dit dans [325] que l'étude de la décomposabilité devient très compliquée à partir des 3-tenseurs, et que c'est lié à l'intrication quantique. Personnellement je ne suis pas sûr de ce que ça veut dire, mais si ça vous parle, c'est sans doute intéressant.

12.16.7 Produit tensoriel d'applications linéaires

PROPooKNNJooLSqzID

Proposition 12.250 ([418, 419])**.**
Soit une application bilinéaire $f\colon V \times W \to Z$ avec $\dim(Z) = \dim(V)\dim(W) < \infty$. Nous supposons que Z est engendré par l'image de f :

$$Z = \text{Span}\big(\text{Image}(f)\big). \tag{12.709}$$

Alors f est un produit tensoriel de V et W.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Un autre produit tensoriel** Nous considérons un produit tensoriel $h\colon V \times W \to T$ (existence : proposition 12.225). Étant donné que f est bilinéaire, il existe une application linéaire $\tilde{f}\colon T \to Z$ telle que $f = \tilde{f} \circ h$.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{h} & T \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{\tilde{f}} & \\ Z & & \end{array} \tag{12.710}$$

(2) **$\tilde{f}$ est surjective** Nous prouvons que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $z \in Z$. Étant donné que Z est engendré par $f(V \times W)$, il existe $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $v_i \in V$ et $w_j \in W$ tels que $z = \sum_{ij} a_{ij} f(v_i, w_j)$. En utilisant la linéarité de $\tilde{f}$ et le fait que $f = \tilde{f} \circ h$ nous avons :

$$z = \sum_{ij} a_{ij} f(v_i, w_j) \tag{12.711a}$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} (\tilde{f} \circ h)(v_i, w_j) \tag{12.711b}$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} \tilde{f}(v_i \otimes w_j) \tag{12.711c}$$

$$= \tilde{f}\big(\sum_{ij} a_{ij} v_i \otimes w_j\big). \tag{12.711d}$$

Nous voyons donc que z est dans l'image de $\tilde{f}$, et donc que $\tilde{f}$ est surjective.

(3) **Questions de dimensions** L'espace vectoriel T est de dimension $\dim(V)\dim(W)$ (proposition 12.232(2)). Vu que Z est également, par hypothèse, de dimension $\dim(V)\dim(W)$, nous avons une application linéaire surjective entre espaces de même dimensions. Elle est donc une bijection par le corolaire 6.56.

(4) **Conclusion** La proposition 12.222 dit que $\tilde{f}\circ h = f$ est un produit tensoriel.

□

PROPooLFHFooRmTAjY

Proposition 12.251 ([418, 1]).
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V_1, V_2, W_1 et W_2. L'application

$$\begin{aligned} s\colon \mathcal{L}(V_1,W_1)\times\mathcal{L}(V_2,W_2) &\to \mathcal{L}(V_1\otimes V_2, W_1\otimes W_2)\\ s(A,B)(e_i\otimes e_j) &= Ae_i\otimes Be_j \end{aligned} \tag{12.712}$$

est un produit tensoriel.

C'est toujours cette structure que nous considérons lorsque nous parlerons du produit tensoriel d'applications linéaires.

Démonstration. Notre objectif est d'utiliser la proposition 12.250, c'est-à-dire de montrer que l'image de s engendre $\mathcal{L}(V_1\otimes V_2, W_1\otimes W_2)$. Nous considérons des bases pour tous les espaces vectoriels en présence : $\{e_i\}$ pour V_1, $\{e'_j\}$ pour V_2, $\{\epsilon_k\}$ pour W_1 et $\{\epsilon'_l\}$ pour W_2.

La proposition 12.232(1) dit que $\{e_i\otimes e'_j\}$ est une base de $V_1\otimes V_2$ et que $\{\epsilon_k\otimes\epsilon'_l\}$ est une base de $W_1\otimes W_2$, de sorte qu'une base de $\mathcal{L}(V_1\otimes V_2, W_1\otimes W_2)$ est donnée par les applications[108]

$$\begin{aligned} f_{ij,kl}\colon V_1\otimes V_2 &\to W_1\otimes W_2\\ \sum_{st} a_{st}e_s\otimes e'_t &\mapsto a_{ij}\epsilon_k\otimes\epsilon'_l. \end{aligned} \tag{12.713}$$

Notre objectif est de montrer que ces applications sont dans l'image de s. Pour cela nous considérons les applications $A\colon V_1\to W_1$ donnée par $A(e_s)=\delta_{si}\epsilon_k$ et $B\colon V_2\to W_2$ donnée par $B(e'_t)=\delta_{tj}\epsilon'_l$. Nous avons alors

$$s(A,B)\Big(\sum_{st}a_{st}e_s\otimes e'_t\Big) = \sum_{st}a_{st}A(e_s)\otimes B(e'_t) \tag{12.714a}$$

$$= \sum_{st}\delta_{si}\epsilon_k\otimes\delta_{tj}\epsilon'_l \tag{12.714b}$$

$$= a_{ij}\epsilon_k\otimes\epsilon'_l. \tag{12.714c}$$

Cela prouve que $s(A,B)=f_{ij,kl}$.

Donc l'image de s engendre $\mathcal{L}(V_1\otimes V_2, W_2\otimes W_2)$ et la proposition 12.250 conclut que s est un produit tensoriel pour $\mathcal{L}(V_1,W_1)$ et $\mathcal{L}(V_2,W_2)$. □

12.16.8 Contraction

DEFooMQDHooBsyVpr

Définition 12.252.
Un (l,k)-tenseur sur V est une application $k+l$-multilinéaire sur $(V^*)^l\times V^k$.

DEFooIOJMooFtSTtK

Proposition-Définition 12.253 ([1]).
Soit un (l,k)-tenseur[109] T sur V. Soient une base $\{e_i\}$, et sa base duale $\{\alpha_i\}$. Nous considérons une bijection linéaire $A\colon V\to V$, la base $\{Ae_i\}$ et la duale $\{\beta_i\}$.

Nous considérons l'application d'insertion $\iota\colon V^n\to V^{n+1}$ donnée par

$$\iota_k(v)(v_1,\dots,v_n) = (v_1,\dots,v_{k-1},v,v_k,\dots,v_n). \tag{12.715}$$

Alors :

ITEMooSROIooGtTXCL

(1) Pour tout $r\leqslant l$, pour tout $s\leqslant k$, pour tout $\xi_i\in V^*$ et $v_j\in V$ nous avons

$$\sum_i T(\iota_r(\alpha_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(e_i)(v_1,\dots,v_{k-1})) = \sum_i T(\iota_r(\beta_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(Ae_i)(v_1,\dots,v_{k-1})). \tag{12.716}$$

[108] Proposition 6.87(2).
[109] Définition 12.252.

ITEMooPWLBooOYrluK

(2) *En posant*

$$\begin{aligned} C_s^r\colon (V^*)^{l-1}\times V^{k-1}&\to\mathbb{R}\\ (\xi_1,\dots,\xi_{l-1},v_1,\dots,v_{k-1})&\mapsto\sum_i T(\iota_r(\alpha_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(e_i)(v_1,\dots,v_{k-1})),\end{aligned}\tag{12.717}$$

l'application $C_s^r(T)$ est un $(l-1,k-1)$-tenseur.

*Ce $C_s^r(T)$ est la (r,s)-**contraction** de T.*

Démonstration. Le point (2) est facile parce que c'est juste la multilinéarité. Nous faisons le point (2). Nous partons du lemme 6.145 qui dit que $\beta_i=\sum_j A^{-1}_{ij}\alpha_j$. Remarquez que

$$T\big(\iota_r(\sigma)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\dots\big)\tag{12.718}$$

est linéaire en σ. Cela nous permet de sortir plein de sommes de T dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}&\sum_i T\Big(\iota_r(\beta_i)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(Ae_i)(v_1,\dots,v_{k-1})\Big)&\text{(12.719a)}\\ &=\sum_i T\Big(\iota_r(\sum_j A^{-1}_{ij}\alpha_j)(\xi_1,\dots,\xi_{l-1}),\iota_s(\sum_l A_{li}e_l)(v_1,\dots,v_{k-1})\Big)&\text{(12.719b)}\\ &=\sum_{ijl} A^{-1}_{ij}A_{li}T\big(\iota_r(\alpha_j)(\dots),\iota_s(e_l)(\dots)\big)&\text{(12.719c)}\\ &=\sum_i T\big(\iota_r(\alpha_i)(\dots),\iota_s(e_l)(\dots)\big)&\text{(12.719d)}\end{aligned}$$

□

Proposition 12.254 ([325]).
Soient $v,w\in V$ ainsi que $\beta,\gamma,\sigma\in V^*$. Nous avons

$$C_2^1(v\otimes w\otimes w\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\sigma)=\gamma(v)w\otimes\beta\otimes\sigma.\tag{12.720}$$

Démonstration. Nous choisissons une base $\{e_i\}$ de V et sa base duale $\{\alpha_i\}$. Ensuite allons appliquer $C_2^1(v\otimes w\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\sigma)$ à (ξ,v_1,v_2) avec $\xi\in V^*$, $v_1,v_2\in V$. Remarquons d'abord que si nous adoptons la décomposition $v=\sum_k v_ke_k$ et $\gamma=\sum_l\gamma_l\alpha_l$, nous avons $\alpha_i(v)=v_i$ et $\gamma(e_i)=\gamma_i$. Voici le calcul :

$$\begin{aligned}C_1^1(v\otimes w\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\sigma)(\xi,v_1,v_2)&=\sum_i(v\otimes w\otimes\beta\otimes\gamma\otimes\sigma)(\alpha_i,\xi,v_1,e_i,v_2)&\text{(12.721a)}\\ &=\sum_i\alpha_i(v)\xi(w)\beta(v_1)\gamma(e_i)\sigma(v_2)&\text{(12.721b)}\\ &=\sum_i v_i\gamma_i\xi(w)\beta(v_1)\sigma(v_2)&\text{(12.721c)}\\ &=\gamma(v)(w\times\beta\otimes\sigma)(\xi,v_1,v_2).&\text{(12.721d)}\end{aligned}$$

Pour la dernière ligne, $\sum_i v_i\gamma_i=\gamma(v)$ parce que

$$\gamma(v)=\sum_{kl}\gamma_l\alpha_l(v_ke_k)=\sum_{kl}\gamma_lv_k\delta_{lk}=\sum_k\gamma_kv_k.\tag{12.722}$$

□

12.16.9 Tenseurs symétriques et alternés

Si T est une application k-multilinéaire sur V, et si $\sigma\colon\{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,k\}$ est une permutation, nous notons T^σ l'application k-multilinéaire donnée par

$$\begin{aligned}T^\sigma\colon V^k&\to\mathbb{R}\\ (v_1,\dots,v_k)&\mapsto T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).\end{aligned}\tag{12.723}$$

Définition 12.255 ([325]).
Un k-tenseur[110] *T sur V est **symétrique** si pour toute permutation $\sigma\colon \{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,k\}$, nous avons*

$$T(v_1,\dots,v_k)=T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}),\tag{12.724}$$

c'est-à-dire $T^\sigma=T$.

Définition 12.256 ([325]).
*Un k-tenseur T est **alterné** si $T^\sigma=(-1)^\sigma T$. L'espace vectoriel des k-tenseurs alternés est noté $\Lambda^k V^*$. Nous notons aussi $\Lambda^0V^*=\mathbb{R}$.*

LEMooJEZYooMmrtgu

Lemme 12.257.
Si T est un k-tenseur, et si σ et π sont des permutations, alors

(1) L'application $T\mapsto T^\sigma$ est linéaire en T.

(2) $(T^\pi)^\sigma=T^{\pi\circ\sigma}$.

(3) $(-1)^\pi(-1)^\sigma=(-1)^{\pi\circ\sigma}$.

LEMooZMTPooKnqSuz

Lemme 12.258.
Si V est un espace vectoriel réel de dimension n, et si B est une base de V, alors le déterminant[111] *$\det_B\colon V^n\to\mathbb{R}$ est un n-tenseur alterné.*

DEFooHAKAooIfbsEy

Définition 12.259.
Si T est un k-tenseur, nous définissons

$$\operatorname{Alt}(T)=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi\tag{12.725}$$

où la somme porte sur le groupe symétrique[112].

LEMooWYCAooKoFpRu

Lemme 12.260 ([325]).
L'application $\operatorname{Alt}\colon\mathcal{L}_k(V)\to\Lambda^kV^*$ est une projection linéaire, c'est-à-dire

ITEMooLADTooNfbVlO

(1) $\operatorname{Alt}\big(\mathcal{L}_k(V)\big)\subset\Lambda^kV^*$

ITEMooQPJKooTvriBv

(2) $\operatorname{Alt}|_{\Lambda^kV^*}=\mathrm{Id}$.

ITEMooYOXTooTmzziO

(3) L'application Alt est linéaire

Démonstration. Pour (1), nous prouvons que $\big(\operatorname{Alt}(T)\big)^\sigma=(-1)^\sigma\operatorname{Alt}(T)$. Pour cela nous utilisons les formules du lemme 12.257. Nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{Alt}(T)^\sigma&=\left(\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi\right)^\sigma&(12.726a)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^{\pi\circ\sigma}&(12.726b)\\
&=(-1)^\sigma\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\sigma(-1)^\pi T^{\pi\circ\sigma}&(12.726c)\\
&=(-1)^\sigma\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\pi\circ\sigma}T^{\pi\circ\sigma}&(12.726d)\\
&=(-1)^\sigma\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi&(12.726e)\\
&=(-1)^\sigma\operatorname{Alt}(T).&(12.726f)
\end{aligned}$$

SUBEQooTWZPooNnAijd

Pour (12.726e), nous avons utilisé le fait que $\pi\mapsto\pi\circ\sigma$ est une bijection de S_k et la proposition 2.131.

[110] C'est-à-dire une application k-multilinéaire $T\colon V^k\to\mathbb{R}$.
[111] Définition 10.9.
[112] Groupe symétrique, définition 2.2.

Pour le point (2), nous considérons un tenseur alterné T. Il vérifie donc $T^\pi = (-1)^\pi T$. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(T) &= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi && (12.727a)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi(-1)^\pi T && (12.727b)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k} T && (12.727c)\\ &= T && (12.727d)\end{aligned}$$

parce que S_k contient exactement $k!$ éléments par le lemme 2.97.

Pour le point (3), il s'agit de la linéarité de $T\mapsto T^\pi$ donnée par le lemme 12.257. □

LEMooIMYIooZIxYRp

Lemme 12.261 ([1]).
Si $T\in\mathcal{L}_k(V)$ et $S\in\mathcal{L}_l(V)$, nous avons

$$\mathrm{Alt}(T\otimes S) = (-1)^{kl}\,\mathrm{Alt}(S\otimes T). \tag{12.728}$$

Démonstration. Nous introduisons la permutation $\sigma\in S_{k+l}$ qui permute $\{1,\dots,k\}$ avec $\{k+1,\dots,k+l\}$; par exemple pour $k=3$ et $l=1$, ce serait $12345\to 45123$.

Nous avons

$$\begin{aligned}(T\otimes S)(v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_l) &= T(v_1,\dots,v_k)S(u_1,\dots,u_l) && (12.729a)\\ &= (S\otimes T)\big(\sigma(v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_l)\big). && (12.729b)\end{aligned}$$

Donc $T\otimes S = (S\otimes T)\circ\sigma$.

Passons au calcul de $\mathrm{Alt}(T\otimes S)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(T\otimes S) &= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}(-1)^\pi(T\otimes S)\circ\pi && (12.730a)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}(-1)^\pi(S\otimes T)\circ\sigma\circ\pi && (12.730b)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{s\in S_{k+l}}(-1)^{\sigma^{-1}\circ s}(S\otimes T)\circ s && (12.730c)\\ &= \frac{1}{k!}(-1)^{kl}\sum_s(-1)^s(S\otimes T)\circ s && (12.730d)\\ &= (-1)^{kl}\,\mathrm{Alt}(S\otimes T). && (12.730e)\end{aligned}$$

SUBEQooLJCJooUboUjv

SUBEQooJLNGooEEnzei

Justifications :

- Pour (12.730c), nous avons changé de variables dans la somme : $s=\sigma\circ\pi$.
- Pour (12.730d), nous avons utilisé le fait que $(-1)^\sigma = (-1)^{kl}$ parce que qu'il faut kl transpositions pour réaliser σ.

□

LEMooERYDooAifUdG

Lemme 12.262 ([1]).
Soient $T\in\Lambda^k V^*$ et $S\in\Lambda^l V^*$. Nous avons

$$\sum_{\pi\in S_{k+l}}(-1)^\pi(T^\sigma\otimes S)^\pi = (-1)^\sigma\sum_{\pi\in S_{k+k}}(-1)^\pi(T\otimes S)^\pi. \tag{12.731}$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous fixons un π, nous oublions le $(-1)^\pi$, et nous ne faisons pas la somme. Nous appliquons à $(v_1,\dots,v_{k+l})\in V^{k+l}$:

$$\begin{aligned}(T^\sigma\otimes S)^\pi(v_1,\dots,v_{k+l}) &= (T^\sigma\otimes S)(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k+l)}) && (12.732a)\\ &= T^\sigma(v_{\pi(1),\dots,v_{\pi(k)}})S(v_{\pi(k+1),\dots,v_{\pi(k+l)}}) && (12.732b)\\ &= T\big(v_{\pi(\sigma(1))},\dots,v_{\pi(\sigma(k))}\big)S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big). && (12.732c)\end{aligned}$$

Arrêtez-vous un moment pour vous assurer d'avoir bien compris pourquoi ce qui arrive dans T sont bien des $v_{\pi(\sigma(i))}$ et non des $v_{\sigma(\pi(i))}$. Une fois que c'est fait, nous définissons $\sigma' \in S_{k+l}$ par

$$\sigma'(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant k \\ x & \text{si } k+1 \leqslant x \leqslant k+l. \end{cases} \tag{12.733}$$

EQooGWUUooNiLifY

Avec ça nous pouvons continuer le calcul :

$$(T^\sigma \otimes S)^\pi(v_1, \dots, v_{k+l}) T\big(v_{(\pi\circ\sigma')(1)}, \dots, v_{(\pi\circ\sigma'(k))}\big) S\big(v_{(\pi\circ\sigma')(k+1)}, \dots, v_{(\pi\circ\sigma'(k+l))}\big) \tag{12.734a}$$
$$= (T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'}(v_1, \dots, v_{k+l}). \tag{12.734b}$$
$$\tag{12.734c}$$

En résumé, jusqu'ici nous avons prouvé que

$$(T^\sigma \otimes S)^\pi = (T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} \tag{12.735}$$

où σ' est donné en fonction de σ par la formule (12.733).

Nous faisons maintenant le calcul avec la somme et tout (en notant ϵ la signature) :

$$\sum_\pi \epsilon(\pi)(T^\sigma \otimes S)^\pi = \sum_\pi \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} \tag{12.736a}$$
$$= \epsilon(\sigma') \sum_\pi \epsilon(\sigma')\epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} \tag{12.736b}$$
$$= \epsilon(\sigma') \sum_\pi \epsilon(\pi \circ \sigma')(T \otimes S)^{\pi\circ\sigma'} \tag{12.736c}$$
$$= \epsilon(\sigma') \sum_\pi \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi}. \tag{12.736d}$$

La dernière ligne est la proposition 2.131 et le fait que $\pi \mapsto \pi \circ \sigma'$ est une bijection de S_{k+l}. □

LEMooKINCooHUEtaT

Lemme 12.263 ([1]).
Soient $T \in \Lambda^k V^*$, $S \in \Lambda^l V^*$ et $R \in \Lambda^m V^*$. Nous avons[113]

$$\text{Alt}\big(\text{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big) = \text{Alt}(T \otimes S \otimes R) = \text{Alt}\big(T \otimes \text{Alt}(S \otimes R)\big). \tag{12.737}$$

Démonstration. Nous prouvons la première égalité[114]. Nous avons :

$$\text{Alt}\big(\text{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big) = \frac{1}{(k+l+m)!} \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} (-1)^\pi \big(\text{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big)^\pi \tag{12.738a}$$
$$= \frac{1}{(k+l+l)!} \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} (-1)^\pi \Big(\frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+k}} (-1)^\sigma (T \otimes S)^\sigma \otimes R\Big)^\pi \tag{12.738b}$$
$$= \frac{1}{(k+l+m)!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} (-1)^\pi \big((T \otimes S)^\sigma \otimes R\big)^\pi. \tag{12.738c}$$

C'est le moment d'utiliser le lemme 12.262. Nous continuons :

$$\text{Alt}\big(\text{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big) = \frac{1}{(k+l+l)!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma (-1)^\pi \big((T \otimes S) \otimes R\big)^\pi \tag{12.739a}$$
$$= \frac{1}{(k+l+m)!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_\pi \big((T \otimes S) \otimes R\big)^\pi. \tag{12.739b}$$

Notez que ce qui est dans la somme sur σ ne dépend pas de σ. Nous avons donc $|S_{k+l}| = (k+k)!$ termes identiques, et nous continuons

$$\text{Alt}\big(\text{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big) = \frac{1}{(k+l+m)!} \sum_{\pi \in S_{k+l+m}} (T \otimes S \otimes R)^\pi \tag{12.740a}$$
$$= \text{Alt}(T \otimes S \otimes R). \tag{12.740b}$$

Et voilà. □

[113] Nous avons le droit d'écrire $T \otimes S \otimes R$ parce que le produit tensoriel est associatif, lemme 12.234.
[114] Je vous conseille d'essayer de prouver la seconde ; je ne l'ai pas vérifiée.

DEFooCTSPooZRIufr

Définition 12.264 (Produit extérieur)**.**
Pour $T \in \Lambda^k V^*$ et $S \in \Lambda^l V^*$ nous définissons

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(T \otimes S). \tag{12.741}$$

Cette opération est le ***produit extérieur****.*

LEMooKEOWooNDXqgr

Lemme 12.265 ([325])**.**
Propriétés du produit extérieur.

ITEMooELVSooHlORJy

(1) L'opération $\wedge$ est une application $\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*$.

ITEMooRUBEooKVHFSz

(2) L'application $\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*$ est linéaire en ses deux arguments.

ITEMooTCWPooIJYaRE

(3) Nous avons $T \wedge S = (-1)^{kl} S \wedge T$.

ITEMooKFPZooFenmCT

(4) Le produit extérieur est associatif : $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons que $T \otimes S \in \mathcal{L}_{k+l}(V)$. Le lemme 12.260 conclut.

(2) **Pour (2)** C'est la bilinéarité du produit tensoriel $\otimes$ et celle de l'antisymétrisation Alt donnée dans le lemme 12.260(3).

Notez que la bilinéarité du produit tensoriel $\otimes$ remonte à la définition d'un produit tensoriel (T, h) 12.218 qui demande à h d'être bilinéaire. La proposition 12.240 prouve que le produit $T \otimes S$ entre applications multilinéaires donne bien un produit tensoriel. Bref. Tout cela pour nous rappeler que ce que nous notons $T \otimes S$ pourrait tout aussi bien se noter $h(T, S)$.

(3) **Pour (3)** Conséquence du lemme 12.261.

(4) **Pour (4)** Soient $T \in \Lambda^k V^*$, $S \in \Lambda^l V^*$ et $R \in \Lambda^m V^*$. En déballant les définitions,

$$\begin{aligned}
(T \wedge S) \wedge R &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \operatorname{Alt}\big((T \wedge S) \otimes R\big) && \text{(12.742a)}\\
&= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(T \times S) \otimes R\right) && \text{(12.742b)}\\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(T \otimes S) \otimes R\big) && \text{(12.742c)}\\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \operatorname{Alt}\big(T \otimes (S \otimes R)\big) \qquad \text{lem. 12.263} && \text{(12.742d)}\\
&= T \wedge (S \wedge R). && \text{(12.742e)}
\end{aligned}$$

□

LEMooZJJLooFGuguy

Lemme 12.266 ([1])**.**
Si $\xi_i \in \bigwedge^{n_i} V^*$, alors nous avons[115]

$$\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k = \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \xi_k). \tag{12.743}$$

Démonstration. Nous y allons par récurrence. Pour $k = 1$, l'égalité à prouver se réduit à

$$\xi_1 = \operatorname{Alt}(\xi_1), \tag{12.744}$$

qui est vraie par le lemme 12.260(2).

[115] L'alterné est donné dans la définition 12.259.

Pour la récurrence nous faisons ceci :

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k) \wedge \xi_{k+1} = \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \xi_k) \wedge \xi_{k+1} \tag{12.745a}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \frac{(\sum_{i=1}^{k+1} n_i)!}{(\sum_{i=1}^k n_i)! n_{k+1}!} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_{k+1}) \tag{12.745b}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \xi_k). \tag{12.745c}$$

□

PROPooRRSZooJXOApq

Proposition 12.267 ([325]).
Soient $\xi_1, \ldots, \xi_k \in V^*$ et $v_1, \ldots, v_k \in V$. Nous avons

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det\big(\xi_i(v_j)\big). \tag{12.746}$$

Démonstration. Nous pouvons utiliser le lemme 12.266 dans lequel $n_i = 1$ pour tout i : $(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k) = k! \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_k)$. Cela donne le calcul suivant :

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k)(v_1, \ldots, v_k) = k! \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_k)(v_1, \ldots, v_k) \tag{12.747a}$$

$$= k! \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi (\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_k)^\pi (v_1, \ldots, v_k) \tag{12.747b}$$

$$= \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi \prod_{i=1}^n \xi_i(v_{\pi(i)}) \tag{12.747c}$$

$$= \det\big(\xi_i(v_j)\big) \qquad \text{def. 6.89.} \tag{12.747d}$$

Et voilà. □

CORooDQSNooZtMuOJ

Corolaire 12.268.
Soient une 1-forme α, une k-forme ω ainsi que des vecteurs $\{v_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$. Alors nous avons

$$(\alpha \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi (\alpha \otimes \omega)(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}) \tag{12.748a}$$

SUBEQooTNYNooAcubHJ

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi \alpha(v_{\pi(1)}) \omega(v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}). \tag{12.748b}$$

SUBEQooSNOTooZzxesM

Démonstration. Il s'agit simplement de déballer les définitions 12.264 et 12.259 :

$$(\alpha \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \frac{(k+1)!}{k!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) \tag{12.749a}$$

$$= \frac{(k+1)!}{k!} \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi (\alpha \otimes \omega)^\pi (v_1, \ldots, v_{k+1}) \tag{12.749b}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi (\alpha \otimes \omega)(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}) \tag{12.749c}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+1}} (-1)^\pi \alpha(v_{\pi(1)}) \omega(v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(k+1)}). \tag{12.749d}$$

□

12.16.10 Décomposition

PROPooUGLOooTULnDK

Proposition 12.269 ([325]).
Si $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une base de V^*, alors

$$\{\alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k} \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\} \tag{12.750}$$

est une base de $\bigwedge^k V^*$.

Nous avons

$$\dim\Big(\bigwedge^k V^*\Big) = \binom{n}{k}. \tag{12.751}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Partie libre** Nous notons $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base (pré-)duale de V. Pour $I=(i_1,\dots,i_k)$ avec $i_1<\dots<i_k$, nous notons $\Omega_I=\alpha_{i_1}\wedge\dots\wedge\alpha_{i_k}$. Soit $J=(j_1,\dots,j_k)$ avec $j_1<\dots<j_k$. Nous avons

$$\begin{aligned}\Omega_I(e_I)&=(\alpha_{i_1}\wedge\dots\wedge\alpha_{i_k})(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) && (12.752a)\\ &=\operatorname{Alt}(\alpha_{i_1}\otimes\dots\otimes\alpha_{i_k})(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) \quad \text{lem. 12.266} && (12.752b)\\ &=k!\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi\alpha_{i_1}(e_{\pi(j_1)})\dots\alpha_{i_k}(e_{\pi(j_k)}) && (12.752c)\\ &=\sum_\pi(-1)^\pi\delta_{I\pi(J)}. && (12.752d)\end{aligned}$$

Vu que les indices I et J sont ordonnées, si $\pi\neq\mathrm{Id}$, nous aurons forcément un des $\pi(j_l)\neq i_l$. Donc la somme sur π se réduit au terme $\pi=\mathrm{Id}$:

$$\Omega_I(e_J)=\delta_{IJ}. \tag{12.753}$$

EQooFTUIooDDgxLK

Cela prouve que les Ω_I sont linéairement indépendants.

(2) **Partie génératrice**

Nous devons encore prouver qu'ils sont générateurs de $\bigwedge^k V^*$.

Soit $T\in\bigwedge^k V^*$; en particulier nous avons $T\in\mathcal{L}_k(V,\mathbb{R})$, et le théorème 12.243 nous permet d'écrire $T=\sum_I T_I h(e_I)$ où la somme porte sur les $I=(i_1,\dots,i_k)$ avec $1\leqslant i_j\leqslant n$ pour tout j, et $h(e_I)=e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_k}$.

En utilisant encore le lemme 12.266, nous avons

$$\Omega_I=k!\operatorname{Alt}\big(h(e_I)\big), \tag{12.754}$$

et donc

$$T=\operatorname{Alt}(T)=\sum_I T_I\operatorname{Alt}\big(h(e_I)\big)=\sum_I T_I\frac{1}{k!}\Omega_I. \tag{12.755}$$

Il est temps de noter que si I et I' sont les mêmes indices, mais ordonnés différemment, $\Omega_I=\pm\Omega_{I'}$. Si I est un multiindice, nous notons $r(I)$ le multiindice contenant les mêmes indices que I, mais ordonné. Ensuite nous notons

$$s(I)=\begin{cases}1 & \text{si } \Omega_{r(I)}=\Omega_I\\ -1 & \text{si } \Omega_{r(I)}=-\Omega_I.\end{cases} \tag{12.756}$$

Avec ça nous avons toujours $\Omega_I=s(I)\Omega_{r(I)}$, et donc

$$T=\frac{1}{k!}\sum_I T_I s(I)\Omega_{r(I)}. \tag{12.757}$$

Donc T est bien une combinaison linéaire des $\Omega_{r(I)}$.

(3) **Cardinal** Nous posons

$$\begin{aligned}A&=\{I\text{ tel que }1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n\} && (12.758a)\\ B&=\{\Omega_I\text{ tel que }I\in A\} && (12.758b)\\ C&=\big\{\text{parties de cardinal } k \text{ dans } \{1,\dots,n\}\big\}. && (12.758c)\end{aligned}$$

Nous devons prouver que $\operatorname{Card}(B)=\binom{n}{k}$. Le lemme 3.70 donne déjà $\operatorname{Card}(C)=\operatorname{Card}(A)=\binom{n}{k}$. Nous prouvons à présent que

$$\begin{aligned}\psi\colon A&\to B\\ I&\mapsto\Omega_I\end{aligned} \tag{12.759}$$

est une bijection. Cette application est surjective par définition de B. En ce qui concerne l'injectivité, si $\Omega_I=\Omega_J$, alors pour tout multiindice L nous avons $\Omega_I(e_L)=\Omega_J(e_L)$. En vertu de (12.753), cela donne $\delta_{IL}=\delta_{JL}$ pour tout multiindice L. En prenant en particulier $L=I$, nous trouvons $1=\delta_{IJ}$ et donc $I=J$.

□

12.270.
Si $I = (i_1, \dots, i_k)$ est un multiindice et si $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors nous notons

$$a_{\wedge I} = a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k} \tag{12.760}$$

dans tous les cas où la formule a un sens.

PROPooSDVXooLvwPbg

Proposition 12.271.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Nous notons

$$C_k = \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \text{ tel que } 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n\}. \tag{12.761}$$

Si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base de V, alors tout élément de $\bigwedge^k V$ peut être écrit sous la forme

$$\omega = \sum_{i \in C_k} \omega_I e_{\wedge I} \tag{12.762}$$

avec $\omega_I \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

PROPooDXTOooKYDOiI

Proposition 12.272.
Soit un ouvert U dans $\mathbb{R}^n$. Si l'application

$$\omega \colon U \to \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^* \tag{12.763}$$

est de classe C^k, alors il existe des applications $\omega_I \in C^k(U)$ telles que

$$\omega(s) = \sum_{I \in C_k} \omega_I(s) e^*_{\wedge I}. \tag{12.764}$$

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

12.16.11 Règle de Leibniz pour le produit extérieur

Dans la suite nous allons intensément étudier la partie

$$S_{(k,l)} = \{\pi \in S_{k+l} \text{ tel que } \pi(1) < \dots < \pi(k),\ \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)\}. \tag{12.765}$$

Nous commençons avec $k = 1$. Dans ce cas, le lemme 12.273 donnera la forme générale d'un élément de $S_{(1,l)}$. En ce qui concerne l'intuition, si $\tau(1) = m$, toutes les autres valeurs de τ sont fixées à cause de la croissance de $j \mapsto \tau(j)$. Nous avons forcément que, lorsque j va de 2 à $l+1$, le nombre $\tau(j)$ prend dans l'ordre toutes les valeurs entre 1 et $l+1$, en sautant m.

Autrement dit, un élément de $S_{(1,l)}$ doit prendre cette forme :

$$\begin{array}{c|cccc} j & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau(j) & 1 & 2 & 4 & 5. \end{array} \tag{12.766}$$

La première colonne est séparée parce qu'elle joue un rôle spécial : les nombres sont ordonnés de chacun des deux côtés. À droite, nous avons simplement l'énumération $1, 2, 3, 4, 5$ en sautant 3.

En ce qui concerne la signature, pour tout remettre en ordre, il suffit de bouger le 3 vers sa place. Pour cela il faut 2 transpositions.

LEMooDBIEooYcjlDP

Lemme 12.273 ([1, 420])**.**
À propos de $S_{(1,l)}$.

(1) L'application $\phi \colon \{1, \dots, l+1\} \to S_{(1,l)}$ donnée par

$$\phi(m)j = \begin{cases} m & si\ j = 1 \\ j-1 & si\ j \leqslant m \\ j & si\ j > m \end{cases} \tag{12.767}$$

EQooRALSooPWvZPd

est une bijection.

ITEMooRIHAooItlkCh

(2) *En ce qui concerne la signature, nous avons* $\epsilon\big(\phi(m)\big) = (-1)^{m-1}$.

ITEMooCOPZooLiUPWE

(3) *Pour l'inverse de* ϕ *nous avons* $\tau = \phi\big(\tau(1)\big)$ *pour tout* $\tau \in S_{(1,l)}$.

ITEMooHMNFooENphGK

(4) *Pour tout* $\tau \in S_{(1,l)}$ *nous avons*

$$\epsilon(\tau) = -(-1)^{\tau(1)} \tag{12.768}$$

Démonstration. Le fait que ϕ prenne effectivement ses valeurs dans $S_{(1,l)}$ est une simple vérification de la croissance.

(1) **Injective** Si $\phi(m) = \phi(n)$, alors en particulier $m = \phi(m)1 = \phi(n)1 = n$ et donc $m = n$.

(2) **Surjective** Soit $\tau \in S_{(1,l)}$. Nous posons $m = \tau(1)$ et nous prouvons que $\tau = \phi(m)$.

Par croissance, si $k \geqslant 2$, nous avons $\tau(k) \leqslant k$. En effet nous avons $\tau(l+1) \geqslant \tau(k) + (l+1-k)$. Au cas où nous aurions $\tau(k) > k$, nous aurions $\tau(l+1) \geqslant \tau(k) + l - 1 - k > l + 1$, ce qui est impossible.

D'autre part, pour tout $k \geqslant 2$ nous avons

$$\tau(k) = \min\Big(\{1, \ldots, l+1\} \setminus \tau\{1, \ldots, k-1\}\Big). \tag{12.769}$$

EQooZLUJooGrqFqx

Cela étant dit, commençons doucement en supposant $m1 = 1$. Dans ce cas l'équation (12.769) donne tout de suite $\tau(2) = 2$. Une récurrence montre qu'alors $\tau(k) = k$ pour tout k. Autrement dit, si $\tau(1) = 1$, nous avons $\tau = \mathrm{Id}$. Simple vérification que $ph(1) = \mathrm{Id}$ aussi.

Passons au cas général $\tau(1) = m > 1$. Nous avons

$$\tau(2) = \min\Big(\{1, \ldots, l+1\} \setminus \{m\}\Big) = 1 \tag{12.770}$$

parce que $m \neq 1$. Nous faisons une récurrence en supposant $\tau(j) = j - 1$ pour un certain $j < m$. Nous prouvons que $\tau(j+1) = j$. Pour cela,

$$\tau(j+1) = \min\Big(\{1, \ldots, l+1\} \setminus \{1, \ldots, j-1, m\}\Big). \tag{12.771}$$

Étant donné que $j < m$, nous avons $j - 1 < m$ et donc le nombre j est encore dans la différence dont nous prenons le minimum. Donc $\tau(j+1) = j$. Cela prouve que $\tau(j) = \phi(m)j$ pour tout $j < m$.

En ce qui concerne $\tau(m)$, nous avons

$$\tau(m) = \min\Big(\{1, \ldots, l+1\} \setminus \{1, \ldots, m-2, m\}\Big) = m - 1. \tag{12.772}$$

De même nous voyons que $\tau(m+1) = m + 1$. De là, la croissance en tenant compte de $\tau(k) \leqslant k$ fait le reste.

(3) **Pour (2)** Nous montrons que

$$\prod_{i=1}^{m-1} (m, i) \circ \phi(m) = \mathrm{Id}\,. \tag{12.773}$$

(3a) **Pour $j = 1$** Nous avons

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m-1} (m, i)\phi(m)1 &= \prod_{i=1}^{m-1} (m, i)m && \text{(12.774a)}\\
&= \prod_{i=2}^{m-1} (m, i) \circ (m, 1)m && \text{(12.774b)}\\
&= \prod_{i=2}^{m-1} (m, i)1 && \text{(12.774c)}\\
&= 1 && \text{(12.774d)}
\end{aligned}$$

(3b) **Si $j \leqslant m-1$** Dans ce cas nous avonns $\phi(m)j = j-1$. Nous avons alors le calcul

$$\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\phi(m)j = \prod_{i=1}^{m-1}(m,i)(j-1) = \prod_{i=j}^{m-1}(m,i)\circ(m,j-1)(j-1) \tag{12.775a}$$

$$= \prod_{i=j}^{m-1}(m,i)m = \prod_{i=j+1}^{m-1}(m,i)(m,j)m = \prod_{i=j+1}^{m-1}(m,i)j = j. \tag{12.775b}$$

(3c) **Pour $j=m$** Même type de calculs :

$$\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\phi(m)m = (m,m-1)(m-1) = m. \tag{12.776}$$

(3d) **Pour $j>m$** Nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\phi(m)j = \prod_{i=1}^{m-1}(m,i)j = j \tag{12.777}$$

parce que $j>m$, de telle sorte qu'il n'est atteint par aucune des transpositions.

Nous avons donc prouvé que $\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\circ\phi(m) = \mathrm{Id}$. Vu que ϵ est un morphisme[116] et que $\epsilon(\mathrm{Id})=1$, nous déduisons que

$$\epsilon\big(\phi(m)\big) = \epsilon\Big(\prod_{i=1}^{m-1}(m,i)\Big) = (-1)^{m-1}. \tag{12.778}$$

(4) **Pour (3)** Soit $\tau\in S_{(1,l)}$. Vu que ϕ est une bijection, il existe un unique $m\in\{1,\dots,l+1\}$ tel que $\tau=\phi(m)$. En appliquant cette égalité à 1 nous avons $\tau(1)=\phi(m)1$. Mais la définition (12.767) de ϕ donne $\phi(m)1=m$. Nous avons donc prouvé que

$$\tau(1) = \phi(m)1 = m, \tag{12.779}$$

c'est-à-dire $m=\tau(1)$ et donc $\tau=\phi\big(\tau(1)\big)$.

(5) **Pour (4)** Soit $\tau\in S_{(1,l)}$. En utilisant les points (3) et (2), nous avons

$$\epsilon(\tau) = \epsilon\Big(\phi\big(\tau(1)\big)\Big) = (-1)^{\tau(1)-1} = -(-1)^{\tau(1)}. \tag{12.780}$$

□

LEMooFHCHooQgrwHD

Lemme 12.274 ([1]).
L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon B_{(1,l)} &\to S_{(1,l-1)}\\ \pi &\mapsto \phi\big(\pi(1)-1\big)\end{aligned} \tag{12.781}$$

est une bijection et vérifie

$$\epsilon\big(\varphi(\pi)\big) = -\epsilon(\pi). \tag{12.782}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Surjectif** Lorsque π parcours $B_{(1,l)}$, la valeur de $\pi(1)$ parcours les valeurs de 2 à $l+1$, et donc $\pi(1)-1$ va de 1 à l. Le lemme 12.273 dit que $\phi\big(\{1,\dots,l\}\big)=S_{1,l-1}$.

(2) **Injectif** Si $\varphi(\pi)=\varphi(\sigma)$, alors par injectivité de ϕ (le ϕ de $S_{(1,l-1)}$) nous avons $\pi(1)=\sigma(1)$. Or nous avons $B_{(1,l)}\subset S_{(1,l)}$. L'injectivié du ϕ de $S_{(1,l)}$ dir que si $\pi(1)=\sigma(1)$, alors $\pi=\sigma$.

(3) **Signature** Il s'agit d'abord le lemme 12.273(2). Soit $\pi\in B_{(1,l)}$. En posant $m=\pi(1)-1$ nous avons

$$\epsilon\big(\varphi(\pi)\big) = \epsilon\Big(\phi\big(\pi(1)-1\big)\Big) = (-1)^{m-1} = (-1)^{\pi(1)}. \tag{12.783}$$

Ensuite le lemme 12.273(4) nous donne $\epsilon(\pi) = -(-1)^{\pi(1)}$.

[116] Proposition 2.124.

□

12.275.
Si I est une partie de $\{1,\dots,n\}$, nous notons $\mathcal{O}(I)$ l'élément de $\mathbb{N}^k$ donné par l'ordonnement des éléments de I. Si E est un ensemble, nous notons $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de cardinal k de E.

LEMooKGETooKhomPn

Lemme 12.276 ([1]).
Nous notons $E = \{1,\dots,k+l\}$.

(1) L'application $\phi\colon \mathcal{P}_k(E) \to S_{(k,l)}$ donnée par

$$\phi(I)(1,\dots,l+k) = \big(\mathcal{O}(I), \mathcal{O}(E\setminus I)\big) \tag{12.784}$$

est une bijection.

(2) Pour $\tau \in S_{(k,l)}$ nous avons

$$\epsilon(\tau) = (-1)^{\sum_{n=1}^{k}\left(\tau(n)-n\right)}. \tag{12.785}$$

EQooPWREooEeHcBv

Démonstration. Le fait que $\phi(I)$ soit dans $S_{(k,l)}$ est visible dans la définition : les k premiers éléments de $\big(\phi(I)1,\dots,\phi(I)(k+l)\big)$ et les l suivants sont ordonnés.

(1) **Injective** Soient $I, J \in \mathcal{P}_k(E)$ tels que $\phi(I) = \phi(J)$. En particulier pour $j = 1,\dots,k$ nous avons$\phi(I)j = \phi(J)j$, et donc $\mathcal{O}(I)_j = \mathcal{O}(J)_j$. Cela prouve que $\mathcal{O}(I) = \mathcal{O}(J)$ et donc que $I = J$.

(2) **Surjective** Soit $\tau \in S_{(k,l)}$. Nous notons $I = \tau\{1,\dots,k\}$, et nous prouvons que $\tau = \phi(I)$. Vu que $\tau \in S_{(k,l)}$, le vecteur $\big(\tau(1),\dots,\tau(k)\big)$. Étant donné que τ est une bijection de E, nous avons aussi

$$\tau\{k+1,\dots,k+l\} = E\setminus I, \tag{12.786}$$

et comme $\big(\tau(k+1),\dots,\tau(k+l)\big)$ est ordonné, il est égal à $\mathcal{O}(E\setminus I)$.

Nous devons déterminer combien de transpositions sont nécessaires pour transformer $\big(\tau(1),\dots,\tau(k+l)\big)$ en $(1,\dots,k+l)$. Étant donné que $\tau \in S_{(k,l)}$, le plus grand parmi $\big(\tau(1),\dots,\tau(k)\big)$ est $\tau(k)$, il il faut $\tau(k)-k)$ permutations pour l'amener en k. Ce sont les transpositions

$$\prod_{j=k+1}^{\tau(k)} \big(\tau(k),\tau(j)\big). \tag{12.787}$$

Il faut ensuite $\tau(k-1)-(k-1)$ transpositions pour ramener $\tau(k-1)$ en position $k-1$, etc.

Il faut donc bien composer τ avec $\sum_{n=1}^{k}\big(\tau(n)-n\big)$ transpositions pour obtenir l'identité. □

LEMooEHTLooUSBBKL

Lemme 12.277 ([1]).
Bijection entre $B_{(k,l)}$ et $S_{(k,l-1)}$.

(1) L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon B_{(k,l)} &\to S_{(k,l-1)}\\ \pi &\mapsto \phi\big(\pi\{1,\dots,k\}-1\big)\end{aligned} \tag{12.788}$$

est une bijection.

(2) Pour tout $\pi \in B_{(k,l)}$, nous avons

$$\epsilon\big(\varphi(\pi)\big) = (-1)^k\epsilon(\pi). \tag{12.789}$$

Démonstration. D'abord notons que φ est bien définie. En vu que $\pi(k+1) = 1$, aucun élément de $\pi\{1,\dots,k\}$ n'est égal à 1. Et comme $\pi(j) \leqslant k+l$, les éléments de $\pi\{1,\dots,k\}-1$ sont entre 1 et $k+l-1$. L'ensemble $\pi\{1,\dots,k\}-1$ est donc un argument valable pour l'application $\phi\colon \mathcal{P}_k\{1,\dots,k+l-1\} \to S_{(k,l-1)}$.

(1) **φ est injective** Soient $\pi,\sigma \in B_{(k,l)}$ tels que $\varphi(\pi) = \varphi(\sigma)$. Nous notons $I_\pi = \pi\{1,\dots,k\}$ et $I_\sigma = \sigma\{1,\dots,k\}$. Pour tout $j = 1,\dots,k$ nous avons

$$\varphi(\pi)j = \mathcal{O}(I_\pi - 1)_j = \mathcal{O}(I_\pi)_j - 1, \tag{12.790}$$

et similairement pour σ. Nous en déduisons que $\mathcal{O}(I_\pi) = \mathcal{O}(I_\sigma)$, et donc que $I_\pi = I_\sigma$.

Vu que $\pi = \phi(I_\pi)$, nous en déduisons que $\pi = \sigma$.

(2) **Surjectif** Soit $\tau \in S_{(k,l-1)}$. Nous posons $I_\tau = \tau\{1,\dots,k\}$, et nous considérons l'élément $\pi \in B_{(k,l)}$ donné par

$$\pi(j) = \begin{cases} \tau(j)+1 & \text{si } j \leqslant k \\ 1 & \text{si } j = k+1 \\ \mathcal{O}\big(E \setminus (I_\tau \cup \{1\})\big)_j & \text{si } j > k+1. \end{cases} \tag{12.791}$$

La dernière ligne signifie « pour les autres, vous prenez ce qui reste, dans l'ordre ». Nous montrons à présent que $\tau = \varphi(\pi)$. Nous avons

$$\varphi(\pi) = \phi\big(\pi\{1,\dots,k\} - 1\big) = \phi\big(\tau\{1,\dots,k\}\big). \tag{12.792}$$

Cela prouve que $\varphi(\pi) = \phi(I_\tau) = \tau$.

En ce qui concerne la signature, il s'agit de manipuler la formule (12.785). Vu que $B_{(k,l)} \subset S_{(k,l)}$, elle peut être utilisée tant pour π que pour $\tau(\pi)$. Pour π nous avons[117]

$$|\pi| = \sum_{n=1}^{k} \big(\tau(n) - n\big). \tag{12.793}$$

En ce qui concerne $\varphi(\pi)$ nous avons

$$|\varphi(\pi)| = \sum_{n=1}^{k} \big(\varphi(\pi)n - n\big) = \sum_{n=1}^{k} \big(\pi(n) - 1 - n\big) = \sum_{n=1}^{k} \big(\pi(n) - n\big) - \sum_{n=1}^{k} 1 = |\pi| - k. \tag{12.794}$$

□

LEMooRKWHooBNxZBL

Lemme 12.278 ([1]).
Soient des vecteurs $v_1,\dots,v_{k+l}$. Si $\pi \in S_{k+l}$, si $T \in \mathcal{L}_k(V)$ et si $\sigma \in S_k$, alors nous avons

$$T^\sigma(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}) = T\big(v_{\pi\sigma(1)},\dots,v_{\pi\sigma(k)}\big). \tag{12.795}$$

EQooQJXHooTfvclD

Démonstration. Poser $w_j = v_{\pi(j)}$. Nous avons

$$T^\sigma(v_{\pi(1)},v_{\pi(k)}) = T^\sigma(w_1,\dots,w_k) = T(w_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(k)}) = T(v_{\pi\sigma(1)},\dots,v_{\pi\sigma(k)}). \tag{12.796}$$

□

LEMooTGNUooZnxkrc

Lemme 12.279 ([67, 1]).
Soient des tenseurs alternés $T \in \Lambda^k V^*$ et $S \in \Lambda^l V^*$. Alors nous avons

$$(T \wedge S)(v_1,\dots,v_{k+l}) = \sum_{\pi \in S_{(k,l)}} \epsilon(\pi) T\big(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big) \tag{12.797a}$$

$$= \sum_{\pi \in S_{(k,l)}} (T \otimes S)^\pi(v_1,\dots,v_{k+l}). \tag{12.797b}$$

SUBEQooUDLIooWxGEoe

où

$$S_{(k,l)} = \{\pi \in S_{k+l} \text{ tel que } \pi(1) < \dots < \pi(k),\ \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)\}, \tag{12.798}$$

et $\epsilon(\pi)$ est la signature[118] *de π, c'est-à-dire ce que nous notons souvent $(-1)^\pi$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Une relation d'équivalence** Nous considérons la relation d'équivalence suivante sur S_{k+l}. Nous posons $\pi_1 \sim \pi_2$ si $\{\pi_1(1),\dots,\pi_1(k)\} = \{\pi_2(1),\dots,\pi_2(k)\}$. Pour $\pi_0 \in S_{k+l}$ nous notons

$$A(\pi_0) = \{\pi \in S_{k+l} \text{ tel que } \{\pi(1),\dots,\pi(k)\} = \{\pi_0(1),\dots,\pi_0(k)\}\} \tag{12.799}$$

la classe d'équivalence de π_0.

[117] Nous notons $|\pi|$ le nombre de transpositions avec lequel il faut composer π pour obtenir l'identité. C'est-à-dire $\epsilon(\pi) = (-1)^{|\pi|}$. Sinon l'expression est trop lourde.
[118] Signature, définition 2.117.

(2) **Permutations partielles**

Lorsque $\pi \sim \pi_0$ nous notons $\sigma^{(\pi,\pi_0)}$ la permutation qui permet de « remettre dans l'ordre π_0 les éléments mélangés par π ». Plus précisément :

$$\begin{aligned}\sigma^{(\pi,\pi_0)}\colon \{1,\dots,k+l\} &\to \{1,\dots,k+l\}\\ i &\mapsto \begin{cases}(\pi_0\circ\pi^{-1})(i) & \text{si } i\in\pi\big(\{1,\dots,k\}\big)\\ i & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{12.800}$$

Notez que $\sigma^{(\pi,\pi_0)}$ est une bijection de $\{1,\dots,k+l\}$, c'est-à-dire que $\sigma^{(\pi,\pi_0)}\in S_{k+l}$. De même nous considérons $\tau^{(\pi,\pi_0)}$ donné par

$$\begin{aligned}\tau^{(\pi,\pi_0)}\colon \{1,\dots,k+l\} &\to \{1,\dots,k+l\}\\ i &\mapsto \begin{cases}(\pi_0\circ\pi^{-1})(i) & \text{si } i\in\pi\big(\{k+1,\dots,k+l\}\big)\\ i & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{12.801}$$

Ces deux permutations vérifient

$$\pi_0=\tau^{(\pi,\pi_0)}\circ\sigma^{(\pi,\pi_0)}\circ\pi. \tag{12.802}$$

En effet, si $i=1,\dots,k$, nous avons $\sigma^{(\pi,\pi_0)}\pi(i)=\pi_0(i)$ et donc

$$\tau^{(\pi,\pi_0)}\sigma^{(\pi,\pi_0)}\pi(i)=\pi_0(i) \tag{12.803}$$

parce que $\pi_0(i)\notin\pi\big(\{k+1,\dots,k+l\}\big)$. Même raisonnement pour prouver (12.802) pour les $i=k+1,\dots,k+l$.

(3) $A(\pi_0)\simeq S_k\times S_l$ Soit $\pi_0\in S_{k+l}$. Nous notons $P=\pi_0\big(\{1,\dots,k\}\big)$ et $Q=\pi_0\big(\{k+1,\dots,k+l\}\big)$. Nous montrons que

$$\begin{aligned}\psi\colon A(\pi_0) &\to S_P\times S_Q\\ \pi &\mapsto \big(\sigma^{(\pi,\pi_0)}|_P,\tau^{(\pi,\pi_0)}|_Q\big)\end{aligned} \tag{12.804}$$

est une bijection.

(3a) **Injective** Soient $\pi_1,\pi_2\in A(\pi_0)$. Nous supposons que $\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}|_P=\sigma^{(\pi_2,\pi_0)}|_P$. Vu que $\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}|_Q$ et $\sigma^{(\pi_2,\pi_0)}|_Q$ sont l'identité, nous avons en réalité $\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}=\sigma^{(\pi_2,\pi_0)}$. Le même raisonnement est valable pour $\tau^{(\pi_1,\pi_0)}=\tau^{(\pi_2,\pi_0)}$.
En utilisant (12.802) pour π_1 et pour π_2, nous écrivons

$$\tau^{(\pi_1,\pi_0)}\circ\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}\circ\pi_1=\pi_0, \tag{12.805}$$

et

$$\tau^{(\pi_2,\pi_0)}\circ\sigma^{(\pi_2,\pi_0)}\circ\pi_2=\pi_0, \tag{12.806}$$

et donc $\pi_1=\pi_2$. L'injectivité est prouvée.

(3b) **Surjective** Soient $\sigma'\in S_P$ et $\tau'\in S_Q$. Nous les prolongeons par l'identité pour créer $\sigma,\tau\in S_{k+l}$. Nous posons

$$\pi_1=\sigma^{-1}\circ\tau^{-1}\circ\pi_0. \tag{12.807}$$

Nous voulons prouver que $\psi(\pi_1)=(\sigma,\tau)$, mais d'abord nous devons rapidement vérifier que $\pi_1\sim\pi_0$. Pour $i=1,\dots,k$ nous avons

$$(\sigma^{-1}\circ\tau^{-1}\circ\pi_0)(i)=\sigma^{-1}\big(\pi_0(i)\big)\in\pi_0\{1,\dots,k\}. \tag{12.808}$$

Même raisonnement pour $i=k+1,\dots,k+l$, et nous déduisons que $\pi_1\sim\pi_0$.
En utilisant la définition 12.800, pour $i\in\pi_0\{1,\dots,k\}$ nous avons

$$\begin{aligned}\sigma^{(\pi_1,\pi_0)}(i)&=(\pi_0\pi_1^{-1})(i) && \text{(12.809a)}\\ &=(\pi_0\pi_0^{-1}\tau\sigma)(i) && \text{(12.809b)}\\ &=(\tau\sigma)(i) && \text{(12.809c)}\\ &=\sigma(i). && \text{(12.809d)}\end{aligned}$$

Pour la dernière ligne, nous savons que $\sigma\in S_P$ et donc que $\sigma(i)\in P$, ce qui permet de dire que $\tau\big(\sigma(i)\big)=\sigma(i)$.

Nous avons donc une bijection $A(\pi_0) \to S_P \times S_Q$. Vu que P contient k élément et que Q en contient l, nous avons aussi une bijection $A(\pi_0) \to S_k \times S_l$.

(4) **Cardinal de $A(\pi_0)$** Par ce que nous venons de dire, nous pouvons écrire

$$\text{Card}(\pi_0) = k!l!, \tag{12.810}$$

et je vous prie de remarquer que cela ne dépend pas de π_0. Toutes les classes d'équivalence ont même cardinal.

(5) **Développer le produit extérieur** Développons le produit extérieur. Nous avons

$$(T \wedge S) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{l+k}} \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} = \frac{1}{k!l!} \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} \sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi}. \tag{12.811}$$

Nous sélectionnons $\pi_0 \in S_{k+l}$ et nous regardons plus en détail la somme sur $A(\pi_0)$. Nous allons montrer que tous les éléments de la somme

$$\sum_{\pi \in A(\pi_0)} \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} \tag{12.812}$$

sont égaux, et qu'il y a $k!l!$ tels éléments.

(6) **Un élément de la somme** Soient $\pi_0 \in S_{k+l}$ et $\pi \in A(\pi_0)$. Nous utilisons encore (12.802) : $\pi_0 = \tau^{(\pi,\pi_0)} \circ \sigma^{(\pi,\pi_0)} \circ \pi$. Nous allons provisoirement arrêter d'écrire les exposant ; nous écrivons σ pour $\sigma^{(\pi,\pi_0)}$. Donc

$$\begin{aligned}(T \otimes S)^{\pi_0}(v_1, \dots, v_{k+l}) &= T\big(v_{\tau\sigma\pi(1)}, \dots, v_{\tau\sigma\pi(k)}\big) S\big(v_{\tau\sigma\pi(k+1)}, \dots, v_{\tau\sigma\pi(k+l)}\big) && \text{(12.813a)}\\ &= T\big(v_{\sigma\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\pi(k)}\big) S\big(v_{\tau\pi(k+1)}, \dots, v_{\tau\pi(k+l)}\big). && \text{(12.813b)}\end{aligned}$$

Pour le premier facteur $i = 1, \dots, k$, nous avons $(\tau\sigma\pi)(i) = (\sigma\pi)(i)$. Nous introduisons $\sigma' = \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi|_{\{1,\dots,k\}}$. Avec tout ce que nous avons fait, $\sigma' \in S_k$, et il est donc légitime de regarder ce que fait $T^{\sigma'}$. Notez qu'il n'est pas légitime de regarder T^{σ} ; bref. Nous avons, par la formule (12.795) :

$$T^{\sigma'}(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = T\big(v_{\pi\sigma'(1)}, \dots, v_{\pi\sigma'(k)}\big) = T\big(v_{\sigma\pi(1)}, v_{\sigma\pi(k)}\big). \tag{12.814}$$

Cela nous permet de réexprimer le premier facteur de (12.813b). Pour le second nous faisons le même genre de choses en introduisant τ' :

$$\begin{aligned}(T \otimes S)^{\pi_0}(v_1, \dots, v_{k+l}) &= T^{\sigma'}(v_{\pi(1),\dots,v_{\pi(k)}}) S^{\tau'}\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big) && \text{(12.815a)}\\ &= \epsilon(\sigma')\epsilon(\tau') T\big(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big) && \text{(12.815b)}\\ &= \epsilon(\sigma')\epsilon(\tau')(T \otimes S)^{\pi}(v_1, \dots, v_{k+l}). && \text{(12.815c)}\end{aligned}$$

(7) **Signature** Vu que σ est l'identité sur $\pi\{k+1, \dots, k+l\}$, et vu que $\sigma' = \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$, nous avons

$$\epsilon(\sigma') = \epsilon(\pi^{-1}\sigma\pi) = \epsilon(\sigma) \tag{12.816}$$

parce que ϵ est un morphisme.

Comme toujours, nous avons $\epsilon(\tau') = \epsilon(\tau)$ pour la même raison.

Nous avons $\pi_0 = \tau \circ \sigma \circ \pi$, et donc

$$\epsilon(\pi_0) = \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma)\epsilon(\pi), \tag{12.817}$$

et en repartant de (12.815),

$$\epsilon(\pi_0)(T \otimes S)^{\pi_0} = \epsilon(\pi_0)\epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)(T \otimes S)^{\pi} = \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi}. \tag{12.818a}$$

(8) **Résumé** Jusqu'à présent nous avons prouvé que pour tout $\pi \in A(\pi_0)$,

$$\epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} = \epsilon(\pi_0)(T \otimes S)^{\pi_0}. \tag{12.819}$$

(9) **Utilisation des classes** Nous repartons de (12.811). Pour chaque classe $A \in S_{k+l}/\sim$, nous choisissons un représentant $\pi_A \in A$. Pour tout $\pi \in A$ nous avons $\epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} = \epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A}$. Nous avons alors

$$(T \wedge S) = \frac{1}{k!l!} \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} \sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi} \tag{12.820a}$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} \sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A} \tag{12.820b}$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} k!l!\epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A} \tag{12.820c}$$

$$= \sum_{A \in S_{k+l}/\sim} \epsilon(\pi_A)(T \otimes S)^{\pi_A}. \tag{12.820d}$$

(10) **Conclusion** Chaque classe $A \in S_{k+l}/\sim$ contient un unique élément de $S_{(k,l)}$. Il suffit de prendre celui-là comme choix de π_A. Et nous avons finalement

$$T \wedge S = \sum_{\pi \in S_{(k,l)}} \epsilon(\pi)(T \otimes S)^{\pi}, \tag{12.821}$$

comme annoncé.

□

12.16.12 Produit intérieur

DEFooFWIHooJiTnwM

Définition 12.280.
*Si $v \in V$ et si $T \in \bigwedge^k V^*$, nous définissons le **produit intérieur** $i_v \colon \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$ par*

$$(i_v T)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = T(v, X_1, \ldots, X_{k-1}). \tag{12.822}$$

PROPooETGJooMjxAFp

Proposition 12.281 ([1]).
Soit $\omega \in \bigwedge^k V^*$. L'application

$$\begin{aligned} f \colon V &\to \bigwedge^{k-1} V^* \\ v &\mapsto i_v(\omega) \end{aligned} \tag{12.823}$$

est linéaire.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$i_{\lambda v}(\omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(\lambda v, v_1, \ldots, v_{k-1}) \tag{12.824a}$$

$$= \lambda\omega(v, v_1, \ldots, v_{k-1}) \tag{12.824b}$$

$$= \lambda i_v(\omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}). \tag{12.824c}$$

Le même genre de vérifications montre que

$$i_{v+w}(\omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = i_v(\omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) + i_w(\omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}). \tag{12.825}$$

□

Le lemme suivant donne les coordonnées de $i_v(\omega)$ en fonction de celles de ω.

LEMooOBUVooBHpDZX

Lemme 12.282 ([1]).
Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $\omega \in \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$. Nous supposons que

$$\omega = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)} \omega_I e^*_{\otimes I} \tag{12.826}$$

et

$$i_v(\omega) = \sum_{J=(j_1,\ldots,j_{k_1})} \omega'_J e^*_{\otimes J}. \tag{12.827}$$

Alors

$$\omega'_J = \sum_{i=1}^{n} \omega_{iJ} v_i. \tag{12.828}$$

Démonstration. Soient des vecteurs $v_2, \dots, v_k$. En ce qui concerne la somme sur J, nous notons le multiindice $J = (j_2, \dots, j_k)$ au lieu de $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ pour que ce soit plus simple plus bas :

$$\omega'(v_2, \dots, v_k) = \sum_{J=(j_2,\dots,j_k)} \omega'_J e^*_{\otimes J}(v_2, \dots, v_k) = \sum_{J=(j_2,\dots,j_k)} \omega'_J (v_2)_{j_1} \dots (v_k)_{j_{k-1}}. \tag{12.829}$$

et

$$\begin{aligned}
i_v(\omega)(v_2, \dots, v_k) &= \omega(v, v_2, \dots, v_k) && (12.830a)\\
&= \sum_I \omega_I e^*_{\otimes I}(v, v_2, \dots, v_k) && (12.830b)\\
&= \sum_I v_{i_1}(v_2)_{i_2} \dots (v_k)_{i_k} && (12.830c)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{J=(j_2,\dots,j_k)} \omega_{iJ} v_i (v_2)_{j_2} \dots (v_k)_{j_k} && \text{cf. justif.} \quad (12.830d)\\
&= \sum_J \big(\sum_i \omega_{iJ} v_i \big)(v_2)_{j_2} \dots (v_k)_{j_{k-1}} && \text{cf. justif} \quad (12.830e)
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (12.830d). Nous décomposons la somme sur $I = (i_1, \dots, i_k)$ en une somme sur le premier élément (que nous nommons i) et une somme sur les autres (que nous nommons $J = (j_2, \dots, j_k)$). Dans la notation ω_{iJ}, le iJ signifie le multiindice $(i, j_2, \dots, j_k)$.
- Pour (12.830e). Permuter les sommes.

Vu que $i_v(\omega) = \omega'$, en comparant (12.829) avec (12.830), nous trouvons

$$\omega'_J = \sum_i \omega_{iJ} v_i \tag{12.831}$$

comme il le fallait. □

Proposition 12.283 (Règle de Leibniz pour le produit extérieur[67, 1])**.**
Soient $T \in \Lambda^k V^*$ et $S \in \Lambda^l V^*$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$i_v(T \wedge S) = (i_v T) \wedge S + (-1)^k T \wedge (i_v S). \tag{12.832}$$

Démonstration. Pour des soucis de lisibilité nous notons v_1 pour v et nous calculons en utilisant l'expression du lemme 12.279 pour le produit extérieur :

$$i_{v_1}(T \wedge S)(v_2, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\pi \in S_{(k,l)}} \epsilon(\pi) T\big(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big). \tag{12.833}$$

Vu que les éléments de $\pi \in S_{(k,l)}$ ordonnent séparément $\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$ et $\{\pi(k+1), \dots, \pi(k+l)\}$, la valeur de $\pi^{-1}(1)$ est soit 1 soit $k+1$. Nous définissons donc deux parties :

$$\begin{aligned}
A_{(k,l)} &= \{\pi \in S_{(k,l)} \text{ tel que } \pi(1) = 1\} && (12.834a)\\
B_{(k,l)} &= \{\pi \in S_{(k,l)} \text{ tel que } \pi(k+1) = 1\}. && (12.834b)
\end{aligned}$$

Ces parties ont déjà été introduites et étudiées dans la définition 2.127 et le lemme 2.128. Nous poursuivons (12.833) :

$$\begin{aligned}
i_{v_1}(T \wedge S)(v_2, \dots, v_{k+l}) = &\sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi) T\big(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big)\\
&+ \sum_{\pi \in B} \epsilon(\pi) T\big(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\big) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big)
\end{aligned} \tag{12.835}$$

(1) **Première somme, sur $A_{k,l}$** Nous nous concentrons maintenant sur la première somme, c'est-à-dire les termes avec $\pi(1) = 1$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi) T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)})\\
&\quad = \sum_{\pi \in A} \epsilon(\pi) (i_{v_1} T)(v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(k)}) S\big(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}\big).
\end{aligned} \tag{12.836}$$

C'est le moment de profiter des lemmes 2.127 et 2.132 pour changer la somme. Nous notons

$$f(\pi) = \epsilon(\pi)(i_{v_1}T)(v_{\pi(2)},\dots,v_{\pi(k)})S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big), \tag{12.837}$$

et nous considérons la bijection $\varphi\colon A_{(k,l)} \to S_{(k-1,l)}$. Nous avons aussi $\varphi^{-1}(\tau)i = \tau(i-1)+1$. Et donc, en posant $w_j = v_{j+1}$ pour y voir plus clair :

$$\begin{aligned}
f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big) &= \epsilon\big(\varphi^{-1}(\tau)\big)(i_{v_1}T)\big(v_{\tau(1)+1},\dots,v_{\tau(k-1)+1}\big)S\big(v_{\tau(k)+1},\dots,v_{\tau(k+l-1)+1}\big) && \text{(12.838a)}\\
&= \epsilon(\tau)(i_{v_1}T)\big(w_{\tau(1)},\dots,w_{\tau(k-1)}\big)S\big(w_{\tau(k)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big) && \text{(12.838b)}\\
&= \big(i_{v_1}T\otimes S\big)\big(w_{\tau(1)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big) && \text{(12.838c)}\\
&= \big(i_{v_1}T\otimes S\big)^{\tau}(w_1,\dots,w_{k+l-1}) && \text{(12.838d)}\\
&= \big(i_{v_1}T\otimes S\big)^{\tau}(v_2,\dots,v_{k+l}) && \text{(12.838e)}
\end{aligned}$$

En remettant dans la somme et en utilisant le lemme 2.132, [SUBEQSooSDMCooHmPCZr]

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi\in A} f(\pi) &= \sum_{\tau\in S_{(k-1,l)}} f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big) && \text{(12.839a)}\\
&= \sum_{\tau\in S_{(k-1,l)}} \big(i_{v_1}T\otimes S\big)^{\tau}(v_2,\dots,v_{l+l}) && \text{(12.839b)}\\
&= (i_{v_1}T\wedge S)(v_2,\dots,v_{k+l}) && \text{(12.839c)}
\end{aligned}$$

Cela est déjà le premier terme de (12.832).

(2) **Seconde somme, sur $B_{(k,l)}$** Nous étudions maintenant la somme sur $B_{(k,l)}$ dans (12.835). Nous posons encore

$$f(\pi) = \epsilon(\pi)T\big(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}\big)S\big(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)}\big). \tag{12.840}$$

Nous utilisons la bijection $\varphi\colon B_{(k,l)} \to S_{(k,l-1)}$ du lemme 12.277

$$\sum_{\pi\in B_{(k,l)}} f(\pi) = \sum_{\tau\in S_{(k,l-1)}} f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big). \tag{12.841}$$

Nous avons d'abord $\epsilon\big(\varphi^{-1}(\tau)\big) = (-1)^k\epsilon(\tau)$. Ensuite, pour $j = 1,\dots,k$ nous avons $\varphi^{-1}(\tau)j = \tau(j)+1$. Donc

$$T\big(v_{\varphi^{-1}(\tau)1},\dots,v_{\varphi^{-1}(\tau)k}\big) = T\big(v_{\tau(1)+1},\dots,v_{\tau(k)+1}\big). \tag{12.842}$$ [EQooRVUBooGsYfNE]

Ça, c'était la partie pas très subtile. Nous devons maintenant voir la partie avec S, c'est-à-dire déterminer en termes de τ les valeurs de $\big(\varphi^{-1}(\tau)(k+1),\dots,\varphi^{-1}(\tau)(k+l)\big)$.

Pour la suite, soyez attentifs à la distinction entre des égalités d'ensembles du type $\{a,b\} = \{c,d\}$ qui signifie que a est c ou d et que b est l'autre et les égalités de vecteurs du type $(a,b) = (c,d)$ qui signifie $a = c$ et $b = d$.

Vu que $\varphi^{-1}(\tau)$ est une bijection, nous avons $\varphi^{-1}(\tau)\{1,\dots,k+l\} = \{1,\dots,k+l\}$. Et nous avons déjà vu que

$$\varphi^{-1}(\tau)(1,\dots,k) = \big(\tau(1)+1,\dots,\tau(k)+1\big). \tag{12.843}$$

Mais par ailleurs, vu que τ prend ses valeurs dans $\{1,\dots,k+l-1\}$, nous avons

$$\{1,\dots,k+1\} = \{1,\tau(1)+1,\dots,\tau(k+l-1)+1\}. \tag{12.844}$$

Nous avons donc

$$\varphi^{-1}(\tau)\{k+1,\dots,k+l\} = \{1,\tau(k+1)+1,\dots,\tau(k+l-1)+1\}, \tag{12.845}$$

et comme les valeurs de τ sont ordonnées, nous avons même l'égalité de vecteurs

$$\varphi^{-1}(\tau)(k+1,\dots,k+l) = \big(1,\tau(k+1)+1,\dots,\tau(k+l-1)+1\big). \tag{12.846}$$

En utilisant cela,

$$\begin{aligned}
S\big(v_{\varphi^{-1}(\tau)(k+1)},\dots,v_{\varphi^{-1}(\tau)(k+l)}\big) &= S\big(v_1,v_{\tau(k+1)+1},\dots,v_{\tau(k+l-1)+1}\big) && \text{(12.847a)}\\
&= (i_{v_1}S)\big(w_{\tau(k+1)},\dots,w_{\tau(k+l-1)}\big) && \text{(12.847b)}
\end{aligned}$$

où nous avons posé $w_j = v_{j+1}$.

En écrivant aussi (12.842) en termes de w, nous avons

$$\begin{aligned}
f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big) &= (-1)^k \epsilon(\tau) T\big(w_{\tau(1)}, \dots, w_{\tau(k)}\big)(i_{v_1} S)\big(w_{\tau(k+1)}, \dots, w_{\tau(k+l-1)}\big) && \text{(12.848a)}\\
&= (-1)^k \epsilon(\tau)(T \otimes i_{v_1} S)\big(w_{\tau(1)}, \dots, w_{\tau(k+l-1)}\big) && \text{(12.848b)}\\
&= (-1)^k \epsilon(\tau)(T \otimes i_{v_1} S)^\tau(w_1, \dots, w_{k+l-1}) && \text{(12.848c)}\\
&= (-1)^k \epsilon(\tau)(T \otimes i_{v_1} S)^\tau(v_2, \dots, v_{k+l}). && \text{(12.848d)}
\end{aligned}$$

Et au final, en utilisant l'expression (12.797b) du produit extérieur, [EQooOCIZooXZrqiQ]

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \in B_{(k,l)}} f(\pi) &= (-1)^k \sum_{\tau \in S_{(k,l-1)}} \epsilon(\tau)(T \otimes i_{v_1} S)^\tau(v_2, \dots, v_{k+l}) && \text{(12.849a)}\\
&= (-1)^k (T \wedge i_{v_1} S)(v_2, \dots, v_{k+l}). && \text{(12.849b)}
\end{aligned}$$

(3) **Conclusion** Les deux termes de (12.835) sont (12.839) et (12.849). Nous avons donc finalement

$$i_{v_1}(T \wedge S)(v_2, \dots, v_{k+l}) = (i_{v_1} T \wedge S)(v_2, \dots, v_{k+l}) + (-1)^k (T \wedge i_{v_1} S)(v_2, \dots, v_{k+l}), \tag{12.850}$$

comme demandé.

□

12.16.13 Pull back

Définition 12.284.
Si $f : W \to V$ est linéaire, nous définissons le ***pull back*** $f^* : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^k W^*$ *par*

$$(f^* * T)(w_1, \dots, w_k) = T\big(f(w_1), \dots, f(w_k)\big). \tag{12.851}$$

Proposition 12.285 ([67]).
Pour toute application linéaire $f : W \to V$ nous avons

$$f^*(T \wedge S) = (f^* T) \wedge (f^* S). \tag{12.852}$$

Démonstration. Soient $T \in \bigwedge^k V^*$ et $S \in \bigwedge^l V^*$. En déballant les définitions, nous avons

$$\begin{aligned}
f^*(T \wedge S)(v_1, \dots, v_k) &= (T \wedge S)\big(f(v_1), \dots, f(v_{k+k})\big) && \text{(12.853a)}\\
&= \frac{(k+k)!}{k!l!} \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+k}} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi\big(f(v_1), \dots, f(v_k + l)\big) && \text{(12.853b)}\\
&= \frac{(k+k)!}{k!l!} \frac{1}{k!} && \text{(12.853c)}\\
&\quad \sum_{\pi \in S_{k+k}} (-1)^\pi T\big(f(v_{\pi(1)}), \dots, f(v_{\pi(k)})\big) S\big(f(v_{\pi(k+1)}), \dots, f(v_{\pi(k+l)})\big)\\
&= \frac{(k+k)!}{k!l!} \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+k}} (f^* T)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})(f^* S)(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) && \text{(12.853d)}\\
&= \frac{(k+k)!}{k!l!} \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_{k+k}} (f^* T) \otimes (f^* S)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) && \text{(12.853e)}\\
&= (f^* T) \wedge (f^* S)(v_1, \dots, v_{k+l}). && \text{(12.853f)}\\
& && \text{(12.853g)}
\end{aligned}$$

□

12.16.14 Norme

Nous considérons des espaces vectoriels V et W de dimension finie. L'application (12.677) donne un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned}
\psi : V \otimes W &\to \mathcal{L}(V^*, W)\\
v \otimes w &\mapsto \big(\alpha \mapsto \alpha(v) w\big).
\end{aligned} \tag{12.854}$$

Et ça, c'est très bien, parce que nous connaissons une norme sur $\mathcal{L}(V^*, W)$: la norme opérateur 12.76.

DEFooEXXNooMgIpSV

Définition 12.286 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés de dimension finie V et W. Sur $V \otimes W$ nous définissons, pour $t \in V \otimes W$

$$\|t\| = \|\psi(t)\|_{\mathcal{L}(V^*,W)}. \tag{12.855}$$

LEMooQPXHooJWfpmk

Lemme 12.287 ([1]).
La norme sur $V \otimes W$ vérifie

$$\|v \otimes w\| = \|v\|\|w\| \tag{12.856}$$

pour tout $v \in V$ et $w \in W$.

Démonstration. C'est un simple(?) calcul :

$$\|v \otimes w\| = \|\psi(v \otimes w)\| = \|\alpha \mapsto \alpha(v)w\| = \sup_{\|\alpha\|=1} \|\alpha(v)w\| = \sup_{\|\alpha\|=1} |\alpha(v)|\|w\|. \tag{12.857}$$

Étant donné que V est de dimension finie, $\sup_{\|\alpha\|=1} |\alpha(v)| = \|v\|$[119]. Nous avons donc

$$\|v \otimes w\| = \|v\|\|w\|. \tag{12.858}$$

□

Le lemme suivant montre que $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ n'est pas du tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Au contraire, $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

LEMooVONEooQpPgcn

Lemme 12.288 ([1]).
L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1 \otimes 1 &\mapsto 1 \end{aligned} \tag{12.859}$$

prolongée par linéarité est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. D'abord une base de $\mathbb{R}$ est $\{1\}$; donc une base de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ est $\{1 \otimes 1\}$ par la proposition 12.232. Donc l'application proposée se prolonge par linéarité à tout $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$.

Le fait que φ soit une bijection provient du fait que φ transforme une base en une base ; si vous n'y croyez pas, la vérification de l'injectivité et de la surjectivité est facile.

Pour que φ soit isométrique, nous faisons le calcul

$$\|\varphi(x \otimes y)\| = \|xy(1 \otimes 1)\| = |xy|\|1 \otimes 1\| = |xy| = \|x \otimes y\|. \tag{12.860}$$

Nous avons utilisé la propriété 9.232(3) d'une norme ainsi que le lemme 12.287 pour la norme sur $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$. □

12.16.15 Applications bilinéaires, matrices et produit tensoriel

SECooUKRYooZjagcX

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie. Si α et β sont deux formes linéaires sur un espace vectoriel E, nous définissons $\alpha \otimes \beta$ comme étant la 2-forme donnée par

EQooUNRYooKBrXvK

$$(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v). \tag{12.861}$$

Si a et b sont des vecteurs de E, ils sont vus comme des formes sur E via le produit scalaire et nous avons

$$(a \otimes b)(u, v) = (a \cdot u)(b \cdot v). \tag{12.862}$$

Cette dernière équation nous incite à pousser un peu plus loin la définition de $a \otimes b$ et de simplement voir cela comme la matrice de composantes

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j. \tag{12.863}$$

Cette façon d'écrire a l'avantage de ne pas demander de se souvenir qui est un vecteur ligne, qui est un vecteur colonne et où il faut mettre la transposée. Évidemment $(a \otimes b)$ est soit ab^t soit $a^t b$ suivant que a et b soient ligne ou colonne.

[119] Cela est une des raisons pour lesquelles nous sommes en dimension finie : je ne sais pas si cette égalité est vraie en dimension inifinie.

12.16.16 Application d'opérateurs

LemMyKPzY

Lemme 12.289.
Soient $x, y \in E$ et A, B deux opérateurs linéaires sur E vus comme matrices. Alors

$$(Ax \otimes By) = A(x \otimes y)B^t. \tag{12.864}$$

EqXdxySu

Démonstration. Calculons la composante ij de la matrice $(Ax \otimes By)$. Nous avons

$$\begin{aligned}(Ax \otimes By)_{ij} &= (Ax)_i(By)_j && (12.865a)\\ &= \sum_{kl} A_{ik}x_kB_{jl}y_l && (12.865b)\\ &= A_{ik}(x \otimes y)_{kl}B_{jl} && (12.865c)\\ &= \big(A(x \otimes y)B^t\big)_{ij}. && (12.865d)\end{aligned}$$

□

Le fait que les applications linéaires soient continues[120] est valable dans une assez large gamme d'espaces vectoriels[421]. Nous voyons ici dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension finies.

PROPooADPDooOtukQP

Proposition 12.290.
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Si $f : E \to F$ est une application linéaire et si E est de dimension finie, alors f est continue.

Démonstration. La proposition 12.77 nous dit que $\|f\| < \infty$, c'est-à-dire que f est borné. Donc la proposition 12.98 conclut. □

LemWWXVSae

Lemme 12.291.
Soit F un espace de Banach et deux suites $A_k \to A$ et $B_k \to B$ dans $\mathcal{L}(F, F)$. Alors $A_k \circ B_k \to A \circ B$ dans $\mathcal{L}(F, F)$, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty}(A_kB_k) = \left(\lim_{k\to\infty} A_k\right)\left(\lim_{k\to\infty} B_k\right). \tag{12.866}$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\|A_kB_k - AB\| \leqslant \|A_kB_k - A_kB\| + \|A_kB - AB\|. \tag{12.867}$$

Le premier terme tend vers zéro pour $k \to \infty$ parce que

$$\begin{aligned}\|A_kB_k - A_kB\| &= \|A_k(B_k - B)\| && (12.868a)\\ &\leqslant \|A_k\|\|B_k - B\| \to \|A\| \cdot 0 && (12.868b)\\ &= 0 && (12.868c)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété fondamentale de la norme opérateur : la proposition 12.98. Le second terme tend également vers zéro pour la même raison. □

12.16.17 Convergence en norme et par composante

En dimension infinie, la convergence en norme et la convergence composante par composante ne s'impliquent ni dans un sens ni dans l'autre.

L'exemple suivant devrait être formalisé dans l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable, mais vous voyez l'idée.

Exemple 12.292.
Nous considérons l'ensemble des suites réelle munie de la norme $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^2}$. Dedans nous considérons les vecteurs de base e_i donnés par

$$(e_i)_n = \delta_{in}. \tag{12.869}$$

Ensuite nous considérons la base

$$f_i = e_1 + \frac{1}{2^i}e_i. \tag{12.870}$$

La suite $x_n = f_n - f_1$, dans cette base a toujours -1 comme première composante[121]. Et pourtant elle converge en norme vers 0. △

[120] Proposition 12.98.
[121] N'essayez pas de faire un dessin : ça ne fonctionne qu'en dimension infinie.

12.17 Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé

12.17.1 Limite de fonctions

La limite de fonctions est la définition 9.151.

LEMooTFLVooMMNmQr

Lemme 12.293.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E sur le corps $\mathbb{K}$. Si $f\colon V\to E$ est constante, $f(x)=u$ pour tout $x\in V$, alors pour tout $a\in V$, nous avons la limite $\lim_{x\to a} f(x)=u$.

PROPooBHHCooPbRggh

Proposition 12.294.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Soient deux fonctions $f,g\colon V\to E$. Nous supposons que $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ et $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$. Alors

ITEMooDPBHooKRccPZ

(1) Si $\lambda\in\mathbb{K}$, alors $\lim_{x\to a}\big(f(x)+\lambda\big)=\alpha+\mu$.

ITEMooDKJPooMynOcG

(2) La fonction $f+g$ a une limite $x\to a$ qui vaut $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\alpha+\beta$,

(3) La fonction fg a une limite en a, qui vaut $\lim_{x\to a}(fg)(x)=\alpha\beta$,

LEMooYJGLooVBaglB

Lemme 12.295.
Soient un espace vectoriel normé E ainsi qu'une fonction $f\colon\mathbb{R}\to E$ telle que $\lim_{t\to 0} f(t)=v$. Alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ nous avons

$$\lim_{t\to 0} f(\lambda t)=v. \tag{12.871}$$

Démonstration. Petite clarification pour commencer : E est normé et donc séparé. La proposition 9.154 nous dit que la limite est unique ; nous voilà rassurés sur ce point. Ensuite nous utilisons la définition 9.151 de la limite.

Nous posons $g(t)=f(\lambda t)$. Soit un ouvert V autour de v dans E. Par l'hypothèse de limite pour f, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $f\big(U\setminus\{0\}\big)\subset V$.

En posant $U'=U/\lambda$, nous avons bien $g\big(U'\setminus\{0\}\big)\subset V$. En effet si $t\in U'\setminus\{0\}$, il existe $x\in U\setminus\{0\}$ tel que $t=x/\lambda$ et donc $g(t)=g(x/\lambda)=f(x)\in V$. □

12.17.2 Définition de la différentielle

Quelques motivations pour la notion de différentielle sont données dans 14.25.1.

DefDifferentiellePta

Proposition-Définition 12.296 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés[122] de dimension finie E et F ainsi qu'une fonction $f\colon\mathcal{U}\to F$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de E. Si il existe une application linéaire $T\in\mathcal{L}(E,F)$ satisfaisant

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in E}} \frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{\|h\|_E}=0, \tag{12.872}$$

EqCriterePourDefDiff

alors il en existe une seule.

*Dans ce cas nous disons que f est **différentiable au point** a et l'application T ainsi définie est appelée **différentielle** de f au point a, et nous la notons df_a.*

Démonstration. Soient deux applications linéaires T_1, T_2 satisfaisant la condition (12.872). Nous avons

$$\frac{\|T_1(h)-T_2(h)\|_F}{\|h\|_E}\leqslant\frac{\|T_1(h)-f(a+h)+f(a)\|}{\|h\|}+\frac{\|f(a+h)-f(a)-T_2(h)\|}{\|h\|}\to 0. \tag{12.873}$$

Nous avons donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|(T_1-T_2)(h)\|_F}{\|h\|_E}=0. \tag{12.874}$$

Soit $\epsilon>0$. Ce que signifie la limite est qu'il existe un $r>0$ tel que pour tout $u\in B_E(0,r)$, nous ayons

$$\frac{\|(T_1-T_2)(u)\|_F}{\|u\|_E}<\epsilon. \tag{12.875}$$

Soit $v\in E$. Nous considérons $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\lambda v\in B(0,r)$, par exemple $\lambda<r/\|v\|$. Nous avons

$$\epsilon>\frac{\|(T_1-T_2)(\lambda v)\|_F}{\|\lambda v\|_E}=\frac{\|(T_1-T_2)(v)\|}{\|v\|}. \tag{12.876}$$

[122] Définition 9.232.

Cela donne

$$\|(T_1 - T_2)(v)\| < \|v\|\epsilon. \tag{12.877}$$

Nous avons donc $\|(T_1 - T_2)(v)\| = 0$, soit $T_1(v) = T_2(v)$. □

L'application différentielle

$$\begin{aligned} df\colon E &\to \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df_a \end{aligned} \tag{12.878}$$

est également très importante.

12.17.3 Pas en dimension infinie

Pourquoi ne pas définir la différentielle en dimension infinie[1] ? Dans le cas d'une application linéaire, en posant $T = f$, nous avons toujours la limite (12.872). Autrement dit, une application linéaire est toujours différentiable. Mais si f n'est pas bornée (et donc pas continue en dimension infinie), la limite (12.872) n'implique pas la continuité, parce qu'il n'y a pas de garanties sur la valeur de

$$\lim_{h\to 0} \|T(h)\|. \tag{12.879}$$

Autrement dit, nous pourrions avoir des fonctions différentiables non continues. Pour cela, nous nous abstenons de définir la différentielle d'une application dans le cas de dimension infinie.

12.17.4 Dérivée directionnelle

DEFooCATTooTPLtpR

Définition 12.297 (Dérivée directionnelle)**.**
*Soient des espaces vectoriels normés V et E. Soient une application $f\colon V \to E$ et $u \in V$. La **dérivée directionnelle** de f en $a \in V$ dans la direction u est l'élément de E défini par*

$$(\partial_u f)(a) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a + \epsilon u) - f(a)}{\epsilon} \tag{12.880}$$

pourvu que la limite existe.

*Soient f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La fonction f est **dérivable sur U suivant le vecteur** u, si f est dérivable suivant le vecteur u en tout point de U.*

DEFooOYFZooFWmcAB

Définition 12.298 (Dérivée)**.**
*Soit une application $f\colon \mathbb{R} \to V$ où V est un espace vectoriel normé. La **dérivée** de f en $a \in \mathbb{R}$ est le nombre*

$$f'(a) = (\partial_1 f)(a) \tag{12.881}$$

où ∂_1 est la dérivée directionnelle définie en 12.297.

*Dans le cas où la limite définissant $f'(a)$ existe, nous disons que la fonction f est dérivable en a. La **fonction dérivée** de f est*

$$\begin{aligned} f'\colon A' &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f'(a) \end{aligned} \tag{12.882}$$

définie sur l'ensemble noté A' des points a où f est dérivable.

12.299.
En ce qui concerne les notations, si une base $\{e_i\}$ de V est donnée, nous notons $\partial_i f$ la dérivée de f dans la direction de e_i. La fonction $\partial_i f$ est la **dérivée partielle** de f. Dans le cas de $V = \mathbb{R}^n$, cela est souvent noté

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a + te_i)\Big]_{t=0}. \tag{12.883}$$

12.300.
Même si une fonction est dérivable en un point dans toutes les directions, on n'est pas sûr qu'elle soit continue en ce point. La dérivabilité directionnelle n'est donc pas une notion suffisante pour assurer la continuité. C'est pourquoi on introduit le concept de *différentiabilité.*

Remarque 12.301.
De nombreuses sources parlent de dérivée **dans la direction** du vecteur v en définissant (avec une certaine raison) une **direction** dans $\mathbb{R}^m$ comme étant un vecteur de norme 1.

Ces personnes ne définissent alors $\partial_u f$ que pour $\|u\| = 1$. Pourquoi ? Le but de la dérivée directionnelle dans la direction u est de savoir à quelle vitesse la fonction monte lorsque l'on se déplace en suivant la

direction u. Cette information n'aura un caractère « objectif » que si l'on avance à une vitesse donnée. En effet, si on se déplace deux fois plus vite, la fonction montera deux fois plus vite. Par convention, on demande alors d'avancer à vitesse 1.

Ici, pour être plus souple en termes de notations et de manipulations, nous définissons $\partial_u f$ pour tout u (non nul). Nous devons cependant garder en tête que le nombre $(\partial_v f)(a)$ ne peut pas être interprété comme étant une « vitesse de croissance de f en a » de façon trop sérieuse.

Cas particulier où $n = 2$:

$a = (a_1, a_2)$, $u = (u_1, u_2)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) - f(a_1, a_2)}{t} \tag{12.884}$$

Un cas particulier des dérivées directionnelles est la dérivée partielle. Si nous considérons la base canonique e_i de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}. \tag{12.885}$$

Dans le cas d'une fonction à deux variables, nous avons donc les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) \tag{12.886}$$

qui correspondent aux dérivées directionnelles dans les directions des axes. Ces deux nombres représentent de combien la fonction f monte lorsqu'on part de a en se déplaçant dans le sens des axes X et Y.

LEMooVOTHooPJcrWH

Lemme 12.302.
Nous notons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$. Soient une application $f : E \to F$ ainsi que $a, u \in E$ tels que $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ existe.

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\partial_{\lambda u} f)(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda u)}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(a). \tag{12.887}$$

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme 12.295. D'abord nous avons, pour tout t, λ et a :

$$\frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{t} = \lambda \frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{\lambda t}. \tag{12.888}$$

EQooRDUEooScpIZa

En posant $g(t) = \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$ (t est une variable dans $\mathbb{R}$), l'hypothèse est que $\lim_{t\to 0} g(t)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$. Le lemme 12.295 indique que $\lim_{t\to 0} g(\lambda t)$ existe aussi et vaut la même chose. Donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + \lambda tu) - f(a)}{\lambda t} = \frac{\partial f}{\partial u}(a). \tag{12.889}$$

En prenant la limite dans (12.888), nous avons le résultat. □

Exemple 12.303.
Considérons la fonction $f(x, y) = 2xy^2$. Lorsque nous calculons $\partial_x f(x, y)$, nous faisons comme si y était constant. Nous avons donc $\partial_x f(x, y) = 2y^2$. Par contre lors du calcul de $\partial_y f(x, y)$, nous prenons x comme une constante. La dérivée de y^2 par rapport à y est évidemment $2y$, et par conséquent, $\partial_y f(x, y) = 4xy$. △

PROPooJDJJooInDpCd

Proposition 12.304 ([1]).
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors elle est différentiable en a et

$$df_a(u) = f'(a)u. \tag{12.890}$$

Démonstration. Il faut calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a + \epsilon) - f(a) - f'(a)\epsilon}{|\epsilon|} \tag{12.891}$$

en faisant attention qu'au dénominateur nous avons bien $|\epsilon|$ et non ϵ. Nous devons donc faire séparément la limite vers 0^+ et 0^-. Je fais celle vers 0^-, et vous vous débrouillez pour l'autre.

$$\lim_{\epsilon\to 0^-} \left(\frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{|\epsilon|} - \frac{f'(a)\epsilon}{|\epsilon|} \right) = \lim_{\epsilon\to 0^-} -\frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} + f'(a) \tag{12.892a}$$

$$= 0. \tag{12.892b}$$

□

Pour les fonctions d'une seule variable, la dérivabilité en un point a implique la continuité en a. Cela n'est pas vrai pour les fonctions de plusieurs variables : il existe des fonctions f qui sont dérivables suivant tout vecteur au point a sans pour autant être continue en a.

Exemple 12.305.
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.893}$$

Pour voir que f n'est pas continue en $(0,0)$ il suffit de calculer la limite de f restreinte à la parabole $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Pourtant la fonction f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions. En effet, soit $v = (v_1, v_2)$. Si $v_2 \neq 0$, alors

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}, \tag{12.894}$$

EQooXOCWooVbCjRd

tandis que si $v_2 = 0$, alors la valeur de $f(tv_1, 0)$ est 0 pour tout t et v_1, donc la dérivée partielle de f par rapport à x en l'origine existe et est nulle. △

Exemple 12.306.
Pour une fonction réelle à variable réelle, la dérivabilité entraine la continuité. Il n'en va pas de même pour les fonctions à plusieurs variables, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.895}$$

Nous avons tout de suite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \tag{12.896}$$

De plus si $u_x \neq 0$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{u_y}{u_x}\|u\|. \tag{12.897}$$

Donc toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ existent alors que la fonction n'y est manifestement pas continue. En effet sous forme polaire,

$$f(r,\theta) = \frac{r\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \tag{12.898}$$

et quelle que soit la valeur de r, en prenant θ suffisamment proche de $\pi/2$, la fraction peut être arbitrairement grande.

Nous verrons par la proposition 14.270 que la différentiabilité d'une fonction implique sa continuité. △

DEFooWZGTooKCWBJn

Définition 12.307 (gradient)**.**
Soit une application $f : V \to E$ entre deux espaces vectoriels normés. Soient $a \in V$ et une base finie $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de V. Nous définissons le ***gradient*** *de f en a comme étant le vecteur*

$$(\nabla f)(a) = \begin{pmatrix} (\partial_i f)(a) \\ \vdots \\ (\partial_n f)(a). \end{pmatrix} \tag{12.899}$$

PROPooYCLBooOLoDnM

Proposition 12.308.
Soit une application $f : V \to E$ entre deux espaces vectoriels normés. Soient $u \in V$, $a \in V$ ainsi qu'une base finie $\{e_i\}_I$ de V. Nous supposons que $(\partial_u f(a))$ et $(\partial_i f)(a)$ existent pour tout $i \in I$. Alors

$$(\partial_u f)(a) = \sum_{i\in I} u_i (\partial_i f)(a) = u \cdot (\nabla f)(a). \tag{12.900}$$

PROPooZOFLooBmcZqN

Proposition 12.309.
Soit une application $f\colon V \to E$ différentiable en $a \in V$. Alors toutes les dérivées directionnelles $(\partial_u f)(a)$ existent et

$$(df_a)(u) = \sum_i (\partial_u f)(a). \tag{12.901}$$

Démonstration. L'hypothèse de différentiabilité de f en a dit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h} = 0. \tag{12.902}$$

Soit $u \in V$. Nous utilisons la proposition 11.96 avec le chemin

$$\begin{aligned} \gamma\colon]-1,1[&\to V \\ t &\mapsto tu. \end{aligned} \tag{12.903}$$

Cela donne :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - df_a(tu)}{|t|} = 0. \tag{12.904}$$

nous pouvons dire que la limite $t \to 0$ existant, les limites à gauche et à droite existent et sont toutes deux égales à zéro[123]. À partir de

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a) - df_a(tu)}{|t|} = 0, \tag{12.905}$$

en utilisant la linéarité $df_a(tu) = tdf_a(u)$, nous déduisons que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = df_a(u). \tag{12.906}$$

De même à partir de la limite à gauche nous déduisons

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = df_a(u). \tag{12.907}$$

Et maintenant on utilise la proposition 11.113 pour dire que les limites à gauche et à droite existant et étant égales, la limite existe et est égale :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = df_a(u). \tag{12.908}$$

Cela signifie bien que $(\partial_u f)(a) = df_a(u)$. □

PROPooEOXLooNKHGHj

Proposition 12.310 ([1]).
Si $f\colon V \to E$ est une application différentiable et injective, alors pour tout $x \in v$, l'application linéaire $df_x\colon V \to E$ est injective.

12.17.5 Théorème des accroissements finis

Si une fonction est dérivable en a alors elle peut être approximée « au premier ordre » par une formule simple qui sera généralisée pour des dérivées d'ordre supérieurs avec les séries de Taylor, théorème 14.486. Pour trouver des versions avec des dérivations partielles, voir le thème 55.

PropUTenzfQ

Proposition 12.311 (Développement limité au premier ordre).
Soit un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si $f\colon \mathbb{R} \to E$ est une fonction dérivable[124]*, alors il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to E$ telle que* EQooHBDHooPrVjJD

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) & \text{(12.909a)} \\ \lim_{h\to 0} \dfrac{\alpha(h)}{h} = 0. & \text{(12.909b)} \end{cases}$$

Il existe aussi une fonction $\beta\colon \mathbb{R} \to E$ telle que EQooPWIZooVuhjmt

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\beta(h) & \text{(12.910a)} \\ \lim_{h\to 0} \beta(h) = 0. & \text{(12.910b)} \end{cases}$$

SUBEQooMJTJooOpBfqv

[123] Cela n'est même pas un résultat en plus. C'est la proposition 11.96, avec le chemin γ pris sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$ séparément. Sinon, vous pouvez invoquer la proposition 11.113

[124] Définition 12.298.

Démonstration. La fonction f étant dérivable en a nous avons l'existence de la limite suivante :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{12.911}$$

Nous définissons $\beta\colon \mathbb{R} \to E$ par

$$\beta(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a). \tag{12.912}$$

La proposition 12.294(1) donne directement $\lim_{h\to 0}\beta(h) = 0$. En multipliant par h (qui est différent de 0), et en isolant $f(a+h)$, nous avons la formule (12.910a). En nommant $\alpha(h) = h\beta(h)$ nous trouvons la fonction α de la formule (12.909) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \tag{12.913}$$

avec

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\beta(h) = 0. \tag{12.914}$$

□

PROPooPLWZooCGmjfi

Proposition 12.312.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Soit une application $f\colon V \to E$ dérivable dans le sens de h en $a \in V$. Alors nous avons une application $\beta\colon \mathbb{R} \to E$ telle que

$$\begin{cases} f(a+th) = f(a) + t(\partial_h f)(a) + \beta(t) & \text{(12.915a)}\\ \lim_{t\to 0}\beta(t) = 0. & \text{(12.915b)} \end{cases}$$

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to E\\ t &\mapsto f(a+th). \end{aligned} \tag{12.916}$$

et nous lui appliquons les accroissements finis de la proposition 12.311 : $\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\beta(t)$. En ce qui concerne $\varphi'(0)$ nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon} && \text{(12.917a)}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(a+\epsilon h)-f(a)}{\epsilon} && \text{(12.917b)}\\ &= (\partial_h f)(a) && \text{(12.917c)} \end{aligned}$$

par la définition 12.297. □

val_medio_1

Théorème 12.313 (Accroissements finis pour les dérivées suivant un vecteur)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Soient a et b deux points distincts dans U, tels que le segment[125] *$[a,b]$ soit contenu dans U. Soit u le vecteur*

$$u = \frac{b-a}{\|b-a\|_m}.$$

Si $\partial_u f(x)$ existe pour tout x dans $[a,b]$ on a

$$\|f(b)-f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|\partial_u f(x)\|_n \|b-a\|_m.$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $g(t) = f\big((1-t)a+tb\big)$. Elle décrit la droite entre a et b parce que $g(0) = a$ et $g(1) = b$. En ce qui concerne la dérivée,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\big((1-t-h)a+(t+h)b\big)-f\big((1-t)a+tb\big)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\big(a+(t+h)(b-a)\big)-f\big(a+t(b-a)\big)}{h}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(a+t(b-a)\big)\|b-a\|. \end{aligned} \tag{12.918}$$

[125] Définition 11.53.

Le dernier facteur $\|b-a\|$ apparaît pour la normalisation du vecteur u. En effet dans la limite, il apparaît $h(b-a)$, ce qui donnerait la dérivée le long de $b-a$, tandis que u vaut $(b-a)/\|b-a\|$.

Par le théorème des accroissements finis pour g, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que

$$g(1) = g(0) + g'(t_0)(1-0). \tag{12.919}$$

Donc

$$\|g(1)-g(0)\| \leqslant \sup_{t_0} \|g'(t_0)\| = \sup_{t_0\in]0,1[} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(a+t_0(b-a)) \right\| \|b-a\|. \tag{12.920}$$

Mais lorsque t_0 parcourt $]0,1[$, le point $a+t_0(b-a)$ parcourt le segment $]a,b[$, d'où le résultat. □

PROPooFEUKooKHDuMM

Proposition 12.314 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé V, $x \in V$ et $\alpha\colon \mathbb{R} \to V$ tel que $\lim_{t\to 0} \alpha(t)/t = 0$. Alors il existe $\beta\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0}\beta(t)/t = 0$ et

$$\|x+\alpha(t)\|^2 = \|x\|^2 + \beta(t). \tag{12.921}$$

Démonstration. Nous posons

$$\beta(t) = \|x+\alpha(t)\|^2 - \|x\|^2, \tag{12.922}$$

et nous pouvons calculer

$$\frac{\beta(t)}{t} = \frac{\|x+\alpha(t)\|^2 - \|x\|^2}{t} \tag{12.923a}$$

$$= \frac{\|x\|^2 + 2x\cdot\alpha(t) + \|\alpha(t)\|^2 - \|x\|^2}{t} \tag{12.923b}$$

$$= \frac{2x\cdot\alpha(t) + \|\alpha(t)\|^2}{t} \tag{12.923c}$$

$$= \frac{2c\cdot\alpha(t)}{t} + \frac{\alpha(t)}{t}. \tag{12.923d}$$

En ce qui concerne la limite $t\to 0$. Si t est petit, $\|\alpha(t)\| < 1$ et donc

$$\frac{\|\alpha(t)\|^2}{t} \leqslant \frac{\|\alpha(t)\|}{t} \to 0. \tag{12.924}$$

Nous restons avec $\big(2x\cdot\alpha(t)\big)/t$. Nous utilisons Cauchy-Schwarz (théorème 12.1) :

$$\lim_{t\to 0} \frac{2|x\cdot\alpha(t)|}{t} \leqslant 2\|x\| \lim_{t\to 0} \frac{\|\alpha(t)\|}{t} = 0. \tag{12.925}$$

□

LEMooXRDQooIAVgTm

Lemme 12.315 ([1]).
Soit une application $\beta\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0}\beta(t)/t = 0$. Soit $\lambda > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < t < \delta$, alors $-\lambda t + \beta(t) < 0$.

Démonstration. Soit $\epsilon < \lambda$. Nous considérons δ tel que $|\beta(t)/t < \epsilon|$ pour tout $0 < t < \delta$. Alors nous avons

$$\frac{-\lambda t + \beta(t)}{t} = -\lambda + \epsilon < 0. \tag{12.926}$$

Étant donné que le dénominateur est positif, nous déduisons que le numérateur est négatif. □

12.17.6 Différentielle d'ordre 2

PROPooBODMooJHyzup

Proposition 12.316 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Soit une application $f\colon V\to E$ deux fois différentiable et dont les différentielles partielles secondes existent[126]*. Alors nous avons la formule*

$$(d^2f)_a(v)w = \sum_{ij} (\partial^2_{ij} f)(a) v_i w_j. \tag{12.927}$$

[126] Ces deux hypothèses sont redondantes, mais nous n'avons pas envie de nous prendre la tête avec ça ici.

Démonstration. Rappel à propos des espaces concernés :

$$f\colon V \to E \tag{12.928a}$$
$$df\colon V \to \mathcal{L}(V,E) \tag{12.928b}$$
$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,E)\big). \tag{12.928c}$$

En ce qui concerne la différentielle première nous avons

$$\begin{aligned} df\colon V &\to \mathcal{L}(V,E) \\ a &\mapsto \sum_i (\partial_i f)(a) e_i^*.. \end{aligned} \tag{12.929}$$

□

12.17.7 Quelques mots à propos des différentielles d'ordre supérieur

12.17.7.1 Classe C^k

Nous introduisons quelques notations pour traiter ces espaces.

DefPNjMGqy

Définition 12.317 ([422, 1])**.**
Soient deux espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une application $f\colon V \to W$. Nous disons que f est

- *de classe C^0 si elle est continue,*
- *de classe C^1 si l'application différentielle $df\colon V \to \mathcal{L}(V,W)$ est continue,*
- *de classe C^k si sa différentielle est de classe C^{k-1}.*
- *de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.*

Lorsque nous demandons que la différentielle de f soit continue, nous entendons bien la continuité de $df\colon V \to \mathcal{L}(V,W)$, c'est-à-dire la continuité de df_x par rapport à x. Sur$\mathcal{L}(V,E)$, nous considérons la topologie de la norme opérateur 12.76.

Le lien entre classe C^k et dérivées partielles d'ordre k sera le théorème 14.367.

12.17.7.2 Espaces emboîtés

Soient deux espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une application $f\colon V \to W$. La différentielle est une application $df\colon V \to \mathcal{L}(V,W)$. Pour être clair, la différentielle seconde consiste à différentier df_x par rapport à x. C'est-à-dire que la différentielle seconde est une application $d(df)\colon V \to \mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,W)\big)$.

Et c'est là que commencent les problèmes. Les différentielles successives font intervenir des emboîtements de plus en plus profonds d'espaces comme $d^3f\colon V \to \mathcal{L}\Big(V,\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,W)\big)\Big)$.

DEFooJYOPooBzditG

Définition 12.318.
Soient des espaces vectoriels normés V et E. Nous définissons les espaces emboîtés par récurrence :

$$\begin{cases} E_0 = E & \text{(12.930a)} \\ E_{k+1} = \mathcal{L}(V,E_k). & \text{(12.930b)} \end{cases}$$

Définition 12.319.
Si $\{e_i\}$ est une base d'un espace vectoriel V, nous allons noter

$$\begin{aligned} \omega_i\colon V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i. \end{aligned} \tag{12.931}$$

Ce ω_i est ce qu'on appelle souvent e_i^*. Plus généralement, si I est le multiindice $(i_1,\dots,i_l)$ nous notons $\omega_I \in \mathcal{L}^l(V,\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \omega_I\colon V^l &\to \mathbb{R} \\ (x^{(1)},\dots,x^{(l)}) &\mapsto x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(l)}_{i_l}. \end{aligned} \tag{12.932}$$

Ce seront nos formes multilinéaires de base.

Afin de garder des notations très explicites, nous ne pouvons pas écrire des formules comme

$$df_a = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\omega_i$$

parce que si f prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$, lorsqu'on écrit $df_a(v)$, il n'y a aucune raison à priori de vouloir que v soit pris par ω_i au lieu de $\partial_i f(a)$.

Nous introduisons donc un produit fait exprès pour dire que « c'est celui de droite qui prend ».

DEFooLULCooYjBEaZ

Définition 12.320 ([1])**.**
Si W est un espace vectoriel, nous définissons le produit $\times_n$ par

$$\begin{aligned}\times_1 \colon W \times \mathcal{L}(V,\mathbb{R}) &\to \mathcal{L}(V,W)\\ (w \times_1 \alpha)(v) &= \alpha(v)w\end{aligned} \tag{12.933}$$

et par[127]

$$\begin{aligned}\times_n \colon W \times \mathbb{R}_n &\to W_n\\ (w \times_n \alpha)(v) &= w \times_{n-1} \alpha(v)\end{aligned} \tag{12.934}$$

Cette notation sera utilisée dans la proposition 14.323 pour écrire correctement df_a. Pour l'instant nous n'en avons pas besoin.

12.17.7.3 Difféomorphisme

DefAQIQooYqZdya

Définition 12.321 (difféomorphisme)**.**
*Soient U et V, deux ouverts d'un espace vectoriel normé. Une application f de U dans V est un **difféomorphisme** si elle est bijective, différentiable*[128] *et dont l'inverse $f^{-1} : V \to U$ est aussi différentiable.*

Un C^k-difféomorphisme est un difféomorphisme qui est C^k et dont l'inverse est C^k.

12.322.
Truc marrant : un C^1-difféomorphisme n'est pas seulement un difféomorphisme qui est C^1. L'inverse doit également être C^1. Comment nommer un difféomorphisme qui est par ailleurs un application de classe C^1 ? Je ne sais pas.

12.323.
Sur le wikipédia anglophone[129], on demande que la différentielle de l'inverse soit continue. Ce que wikipédia anglophone nomme *diffeomorphism* est ici un C^1-difféomorphisme.

RemATQVooDnZBbs

Remarque 12.324.
L'application norme étant continue, le critère du théorème 9.215 est en réalité assez général. Par exemple à partir d'une application différentiable[130] $f \colon X \to Y$ nous pouvons considérer la fonction réelle

$$a \mapsto \|df_a\| \tag{12.935}$$

où la norme est la norme opérateur[131]. Si f est de classe C^1 alors cette application est continue et donc bornée sur un compact K de X.

12.17.8 Topologie et norme induite

Nous savons par le lemme 9.178 que la topologie induite est celle de la norme induite.

PROPooORVKooIfIqVL

Proposition 12.325 ([1])**.**
Soient deux espaces vectoriels normés E et F. Soit une application $f \colon E \to F$ de classe C^k. Nous considérons A fermé dans E. Nous considérons les normes induites sur A et $f(A)$.

Alors $f \colon A \to f(A)$ est de classe C^k.

[127] Définition 12.318 pour les espaces E_n et $\mathbb{R}_n$.
[128] Différentiables, définition 12.296.
[129] https://en.wikipedia.org/wiki/Diffeomorphism
[130] Définition 12.296.
[131] Définition 12.76.

12.17.9 Différentielle d'applications linéaires

LEMooZSNMooCfjzOB

Lemme 12.326 (Différentielle d'une application linéaire)**.**
Soient deux espaces vectoriels normés E et F. Soit une application linéaire $f\colon E\to F$.

(1) Si $f\colon E\to F$ est linéaire, alors sa différentielle est

$$\begin{aligned} df\colon E &\to \mathcal{L}(E,F)\\ a &\mapsto f. \end{aligned} \tag{12.936}$$

(2) Si $f\colon E\to F$ est linéaire, toutes les différentielles d'ordre supérieures sont nulles.

(3) Toute application linéaire est de classe C^∞.

(4) Toute application affine est de classe C^∞.

Démonstration. Pour rappel, toujours bon à avoir en tête : $df\colon E\to\mathcal{L}(E,F)$. Soit $a\in E$; nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-f(h)\|_F}{\|h\|_E}=0 \tag{12.937}$$

parce que le numérateur est nul pour tout h. Donc $h\mapsto f(h)$ est la différentielle de f au point a parce que elle vérifie la condition (12.296).

Nous avons prouvé que la différentielle de f est l'application constante

$$\begin{aligned} df\colon E &\to \mathcal{L}(E,F)\\ a &\mapsto f \end{aligned} \tag{12.938}$$

En ce qui concerne la différentielle seconde, nous prouvons que $d(df)_a=0$ pour tout $a\in E$. En effet,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|df_{a+h}-df_a\|_{\mathcal{L}(E,F)}}{\|h\|_E}=0 \tag{12.939}$$

parce que le numérateur vaut $f-f=0$.

Maintenant il n'est pas compliqué de faire une récurrence : si f est de classe C^k et si $d^k(f)=0$, alors $d^k(f)$ est de classe C^1 et $d^kf=0$. □

LEMooAJDLooIPcmIV

Lemme 12.327.
Soient $a<b$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] &\to [0,1]\\ x &\mapsto \frac{x-a}{b-a} \end{aligned} \tag{12.940}$$

EQooIINJooAlSqKF

est un C^∞-difféomorphisme[132]*.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Valeurs dans $[0,1]$** ITEMooLRECooOSEqJL Nous devons prouver que pour tout $x\in[a,b]$, nous avons $f(x)\in[0,1]$. D'une part si $x\in[a,b]$, alors $x-a\geqslant 0$ et donc $(x-a)/(b-a)\geqslant 0$.

Dans l'autre sens, si $(x-a)/(b-a)>1$, alors $x-a>b-a$ et donc $x>b$. Donc $f(x)>1$ n'arrive jamais pour $x\in[a,b]$.

(2) **Injectif** Si $f(x)=f(t)$, alors en simplifiant par $b-a\neq 0$, nous trouvons $x-a=t-a$ et donc $x=t$ (ne citez le lemme 4.69 que si vous êtes capables de le prouver, sinon faites comme si c'était évident et il ne vous arrivera rien).

(3) **Surjectif** Il est vite vérifié que

$$f^{-1}(t)=t(b-a)+a, \tag{12.941}$$

EQooPSAWooNEJFib

et en procédant de même qu'au point (1), nous voyons que pour tout $t\in[0,1]$, $f^{-1}(t)\in[a,b]$.

(4) **De classe C^∞** C'est le lemme 12.326 qui fait le travail parce que (12.940) est affine.

(5) **Inverse de classe C^∞** Encore le lemme 12.326 parce que (12.941) est affine.

□

[132] Définition 12.317.

12.17.10 Différentielle d'applications multilinéaires

Notre objectif est de calculer $df_a(h)$ lorsque $f\colon E_1\times\ldots\times E_n\to F$ est une application multilinéaire. Nous mettons dans ce lemme l'essentiel de la combinatoire du problème.

LEMooOHRGooBKevzM

Lemme 12.328 ([3]).
Soient des espaces de Banach[133] $E_1,\ldots,E_n$ *et* F. *Soit une application multilinéaire* $f\colon E_1\times\ldots\times E_n\to F$. *Soient* $a_i,h_i\in E_i$. *Pour chaque partie* $I\subset\{1,\ldots,n\}$ *nous posons*

$$x_{I,i}=\begin{cases}h_i & si\ i\in I\\ a_i & sinon.\end{cases}\tag{12.942}$$

Alors

EQooTNALooHjnmWv

$$f(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n)=\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}}f(x_{I,1},\ldots,x_{I,n}).\tag{12.943}$$

Démonstration. Nous faisons une récurrence sur n en commençant par $n=1$. Nous avons, par linéarité de f,

$$f(a_1+h_1)=f(a_1)+f(h_1)=f(x_{\varnothing,1})+f(x_{\{1\},1})=\sum_{I\subset\{1\}}f(x_{I,1}).\tag{12.944}$$

Nous supposons que la formule (12.943) est vraie pour n et nous étudions le cas $n+1$. Pour rappel, les éléments a_i et h_i sont fixés. Nous posons $s=a_{n+1}+h_{n+1}$ et nous considérons l'application

$$\begin{aligned}f\colon E_1\times\ldots\times E_n&\to F\\ (y_1,\ldots,y_n)&\mapsto f(y_1,\ldots,y_n,s).\end{aligned}\tag{12.945}$$

C'est une application n-multilinéaire sur laquelle l'hypothèse de récurrence fonctionne :

$$\begin{aligned}f(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n,a_{n+1}+h_{n+1})&=g(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n)&\text{(12.946a)}\\ &=\sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}}f(x_{J,1},\ldots,x_{J,n},s)&\text{(12.946b)}\\ &=\sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}}f(x_{J,1},\ldots,x_{J,n},a_{n+1}+h_{n+1})&\text{(12.946c)}\\ &=\sum_{J\subset\{1,\ldots,n\}}\Big(f(x_{J,1},\ldots,x_{J,n},a_{n+1})\\ &\qquad+f(x_{J,1},\ldots,x_{J,n}+h_{n+1})\Big).&\text{(12.946d)}\end{aligned}$$

SUBEQooRCIPooUQdjXS

En ce qui concerne l'ensemble des parties nous avons

$$\mathcal{P}(1,\ldots,n+1)=\mathcal{P}(1,\ldots,n)\bigcup_{J\in\mathcal{P}(1,\ldots,n)}J\cup\{n+1\}.\tag{12.947}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\mathcal{P}(1,\ldots,n+1)}f(x_{I,1},\ldots,x_{I,n+1})=&\sum_{I\in\mathcal{P}(1,\ldots,n)}f(x_{I,1},\ldots,x_{I,n},x_{I,n+1})\\ &+\sum_{J\in\mathcal{P}(1,\ldots,n)}f(x_{J\cup\{n+\},1},\ldots,x_{J\cup\{n+1\},n},x_{J\cup\{n+1\}},n+1)\end{aligned}$$

Notez que nous sommons sur $J\subset\{1,\ldots,n\}$. Donc à tous les coups, $x_{I,n+1}=a_i$ et $x_{J\cup\{n+1\},n+1}=h_i$, et ce que nous avons dans (12.948) est la même chose que (12.946d). □

PROPooNDCPooWRdSQV

Proposition 12.329 ([1]).
Soient des espaces de Banach $E_1,\ldots,E_n$ *ainsi que* F. *Soit une application* n*-multilinéaire* $f\colon E_1\times\ldots\times E_n\to F$ *que nous supposons être continue. Nous considérons* $a=(a_1,\ldots,a_n)\in E_1\times\ldots\times E_n$ *et* $h=(h_1,\ldots,h_n)\in E_1\times\ldots\times E_n$. *Alors* f *est différentiable et*

$$df_a(h)=f(h_1,a_2,\ldots,a_n)+\ldots+f(a_1,\ldots,a_{n-1},h_n).\tag{12.948}$$

[133] Définition 9.339.

Démonstration. Notre candidat différentielle est l'application

$$T(h_1,\dots,h_n)=f(h_1,a_2,\dots,a_n)+\dots+f(a_1,\dots,a_{n-1},h_n),\tag{12.949}$$

et pour faire tourner la définition (12.872) de la différentielle, nous devons étudier

$$f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)-T(h_1,\dots,h_n).\tag{12.950}$$

Nous reprenons les notations du lemme 12.328. En notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des singletons de $\{1,\dots,n\}$ nous avons

$$\begin{aligned}
&f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)-T(h_1,\dots,h_n) && \text{(12.951a)}\\
&\quad=\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} f(x_1^{(I)},\dots,x_n^{(I)})-f(x_1^{(\varnothing)},\dots,x_n^{(\varnothing)})-\sum_{I\in\mathcal{S}} f(x_1^{(I)},\dots,x_n^{(I)}) && \text{(12.951b)}\\
&\quad=\sum_{I\in\mathcal{F}} f(x_1^{(I)},\dots,x_n^{(I)}) && \text{(12.951c)}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ contenant au moins deux éléments. Notre tâche est est maintenant d'évaluer la norme de ça. Nous avons supposé que f était continue ; donc la proposition 12.116 donne

$$\|f(x_1^{(I)},\dots,x_n^{(I)})\|\leqslant\lambda\|x_1^{(I)}\|\dots\|x_n^{(I)}\|\tag{12.952}$$

pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, étant donnée la norme produit 9.304, nous avons $\|h_i\|\leqslant\|h\|$ pour tout i. Étant donné que nous nous apprêtons à faire $h\to 0$, nous pouvons supposer que $\|h_i\|\leqslant\|a_j\|$ pour tout i et j. Et enfin nous posons $M=\max\{\|a_j\|\}$. Avec tout ça si $I\in\mathcal{F}$,

$$\|x_1^{(I)}\|\dots\|x_n^{(I)}\|\leqslant\|h\|^2M^{n-2}.\tag{12.953}$$

Nous avons donc la majoration

$$\begin{aligned}
\|f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)-T(h_1,\dots,h_n)\|&\leqslant\sum_{I\in\mathcal{F}}\|f(x_1^{(I)},\dots,x_n^{(I)})\| && \text{(12.954a)}\\
&\leqslant\sum_{I\in\mathcal{F}}\lambda\|h\|^2M^{n-2} && \text{(12.954b)}\\
&=\lambda\|h\|^2(2M)^{n-2}. && \text{(12.954c)}
\end{aligned}$$

parce que l'ensemble $\mathcal{F}$ est fini et contient 2^{n-2} éléments. Et enfin

$$\begin{aligned}
\frac{\|f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)-T(h_1,\dots,h_n)\|}{\|h\|}&\leqslant\frac{\lambda(2M)^{n-2}\|h\|^2}{\|h\|} && \text{(12.955a)}\\
&=\lambda\|h\|(2M)^{n-2} && \text{(12.955b)}\\
&\xrightarrow{h\to 0}0. && \text{(12.955c)}
\end{aligned}$$

□

12.17.11 Accroissements finis

LEMooYQZZooVybqjK

Lemme 12.330.
Soit une fonction $f\colon E\to V$ (espaces vectoriels normés) différentiable en $a\in E$. Alors il existe une fonction $\alpha\colon E\to V$ telle que

$$\begin{cases}\lim_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{\|h\|}=0 & \text{(12.956a)}\\ f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\alpha(h). & \text{(12.956b)}\end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit seulement de poser

$$\alpha(h)=f(a+h)-f(a)-df_a(h).\tag{12.957}$$

Le fait que $\alpha(h)/\|h\|\to 0$ est alors la définition de la différentiabilité de f. □

12.17.12 Notations pour les applications linéaires

DEFooTLQUooJvknvi

Définition 12.331 ([423]).
Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

(1) *Si E et F sont deux espaces vectoriels (pas spécialement normés) nous notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.*

(2) *Un **morphisme d'espaces vectoriels normés** est une application linéaire $E \to F$ continue pour la topologie de la norme opérateur.*

L'ensemble des applications linéaires bornées[134] *entre E et F est noté $\mathcal{L}^0(E,F)$.*

(3) *Un **isomorphisme** est un morphisme continu inversible dont l'inverse est continu. Nous notons $\mathrm{GL}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes entre E et F.*

Le groupe $\mathrm{GL}(E,F)$ a la topologie des espaces normés grâce à la norme opérateur définie en 12.76.

12.17.13 (non ?) Différentiabilité des applications linéaires

LemooXXUGooUqCjmp

Lemme 12.332.
Soit une application linéaire f.

(1) *Si f est continue, alors elle est différentiable et $df_a(u) = f(u)$ pour tout a et u.*

(2) *Si f n'est pas continue, alors elle n'est pas différentiable.*

Démonstration. La linéarité de f donne :

$$f(a+h) - f(a) - f(h) = 0, \tag{12.958}$$

et donc prendre $T = f$ dans la définition 12.296 fait fonctionner la limite. De plus T est alors continue par hypothèse ; elle est donc bien la différentielle de f.

Supposons que f ne soit pas continue, prenons une application linéaire continue T, et calculons

$$\frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = \frac{(f-T)(h)}{\|h\|} = (f-T)(e_h) \tag{12.959}$$

EQooFLYMooEKTeQC

où e_h est le vecteur unitaire dans la direction de h. Vu que f n'est pas continue et que T l'est, l'application $f - T$ n'est pas continue. Elle n'est pas pas bornée par la proposition 12.98. Il existe alors un vecteur h tel que $\|(f-T)(e_h)\| > 1$ (et même plus grand que ce qu'on veut).

Donc la limite de (12.959) pour $h \to 0$ ne peut pas être nulle. □

LemLLvgPQW

Lemme 12.333.
Une application linéaire continue est de classe C^∞.

Démonstration. Soit $a \in E$. Étant donné que f est linéaire et continue, elle est différentiable et

$$\begin{aligned} df : E &\to \mathcal{L}^0(E,F) \\ a &\mapsto f \end{aligned} \tag{12.960}$$

est une fonction constante et en particulier continue ; nous avons donc $f \in C^1$. Pour la différentielle seconde nous avons $d(df)_a = 0$ parce que $df(a+h) - df(a) = f - f = 0$. Toutes les différentielles suivantes sont nulles. □

12.17.14 Dérivation en chaine et formule de Leibniz

PropOYtgIua

Proposition 12.334.
Soient $f_i : U \to F_i$, des fonctions de classe C^r où U est ouvert dans l'espace vectoriel normé E et les F_i sont des espaces vectoriels normés. Alors l'application

$$\begin{aligned} f = f_1 \times \ldots \times f_n : U &\to F_1 \times \ldots \times F_n \\ x &\mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \end{aligned} \tag{12.961}$$

est de classe C^r et

$$d^r f = d^r f_1 \times \ldots \times d^r f_n. \tag{12.962}$$

[134] Nous avons vu dans la proposition 12.98 que la continuité était équivalente à être bornée pour la norme opérateur de la définition 12.76.

Démonstration. Soit $x \in U$ et $h \in E$. La différentiabilité des fonctions f_i donne

$$f_i(x+h) = f_i(x) + (df_i)_x(h) + \alpha_i(h) \tag{12.963}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha_i(h)/\|h\| = 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \big(\dots, f_i(x) + (df_i)_x(h) + \alpha_i(h), \dots\big) && (12.964a)\\ &= \big(\dots, f_i(x), \dots\big) + \big(\dots, (df_i)_x(h), \dots\big) + \big(\dots, \alpha_i(h), \dots\big). && (12.964b)\end{aligned}$$

Mais la définition 9.305 de la norme dans un espace produit donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)\big)\|}{\|h\|} = 0, \tag{12.965}$$

ce qui nous permet de noter $\alpha(h) = \big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)\big)$ et avoir $\lim_{h\to 0} \alpha(h)/\|h\| = 0$. Avec tout ça nous avons bien

$$f(x+h) = f(x) + \big((df_1)_x(h), \dots, (df_n)_x(h)\big) + \alpha(h), \tag{12.966}$$

ce qui signifie que f est différentiable et

$$df_x = \big(df_1, \dots, df_n\big). \tag{12.967}$$

□

THOooIHPIooIUyPaf

Théorème 12.335.
Soient des espaces vectoriels normés E, V et W. Nous considérons deux fonctions $f\colon E \to V$ et $g\colon V \to W$. Nous supposons que :

(1) f est différentiable en $a \in E$

(2) g est différentiable en $f(a) \in V$

(3) df_a est de norme finie[135].

Alors $g \circ f\colon E \to W$ est différentiable en a et

$$d(g\circ f)_a(u) = dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big), \tag{12.968}$$

ou encore

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a. \tag{12.969}$$

Démonstration. En utilisant le lemme 12.330 pour les fonctions f et g, nous avons

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h) \tag{12.970}$$

EQooXNWZooJSPiRS

et

$$g\big(f(a)+k\big) = g\big(f(a)\big) + dg_{f(a)}(k) + \beta(k). \tag{12.971}$$

EQooIQZZooWPxMbE

L'application $dg_{f(a)} \circ df_a$ est une application linéaire, et est notre candidat différentielle. En suivant la définition 12.296, nous allons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) - (dg_{f(a)} \circ df_a)(h)}{\|h\|}. \tag{12.972}$$

Si cette limite existe et vaut zéro, alors nous aurons prouvé que le candidat différentielle est correct.

Pour cela, nous emboîtons les formules (12.970) et (12.971) l'une dans l'autre pour avoir :

$$\begin{aligned} (g\circ f)(a+h) &= g\big(f(a) + df_a(h) + \alpha(h)\big) && (12.973a)\\ &= g\big(f(a)\big) + dg_{f(a)}\big(df_a(h) + \alpha(h)\big) + \beta\big(df_a(h) + \alpha(h)\big). && (12.973b)\end{aligned}$$

Vu que $dg_{f(a)}$ est linéaire, le deuxième terme peut être coupé en deux et après recombinaisons,

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) - (dg_{f(a)} \circ df_a)(h) = dg_{f(a)}\big(\alpha(h)\big) + \beta\big(df_a(h) + \alpha(h)\big). \tag{12.974}$$

[135] Je ne suis pas totalement certain que cette hypothèse soit nécessaire, mais en tout cas, elle est utilisée.

Étant donné que $dg_{f(a)}$ est linéaire,

$$\frac{dg_{f(a)}\big(\alpha(h)\big)}{\|h\|} = dg_{f(a)}\left(\frac{\alpha(h)}{\|h\|}\right) \to 0. \tag{12.975}$$

Il nous reste à voir que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|h\|} \tag{12.976}$$

existe au vaut zéro. Vu que df_a est linéaire, il existe $M>0$ tel que[136] $\|df_a(h)\| \leqslant M\|h\|$. D'autre part, vu que $\alpha(h)/\|h\| \to 0$, nous avons $\|\alpha(h)\| \leqslant \|h\|$ pour tout h suffisamment petit.

Donc si h est assez petit, nous avons

$$\|df_a(h)+\alpha(h)\| \leqslant (M+1)\|h\|. \tag{12.977}$$

Soit $\epsilon>0$. Soit $\delta>0$ tel que $\|h\|\leqslant\delta$ implique $\beta(h)/\|h\|\leqslant\epsilon$ et (12.977) en même temps. Soit r tel que $(M+1)r<\delta$; et notons que $r<\delta$. Nous considérons alors $h\in B(0,r)$ et nous calculons :

$$\frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|h\|} = \frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|df_a(h)+\alpha(h)\|}\frac{\|df_a(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|} \leqslant (M+1)\epsilon. \tag{12.978}$$

La limite (12.976) existe donc et vaut zéro. □

12.17.15 Composition

Théorème 12.336 (Différentielle de fonctions composées[424])**.**
Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et V ouvert dans F. Soient des applications de classe C^r $(r\geqslant 1)$

$$f\colon U\to V \tag{12.979a}$$
$$g\colon V\to G. \tag{12.979b}$$

Nous supposons que df_x et $dg_{f(x)}$ sont de norme finie.

Alors l'application $g\circ f\colon U\to G$ est de classe C^r et

$$d(g\circ f)_x = dg_{f(x)}\circ df_x. \tag{12.980}$$

Démonstration. Nous nous fixons $x\in U$. La fonction f est différentiable en $x\in U$ et g en $f(x)$, donc nous pouvons écrire

$$f(x+h) = f(x)+df_x(h)+\alpha(h) \tag{12.981}$$

et

$$g\big(f(x)+u\big) = g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}(u)+\beta(u) \tag{12.982}$$

où la fonction α a la propriété que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}=0; \tag{12.983}$$

et la même chose pour β. La fonction composée en $x+h$ s'écrit donc

$$(g\circ f)(x+h) = g\big(f(x)+df_x(h)+\alpha(h)\big) = g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)+\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big). \tag{12.984}$$

Nous montrons que tous les « petits » termes de cette formule peuvent être groupés. D'abord si h est proche de 0, nous avons[137]

$$\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|} \leqslant \frac{\|df_x\|\|h\|}{\|h\|}+\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}. \tag{12.985}$$

Si h est petit, le second terme est arbitrairement petit, donc en prenant n'importe que $M>\|df_x\|$ nous avons

$$\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant M. \tag{12.986}$$

[136] Ce M est par exemple la norme opérateur de df_a, comme nous l'assure le lemme 12.90. C'est pour ce passage-ci que nous avons supposé que df_a était de norme finie.

[137] Ici nous utilisons l'hypothèse de norme finie pour la différentielle.

Par ailleurs, nous avons

$$\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|h\|}=\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant M\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}. \tag{12.987}$$

Vu que la fraction est du type $\frac{\beta(f(h))}{f(h)}$ avec $\lim_{h\to 0} f(h)=0$, la fraction tend vers zéro lorsque $h\to 0$. En posant

$$\gamma_1(h)=\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big) \tag{12.988}$$

nous avons $\lim_{h\to 0}\gamma_1(h)/\|h\|=0$.

L'autre candidat à être un petit terme dans (12.984) est traité en utilisant le lemme 12.97 :

$$\|dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big)\|\leqslant\|dg_{f(x)}\|\|\alpha(h)\|. \tag{12.989}$$

Donc

$$\frac{\|dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big)\|}{\|h\|}\leqslant\|dg_{f(x)}\|\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}, \tag{12.990}$$

ce qui nous permet de poser

$$\gamma_2(h)=dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big) \tag{12.991}$$

avec γ_2 qui a la même propriété que γ_1. Avec tout cela, en posant $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ nous récrivons

$$(g\circ f)(x+h)=g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}\big(df_x(h)\big)+\gamma(h) \tag{12.992}$$

avec $\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)}{\|h\|}=0$. Tout cela pour dire que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)-\big(dg_{f(x)}\circ df_x\big)(h)}{\|h\|}=0, \tag{12.993}$$

ce qui signifie que

$$d(g\circ f)_x=dg_{f(x)}\circ df_x. \tag{12.994}$$

Nous avons donc montré que si f et g sont différentiables, alors $g\circ f$ est différentiable avec différentielle donnée par (12.980).

Nous passons à la régularité. Nous supposons maintenant que f et g sont de classe C^r et nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon L(F,G)\times L(E,F)&\to L(E,G)\\(A,B)&\mapsto A\circ B.\end{aligned} \tag{12.995}$$

Montrons que l'application φ est continue en montrant qu'elle est bornée[138]. Pour cela nous écrivons la norme opérateur

$$\|\varphi\|=\sup_{\|(A,B)\|=1}\|\varphi(A,B)\|=\sup_{\|(A,B)\|=1}\|A\circ B\|\leqslant\sup_{\|(A,B)\|=1}\|A\|\|B\|\leqslant 1. \tag{12.996}$$

Justifications : d'une part la norme opérateur est une norme algébrique[139], et d'autre part la définition 9.305 de la norme sur un espace produit pour la dernière majoration. L'application φ est donc continue et donc C^∞ par le lemme 12.333. Nous considérons également l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon U&\to L(F,G)\times L(E,F)\\x&\mapsto\big(dg_{f(x)},df_x\big).\end{aligned} \tag{12.997}$$

Vu que f et g sont C^1, l'application ψ est continue. Ces deux applications φ et ψ sont choisies pour avoir

$$(\varphi\circ\psi)(x)=\varphi\big(dg_{f(x)},df_x\big)=dg_{f(x)}\circ df_x, \tag{12.998}$$

c'est-à-dire $\varphi\circ\psi=d(g\circ f)$. Les applications φ et ψ étant continues, l'application $d(g\circ f)$ est continue, ce qui prouve que $g\circ f$ est C^1.

Si f et g sont C^r alors $dg\in C^{r-1}$ et $dg\circ f\in C^{r-1}$ où il ne faut pas se tromper : $dg\colon F\to L(F,G)$ et $f\colon U\to F$; la composée est $dg\circ f\colon x\mapsto dg_{f(x)}\in L(F,G)$.

Pour la récurrence nous supposons que $f,g\in C^{r-1}$ implique $g\circ f\in C^{r-1}$ pour un certain $r\geqslant 2$ (parce que nous venons de prouver cela avec $r=1$ et $r=2$). Soient $f,g\in C^r$ et montrons que $g\circ f\in C^r$. Par la proposition 12.334 nous avons

$$\psi=dg\circ f\times df\in C^{r-1}, \tag{12.999}$$

et donc $d(g\circ f)=\varphi\circ\psi\in C^{r-1}$, ce qui signifie que $g\circ f\in C^r$. □

[138] Proposition 12.98.
[139] Lemme 12.97.

PROPooRCZOooSgvpSE

Proposition 12.337 ([1]).
Soit une application $f\colon E \to V$ de classe C^p. Soit une application linéaire $\varphi\colon V \to W$. Alors $\varphi \circ f$ est de classe C^p.

Démonstration. Toute la preuve est un grand jeu de cohérence des espaces en présence, alors soyez attentifs et capable de dire précisément à quel espace appartient chacun de objets entrant en jeu.

Nous posons $V_0 = V$ et $V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k)$. Idem pour les espaces W_k. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned} \varphi_1\colon \mathcal{L}(E,V) &\to \mathcal{L}(E,W) \\ \alpha &\mapsto \varphi \circ \alpha. \end{aligned} \tag{12.1000}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_k\colon \mathcal{L}(E,V_{k-1}) &\to \mathcal{L}(E,W_{k-1}) \\ \alpha &\mapsto \varphi_{k-1} \circ \alpha. \end{aligned} \tag{12.1001}$$

Notez la cohérence : si $a \in E$, $\alpha(a) \in V_{k-1} = \mathcal{L}(E, V_{k-2})$, et donc

$$(\varphi_{k-1} \circ \alpha)(a) = \varphi_{k-1}\big(\alpha(a)\big). \tag{12.1002}$$

À droite nous avons $\varphi_{k-1}\big(\alpha(a)\big) \in \mathcal{L}(E, W_{k-2}) = V_{k-1}$.

De plus, φ est linéaire ; ça se prouve par récurrence en partant de φ_1 et en se basant sur le fait que φ est linéaire.

C'est parti pour une récurrence.

(1) **Énoncé** Nous allons prouver par récurrence que

$$d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f. \tag{12.1003}$$

pour tout $k \leqslant p$.

(2) **Initialisation**

D'abord, f est de classe C^p, donc différentiable et φ est linéaire donc différentiable. Donc la composée est différentiable et le théorème 12.335 nous donne la différentiabilité de $\varphi \circ f$ ainsi que la formule

$$d(\varphi \circ f)_a(u) = d\varphi_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = (\varphi \circ df_a)(u) = \varphi_1(df_a)(u). \tag{12.1004}$$

Donc $d(\varphi \circ f)_a = \varphi_1(df_a)$, ce qui signifie

$$d(\varphi \circ f) = \varphi_1 \circ df. \tag{12.1005}$$

C'est bon pour $k = 1$.

(3) **Le pas de récurrence**

Vu que f est de classe C^p, $d^k f$ est encore différentiable. Vu que φ_k est encore linéaire, nous pouvons encore utiliser la règle de différentiation de fonctions composées sur l'application $\varphi_k \circ d^k f$. Nous avons :

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a(u) = d\big(d^k(\varphi \circ f)\big)_a(u) = d(\varphi_k \circ d^k f)_a(u). \tag{12.1006}$$

C'est le moment d'utiliser la formule de différentiation en chaine :

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a(u) = \big((d\varphi_k)_{d^k f_a} \circ d^{k+1} f_a\big)(u). \tag{12.1007}$$

Mais φ_k étant linéaire, $(d\varphi_k)_{d^k f_a} = \varphi_k$, donc

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a(u) = (\varphi_k \circ d^{k+1} f_a)(u). \tag{12.1008}$$

Donc, en oubliant l'application au vecteur u,

$$d^{k+1}(\varphi \circ f)_a = \varphi_k \circ d^{k+1} f_a = \varphi_{k+1}\big(d^{k+1} f_a\big) = (\varphi_{k+1} \circ d^{k+1} f)(a). \tag{12.1009}$$

Nous avons donc bien

$$d^{k+1}(\varphi \circ f) = \varphi_{k+1} \circ d^{k+1} f. \tag{12.1010}$$

□

PROPooGJGVooWnbeAe

Proposition 12.338 ([1]).
Soient des espaces vectoriels E, V et W de dimension finie, et une fonction $f\colon E\to V$ de classe C^p. Si $\varphi\colon V\to W$ est linéaire, alors

$$\varphi\circ f\colon E\to W \tag{12.1011}$$

est de classe C^p.

Démonstration. En utilisant le théorème de différentiation de fonctions composées 12.335,

$$d(\varphi\circ f)_a(u)=d\varphi_{f(a)}df_a(u), \tag{12.1012}$$

et donc, parce que φ est linéaire,

$$d(\varphi\circ f)_a=\varphi\circ df_a. \tag{12.1013}$$

Nous pouvons exprimer cela de façon un peu différente en posant $\varphi_1\colon\mathcal{L}(E,V)\to\mathcal{L}(E,W)$,

$$\varphi_1(\alpha)(a)=(\varphi\circ\alpha)(a). \tag{12.1014}$$

Cela nous permet d'écrire $\varphi\circ df_a=(\varphi_1\circ df)(a)$ et donc

EQooUJPWooTzgSJx

$$d(\varphi\circ f)=\varphi_1\circ df \tag{12.1015}$$

où φ_1 est encore une application linéaire. Une récurrence semble possible. Nous posons $V_0=V$ et $W_0=W$ puis

$$V_{k+1}=\mathcal{L}(E,V_k) \tag{12.1016a}$$
$$W_{k+1}=\mathcal{L}(E,W_k) \tag{12.1016b}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_k\colon\mathcal{L}(E,V_{k-1})&\to\mathcal{L}(E,W_{k-1})\\ g&\mapsto\varphi_{k-1}\circ g.\end{aligned} \tag{12.1017}$$

Avec tout cela, nous prétendons que $d^k(\varphi\circ f)=\varphi_k\circ d^kf$ avec φ_k linéaire.

(1) **φ_k est linéaire** Soient $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{L}(E,V_{k-1})$, ainsi que $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Nous avons, en utilisant la linéarité de φ_{k-1} :

$$\varphi_k(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2)(a)=\varphi_{k-1}\big((\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2)(a)\big) \tag{12.1018a}$$
$$=\varphi_{k-1}\big(\lambda\alpha_1(a)\big)+\mu\varphi_{k-1}\big(\alpha_2(a)\big) \tag{12.1018b}$$
$$=\lambda\varphi_k(\alpha_1)a+\mu\varphi_k(\alpha_2)a. \tag{12.1018c}$$

Donc φ_k est linéaire pour tout k.

(2) **La relation** La relation

$$d^k(\varphi\circ f)=\varphi_k\circ d^kf \tag{12.1019}$$

se démontre par récurrence, chaque pas étant justifié de la même manière que (12.1015).

□

PROPooLRRMooRzrTNE

Proposition 12.339 (Composition).
Soient trois espaces vectoriels normés E,V,W de dimension finie. Si les applications $f\colon E\to V$ et $g\colon V\to W$ sont de classe C^p, alors la composée $g\circ f\colon E\to W$ est de classe C^p.

12.17.16 Règle de Leibniz

PROPooNUAJooMtJByS

Proposition 12.340 ([1]).
Soit une application différentiable $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$(df_i)_x(v)=df_x(v)_i \tag{12.1020}$$

PROPooZKYBooLLNKHu

Proposition 12.341 ([1]).
Soient deux fonctions $f,g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. En posant $h(x)=f(x)g(x)$ nous avons

$$dh_x(v)=f(x)dg_x(v)+g(x)df_x(v). \tag{12.1021}$$

PROPooOIMLooUhkkmy

Proposition 12.342 ([1]).
Soient deux fonctions différentiables $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. En posant $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, nous avons

$$dh_x = df_x(v) \cdot g(x) + f(x) \cdot (dg_x)(v). \tag{12.1022}$$

Démonstration. Nous avons $h(x) = \sum_i f_i(x)g_i(x)$. À cela nous pouvons appliquer la règle de Leibniz usuelles 12.341, en tenant compte de 12.340 :

$$dh_x(v) = \sum_i (df_i)_x(v)g_i(x) + \sum_i f_i(x)(dg_i)_x(v) \tag{12.1023a}$$

$$= (df)_x(v) \cdot g(x) + f(x) \cdot (dg_x)(v). \tag{12.1023b}$$

□

12.17.17 Inverse

LemooTJSZooWkuSzv

Lemme 12.343.
Si $f\colon U \to V$ est un difféomorphisme[140] *alors pour tout $a \in U$, l'application df_a est inversible et*

$$(df_a)^{-1} = (df^{-1})_{f(a)}. \tag{12.1024}$$

Démonstration. Il suffit d'apercevoir qu'en vertu de la règle de différentiation en chaine (12.980),

$$(df_a)(df^{-1})_{f(a)} = d(f \circ f^{-1})_{f(a)} = \mathrm{Id}\,. \tag{12.1025}$$

□

PROPooNONAooCyAtce

Proposition 12.344.
Soient des ouverts A de $\mathbb{R}^p$ et B de $\mathbb{R}^m$. Si il existe un difféomorphisme $f\colon A \to B$, alors $p = m$.

Démonstration. Vu que f est un difféomorphisme, le lemme 12.343 fait son travail : l'application linéaire $df_a\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ est inversible d'inverse $df^{-1}_{f(a)}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

Or une application linéaire ne peut pas être bijective entre espaces de dimensions différentes (finies). Donc $p = m$. □

PROPooQWIUooFaNzTx

Proposition 12.345 ([1]).
L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est différentiable pour tout $x \neq 0$.

Démonstration. C'est un cas particulier de la proposition 12.304. □

12.17.18 Différentiation de produit tensoriel

Si nous avons deux applications $f\colon E \to V$ et $g\colon E \to W$, alors nous voudrions considérer la fonction

$$\begin{aligned} f \otimes g\colon E &\to V \otimes W \\ a &\mapsto f(a) \otimes g(a). \end{aligned} \tag{12.1026}$$

Le problème avec cette notation est que très souvent, les applications f et g sont des éléments d'espaces vectoriels. Si par exemple $f \in \mathcal{L}(E, V)$ et $g \in \mathcal{L}(E, W)$, nous avons $f \otimes g \in \mathcal{L}(E, V) \otimes \mathcal{L}(E, W)$. Dans le Frido nous ne nous permettons pas de dire calmement que $\mathcal{L}(E, V) \otimes \mathcal{L}(E, W) = \mathcal{L}(E, V \otimes W)$. Et je ne vous dit même pas à quel point il n'est pas évident, si $f \in C^\infty(E, V)$ et $g \in C^\infty(E, W)$ que nous aurions $f \otimes g \in C^\infty(E, V) \otimes C^\infty(E, W) = C^\infty(E, V \otimes W)$.

Tout cela pour dire que nous n'allons pas nous lancer dans des abus de notations. Non. Au lieu de cela, nous introduisons une notation. Pour rappel, dans tout le Frido, $\mathrm{Fun}(A, B)$ désigne l'ensemble de toutes les application de A vers B sans suppositions de régularité. Pour les puristes, nous précisions que si $f \in \mathrm{Fun}(A, B)$, nous supposons que f est définie sur tout A. Hum … sauf mention du contraire.

DEFooMVNDooFWFtRn

Définition 12.346.
Si $f \in \mathrm{Fun}(E, V)$ et $g \in \mathrm{Fun}(E, W)$, alors nous définissons

$$\begin{aligned} f\tilde{\otimes}g\colon E &\to V \otimes W \\ a &\mapsto f(a) \otimes g(a). \end{aligned} \tag{12.1027}$$

[140] Définition 12.321

PROPooCRVXooEGxdZl

Proposition 12.347.
Soient des applications continues $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ entre espaces vectoriels de dimension finies. Alors la fonction $f\tilde{\otimes}g\colon E\to V\otimes W$ est continue.

Démonstration. Soient $a\in E$ ainsi qu'une suite $x_k\to a$ dans E. Nous voulons prouver que $f\tilde{\otimes}g(x_k)\xrightarrow{V\otimes W} f(a)\otimes g(a)$. Nous avons :

EQooSNXUooXrYOeY
$$\|f(x_k)\otimes g(x_k)-f(a)\otimes g(a)\|\leqslant\|f(x_k)\otimes g(x_k)-f(x_k)\otimes g(a)\|+\|f(x_k)\otimes g(a)-f(a)\otimes g(a)\|. \tag{12.1028}$$

Ensuite en utilisant la classe d'équivalence (12.646b),

$$f(x_k)\otimes g(x_k)-f(x_k)\otimes g(a)=f(x_k)\otimes\big(g(x_k)-g(a)\big), \tag{12.1029}$$

et en ce qui concerne les normes,

$$\|f(x_k)\otimes g(x_k)-f(x_k)\otimes g(a)\|=\|f(x_k)\|\|\big(g(x_k)-g(a)\big)\|. \tag{12.1030}$$

Mais par hypothèse, $f(x_k)\to f(a)$ et $g(x_k)\to g(a)$. Donc le tout tend vers zéro lorsque $k\to\infty$.

Le même raisonnement fonctionne avec le second terme de (12.1028). □

Lorsque nous parlons de différentielle de produit de fonctions, nous voulons étudier la différentiabilité de $f\tilde{\otimes}g$ sous l'hypothèse de différentiabilité de f et g. Et aussi, si f et g sont de classe C^p, est-ce que $f\tilde{\otimes}g$ est également de classe C^p ?

Nous voudrions avoir une formule du type

$$d(f\tilde{\otimes}g)=df\tilde{\otimes}g+f\tilde{\otimes}dg, \tag{12.1031}$$

mais ça ne colle pas au niveau des espaces. En effet, en évaluant cela en $a\in E$, nous avons à gauche $d(f\tilde{\otimes}g)_a\in\mathcal{L}(E,V\otimes W)$, tandis qu'à droite nous avons $df_a\otimes g(a)\in\mathcal{L}(E,V)\otimes W$ et $f(a)\otimes dg_a\in V\otimes\mathcal{L}(E,W)$.

Nous pourrions bien entendu dire que $V\otimes\mathcal{L}(E,W)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E,V\otimes W)$ et hop voilà, on n'en parle plus. Ce serait passer sur deux points importants. D'abord est-ce que $V\otimes\mathcal{L}(E,W)$ est vraiment isomorphe à $\mathcal{L}(E,V\otimes W)$? Et ensuite, l'isomorphisme implique une utilisation du théorème 12.335 qui est tout sauf une trivialité.

Bref, fidèle au principe fridesque de ne pas cacher des difficultés techniques sous des abus de notations, nous allons écrire les choses explicitement.

Lemme 12.348.
Si E, V et W sont de dimension finie, les applications

EQooVWXRooCesUqH
$$\begin{aligned}\psi\colon\mathcal{L}(E,V)\otimes W&\to\mathcal{L}(E,V\otimes W)\\ f\otimes w&\mapsto\Big(u\mapsto f(u)\otimes w\Big)\end{aligned} \tag{12.1032}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi\colon V\otimes\mathcal{L}(E,W)&\to\mathcal{L}(E,V\otimes W)\\ v\otimes g&\mapsto\big(a\mapsto v\otimes g(a)\big).\end{aligned} \tag{12.1033}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Dans le meilleur des mondes, ces applications devraient être affublés d'indices V et W.

Démonstration. Nous donnons des détails à propos de ψ. Pour φ c'est la même chose.

(1) **Linéaire** La formule (12.1032) définit ψ en particulier sur une base de $\mathcal{L}(E,V)\otimes W$ par la proposition 12.232(1). Ce que signifie réellement la formule (12.1032) est que ψ est ainsi définie sur la base et est prolongée par continuité.

(2) **Injective** Si pour un f et un w fixé nous avons $\psi(f\otimes w)=0$, alors il y a deux cas : soit $w=0$ soit $w\neq 0$. Dans le premier cas, $f\otimes w=0$, et dans le second cas, nous remarquons que

$$0=\psi(f\otimes w)(a)=f(a)\otimes w \tag{12.1034}$$

pour tout $a\in E$. Cela implique $f(a)=0$ pour tout a et donc $f=0$, ce qui signifie que $f\otimes w=0$.

(3) **Bijective** En utilisant la proposition 12.232 et le lemme 6.47(2), nous avons égalité des dimensions entre $\mathcal{L}(\overline{E}, V) \otimes W$ et $\mathcal{L}(E, V \otimes W)$.

Une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie) est une bijection.

□

PROPooZOAFooRMeBgI

Proposition 12.349.
Soient des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $f\colon E \to V$ et $g\colon E \to W$ des fonctions de classe C^1. Alors $f\tilde{\otimes}g\colon E \to V \otimes W$ est de classe C^1 nous avons les formules

$$d(f\tilde{\otimes}g)_a(u) = df_a(u) \otimes g(a) + f(a) \otimes dg_a(u) \tag{12.1035}$$

EQooSUSCooBhZXEC

ainsi que

$$d(f\tilde{\otimes}g) = \psi \circ (df\tilde{\otimes}g) + \varphi \circ (f\tilde{\otimes}dg). \tag{12.1036}$$

EQooOCEEooUrsIDd

Démonstration. Nous commençons par prouver que $f\tilde{\otimes}g$ est différentiable en injectant le candidat (12.1035) dans la définition. Au numérateur nous avons :

$$(f\tilde{\otimes}g)(a+h) - (f\tilde{\otimes}g)(a) - df_a(h) \otimes g(a) - f(a) \otimes dg_a(h). \tag{12.1037}$$

EQooOMXSooYsAjKb

Le lemme 12.330 assure qu'il existe une fonction $\alpha\colon E \to V$ telle que $\lim_{h\to 0} \alpha(h)/\|h\| = 0$ et $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h)$. Même chose pour g. Nous avons donc

$$(f\tilde{\otimes}g)(a+h) = f(a+h) \otimes g(a+h) = \big(f(a) + df_a(h) + \alpha(h)\big) \otimes \big(g(a) + dg_a(h) + \beta(h)\big) \tag{12.1038}$$

qui se développe en 9 termes. En effectuant les différences dans (12.1037), nous nous retrouvons avec un numérateur qui vaut

$$f(a) \otimes \beta(h) + df_a(h) \otimes dg_a(h) + df_a(h) \otimes \beta(h) + \alpha(h) \otimes g(a) + \alpha(h) \otimes dg_a(h) + \alpha(h) \otimes \beta(h). \tag{12.1039}$$

Nous pouvons prouver terme à terme qu'en divisant par $\|h\|$ nous avons une limite qui vaut zéro. Par exemple,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a) \otimes \beta(h)}{\|h\|} \tag{12.1040}$$

se calcule en prenant la norme du numérateur et en utilisant le lemme 12.287 :

$$\frac{\|f(a) \otimes \beta(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|f(a)\|\|\beta(h)\|}{\|h\|} \to 0. \tag{12.1041}$$

Tous les termes contenant $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ se traitent de la même manière. Le dernier terme à traiter est

$$\lim_{h\to 0} \frac{df_a(h) \otimes dg_a(h)}{\|h\|}. \tag{12.1042}$$

En prenant la norme du numérateur, en utilisant encore le lemme 12.287 et en utilisant le lemme 12.90, nous avons

$$\|df_a(h) \otimes dg_a(h)\| = \|df_a(h)\|\|dg_a(h)\| \leqslant \|df_a\|\|dg_a\|\|h\|^2, \tag{12.1043}$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{df_a(h) \otimes dg_a(h)}{\|h\|} = 0. \tag{12.1044}$$

Notons que l'utilisation du lemme 12.90 requière que df_a soit continue, ce qui n'est pas évident en dimension infinie : une application linéaire n'est pas spécialement continue. C'est donc ici que nous utilisons le fait que E, V et W sont de dimension finie[141].

Ceci prouve que $f\tilde{\otimes}g$ est différentiable et nous donne la formule (12.1035) pour appliquer sa différentielle à un élément de E. La formule (12.1036) est un corolaire : elle se vérifie en l'appliquant à a puis à u.

Pour terminer nous devons prouver que $d(f\tilde{\otimes}g)$ est continue. Vu que f et g sont de classe C^1, les applications f, g, df et dg sont continues. Les applications ψ et φ sont également continues parce que linéaires sur des espaces de dimension finie. La proposition 12.347 appliquée à df et g montre que $df\tilde{\otimes}g$ est continue. La composition avec ψ qui est linéaire conserve la continuité.

Donc le membre de droite de (12.1036) est continu et $f\tilde{\otimes}g$ a une différentielle continue. Elle est donc de classe C^1. □

[141] Il y a surement moyen de paufiner, et d'affaiblir cette hypothèse, mais je ne me lance pas là-dedans.

Il est temps de démontrer le truc difficile, à savoir que si f et g sont de classe C^p, alors $f\tilde{\otimes}g$ est également de classe C^p.

PROPooAWZFooMlhoCN

Proposition 12.350.
Nous appelons P_k la propriété suivante :

> *Pour tout espaces vectoriels normés E, V, W de dimension finies et pour toutes applications $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ de classe C^k, la fonction $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^k.*

ITEMooDQRYooAEdxrW

(1) La propriété P_k est vraie pour tout k.

ITEMooUUIFooGDyTMM

(2) Si $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ sont de classe C^p, alors $f\tilde{\otimes}g\colon E\to V\otimes W$ est de classe C^p.

Démonstration. Il est compliqué de prouver le point (2) directement par récurrence pour des f, g, E, V et W fixés. La raison de cette difficulté est que les espaces en jeu dans les différentielles de f et g aux différents ordres sont tous différents. Il faut donc, pour chaque ordre de différentielle, repartir sur de tout nouveaux espaces vectoriels. C'est pour cela que nous incluons « pour tout espaces vectoriels » dans la propriété de récurrence.

Bref, une fois que (1) sera démontrée, le point (2) sera immédiat.

(1) **Pour $k=0$** Pour $k=0$. Nous supposons que f et g sont de classe C^0, c'est-à-dire continues. La proposition 12.347 montre alors que $f\tilde{\otimes}g$ est continue, c'est-à-dire de classe C^0.

(2) **Pour $k=1$** Bien que ce ne soit pas tout à fait nécessaire, nous prouvons que P_1 est également vraie avant de passer à la récurrence. Si f et g sont de classe C^1, alors la proposition 12.349 s'applique : $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^1.

(3) **Pour $k+1$** Nous faisons la récurrence en supposant que P_k est vraie, et en prouvant que P_{k+1} est vraie. Nous considérons des applications $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ de classe C^{k+1}. La proposition 12.349 dit que $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^1 et que

$$d(f\tilde{\otimes}g)=\psi\circ(df\tilde{\otimes}g)+\varphi\circ(f\tilde{\otimes}dg). \tag{12.1045}$$

À droite, df et g sont de classe C^k parce que f et g sont de classe C^{k+1}. Donc $df\tilde{\otimes}g$ est de classe C^k par l'hypothèse de récurrence appliquée aux espaces $\mathcal{L}(E,V)$ et W. La proposition 12.337 nous assure alors que $\psi\circ(df\tilde{\otimes}g)$ est de classe C^k également.

Nous avons prouvé que $d(f\tilde{\otimes}g)$ est de classe C^k, donc $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^{k+1}. Cela nous fait la récurrence.

□

12.17.19 Produit cartésien

Lorsque nous parlons de produit cartésien d'espaces vectoriels normés, nous utilisons la norme produit 9.306.

LEMooVFXXooAHjCzc

Lemme 12.351 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X_1,X_2,Y_1,Y_2 ainsi que des applications différentiables $f\colon X_1\to Y_1$ et $g\colon X_2\to Y_2$. Nous supposons avoir

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\|x\|}=0 \tag{12.1046}$$

et

$$\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{\|y\|}. \tag{12.1047}$$

Alors nous avons

$$\frac{\big(f(x),g(x)\big)}{\|(x,y)\|}\xrightarrow{X\times Y}0. \tag{12.1048}$$

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. Il existe $r>0$ tel que si $x\in B_{X_1}(0,r)$ et $y\in B_{X_2}(0,r)$ alors $\|f(x)\|/\|x\|<\epsilon$ et $\|g(y)\|/\|y\|<\epsilon$. Il y a 4 possibilités suivant l'ordre de $\|f(x)\|$ et $\|g(y)\|$ ainsi que de $\|x\|$ et $\|y\|$.

(1) **Si $\|f(x)\|\geqslant\|g(y)\|$**

(1a) **Si** $\|x\| \geqslant \|y\|$ Dans ce cas

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|} = \frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leqslant \epsilon. \tag{12.1049}$$

Celle-là était facile.

(1b) **Si** $\|y\| \geqslant \|x\|$ Ici nous majorons la fraction en minorant le dénominateur :

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|} = \frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leqslant \epsilon. \tag{12.1050}$$

(2) **Si** $\|f(y)\| \geqslant \|g(y)\|$

(2a) **Si** $\|x\| \geqslant \|y\|$

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|} = \frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} = \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \leqslant \epsilon. \tag{12.1051}$$

(2b) **Si** $\|y\| \geqslant \|x\|$

$$\frac{\|(f(x),g(x))\|}{\|(x,y)\|} = \frac{\max\{\|f(x)\|,\|g(x)\|\}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \leqslant \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} \leqslant \epsilon. \tag{12.1052}$$

Dans nous les cas nous avons bien

$$\frac{\|\big(f(x),g(y)\big)\|}{\|(x,y)\|} \leqslant \epsilon. \tag{12.1053}$$

□

LEMooAAYVooJZyRTq

Lemme 12.352 ([1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés X_1, X_2, Y_1, Y_2 ainsi que des applications différentielles $f\colon X_1 \to Y_1$ et $g\colon X_2 \to Y_2$. Soient $a \in X_1$ et $b \in X_2$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f \times g\colon X_1 \times X_2 &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x,y) &\mapsto \big(f(x),g(y)\big) \end{aligned} \tag{12.1054}$$

est différentiable en (a,b) et

$$f(f\times g)_{a,b}(x,y) = \big(df_a(x), dg_b(y)\big). \tag{12.1055}$$

Démonstration. Nous vérifions que l'application $T(x,y) = \big(df_a(x), dg_b(y)\big)$ satisfait la définition de la différentielle. Nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{(f\times g)\big((a,b)+(h_1,h_2)\big) - (f\times g)(a,b) - T(h_1,h_2)}{\|h\|} \\ &= \frac{\Big(f(a+h_1) - f(a) - df_a(h_2), g(b+h_2) - g(b) - dg_b(h_2)\Big)}{\|h\|}. \end{aligned} \tag{12.1056}$$

Le lemme 12.351 montre alors que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\times g)\big((a,b)+(h_1,h_2)\big) - (f\times g)(a,b) - T(h)}{\|h\|} = 0, \tag{12.1057}$$

et donc que $f \times g$ est différentiable en (a,b) et que sa différentielle est T. □

Nous verrons dans la proposition 17.230 que $f \times g$ est analytique si f et g le sont.

PROPooCOBHooICFDMU

Proposition 12.353 ([1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés X_1, X_2, Y_1, Y_2 ainsi que des applications $f\colon X_1 \to Y_1$ et $g\colon X_2 \to Y_2$ de classe $\mathcal{A}$ (différentiable, C^k). Alors l'application

$$f \times g\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2 \tag{12.1058}$$

est dans la classe $\mathcal{A}$.

Démonstration. En plusieurs parties.

Différentiable

C'est le lemme 12.352.

Classe C^k

Nous y allons par récurrence. Si f et g sont de classe C^k, alors $a \mapsto df_a$ et $b \mapsto df_b$ sont de classe C^{k-1}. Vu que $d(f \times g)_{a(,b)} = df_a \times df_b$, l'application $(a,b) \mapsto d(f \times g)_{(a,b)}$ est produit cartésien d'applications C^{k-1}. Par hypothèse de récurrence, ce produit est de classe C^{k-1}. Vu que $d(f \times g)$ est de classe C^{k-1}, l'application $f \times g$ elle-même est de classe C^k. □

PROPooCILMooHCcOYU

Proposition 12.354 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X et Y. La projection

$$\begin{aligned} \texttt{proj}\colon X \times Y &\to X \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned} \tag{12.1059}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. Soit $(a,b) \in X \times Y$. Le candidat différentielle de `proj` en (a,b) est l'application

$$\begin{aligned} T\colon X \times Y &\to X \\ (x,y) &\mapsto x. \end{aligned} \tag{12.1060}$$

Nous avons

$$\frac{\texttt{proj}\big((x,y)+h\big) - \texttt{proj}(x,y) - T(h_1,h_2)}{\|h\|} = \frac{x + h_1 - x - h_1}{\|h\|} = 0. \tag{12.1061}$$

Même pas besoin de prendre de limite. Donc pour tout $(a,b) \in X \times Y$ nous avons

$$d\,\texttt{proj}_{(a,b)} = T. \tag{12.1062}$$

Vu que l'application différentielle

$$\begin{aligned} d\,\texttt{proj}\colon X \times Y &\to \mathcal{L}(X \times Y, X) \\ (a,b) &\mapsto T \end{aligned} \tag{12.1063}$$

est constante, elle est de classe C^∞. □

PROPooHYASooHxYIBc

Proposition 12.355 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X, Y_1 et Y_2. Nous considérons une application $\varphi\colon X \to Y_1 \times Y_2$, et les applications $f\colon X \to Y_1$ et $g\colon X \to Y_2$ définies par

$$\varphi(x) = \big(f(x), g(x)\big). \tag{12.1064}$$

Alors f et g sont de classe C^k.

Démonstration. En utilisant la projection $\texttt{proj}\colon X \times Y \to X$ de la proposition 12.354, nous avons $f = \texttt{proj} \circ \varphi$. Cette application est de classe C^k en tant que composition d'application de classe C^k. □

12.17.20 Formule des accroissements finis

PropDQLhSoy

Proposition 12.356.
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et deux fonctions

$$f\colon [a,b] \to E \tag{12.1065a}$$
$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \tag{12.1065b}$$

continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si pour tout $t \in]a,b[$ nous avons $\|f'(t)\| \leqslant g'(t)$ alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a). \tag{12.1066}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|f(t) - f(a)\| - g(t) - \epsilon t. \end{aligned} \tag{12.1067}$$

Cela est une fonction continue réelle à variable réelle. En particulier pour tout $u \in]a,b[$ la fonction φ_ϵ est continue sur le compact $[u,b]$ et donc y atteint son minimum en un certain point $c \in [u,b]$; c'est le bon

vieux théorème de Weierstrass 9.215. Nous commençons par montrer que pour tout u, ledit minimum ne peut être que b. Pour cela nous allons montrer que si $t \in [u,b[$, alors $\varphi_\epsilon(s) < \varphi_\epsilon(t)$ pour un certain $s > t$. Par continuité si s est proche de t nous avons

$$\left\| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right\| - \frac{\epsilon}{2} < \|f'(t)\| < g'(t) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{g(s)-g(t)}{s-t} + \frac{\epsilon}{2}. \tag{12.1068}$$

Ces inégalités proviennent de la limite

$$\lim_{s\to t} \frac{f(s)-f(t)}{s-t} = f'(t), \tag{12.1069}$$

donc si s et t sont proches,

$$\left\| \frac{f(s)-f(t)}{s-t} - f'(t) \right\| \tag{12.1070}$$

est petit. Si $s > t$ nous pouvons oublier des valeurs absolues et transformer l'inégalité en

$$\|f(s)-f(t)\| < g(s)-g(t)+\epsilon(s-t). \tag{12.1071}$$

Utilisant cela et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon(s) &\leqslant \|f(s)-f(t)\| + \|f(t)-f(a)\| - g(s) - \epsilon s && \text{(12.1072a)}\\ &\leqslant g(s)-g(t)+\epsilon s - \epsilon t + \|f(t)-f(a)\| - g(s) - \epsilon s && \text{(12.1072b)}\\ &= \varphi_\epsilon(t). && \text{(12.1072c)} \end{aligned}$$

Donc nous avons bien $\varphi_\epsilon(s) < \varphi_\epsilon(t)$ avec l'inégalité stricte. Par conséquent pour tout $u \in]a,b[$ nous avons $\varphi_\epsilon(b) < \varphi_\epsilon(u)$ et en prenant la limite $u \to a$ nous avons

$$\varphi_\epsilon(b) \leqslant \varphi_\epsilon(a). \tag{12.1073}$$

Cette inégalité donne immédiatement

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a)+\epsilon(b-a) \tag{12.1074}$$

pour tout $\epsilon > 0$ et donc

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a). \tag{12.1075}$$

□

ThoNAKKght

Théorème 12.357 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et une application différentiable $f\colon U \to F$. Pour tout segment $[a,b] \subset U$ nous avons

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} \|df_x\| \right) \|b-a\|. \tag{12.1076}$$

Démonstration. Nous prenons les applications

$$\begin{aligned} k\colon [0,1] &\to E \\ t &\mapsto f\big((1-t)a+tb\big) \end{aligned} \tag{12.1077}$$

et

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto t \sup_{x\in[a,b]} \|df_x\| \|b-a\|. \end{aligned} \tag{12.1078}$$

Pour tout t nous avons $g'(t) = M\|b-a\|$ où il n'est besoin de dire ce qu'est M. D'un autre côté nous avons aussi

$$\begin{aligned} k'(t) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f\big((1-t-\epsilon)a+(t+\epsilon)b\big) - f\big((1-t)a+tb\big)}{\epsilon} \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big((1-t)a+tb+\epsilon(b-a)\big) \Big]_{\epsilon=0} \\ &= df_{(1-t)a+tb}(b-a) \end{aligned} \tag{12.1079}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse de différentiabilité de f sur $[a,b]$ et donc en $(1-t)a+tb$. Nous avons donc

$$\|k'(t)\| \leqslant \|b-a\|\|df_{(1-t)a+tb}\| \leqslant M\|b-a\| = g'(t) \tag{12.1080}$$

La proposition 12.356 est donc utilisable et

$$\|k(1)-k(0)\| \leqslant g(1)-g(0), \tag{12.1081}$$

c'est-à-dire

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant M\|b-a\| \tag{12.1082}$$

comme il se doit. □

ProFSjmBAt

Proposition 12.358.
Soient E et F des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et une application $f\colon U \to F$. Soient $a,b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Nous posons $u = (b-a)/\|b-a\|$ et nous supposons que pour tout $x \in [a,b]$, la dérivée directionnelle

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} \tag{12.1083}$$

existe. Nous supposons de plus que $\frac{\partial f}{\partial u}(x)$ est continue en $x=a$. Alors

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\|\right)\|b-a\|. \tag{12.1084}$$

Démonstration. Nous posons évidemment

$$M = \sup_{x\in[a,b]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\| \tag{12.1085}$$

et nous considérons les fonctions

$$k(t) = f\big((1-t)a+tb\big) \tag{12.1086}$$

et

$$g(t) = tM\|b-a\|. \tag{12.1087}$$

Pour alléger les notations nous posons $x = (1-t)a+tb$ et nous calculons avec un petit changement de variables dans la limite :

$$k'(t) = \frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big(x+\epsilon(b-a)\big)\Big]_{\epsilon=0} = \|b-a\|\frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big(x+\frac{\epsilon}{\|b-a\|}(b-a)\big)\Big]_{\epsilon=0} = \|b-a\|\frac{\partial f}{\partial u}(x), \tag{12.1088}$$

et donc encore une fois nous avons

$$\|k'(t)\| \leqslant g'(t), \tag{12.1089}$$

ce qui donne

$$\|k(1)-k(0)\| = g(1)-g(0), \tag{12.1090}$$

c'est-à-dire

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\|\|b-a\|. \tag{12.1091}$$

□

ThoOYwdeVt

Théorème 12.359.
Soient E,V deux espaces vectoriels normés, une application $f\colon E \to V$, un point $a \in E$ tel que pour tout $u \in E$, la dérivée

$$\frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} \tag{12.1092}$$

existe pour tout $x \in B(a,r)$ et est continue (par rapport à x) en $x=a$. Nous supposons de plus que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0 \tag{12.1093}$$

pour tout $u \in E$. Alors f est différentiable en a et

$$df_a = 0 \tag{12.1094}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Pourvu que $\|h\|$ soit assez petit pour que $a+h \in B(a,r)$, la proposition 12.358 nous donne

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \sup_{x\in[a,a+h]} \|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\||h| \tag{12.1095}$$

où $u = h/\|h\|$. Par continuité de $\partial_u f(x)$ en $x = a$ et par le fait que cela vaut 0 en $x = a$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\|h\| < \delta$ alors

$$\|\frac{\partial f}{\partial u}(a+h)\| \leqslant \epsilon. \tag{12.1096}$$

Pour de tels h nous avons

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \epsilon\|h\|, \tag{12.1097}$$

ce qui prouve que l'application linéaire $T(u) = 0$ convient parfaitement pour faire fonctionner la définition 12.296. □

12.17.21 Applications multilinéaires

Nous avons déjà parlé d'applications multilinéaires dans la définition 10.1.

LemFRdNDCd

Lemme 12.360 (Leibniz pour les formes bilinéaires[424])**.**
Si $B\colon E \times F \to G$ est bilinéaire et continue, elle est C^∞ et

$$dB_{(x,y)}(u,v) = B(x,v) + B(u,y). \tag{12.1098}$$

EqXYJeDBt

Démonstration. D'abord le membre de droite de (12.1098) est une application linéaire et continue, donc c'est un bon candidat à être différentielle. Nous allons prouver que ça l'est, ce qui prouvera la différentiabilité de B. Avec ce candidat, le numérateur de la définition (12.296) s'écrit dans notre cas

$$B\big((x,y)+(u,v)\big) - B(x,y) - B(x,v) - B(u,y) = B(u,v). \tag{12.1099}$$

Il reste à voir que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{B(u,v)}{\|(u,v)\|} = 0 \tag{12.1100}$$

Par l'équation (12.349) nous avons

$$\frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|} \leqslant \frac{\|B\|\|u\|\|v\|}{\|u\|} = \|B\|\|v\| \tag{12.1101}$$

parce que $\|(u,v)\| \geqslant \|u\|$. À partir de là il est maintenant clair que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|} = 0, \tag{12.1102}$$

ce qu'il fallait. □

Proposition 12.361 (Règle de Leibniz[424])**.**
Soient E, F_1, F_2 des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et des applications de classe C^r ($r \geqslant 1$)

$$f_1\colon U \to F_1 \tag{12.1103a}$$
$$f_2\colon U \to F_2 \tag{12.1103b}$$
$$\tag{12.1103c}$$

et $B \in \mathcal{L}^0(F_1 \times F_2, G)$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon U &\to G\\ x &\mapsto B\big(f_1(x), f_2(x)\big)\end{aligned} \tag{12.1104}$$

est de classe C^r et

$$d\varphi_x(u) = \varphi\big((df_1)_x(u), f_2(x)\big) + \varphi\big(f_1(x), (df_2)_x(u)\big). \tag{12.1105}$$

EqMNGBXWc

Démonstration. Par hypothèse B est continue (c'est la définition de l'espace $\mathcal{L}^0$), et donc C^∞ par le lemme 12.360. Par ailleurs la fonction $f_1 \times f_2$ est de classe C^r parce que f_1 et f_2 le sont et parce que la proposition 12.334 le dit. L'application composée $B \circ (f_1 \times f_2)$ est donc également de classe C^r par le théorème 12.336.

Il ne nous reste donc qu'à prouver la formule 12.1105. En utilisant la différentielle du produit cartésien[142] nous avons

$$f\big(B \circ (f_1 \times f_2)\big)_x(h) = dB_{(f_1\times f_2)(x)}\big((df_1)_x(h), (df_2)_x(h)\big). \tag{12.1106}$$

Nous développons cela en utilisant le lemme 12.360 :

$$\begin{aligned} d\big(B \circ (f_1 \times f_2)\big)_x(h) &= dB_{\big(f_1(x),f_2(x)\big)}\big((df_1)_x(h), (df_2)_x(h)\big) && \text{(12.1107a)}\\ &= B\big(f_1(x), (df_2)_x(h)\big) + B\big((df_1)_x(h), f_2(x)\big), && \text{(12.1107b)} \end{aligned}$$

comme souhaité. □

12.17.22 Différentielle partielle

VJM_CtSKT

Définition 12.362 (Différentielle partielle)**.**
Soient E, F et G des espaces vectoriels normés et une fonction $f\colon E \times F \to G$. Nous définissons sa ***différentielle partielle*** *sur l'espace E par*

$$\begin{aligned} d_1 f_{(x_0,y_0)}\colon E &\to G\\ u &\mapsto \frac{d}{dt}\Big[f(x_0+tu, y_0)\Big]_{t=0}. \end{aligned} \tag{12.1108}$$

La différentielle d_2 se définit de la même façon.

PropLDN_nHWDF

Proposition 12.363 ([424])**.**
Soient E_1, E_2 et F des espaces vectoriels normés, soit un ouvert $U \subset E_1 \times E_2$ et une fonction $f\colon U \to F$.
ItemRDD_oPmXVi

(1) Si f est différentiable alors les différentielles partielles existent et

$$d_1 f_{(x_0,y_0)}(u) = df_{(x_0,y_0)}(u,0) \tag{12.1109a}$$
$$d_2 f_{(x_0,y_0)}(v) = df_{(x_0,y_0)}(0,v) \tag{12.1109b}$$

où $u \in E_1$ et $v \in E_2$.

(2) Si f est différentiable alors

$$df_{(x_0,y_0)}(u,v) = d_1 f_{(x_0,y_0)}(u) + d_2 f_{(x_0,y_0)}(v). \tag{12.1110}$$

Démonstration. Nous posons $\alpha = (x_0, y_0) \in U$ et

$$\begin{aligned} j_\alpha^{(1)}\colon E_1 &\to E_1 \times E_2\\ x &\mapsto (x, y_0). \end{aligned} \tag{12.1111}$$

C'est une fonction de classe C^∞ et

$$(dj_\alpha^{(1)})_{x_0}(u) = \frac{d}{dt}\Big[j_\alpha^{(1)}(x_0+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[(x_0+tu, y_0)\Big]_{t=0} = (u,0). \tag{12.1112}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (d_1 f)_\alpha(u) &= \frac{d}{dt}\Big[f(x_0+tu, y_0)\Big]_{t=0} && \text{(12.1113a)}\\ &= \frac{d}{dt}\Big[(f \circ j_\alpha^{(1)})(x_0+tu)\Big]_{t=0} && \text{(12.1113b)}\\ &= \big(d(f \circ j_\alpha^{(1)})\big)_{x_0}(u). && \text{(12.1113c)} \end{aligned}$$

À ce moment nous utilisons la règle des différentielles composées 12.336 pour dire que

$$(d_1 f)_\alpha(u) = df_{j_\alpha^{(1)}(x_0)} \circ (dj_\alpha^{(1)})_{x_0}(u) = df_\alpha(u,0). \tag{12.1114}$$

[142] Proposition 12.334.

Voilà qui prouve déjà le point (1).

Pour la suite nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= x, & J_1(u) &= (u,0),\\ P_2(x,y) &= y, & J_2(v) &= (0,v) \end{aligned} \tag{12.1115}$$

et nous avons l'égalité évidente

$$J_1 \circ P_1 + J_2 \circ P_2 = \mathbb{1} \tag{12.1116}$$

sur $E_1 \times E_2$. En appliquant df_α à cette dernière égalité, en appliquant à (u,v) et en utilisant la linéarité de df_α nous trouvons

$$df_\alpha(u,v) = df_\alpha\big((J_1 \circ P_1)(u,v)\big) + df_\alpha\big((J_2 \circ P_2)(u,v)\big) \tag{12.1117a}$$
$$= df_\alpha(u,0) + df_\alpha(0,v) \tag{12.1117b}$$
$$= (d_1 f)_\alpha(u) + (d_2 f)_\alpha(v) \tag{12.1117c}$$

où nous avons utilisé le point (1) pour la dernière égalité. □

12.17.23 L'inverse, sa différentielle

Si E est un espace de Banach, nous sommes intéressés à l'espace $\mathrm{GL}(E)$ des endomorphismes inversibles de E sur E. Cet ensemble est métrique par la formule usuelle

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_E. \tag{12.1118}$$

PropQAjqUNp

Proposition 12.364 (Thème 41)**.**
Soit E un espace de Banach (espace vectoriel normé complet). Si A est un endomorphisme de E satisfaisant $\|A\| < 1$ pour la norme opérateur, alors $(\mathbb{1} - A)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{12.1119}$$

Démonstration. Étant donné que la norme opérateur est une norme algébrique (lemme 12.97), nous avons $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. Par conséquent la série $\|A^k\|$ est majorée par la série géométrique qui converge[143]. Par conséquent $\sum_k A^k$ est une série absolument convergente et donc convergente par la proposition 12.165 et le fait que $\mathcal{L}(E)$ est complet (proposition 9.341).

Montrons à présent que la somme est l'inverse de $\mathbb{1} - A$ en utilisant le produit terme à terme autorisé par la proposition 12.177 :

$$\sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A) = \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \mathbb{1} - A^{n+1}. \tag{12.1120}$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{1} - \sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A)\| = \|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1} \to 0. \tag{12.1121}$$

□

ThoCINVBTJ

Théorème 12.365 (Inverse dans $\mathrm{GL}(E)$[425, 424])**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés.

(1) L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathrm{End}(E)$.

(2) L'application inverse

$$\begin{aligned} i\colon \mathrm{GL}(E,F) &\to \mathrm{GL}(F,E)\\ u &\mapsto u^{-1} \end{aligned} \tag{12.1122}$$

est de classe C^∞ et

$$di_{u_0}(h) = -u_0^{-1} \circ h \circ u_0^{-1} \tag{12.1123}$$

pour tout $h \in \mathrm{End}(E)$

[143] Proposition 12.186.

Démonstration. Nous supposons que $\mathrm{GL}(E,F)$ n'est pas vide, sinon ce n'est pas du jeu.

(1) **Cas de dimension finie**

Si la dimension de E et F est finie, elles doivent être égales, sinon il n'y a pas de fonctions inversibles $E \to F$. L'ensemble $\mathrm{GL}(E,F)$ est donc naturellement $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Un élément de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ si et seulement si son déterminant est non nul. Le déterminant étant une fonction continue (polynomiale) en les entrées de la matrice, l'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Même idée pour la régularité de la fonction $i\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $X \mapsto X^{-1}$. Les entrées de X^{-1} sont les cofacteurs de X divisé par $\det(X)$, et donc des polynômes en les entrées de X divisés par un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, et donc sur un ouvert autour de X et de X^{-1}. Bref, tout est C^∞.

Le reste de la preuve parle de la dimension infinie.

(2) **Ouvert autour de l'identité**

Nous commençons par prouver que $B(\mathbb{1},1) \subset \mathrm{GL}(E)$. Pour cela il suffit de remarquer que si $\|u\| < 1$ alors le lemme 12.364 nous donne un inverse de $(1+u)$ en la personne de $\sum_{k=0}^{\infty}(-u)^k$.

(3) **Ouvert en général**

Soit maintenant $u_0 \in \mathrm{GL}(E)$. Si $\|u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $\|u_0^{-1}u\| < 1$, ce qui signifie que

$$\mathbb{1} + u_0^{-1}u \tag{12.1124}$$

est inversible. Mais $u_0 + u = u_0(\mathbb{1} + u_0^{-1}u)$, donc $u_0 + u \in \mathrm{GL}(E)$ ce qui signifie que

$$B\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right) \subset \mathrm{GL}(E). \tag{12.1125}$$

(4) **Différentielle en l'identité**

Nous commençons par prouver que $di_{\mathbb{1}}(u) = -u$. Pour cela nous posons

$$\alpha(h) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k h^k \tag{12.1126}$$

et nous calculons

$$di_{\mathbb{1}}(u) = \frac{d}{dt}\Big[i(\mathbb{1}+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\mathbb{1} - tu + \alpha(tu)\Big]_{t=0}. \tag{12.1127}$$

Il suffit de prouver que $\frac{d}{dt}\Big[\alpha(tu)\Big]_{t=0} = 0$ pour conclure que $di_{\mathbb{1}}(u) = -u$. Pour cela, nous remarquons que $\alpha(0) = 0$ et donc que

$$\frac{d}{dt}\Big[\alpha(tu)\Big]_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(tu)-\alpha(0)}{t} \tag{12.1128a}$$

$$= \lim_{t\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(tu)^k}{t} \tag{12.1128b}$$

$$= -\lim_{t\to 0} u\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t^k u^k. \tag{12.1128c}$$

La norme de ce qui est dans la limite est majorée par

$$\|u\|\sum_{k=1}^{\infty}\|tu\|^k = \|u\|\left(\frac{1}{1-\|tu\|} - 1\right), \tag{12.1129}$$

et cela tend vers zéro lorsque $t \to \infty$. Nous avons utilisé la somme 12.516 de la série géométrique. Nous avons bien prouvé que $di_{\mathbb{1}}(u) = -u$.

(5) **Différentielle en général** Soit maintenant $u_0 \in \mathrm{GL}(E)$ et $h \in \mathrm{End}(E)$ tel que $u_0 + h \in \mathrm{GL}(E)$; par le premier point, il suffit de prendre $\|h\|$ suffisamment petit. Vu que $u_0 + h = u_0(\mathbb{1} + u_0^{-1}h)$ nous avons

$$(u_0+h)^{-1} = (\mathbb{1} + u_0^{-1}h)^{-1}u_0^{-1}. \tag{12.1130}$$

Nous pouvons donc calculer

$$(u_0+h)^{-1}=\big(\mathbb{1}-u_0^{-1}h+\alpha(u_0^{-1}h)\big)u_0^{-1}=u_0^{-1}-u_0^{-1}hu_0^{-1}+\alpha(u_0^{-1}h)u_0^{-1},\tag{12.1131}$$

et ensuite

$$di_{u_0}(h)=\frac{d}{dt}\Big[i(u_0+th)\Big]_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big[u_0^{-1}-tu_0^{-1}hu_0^{-1}+\alpha(tu_0^{-1}h)u_0^{-1}\Big]_{t=0},\tag{12.1132}$$

mais nous avons déjà vu que

$$\frac{d}{dt}\Big[\alpha(th)\Big]_{t=0}=0,\tag{12.1133}$$

donc

$$di_{u_0}(h)=-u_0^{-1}hu_0^{-1}\tag{12.1134}$$

Cela donne la différentielle de l'application inverse.

(6) **Continuité de l'inverse**

L'application i est continue parce que différentiable.

(7) **L'inverse est C^∞**

Nous allons écrire la fonction inverse comme une composée. Soient les applications

$$\begin{aligned}B\colon \mathcal{L}^0(F,E)\times\mathcal{L}^0(F,E)&\to\mathcal{L}^0\big(\mathcal{L}^0(E,F),\mathcal{L}^0(F,E)\big)\\ B(\psi_1,\psi_2)(A)&=-\psi_1\circ A\circ\psi_2\end{aligned}\tag{12.1135}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta\colon \mathcal{L}^0(F,E)&\to\mathcal{L}^0(F,E)\times\mathcal{L}^0(F,E)\\ \varphi&\mapsto(\varphi,\varphi)\end{aligned}\tag{12.1136}$$

Nous avons alors

$$di=B\circ\Delta\circ i.\tag{12.1137}$$

L'application Δ est de classe C^∞. Nous devons voir que B l'est aussi. Pour le voir nous commençons par prouver qu'elle est bornée :

$$\begin{aligned}\|B\|&=\sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\|B(\psi_1,\psi_2)\|_{\mathcal{L}\left(L(E,F),L(F,E)\right)}\\ &=\sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\sup_{\|A\|=1}\|\psi_1\circ A\circ\psi_2\|_{L(F,E)}\\ &\leqslant\sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\sup_{\|A\|=1}\|\psi_1\|\|A\|\|\psi_2\|\\ &\leqslant 1.\end{aligned}\tag{12.1138}$$

Donc B est bien bornée et par conséquent continue. Une application bilinéaire continue est C^∞ par le lemme 12.360. La décomposition $di=B\circ\Delta\circ i$ nous donne donc que $i\in C^\infty$ dès que i est continue, ce que nous avions déjà montré.

□

12.18 Exponentielle de matrice

PropPEDeSaOmSXQM

Proposition 12.366.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A\in\mathrm{End}(V)$. La série

$$\exp(A)=\mathbb{1}+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}.\tag{12.1139}$$

converge normalement[144] *dans* $\big(\mathrm{End}(V),\|.\|_{op}\big)$. *L'**exponentielle** de la matrice A est cette matrice.*

[144] Convergence normale, définition 12.131.

Démonstration. Vu que la norme opérateur est une norme d'algèbre par le lemme 12.97, nous avons pour tout k la majoration $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k} \frac{\|A\|^k}{k!}. \tag{12.1140}$$

La dernière somme converge en vertu de la convergence de la série exponentielle donnée en le lemme 12.187. □

Étant donné que c'est une limite, il y a une question de convergence et donc de topologie. C'est pour cela que nous ne pouvions pas introduire l'exponentielle de matrice avant d'avoir introduit la norme des matrices. La convergence de la série pour toute matrice sera prouvée au passage dans la proposition 12.367.

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ n'est pas un polynôme en x, mais nous avons le résultat marrant suivant.

PropFMqsIE

Proposition 12.367.
Si u est un endomorphisme, alors $\exp(u)$ *est un polynôme en u*[145].

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_u : \mathbb{K}[X] &\to \mathrm{End}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned} \tag{12.1141}$$

Étant donné que l'image de φ_u est un fermé dans $\mathrm{End}(E)$, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_u(X)^k}{k!} \tag{12.1142}$$

converge dans $\mathrm{End}(E)$ pour qu'elle converge dans $\mathrm{Image}(\varphi_u)$. Pour ce faire nous nous rappelons de la norme opérateur[146] et de la propriété fondamentale $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. En notant $A = \varphi_u(X)$,

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!}, \tag{12.1143}$$

ce qui est une morceau du développement de $e^{\|A\|}$. La limite $n \to \infty$ est donc zéro par la convergence de l'exponentielle réelle. La suite des sommes partielles de e^A est donc de Cauchy. La série converge donc parce que nous sommes dans un espace vectoriel réel de dimension finie ($\mathrm{End}(E)$). □

12.368.
Pourquoi $\exp(u)$ est-il un polynôme d'endomorphisme alors que exp n'est pas un polynôme ? Lorsque nous disons que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ n'est pas un polynôme, nous sommes en train de localiser la fonction exp à l'intérieur de l'espace de toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire à l'intérieur d'un espace de dimension infinie. Au contraire lorsqu'on parle de $\exp(u)$ et qu'on le compare aux endomorphismes $P(u)$, nous sommes en train de repérer $\exp(u)$ à l'intérieur de l'espace des matrices qui est de dimension finie. Il n'est donc pas étonnant que l'on parvienne moins à faire la distinction.

Si par contre nous considérons exp en tant qu'application $\exp : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$, ce n'est pas un polynôme.

Si u et v sont des endomorphismes, nous aurons des polynômes P et Q tels que $e^u = P(u)$ et $e^v = Q(v)$; mais nous n'aurons en général évidemment pas $P = Q$. En cela, exp n'est pas un polynôme.

12.19 Espace dual

SECooKOJNooQVawFY

Définition 12.369.
Soit un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (que nous nommons $\mathbb{K}$). Son ***dual topologique****, noté V' est l'ensemble des applications linéaires continues $V \to \mathbb{K}$.*

[145] Nan, mais j'te jure : exp n'est pas un polynôme, mais $\exp(u)$ est un polynôme de u.
[146] Définition 12.76.

12.19.1 Topologies

Il est possible de mettre sur V' (au moins) deux topologies distinctes. La première est la topologie de la norme opérateur ; rien de nouveau pour elle. La seconde est la topologie $*$-faible dont nous avons déjà un peu parlé dans la définition 9.429.

En termes de notations, nous allons noter les seminormes de la topologie faible par

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)| \tag{12.1144}$$

pour $x \in V$ et $\varphi \in V'$. À droite, les barres dénotent soit la valeur absolue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), soit le module (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

LEMooFMAUooQBIeTh

Lemme 12.370.
Soit $\varphi \in V'$ et $x \in V$. Alors

$$p_x(\varphi) \leqslant \|x\|\|\varphi\|. \tag{12.1145}$$

Si $\varphi_0 \in V'$, si $r > 0$ et si $x \in V$ nous avons aussi :

$$B(\varphi_0, r) \subset B_x(\varphi_0, \|x\|r). \tag{12.1146}$$

Démonstration. En posant $x' = x/\|x\|$, le vecteur x' est de norme 1 et nous avons

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)| = \|x\||\varphi(x')| \leqslant \|x\|\|\varphi\|. \tag{12.1147}$$

En ce qui concerne la seconde affirmation, si $\varphi \in B(\varphi_0, r)$ alors en notant $x' = x/\|x\|$ nous avons :

$$p_x(\varphi_0 - \varphi) = |\varphi_0(x) - \varphi(x)| = |(\varphi_0 - \varphi)(x)| \leqslant \|x\|\|\varphi_0 - \varphi\| \leqslant r\|x\|. \tag{12.1148}$$

Donc $\varphi \in B_x\big(\varphi_0, r\|x\|\big)$. □

PROPooMINIooGCWsPR

Proposition 12.371.
Si une suite(φ_k) dans V' vérifie

$$\varphi_k \xrightarrow{\|\cdot\|} \varphi \tag{12.1149}$$

alors elle vérifie aussi

$$\varphi_k \xrightarrow{*} \varphi. \tag{12.1150}$$

Démonstration. Soit une suite (φ_k) dans V', convergente vers φ pour la topologie de la norme. Soit $x \in V$, et $x' = x/\|x\|$. Nous avons

$$p_x(\varphi_k - \varphi) = \|x\||\varphi_k(x') - \varphi(x)| \leqslant \|x\|\|\varphi_k - \varphi\| \to 0. \tag{12.1151}$$

□

LEMooEAVEooAFveHn

Lemme 12.372.
La translation dans V' est une opération continue pour la topologie de la norme opérateur et pour celle de la topologie $*$.

Démonstration. Soit une suite φ_k tendant vers 0 ; nous devons prouver que $\tau_\sigma(\varphi_k) \to \tau_\sigma(0) = \sigma$. Et ce, pour chacune des deux topologies.

(1) **Norme opérateur**

L'hypothèse $\varphi_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ signifie que $\|\varphi_k\| \to 0$, c'est-à-dire que

$$\sup_{\|v\|=1} |\varphi_k(v)| \to 0. \tag{12.1152}$$

Nous avons alors

$$\|\tau_\sigma(\varphi_k) - \sigma\| = \sup_{\|v\|=1} |\tau_\sigma(\varphi_k)v - \sigma(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\varphi_k(v)| \to 0. \tag{12.1153}$$

Donc d'accord pour $\tau_\sigma(\varphi) \to \sigma$.

(2) **Topologie $*$**

Nous supposons maintenant que $\varphi_k \xrightarrow{*} 0$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$p_v\big(\tau_\sigma(\varphi_k) - \sigma\big) = \big|\tau_\sigma(\varphi_k)v - \sigma(v)\big| = |\varphi_k(v)| = p_v(\varphi_k). \tag{12.1154}$$

Mais par hypothèse, $p_v(\varphi_k) \to 0$.

□

Pour la suite, nous allons préfixer par N les concepts liés à la topologie de V' associée à la norme opérateur et par $*$, les concepts de la topologie $*$.

PROPooFGXAooFRWweD

Proposition 12.373.
Soit un espace vectoriel normé V. Un $*$-ouvert est toujours un N-ouvert.

Démonstration. Soit un $*$-ouvert $\mathcal{O}$ de V'. Il existe donc $x \in V$ et $r > 0$ tels que $B_x(\varphi, r) \subset \mathcal{O}$. Nous avons alors, en utilisant le lemme 12.370,

$$B(\varphi, r\|x\|) \subset B_x(\varphi, r) \subset \mathcal{O}. \tag{12.1155}$$

Donc $\mathcal{O}$ est un N-ouvert. □

Corolaire 12.374.
Soit un espace topologique X. Si $f\colon (V', *) \to X$ est continue, alors $f\colon (V', \|.\|) \to X$ est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X. Vu que f est $*$-continue, la partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un $*$-ouvert de V'. Il est onc un N-ouvert de V' par la proposition 12.373. □

12.19.2 Module de continuité

DEFooYARJooYyzMMP

Définition 12.375.
*Soient deux espaces topologiques normés X et Y, ainsi qu'une application $f\colon X \to Y$. Le **module de continuité** de f est la fonction*

$$\begin{aligned} \omega_f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ h &\mapsto \sup_{\substack{x,y\in X \\ d_X(x,y)<h}} d_Y\big(f(x), f(y)\big). \end{aligned} \tag{12.1156}$$

Écrite de façon plus compacte,

EQooKWUVooSQRHXN

$$\omega_f(h) = \sup_{|x-y|<h} \|f(x) - f(y)\|. \tag{12.1157}$$

Nous définissons aussi $\omega_f(h) = 0$ pour $h \leqslant 0$ parce que le lemme 12.377 fera grand cas de la continuité en zéro du module de continuité.

Notons que le module de continuité est une fonction croissante.

LemLUbgYeo

Lemme 12.376.
Soit $f \in C^0\big([0,1], \mathbb{C}\big)$ et ω son module de continuité. Si λ et h sont strictement positifs avec $\lambda h \in [0,1]$ alors

$$\omega(\lambda h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h). \tag{12.1158}$$

Démonstration. La fonction ω est croissante, et pour $h, k > 0$ nous avons $\omega(h + k) \leqslant \omega(h) + \omega(k)$. Par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\omega(kh) \leqslant k\omega(h). \tag{12.1159}$$

En écrivant cela pour $k = \lceil \lambda \rceil$, nous avons

$$\omega(\lambda h) \leqslant \omega(kh) \leqslant k\omega(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h). \tag{12.1160}$$

□

LemeERapq

Lemme 12.377.
Une fonction $f\colon X \to Y$ est uniformément continue[147] si et seulement si son module de continuité vérifie

$$\lim_{h\to 0} \omega_f(h) = 0. \tag{12.1161}$$

Autrement dit, si et seulement si sont module de continuité est continu en zéro.[148].

[147] Définition 9.395.
[148] Dans ce lemme, nous avons deux espaces métriques, mais nous allons noter d la distance des deux côtés.

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon$ dès que $d(x, y) \leqslant \delta$. Si $h \in B(0, \delta)$, alors

$$\omega_f(h) \leqslant \omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x,y\in X\\ d(x,y)\leqslant\delta}} d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \epsilon. \tag{12.1162}$$

Cela prouve que $\lim_{h\to 0} \omega_f(h) = 0$.

Dans l'autre sens, si $\epsilon > 0$ est fixé, il suffit de prendre δ tel que $\omega_f(h) \leqslant \epsilon$ pour tout $h \leqslant \delta$ pour faire fonctionner la définition de l'uniforme continuité. □

LEMooKPPSooPIncvn

Lemme 12.378 ([426]).
Soient des espaces métriques E et E' et une suite de fonctions $(f_i)_{i\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers f. Alors pour chaque $\delta > 0$ nous avons

$$\limsup_{i\to\infty} \omega_{f_i}(\delta) \leqslant \omega_f(\delta). \tag{12.1163}$$

Démonstration. Soient $\delta > 0$ ainsi que $x, y \in E$ tels que $d(x, y) \leqslant \delta$. Pour chaque i nous avons

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant |f_i(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_i(y)| \tag{12.1164a}$$
$$\leqslant |f(x) - f(y)| + 2\|f_i - f\|_\infty \tag{12.1164b}$$
$$\leqslant \omega_f(\delta) + 2\|f_i - f\|_\infty. \tag{12.1164c}$$

Nous prenons le supremum de cela sur $\{x, y \in E \text{ tel que } \|x - y\| \leqslant \delta\}$ pour obtenir :

$$\omega_{f_i}(\delta) \leqslant \omega_f(\delta) + 2\|f_i - f\|_\infty. \tag{12.1165}$$

La tentation est grande à ce point de prendre la limite des deux côtés pour $i \to \infty$. Cependant, rien ne nous permet de dire que la suite $i \mapsto \omega_{f_i}(\delta)$ ait une limite. Nous pouvons cependant prendre la limite supérieure[149] et obtenir

$$\limsup_{i\to\infty} \omega_{f_i}(\delta) \leqslant \omega_f(\delta). \tag{12.1166}$$

□

12.20 Mini introduction aux nombres p-adiques

12.20.1 La flèche d'Achille

s:un

C'est un grand classique que je donne ici juste comme introduction pour montrer que des séries infinies peuvent donner des nombres finis de manière tout à fait intuitive.

Achille tire une flèche vers un arbre situé à 10 m de lui. Disons que la flèche avance à une vitesse constante de 1 m/s. Il est clair que la flèche mettra 10 s pour toucher l'arbre. En 5 s, elle aura parcouru la moitié de son chemin. On le note :

$$\text{temps} = 5s + \dots$$

Reste 5 m à faire. En 2.5 s, elle aura fait la moitié de ce chemin, soit $2.5m = \frac{10}{4}m$. On le note :

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s+$$

Reste $2.5m$ à faire. La moitié de ce trajet, soit $\frac{10}{8}m$, est parcouru en $\frac{10}{8}s$; on le note encore, mais c'est la dernière fois !

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s + \frac{10}{8}s+$$

En continuant ainsi à regarder la flèche qui parcourt des demi-trajets puis des moitiés de demi-trajets et encore des moitiés de moitiés de demi-trajets, et en sachant que le temps total est $10s$, on trouve :

$$10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right) = 10.$$

On doit donc croire que la somme jusqu'à l'infini des inverses des puissances de deux vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Cela peut être démontré à la loyale.

[149] Définition 11.43.

12.20.2 La tortue et Achille

Maintenant qu'on est convaincu que des sommes infinies peuvent représenter des nombres tout à fait normaux, passons à un truc plus marrant.

Achille, qui marche peinard à 10 m/h, part avec $1m$ d'avance sur une tortue qui avance à 1 m/h. Le temps que la tortue arrive au point de départ d'Achille, Achille aura parcouru $10m$, et le temps que la tortue mettra pour arriver à ce point, eh bien, Achille ne sera déjà plus là : il sera à $100m$. Si la tortue tient bon pendant un temps infini, et si l'on est confiant en le genre de raisonnements faits à la section 12.20.1, elle rattrapera Achille dans

$$1m + 10m + 100m + 1000m + \dots$$

Autant dire que ça ne risque pas d'arriver. Et pourtant, mettons en équations :

$$\begin{cases} x_{\text{Achile}}(t) = 1 + 10t & \text{(12.1167a)} \\ x_{\text{tortue}}(t) = t. & \text{(12.1167b)} \end{cases}$$

La tortue rejoint Achille au temps t tel que $x_{\text{Achille}(t)} = x_{\text{tortue}}(t)$. Un mini calcul donne $t = -1/9$. Physiquement, c'est une situation logique. Peut-on en déduire une égalité mathématique du style de

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \dots = -\frac{1}{9} \text{ ???}$$

Là où les choses deviennent jolies, c'est quand on cherche à voir ce que peut bien être la valeur d'un hypothétique $x = 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$. En effet, logiquement on devrait avoir

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} &= \frac{1}{10} + 1 + 10 + 100 + \dots \\ &= \frac{1}{10} + x. \end{aligned}$$

Reste à résoudre l'équation du premier degré : $\frac{x}{10} = x + \frac{1}{10}$. Ai-je besoin de donner la solution ?

12.20.3 Dans les nombres p-adiques, c'est vrai

Nous nous proposons d'apprendre sur les nombres p-adiques juste ce qu'il faut pour montrer que l'égalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^k = -\frac{1}{9} \tag{12.1168}$$

est vraie dans les nombres 5-adiques. Tout ce qu'il faut est sur Wikipédia.

Soit $a \in \mathbb{N}$ et p, un nombre premier. La **valuation** p-adique de a est l'exposant de p dans la décomposition de a en nombres premiers. On la note $v_p(a)$. Pour un rationnel on définit

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \tag{12.1169}$$

La **valeur absolue** p-adique de $r \in \mathbb{Q}$ est

$$|r|_p = p^{-v_p(r)}. \tag{12.1170}$$

Nous posons $|0|_p = 0$. De là nous considérons la distance

$$d_p(x, y) = |x - y|_p. \tag{12.1171}$$

LEMooQNHZooXlHdUc

Lemme 12.379.
L'espace $(\mathbb{Q}, d_p)$ est un espace métrique[150].

Nous considérons maintenant $p = 5$. Étant donné que $a = 5 \cdot 2$ nous avons $v_5(10) = 1$ et

$$v_5\left(\frac{1}{9}\right) = v_5(1) - v_5(9) = 0. \tag{12.1172}$$

Nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} 10^k + \frac{1}{9} = \frac{10^{N+1}}{9} \tag{12.1173}$$

[150] Définition 9.155

mais

$$v_p\left(\frac{10^{N+1}}{9}\right) = v_5(10^{N+1}) - v_5(9) = N+1. \tag{12.1174}$$

Par conséquent

$$d_5\big(\sum_{k=0}^{N} 10^k, -\frac{1}{9}\big) = |\frac{10^{N+1}}{9}|_p = p^{-(N+1)}. \tag{12.1175}$$

En passant à la limite,

$$\lim_{N\to\infty} d_5\big(\sum_{k=0}^{N} 10^k, -\frac{1}{9}\big) = 0, \tag{12.1176}$$

ce qui signifie que[151]

$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^k = -\frac{1}{9}. \tag{12.1177}$$

[151] Voir la définition 12.123 de la convergence d'une série dans un espace métrique.

Chapitre 13

Espaces affines

13.1 Vecteurs agissant sur un espace

Définition 13.1.
Soit E, un espace vectoriel. Un ***espace affine modelé sur*** *E est un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe $(E,+)$ agit à droite transitivement et librement*[1].

Étant donné que E est un groupe commutatif, l'action peut être vue indifféremment à gauche ou à droite. Si $M \in \mathcal{E}$ et si $x \in E$ nous notons $M+x$ au lieu de $x \cdot M$ le résultat de l'action de x sur M.

NORMooZANAooQdXqlh

13.2.
Lorsque nous écrivons « $M+x$ », le symbole plus n'est pas une loi de composition interne de $\mathcal{E}$, mais une action.

DEFooWAYTooMLbqEE

Proposition-Définition 13.3.
Soient $N, M \in \mathcal{E}$. Il existe un unique $x \in E$ tel que $M+x=N$.
Nous noterons $\overrightarrow{MN}$ ce vecteur.

Démonstration. La transitivité de l'action assure l'existence et la liberté assure l'unicité. □

LEMooFZCRooQxzObv

Lemme 13.4.
Pour tout élément A nous avons $A+0=A$.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{E}$. Nous avons :

$$B+0=B+(0+0)=(B+0)+0 \tag{13.1}$$

parce que le $+$ dénote une action.
En appliquant cette égalité à l'élément $B=A-0$ nous trouvons l'égalité demandée. □

PROPooCOZCooCghwaR

Proposition 13.5.
Soit un espace affine $\mathcal{E}$ modelé sur l'espace vectoriel E. Soient $A,B,C \in \mathcal{E}$. Nous avons les égalités suivantes dans E :

ITEMooSDMIooUQiKeW

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *(relations de Chasles),*

ITEMooWZAVooGfGBwd

(2) $\overrightarrow{AA}=0$,

ITEMooLDVXooFZMbsQ

(3) $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous avons, par définition 13.3 les égalités

$$\begin{cases} C=A+\overrightarrow{AC} & \text{(13.2a)} \\ B=A+\overrightarrow{AB} & \text{(13.2b)} \\ C=B+\overrightarrow{BC} & \text{(13.2c)} \end{cases}$$

[1] Définition 5.32.

En substituant les deux premières dans la troisième, nous trouvons $A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=A+\overrightarrow{AC}$. Par liberté de l'action, nous pouvons « simplifier » par A et trouver la relation de Chasles.

(2) **Pour (2)** Nous avons $A+\overrightarrow{AA}=A$, mais aussi $A+0=A$. Par unicité nous avons $\overrightarrow{AA}=0$.

(3) **Pour (3)** Nous avons $B+\overrightarrow{BA}=A$ et $A+\overrightarrow{AB}=B$. En mettant bout à bout,

$$B+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=B. \tag{13.3}$$

Donc $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=0$.

□

NORMooXAJLooIupekj

13.6.
Si E est un espace vectoriel, le groupe $(E,+)$ agit sur E par l'action $t_y(x)=y+x$. Utilisant cette action nous construisons l'**espace affine canonique** de E. En particulier nous notons $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$ l'espace affine canonique de $\mathbb{K}^n$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- En tant qu'ensembles, $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})=\mathbb{K}^n$.
- Sur cet espace en particulier, si $M,N\in\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\overrightarrow{MN}=N-M$ où à droite, la différence est la différence vectorielle dans $\mathbb{K}^n$.

Ces deux points se généralisent immédiatement à un espace vectoriel E au lieu de $\mathbb{K}^n$.

13.2 Repères cartésiens affines

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E}$ un espace affine construit sur E.

DEFooQELZooEXvxgw

Définition 13.7.
*Un multiplet $(A,e_1,\dots,e_n)$ où A est un point de $\mathcal{E}$ et $\{e_i\}$ est une base de E est un **repère cartésien** de $\mathcal{E}$.*

*Nous disons que $\{e_i\}$ est la **base associée** au repère.*

Proposition 13.8.
Si $\mathcal{E}$ est un espace affine modelé sur l'espace vectoriel E de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, et si $\big(A,\{e_i\}_{i=1,\dots,n}\big)$ est un repère cartésien, alors

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{K}^n &\to \mathcal{E}\\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto A+\sum_i x_ie_i.\end{aligned} \tag{13.4}$$

est une bijection.

*Ces nombres x_i sont les **coordonnées** du point $A+\sum_i x_ie_i$ dans le repère (A,e_i).*

Démonstration. L'application ϕ est surjective parce que l'action de E sur $\mathcal{E}$ est transitive et injective parce que l'action est libre. □

13.3 Classification affine des coniques

Soit une conique $f(x,y)=0$ avec

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f \tag{13.5}$$

dans le repère $R=(A,e_i)$.

LEMooXZURooSVySRT

Lemme 13.9 ([427])**.**
Nous considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned}q\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto ax^2+bxy+cy^2.\end{aligned} \tag{13.6}$$

(1) Si la signature de q est $(1,1)$, alors il existe une bijection linéaire $A\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que

$$(q\circ A)(x,y)=x^2-y^2. \tag{13.7}$$

(2) Si la signature de q est $(2,0)$, alors il existe une bijection linéaire $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$(q \circ A)(x,y) = x^2 + y^2. \tag{13.8}$$

(3) Si la signature de q est $(1,0)$, alors il existe une bijection linéaire $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$(q \circ A)(x,y) = x^2. \tag{13.9}$$

Démonstration. Nous séparons selon la valeur de a.

(1) **Si $a \neq 0$** Alors nous avons

$$q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ax - b^2}{4a}\right)y^2. \tag{13.10}$$

Donc en posant $\alpha = a$ et $\beta = (4ac - b^2)/4a$, nous avons

$$q(x,y) = (f_{\alpha\beta} \circ A)(x,y) \tag{13.11}$$

où

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \alpha x^2 + \beta y^2. \end{aligned} \tag{13.12}$$

Vu que A est une bijection linéaire, si q est positive sur E, alors $f_{\alpha\beta} = q \circ A^{-1}$ sera positive sur $A(E)$. Donc $f_{\alpha\beta}$ a la même signature que q. La signature de $f_{\alpha\beta}$ est facile : elle est donnée par les signes de α et β.

Supposons que la signature de q soit $(2,0)$ alors la signature de $f_{\alpha\beta}$ est également $(2,0)$, c'est-à-dire que $\alpha, \beta > 0$. Alors en posant

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x, \frac{1}{\sqrt{\beta}}y\right), \end{aligned} \tag{13.13}$$

nous avons $(f_{\alpha\beta} \circ B_{\alpha\beta})(x,y) = x^2 + y^2$ et donc

$$(q \circ A^{-1} \circ B_{\alpha\beta})(x,y) = x^2 + y^2, \tag{13.14}$$

ce qu'il fallait.

Les cas de signature $(1,1)$ ou $(0,1)$ se traitent de façon similaire. Voyons le cas de signature $(0,1)$ pour le sport. Si la signature de $f_{\alpha\beta}$ est $(0,1)$ alors nous avons soit $\alpha = 0$ et $\beta < 0$ soit $\alpha < 0$ et $\beta = 0$. Dans le premier cas nous avons $f_{\alpha\beta}(x,y) = -\beta' y^2$ avec $\beta' = -\beta > 0$. En posant

$$B_{\alpha\beta}(x,y) = \left(x, \frac{1}{\sqrt{\beta'}}y\right) \tag{13.15}$$

nous avons $(f_{\alpha\beta} \circ B_{\alpha\beta})(x,y) = y^2$.

(2) **Si $a = 0$** Si $b \neq 0$ nous avons tous les mêmes cas qu'avant, en inversant x et y. Si $b = 0$ alors nous avons $q(x,y) = xy^2$ qui est déjà sous la bonne forme.

□

Nous cherchons maintenant à savoir si un point $I = (x_0, y_0)$ est un centre de symétrie de $f(x,y) = 0$. Pour cela nous choisissons le repère centré en I, c'est-à-dire que nous posons

$$\begin{cases} x = x_0 + \tilde{x} & \text{(13.16a)} \\ y = y_0 + \tilde{y}. & \text{(13.16b)} \end{cases}$$

Un peu de calcul montre qu'alors la conique s'écrit

$$f(x_0,y_0) + q(\tilde{x},\tilde{y}) + (2ax_0 + 2by_0 + 2d)\tilde{x} + (2bx_0 + 2cy_0 + 2e)\tilde{y} = 0. \tag{13.17}$$

LEMooMVIDooVEUJsp

Lemme 13.10.
Soit la forme quadratique

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f. \tag{13.18}$$

EQooMOPBopBkePEH

Le point (x_0, y_0) est un centre de symétrie de q si et seulement si SyskhiOvW

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2bx_0 + d = 0 & (13.19a)\\ 2bx_0 + 2cy_0 + e = 0, & (13.19b) \end{cases}$$

qui a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} (\partial_x q)(x_0, y_0) = 0 & (13.20a)\\ (\partial_y q)(x_0, y_0) = 0. & (13.20b) \end{cases}$$

Démonstration. Nous décomposons q en parties quadratiques, linéaires et constant :

$$q(x,y) = Q(x,y) + L(x,y) + f \tag{13.21}$$

avec $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ et $L(x,y) = dx + ey$.

Nous posons $r(x,y) = q(x + x_0, y + y_0)$. Le point (x_0, y_0) sera centre de symétrie si et seulement si $r(-x,-y) = r(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nous calculons donc un bon coup :

$$\begin{aligned} q(x + x_0, y + y_0) = {} & Q(x,y) && (13.22a)\\ & + 2ax_0x + ax_0^2\\ & + 2by_0x + 2bx_0y\\ & + 2bx_0y_0\\ & + 2cy_0y + cy_0^2\\ & + L(x + x_0, y + y_0) + f. && (13.22b) \end{aligned}$$

En développant encore un peu et en regroupant, nous trouvons

$$r(x,y) = Q(x,y) + S(x,y) + f' \tag{13.23}$$

où

$$S(x,y) = (2ax_0 + 2by_0 + d)x + (2bx_0 + 2cy_0 + e)y \tag{13.24a}$$

$$f' = f + ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0. \tag{13.24b}$$

La condition $r(-x,-y) = r(x,y)$ est équivalente à $S(x,y) = 0$ et donc à EQooJRYCooADgxxL

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2bx_0 + d = 0 & (13.25a)\\ 2bx_0 + 2cy_0 + e = 0. & (13.25b) \end{cases}$$

Il suffit de calculer $\partial_x q$ et $\partial_y q$ directement sur l'expression (13.18) pour remarquer que les conditions (13.25) sont équivalentes à

$$\begin{cases} (\partial_x q)(x_0, y_0) = 0 & (13.26a)\\ (\partial_y q)(x_0, y_0) = 0 & (13.26b) \end{cases}$$

□

13.11.
Le fait que le centre de symétrie de q coïncide avec le point où le gradient de q s'annule semble être une simple coïncidence numérique. On a fait les deux calculs et on a trouvé le même résultat.

Je suis certain qu'il y a une raison plus profonde. Si vous la connaissez, écrivez-moi.

Nous supposons que $(d,e) \neq (0,0)$, sinon la conique de départ serait déjà centrée. Le déterminant du système (13.19) est

$$\delta = ac - b^2. \tag{13.27}$$

Si ce dernier est différent de zéro, le système possède une unique solution et la conique aura alors un unique centre de symétrie.

Si le déterminant du système est nul, il y a soit aucun centre de symétrie, soit une infinité. Dans le premier cas nous sommes en présence d'une parabole, et dans le second cas de deux droites parallèles.

Exemple 13.12.
Soit
$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \tag{13.28}$$
EqQgsFcz
donnée dans le repère affine $R = (A, \{e_i\})$. Nous commençons par étudier la signature de $q(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ dont la matrice symétrique est
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13.29}$$
Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 2$ dont les racines sont $\pm\sqrt{2}$. La signature est donc $(1,1)$ et nous sommes en présence d'une conique de genre hyperbole. Nous cherchons le centre en suivant le lemme 13.10. Nous posons $x = \tilde{x} + x_0$, $y = \tilde{y} + y_0$, et nous cherchons à résoudre le système
$$\begin{cases} x_0 + y_0 - 3 = 0 & \text{(13.30a)} \\ x_0 - y_0 + 1 = 0. & \text{(13.30b)} \end{cases}$$
L'unique solution est $(x_0, y_0) = (1,2)$. Nous considérons le repère centré en (x_0, y_0), c'est-à-dire le repère
$$R' = (I, \{e_i\}) \tag{13.31}$$
avec $I = A + x_0 e_1 + y_0 e_2$ où A est l'origine du repère dans lequel l'équation (13.28) était donnée.

Par construction dans ce repère nous avons la conique
$$f(x_0, y_0) + q(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \tag{13.32}$$
c'est-à-dire
$$\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}^2 - 2 = 0. \tag{13.33}$$
Maintenant, nous avons une quadrique centrée que nous voulons mettre sous une forme plus canonique :
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \tilde{y})\right)^2 - \tilde{y}^2 - 1 = 0. \tag{13.34}$$
Nous posons donc
$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \tilde{y}) & \text{(13.35a)} \\ Y = \tilde{y}, & \text{(13.35b)} \end{cases}$$
pour trouver l'hyperbole
$$X^2 - Y^2 - 1 = 0. \tag{13.36}$$

Cherchons le changement de base correspondant. Pour trouver les coordonnées de e_1' dans la base (e_1, e_2) nous cherchons pour quelles valeurs de x, y nous avons $e_1' = xe_1 + ye_2$. Le point e_1' étant caractérisé par $X = 1$, $Y = 0$ nous avons à résoudre
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = 1 & \text{(13.37a)} \\ y = 0, & \text{(13.37b)} \end{cases}$$
ce qui donne $x = \sqrt{2}$ et $y = 0$. Donc
$$e_1' = \sqrt{2}e_1. \tag{13.38}$$
Pour trouver e_2', c'est le même raisonnement en posant $X = 0$ et $Y = 1$. Le résultat est :
$$e_2' = -e_1 + e_2. \tag{13.39}$$

Résumons : EqfiVwym
$$\begin{cases} e_1' = \sqrt{2}e_1 & \text{(13.40a)} \\ e_2' = -e_1 + e_2. & \text{(13.40b)} \end{cases}$$

Il y a un dicton qui dit que les vecteurs de base se transforment avec la matrice inverse des coefficients. Prenons la matrice M donnée par
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \tag{13.41}$$
Calculons la matrice inverse.

```
sage: M=matrix([  [1/sqrt(2), 1/sqrt(2)],[0,1]  ])
sage: M
[1/2*sqrt(2) 1/2*sqrt(2)]
[          0           1]
sage: M.inverse()
[sqrt(2)      -1]
[      0       1]
```

tex/sage/sageSnip023.sage

Nous voyons que les colonnes de la matrice M^{-1} donnent les coordonnées des vecteurs e'_1 et e'_2.

△

13.4 Applications affines

Voici la définition d'une application affine entre deux espaces affines. La définition 10.155 donnera le définition d'une application affine entre espaces vectoriels.

DEFooUAWZooXcMKve

Définition 13.13.
*Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines sur les espaces vectoriels E et E' (sur le même corps $\mathbb{K}$). Une application $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est dite **affine** si pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe une application linéaire[2] $u_M\colon E \to E'$ telle que*

$$f(M+x) = f(M) + u_M(x) \tag{13.42}$$

EqMaIoWX

pour tout $x \in E$.

La définition suivante permet de décomposer une application affine en une partie linéaire et une translation. À partir de là, la proposition 13.62 nous donnera une structure de groupe sur $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

LEMooYJCDooOGAHkF

Lemme-Définition 13.14 (partie linéaire d'une application affine[1])**.**
Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines sur les espaces vectoriels E et E' (sur le même corps $\mathbb{K}$). Nous considérons une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.

Il existe une unique application linéaire $u\colon E \to E'$ telle que

$$f(M+x) = f(M) + u(x) \tag{13.43}$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $M \in \mathcal{E}$.

*Cette application linéaire est appelée **partie linéaire** de f. Pour varier les notations, nous noterons souvent $f = \alpha \circ \tau_v$ pour une application linéaire α et la translation τ_v de vecteur v.*

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Unicité** Supposons que u_1 et u_2 vérifient la propriété, alors pour tout $x \in E$ et tout $M \in \mathcal{E}$ nous avons $f(M+x) = f(M) + u_1(x)$ et $f(M+x) = f(M) + u_2(x)$. Cela suffit à nous convaincre que $u_1 = u_2$.

(2) $u_M = u_N$ Avant de prouver l'existence, nous considérons $M, N \in \mathcal{E}$ et les applications linéaires u_M et u_N vérifiant l'équation (13.42) pour M et N respectivement. Prouvons que $u_M = u_N$.

Posons

$$f(M+x) = f(M) + u_M(x) \tag{13.44a}$$
$$f(N+y) = f(N) + u_N(y). \tag{13.44b}$$

Définissons $a \in E$ par $N = M + a$; nous avons d'une part

$$f(N+y) = f(M+y+a) = f(M) + u_M(y+a), \tag{13.45}$$

et d'autre part

$$f(N+y) = f(M+a) + u_N(y) = f(M) + u_M(a) + u_N(y). \tag{13.46}$$

Par conséquent $u_M(y+a) = u_M(a) + u_N(y)$. Par linéarité $u_N = u_M$.

[2] Définition 6.33.

(3) **Existence** Soit $M \in \mathcal{E}$. Nous affirmons que u_M fait l'affaire. En effet, soient $N \in \mathcal{E}$ et $x \in E$. Puisque $u_M = u_N$ nous avons

$$f(N + x) = f(N) + u_N(x) = f(N) + u_M(x). \tag{13.47}$$

Donc effectivement u_M peut être utilisé en tout point de $\mathcal{E}$.

□

Ce lemme est important car il permet de démontrer qu'une application est affine en prouvant la linéarité des u_M séparément sans devoir prouver qu'elles sont égales.

13.4.1 Autres propriétés

LEMooXXTPooKYFGGM

Lemme 13.15 ([1]).
Soient $M \in \mathcal{E}$ et $A, B \in \mathcal{E}$ deux points donnés par $A = M + x_a$, $B = M + x_b$. Soit encore une application affine f sur $\mathcal{E}$. Alors

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = u_f(x_b - x_a). \tag{13.48}$$

Démonstration. En appliquant f à $A = M + x_a$ et $B = M + x_b$,

$$f(A) = f(M) + u_f(x_a) \tag{13.49a}$$
$$f(B) = f(M) + u_f(x_b). \tag{13.49b}$$

Donc $f(B) = f(A) - u_f(x_a) + u_f(x_b)$ ou encore

$$f(B) = f(A) + u_f(x_b - x_a). \tag{13.50}$$

□

Remarque 13.16.
La condition (13.42) pour tout $M \in \mathcal{E}$ est équivalente à demander

$$f \circ t_x = t_{u(x)} \circ f \tag{13.51}$$

pour tout $x \in E$.

PROPooALXYooHoMdqQ

Proposition 13.17 ([1]).
Soit une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.

ITEMooSKCYooHyRZYN

(1) Il existe une unique application linéaire u_f telle que $f(M + x) = f(M) + u_f(x)$ pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $x \in E$.

(2) L'application u_f est injective si et seulement si f est injective.

(3) L'application u_f est surjective si et seulement si f est surjective.

Démonstration. En plein de parties.

(1) **Pour (1)**
La partie (1) est le lemme 13.14.

(2) **Si u_f est injective** Soient $M, N \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = f(N)$. Nous avons

$$f(M) = f(N) = f\big(M + (N - M)\big) = f(M) + u_f(N - M), \tag{13.52}$$

donc $u_f(N - M) = 0$. Vu que u_f est injective, nous déduisons que $N - M = 0$.

(3) **Si f est injective** Soient $x, y \in E$ tels que $u_f(x) = u_f(y)$. Soit M quelconque dans $\mathcal{E}$; nous avons

$$f(M + x) = f(M) + u_f(x) = f(M) + u_f(y) = f(M + y). \tag{13.53}$$

L'injectivité de f nous indique alors que $M + x = M + y$ et donc que $x = y$ parce que l'action de E sur $\mathcal{E}$ est libre.

(4) **Si u_f est surjective** Soit $M \in \mathcal{E}$. Nous allons trouver un élément de $\mathcal{E}$ dont l'image par f est M.
Soient $N \in \mathcal{E}$ et $x \in E$ tels que $u_f(x) = M - f(N)$.
Alors nous avons $f(N + x) = f(N) + u_f(x) = M$.

(5) **Si f est surjective** Soit $a \in E$. Nous voulons $x \in E$ tel que $u_f(x) = a$. Soit $M \in E$. Vu que f est surjective, il existe $N \in \mathcal{E}$ tel que $f(N) = f(M) + a$.

Posons $x = N - M$. Nous avons d'une part

$$f(M + x) = f(M) + u_f(x) \tag{13.54}$$

et d'autre part

$$f(M + x) = f\big(M + (N - M)\big) = f(N) = f(M) + a. \tag{13.55}$$

En égalisant nous trouvons $u_f(x) = a$.

□

Proposition 13.18.
Soient des espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de même dimension. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est injective si et seulement si elle est surjective.

Démonstration. Nous allons utiliser les équivalences de la proposition 13.17, ainsi que le corolaire 6.56 pour la partie linéaire. Nous avons les équivalences :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow u_f \text{ est injective} \Leftrightarrow u_f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}. \tag{13.56}$$

□

EXooAGINooYmvPML

Exemple 13.19.
L'espace $\mathbb{R}^n$ est très particulier parce qu'il agit sur lui-même ; il est donc un espace affine à lui tout seul : $\mathcal{E} = E = \mathbb{R}^n$.

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, en posant $M = 0$ dans la condition (13.42), si f est une application affine il existe une application linéaire α et un vecteur v tel que $f = \tau_v \circ \alpha$.

Notons que ça n'a pas de sens de poser $M = 0$, et la décomposition $f = \tau_v \circ \alpha$ n'a aucun sens en général. En particulier, nous ne pouvons pas appliquer une application linéaire à un élément d'un espace affine général. △

PROPooOUNEooQUZetW

Proposition 13.20.
Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et $g : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ sont des applications affines, alors $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$ est affine et $u_{g\circ f} = u_g \circ u_f$.

Démonstration. Si $M \in \mathcal{E}$ et $x \in E$ nous avons

$$\begin{aligned}(g \circ f)(M + x) &= g\big(f(M) + u_f(x)\big)\\ &= g\big(f(M)\big) + u_g\big(u_f(x)\big)\\ &= (g \circ f)(M) + (u_g \circ u_f)(x).\end{aligned} \tag{13.57}$$

□

THOooBAPDooEUtBgF

Théorème 13.21.
Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines de dimensions finies p et q sur $\mathbb{K}$. Soient les repères cartésiens $R = (O, \{e_i\})$ et $R' = (O', \{e'_i\})$. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine si et seulement si il existe une matrice $a \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^q$ tels que[3]

$$f(x) = b + ax. \tag{13.58}$$

EqCmNHis

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ C'est la définition 13.13.

(2) $\Leftarrow$ Nous savons par la proposition 13.17 qu'il existe une application linéaire $u_f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ telle que

$$f(M + x) = f(M) + u_f(x). \tag{13.59}$$

En prenant $M = O$ et en écrivant x au lieu de $O + x$, nous avons

$$f(x) = f(O) + u_f(x). \tag{13.60}$$

La partie $f(O)$ est le b que nous cherchions[4]. Par ailleurs, vu que u_f est linéaire, elle est donnée par le produit avec une matrice. La matrice a qu'on cherche est la matrice de u_f.

□

[3] L'équation (13.58) est écrite en utilisant un abus de notation entre le vecteur $x \in \mathbb{K}^p$ et le point de $\mathcal{E}$ qui est représenté par x dans le repère $(O, \{e_i\})$.

[4] En réalité le b qu'on cherche est le $b \in \mathbb{K}^n$ tel que $f(O) = O' + b$.

13.5 Isomorphismes

Définition 13.22.
*Un **isomorphisme** entre les espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ est une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ inversible dont l'inverse est affine.*

PropxtFeDE

Proposition 13.23.
Une application affine bijective est un isomorphisme. Si f est un isomorphisme d'espaces affines, alors $u_{f^{-1}} = (u_f)^{-1}$.

Proposition 13.24.
Un espace affine de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ est isomorphe à l'espace affine canonique $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Si nous considérons le repère $R = (A, \{e_i\})$ de l'espace affine $\mathcal{E}$ alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{K}^n &\to \mathcal{E} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto A + \sum_i x_i e_i \end{aligned} \tag{13.61}$$

est un isomorphisme. □

13.6 Sous-espaces affines

DEFooJSUHooJjtpwz

Définition 13.25.
*Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur l'espace vectoriel E. Un **sous-espace affine** de $\mathcal{E}$ est une orbite de l'action d'un sous-espace vectoriel de E.*

Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, il sera un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si l'ensemble

$$F = \{AB \text{ tel que } A, B \in \mathcal{F}\} \tag{13.62}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Dans ce cas nous disons que F est la **direction** de $\mathcal{F}$. Si $A \in \mathcal{F}$, alors l'orbite de A sous F est $\mathcal{F}$. La **dimension** de $\mathcal{F}$ est la dimension de sa direction.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions F et G, nous disons que $\mathcal{F}$ est **parallèle** à $\mathcal{G}$ si $F \subset G$.

PROPooAAPZooDWCuTL

Proposition 13.26.
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de dimension k dans l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n. Alors il existe une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathbb{K}^{n-k}$ telle que $\mathcal{F} = f^{-1}(0)$.

Démonstration. Soient F la direction de $\mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{F}$. Nous considérons une base $\{e_i\}$ adaptée à F au sens $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est une base de F. Nous considérons maintenant le repère cartésien $(A, \{e_i\})$ et nous construisons l'application affine

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{E} &\to \mathbb{K}^{n-k} \\ A + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i &\mapsto \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13.63}$$

Par construction nous avons $f(M) = 0$ si et seulement si $M \in \mathcal{F}$. □

PropomhBwi

Proposition 13.27 (Sous-espace engendré[62])**.**
Soit σ une partie de l'espace affine $\mathcal{E}$.

(1) L'intersection de tous les sous-espaces affines contenant σ est un sous-espace affine, noté $\mathrm{Aff}(\sigma)$.

ITEMooNXXQooCxRUcz

(2) Si $A \in \sigma$, alors la direction de $\mathrm{Aff}(\sigma)$ est le sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{AM} \text{ tel que } M \in \sigma\}. \tag{13.64}$$

EqnRAUfx

Le sous-espace affine donné par la proposition 13.27 est le sous-espace affine **engendré** par la partie σ, et il est noté $\mathrm{eae}(\sigma)$.

PROPooAKJBooMkmsiV
Proposition 13.28.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n sur $\mathbb{K}$, soit $f\colon \mathcal{E} \to \mathbb{K}^r$ une fonction affine. Pour tout $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^r$, l'ensemble $f^{-1}(a)$ est un sous-espace affine[5] de dimension $\dim \ker(u_f)$.

Démonstration. Nous considérons le repère $(A, \{e_i\})$ de $\mathcal{E}$. Étant donné que f est affine nous avons

$$f\big(A + \sum_i x_i e_i\big) = f(A) + u_f\big(\sum_i x_i e_i\big). \tag{13.65}$$

Nous avons donc $f\big(A + \sum_i x_i e_i\big) = a$ lorsque

$$u_f(\sum_i x_i e_i) = a - f(A). \tag{13.66}$$

En utilisant le lemme 6.45, nous avons donc

$$f^{-1}(a) = A + (u_f)^{-1}\big(a - f(A)\big) = A + m + \ker(u_f) \tag{13.67}$$

où m est n'importe que élément de $u_f^{-1}\big(a - f(A)\big)$. □

PropPoNpPz
Proposition 13.29.
Soit A un ensemble convexe[6] dans un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_n$ des éléments de A. Alors toute combinaison

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{13.68}$$

telle que $a_1 + \cdots + a_n = 1$ et $a_i \in [0, 1]$ appartient à A.

Démonstration. Nous prouvons la proposition pour $n = 3$. Nous devons trouver des nombres $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tels que

$$t_2\big(t_1 v_1 + (1 - t_1)v_2\big) + (1 - t_2)v_3 = a v_1 + b v_2 + c v_3. \tag{13.69}$$

La réponse est immédiatement donnée par

$$t_2 a = 1 - c \tag{13.70a}$$
$$t_1 = a/t_2. \tag{13.70b}$$

Étant donné que $c \in [0, 1]$ nous avons $t_2 \in [0, 1]$. En ce qui concerne t_1 nous avons

$$t_1 = \frac{a}{t_2} \leqslant \frac{1 - c}{1 - c} = 1. \tag{13.71}$$

□

13.7 Barycentre

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Un couple (A, λ) avec $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ est un **point pondéré**.

LemtEwnSH
Lemme-Définition 13.30 ([428]).
Soit une famille de points pondérés $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1\dots r}$. Si $\sum_i \lambda_i \neq 0$, alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0. \tag{13.72}$$

*Le point G donné par le lemme 13.30 est le **barycentre** des points pondérés (A_i, λ_i).*

Notons que l'on peut toujours supposer que $\sum_i \lambda_i = 1$ parce que le barycentre ne change pas lorsque tous les λ_i sont multipliés par un même nombre.

DefIMZooLFdIUB
Définition 13.31 (Combinaison convexe).
*Des nombres positifs ou nuls λ_1,..., λ_n vérifiant $\sum_i \lambda_i = 1$ forment une **combinaison convexe**.*

[5] Définition 13.25.
[6] Définition 9.228.

Le théorème suivant donne quelques caractérisations équivalentes du barycentre.

ThoIJVzxr

Théorème 13.32 ([428]).
Soient $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1,\dots,r}$ une famille de points pondérés. Les conditions suivantes sur le point $G \in \mathcal{E}$ sont équivalentes.

(1) Le point G est le barycentre de la famille.

(2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\sum_i (\alpha\lambda_i)\overrightarrow{GA_i} = 0$.

(3) Il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $\big(\sum_i \lambda_i\big)\overrightarrow{AG} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$.

ItemEgOQBX

(4) Pour tout $B \in \mathcal{E}$, nous avons $\big(\sum_i \lambda_i\big)\overrightarrow{BG} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$.

Définition 13.33.
*Si $A, B \in \mathcal{E}$, le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B pondérés par des poids positifs (ouvert ou fermé suivant que l'on accepte que l'un ou l'autre des poids soit nul).*

Lorsque tous les λ_i sont égaux, nous parlons d'**isobarycentre**. Autrement dit, l'isobarycentre des points A_i est le barycentre des points pondérés $(A_i, 1)$.

13.7.1 Sous-espaces affines

Proposition 13.34.
Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentrisation.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de direction F et $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathcal{F}$. Nous devons voir que le barycentre des points A_i pondérés de n'importe quelles masses appartient à $\mathcal{F}$. Pour ce faire nous faisons appel à la caractérisation (4) du théorème 13.32 : pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\overrightarrow{BG} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{BA_i}. \tag{13.73}$$

Puisque B et A_i sont dans $\mathcal{F}$, nous avons $\overrightarrow{BA_i} \in F$ et donc $\overrightarrow{BG} \in F$. Mais comme $B \in \mathcal{F}$, le point G est à son tour dans $\mathcal{F}$.

Réciproquement, nous supposons que $\mathcal{F}$ est stable par barycentrisme. Nous voudrions montrer que l'ensemble

$$F = \{\overrightarrow{AB} \text{ tel que } A, B \in \mathcal{F}\} \tag{13.74}$$

EqCmyWGi

est un sous-espace vectoriel. Soit $A \in \mathcal{F}$. Nous commençons par prouver que les vecteurs de la forme $\overrightarrow{AX}$ ($X \in \mathcal{F}$) forment un espace vectoriel. Considérons $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}$ qui est un élément de E ; il existe donc $V \in \mathcal{E}$ tel que

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}. \tag{13.75}$$

Par les relations de Chasles,

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VX} + \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VY}, \tag{13.76}$$

donc

$$0 = \overrightarrow{VX} - \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VY}, \tag{13.77}$$

ce qui prouve que V est un barycentre de X, A, Y, et donc que $V \in \mathcal{F}$. De la même manière si $W \in \mathcal{E}$ est défini par $\overrightarrow{AW} = \mu\overrightarrow{AX}$, alors

$$\overrightarrow{AW} = \mu\overrightarrow{AX} = \mu(\overrightarrow{AW} + \overrightarrow{WX}), \tag{13.78}$$

ce qui signifie que

$$(1 - \mu)\overrightarrow{AW} + \mu\overrightarrow{XW} = 0 \tag{13.79}$$

et que W est un barycentre.

Afin de montrer que (13.74) est bien un espace vectoriel, nous devons considérer $A, B, X, Y \in \mathcal{F}$ et prouver que $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} \in F$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} &= \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AY} && && (13.80a)\\
&= \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{BA} && V \text{ est celui donné plus haut} && (13.80b)\\
&= \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{AB} && && (13.80c)\\
&= \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{AW} && W \text{ est donné par } \mu = -1. && (13.80d)\\
&= \overrightarrow{AV'}. && && (13.80e)
\end{aligned}$$

□

PropBVbCOS

Proposition 13.35 ([428]).
Soient $A_0, \dots, A_r$ des points de $\mathcal{E}$. L'ensemble des barycentres de ces points (avec des masses de somme 1) est le sous-espace affine engendré par les A_i que nous nommons $\mathcal{F}$.

Démonstration. Soit G le barycentre associé aux poids λ_i. Nous avons

$$G = A_0 + \overrightarrow{A_0G} = A_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}. \tag{13.81}$$

Notons que les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ sont dans la direction du sous-espace affine engendré par les A_i par (13.64). Donc G est bien dans $\mathcal{F}$.

Inversement si X est dans $\mathcal{F}$, on a

$$X = A_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \tag{13.82}$$

parce que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ est un élément général de la direction de $\mathcal{F}$. Donc

$$\overrightarrow{A_0X} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}, \tag{13.83}$$

et en utilisant la relation de Chasles sur chacun des $\overrightarrow{A_0A_i}$,

$$\overrightarrow{A_0X} = \sum_i \lambda_i \big(\overrightarrow{A_0X} + \overrightarrow{XA_i}\big). \tag{13.84}$$

De là nous concluons que

$$\big(1 - \sum_i \lambda_i\big)\overrightarrow{A_0X} + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_iX} = 0, \tag{13.85}$$

ce qui signifie précisément que X est un barycentre des A_i. □

Proposition 13.36.
Soient $r+1$ point $A_0, \dots, A_r$ dans $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine engendré par les A_i est au plus de dimension r.

Démonstration. La direction de l'espace engendré $\mathrm{Aff}\{A_i\}$ est l'espace

$$\mathrm{Span}\{\overrightarrow{A_0A_i}_{i=1,\dots,r}\} \tag{13.86}$$

qui est engendré par r vecteurs et donc est au plus de dimension r. □

En deux mots, la proposition suivante signifie que le barycentre des barycentres est le barycentre.

PropSFvjFZb

Proposition 13.37 (Associativité des barycentres[429]).
Soit une partition $J_0, \dots, J_r$ de $I = \{0, 1, \dots, n\}$. Soient des points $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des nombres tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$. Nous supposons que $\mu_k = \sum_{i \in J_k} \lambda_i \neq 0$ pour tout k, et enfin nous nommons b_k le barycentre de la famille $\{(a_i, \lambda_i), i \in J_k\}$.

Alors le barycentre de la famille $\{(b_k, \mu_k)\}_{k=1,\dots,r}$ est le barycentre de la famille $\{(a_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$.

Démonstration. Nous nommons b le barycentre des b_k pondérés par les μ_k, donc par définition

$$0 = \sum_{k=0}^{r} \mu_k \overrightarrow{bb_k} \tag{13.87a}$$

$$= \sum_k \sum_{i \in J_k} \lambda_i \overrightarrow{bb_k} \tag{13.87b}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in J_k} \lambda_i (\overrightarrow{ba_i} + \overrightarrow{a_ib_k}) \tag{13.87c}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in J_k} \lambda_i \overrightarrow{ba_i} + \sum_{k=0}^{r} \underbrace{\sum_{i \in J_k} \lambda_i \overrightarrow{a_ib_k}}_{=0} \tag{13.87d}$$

$$= \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{ba_i}. \tag{13.87e}$$

Donc b est bien barycentre des a_i avec les poids λ_i. □

13.7.2 Enveloppe convexe

DefNLYYooXUHFUY

Définition 13.38.
*Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'**enveloppe convexe** de A, notée $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ est l'intersection de tous les convexes contenant A.*

L'enveloppe convexe est un convexe. En effet soit C un convexe contenant A et $x, y \in \mathcal{C}\text{onv}(A)$; alors x et y sont dans C et par conséquent le segment $[x, y]$ est inclus dans C. Ce segment étant inclus dans tout convexe contenant A, il est inclus dans $\mathcal{C}\text{onv}(A)$.

PropSVvAQzi

Proposition 13.39 ([430]).
Soit C un convexe dans l'espace affine $\mathcal{E}$ et une famille de points pondérés $\{(a_i, \lambda_i)\}_{i=1,\dots,r}$ dont tous les poids sont positifs (et non tous nuls). Alors le barycentre est aussi dans C.

En d'autre termes, un convexe est stable par barycentrage à poids positifs[7].

Démonstration. Nous prouvons par récurrence. D'abord pour $r = 2$. Le barycentre des points pondérés (a_1, λ_1), (a_2, λ_2) est le point b tel que

$$\lambda_1 \overrightarrow{ba_1} + \lambda_2 \overrightarrow{ba_2} = 0. \tag{13.88}$$

EqFWEErRX

Par définition, ce qui est noté $\overrightarrow{ab}$ n'est rien d'autre que $b - a$; en déballant (13.88), nous trouvons

$$\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) = 0 \tag{13.89}$$

et donc

$$b = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2, \tag{13.90}$$

qui est bien un point du segment $[a_1, a_2]$ parce que c'est une combinaison à coefficients positifs de somme 1.

Nous passons maintenant à la vraie récurrence avec un ensemble de points pondérés

$$A_r = \{(a_1, \lambda_1), \dots, (a_r, \lambda_r)\} \tag{13.91}$$

de masse totale non nulle ; et en vous laissant deviner ce que va désigner A_{r-1}. Si une des masses est nulle (disons λ_r), alors le barycentre de A_r est le même que celui de A_{r-1} et l'hypothèse de récurrence nous enseigne que ledit barycentre est dans C. Nous supposons donc que $\lambda_i \neq 0$ pour tout i. Dans ce cas le théorème d'associativité des barycentres 13.37 dit que le barycentre de A_r est le barycentre entre le barycentre de A_{r-1} et (a_r, λ_r), qui sont deux points de C par hypothèse de récurrence. □

Si E est un espace vectoriel et si $x_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, alors le barycentre des couples (x_i, λ_i) est le point g tel que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{gx_i}$, c'est-à-dire $\sum_i \lambda_i (x_i - g) = 0$ ou encore

$$\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \lambda_i g. \tag{13.92}$$

Donc, quitte à diviser tous les λ_i par la somme, nous pouvons supposer que la somme des poids est 1. C'est pourquoi lorsque nous parlerons de barycentre dans un espace vectoriel sans contexte affine, nous allons toujours supposer $\sum_i \lambda_i = 1$ et avoir le barycentre

$$g = \sum_i \lambda_i x_i. \tag{13.93}$$

PropYHMTmZX

Proposition 13.40.
Soit E, un espace vectoriel et $A \subset E$. L'enveloppe convexe $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ est l'ensemble des barycentres de familles finies de points affublés de masses positives.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des dits barycentres. Par la proposition 13.39, ces barycentres sont dans l'enveloppe convexe et donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}\text{onv}(A)$. A contrario, si nous prouvons que $\mathcal{B}$ était convexe, alors nous aurions $\mathcal{C}\text{onv}(A) \subset \mathcal{B}$ parce que l'enveloppe convexe est l'intersection des convexes contenant A.

Soient $a, b \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que l'on a $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_m$ dans A ainsi que les nombres strictement positifs $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ et $\mu_0, \dots, \mu_m$ tels que

$$a = \sum_i \lambda_i a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{13.94a}$$

$$b = \sum_j \mu_j b_j \qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1 \tag{13.94b}$$

[7] Sauf si on prend tous les poids nuls ; mais contre ce genre d'idées, on ne peut rien faire.

Un point du segment $[a,b]$ est de la forme $p=ta+(1-t)b$ avec $t\in[0,1]$. En développant,

$$p=\sum_{i=0}^{n}(t\lambda_i)a_i+\sum_{j=0}^{m}(1-t)\mu_j b_j. \tag{13.95}$$

C'est le barycentre de la famille $\{(a_i,\lambda_i),(b_j,\mu_j)\}$, parce que la somme des coefficients vaut bien 1 :

$$\sum_i(t\lambda_i)+\sum_j(1-t)\mu_j=t+(1-t)=1. \tag{13.96}$$

□

ThoJLDjXLe

Théorème 13.41 (Carathéodory[112]).
Dans un espace affine de dimension n, l'enveloppe convexe[8] *de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $n+1$ points.*

Démonstration. Soit $x\in\mathcal{C}\text{onv}(A)$; on sait par la proposition 13.40 que x est barycentre de points de A avec des coefficients positifs :

$$x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k \tag{13.97}$$

EqWJDwQTH

avec $\sum_k\lambda_k=1$. Nous supposons que $p>n+1$ (sinon le théorème est réglé), et nous allons faire une récurrence à l'envers en montrant qu'on peut aussi écrire x sous forme d'un barycentre de strictement moins de p points.

Étant donné que $p-1>n$, la famille $\{x+i-x_1\}_{i=2,\dots,p}$ est liée et il existe donc $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=2}^{p}\alpha_i(x_i-x_1)=0$, c'est-à-dire telle que

$$\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_i=\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_1. \tag{13.98}$$

Nous posons $\alpha_1=-\sum_{i=2}^{p}\alpha_1$. Remarquons qu'alors $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i=0$ parce que

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\sum_{i=2}^{p}\alpha_i x_1=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_1=0. \tag{13.99}$$

Par conséquent ça ne coûte rien de récrire (13.97) sous la forme

$$x=\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i+t\alpha_i)x_i. \tag{13.100}$$

Les α_i ne sont pas tous nuls, mais leur somme est nulle, donc il y en a au moins un négatif. Nous notons

$$\tau=\min\{-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\text{ tel que }\alpha_i<0\}, \tag{13.101}$$

et J l'ensemble de i pour lesquels ce minimum est atteint. Nous considérons aussi les nombres $\mu_i=\lambda_i+\tau\alpha_i$. Plusieurs remarques.

(1) Si $j\in J$, alors $\mu_j=0$

(2) Si $\alpha_i>0$ alors $\mu_i\geqslant 0$, mais si $\alpha_i<0$ alors

$$\lambda_i+\tau\alpha_i\geqslant\lambda_i+(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i})\alpha_i=0 \tag{13.102}$$

donc $\mu_i\geqslant 0$ quand même.

(3) $\sum_{i=1}^{p}\mu_i=1$, toujours parce que $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=0$.

Avec tout ça, nous avons

$$\sum_{i\notin J}\mu_i x_i=\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_i=x. \tag{13.103}$$

Et voilà, nous avons écrit x comme un barycentre à coefficients positifs de moins de p éléments parce que J n'est pas vide. □

[8] Définition 13.38.

CorOFrXzIf

Corolaire 13.42.
Dans un espace affine de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

Démonstration. Soit A une partie compacte de l'espace vectoriel E, et $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ son enveloppe convexe. Nous allons montrer que toute suite dans $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ admet une sous-suite convergente en écrivant un point de $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ comme le théorème de Carathéodory 13.41 nous le suggère. Pour cela nous considérons le simplexe

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \text{ et } \lambda_k \geqslant 0 \forall k \right\}. \tag{13.104}$$

Montrons en passant que Λ est compact. Si $\lambda_k \in \Lambda$ est une suite, alors chacun des λ_k est un $(n+1)$-uple de nombres dans $[0,1]$:

$$k \mapsto (\lambda_k)_i \tag{13.105}$$

est une suite qui possède une sous-suite convergente. En passant $n+1$ fois à une sous-suite, nous tombons sur une suite convergente vers $\lambda \in \Lambda$, grâce à la convergence composante par composante. De plus pour chaque k nous avons $\sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_k)_i = 1$, et en passant à la limite, la somme étant une application continue, $\sum_i \lambda_i = 1$.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \Lambda \times A^{n+1} &\to \mathcal{C}\text{onv}(A) \\ (\lambda, x) &\mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k. \end{aligned} \tag{13.106}$$

C'est une application continue parce qu'elle est bilinéaire en dimension finie ; son image est contenue dans $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ par la proposition 13.39, et elle est surjective par le théorème de Carathéodory 13.41. Bref, $\mathcal{C}\text{onv}(A) = f(\Lambda \times A^{n+1})$ est donc l'image d'un compact par une application continue ; elle est donc compacte par le théorème 9.298. □

Notons que sans le théorème de Carathéodory, peut être que le nombre de points utiles pour décomposer les différents a_k n'était pas borné ; dans ce cas nous aurions du prendre une infinité de sous-suites et rien n'aurait été sûr.

13.7.3 Applications affines et barycentre

PROPooGSPZooRnVgiU

Proposition 13.43 ([431]).
Une application $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ entre deux espaces affines est affine si et seulement si pour tout système $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1,\dots,k}$ de barycentre G et de poids total non nul, le point $f(G)$ est barycentre du système $\{(f(A_i), \lambda_i)\}$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si f est affine**

Par définition d'un barycentre,

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0. \tag{13.107}$$

Nous considérons un point arbitraire $O \in \mathcal{E}$ et nous écrivons $A_i = O + x_i$, $G = O + x_g$. Ensuite nous utilisons le lemme 13.15 pour le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} &= \sum_i \lambda_i u_f(x_i - x_g) && \text{(13.108a)} \\ &= u_f\Big(\sum_i \lambda_i (x_i - x_g)\Big) && \text{(13.108b)} \\ &= u_f\Big(\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i}\Big) && \text{(13.108c)} \\ &= u_f(0) = 0. && \text{(13.108d)} \end{aligned}$$

Donc $f(G)$ est bien le barycentre du nouveau système.

(2) **Si f conserve les barycentres**

Nous définissons u par $f(O+x) = f(O) + u(x)$. À priori, ce u dépend de O et n'est pas linéaire.

(2a) *u est linéaire*

Soient $M, N \in \mathcal{E}$ et les éléments $x_m, x_n \in E$ tels que $\overrightarrow{OM} = x_m$ et $\overrightarrow{ON} = x_n$. Nous définissons enfin P par

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}, \tag{13.109}$$

et $P = O + x_p$. En décomposant $\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{NO}$ par les relations de Chasles de la proposition 13.5(1) nous avons

$$(\alpha + \beta - 1)\overrightarrow{PO} - \alpha\overrightarrow{PM} - \beta\overrightarrow{PN} = 0 \tag{13.110}$$

et donc P est barycentre du système

$$\{(O, \alpha + \beta - 1), (M, \alpha), (N, \beta)\}. \tag{13.111}$$

Le point $f(P)$ sera barycentre du système

$$\big\{\big(f(O), \alpha + \beta - 1\big), \big(f(M), \alpha\big), \big(f(N), \beta\big)\big\}. \tag{13.112}$$

Cela signifie que

$$(\alpha + \beta - 1)\overrightarrow{f(P)f(O)} - \alpha\overrightarrow{f(P)f(M)} - \beta\overrightarrow{f(P)f(N)} = 0. \tag{13.113}$$

En y substituant $\overrightarrow{f(P)f(O)} = u(-x_p)$, $\overrightarrow{f(P)f(M)} = u(x_m - x_p)$ et $\overrightarrow{f(P)f(N)} = u(x_n - x_p)$ ainsi que $x_p = \alpha x_m + \beta x_b$ nous trouvons

$$u(\alpha x_m + \beta x_n) = \alpha u(x_m) + \beta u(x_n). \tag{13.114}$$

Donc u est linéaire.

(2b) *u ne dépend pas du point O*

Il n'est pas besoin de démontrer cela parce que la définition 13.13 ne le demande pas. Note : c'est le lemme 13.14 qui dit que c'est par ailleurs vrai.

□

13.8 Repères, coordonnées cartésiennes et barycentriques

Définition 13.44.
*On dit que les points $A_0, \dots, A_r \in \mathcal{E}$ sont **affinement indépendants** si le sous-espace affine engendré est de dimension r.*

PropGAneHg

Proposition 13.45 ([428]).
Pour $r+1$ points $A_0, \dots, A_r$ dans $\mathcal{E}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooONZHooWIzXdw

(1) Les A_i sont affinement indépendants.

ITEMooOMCRooNiRtSW

(2) Pour tout $i = 0, \dots, r$, le point A_i n'est pas dans $\mathrm{Aff}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r\}$.

ItemrAzkIl

(3) Les points $A_0, \dots, A_{r-1}$ sont affinement indépendants et $A_r \notin \mathrm{Aff}\{A_0, \dots, A_{r-1}\}$.

ITEMooSLMDooFOHLEG

(4) Il existe $i_0 \in \{0, \dots, r\}$ tel que la partie $\{\overrightarrow{A_kA_{i_0}}\}_{k \neq i_0}$ est libre.

ItemFBfcuq

(5) Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, les vecteurs $\overrightarrow{A_kA_i}$ $(k \neq i)$ sont linéairement indépendants.

Démonstration. Nous allons montrer que tout est équivalent à (1). Ce point (1) signifie que tous les vecteurs $v_i = \overrightarrow{A_0A_i}$ sont linéairement indépendants.

(1) **(1) implique (2)** Si A_j était dans $\mathrm{Aff}\{A_k\}_{k\neq j}$, cela signifierait que $A_j = A_0 + \sum_{k\neq j}\lambda_k v_k$, et donc $v_j = \sum_{k\neq j} v_k$ et donc que ces vecteurs ne sont pas linéairement indépendants.

(2) **(1) implique (3)** Vu que $\{v_i\}_{i=1,\dots,r}$ sont linéairement indépendants, les $\{v_i\}_{i=1,\dots,r-1}$ le sont aussi. De plus $A_r \notin \mathrm{Aff}\{A_0, \dots, A_{r-1}\}$ par (2).

(3) **(1) implique (4)** Par exemple $i = 0$ fait l'affaire.

(4) **(1) implique (5)** Le sous-espace vectoriel F de (13.64) est de dimension r et peut être écrit $\mathrm{Span}\{\overrightarrow{MA_k}\}_{k=0,\dots,r}$ pour n'importe que $M \in \{A_0, \dots, A_r\}$.

(5) **(2) implique (1)** Si les A_i n'étaient pas affinement indépendants, on aurait in A_j et un A_k tels que

$$A_j = A_k + \sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} \lambda_i \overrightarrow{A_kA_i}. \tag{13.115}$$

Cela donnerait

$$\overrightarrow{A_kA_j} - \sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} \lambda_i \overrightarrow{A_kA_i}, \tag{13.116}$$

ce qui contredirait le fait que les $\{v_i\}_{i=1,\dots,r}$ sont linéairement indépendants parce que chacun des $\overrightarrow{A_kA_i}$ peut être écrit comme une combinaison des v_i.

(6) **(3) implique (1)** Nous avons par hypothèse que $\{v_i\}_{i=1,\dots,r-1}$ est libre. Si $\{v_i\}_{i=1,\dots,r}$ n'était pas libre, nous aurions $v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i v_i$, et donc

$$A_r = A_0 + v_r = A_0 + \sum_{i=1}^{r-1} \overrightarrow{A_0A_i}, \tag{13.117}$$

c'est-à-dire que $A_r \in \text{Aff}\{1_0, \dots, A_{r-1}\}$.

(7) **(4) implique (1)** D'après la proposition 13.27(2), l'espace $\text{Aff}\{A_0, \dots, A_r\}$ est modelé sur

$$F = \text{Span}\{\overrightarrow{A_{i_0}A_k}\}_{k\neq i_0}. \tag{13.118}$$

Par hypothèse la partie $\{\overrightarrow{A_{i_0}A_k}\}_{k\neq i_0}$ est libre. Donc $\dim(F) = r$.

(8) **(5) implique (1)** L'hypothèse de (4) est validée à fortiori.

□

Notons à propos de la condition (3) que l'existence d'un i pour lequel A_i n'est pas dans $\text{Aff}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r\}$ n'implique pas l'indépendance des $r+1$ points. En effet dans $\mathbb{R}^2$ nous considérons les 4 points $A_0 = (0,0)$, $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (2,0)$ et $A_3 = (0,1)$. Évidemment le point A_3 n'est pas dans l'espace engendré par les trois autres ; il n'empêche que ces points ne sont pas affinement indépendants parce que la direction est de dimension 2 au lieu de 3.

DefguuwEO

Définition 13.46.
*Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de dimension k. Un **repère affine** de $\mathcal{F}$ est la donnée de $k+1$ points affinement indépendants de $\mathcal{F}$.*

Si $\{A_0, \dots, A_n\}$ est un repère affine, le point A_0 est l'**origine**. C'est un choix complètement arbitraire ; et c'est bien cet arbitraire qui nous amènera à considérer les coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes.

Soit $M \in \mathcal{E}$; par définition nous avons

$$M = A_0 + \overrightarrow{A_0M}. \tag{13.119}$$

Mais nous savons que les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ forment une base de E, nous avons donc des nombres λ_i tels que

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}. \tag{13.120}$$

Les nombres λ_i ainsi construits sont les **coordonnées cartésiennes** du point M dans le repère $\{A_0, \dots, A_n\}$ d'origine A_0.

À partir de ces coordonnées, le point $M \in \mathcal{E}$ se retrouve par la formule

$$M = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}. \tag{13.121}$$

PROPooIXVBooPpKsDE

Proposition 13.47 ([1]).
La paire $\big(O, \{e_1, \dots, e_n\}\big)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\{O, O+e_1, \dots, O+e_n\}$ est un repère affine.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Vue la proposition 13.45, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{O(O+e_i)}$ sont linéairement indépendants. Mais $\overrightarrow{O(O+e_i)} = e_i$, donc oui, ils sont linéairement indépendants.

(2) **Sens inverse** Il s'agit d'utiliser la même proposition 13.45 qui est encore applicable parce que c'est une équivalence.

□

13.48.
Soient (A, e_i) et (A', e'_i) deux repères cartésiens pour l'espace affine $\mathcal{E}$. Soit (s_{ij}) la matrice de changement de base entre $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ dans E. Nous voudrions trouver les x_i en termes des x'_i.

Pour cela nous considérons un point M dans $\mathcal{E}$ et nous l'écrivons dans les deux bases. Cela fournit l'égalité

$$A + \sum_i x_i e_i = A' + \sum_i x'_i e'_i. \tag{13.122}$$

EqcYfuMg

Nous considérons les coordonnées (a_i) de A' dans le repère (A, e_i), c'est-à-dire

$$A' = A + \sum_i a_i e_i. \tag{13.123}$$

EqZNwPHE

En substituant $e'_i = \sum_k s_{jk} e_k$ et (13.123) dans (13.122) nous trouvons

$$\sum_k x_k e_k = \sum_k a_k e_k + \sum_{jk} s_{jk} x'_j e_k, \tag{13.124}$$

et par conséquent

$$x_k = a_k + \sum_j s_{jk} x'_j. \tag{13.125}$$

Les coordonnées barycentriques sont données par la proposition suivante.

PROPooTIRXooLAipRa

Proposition 13.49 ([428])**.**
Soient $A_0, \dots, A_r$ des points affinement indépendants dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} = \text{Aff}\{A_0, \dots, A_r\}$. Tout point $M \in \mathcal{F}$ s'écrit de façon unique comme barycentre[9] *des A_i affectés de poids λ_i tels que $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$.*

Démonstration. Nous avons vu plus haut (définition 13.46) que l'affine indépendance des points A_i assurait que $(A_0, \dots, A_r)$ était un repère de $\mathcal{F}$.

En ce qui concerne l'existence de l'écriture de M comme barycentre, nous savons que les sous-espace affines sont exactement les ensembles de barycentres (proposition 13.35), c'est-à-dire que si on a des points dans un sous-espace affine, alors les barycentres de ces points est encore dans le sous-espace affine.

L'unicité est comme suit. Si M est barycentre des A_i avec poids λ_i, nous écrivons la caractérisation (4) du théorème 13.32 avec $B = A_0$:

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \tag{13.126}$$

où la somme à droite s'étend à priori de 0 à r, mais comme $\overrightarrow{A_0A_0} = 0$, nous l'avons limitée à 1. Si M s'écrit comme barycentre de deux façons différentes, nous aurions

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^r \mu_i \overrightarrow{A_0A_i} \tag{13.127}$$

avec $\sum_i \lambda_i = \sum_i \mu_i = 1$. Étant donné que les points $A_0, \dots, A_r$ forment un repère, les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ sont linéairement indépendants (point (5) de la proposition 13.45) et donc $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1, \dots, r$. La condition de somme des poids égale à 1 impose alors immédiatement $\lambda_0 = \mu_0$. □

DEFooTXPPooQdacbO

Définition 13.50.
Soit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n. Soient des points affinement indépendants $A_1, \dots, A_n$. Pour $M \in \mathcal{E}$, la proposition 13.49 indique qu'il existe un unique choix de λ_i tel que

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i = 1 & \text{(13.128a)} \\ \sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0. & \text{(13.128b)} \end{cases}$$

[9] Définition 13.30.

Ces λ_i sont les ***coordonnées barycentriques*** *de M dans le repère $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$.*

NORMooOGHBooMjmouu

13.51.
Soit $\mathbb{R}^2$ et les points non alignés A, B, C. Les coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans ce système correspondent à l'unique $X \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB} + \gamma\overrightarrow{XC} = 0. \tag{13.129}$$

Exemple 13.52.
Soient les points $A = (3, 1)$, $B = (-1, 2)$ et $C = (0, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous allons montrer qu'il forment un repère affine de $\mathbb{R}^2$. L'espace engendré par ces trois points est l'espace des

$$A + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}, \tag{13.130}$$

et la direction correspondante est l'espace vectoriel donné par $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ qui est de dimension deux. Donc l'espace affine engendré par A, B et C est de dimension 2. △

Exemple 13.53.
Dans le repère (A, B, C), quel est le point de coordonnées barycentriques $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$? D'abord nous vérifions que

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1. \tag{13.131}$$

Ensuite nous cherchons $X \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{6}\overrightarrow{AX} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CX} = 0, \tag{13.132}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} = 0. \tag{13.133}$$

Nous trouvons immédiatement $x = 1/6$ et $y = 1/3$. Le point cherché est donc le point $\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. △

LEMooDUMVooFtfFOe

Lemme 13.54 ([1])**.**
Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui préserve les points d'une base affine de $\mathcal{E}$ est l'identité.

Démonstration. Une base affine de $\mathcal{E}$ consiste en $n+1$ points $\{A_0, \dots, A_n\}$ affinement indépendants. Nous utilisons la proposition 13.47 pour dire que $\big(A_0, \{\overrightarrow{A_0A_i}\}_{i=1,\dots,n}\big)$ est un repère cartésien.

En utilisant la formule du lemme 13.14,

$$f(A_i) = f(A_0 + \overrightarrow{A_0A_i}) = f(A_0) + u(\overrightarrow{A_0A_i}). \tag{13.134}$$

Donc $A_i = A_0 + u(\overrightarrow{A_0A_i})$, ce qui signifie que

$$u(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{A_0A_i} \tag{13.135}$$

EQooAJYWooBTuqqp

Par ailleurs, tout point M[10] de $\mathcal{E}$ peut être écrit sous la forme

$$M = A_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}. \tag{13.136}$$

En appliquant f, et en utilisant (13.135),

$$f(M) = f(A_0) + \sum_i \lambda_i u(\overrightarrow{A_0A_i}) = A_0 + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = M. \tag{13.137}$$

Donc tout point de $\mathcal{E}$ est fixé par f, ce qui signifie que f est l'identité. □

[10] Même les points qui ne s'appellent pas « M » en fait.

13.8.1 Équation de droite

DEFooCYDPooEdRbyl

Proposition-Définition 13.55.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension trois muni d'un repère barycentrique[11] *(A_1, A_2, A_3). Nous notons $D(a,b,c)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées barycentriques (normalisées) (x,y,z) vérifient $ax+by+cz=0$, c'est-à-dire l'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ tels que*

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (13.138a)\\ x\overrightarrow{MA_1}+y\overrightarrow{MA_2}+z\overrightarrow{MA_3}=0. & (13.138b)\end{cases}$$

Alors l'ensemble $D(a,b,c)$ est un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{E}$.
*Nous nommons **droite affine** une telle partie de $\mathcal{E}$.*

Idée de preuve : ne pas oublier la condition $x+y+z=1$ parce que la somme des coordonnées barycentriques doit valoir 1.

Exemple 13.56.
La droite $D(1,1,1)$ n'existe pas parce que ce serait $x+y+z=0$, qui est incompatible avec $x+y+z=1$. △

Les droites $D(a,b,c)$ et $D(a',b',c')$ s'intersectent selon les solutions du système

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (13.139a)\\ ax+by+cz=0 & (13.139b)\\ a'x+b'y+c'z=0 & (13.139c)\end{cases}$$

Donc deux droites affines ont un unique point d'intersection si et seulement si

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}\neq 0. \tag{13.140}$$

Elles seront parallèles ou confondues si et seulement si $d=0$.

13.8.2 Associativité, coordonnées barycentriques dans un triangle

Lemme 13.57 ([432]).
Soient trois points non alignés A, B, C ainsi que des nombres α, β, γ tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Soit H le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ et G le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.
Alors G est barycentre de $\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$.

Démonstration. Vues les définitions de H et G nous avons

$$\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=0 \tag{13.141a}$$
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=0. \tag{13.141b}$$

En utilisant les relations de Chasles nous introduisons H dans la seconde relation :

$$\alpha(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA})+\beta(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB})+\gamma\overrightarrow{GC}=0 \tag{13.142a}$$
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\underbrace{\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}}_{=0}+\gamma\overrightarrow{GC}=0 \tag{13.142b}$$
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=0. \tag{13.142c}$$

□

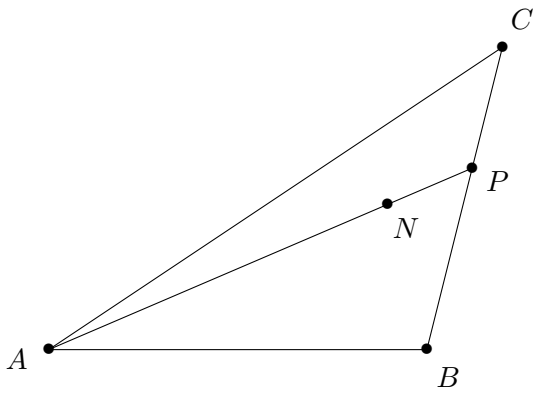
Les coordonnées barycentriques dans un triangle (et plus généralement en fait) permettent de faire des projections.

PROPooBCUVooWKttiH

Proposition 13.58.
Soient trois points non alignés A, B, C ainsi qu'un point N de coordonnées barycentriques (α,β,γ) dans le système (A,B,C). Si P est l'intersection $(AN)\cap(BC)$ alors les coordonnées de P sont $(0,\beta,\gamma)$.

Démonstration. Un dessin de la situation :

[11] Définition 13.50.



Dire que les coordonnées de N sont (α,β,γ) signifie que

$$\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=0. \tag{13.143}$$

Nous voudrions montrer que le point P est bien le point de coordonnées $(0,\beta,\gamma)$. Soit donc le point P tel que

$$\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=0 \tag{13.144}$$

EQooYLGDooWqKKOM

et montrons que ce point est l'intersection $(BC)\cap(NA)$.

D'abord la relation (13.144) nous dit immédiatement que P est sur la droite (BC). Ensuite, en utilisant les relations de Chasles pour introduire N :

$$\beta(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NB})+\gamma(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NC})=0. \tag{13.145}$$

Nous remplaçons $\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}$ par $-\alpha\overrightarrow{NA}$ pour obtenir :

$$(\beta+\gamma)\overrightarrow{PN}-\alpha\overrightarrow{NA}=0. \tag{13.146}$$

Cela montre que les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{NA}$ sont colinéaires, et donc que P, N et A sont alignés. □

13.9 Applications affines sur $\mathbb{R}^n$

Soit $v\in\mathbb{R}^n$; nous notons $\tau_v\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ la translation donnée par $\tau_v(x)=x+v$. Le groupe de toutes les translations de $\mathbb{R}^n$ est noté $T(n)$ et est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^n,+)$.

Nous avons déjà discuté de la structure d'un espace vectoriel (en particulier $\mathbb{R}^n$) comme espace affine en 13.6.

LEMooZZAIooOMiayy

Lemme 13.59.
Décomposition d'une application affine.

ITEMooSJBFooYHURto

(1) Une application $f\colon E\to E$ est affine si et seulement si il existe $v\in E$ et une application linéaire α sur E telle que $f=\tau_v\circ\alpha$.

ITEMooPYEOooKIesYm

(2) Dans ce cas, le choix de (v,α) est unique.

ITEMooHIAUooRxfTqx

(3) Si f est bijective, alors α est bijective.

Démonstration. Nous supposons d'abord que f est affine. Alors il existe une application linéaire u_f sur E telle que

$$f(M+x)=f(M)+u_f(x)=(\tau_{f(M)}\circ u_f)(x) \tag{13.147}$$

pour tout x et M. De plus l'application u_f ne dépend ni de M ni de x (c'est la proposition 13.17(1)). En posant $M=0$ nous avons :

$$f(x)=(\tau_{f(0)}\circ u_f)(x). \tag{13.148}$$

Dans l'autre sens nous supposons avoir $v\in E$ et α linéaire sur E telles que

$$f(M)=(\tau_v\circ\alpha)(M). \tag{13.149}$$

Notons qu'il y a un abus de notation entre α qui est linéaire sur l'espace *vectoriel* E et l'application α qui est une application sur l'espace *affine* E. Cet abus est légitime parce que les deux espaces sont identiques en tant qu'ensembles. Ce qui est vraiment abuser par contre, c'est de se poser ce genre de questions.

Nous avons :

$$\begin{aligned} f(M+x) = \tau_v\big(\alpha(M+x)\big) = \alpha(M+x)+v = \alpha(M)+v+\alpha(x) \\ = (\tau_v\circ\alpha)(M)+\alpha(x) = f(M)+\alpha(x). \end{aligned} \tag{13.150}$$

Donc la fonction f vérifie la définition 13.13. La partie (1) est prouvée.

Pour prouver l'unicité de la partie (2), nous supposons que $\tau_v\circ\alpha = \tau_w\circ\alpha$. En appliquant cela à 0 nous trouvons $v = w$. Nous avons donc $\tau_v\circ\alpha = \tau_v\circ\beta$. Comme τ_v est inversible, nous en déduisons $\alpha = \beta$.

Enfin le point (3) est relativement évident du fait que τ_v, elle, est surement bijective. □

CORooATCNooUwEPNI

Corolaire 13.60.
Une application affine qui conserve l'origine est linéaire.

Démonstration. Conserver l'origine demande de poser $v = 0$ dans l'expression du lemme 13.59. □

PROPooYRCJooIcmUVI

Proposition 13.61.
Soit une application affine $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. L'ensemble des points fixes

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = x\} \tag{13.151}$$

est soit vide soit un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $f = \tau_v\circ\alpha$; nous avons $x\in\mathrm{Fix}(f)$ si et seulement si

$$x = \tau_v\big(\alpha(x)\big) = \alpha(x)+v, \tag{13.152}$$

autrement dit, en considérant l'application linéaire $\beta = \mathrm{Id}-\alpha$, si et seulement si $\beta(x) = v$. Nous écrivons $\mathrm{Fix}(f) = \beta^{-1}(v)$. Supposons que cet ensemble soit non vide et considérons $x_0\in\beta^{-1}(v)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(v) &= \{x\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \beta(x) = \beta(x_0)\} && (13.153a)\\ &= \{x \text{ tel que } \beta(x-x_0) = 0\} && (13.153b)\\ &= \{x \text{ tel que } x-x_0\in\ker(\beta)\} && (13.153c)\\ &= \ker(\beta)+x_0 && (13.153d)\\ &= \tau_{x_0}\big(\ker(\beta)\big). && (13.153e) \end{aligned}$$

Mais comme $\ker(\beta)$ est un sous-espace vectoriel, $\beta^{-1}(v)$ est le translaté d'un sous-espace vectoriel, c'est-à-dire un sous-espace affine. □

13.9.1 Structure de groupe pour les applications affines

PROPooBPKKooJRAMeT

Proposition-Définition 13.62 ([1])**.**
L'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$ forment un groupe pour la composition. Les lois de groupe sont données par les formules suivantes :

(1) Le neutre est l'identité.

ITEMooGUFRooMuhXds

(2) Le produit est donné par

$$(\tau_v\circ\alpha)(\tau_w\circ\beta) = \tau_{\alpha(w)+v}\circ\alpha\beta. \tag{13.154}$$

EQooMIFSooKIvPnW

ITEMooYOMSooRUDSdm

(3) L'inverse est donné par

$$(\tau_v\circ\alpha)^{-1} = \tau_{-\alpha^{-1}(v)}\circ\alpha^{-1}. \tag{13.155}$$

Ce groupe est noté $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour l'identité, oui, composer par l'identité est neutre.

Le fait que la formule (13.154) soit vraie est un simple calcul :

$$(\tau_v\circ\alpha)\circ(\tau_w\circ\beta)(x) = (\alpha\beta)(x)+\alpha(w)+v = \big(\tau_{\alpha(w)+v}\circ\alpha\beta\big)x. \tag{13.156}$$

Le fait que la formule (13.154) donne bien un produit pour tous les éléments de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est le lemme 13.59.

En ce qui concerne l'inverse, c'est un calcul :

$$\begin{aligned} (\tau_{-\alpha^{-1}(v)}\alpha^{-1})(\tau_v\alpha)(x) &= (\tau_{-\alpha^{-1}(v)}\alpha^{-1})\big(\alpha(x)+v\big) && (13.157a)\\ &= \tau_{-\alpha^{-1}(v)}\big(x+\alpha^{-1}(v)\big) && (13.157b)\\ &= x. && (13.157c) \end{aligned}$$

□

Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application affine, la proposition 13.59 affirme qu'il existe une application linéaire u telle que

$$f(x+y) = f(x) + u(y). \tag{13.158}$$

En écrivant cela pour $x = 0$,

$$f(y) = f(0) + u(y), \tag{13.159}$$

ou encore $f = \tau_{f(0)} \circ u$.

PROPooTPFZooKtFxhg

Proposition 13.63.
L'ensemble $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ *est isomorphe au produit semi-direct*[12]

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_{\boldsymbol{Ad}} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \tag{13.160}$$

où $\boldsymbol{Ad}$ *est l'action adjointe, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ad}\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Aut}\big(T(n)\big) \\ \alpha &\mapsto \big(\tau_v \mapsto \alpha \circ \tau_v \circ \alpha^{-1}\big). \end{aligned} \tag{13.161}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Égalité d'ensembles** Il faut que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ soit en bijection avec $T(n) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. En effet si $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, la décomposition $f = \tau_v \circ \alpha$ est unique. D'abord en appliquant à 0, $f(0) = \tau_v\big(\alpha(v)\big) = v$. Donc v est fixé par la valeur de $f(0)$. Ensuite $\alpha = f \circ \tau_v^{-1}$, donc α fixé.

(2) **L'action adjointe fonctionne** Il faut vérifier que $\alpha \circ \tau_v \circ \alpha^{-1}$ est bien dans $T(n)$. Pour cela, en agissant sur $x \in \mathbb{R}^n$ nous trouvons

$$\alpha\tau_v\alpha^{-1}(x) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) + v\big) = x + \alpha(v) = \tau_{\alpha(v)}(x). \tag{13.162}$$

Le fait que $\mathbf{Ad}(\alpha)$ soit un automorphisme est toujours correct.

(3) **Morphisme** Nous montrons que

$$\begin{aligned} \psi\colon T(n) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \\ (\tau_v, \alpha) &\mapsto \tau_v \circ \alpha \end{aligned} \tag{13.163}$$

est un isomorphisme de groupes. D'abord la loi de groupe sur $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$(\tau_v \circ \alpha) \circ (\tau_w \circ \beta) = \tau_{v+\alpha(w)} \circ (\alpha \circ \beta). \tag{13.164}$$

Ensuite la loi de groupe du produit semi-direct est donnée par

$$(\tau_v, \alpha) \cdot (\tau_w, \beta) = \big(\tau_v\, \mathbf{Ad}(\alpha)\tau_w, \alpha\beta\big) = \big(\tau_v\tau_{\alpha(w)}, \alpha\beta\big) = \big(\tau_{\alpha(w)+v}, \alpha\beta\big). \tag{13.165}$$

Nous avons donc bien

$$\psi\big((\tau_v,\beta)\cdot(\tau_w,\beta)\big) = \psi(\tau_v,\beta) \circ \psi(\tau_w,\beta). \tag{13.166}$$

□

13.10 Isométries

DEFooZGKBooGgjkgs

Définition 13.64 (Isométrie d'espace affine)**.**
Si $\mathcal{E}$ *est un espace affine muni d'une distance* d*, une isométrie de* $\mathcal{E}$ *est une application* $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *préservant* d*, c'est-à-dire telle que*

$$d(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big). \tag{13.167}$$

Notons que toutes les applications affines ne sont pas des isométries : par exemple les homothéties.

PROPooHSOGooBbFTYt

Proposition 13.65.
Si $\mathcal{E}$ *est modelé sur un espace euclidien* $(E, \|.\|)$ *alors la formule*

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| \tag{13.168}$$

définit une distance[13] *sur* $\mathcal{E}$*.*

[12] Définition 2.158.
[13] Définition 9.155.

Démonstration. Étant donné la proposition 13.3, la formule a un sens parce qu'à A et B donnés dans $\mathcal{E}$, il est associé un unique vecteur $\overrightarrow{AB} \in E$.

Pour vérifier que d est une distance, nous vérifions les points de la définition 9.155 et nous utilisons les propriétés correspondantes dans la définition 9.232 d'une norme.

(1) $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| \geqslant 0$.

(2) Si $d(A,B) = 0$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$, ce qui implique que $\overrightarrow{AB} = 0$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} B &= A + \overrightarrow{AB} && \text{proposition 13.3} && (13.169a)\\ &= A + 0 && && (13.169b)\\ &= A && \text{lemme 13.4.} && (13.169c) \end{aligned}$$

(3) En utilisant la proposition 13.5(3),

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \| - \overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = d(B,A) \tag{13.170}$$

(4) En utilisant les relation de Chasles 13.5(1) ainsi que l'inégalité triangulaire 9.232(4)

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\| \leqslant \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\| = d(A,C) + d(C,B). \tag{13.171}$$

□

Nous parlons d'isométries affines ou linéaires dans le thème 79.

Chapitre 14

Analyse réelle : limites et dérivation

14.1 Limite de fonctions

14.1.1 Définition

La définition générale de la limite est 9.151. Dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle peut s'écrire de façon plus efficace. La proposition suivante montre comment fonctionne la limite pour une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.

PropAJQQooQQClfp

Proposition 14.1 (Caractérisation de la limite)**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet la limite ℓ pour $x \to a$ si et seulement si il existe un réel ℓ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \tag{14.1}$$

EqDefLimiteFonction

Démonstration. Il s'agit de montrer l'équivalence avec la définition 9.151. Nous allons faire un usage intensif de la proposition 9.159.

(1) **Sens direct** Soient $\epsilon > 0$ et $V = B(\ell, \epsilon)$. Alors il existe un voisinage W de a dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f\big(W \setminus \{a\}\big) \subset V. \tag{14.2}$$

Soit δ tel que $B(a, \delta) \subset W$. Nous avons encore

$$f\big(B(a, \delta) \setminus \{a\}\big) \subset V. \tag{14.3}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Cela signifie $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$. Pour un tel x nous avons donc $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

(2) **Dans l'autre sens** Soient un voisinage V de ℓ et $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset V$. Nous considérons δ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour tout x satisfaisant $0 < |x - a| < \delta$.

Avec tout cela nous posons $W = B(x, \delta)$, et nous avons

$$f\big(W \setminus \{a\}\big) \subset B(\ell, \epsilon) \subset V. \tag{14.4}$$

□

Si aucun nombre ℓ ne vérifie la condition de la définition, alors on dit que la fonction n'admet pas de limite en a. Lorsque f possède la limite ℓ en a, nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell. \tag{14.5}$$

La proposition suivante a déjà été démontrée dans la proposition 9.154. Nous en donnons ici une démonstration adaptée au cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 14.2.
Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si a est un point d'accumulation de D et si il existe une limite de f en a, alors il en existe une seule.

Démonstration. Nous prouvons qu'il ne peut pas exister deux nombres $\ell \neq \ell'$ vérifiant tous les deux la condition (14.1).

Soient ℓ et ℓ' deux limites de f au point a. Par définition, pour tout ϵ nous avons des nombres δ et δ' tels que

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Rightarrow \big|f(x)-\ell\big| < \epsilon \\ |x-a| < \delta' &\Rightarrow \big|f(x)-\ell'\big| < \epsilon \end{aligned} \tag{14.6}$$

Pour fixer les idées, supposons que $\delta < \delta'$ (le cas $\delta \geqslant \delta'$ se traite de la même manière).

Étant donné que a est un point d'accumulation du domaine D de f, il existe un $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$. Évidemment, nous avons aussi $|x-a| < \delta'$. Les conditions (14.6) signifient alors que ce x vérifie en même temps

$$|f(x)-\ell| < \epsilon, \tag{14.7}$$

et

$$|f(x)-\ell'| < \epsilon. \tag{14.8}$$

Afin de prouver que $\ell = \ell'$, nous allons maintenant calculer $|\ell - \ell'|$ et montrer que cette distance est plus petite que tout nombre. Nous avons (voir remarque 14.3)

$$|\ell-\ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x)-\ell'| < \epsilon + \epsilon. \tag{14.9}$$

En résumé, pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$|\ell - \ell'| < 2\epsilon, \tag{14.10}$$

et donc $|\ell-\ell'| = 0$, ce qui signifie que $\ell = \ell'$. □

Remarque 14.3.
Les inégalités (14.9) utilisent deux techniques très classiques en analyse qu'il convient d'avoir bien compris. La première est de faire

$$|A-B| = |A - C + C - B|. \tag{14.11}$$

Il s'agit d'ajouter $-C + C$ dans la norme. Évidemment, cela ne change rien.

La seconde technique est l'inégalité

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|. \tag{14.12}$$

14.4.
Prouvons que $\lim_{x\to 0} x = 0$. C'est donc $a = b = 0$ dans la définition. Prenons $\epsilon > 0$, et trouvons un intervalle autour de zéro tel que partout dans l'intervalle, $x \leqslant \epsilon$. Bon ben c'est clair que $\delta = \epsilon$ fonctionne.

Plus compliqué maintenant, mais toujours sans surprises.

Proposition 14.5.

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On veut un intervalle de largeur δ autour de zéro tel que x^2 soit plus petit que ϵ sur cet intervalle. Cette fois-ci, le δ qui fonctionne est $\delta = \sqrt{\epsilon}$. En effet un élément de l'intervalle $[-\delta, \delta]$ est un r de valeur absolue plus petite ou égale à δ :

$$|r| \leqslant \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

En prenant le carré de cette inégalité on a :

$$r^2 \leqslant \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

Exemple 14.6.
Considérons la fonction $f(x) = 2x$, et calculons la limite $\lim_{x\to 3} f(x)$. Vu que $f(3) = 6$, nous nous attendons à avoir $\ell = 6$. C'est ce que nous allons prouver maintenant. Pour chaque $\epsilon > 0$ nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $|x-3| < \delta$ implique $|f(x)-6| < \epsilon$. En remplaçant $f(x)$ par sa valeur en fonction de x et avec quelques manipulations nous trouvons :

$$\begin{aligned} |f(x)-6| &< \epsilon \\ |2x-6| &< \epsilon \\ 2|x-3| &< \epsilon \\ |x-3| &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{14.13}$$

Donc dès que $|x-3|<\frac{\epsilon}{2}$, nous avons $|f(x)-6|<\epsilon$. Nous posons donc $\delta=\frac{\epsilon}{2}$.

Plus généralement, nous avons $\lim_{x\to a} f(x)=2a$, et cela se prouve en étudiant $|f(x)-2a|$ exactement de la même manière. △

14.1.2 Quelques règles de calcul

LEMooSPXNooPSufAn

Lemme 14.7 ([1]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon)=0$. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $|a|\leqslant f(\epsilon)$ pour tout ϵ. Alors $a=0$.

Démonstration. Soit $\epsilon'>0$. Il existe $\delta>0$ tel que $|f(\epsilon)|<\epsilon'$ pour tout $|\epsilon|<\delta$. Dès que $\epsilon<\delta$, nous avons

$$0\leqslant|a|\leqslant f(\epsilon)\leqslant|f(\epsilon)|<\epsilon'. \tag{14.14}$$

Donc $a=0$ par le lemme 4.60(3). □

Les opérations simples passent à la limite, sauf la division pour laquelle il faut faire attention au dénominateur. La proposition suivante est en grande partie un cas particulier de la proposition 12.294.

PropOpsSimplesLimites

Proposition 14.8.
Soient deux fonctions $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nous supposons que $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ et $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$. Alors

ITEMooOJUWooQpqqnQ
(1) La fonction $f+g$ a une limite $x\to a$ qui vaut $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\alpha+\beta$,

ITEMooNGWTooSDlEkp
(2) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction λf a une limite en a qui vaut $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x)=\lambda\alpha$.

(3) La fonction fg a une limite en a, qui vaut $\lim_{x\to a}(fg)(x)=\alpha\beta$,

(4) si il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas, et si $\beta\neq 0$, alors la fonction f/g a une limite en a qui vaut $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **La somme** Soit $\epsilon>0$. Soient $\delta_1>0$ et $\delta_2>0$ tels que

$$0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\epsilon \tag{14.15a}$$
$$0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|g(x)-\beta|<\epsilon. \tag{14.15b}$$

En prenant $\delta\leqslant\min\{\delta_1,\delta_2\}$, si $0<|x-a|\leqslant\delta$ alors

$$|f(x)+g(x)-\alpha-\beta|\leqslant|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|\leqslant 2\epsilon. \tag{14.16}$$

Cela étant valable pour tout ϵ, nous avons $|f(x)+g(x)-\alpha-\beta|=0$ par le lemme 4.60(3).

(2) **Produit par un scalaire**
Soit $\epsilon>0$. Nous devons trouver un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta,a+\delta]$, on ait $|(\lambda f)(x)-\lambda\alpha|\leqslant\epsilon$. Cette dernière inégalité est équivalente à $|\lambda||f(x)-\alpha|\leqslant\epsilon$. Nous devons donc trouver un δ tel que

$$|f(x)-\alpha|\leqslant\frac{\epsilon}{|\lambda|}. \tag{14.17}$$

soit vraie pour tout x dans $[a-\delta,a+\delta]$. Mais l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ (prise avec $\epsilon/|\lambda|$ en guise de ϵ) dit précisément qu'il existe un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta,a+\delta]$ on ait cette inégalité.

(3) **Le produit** Nous prenons ϵ, δ_1 et δ_2 dans les mêmes conditions que pour la somme. Nous majorons comme ceci :

$$|f(x)g(x)-\alpha\beta|\leqslant|f(x)g(x)-\alpha g(x)|+|\alpha g(x)-\alpha\beta| \tag{14.18a}$$
$$=|g(x)||f(x)-\alpha|+|\alpha||g(x)-\beta| \tag{14.18b}$$
$$\leqslant\epsilon\big(|g(x)|+|\alpha|\big) \tag{14.18c}$$
$$\leqslant\epsilon\big(|\beta|+\epsilon+|\alpha|\big). \tag{14.18d}$$

La dernière ligne majore $|g(x)|\leqslant|\beta|+\epsilon$.

Vu que $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\big(|\beta|+\epsilon+|\alpha|\big)=0$, le lemme 14.7 dit que $f(x)g(x)-\alpha\beta=0$, ce que nous voulions.

(4) **Le quotient** Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $\delta > 0$ tel que nous ayons simultanément $|f(x) - \alpha| < \epsilon$, $|g(x) - \beta| < \epsilon$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in B(a, \delta)$. Nous avons alors le calcul

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\alpha}{\beta}\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\alpha}{g(x)}\right| + \left|\frac{\alpha}{g(x)} - \frac{\alpha}{\beta}\right| \tag{14.19a}$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{g(x)}\right||f(x) - \alpha| + |\alpha|\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| \tag{14.19b}$$

SUBEQooOHFHooWZrwcA

Nous avons la majoration

$$\frac{1}{|g(x)|} \leqslant \frac{1}{|\beta| - \epsilon}, \tag{14.20}$$

et comme $\beta \neq 0$, nous pouvons supposer que ϵ est assez petit pour que le dénominateur ne s'annule pas. En ce qui concerne le second terme de (14.19b),

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - g(x)}{g(x)\beta}. \tag{14.21}$$

Ici aussi nous pouvons majorer $1/g(x)$. Le numérateur se majore par ϵ. En remettant tout ça dans (14.19b), nous avons une majoration qui tend vers zéro lorsque $\epsilon \to 0$.

□

PROPooVLBWooVttvFK

Proposition 14.9.
La limite est linéaire : pour toutes fonctions f et g admettant une limite en a et pour tout réels λ et μ.

$$\lim_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x). \tag{14.22}$$

Démonstration. Tout est dans la proposition 14.8. □

Le résultat suivant est pratique pour le calcul des limites.

PropChmVarLim

Proposition 14.10.
Quand la limite existe, nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f(a + \epsilon),$$

ce qui correspond à un « changement de variables » dans la limite.

Démonstration. Si $A = \lim_{x\to a} f(x)$, par définition,

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists \delta \text{ tel que } |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \epsilon'. \tag{14.23}$$

EqCondFaplusepLim

La seule subtilité de la démonstration est de remarquer que si $|x - a| \leqslant \delta$, alors x peut être écrit sous la forme $x = a + \epsilon$ pour un certain $|\epsilon| \leqslant \delta$. En remplaçant x par $a + \epsilon$ dans la condition 14.23, nous trouvons

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists \delta \text{ tel que } |\epsilon| \leqslant \delta \Rightarrow |f(a + \epsilon) - A| \leqslant \epsilon', \tag{14.24}$$

ce qui signifie exactement que $\lim_{\epsilon\to 0} f(a + \epsilon) = A$. □

Il y a une petite différence de point de vue entre $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{\epsilon\to 0} f(a + \epsilon)$. Dans le premier cas, on considère $f(x)$, et on regarde ce qu'il se passe quand x se rapproche de a, tandis que dans le second, on considère $f(a)$, et on regarde ce qu'il se passe quand on s'éloigne un tout petit peu de a. Dans un cas, on s'approche très près de a, et dans l'autre on s'en éloigne un tout petit peu. Le contenu de la proposition 14.10 est de dire que ces deux points de vue sont équivalents.

PROPooOUPNooTrClHw

Proposition 14.11 ([388])**.**
Soient des fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \neq 0$. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}. \tag{14.25}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell'|}. \tag{14.26}$$

Soit s, un minorant de $|g(x)|$ sur un voisinage de a ; puisque la limite en a est $\ell' \neq 0$, nous pouvons prendre par exemple $s = |\ell'|/2 : |g(x)| > |\ell'|/2$ sur $B(a,\delta)$ dès que δ est assez petit. Nous considérons $x \in B(a,\delta)$. Avec cela nous avons :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell'|} \tag{14.27a}$$
$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|}\left(\frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|\ell'|}\right) \tag{14.27b}$$
$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell' f(x) - \ell\ell'| + |\ell\ell' - g(x)\ell|\big) \tag{14.27c}$$
$$= \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell'||f(x) - \ell| + |\ell||\ell' - g(x)|\big). \tag{14.27d}$$

Nous avons utilisé la règle du produit de valeurs absolues du lemme 1.122(6).

Soient $\epsilon > 0$ et δ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|g(x) - \ell'| < \epsilon$ pour tout $x \in B(a,\delta)$. Avec cela nous avons

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| \leqslant \frac{2}{|\ell'|^2\big(|\ell'| + |\ell|\big)}\epsilon. \tag{14.28}$$

D'où la limite attendue. □

LemLimMajorableVois

Lemme 14.12.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ avec a, $b \in \mathbb{R}$, alors il existe un $\delta > 0$ et un $M > 0$ tels que

$$(|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Ce que signifie ce lemme, c'est que quand la fonction f admet une limite finie en un point, alors il est possible de majorer la fonction sur un intervalle autour du point.

Démonstration. Cela va être démontré par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de δ ni de M qui vérifient la condition. Dans ce cas, pour tout δ et pour tout M, il existe un x tel que $|x - a| \leqslant \delta$ et $|f(x)| > M$. Ceci est valable pour tout M, donc, prenons par exemple, $b + 1000$. Ainsi

$$\forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } |x - a| \leqslant \delta \text{ et } |f(x)| > b + 1000. \tag{14.29}$$

Cela signifie qu'aucun δ ne peut convenir dans la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ce qui contredit les hypothèses. □

Dans le même ordre d'idée, on peut prouver que si la limite de la fonction en un point est positive, alors elle est positive autour de ce point. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

PropoLimPosFPos

Proposition 14.13.
Si f est une fonction telle que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est positive.

Démonstration. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = y_0$. Par la définition de la limite, nous avons pour tout x dans un voisinage autour de a, $|f(x) - a| < \epsilon$. Ceci est valable pour tout ϵ, pourvu que le voisinage soit assez petit. Si nous choisissons un voisinage pour lequel $|f(x) - a| < \frac{y_0}{2}$, alors, sur ce voisinage, f est positive. □

Tholimfgabab

Théorème 14.14.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = b_2, \tag{14.30}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = b_1 b_2. \tag{14.31}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, et tentons de trouver un δ tel que $|f(x)g(x) - b_1 b_2| \leqslant \epsilon$ dès que $|x - a| \leqslant \delta$. Nous avons

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - b_1 b_2| &= |f(x)g(x) - b_1 b_2 + f(x)b_2 - f(x)b_2| \\ &= \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big) + b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &\leqslant \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big)\big| + \big|b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &= |f(x)||g(x) - b_2| + |b_2||f(x) - b_1|.\end{aligned} \tag{14.32}$$

EqfgbunbdeuxMin

Maintenant, nous savons par le lemme 14.12 que pour un certain δ_1, la quantité $|f(x)|$ peut être majorée par un certain M dès que $|x-a|\leqslant\delta_1$. Prenons donc un tel δ_1, et supposons que $|x-a|\leqslant\delta_1$. Nous savons aussi que pour n'importe quel choix de ϵ_2 et ϵ_3, il existe des nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x)-b_1|\leqslant\epsilon_2$ et $|g(x)-b_1|\leqslant\epsilon_3$ dès que $|x-a|\leqslant\delta_2$ et $|x-a|\leqslant\delta_3$. Dans ces conditions, la dernière expression (14.32) se réduit à

$$|f(x)g(x)-b_1b_2|\leqslant M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3. \tag{14.33}$$

Pour terminer la preuve, il suffit de choisir ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3\leqslant\epsilon$, et puis prendre $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$.

Remettons les choses dans l'ordre. On se donne un ϵ au départ. La première chose est de trouver un δ_1 qui permette de majorer $|f(x)|$ par M selon le lemme 14.12, et puis, choisissons ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3\leqslant\epsilon$. Ensuite, nous prenons, en vertu des hypothèses de limites pour f et g, les nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x)-b_1|\leqslant\epsilon_2$ et $|g(x)-b_2|\leqslant\epsilon_3$ dès que $|x-a|\leqslant\delta_2$ et $|x-a|\leqslant\delta_3$.

Si avec tout ça on prend $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, alors la majoration et les deux inégalités sont valables en même temps, et au final

$$|f(x)g(x)-b_1b_2|\leqslant M\epsilon_2+|b_2|\epsilon_3\leqslant\epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

À l'aide de ces petits résultats, nous pouvons déjà calculer pas mal de limites. Nous pouvons déjà par exemple, calculer les limites de tous les polynômes en tous les nombres réels. En effet, nous connaissons la limite de la fonction $f(x)=x$. La fonction $x\mapsto x^2$ n'est rien d'autre que le produit de f par elle-même. Donc

$$\lim_{x\to a}x^2=\big(\lim_{x\to a}x\big)\cdot\big(\lim_{x\to a}x\big)=a^2.$$

De la même façon, nous trouvons facilement que

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n. \tag{14.34}$$

LEMooLSJZooDauTkc

Lemme 14.15.
Soit $t\in\mathbb{R}$. Nous avons

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\operatorname{int}(xt)=t \tag{14.35}$$

où int *est la fonction partie entière définie en 4.100.*

Démonstration. En vertu du lemme 4.100, nous avons $y=\operatorname{int}(y)+\operatorname{frac}(y)$ avec $\operatorname{frac}(y)\in[0,1[$. Nous avons donc

$$\frac{1}{x}\operatorname{int}(xt)=\frac{1}{x}\big(xt-\operatorname{frac}(xt)\big) \tag{14.36a}$$
$$=\frac{xt}{x}+\frac{\operatorname{frac}(xt)}{x} \tag{14.36b}$$
$$=t+\frac{\operatorname{frac}(xt)}{x}. \tag{14.36c}$$

Puisque $\operatorname{frac}(xt)\in[0,1[$, nous avons

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{frac}(xt)}{x}=0. \tag{14.37}$$

D'où la limite demandée. □

14.2 Limites pointées et épointées

SECooNJSGooGSAtdV

La limite d'une fonction en un point a déjà été définie en 9.151. Nous introduisons maintenant une notion très ressemblante.

DEFooBAPHooUtIaRS

Définition 14.16 (limite pointée[433])**.**
*Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X, f une application de A dans Y, a un point de X adhérent à A et ℓ un point de Y. On dit que ℓ est une **limite pointée** de f au point a si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que pour tout point x de $W\cap A$, l'image $f(x)$ appartient à V.*

Quelques notations et vocabulaire.

(1) Nous allons limiter notre discussion au cas des fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(2) La limite de la définition 9.151 sera provisoirement nommée **limite épointée**, pour ne pas causer de confusion.

(3) Pour bien distinguer la limite pointée de la limite épointée, nous allons noter $LP_{x\to a}f(x)$ pour la limite pointée et $LE_{x\to a}f(x)$ pour la limite épointée.

(4) Nous allons utiliser la caractérisation 11.81 de la continuité de f en un point.

(5) Nous allons utiliser la caractérisation 14.1 de la limite épointée.

LEMooWAZLooDPvemu

Lemme 14.17.
Si une fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifie $LP_{x\to a}f(x)=\ell$, alors elle vérifie $LE_{x\to a}f(x)=\ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. L'existence de la limite pointée dit qu'il existe $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$. À fortiori, si $0<|x-a|<\delta$ nous avons aussi $|f(x)-\ell|<\epsilon$. Donc la limite épointée, par la caractérisation 14.1. □

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre le lemme suivant.

LEMooOSNGooJpiXbK

Lemme 14.18 ([434])**.**
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\begin{cases}0 & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{14.38}$$

Nous avons

ITEMooNRNCooFhbZwB

(1) $LE_{x\to 0}f(x)=0$.

ITEMooUSWMooMNPMCT

(2) La limite pointée de f en 0 n'existe pas.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Pour tout $x\in B(0,\delta)\setminus\{0\}$ nous avons $f(x)=0$. Donc la limite épointée suit.

(2) **Pour (2)** Soit $\delta>0$. Le lemme 4.60 nous assure qu'il existe $x\in\,]-\delta,0[$. Ce x est dans $B(0,\delta)$ et vérifie $f(x)=0$. Nous avons aussi $x=0$ dans la même boule. Donc $f\big(B(0,\delta)\big)$ contient au moins les nombres 1 et 0.

Il n'existe donc pas de ℓ tel que tout $f\big(B(0,\delta)\big)$ soit dans $B(\ell,\epsilon)$.

□

LEMooTPNEooRurTJJ

Lemme 14.19.
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$. Alors la limite pointée de f en a existe si et seulement si la limite épointée existe. Dans ce cas, elles sont égales.

Démonstration. En trois parties. Nous notons $\Omega=\mathbb{R}\setminus\{a\}$ le domaine de f.

(1) **Si la limite pointée existe, alors l'épointée existe** Soit $\epsilon>0$. L'existence de la limite pointée dit qu'il existe $\delta>0$ tel que $f\big(B(a,\delta)\cap\Omega\big)\subset B(\ell,\epsilon)$. Comme $B(a,\delta)\cap\Omega=B(a,\delta)\setminus\{a\}$, nous avons la condition épointée.

(2) **Si la limite épointée existe, alors la pointée existe** Du même tonneau.

(3) **Égalité** Le jeu des boules du premier point prouve l'égalité au passage.

□

Que faut-il donc ajouter à la limite épointé pour obtenir une limite pointée ? Réponse dans le lemme suivant.

Lemme 14.20.
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nous avons

$$LP_{x\to a}f(x)=\ell \tag{14.39}$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

(1) $LE_{x\to a}f(x)=\ell$

(2) *Soit f n'existe pas en a, soit f est continue en a.*

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ L'existence d'une limite pointée implique celle de la limite épointée, et l'égalité entre les deux. Donc $LE_{x\to a}f(x)=\ell$. Supposons que f existe en a. Soit $\epsilon>0$. L'existence d'une limite pointée signifie qu'il existe $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$.

En particulier avec $x=a$ nous avons $|f(a)-\ell|<\epsilon$ pour tout ϵ. Donc $f(a)=\ell$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $LE_{x\to a}f(x)=\ell$. Si f n'existe pas en a, alors les limites pointée et épointée coïncident[1]. Si par contre f existe en a et $f(a)=\ell$, alors nous travaillons.

Soit $\epsilon>0$. Il existe $\delta>0$ tel que $x\in B(a,\delta)\setminus\{a\}$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$. Mais si $x=a$ nous avons $|f(x)-\ell|=0<\epsilon$. Au final nous avons $|f(x)-\ell|<\epsilon$ pour tout $x\in B(a,\delta)$. Donc $LP_{x\to a}f(x)=\ell$.

□

LEMooNEGOooCllIMN

Lemme 14.21 (limite et continuité)**.**
Supposons que $LE_{x\to a}f(x)=\ell$ et que f est continue en a. Alors $f(a)=\ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. L'hypothèse sur la limite dit qu'il existe $\delta_1>0$ tel que $0<|x-a|<\delta_1$ implique $|f(x)-\ell|<\epsilon$.

L'hypothèse de continuité, avec la caractérisation 11.81, dit qu'il existe $\delta_2>0$ tel que $|x-a|<\delta_2$ implique $|f(x)-f(a)|<\epsilon$.

Nous considérons un $\delta>0$ plus petit que δ_1 et que δ_2. Soit aussi un x satisfaisant $0<|x-a|<\delta$. Nous avons

$$|f(a)-\ell|\leqslant|f(a)-f(x)|+|f(x)-\ell|\leqslant 2\epsilon. \tag{14.40}$$

Puisque cela est valide pour tout x, nous déduisons que $f(a)=\ell$. □

14.2.1 Théorèmes de composition de limites

La proposition suivante formalise le fait que la limite pointée soit stable par composition.

THOooOYXDooKDPkuW

Théorème 14.22.
Soient des fonctions $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ avec $\Omega\subset\mathbb{R}$ telles que

(1) $LP_{x\to a}g(x)=\ell$

(2) $LP_{y\to\ell}f(y)=b$.

(3) $g(\mathbb{R})\subset\Omega$

Alors

$$LP_{x\to a}(f\circ g)(x)=b. \tag{14.41}$$

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. L'hypothèse de limite pour f donne $\eta>0$ tel que

$$|y-\ell|<\eta\Rightarrow|f(y)-b|<\epsilon. \tag{14.42}$$

EQooLWGIopLqKThv

Soit $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta$ implique $|g(x)-\ell|<\eta$.

Avec tout ça, si $|x-a|<\delta$ nous avons $|g(x)-\ell|<\eta$ et en appliquant l'implication (14.42) à $y=g(x)$ nous trouvons $|f\big(g(x)\big)-b|<\epsilon$. □

Le théorème suivant, qui traite de la composition de limites pointées, montre que la limite épointée ne passe pas gratuitement à la composition.

THOooNPBQooEMOYpd

Théorème 14.23.
Soient des fonctions $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ avec $\Omega\subset\mathbb{R}$ telles que

(1) $LE_{x\to a}g(x)=\ell$

(2) $LE_{y\to\ell}f(y)=b$.

(3) $g(\mathbb{R})\subset\Omega$

[1] Lemme 14.19.

ITEMooUNJAooCDOKcO

(4) *Soit $\ell \notin \Omega$, soit f est continue en ℓ.*

Alors

$$LE_{x\to a}(f\circ g)(x)=b. \tag{14.43}$$

EQooTHTVooCyrFdN

Démonstration. Nous notons Ω le domaine de f. Ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}\setminus\{\ell\}$ selon le cas traité dans (4).

Soit $\epsilon>0$. L'hypothèse de limite épointée pour f nous dit qu'il existe $\eta>0$ tel que

$$y\in\Omega\cap B(\ell,\eta)\setminus\{\ell\} \tag{14.44}$$

implique $|f(y)-b|<\epsilon$.

L'hypothèse de limite épointée pour g, appliquée à ce η dit qu'il existe $\delta>0$ tel que $0<|x-a|<\delta$ implique $|g(x)-\ell|<\eta$.

(1) **Si f n'existe pas en ℓ** Supposons avoir $0<|x-a|<\eta$. Alors nous avons $|g(x)-\ell|<\delta$. Notons qu'il est impossible d'avoir $g(x)=\ell$ parce que nous avons supposé $g(\mathbb{R})\subset\Omega$ et que ℓ n'est pas dans Ω.

Nous avons quand même $0<|g(x)-\ell|<\delta$. La condition de limite pour f appliquée à $y=g(x)$ donne alors $|f\big(g(x)\big)-b|<\epsilon$, ce qui signifie la limite épointée (14.43).

(2) **Si f est continue en ℓ** Le lemme 14.21 dit qu'alors $f(\ell)=b$. L'hypothèse de limite épointée sur f dit que

$$0<|y-\ell|<\eta\Rightarrow|f(y)-b|<\epsilon. \tag{14.45}$$

Mais puisque $f(\ell)=b$, nous avons en réalité

$$|y-\ell|<\eta\Rightarrow|f(y)-b|<\epsilon. \tag{14.46}$$

EQooHAHHooRjAABt

Supposons donc que $0<|x-a|<\delta$. Alors $|g(x)-\ell|<\eta$. En appliquant (14.46) à $y=g(x)$ nous trouvons

$$|f(y)-b|<\epsilon. \tag{14.47}$$

□

NORMooSLAJooLfDreV

14.24.

Les deux théorèmes sont incomplets. En effet, le théorème « pointé » 14.22 ne traite pas le cas où seules des limites épointées existent. Il est donc moins général que le théorème « épointé » 14.23. En contrepartie, le théorème « épointé » ne parvient pas à conclure à l'existence d'une limite pointée dans le cas où elle existe. Sa conclusion est donc moins forte.

Nous devons donc nous atteler à écrire un théorème qui traite tous les cas en obtenant la conclusion la plus forte possible dans chaque cas. Nous allons supposer que

$$\begin{cases} LE_{x\to a}g(x)=\ell & \text{(14.48a)}\\ LE_{y\to\ell}f(y)=b. & \text{(14.48b)}\end{cases}$$

Ensuite, les différents cas seront divisés selon quatre critères :

(1) g existe en a ou pas.

(2) f existe en ℓ ou pas.

(3) g est continue ou pas en a.

(4) f est continue ou pas en ℓ.

Cela fait $2^4=16$ combinaisons. Heureusement certaines sont impossibles : si une fonction n'existe pas en un point, elle ne peut pas y être continue.

Nous avons donc 9 cas résumés dans le théorème suivant.

$g(a)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0
$f(\ell)$	1	1	1	1	0	0	1	1	0
$g\in C^0$	1	1	0	0	1	0	0	0	0
$f\in C^0$	1	0	1	0	0	0	1	0	0

(14.49)

THOooHXGIooBclAHA

Théorème 14.25 ([1]).
Soient des fonctions f et g telles que

$$\begin{cases} LE_{x\to a} g(x) = \ell & (14.50a) \\ LE_{y\to \ell} f(y) = b. & (14.50b) \end{cases}$$

ITEMooDXBLooVfhSWg

(1) Si f est continue en ℓ et si g est continue en a, alors $f\circ g$ est continue en a.

ITEMooIXBQooMDknwN

(2) Nous supposons :

(2a) g définie en a
(2b) f définie en ℓ
(2c) g continue en a
(2d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

ITEMooHTIEooMKDrqx

(3) Nous supposons :

(3a) g définie en a
(3b) f définie en ℓ
(3c) g non continue en a
(3d) f continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooVQMDooEtHfwC

(4) Nous supposons :

(4a) g définie en a
(4b) f définie en ℓ
(4c) g non continue en a
(4d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

ITEMooANFQooWVrfTd

(5) Nous supposons :

(5a) g définie en a
(5b) f non définie en ℓ
(5c) g continue en a
(5d) f non continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooDJBHooSlqpOO

(6) Nous supposons :

(6a) g définie en a
(6b) f non définie en ℓ
(6c) g non continue en a
(6d) f non continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooUFJHooRzLglZ

(7) Nous supposons :

(7a) g non définie en a
(7b) f définie en ℓ
(7c) g non continue en a
(7d) f continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

ITEMooOAAVooSjoYOv

(8) Nous supposons :

(8a) g non définie en a
(8b) f définie en ℓ
(8c) g non continue en a
(8d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

ITEMooPVZKooBXJARI

(9) Nous supposons :

(9a) g *non définie en* a

(9b) f *non définie en* ℓ

(9c) g *non continue en* a

(9d) f *non continue en* ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x)=b$.

Démonstration. Cas par cas.

(1) **Cas (1)** C'est le théorème 11.87 de composition de la continuité.

(2) **Cas (2)** l'exemple du lemme 14.18.

(3) **Cas (3)** Théorème 14.23.

(4) **Cas (4)** Le contre-exemple dans ce cas est $g=\mathbb{1}_0$ et $f=\mathbb{1}_0$.

(5) **Cas (5)** Théorème 14.23.

(6) **Cas (6)** Théorème 14.23.

(7) **Cas (7)** Théorème 14.23.

(8) **Cas (8)** Contre-exemple, un peu artificiel, avec $g(x)=\frac{\mathbb{1}_0(x)}{x}$. C'est une fonction qui vaut 0 partout sauf en 0 où elle n'existe pas. Ensuite pour f, nous prenons l'indicatrice de $\{0\}$: $f=\mathbb{1}_0$. Pour tout $x\neq 0$ nous avons

$$(f\circ g)(x)=\mathbb{1}_0\left(\frac{\mathbb{1}_0(x)}{x}\right)=\mathbb{1}_0(0)=1. \tag{14.51}$$

Donc $LE_{x\to 0}(f\circ g)(x)=1$.

Mais nous avons pourtant

$$\begin{cases} LE_{x\to 0}g(x)=0 & \text{(14.52a)}\\ LE_{y\to 0}f(x)=0. & \text{(14.52b)}\end{cases}$$

(9) **Cas (9)** Théorème 14.23.

□

14.2.2 Discussion pointée Vs épointée

Résumé :

(1) Dans l'éducation nationale et dans les programmes en France, c'est la limite pointée qui est donnée.

(2) Dans le Frido ce sera la limite épointée. Autrement dit, nous réserverons la notation lim et le mot « limite » pour la limite épointée.

(3) De toutes façons, ça ne change pratiquement rien nulle part. Vous pourriez terminer l'agrégation sans vous en rendre compte. Vous pouvez sauter toute la discussion et reprendre une vie normale.

Le débat pour savoir quelle est la « meilleure » notion a déjà fait couler de nombreux octets[435, 436, 434, 437, 438].

14.2.2.1 La limite pointée est plus simple au départ

Il est vrai que la limite pointée est plus simple de premier abord.

14.2.2.2 Le théorème de composition

Le théorème de composition des limites pointées 14.22 est plus propre que le théorème de composition épointé 14.23. Intuitivement, on voudrait que la limite d'une fonction composée soit la composée des limites. Et ça c'est vrai pour la limite pointée, pas pour l'épointée.

14.2.2.3 Limite d'une fonction discontinue mais qui existe

Que pensez-vous que la limite en l'infini de la fonction suivante « devrait » être ?

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq \infty \\ 0 & \text{si } x = \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{14.53}$$

Là, tant que x s'approche de ∞ sans l'atteindre, il n'y a vraiment que de la croissance à perte de vue ; jusqu'à l'horizon et au-delà.

On pourrait faire la même remarque avec la fonction indicatrice de $\{0\}$. Qu'est-ce que la limite en zéro « devrait » être ?

14.2.2.4 Point d'étape

Aucune des deux limites ne donne le résultat « attendu » dans les deux cas. Toutes deux font une chose bien, et une chose pas bien.

14.2.2.5 Limite d'une fonction discontinue mais qui existe

Prenons la fonction indicatrice de $\{0\}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{14.54}$$

En utilisant la limite pointée, on peut exprimer deux choses :

- la limite pointée en zéro n'existe pas
- la fonction n'est pas continue en zéro.

En utilisant la limite épointée, on peut exprimer deux choses :

- la limite épointée en zéro existe et vaut zéro.
- la fonction n'est pas continue en zéro.

La première paire d'informations est compatible avec la fonction $1/x$. Autrement dit, la valeur « inattendue » que prend f en zéro casse tout ce qu'on aurait pu dire sur un voisinage de zéro.

La seconde paire d'informations donne au moins une idée de ce qu'il se passe autour de zéro. On peut en déduire, par exemple, que f est intégrable sur un voisinage de zéro parce qu'elle y est bornée et que la valeur en un point ne fait rien à l'intégrabilité[2].

14.2.2.6 L'enseignement du cas précédent

La limite épointée donne une information sur ce qu'il se passe « autour » du point sans rien dire de ce qu'il se passe « sur » le point. Si nécessaire, la continuité complète l'information en précisant ce qu'il se passe « sur » le point.

Certaines questions n'ont pas besoin de savoir ce qu'il se passe en un seul point.

La limite épointée « refuse » de dire ce qu'il se passe autour du point parce qu'il y a un problème juste sur ledit point. Un seul point se comporte mal et tout le voisinage passe sous le radar.

14.2.2.7 La limite épointée est plus riche

La classe des fonctions admettant une limite pointée est plus grande que celle admettant une limite épointée (lemme 14.17). L'utilisation de la limite épointée permet de décrire quelques cas supplémentaires par rapport à ce que l'on peut faire seulement avec la limite pointée.

Pour être plus précis, comme je le disait précédemment, en 14.24, aucune des deux notions n'est satisfaisante seule :

- mettez de la limite pointée dans les hypothèses, vous aurez un théorème moins général ;

[2] Peut-être qu'il faut ajouter que f est mesurable ? Mais peut-être que l'existence de la limite implique la mesurabilité ? Dites-moi ce que vous en pensez.

- mettez de la limite pointée dans la thèse, vous aurez un résultat plus fort.

Le vrai intérêt de la limite épointée est que *en combinaison avec la notion de continuité* permet d'être plus général et plus précis que ce qu'on peut obtenir avec la limite pointée. Dit autrement, le couple (limite épointée, continuité) est plus fort que le couple (limite pointée, continuité).

D'un certain point de vue, oui, la limite pointée est plus simple, mais elle est plus simple parce qu'elle donne moins d'informations.

14.2.2.8 Retour sur le théorème de composition

Le *vrai* théorème de composition est le théorème 14.25. Lui, il passe en revue tous les cas possibles et donne le plus de conclusions possibles dans chaque cas.

Ce théorème s'exprime de façon à peu près convenable à l'aide de limite épointée et de continuité. J'attends de voir le même avec une limite pointée et la continuité.

Je suis très ouvert à la discussion si c'est pour avoir quelque chose de plus simple produisant les mêmes résultats. Je ne suis par contre pas très ouvert pour avoir quelque chose de plus simple, mais donnant moins de résultats. C'est toujours facile d'avoir des résultats plus courts, plus simples et plus intuitifs quand on se contente de moins.

14.2.2.9 En français

La limite épointée rend l'idée de « s'approcher sans atteindre ». En français l'expression « être à la limite de tel résultat » signifie le plus souvent être très proche du résultat, mais ne pas y être.

14.2.2.10 La question est pédagogique

Tant qu'on ne m'a pas montré comment on exprime le théorème de composition 14.25 avec des limites pointées, je resterai sur cette idée : la limite pointée est plus simple, mais elle dit moins.

Cela n'est cependant pas spécialement bloquant. Après tout, ça dépend de ce qu'on veut. D'un point de vue pédagogique, la limite pointée introduit autant de ϵ et de δ qu'on le veut, et permet d'introduire tous les concepts utiles en analyse.

La question est de savoir à quel point on est prêt à se compliquer la vie pour avoir des théorèmes un micro-cheveu plus complets. Le choix du Frido est de recevoir la difficulté avec résignation et de l'endurer avec courage, pour le plaisir d'avoir des théorèmes qui donnent un peu plus d'information[3].

14.2.2.11 En fait ça ne change presque rien

Certains craignent qu'utiliser la limite pointée demande d'ajuster beaucoup de résultats un peu partout[439]. Voici la liste des résultats du Frido qui doivent être modifiés pour être exprimés à l'aide de limite pointée.

- Le fameux théorème de composition 14.23,
- La limite à gauche et à droite implique la limite, proposition 11.113.
- Le lemme 14.241.

Le fait est que l'on ne calcule presque jamais de limites en une valeur où la fonction existe. Si on calcule une limite, c'est précisément parce qu'on regarde un point où la fonction n'existe pas.

Exemples :

- Quand on calcule une dérivée, on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}. \tag{14.55}$$

  Cette fonction de ϵ n'existe pas lorsque $\epsilon = 0$. Donc les limites pointées et épointées sont identiques.

- De même, l'étude du sinus cardinal $f(x) = \sin(x)/x$ (lemme 22.191) est une fonction dont ça ne viendrait à l'idée de personne de calculer la limite pour $x \to 4$. Et ça tombe bien : la seule limite que ça donne envie de calculer est

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}. \tag{14.56}$$

  Et encore une fois, la fonction dans le limite n'existe pas au point limite.

[3] C'est une de mes citations préférées. Comme nous sommes entre adultes, je vous donne la référence : [439]. Si vous n'avez pas 18 ans, on peut vraiment se demander si le Frido est vraiment une lecture de votre âge.

- Beaucoup de conditions d'intégrabilité demandent des limites à l'infini. Là encore, ce sont des limites vers des points où la fonction n'existe pas. Franchement, qui va vouloir définir

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq \infty \\ 0 & \text{si } x = \infty \end{cases} \end{aligned} \tag{14.57}$$

sans rigoler ? OK. Pour cette fonction, il y a une différence entre la limite pointée et épointée. Mais franchement, c'est bien la limite épointée qui donne le résultat « intuitif ».

14.2.2.12 Si vous avez quand même envie de discuter

Essayez de garder votre salive pour des sujets importants.

- L'intégrale de Kurzweil-Henstock[440] contre Lebesgue. Là au moins, il y a des choses non triviales à dire, et des vrais résultats mathématiques à la clef.
- L'utilisation de τ au lieu de π.

14.2.2.13 En très résumé

Si vous ne voulez pas lire toute ma prose, voici ce dont vous devez être conscient :

(1) La limite épointée est celle utilisée partout sauf en France.

(2) La limite épointée est un peu plus compliquée que la limite pointée, mais elle permet de prouver plus de choses. En témoigne le théorème « complet » de composition 14.25 que je doute être facile à exprimer à l'aide des limites pointées et de la continuité[4].

(3) La limite pointée « cache » l'information sur tout le voisinage de a si la fonction se comporte mal juste en a.

Une fois que vous êtes conscients de ces quelque points, vous faites comme vous voulez ; ça n'a pratiquement aucune importance. La seule position indéfendable est celle de prendre la limite pointée et de ne pas prévenir le lecteur que les sources autres que françaises donnent une définition différente.

14.3 Limites en l'infini

Non, sur $\mathbb{R}$ nous n'allons pas ajouter ∞ avec la topologie d'Alexandrov de la définition 9.204. Nous n'allons pas considérer $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

14.3.1 Droite réelle achevée

DEFooRUyiBSUooALDDOa

Définition 14.26 (Droite réelle achevée[442])**.**
Nous considérons l'ensemble

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \tag{14.58}$$

où $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des éléments de $\mathbb{R}$.

PROPooWQBGooAoXKMi

Proposition-Définition 14.27 (L'ordre [1])**.**
Nous mettons sur $\bar{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre en prenant celle de $\mathbb{R}$ à laquelle nous ajoutons les règles

(1) $-\infty < x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(2) $+\infty > x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Avec cela, $\bar{\mathbb{R}}$ est un ensemble totalement ordonné.

Démonstration. Si $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, soit $a, b \in \mathbb{R}$ et l'un est plus grand que l'autre parce que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné (proposition 4.49), soit l'un des deux est $\pm\infty$ et les deux règles font que soit a soit b est plus grand. □

Définition 14.28 (Topologie)**.**
Nous mettons une topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ en donnant la base[5] suivante :

[4] Il y a bien entendu moyen. Voir par exemple [441]. Sans ironie, je trouve ce théorème fascinant.
[5] Base de topologie, définition 9.2.

- $]a,b[$,
- $]a,+\infty]$,
- $[-\infty,b[$

pour tous réels a et b.

14.29.
La notation « ∞ » peut désigner l'unique élément ajouté dans du compactifié d'Alexandrov[6] aussi bien que l'élément infini positif dans la droite réelle achevée. Si vous faites attention au contexte[7], ça ne devrait pas poser de problèmes.

Certains auteurs réservent « ∞ » pour Alexandrov et écrivent toujours « $+\infty$ » et « $-\infty$ » pour la droite réelle achevée.

Lemme 14.30 ([1]).
La topologie sur $\mathbb{R}$ induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$ est la topologie usuelle.

Démonstration. Nous notons $\tau_{\mathbb{R}}$ la topologie de $\mathbb{R}$, $\tau_{\bar{\mathbb{R}}}$ celle de $\bar{\mathbb{R}}$ et τ_i celle induite de $\bar{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. Nous devons prouver que $\tau_i = \tau_{\mathbb{R}}$.

(1) $\tau_i \subset \tau_{\mathbb{R}}$ Un élément de τ_i est de la forme $\mathcal{O} = \mathbb{R} \cap A$ où A est un élément de $\tau_{\bar{\mathbb{R}}}$. Vu que A est un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$, il est une réunion d'éléments de la base de topologie[8] ; donc $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ où les A_i sont des trois types listés dans la définition 14.26.

(1a) Si $A_i =]a,b[$ alors $\mathbb{R} \cap A =]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
(1b) Si $A_i =]a,+\infty]$, alors $\mathbb{R} \cap A_i =]a,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
(1c) Si $A_i = [-\infty,b[$, même chose.

Donc $\mathbb{R} \cap A = \bigcup_{i\in I}(\mathbb{R} \cap A_i)$ est une union d'ouverts de $\mathbb{R}$.

(2) $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau_i$ Comme les $]a,b[$ forment une base de topologie de $\mathbb{R}$, l'ensemble τ_i contient une base de topologie de $\mathbb{R}$ et donc contient tout $\tau_{\mathbb{R}}$.

□

14.3.2 Limites en l'infini

Proposition 14.31 ([1]).
Soit une suite (x_k) dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous avons $x_k \xrightarrow{\bar{\mathbb{R}}} +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe un $N > 0$ tel que $n \geqslant N$ implique $x_n > M$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Pour tout voisinage A de $+\infty$, il existe un N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n \in A$. Soit donc le voisinage $]M,+\infty]$, et le N correspondant. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in]M,+\infty]$ et donc $x_n \geqslant M$.

(2) $\Leftarrow$ Soit un ouvert A contenant $+\infty$. Nous avons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ où les A_i sont des trois types listés dans la définition 14.26. Comme $+\infty \in A$, pour au moins un des i, nous avons $A_i =]a,+\infty[$.

Prenons N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n > a$. Alors pour $n \geqslant N$ nous avons $x_n \in A$.

□
LEMooUBFAooEmquQQ

Lemme 14.32 ([1]).
Soient $x > 1$ dans $\mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}$. Alors $x^n \geqslant x$.

Démonstration. Pour $n = 1$, nous avons $x^n = x$ donc d'accord. Supposons que $x^n \geqslant x$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et prouvons que $x^{n+1} \geqslant x$.

Calcul avec justifications en-dessous :

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= xx^n && \text{(14.59a)}\\ &\geqslant xx && \text{(14.59b)}\\ &\geqslant x. && \text{(14.59c)} \end{aligned}$$
SUBEQooBBJYooIYaErs
SUBEQooCEJWooMUMchE

Justifications :

[6] Le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}$, définition 9.204.
[7] Vous devez toujours avoir parfaitement clairement en tête la topologie que vous manipulez.
[8] C'est la proposition 9.2 qui dit ça.

- Pour (14.59b) hypothèse de récurrence.
- Pour (14.59c), lemme 4.53.

□

LEMooFCIXooJuHFqk

Lemme 14.33.
Nous considérons l'espace topologique de la droite réelle achevée[9] $\bar{\mathbb{R}}$. *Si* $n \geqslant 1$ *nous avons*

EQooRRFEooLYcuRF

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \tag{14.60}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{14.61}$$

Démonstration. Si V est un voisinage de $+\infty$, alors nous devons montrer qu'il existe un voisinage W de $+\infty$ tel que $x^n \in V$ pour tout $x \in W$.

Un ouvert est une union d'éléments de la base de topologie[10]. Nous voyons que V contient au moins une partie de la forme $]R, +\infty]$. Nous supposons que $R > 1$.

Si $x > R > 1$, alors nous avons $x^n \geqslant x$ (lemme 14.32) et donc

$$x^n \geqslant x > R, \tag{14.62}$$

ce qui signifie $x \in V$.

En prenant $W =]R, +\infty]$, nous avons bien $W^n \subset V$. Cela prouve (14.60).

En ce qui concerne la seconde limite, la démonstration est du même type. Remarquez seulement que vous n'avez pas formellement le droit d'utiliser la proposition 14.11 en invoquant $\frac{1}{+\infty} = 0$. □

14.3.3 Limite en des nombres

Nous posons la définition suivante.

DefInfNombre

Définition 14.34.
Lorsque $a \in \mathbb{R}$, *on dit que la fonction* f ***tend vers l'infini quand*** x ***tend vers*** a *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \text{ tel que } (|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M \text{ quand } x \in \operatorname{dom} f.$$

Cela signifie que l'on demande que dès que x est assez proche de a (c'est-à-dire dès que $|x-a| \leqslant \delta$), alors $f(x)$ est plus grand que M, et que l'on peut trouver un δ qui fait ça pour n'importe quel M. Une autre façon de le dire est que pour toute hauteur M, on peut trouver un intervalle de largeur δ autour de a[11] tel que sur cet intervalle, la fonction f est toujours plus grande que M.

Montrons sur un dessin pourquoi je disais que la fonction $x \to 1/x$ n'est pas de ce type.

Le problème est qu'il n'existe par exemple aucun intervalle autour de 0 sur lequel f serait toujours plus grande que 10. En effet n'importe quel intervalle autour de 0 contient au moins un nombre négatif. Or quand x est négatif, f n'est certainement pas plus grande que 10. Nous y reviendrons.

Pour l'instant, montrons que la fonction $f(x) = 1/x^2$ est une fonction qui vérifie la définition 14.34. Avant de prendre n'importe quel M, prenons par exemple 100. Nous avons besoin d'un intervalle autour de zéro sur lequel f est toujours plus grande que 100. C'est vite vu que $f(0.1) = f(-0.1) = 100$, donc l'intervalle $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ convient. Partout dans cet intervalle, f est plus grande que 100. Partout ? Ben non : en $x = 0$, la fonction n'est même pas définie, donc c'est un peu dur de dire qu'elle est plus grande que 100. C'est pour cela que nous avons ajouté la condition « quand $x \in \operatorname{dom} f$ » dans la définition de la limite.

Prenons maintenant un $M \in \mathbb{R}$ arbitraire, et trouvons un intervalle autour de 0 sur lequel f est toujours plus grande que M. La réponse est évidemment l'intervalle de largeur $1/\sqrt{M}$, c'est-à-dire

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right].$$

[9] Définition 14.26.
[10] C'est la définition 9.2.
[11] C'est-à-dire un intervalle de la forme $[a-\delta, a+\delta]$.

14.3.4 Limites quand tout va bien

Calculer et prouver des valeurs de limites, mêmes très simples, devient vite de l'arrachage de cheveux à essayer de trouver le bon δ en fonction de ϵ si on n'a pas quelques théorèmes généraux. Heureusement nous en avons déjà quelques uns : 14.9, 14.8, et 14.11.

PROPooWXBAooAEweSF

Proposition 14.35 ([1]).
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue dont la variable y varie dans un compact I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{y\in I} f(x,y) \end{aligned} \tag{14.63}$$

est continue.

Démonstration. Soit x_0 fixé. Prouvons que d est continue en x_0. Nous notons y_0 la valeur de y qui réalise le maximum (par le théorème 11.56 et le fait que les fonctions projection soient continues, lemme 9.293). Soit aussi $\epsilon > 0$ tellement fixé que même avec un tournevis hydraulique, il ne bougerait pas. Nous considérons δ tel que si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leqslant \delta$ alors $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\| < \epsilon$.

Si $|x-x_0| < \delta$ alors pour y assez proche de y_0 nous avons $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leqslant \delta$, et donc $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\| \leqslant \epsilon$. Cela montre qu'il existe δ tel que $|x-x_0| \leqslant \delta$ implique $d(x) \geqslant d(x_0)-\epsilon$.

Nous devons encore trouver un δ tel que si $|x-x_0| \leqslant \delta$ alors $d(x) \leqslant d(x_0)+\epsilon$. Supposons que non. Alors pour tout δ il existe un x tel que $|x-x_0| \leqslant \delta$ et $d(x) > d(x_0)+\epsilon$. Cela nous donne une suite $x_i \to x_0$.

Pour chaque x_i nous notons y_i la valeur de y qui réalise le supremum correspondant. La suite (y_i) étant contenue dans un compact nous supposons prendre une sous-suite de (x_i) telle que la suite (y_i) converge. Nous nommons a la limite (et non y_0 parce que nous ne savons pas si $y_i \to y_0$). Pour chaque i nous avons

$$f(x_i,y_i) > \sup_{y\in I} f(x_0,y) + \epsilon. \tag{14.64}$$

En prenant la limite et en utilisant la continuité de f,

$$f(x_0,a) > \sup_{y\in I} f(x_0,y) + \epsilon, \tag{14.65}$$

ce qui est impossible. □

14.3.5 Limites de fonctions

Tentons de comprendre ce que signifie qu'un nombre ℓ *ne soit pas* la limite de f lorsque $x \to a$. Il s'agit d'inverser la condition de la proposition 10.258(2). Le nombre ℓ n'est pas une limite de f pour $x \to a$ lorsque

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x \text{ tel que } 0 < \|x-a\| < \delta \text{ et } \|f(x)-\ell\| > \varepsilon, \tag{14.66}$$

EqCaractNonLim

c'est-à-dire qu'il existe un certain seuil ε tel qu'on a beau s'approcher aussi proche qu'on veut de a (distance δ), on trouvera toujours un x tel que $f(x)$ n'est pas ε-proche de ℓ.

Lemme 14.36 (Unicité de la limite).
Si ℓ et ℓ' sont deux limites de $f(x)$ lorsque x tend vers a, alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous considérons δ tel que $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$ pour tout x tel que $\|x-a\| < \delta$. De la même manière, nous prenons δ' tel que $\|x-a\| < \delta'$ implique $\|f(x)-\ell'\| < \varepsilon$. Pour les x tels que $\|x-a\|$ est plus petit que δ et δ' en même temps, nous avons

$$\|\ell-\ell'\| = \|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\| \leqslant \|\ell - f(x)\| + \|f(x)-\ell'\| < 2\varepsilon, \tag{14.67}$$

et donc $\|\ell-\ell'\| = 0$ parce que c'est plus petit que 2ε pour tout ε. □

PROPooKPOXooEHIXJs

Proposition 14.37 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ et $a \in V$. Soient encore un voisinage A de a et deux fonctions $f, g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ qui admettent une limite en a.

Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A \setminus \{a\}$ alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x). \tag{14.68}$$

Démonstration. Nous notons $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ et $\ell' = \lim_{x\to a} g(x)$. Si $\ell = \ell'$, le résultat est fait. Sinon nous supposons que $\ell > \ell'$ et nous trouvons une contradiction. Nous prenons $\epsilon < |\ell - \ell'|/2$ et $\delta > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|g(x) - \ell'| < \epsilon$. Pour tout $x \in B(a, \delta)$ nous avons

$$\begin{cases} f(x) \in B(\ell, \epsilon) & \text{(14.69a)} \\ g(x) \in B(\ell', \epsilon), & \text{(14.69b)} \end{cases}$$

et donc

$$f(x) > l - \epsilon > \ell' + \epsilon > g(x). \tag{14.70}$$

Contradiction. □

14.3.6 Limite à gauche et à droite

Si a est à l'intérieur du domaine de f, nous savons ce que signifie $\lim_{x\to a} f(x)$. Nous donnons également une définition des limites à gauche et à droite.

Définition 14.38.
*Soient $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si $a \in \text{Adh}(D)$ nous définissons la **limite à droite** de f en a par*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} \tilde{f}(x) \tag{14.71}$$

EQooQKHLooMoSXVe

où $\tilde{f}$ est la fonction f restreinte à $D \cap \{x \text{ tel que } x > a\}$. La limite (14.71) est souvent écrite sous la forme condensée

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x). \tag{14.72}$$

Pour la limite à gauche c'est un peu la même chose :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x). \tag{14.73}$$

LEMooXJMFooCkzoVi

Lemme 14.39.
Soient $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si $a \in \text{Adh}(D)$ nous avons $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x \in]a, a + \delta[\cap D$ implique $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$.

Démonstration. Nous avons les équivalences entre les propriétés suivantes, en utilisant la définition 9.151 de la limite :

(1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$

(2) $\lim_{x\to a} \tilde{f}(x) = \ell$

(3) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in B(a, \delta) \cap D \cap \{x > a\}$ alors $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$

(4) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]a, a + \delta[\cap D$ alors $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$

□

La proposition suivante est un cas particulier de la proposition 11.113

PROPooGDDJooDCmydE

Proposition 14.40 ([443]).
Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$. Si $a \in \text{Adh}(D)$ alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont égales. Dans ce cas nous avons égalité :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x). \tag{14.74}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous disons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Si V est un voisinage de ℓ, il existe un voisinage U de a tel que $f\big(U \cap D \setminus \{a\}\big) \subset V$. En particulier il existe un $\delta > 0$ tel que si $x \in]a, a + \delta[\cap D$, alors $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Cela est la limite à droite (lemme 14.39).

(2) $\Leftarrow$ Soit $\epsilon > 0$. Par la limite à droite, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $f\big(]a, a + \delta_1[\cap D\big) \subset B(\ell, \epsilon)$. Par la limite à gauche, il existe δ_2 tel que $f\big(]a - \delta_2, a[\cap D\big) \subset B(\ell, \epsilon)$

En prenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ nous avons bien $f\big(B(a, \delta) \cap D \setminus \{a\}\big) \subset B(\ell, \epsilon)$ comme le demande la définition de la limite.

□

14.41.
Quelques remarques à propos de la proposition 14.40.

(1) Cette proposition ne se généralise pas aux dimensions supérieures. Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, il ne faudrait pas croire que si les limites suivant toutes les directions existent alors la limite existe.

(2) Cette proposition est souvent utilisée pour calculer des limites dans lesquelles interviennent des valeurs absolues. Par exemple, durant la démonstration de la proposition 14.391.

14.4 Limite en compactifié d'Alexandrov

Nous considérons l'espace topologique localement compact $\mathbb{R}$, et son compactifié d'Alexandrov défini en 9.204. Nous avons donc un point supplémentaire noté ∞. Ce point n'est ni du côté des grands nombres positifs, ni du côté des grands nombres négatifs. Il n'est ni $+\infty$ ni $-\infty$.

Proposition 14.42.
Dans cet espace topologique $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty. \tag{14.75}$$

Démonstration. Soit un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{R}}$. Il s'écrit $V = K^c \cup \{\infty\}$ pour un certain compact de $\mathbb{R}$. Le théorème 11.23 nous assure que K est borné. Donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Pour $x \in B(0, 1/R)$ nous avons

$$\left|\frac{1}{x}\right| > R, \tag{14.76}$$

et donc $1/x \in K^c$. Donc aussi $\frac{1}{x} \in V$. □

De la même façon, dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nous avons

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty. \tag{14.77}$$

14.43.
Je vous laisse deviner la topologie à considérer sur $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans cet espace topologique la limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

14.4.1 Prolongement par continuité

14.4.1.1 Discussion avec mon ordinateur

Voici un extrait de ce que peut donner Sage. Nous lui donnons la fonction

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8}. \tag{14.78}$$

Cette fonction est inventée exprès pour que le dénominateur s'annule en -4. En fait $3x^2 + 10x - 8 = (x+4)(3x-2)$, et la fraction peut se simplifier en

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}. \tag{14.79}$$

Et avec cela nous écririons $f(-4) = -\frac{1}{14}$. Voyons comment cela passe dans Sage.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 5.2, Release Date: 2012-07-25                         |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.        |
| Type "help()" for help.                                            |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=(x+4)/(3*x**2+10*x-8)
sage: f(-4)
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
ValueError: power::eval(): division by zero
```

Il produit donc une erreur de division par zéro. Cela n'est pas étonnant. Pourtant si on lui demande, il est capable de simplifier. En effet :

```
sage: f.simplify_full()
x |--> 1/(3*x - 2)
sage: f.simplify_full()(-4)
-1/14
```

Nous considérons la question suivante : étant donné une fonction f définie sur $I \setminus \{x_0\}$, est-il possible de définir f en x_0 de telle façon à ce qu'elle soit continue ?

Exemple 14.44.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{14.80}$$

n'est pas définie pour $x = 0$ et il n'y a pas moyen de définir $f(0)$ de telle sorte que f soit continue parce que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. △

14.4.1.2 Limite et prolongement

Reprenons l'exemple de la fonction (14.78) que mon ordinateur refusait de calculer en zéro :

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8} = \frac{x+4}{(x+4)(3x-2)}. \tag{14.81}$$

Cette fonction a une condition d'existence en $x = -4$. Et pourtant, tant que $x \neq -4$, cela a un sens de simplifier les $(x+4)$ et d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}.$$

Étant donné que pour toute valeur de x différente de -4, la fonction f s'exprime de cette façon, nous avons

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \left(\frac{1}{3x-2}\right).$$

Oui, mais la fonction[12] $g(x) = 1/(3x-2)$ est continue en -4 et donc sa limite vaut sa valeur. Nous en déduisons que

$$\lim_{x\to -4} f(x) = -\frac{1}{14}.$$

Que dire maintenant de la fonction ainsi définie ?

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -4 \\ -1/14 & \text{si } x = -4. \end{cases} \tag{14.82}$$

Cette fonction est continue en -4 parce qu'elle y est égale à sa limite. Les étapes suivies pour obtenir ce résultat sont :

- Repérer un point où la fonction n'existe pas,
- calculer la limite de la fonction en ce point, et en particulier vérifier que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas,
- définir une nouvelle fonction qui vaut partout la même chose que la fonction originale, sauf au point considéré où l'on met la valeur de la limite.

C'est ce qu'on appelle **prolonger la fonction par continuité** parce que la fonction résultante est continue. La prolongation de f par continuité est donc en général définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq y \\ \lim_{y\to x} f(y) & \text{si } x = y \end{cases} \tag{14.83}$$

Dans le cas que nous regardions,

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8},$$

[12] Cette fonction g n'est pas f parce que g a en plus l'avantage d'être définie en -4.

le prolongement par continuité est donné par

$$\tilde{f} = \frac{1}{3x-2}. \tag{14.84}$$

Remarquons que cette fonction n'est toujours pas définie en $x = 2/3$.

14.4.2 Prolongement par continuité

Proposition-Définition 14.45 (Prolongement par continuité)**.**
Soit $f\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} &\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R} \\ &\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \ell & si\ x = x_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{14.85}$$

*est une fonction continue sur I et est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.*

Vous noterez que dans cet énoncé nous demandons $\ell \in \mathbb{R}$. Les cas $\ell = \pm\infty$ sont donc exclus.

14.46.
Le lemme 14.63 donnera un autre gros morceau de prolongement par continuité. Là, ce ne sera pas juste une valeur qui manquera, mais carrément la majorité des valeurs ; mais par contre, ce ne sera pas vraiment de la prolongation par continuité, mais de la prolongation par Cauchy-continuité.

Exemple 14.47.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} \end{aligned} \tag{14.86}$$

admet pour limite $\lim_{x\to-3} f(x) = \frac{4}{5}$. Son prolongement par continuité en $x = -3$ est donné par

$$\tilde{f}(x) = \frac{x-1}{x-2}. \tag{14.87}$$

Notons que les fonctions f et $\tilde{f}$ ne sont pas identiques : l'une est définie pour $x = -3$ et l'autre pas. Lorsqu'on fait le calcul

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}, \tag{14.88}$$

la simplification n'est pas du tout un acte anodin. Le dernier signe « = » est discutable parce que les deux dernières expressions ne sont pas égales pour tout x ; elles ne sont égales « que » pour les x pour lesquels les deux expressions existent. △

Les fonctions trigonométriques donneront quelques exemples intéressants de prolongements par continuité. Voir l'exemple 20.252. Et une avec la fonction logarithme dans l'exemple 17.128.

14.4.3 Théorème de la bijection

À propos de la continuité de l'application réciproque dans divers cas, voir le thème 35.

LEMooYUOOooByoQdr

Lemme 14.48 ([1])**.**
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et si $x \in \mathrm{Adh}(I)$, alors x est dans une des trois situations suivantes[13] *:*

(1) $x \in \mathrm{Int}(I)$

(2) $x = \inf(I)$

(3) $x = \sup(I)$

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{Adh}(I)$. Nous supposons que a n'est pas dans l'intérieur de I, et nous prouvons que nous sommes dans un des deux autres cas. Soit $\epsilon > 0$.

[13] Définitions de supremum et d'infimum 4.85.

(1) **$a+\epsilon$ n'est pas un minorant** Vu que a est dans l'adhérence de I, pour tout n, il existe x_n dans $B(a,1/n)\cap I$. En choisissant n assez grand, nous avons

$$x_n < a + \frac{1}{n} < a + \epsilon, \tag{14.89}$$

de telle sorte que $a+\epsilon$ ne soit pas un minorant de I.

(2) **$a-\epsilon$ n'est pas un majorant** De même nous avons $x_n > a - \frac{1}{n} > a - \epsilon$.

(3) **$a \geqslant x$ ou $a \leqslant x$ pour tout $x \in I$** Nous devons encore prouver que soit $a \geqslant x$ pour tout $x \in I$, soit que $a \leqslant x$ pour tout $x \in I$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe $x_-, x_+ \in I$ tels que

$$x_- < a < x_+. \tag{14.90}$$

Vu que I est un intervalle nous avons $[x_-, x_+] \subset I$. Alors en prenant $r < (x_+ - x_-)/2$ nous avons

$$B(a,r) \subset]x_-, x_+[\subset I, \tag{14.91}$$

ce qui signifierait que a est dans l'intérieur de I.

□

LEMooBDGGooSOdOXb

Lemme 14.49 ([444]).
Soient un intervalle I et une application continue $f\colon I \to \mathbb{R}$. Elle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si f est injective** Nous prouvons que f est strictement monotone par l'absurde en supposant qu'elle ne l'est pas. Si f n'est pas strictement monotone sur I, il existe x_1, x_2, x_3 et x_4 dans I tels que

$$\begin{array}{cc} x_1 < x_1 & x_3 < x_4 \\ f(x_1) \leqslant f(x_2) & f(x_3) \geqslant f(x_4). \end{array} \tag{14.92}$$

Vu que I est un intervalle, tous les points entrex_1, x_2, x_3 et x_4 sont dans I. Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) - f\big(tx_2 + (1-t)x_4\big). \end{aligned} \tag{14.93}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} g(0) &= f(x_3) - f(x_4) \geqslant 0 \\ g(1) &= f(x_1) - f(x_2) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{14.94}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous indique qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$. Nous posons alors $u = t_0x_1 + (1-t_0)x_3$ et $v = t_0x_2 + (1-t_0)x_4$, de telle sorte que

$$0 = g(t_0) = f(u) - f(v). \tag{14.95}$$

Mais $u \neq v$ parce que $x_1 < x_2$ et $x_3 < x_4$. Nous avons contredit l'injectivité de f.

(2) **Si f est strictement monotone** Supposons que f soit strictement croissante. Nous devons prouver que f est injective. Pour cela supposons que $f(u) = f(v)$ avec $u, v \in I$. Nous avons alors

$$\begin{cases} f(u) \leqslant f(v) & \text{(14.96a)} \\ f(u) \geqslant f(v). & \text{(14.96b)} \end{cases}$$

Par stricte monotonie nous en déduisons que $u \leqslant v$ et que $u \geqslant v$, autrement dit, que $u = v$.

□

PropOARooUuCaYT

Proposition 14.50 ([445, 1]).
Une surjection monotone d'une partie X de $\mathbb{R}$ vers un intervalle est continue[14]*. Nous sommes dans une des trois situations du lemme 14.48.*

[14] Pour les topologies induites de X et de I. Dans le cas de I, si il est ouvert, c'est la topologie usuelle.

Démonstration. Soit une application monotone $g\colon X \to I$ où I est un intervalle. Nous supposons dans un premier temps que g est croissante. Soit un ouvert V dans I. Nous allons montrer que $g^{-1}(V)$ est ouvert dans X.

Pour cela nous considérons $x \in g^{-1}(V)$ et nous posons $y = g(x)$. Nous allons prouver qu'il existe un voisinage U de x vérifiant $g(U) \subset V$.

Le nombre y est dans un des trois cas du lemme 14.48.

(1) **y est à l'intérieur de I** Il existe $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset V$. Nous posons alors $0 < \alpha < r$, et choisissons $x_- \in g^{-1}(y-\alpha)$ et $x_+ \in g^{-1}(y+\alpha)$. Vu que g est surjective sur I, ces nombres existent dans X. Par croissance de g, nous avons

$$x_- < x < x_+. \tag{14.97}$$

Enfin nous considérons la partie $U =]x_-, x_+[\cap X$. Ce U est un ouvert contenant x.

Avec tout ça nous avons $g(U) \subset V$.

(2) **Si $y = \sup(I)$** Il existe r tel que $]y-r, y] \subset V$. Nous considérons $x_- \in g^{-1}(y-r)$, et nous posons $U =]x_-, \infty[\cap X$. Avec cela nous avons

$$g(U) \subset]y-\epsilon, y] \subset V. \tag{14.98}$$

(3) **Si $y = \inf(I)$** Dans ce cas nous avons un r tel que $[y, y+r[\subset V$. Nous considérons $x_+ \in g^{-1}(y+r)$ et l'ouvert $]-\infty, x_+[\cap X$. Nous avons encore $g(U) \subset V$.

Nous devons encore prouver le cas où g est décroissante. Dans ce cas la fonction $h(x) = -g(x)$ est croissante et surjective sur l'intervalle $-I$. Elle est donc continue. Si h est continue, alors g est continue. □

Proposition 14.51.
Soient $f\colon I \to J$ une bijection et $f^{-1}\colon J \to I$ sa réciproque. Alors pour tout $x_0 \in I$ nous avons

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0 \tag{14.99}$$

EqHQRooNmLYbF

et pour tout $y_0 \in J$ nous avons

$$f\big(f^{-1}(y_0)\big) = y_0. \tag{14.100}$$

EqIYTooQPvZDr

Démonstration. Nous prouvons la relation (14.99) et nous laissons (14.100) comme exercice au lecteur.

Soit $x_0 \in I$. Posons $y_0 = f(x_0)$. La définition de l'application réciproque est que pour $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$. Donc $f^{-1}(y_0)$ est l'unique élément de I dont l'image est y_0. C'est donc x_0 et nous avons $f^{-1}(y_0) = x_0$, c'est-à-dire

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0. \tag{14.101}$$

□

ThoKBRooQKXThd

Théorème 14.52 (Théorème de la bijection)**.**
Soit I un intervalle et f une fonction continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

(1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;

ITEMooMAWXooZXmVwA

(2) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est bijective

(3) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est strictement monotone de même sens que f ;

ItemEJZooKuFoeFiv

(4) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire que $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue.

Démonstration. Prouvons les choses point par point.

(1) Supposons pour fixer les idées que f est monotone croissante[15].

Soient $a < b$ dans $f(I)$. Par définition il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $a = f(x_1)$ et $b = f(x_2)$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ et vérifie $f(x_1) < f(x_2)$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous dit que pour tout t dans $[f(x_2), f(x_2)]$, il existe un $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = t$. Cela montre que toutes les valeurs intermédiaires entre a et b sont atteintes par f et donc que $f(I)$ est un intervalle.

[15] Traitez en tant qu'exercice le cas où f est décroissante.

(2) Nous prouvons maintenant que f est bijective en prouvant séparément qu'elle est surjective et injective.

(2a) **f est surjective** Une fonction est toujours surjective depuis un intervalle I vers l'ensemble Image f.

(2b) **f est injective** Soit $x \neq y$ dans I ; pour fixer les idées nous supposons que $x < y$. La stricte monotonie de f implique que $f(x) < f(y)$ ou que $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$.

La fonction f est donc bijective.

(3) Comme d'accoutumée nous supposons que f est croissante. Soient $y_1 < y_2$ dans $f(I)$; nous devons prouver que $f^{-1}(y_1) \leqslant f^{-1}(y_2)$. Pour cela nous considérons les nombres $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Nous allons en prouver la contraposée en supposant que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. En appliquant f (qui est croissante) à cette dernière inégalité il vient

$$f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y_2)\big), \tag{14.102}$$

ce qui signifie

$$y_1 \geqslant y_2 \tag{14.103}$$

par l'équation (14.100).

(4) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est une fonction monotone et surjective, donc continue par la proposition 14.50.

□

Exemple 14.53.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon [2,3] &\to [4,9] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{14.104}$$

est une bijection. Sa réciproque est la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon [4,9] &\to [2,3] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{14.105}$$

△

14.5 Limite et continuité

SecLimiteFontion

Voir les remarques dans l'index thématique 29 pour comprendre la place et la portée de ce qui va venir à propos de limite et de continuité.

ThoLimCont

Théorème 14.54 (Limite et continuité)**.**
La fonction f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est continue en a, et nous prouvons que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$; ce qu'il nous faut c'est un δ tel que $|x-a| \leqslant \delta$ implique $|f(x)-f(a)| \leqslant \epsilon$. La caractérisation 11.81 de la continuité donne l'existence d'un δ comme il nous faut.

Dans l'autre sens, c'est-à-dire prouver que f est continue au point a sous l'hypothèse que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la preuve se fait de la même façon. □

Nous en déduisons que si nous voulons gagner quelque chose à parler de limites, il faut prendre des fonctions non continues. En effet, si une fonction est continue en un point, la limite ne donne aucune nouvelle information que la valeur de la fonction elle-même en ce point.

Prenons une fonction qui fait un saut. Pour se fixer les idées, prenons celle-ci :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]-\infty, 2[\\ x/2 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases} \tag{14.106}$$

EqnCtsOEL

Essayons de trouver la limite de cette fonction lorsque x tend vers 2. Étant donné que f n'est pas continue en 2, nous savons déjà que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$. Donc ce n'est pas 1. Cette limite ne peut pas valoir 4 non plus parce qu'en prenant n'importe quel ϵ, la valeur de $f(2+\epsilon)$ est très proche de 2, et donc, ne peut pas

s'approcher de 4. En fait, on peut facilement vérifier que *aucun nombre ne vérifie la condition de limite pour f en 2*. Nous disons que la limite n'existe pas.

Il ne faudrait pas en déduire trop vite que si une fonction n'est pas continue en a, alors la limite $x \to a$ n'existe pas. Ce que dit le théorème 14.54 est que si une fonction n'est pas continue en a, alors sa limite (si elle existe) ne vaut pas $f(a)$.

EXooKREUooLeuIlv

Exemple 14.55 (Un exemple de continuité ; Thème 29)**.**
Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{14.107}$$

EQooSYSWooSGsUfR

Cette fonction n'est pas continue en $x = 0$, et pourtant la limite existe : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Etudions cela en détail, pour nous assurer de ce qu'il se passe.

Considérons l'ouvert $]3, 5[$. L'image réciproque de cet ouvert par f est la partie $]3, 5[\cup \{0\}$ qui n'est pas ouvert. Donc la fonction f n'est pas continue comme fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Considérons pour comprendre la restriction $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$. L'image inverse de $]3, 5[$ par cette fonction est $\{0\}$ qui n'est pas un ouvert.

Plus généralement tant qu'on considère des restrictions de f sur des parties contenant un voisinage de 0, la fonction ne peut pas être continue[16].

Voyons ce qu'il en est de la continuité ponctuelle de f en $x = 0$. La définition 9.48 est celle de la continuité en un point ; elle dit que f sera continue en 0 si $f(0) = 4$ est une limite de f. Nous voilà parti vers la définition 9.151.

Soit le voisinage $V =]3, 5[$ de $f(0)$. Quel que soit le voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $W \subset B(0, \epsilon)$. Nous avons alors

$$f\big(W \setminus \{0\}\big) \subset f\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big). \tag{14.108}$$

Mais le nombre $\epsilon/2$ fait partie de $f\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big)$ et n'est pas dans V. Donc $f(0)$ n'est pas une limite de f en zéro. Cette fonction n'est donc pas continue en zéro. △

Exemple 14.56 (Même exemple, limite)**.**
Nous avons vu que, pour la fonction (14.107), le nombre 4 n'est pas une limite de f en zéro. Nous montrons à présent que 0 est une limite (et même la seule par la proposition 9.154 que nous ne rappellerons plus à chaque fois) de f.

Montrons que 0 est une limite de f en zéro, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Nous suivons la définition 9.151. Soit un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe δ tel que $B(0, \delta) \subset V$. En posant $\epsilon = \delta$ et en définissant $W = B(0, \epsilon)$ nous avons

$$f\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big) = B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subset B(0, \delta) \subset V. \tag{14.109}$$

Donc 0 est une limite de f en zéro. △

Nous avons déjà vu par le corolaire 11.60 qu'une suite croissante et bornée était convergente. Il en va de même pour les fonctions.

PropMTmBYeU

Proposition 14.57 ([1])**.**
Si la fonction réelle $f\colon I = [a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante et bornée, alors la limite

$$\lim_{x\to b} f(x) \tag{14.110}$$

existe et est finie.

Démonstration. Commençons par prouver que si (x_n) est une suite dans I convergeant vers b, alors $f(x_n)$ est une suite convergente. Dans un second temps, nous allons prouver que si (x_n) et (x'_n) sont deux suites qui convergent vers b, alors les suites convergentes $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ convergent vers la même limite. Alors le critère séquentiel de la limite d'une fonction conclura (proposition 9.167).

Nous pouvons extraire de x_n une sous-suite croissante $(x_{\alpha(n)})$. Alors la suite $f\big(x_{\alpha(n)}\big)$ est une suite croissante et majorée, donc convergente par le corolaire 11.60[17]. Nommons ℓ la limite et montrons qu'elle est aussi limite de f sur la suite originale.

[16] Les plus acharnés se demanderont ce qu'il se passe pour la restriction de f à la partie $\{0\}$ munie de la topologie induite de $\mathbb{R}$.

[17] En gros nous sommes en train de dire que toute la théorie des fonctions convexes est un vulgaire corolaire de Bolzano-Weierstrass.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe K tel que si $n > K$ alors $\left|f\left(x_{\alpha(n)}\right) - \ell\right| < \epsilon$. Soit K' tel que pour tout $n > K'$ nous ayons $x_n > x_{\alpha(K)}$. Cela est possible parce que la suite est bornée par b et converge vers b : il suffit de prendre K' de telle sorte que $|x_n - b| \leqslant |x_{\alpha(n)} - b|$. Si $n > K'$ alors $x_n > x_{\alpha(K)}$ et

$$f(x_n) \geqslant f(x_{\alpha(n)}) \geqslant \ell - \epsilon; \tag{14.111}$$

en résumé si $n > K$ alors $|f(x_n) - \ell| < \epsilon$. Cela prouve que $f(x_n) \to \ell$.

Soit maintenant une autre suite (x'_n) qui converge également vers b. Comme nous venons de le voir la suite $f(x'_n)$ est convergente et nous nommons ℓ' la limite. Si nous considérons (x''_n) la suite « alternée » $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots)$ alors nous avons encore une suite qui converge vers b et donc $f(x''_n) \to \ell'$.

Mais étant donné que $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ sont des sous-suites, elles doivent converger vers la même valeur. Donc $\ell = \ell' = \ell''$. □

PROPooGQHKooWgykjW

Proposition 14.58.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est continue et croissante, alors il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell. \tag{14.112}$$

Démonstration. Il y a deux possibilités : soit f est bornée, soit elle n'est pas bornée. Si f est bornée, c'est la proposition 14.57. Si f n'est pas bornée, nous allons montrer que $\ell = \infty$ est la limite.

Soit $M > 0$. Étant donné que f n'est pas bornée, il existe un $x_M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_M) > M$. Mais comme f est croissante, pour tout $x > x_M$ nous avons $f(x) > M$. Cela prouve que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. □

PROPooLOQVooULDhZz

Proposition 14.59 ([1]).
L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie de la compactification en un point[18] *est connexe par arcs.*

Démonstration. Nous allons montrer que le chemin

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}\end{aligned} \tag{14.113}$$

est continu au sens de la définition 9.48(2) (qui est le seul sens possible au mot « continu »).

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si cet ouvert ne contient pas ∞, alors $\gamma^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ parce que la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue[19].

Si $\infty \in \mathcal{O}$, alors $\mathcal{O} = \{\infty\} \cup \mathcal{O}'$ où $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ ayant la propriété que $\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}'$ est compact.

Nous avons $\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \{0\} \cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}')$. Et aussi que $\gamma^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$.

Puisque le complémentaire de $\mathcal{O}'$ est compact, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a,\infty[\subset \mathcal{O}'$. Donc $\mathcal{O}' =]a,\infty[\cup \mathcal{O}''$ où $\mathcal{O}''$ est un ouvert.

Nous avons :

$$\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \{\gamma^{-1}(\infty)\} \cup \gamma^{-1}\big(]a,\infty[\big) \cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'') \tag{14.114a}$$

$$= \{0\} \cup]0, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'') \tag{14.114b}$$

$$= [0, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}''). \tag{14.114c}$$

Vous noterez le point essentiel où la topologie de la compactification agit : comme $\{0\}$ n'est pas un ouvert de $[0,1]$, nous devons nous assurer que la partie $\gamma^{-1}(\mathcal{O}')$ vienne se coller à $\{0\}$ pour compléter en un ouvert.

L'ensemble $\gamma^{-1}(\mathcal{O}'')$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$. Nous avons donc

$$\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \Big(]-1, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'')\Big) \cap [0,1]. \tag{14.115}$$

Cela est un ouvert de $[0,1]$ par définition de la topologie induite[20]. □

14.5.1 Prolongement des rationnels vers les réels

Si $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue pour la topologie induite, est-ce qu'on peut la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? La réponse est hélas non.

[18] Définition 9.204.
[19] Voir par exemple la proposition 14.8.
[20] Définition 9.30.

EXooWZNCooQkKdtJ

Exemple 14.60 ([446]).
Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel[21], ceci définit bien une fonction sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q < \sqrt{2} \\ 1 & \text{si } q > \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.116}$$

C'est une fonction continue sur $\mathbb{Q}$. En effet, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $\epsilon > 0$. Nous prenons $\delta > 0$ tel que $\sqrt{2}$ ne soit pas dans $B(q, \delta)$. Alors si $p \in B_{\mathbb{Q}}(q, \delta)$ nous avons $f(q) = f(p)$ et donc

$$|f(p) - f(q)| < \epsilon. \tag{14.117}$$

Il n'est cependant pas possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. △

Pour qu'une fonction sur $\mathbb{Q}$ puisse être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il faut un peu plus que la continuité. Il faut la Cauchy-continuité, que nous définissons pas plus tard qu'immédiatement.

DEFooXXOGooXblyKP

Définition 14.61 ([446]).
*Soient X et Y deux espaces métriques. Une application $f\colon X \to Y$ est dite **Cauchy-continue** si pour toute suite de Cauchy (x_n) dans X, la suite $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y.*

PROPooPUNFooFMytOY

Proposition 14.62 ([447]).
Soient X et Y des espaces métriques[22]. Nous supposons que Y est complet[23]. Nous considérons $A \subset X$ et une application Cauchy-continue $f\colon A \to Y$.

Alors :

(1) Il existe un unique prolongement continu $g\colon \bar{A} \to Y$ de f.

ITEMooDEZGooUAvwvF

(2) Ce prolongement est lui-même Cauchy-continu.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Une suite**

Soit $x \in \bar{A}$. Nous considérons une suite (a_n) dans A telle que $a_n \xrightarrow{X} x$. Alors (a_n) est de Cauchy[24] et donc $\big(f(a_n)\big)$ est de Cauchy dans Y. Vu que Y est complet, $\big(f(a_n)\big)$ est une suite convergente.

(2) **Indépendance**

Montrons que si (b_n) est une autre suite dans A convergeant vers x, alors $\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$. Pour cela nous considérons la suite$(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots,)$. Cela est une suite qui converge vers x. Elle est donc de Cauchy et son image par f est encore de Cauchy. Toutes les sous-suites de la suite image sont dont convergentes vers la même limite. En prenant les sous-suites paires et impaires, nous avons $\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$.

(3) **Définition de g** Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned} g\colon \bar{A} &\to Y \\ x &\mapsto \lim_n f(a_n) \end{aligned} \tag{14.118}$$

où (a_n) est une quelconque suite dans A convergeant vers x.

(4) **g est séquentiellement continue** Soit une suite (x_n) dans $\bar{A}$. Nous devons prouver que $g(x_n) \xrightarrow{Y} g(x)$.

Nous pouvons choisir $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x_n) < 1/n$. Si nous considérons une suite de Cauchy dans A convergeant vers x_n, et que nous prenons a_n assez loin dans cette suite, alors nous pouvons même choisir a_n tel que $d\big(f(a_n), g(x_n)\big) < 1/n$. Nous choisissons (a_n) de telle sorte à vérifier les deux en même temps.

Nous avons

$$d(a_n, x) \leqslant d(a_n, x_n) + d(x_n, x) \to 0. \tag{14.119}$$

[21] Proposition 4.25. Le fait que $\sqrt{2}$ existe dans $\mathbb{R}$ est la proposition 4.99.
[22] Il a une distance, définition 9.155.
[23] Définition 9.335.
[24] Proposition 9.343.

Donc (a_n) est de Cauchy et par définition de g, nous avons

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n). \tag{14.120}$$

EQooWQYNooKIQAjc

À partir de là nous avons la majoration

$$d\big(g(x_n), g(x)\big) \leqslant d\big(g(x_n), f(a_n)\big) + d\big(f(a_n), g(x)\big). \tag{14.121}$$

Le premier terme tend vers zéro par choix de la suite (a_n) et le second tend vers zéro par (14.120).

(5) **g est continue** La proposition 9.173 donne l'équivalence entre la continuité et la continuité séquentielle.

(6) **Unicité** Soient g_1 et g_2, deux prolongations continues de f sur $\bar{A}$. Si $a_n \to x$ dans A, alors nous avons, par continuité de g_1 et g_2 : $g_1(a_n) \to g_1(x)$ et $g_2(a_n) \to g_2(x)$.

Mais $g_1(a_n) = g_2(a_n) = f(a_n)$; donc les limites sont égales.

(7) **g est Cauchy continue**

□

En terme de prolongement continu, nous avons ce lemme qui demande à une fonction d'être Cauchy-continue. Vous pouvez comparer avec le principe de prolongement analytique 19.166 qui donne un énoncé similaire pour un prolongement analytique.

LEMooUAFBooAwiXxj

Lemme 14.63 ([1, 448, 447])**.**
Soit une fonction Cauchy-continue [25] $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

(1) La limite $\lim_{q\to x} f(q)$ *existe pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

(2) Il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3) Ce prolongement est donné par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{q\to x} f(q) & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.122}$$

Démonstration. C'est tout dans la proposition 14.62 en sachant que

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, proposition 11.15.
- $\mathbb{R}$ est complet, théorème 9.360.

□

PROPooXWHYooFiVYfi

Proposition 14.64.
Soient des fonctions continues $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Si* f *et* g *sont égales sur* $\mathbb{Q}$, *alors elles sont égales sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Nous pouvons utiliser les propriétés fondamentales des réels et de la continuité. Soit $x \in \mathbb{R}$; nous voulons montrer que $f(x) = g(x)$. En prenant par exemple le lemme 4.75, il existe une suite q_i de rationnels telle que $q_i \xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

Par ailleurs, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc en chaque point de $\mathbb{R}$ (théorème 9.286). Par la caractérisation séquentielle 9.206 de la continuité, nous avons

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f(q_i) = \lim_{i\to\infty} g(q_i) = g(x). \tag{14.123}$$

□

PROPooTNIAooNAJDzL

Proposition 14.65 ([1])**.**
Soit une fonction strictement croissante $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. *Alors la prolongation continue* $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est également strictement croissante.*

[25] Définition 14.61 ; nous en avons discuté dans l'exemple 14.60.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Notons $d = y - x$. Nous considérons des suites de rationnels $x_k \to x$ et $y_l \to y$ telles que pour tout k, $x_k \in B(x, d/3)$ et $y_k \in B(y, d/3)$. En particulier, $x_k < y_l$ pour tout k et l.

Soient des rationnels q et q' tels que pour tout k,

$$x_k < q < q' < y_k. \tag{14.124}$$

Pour trouver de tels rationnels, il suffit de les chercher dans $]x + \frac{d}{3}, y - \frac{d}{3}[$. Cet intervalle étant de longueur $d/3$, il contient des rationnels.

Vue la croissance de f sur $\mathbb{Q}$, nous avons, pour tout k :

$$f(x_k) < f(q) < f(q') < f(y_k), \tag{14.125}$$

et à la limite :

$$\tilde{f}(x) \leqslant f(q) < f(q') \leqslant \tilde{f}(y). \tag{14.126}$$

Notez que les inégalités strictes se changent en inégalités larges au passage à la limite. D'où l'utilité de prendre *deux* rationnels entre x_k et y_k pour maintenir une inégalité stricte entre $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(y)$. □

14.6 Espace des fonctions continues

Définition 14.66.
*Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. L'**oscillation** sur I est le nombre*

$$\omega_f(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x). \tag{14.127}$$

Pour chaque x fixé, la fonction

$$x \mapsto \omega_f\big(B(x, \delta)\big) \tag{14.128}$$

est une fonction positive, croissante et a donc une limite (pour $\delta \to 0$). Nous notons $\omega_f(x)$ cette limite qui est l'**oscillation** de f en ce point. Une propriété immédiate est que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega_f(x_0) = 0$.

LemuaPbtQ

Lemme 14.67.
L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de fermés.

Démonstration. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Nous avons

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{14.129}$$

Il nous suffit donc de montrer que pour tout ϵ, l'ensemble

$$\{x \text{ tel que } \omega_f(x) < \epsilon\} \tag{14.130}$$

est ouvert. Soit en effet x_0 dans cet ensemble. Il existe δ tel que $\omega_f\big(B(x_0, \delta)\big) < \epsilon$. Si $x \in B(x_0, \delta)$, alors si on choisit δ' tel que $B(x, \delta') \subset B(x_0, \delta)$, nous avons $\omega_f\big(B(x, \delta')\big) < \epsilon$, ce qui justifie que $\omega_f(x) < \epsilon$ et donc que x est également dans l'ensemble considéré. □

Théorème 14.68.
L'ensemble des points de discontinuité d'une limite simple de fonctions continues est de première catégorie.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f. Nous devons écrire l'ensemble des points de discontinuité de f comme une union dénombrable d'ensembles tels que sur tout intervalle I, aucun de ces ensembles n'est dense. Nous savons déjà par le lemme 14.67 que l'ensemble des points de discontinuité de f est donné par

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{14.131}$$

Nous essayons donc de prouver que pour tout ϵ, l'ensemble

$$F = \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \epsilon\} \tag{14.132}$$

est nulle part dense. Soit

$$E_n = \bigcap_{i,j>n} \{x \text{ tel que } |f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon\}. \tag{14.133}$$

Nous montrons que cet ensemble est fermé en étudiant le complémentaire. Soit $x \notin E_n$; alors il existe un couple (i, j) tel que

$$|f_i(x) - f_j(x)| > \epsilon. \tag{14.134}$$

Par continuité, cette inégalité reste valide dans un voisinage de x. Donc il existe un voisinage de x contenu dans $\complement E_n$ et E_n est donc fermé.

De plus nous avons $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$. Ce dernier point est dû au fait que pour tout x, il existe N tel que $i, j > N$ implique $|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \epsilon$. Cela est l'expression du fait que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit I, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous voulons trouver un intervalle $J \subset I$ sur lequel f est continue. Nous écrivons I sous la forme

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap I). \tag{14.135}$$

Tous les ensembles $J_n = E_n \cap I$ ne peuvent être nulle part dense en même temps (à cause du théorème de Baire 9.398). Il existe donc un n tel que J_n contienne un ouvert J. Le but est de montrer que f est continue sur J. Pour ce faire, nous n'allons pas simplement majorer $|f(x) - f(x_0)|$ par ϵ lorsque $|x - x_0|$ est petit. Nous allons majorer l'oscillation de f sur $B(x_0, \delta)$ lorsque δ est petit. Pour cela nous prenons x_0 et x dans J et nous écrivons

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \tag{14.136}$$

À ce niveau nous rappelons que n est fixé par le choix de J, dans lequel ϵ est déjà inclus. Nous choisissons évidemment $|x - x_0| \leqslant \delta$ de telle sorte que le second terme soit plus petit que ϵ en vertu de la continuité de f_n. Pour le premier terme, pour tout $i, j \geqslant n$ nous avons

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon. \tag{14.137}$$

Si nous posons $j = n$ et $i \to \infty$, en tenant compte du fait que $f_i \to f$ simplement,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon. \tag{14.138}$$

Nous avons donc obtenu $|f(x) - f_n(x_0)| \leqslant 2\epsilon$. Cela signifie que dans un voisinage de rayon δ autour de x_0, les valeurs extrêmes prises par $f(x)$ sont $f_n(x_0) \pm 4\epsilon$. Nous avons donc prouvé que pour tout ϵ, il existe δ tel que

$$\omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) \leqslant 4\epsilon. \tag{14.139}$$

De là nous concluons que

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) = 0, \tag{14.140}$$

ce qui signifie que f est continue en x_0. □

Exemple 14.69.
Une fonction discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue ailleurs. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \end{cases} \tag{14.141}$$

où par « $x = p/q$ » nous entendons que p/q est la fraction irréductible[26].

Cette fonction est discontinue sur $\mathbb{Q}$ parce que si $q \in \mathbb{Q}$ alors $f(q) \neq 0$ alors que dans tous voisinage de q il existe un irrationnel sur qui la fonction vaudra zéro.

Montrons que f est continue sur les irrationnels. Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x_0) = 0$. Mais si on prend un voisinage suffisamment petit de x_0, nous pouvons nous arranger pour que tous les rationnels aient un dénominateur arbitrairement grand. En effet si nous nous fixons un premier rayon $r_0 > 0$ alors il existe un nombre fini de fractions de la forme $1, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \ldots, \frac{k}{N}$ dans $B(x_0, r_0)$. Il suffit maintenant de choisir $0 < r \leqslant r_0$ tel que ces fractions soient toutes hors de $B(x_0, r)$. Dans cette boule nous avons $f < \frac{1}{N}$. Du coup f est continue en x_0. △

Définition 14.70 (Point périodique[449])**.**
Soit $f : I \to I$ une application d'un ensemble I dans lui-même. Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ alors on dit que x est un point n-périodique.

[26] Proposition 3.171.

LemAONBooGZBuYt

Lemme 14.71.
Soit I un segment[27] de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f\colon I \to I$. Si K est un segment fermé avec $K \subset f(I)$ alors il existe un segment fermé $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.

Démonstration. Mentionnons immédiatement que f est continue sur I qui est compact[28]. Par conséquent tous les nombres dont nous allons parler sont finis parce que f est bornée par le théorème 11.56.

Soit $K = [\alpha, \beta]$. Si $\alpha = \beta$ alors le segment $L = \{a\}$ convient. Nous supposons donc que $\alpha \neq \beta$ et nous considérons $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Puisque $a \neq b$ nous supposons $a < b$ (le cas $a > b$ se traite de façon similaire).

Nous posons

$$A = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) = \alpha\}. \tag{14.142}$$

C'est un ensemble borné par a et b. De plus il est fermé ; ce dernier point n'est pas tout à fait évident parce que f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, mais sur I, qui est fermé. Le corolaire 11.88 n'est donc pas immédiatement utilisable. Prouvons donc que $Z = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha\}$ est fermé. Si x_0 est hors de Z alors, soit x_0 est dans I, soit il est hors de I. Dans ce second cas, le complémentaire de I étant ouvert, on a un voisinage de x_0 hors de I, et par conséquent hors de Z. Si au contraire $x_0 \in I$ alors il y a (encore) deux cas : soit $x_0 \in \text{Int}(I)$, soit x_0 est sur le bord de I. Dans le premier cas, le théorème des valeurs intermédiaires[29] fonctionne. Pour le second cas, nous supposons $x_0 = \max(I)$ (le cas $x_0 = \min(I)$ est similaire). Le théorème des valeurs intermédiaires dit que sur $[x_0 - \epsilon, x_0]$, $f \neq \alpha$ et en même temps, sur $]x_0, x_0 + \epsilon]$, nous sommes en dehors du domaine. Au final $\{f(x) = \alpha\}$ est fermé et A est alors fermé en tant que intersection de deux fermés.

L'ensemble A étant non vide ($a \in A$), il possède donc un maximum que nous nommons u :

$$u = \max(A). \tag{14.143}$$

Nous posons aussi

$$B = \{x \in [u, b] \text{ tel que } f(x) = \beta\} \tag{14.144}$$

qui est encore fermé, borné et non vide. Nous pouvons donc définir

$$v = \min(B). \tag{14.145}$$

Nous prouvons maintenant que $f\big([u, v]\big) = [\alpha, \beta]$. D'abord $f\big([u, v]\big)$ est un intervalle compact[30] contenant $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$. Par conséquent $[\alpha, \beta] \subset f\big([u, v]\big)$. Pour l'inclusion inverse supposons $t \in [u, v]$ tel que $f(t) > \beta$. Vu que $f(a) = \alpha$ et $\alpha < \beta$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [a, t]$ tel que $f(t_0) = \beta$. Cela donne $t_0 < v$ et donc contredit la minimalité de v dans B. Nous en déduisons que $f\big([u, v]\big)$ ne contient aucun élément plus grand que β. Même jeu pour montrer que l'intervalle ne contient aucun élément plus petit que α.

En définitive, le segment $L = [u, v]$ satisfait toutes les exigences. □

Lorsque $I_2 \subset f(I_1)$ nous notons $I_1 \to I_2$ ou, si une ambiguïté est à craindre, $I_1 \xrightarrow{f} I_2$. Cette flèche se lit « recouvre ».

LemSSPXooMkwzjb

Lemme 14.72 ([450, 449])**.**
Soient les segments $I_0, \dots, I_{n-1}$ tels que nous ayons le cycle

$$I_0 \to I_1 \to \dots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{14.146}$$

Alors f^n admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

Démonstration. Nous prouvons les cas $n = 1$ et $n = 2$ séparément.

(1) $\underline{n = 1}$ Nous avons $I_0 \to I_0$, c'est-à-dire que $I_0 \subset f(I_0)$. Si $I_0 = [a, b]$ alors nous posons $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ pour certains $\alpha, \beta \in I_0$. Nous posons ensuite $g(x) = f(x) - x$.

Dans un premier temps, $g(\alpha) = a - \alpha \leqslant 0$ parce que $a = \min(I_0)$ et $\alpha \in I_0$. Pour la même raison, $g(\beta) = b - \beta \geqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset I_0$ tel que $g(t_0) = 0$. Nous avons donc $f(t_0) = t_0$.

[27] définition 11.53. Un segment est un intervalle fermé borné.
[28] Par le lemme 11.19.
[29] Théorème 11.92.
[30] Corolaire 11.94 et théorème 9.298.

(2) $\underline{n=2}$ Nous avons $I_0 \to I_1 \to I_0$. Puisque $I_1 \subset f(I_0)$, le lemme 14.71 donne un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mézalors

$$J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1). \tag{14.147}$$

Nous avons donc $J_1 \xrightarrow{f^2} J_1$ et par le cas $n = 1$ traité plus haut, la fonction f^2 a un point fixe x_0 dans J_1. De plus

$$f(x_0) \in f(J_1) = I_1, \tag{14.148}$$

le point x_0 est donc bien celui que nous cherchions.

(3) **Cas général** Nous avons

$$I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{14.149}$$

Puisque $I_1 \subset f(I_0)$, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mais

$$I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1), \tag{14.150}$$

donc il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$. En procédant ainsi aussi longtemps qu'il le faut, nous construisons les ensembles $J_1, \ldots, J_{n-1}$ tels que

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0 \tag{14.151}$$

tels que $I_k = f^k(J_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$. La dernière de ces inclusions est $I_{n-1} = f^{n-1}(J_{n-1})$, mais $I_{n-1} \to I_0$, c'est-à-dire que

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1}), \tag{14.152}$$

et il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 \subset f^n(J_n)$. Mais comme $J_n \subset J_0$ nous avons en particulier $J_n \subset f^n(J_n)$. Cela donne un point fixe $x_0 \in J_n$ pour f^n. Par construction, nous avons $J_n \subset J_{n-1} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0$ et donc $x_0 \in J_k$ pour tout k. En particulier

$$f^k(x_0) \in f^k(J_k) = I_k \tag{14.153}$$

pour tout k.

□

Théorème 14.73 (Théorème de Sarkowski[450, 449])**.**
Soit I, un segment de $\mathbb{R}$ et une application continue $f\colon I \to I$. Si f admet un point 3-périodique, alors f admet des points n-périodiques pour tout $n \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $a \in I$ un point 3-périodique pour f et notons $b = f(a)$, $c = f(b)$. Les points b et c sont également des points 3-périodiques. Quitte à renommer, nous pouvons supposer que a est le plus petit des trois. Il reste deux possibilités : $a < b < c$ et $a < c < b$. Nous traitons d'abord le premier cas.

Supposons $a < b < c$. Nous posons $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Nous avons immédiatement $I_1 \subset f(I_0)$ et comme $f(b) = c$ et $f(c) = a$, $f(I_1)$ recouvre $[a, c]$ et donc recouvre en même temps I_1 et I_2. Nous avons donc $I_0 \to I_1$, $I_1 \to I_0$ et $I_1 \to I_1$.

(1) **Un point 1-périodique** Nous avons $I_1 \to I_1$ qui prouve que f a un point fixe dans I_1. C'est le cas $n = 1$ du lemme 14.72. Voilà un point 1-périodique.

(2) **Un point 2-périodique** Nous avons $I_0 \to I_1 \to I_0$. Par conséquent, le lemme 14.72 dit que f^2 a un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f(x_0) \in I_1$. Montrons que $f(x_0) \neq x_0$. Pour avoir $x_0 = f(x_0)$, il faudrait $x_0 \in I_0 \cap I_1 = \{b\}$. Mais b est un point 3-périodique, donc ne vérifiant certainement pas $f^2(b) = b$. Nous en déduisons que $f(x_0) \neq x_0$ et donc que x_0 est 2-périodique.

(3) **Un point 3-périodique** On en a par hypothèse.

(4) **Un point n-périodique pour $n \geqslant 4$** Nous avons le cyle

$$I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \ldots \to I_1}_{\text{n-1}\,fois} \to I_0. \tag{14.154}$$

Le lemme donne alors un point fixe $x \in I_0$ pour f^n tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k = 1, \ldots, n-1$. Est-ce possible que $x = b$? Non parce que $f^2(b) = a \in I_0$ alors que $f^2(x) \in I_1$. Mais $I_0 \cap I_1 = \{b\}$.

Par conséquent la relation $f^k(x) \in I_1$ exclut d'avoir $f^k(x) = x$, et le point x est bien n-périodique.

Passons au cas $a < c < b$. Alors nous posons $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. Encore une fois $f(I_0)$ contient a et b, donc $I_0 \to I_0$ et $I_0 \to I_1$. Mais en même temps $f(I_1)$ contient a et c, donc $I_1 \to I_0$.

Nous pouvons donc refaire comme dans le premier cas, en inversant les rôles de I_0 et I_1. En particulier nous pouvons considérer le cycle

$$I_1 \to I_0 \to I_0 \to \ldots \to I_0 \to I_1. \tag{14.155}$$

□

14.7 Uniforme continuité

SECooZSZUniCVSDRO

L'uniforme continuité est la définition 9.395.

Définition 14.74.
*Une partie $A \subset \mathbb{R}^m$ est dite **bornée** si il existe un $M > 0$ tel que $A \subset B(0, M)$. Le **diamètre** de la partie A est le nombre*

$$\mathrm{Diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\| \in [0, \infty]. \tag{14.156}$$

Lorsque A est bornée, il existe un M tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout $x \in A$.

LEMooFABOooZYFjhv

Lemme 14.75.
Si A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}^m$, alors $\mathrm{Diam}(A) = \mathrm{Diam}(\bar{A})$.

Démonstration. Vu que $A \subset \bar{A}$, nous avons l'inégalité $\mathrm{Diam}(A) \leqslant \mathrm{Diam}(\bar{A})$. Nous nommons $d = \mathrm{Diam}(\bar{A})$. Soit $\epsilon > 0$. Soient $x, y \in \bar{A}$ tels que $\|x - y\| > d - \epsilon$. Nous prenons $a \in B(x, \epsilon) \cap A$ et $b \in B(y, \epsilon) \cap A$.

Nous avons

$$\mathrm{Diam}(A) \geqslant \|a - b\| \geqslant \|x - y\| - 2\epsilon \geqslant d - 3\epsilon. \tag{14.157}$$

Nous avons donc $\mathrm{Diam}(A) \geqslant \mathrm{Diam}(\bar{A}) - 3\epsilon$ pour tout ϵ. Donc $\mathrm{Diam}(A) \geqslant \mathrm{Diam}(\bar{A})$. □

Exemple 14.76.
Prenons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, et demandons nous pour quel δ nous sommes sûr d'avoir

$$|f(a + \delta) - f(a)| = \left| \frac{1}{a + \delta} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon. \tag{14.158}$$

Pour simplifier, nous supposons que $a > 0$. Nous calculons

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a + \delta} &< \varepsilon \\ \frac{\delta}{a(a + \delta)} &< \varepsilon \\ \delta &< \varepsilon a^2 + \varepsilon a \delta \\ \delta(1 - \varepsilon a) &< \varepsilon a^2 \\ \delta &< \frac{\varepsilon a^2}{1 - \varepsilon a}. \end{aligned} \tag{14.159}$$

Notons que, à ε fixé, plus a est petit, plus il faut choisir δ petit. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est donc pas uniformément continue. Cela correspond au fait que, proche de zéro, la fonction monte très vite. Une fonction uniformément continue sera une fonction qui ne montera jamais très vite. △

PROPooVOUTooOtiGLG

Proposition 14.77.
Soient des espaces métrique (E, d) et (E', d').

ITEMooOCZCooKzxEja

(1) Toute application uniformément continue $f : E \to E'$ est continue ;

ITEMooZLAJooBTwiAE

(2) la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue ;

ITEMooBDITooXNENCy

(3) Pour une application uniformément continue f nous considérons une application $\delta_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $d\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$ pour tout $d(x, y) < \delta_f(\epsilon)$. Alors l'application

$$\delta_{g \circ f} = \delta_f \circ \delta_g \tag{14.160}$$

fonctionne pour $g \circ f$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Nous voyons que f est continue en $x_0 \in E$. Soit $\epsilon > 0$. Nous prenons le δ correspondant dans la définition de l'uniforme continuité. Nous avons alors $d(x, x_0) < \delta$ implique $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \epsilon$.

(2) **Pour (2)** Soient des applications uniformément continues $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons δ_1 tel que $d\big(g(x), g(y)\big) < \epsilon$ pour tout $d(x, y) < \delta_1$. Et ensuite nous considérons δ_2 tel que $d\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$ pour tout x, y tels que $d(x, y) < \delta_1$. Maintenant si $d_E(x, y) < \delta_2$ nous avons

$$f_F\big(f(x), f(y)\big) < \delta_1, \tag{14.161}$$

et donc

$$d_G\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(y)\big)\Big) < \epsilon. \tag{14.162}$$

(3) **Pour (3)** Il suffit de déballer un peu ce qu'on a fait pour (2).

□

Nous verrons qu'une application lipschitzienne est uniformément continue (proposition 14.358).

Une fonction peut être uniformément continue sur un domaine et pas sur un autre. Le théorème suivant donne une importante indication à ce sujet.

ThoHeineContinueCompact

Théorème 14.78 (Heine)**.**
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Une fonction continue $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est uniformément continue sur K.

Démonstration. Nous allons prouver ce théorème par l'absurde. Nous commençons par écrire la condition qui exprime que f n'est pas uniformément continue sur le compact K :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in K \text{ tels que } \|x - y\| < \delta \text{ et } \big|f(x) - f(y)\big| > \varepsilon. \tag{14.163}$$

En particulier (en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ pour tout n), pour chaque n nous pouvons trouver x_n et y_n dans K qui vérifient simultanément les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|x_n - y_n\| < \dfrac{1}{n} & \text{(14.164a)} \\ \big|f(x_n) - f(y_n)\big| > \varepsilon. & \text{(14.164b)} \end{cases}$$

EqCond3107fxfyepsppt

Nous insistons que c'est le même ε pour chaque n. L'ensemble K étant compact, l'ensemble $K \times K$ est compact (théorème 9.388) et nous pouvons trouver une sous-suite convergente *du couple* (x_n, y_n) dans $K \times K$. Quitte à passer à ces sous-suites, nous supposons que (x_n, y_n) converge dans $K \times K$ et en particulier, que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. Étant donné que pour chaque n elles vérifient $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, les limites sont égales :

$$\lim x_n = \lim y_n = x. \tag{14.165}$$

L'ensemble K étant fermé, la limite x est dans K. Par continuité de f, nous avons finalement

$$\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(x), \tag{14.166}$$

mais alors

$$\lim_{n\to\infty} \big|f(x_n) - f(y_n)\big| = 0, \tag{14.167}$$

ce qui est en contradiction avec le choix (14.164b).

Tout ceci prouve que $f(K)$ est bornée supérieurement et que f atteint son supremum (qui est donc un maximum). Le fait que $f(K)$ soit bornée inférieurement se prouve en considérant la fonction $-f$ au lieu de f. □

Remarque 14.79.
Nous pouvons ne pas utiliser le fait que le produit de compacts est compact.

Pour choisir les sous-suites (x_n) et (y_n), il suffit de prendre une sous-suite convergente de (x_n) et d'invoquer le fait que $\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{n}$. Les suites (x_n) et (y_n) étant adjacentes[31], la convergence de (x_n) implique la convergence de (y_n) vers la même limite.

Il est donc un peu superflu de parler de la convergence du couple (x_n, y_n).

[31] Définition 11.40.

PROPooBWUFooYhMlDp

Proposition 14.80 (Heine[451]).
Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est uniformément continue[32].

Démonstration. Soient un espace métrique compact X et un espace métrique quelconque E. Nous considérons une application continue $f\colon X \to E$.

(1) **Un ensemble** Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons l'ensemble

$$K = \{(x,y) \in X \times X \text{ tel que } d\big(f(x),f(y)\big) \geqslant \epsilon\}. \tag{14.168}$$

(2) **Il est compact** L'espace X étant compact, $X \times X$ est également compact par le théorème 9.388. Les fonctions f et d étant continues, l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon X \times X &\to \mathbb{R}^+\\ (x,y) &\mapsto d\big(f(x),f(y)\big)\end{aligned} \tag{14.169}$$

est continue, de telle sorte que la partie $\varphi \geqslant \epsilon$ est fermée. Un fermé dans un compact est compact par le lemme 9.137.

(3) **Une borne atteinte** Nous considérons l'application distance $d\colon K \to \mathbb{R}^+$. C'est une application continue sur le compact K ; donc elle atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes, 11.56). Elle a un minimum que nous notons δ.

Comme $(x,x) \notin K$, nous avons $d(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in K$. Et donc $\delta > 0$.

(4) **Conclusion** Si $x, y \in X$ sont tels que $d(x,y) < \delta$, alors $(x,y) \notin K$. De ce fait nous avons

$$d\big(f(x),f(y)\big) < \epsilon. \tag{14.170}$$

D'où l'uniforme continuité de f sur X.

□

LEMooIVAKooUiEENr

Lemme 14.81 ([1]).
Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in [a,b]$ nous définissons

$$\begin{aligned}f_x\colon [c,d] &\to \mathbb{R}\\ y &\mapsto f(x,y).\end{aligned} \tag{14.171}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned}g\colon [a,b] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \|f_x\|_\infty\end{aligned} \tag{14.172}$$

est continue.

Démonstration. Soit $\alpha \in [a,b]$, et prouvons la continuité de g en α.

(1) **Le décor** Nous considérons l'espace vectoriel normé $\big(C^0([a,b]),\|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme uniforme. Prouvons que si $x_k \xrightarrow{[a,b]} \alpha$, alors $f_{x_k} \xrightarrow{unif} f_\alpha$.

(2) **Module de continuité** Pour cela nous avons le calcul suivant, avec justifications juste en-dessous :

$$\begin{aligned}\|f_{x_k} - f_\alpha\|_\infty &= \sup_{y\in[c,d]} \|f(x_k,y) - f(\alpha,y)\| && (14.173a)\\ &\leqslant \sup_{y\in[c,d]} \big|\omega_f\big(\|(x_k,y)-(\alpha,y)\|\big)\big| && (14.173b)\\ &= \sup_{y\in[c,d]} |\omega_f(|x_k-\alpha|)| && (14.173c)\\ &= \omega_f(|x_k-\alpha|). && (14.173d)\end{aligned}$$

SUBEQooCOJQooWlyHUa

SUBEQooGLYMooEZKRKm

Justifications.

[32] Uniforme continuité, définition 9.395.

- Pour (14.173b). Utilisation du module de continuité, définition 12.375.
- Pour (14.173c). La norme dans $\mathbb{R}^2$ de $(x_k, y) - (\alpha, y)$.

(3) **Uniforme continuité** La fonction f est continue sur le compact $[a,b]\times[c,d]$. Elle est donc uniformément continue par le théorème de Heine 14.80, et donc son module de continuité vérifie $\lim_{h\to 0}\omega_f(h) = 0$ par 12.377.

Nous avons donc

$$\|f_{x_k} - f_\alpha\|_\infty \leqslant \omega_f(|x_k - \alpha|) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{14.174}$$

Nous avons donc prouvé que si $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}} \alpha$, alors $f_{x_k} \xrightarrow{\|.\|_\infty} f_\alpha$.

(4) **Conclusion** La norme étant une application continue, nous en déduisons que si $x_k \to \alpha$, alors $\|f_{x_k}\|_\infty \to \|f_\alpha\|_\infty$.

Ceci est la continuité séquentielle de la fonction g, et donc la continuité tout court.

□

14.8 Fonctions sur un compact

Par le théorème des valeurs intermédiaires 11.92, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, et nous avons l'importante propriété suivante des fonctions continues sur un compact.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 11.56.

Théorème 14.82.
Si f est une fonction continue sur l'intervalle compact $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, son image est également un intervalle compact, et donc est de la forme $[m,M]$. Ceci découle du théorème 9.298 et le corolaire 11.94. Le maximum de f sur $[a,b]$ est la borne M qui est bien dans l'image (parce que $[m,M]$ est fermé). Idem pour le minimum m. □

14.9 Polynômes, théorème de d'Alembert

L'algèbre des polynômes sur un anneau est définie en 3.228. Si $P \in A[X]$ et si $\alpha \in A$ nous avons également défini l'évaluation de P en α ; c'est la définition 3.231. Dans le cadre de l'analyse, lorsque nous considérons des polynômes, nous allons complètement confondre le polynôme avec la fonction qu'il définit.

14.9.1 Polynômes sur les réels

PROPooJKYJooFqbQMr

Proposition 14.83.
Tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

Démonstration. Nous mettons le plus haut degré en facteur :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n-k}}. \tag{14.175}$$

Le terme en $k = n$ vaut $a_n x^n$ tandis que les autres sont de la forme (à un coefficient près) $\frac{1}{x^l}$ pour un $l \geqslant 1$. Lorsque $x \to \infty$, chacun de ces termes s'annule (lemme 14.33). Nous avons donc

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty, \tag{14.176}$$

et de même, n étant impair, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous donne alors l'existence d'un réel sur lequel P s'annule. □

PROPooARLAooMNnNsz

Proposition 14.84 ([1])**.**
À propos de réductibilité

(1) Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme à coefficients réels, alors le conjugué complexe $\bar{z}$ est également une racine.

(2) *Tout polynôme à coefficients réels de degré au moins 3 est réductible*[33] *sur* $\mathbb{R}$.

La proposition suivante donne une utilisation amusante de la notion de polynôme caractéristique[34].

PROPooKJWOooOjSFaA

Proposition 14.85 ([452]).
Soit un espace vectoriel E de dimension finie pour lequel il existe un endomorphisme $f: E \to E$ tel que $(f \circ f)(x) = -x$ pour tout $x \in E$. Alors la dimension de E est paire.

Démonstration. Cherchons les valeurs propres de f en résolvant l'équation $f(x) = \lambda x$. Nous appliquons f à cette égalité :

$$-x = \lambda f(x) = \lambda^2 x. \tag{14.177}$$

Donc λ ne peut pas être réel. Nous avons montré que f n'a pas de valeur propre réelle. Or le polynôme caractéristique de f est de degré égal à la dimension de l'espace E par le lemme 10.111(1).

Si la dimension de E est impaire, le polynôme caractéristique est de degré impair, et possède donc une racine réelle[35]. Autrement dit, l'absence de racines réelles au polynôme caractéristique indique une dimension paire. □

14.86.
Une autre preuve possible pour 14.85 est d'utiliser le déterminant : si la dimension de E est n nous avons :

$$\det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^n. \tag{14.178}$$

Donc $(-1)^n$ est positif, ce qui montre que n est pair.

14.9.2 Polynômes sur les complexes

Nous allons parler de comportement asymptotique de polynômes définis sur $\mathbb{C}$. La topologie que nous considérons est celle de la compactification en un point, décrite en 9.204.

Le lemme suivant donne une caractérisation de la limite en l'infini dans le compactifié $\hat{\mathbb{C}}$. Dans beaucoup de cas, cette caractérisation est prise comme la définition de la limite. Hélas, dans le Frido nous sommes des extrémistes et nous ne parvenons pas à dire le mot « limite » si il n'y a pas une topologie.

LEMooERABooQjLBzW

Lemme 14.87 ([1]).
Nous considérons la compactification en un point d'Alexandrov[36]*. Soit une fonction $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous avons $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|z| > R$ implique $|f(z)| > M$.*

Démonstration. Souvenons-nous que, en général[37], nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \tag{14.179}$$

si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage W de a tel que $z \in W \setminus \{a\}$ implique $f(z) \in V$.

Précisons encore un point de notation. Si K est une partie de $\mathbb{C}$, nous notons K^c son complémentaire dans $\mathbb{C}$, pas dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Ceci étant dit, nous passons à la preuve.

(1) **Sens direct** Nous supposons que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Soit $M > 0$; nous considérons le voisinage $V = \overline{B(0,M)}^c \cup \{\infty\}$. Par définition de la limite, il existe un voisinage W de ∞ tel que $z \in W \Rightarrow f(z) \in V \setminus \{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c$. Ce voisinage est de la forme $K^c \cup \{\infty\}$. Puisque K est compact, il est borné, et il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$.

Avec tout cela nous avons la chaine suivante d'implications :

$$|z| > R \Rightarrow z \in K^c \Rightarrow z \in W \Rightarrow f(z) \in V \setminus \{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c \Rightarrow |f(z)| > M. \tag{14.180}$$

C'est bien la propriété que nous voulions.

(2) **Sens réciproque** Soit un voisinage V de ∞. Nous avons $V = K^c \cup \{\infty\}$ où K est compact dans $\mathbb{C}$. Il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$.

Par hypothèse, il existe R tel que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > M$. Soit $W = \overline{B(0,R)}^c \cup \{\infty\}$. Nous avons la chaine

$$z \in W \Rightarrow |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M \Rightarrow f(z) \in K^c \Rightarrow f(z) \in V. \tag{14.181}$$

[33] Définition 3.14.
[34] Définition 10.109.
[35] Proposition 14.83.
[36] Définition 9.204.
[37] Définition 9.151.

□

PROPooPWVWooGuftxZ

Proposition 14.88 ([1]).
Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \end{aligned} \tag{14.182}$$

où nous sous-entendons que $a_n \neq 0$. La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est équivalente[38] *en l'infini à la fonction*

$$\begin{aligned} w\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^+ \\ z &\mapsto |a_n z^n|. \end{aligned} \tag{14.183}$$

Démonstration. Nous voudrions prouver qu'il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que[EQooGXWZooDJZNzE]

$$\begin{cases} |\sum_{i=0}^{n} a_i z^i| = \big(1 + \alpha(z)\big)|a_n z^n|. & \text{(14.184a)} \\ \lim_{z\to\infty} \alpha(z) = 0. & \text{(14.184b)} \end{cases}$$

Nous trouvons un candidat pour être une telle fonction en isolant simplement $\alpha(z)$ de cette égalité. Nous trouvons

$$\alpha(z) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a_n} z^{i-n} \right| - 1. \tag{14.185}$$

Elle vérifie immédiatement (14.184). Le point qui fait intervenir la topologie de $\hat{\mathbb{C}}$ est de vérifier que $\lim_{z\to\infty} \alpha(z) = 0$. Le terme $i = n$ de la somme vaut 1. Il suffit donc de montrer que pour $i \neq n$ nous avons

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^{n-i}} = 0. \tag{14.186}$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous devons prouver qu'il existe un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$ tel que

$$\left| \frac{1}{z^{n-i}} - 0 \right| \leqslant \epsilon \tag{14.187}$$

pour tout $z \in V$.

En utilisant la proposition 11.102 nous avons déjà

$$\left| \frac{1}{z^{n-i}} \right| = \frac{1}{|z^{n-i}|} = \frac{1}{|z|^{n-i}}. \tag{14.188}$$

Soit $R > 0$ tel que $\frac{1}{R} < \epsilon$. Nous considérons le voisinage $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ de ∞. Dans ce voisinage, nous avons

$$\frac{1}{|z|^{n-i}} \leqslant \frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{R} < \epsilon. \tag{14.189}$$

Et voilà. □

Le lemme suivant parle de polynôme sur $\mathbb{C}$. Vous pouvez l'adapter à $\hat{\mathbb{R}}$ et $\bar{\mathbb{R}}$.

LEMooYZVGooXZvBAc

Lemme 14.89.
Si $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un polynôme, alors $|P|$ atteint une borne inférieure globale.

Démonstration. Nous savons, par l'équivalence de fonctions prouvée dans la proposition 14.88 que $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. Soit $a > 0$ dans $\mathbb{R}$. Par le lemme 14.87 il existe un $R > a$ tel que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > |f(a)|$.

La fonction $|P|$ est continue sur le compact $\overline{B(0,R)}$. Soit z_0 le point de minimum[39] de $|P|$ sur $\overline{B(0,R)}$.

Nous devons prouver que z_0 donne même un minimum global. Comme $a \in \overline{B(0,R)}$ nous avons

$$|P(z_0)| \leqslant |P(a)|. \tag{14.190}$$

Si $z \in \overline{B(0,R)}^c$, nous avons

$$|P(z)| > |P(a)| \geqslant |P(z_0)|. \tag{14.191}$$

Donc ce z_0 est un minimum sur $B(0,R)$ et sur $\overline{B(0,R)}^c$. Bref, un minimum global. □

[38] Définition 9.96.
[39] Théorème de Weierstrass 9.215.

LEMooTTOYooXaukuH

Lemme 14.90.
Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i. \end{aligned} \tag{14.192}$$

À part si $a_0 = a_1 = 0$, la fonction P est équivalente à $a_0 + a_1 z$ en $z = 0$.

Note : si $a_0 = a_1 = 0$, alors évidemment P devrait être équivalente à 0, ce qui est évidemment faux : la fonction identiquement nulle tend vers zéro plus vite que n'importe quoi.

Démonstration. En posant $g(z) = a_0 + a_1 z$, nous devons trouver une fonction α telle que

EQooZFJBooVAYVBv
$$P(z) = \big(1 + \alpha(z)\big)g(z). \tag{14.193}$$

Si $a_0 \neq 0$, il existe un voisinage épointé de $z = 0$ sur lequel la fonction

EQooVCOVooAKWJxF
$$\alpha(z) = \frac{z^2 \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2}}{a_0 + a_1 z} \tag{14.194}$$

existe. Il n'y a aucun problème à ce que $\alpha(z) \to 0$ pour $z \to 0$[40], et un simple calcul[41] donne (14.194).

Si par contre $a_0 = 0$, nous faisons le calcul intermédiaire suivant :

$$\alpha(z)g(z) = P(z) - g(z) = z^2 \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2}, \tag{14.195}$$

et donc, en isolant $\alpha(z)$ et en simplifiant par z, nous voyons que la fonction α définie par

$$\alpha(z) = \frac{z}{a_1} \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2} \tag{14.196}$$

convient. □

PROPooLBBLooQwEiHr

Proposition 14.91 ([453, 1])**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

ITEMooSPSWooKLtqzZ

(1) L'équation $z^2 = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

ITEMooQOJDooWjfGXv

(2) Pour tout l, l'équation $z^{2^l} = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

Nous ne disons pas que ces solutions sont uniques[42].

Démonstration. Pour prouver (1), l'équation $z^2 = a + bi$ a pour solution $\pm\xi$ où[43]

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{14.197}$$

Nous n'avons en fait pas besoin de montrer que $\pm\xi$ sont toutes deux des solutions, ni que ce sont les seules. Un calcul direct montre que $\xi^2 = a + bi$ et nous sommes contents.

Pour (2), nous faisons une récurrence sur l. Nous savons que

$$z^{2^{k+1}} = (z^{2^k})^2. \tag{14.198}$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^{2^k} = a + bi$; un tel ξ existe par hypothèse de récurrence. Alors si z est tel que $z^2 = \xi$, nous avons

$$z^{2^{k+1}} = a + bi. \tag{14.199}$$

□

[40] En remarquant toutefois que c'est une limite à deux dimensions. Sachez la définir.
[41] En fait, la formule (14.194) est obtenue en isolant $\alpha(z)$ dans (14.193).
[42] Comme vous en conviendrez en pensant à $z^2 = 1$ qui a déjà les solutions 1 et -1.
[43] Si vous vous demandez où sont définies les racines carrés, c'est 11.97.

Le théorème de d'Alembert possède de nombreuses démonstrations. En voici une qui à ma connaissance est celle demandant le moins d'analyse ; une démonstration à base de théorie de Galois peut être trouvée dans [108, 454]. Si vous lisez ces lignes pour savoir qu'un polynôme de degré n possède au *maximum* n racines, ce n'est pas ici qu'il faut regarder, mais le corolaire 3.287.

Une très jolie démonstration sur numberphile :
https://www.youtube.com/watch?v=shEk8sz1oOw.

THOooIRJYooBiHRyW

Théorème 14.92 (d'Alembert[453])**.**
Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos[44] *: tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*[45]*.*

Démonstration. Nous effectuons une preuve tout à la fois par l'absurde et par récurrence en supposant que le polynôme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \end{aligned} \tag{14.200}$$

n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, et que n soit le plus petit entier pour lequel un tel polynôme existe. Nous notons

$$n = 2^k m \tag{14.201}$$

où m est impair.

Le lemme 14.89 donne un point z_0 qui réalise le minimum global de $|f|$ sur $\mathbb{C}$. Nous posons $g(z) = f(z_0+z)$ et nous définissons ses coefficients A_i par

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i z^i. \tag{14.202}$$

Nous avons $A_n = 1$ et $|A_0| = |f(z_0)|$. Soit A_r le premier à être non nul parmi les A_1, A_2, ….

(1) **Si $r < n$** Par hypothèse de récurrence, il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^r = -A_1/A_r$. Nous avons

$$g(t\xi) = A_0 + \frac{-A_r t^r A_0}{A_r} + t^{r+1} \sum_{i=r+1}^{n} A_i \xi^i t^{i-r-1}. \tag{14.203}$$

En notant $P(t)$ le dernier polynôme, nous pouvons écrire cela sous forme compacte :

$$g(t\xi) = A_0 - t^r A_0 + t^{r+1} P(t). \tag{14.204}$$

Puisque

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{r+1}P(t)}{t^r|A_0|} = \lim_{t\to 0} tP(t) = 0, \tag{14.205}$$

il existe $t_0 > 0$ tel que

$$|t_0^{r+1}P(t_0)| < |A_0 t_0^r|. \tag{14.206}$$

Nous choisissons de plus $t_0 < 1$, de telle sorte que $1 - t^r > 0$. Avec cela nous avons

$$|g(t\xi)| \leqslant |A_0|(1-t^r) + |t^{r+1}P(t)| = |A_0| \underbrace{-t^r|A_0| + |t^{r+1}P(t)|}_{<0} < |A_0|. \tag{14.207}$$

Or $|A_0|$ était un minimum global de $|g|$. Contradiction.

(2) **Si $r = n$**

Dans ce cas,

$$g(z) = f(z_0 + z) = A_0 + z^n, \tag{14.208}$$

et nous rappelons que $n = 2^k m$ où m est impair. Nous allons trouver une contradiction dans les quatre cas $\mathrm{Re}(A_0) > 0$, $\mathrm{Re}(A_0) < 0$, $\mathrm{Im}(A_0) > 0$ et $\mathrm{Im}(A_0) < 0$. Bien entendu ces cas se recouvrent largement, mais en toute généralité, nous avons besoin des quatre.

[44] Définition 8.74.
[45] C'est la définition 8.74 d'être algébriquement clos.

(2a) **Si** $\operatorname{Re}(A_0) > 0$ La proposition 14.91 nous permet de considérer $v \in \mathbb{C}$ tel que $v^{2^k} = -1$. Nous avons alors

$$g(tv) = A_0 + (tv)^n = A_0 + t^n(v^{2^k})^m = A_0 + t^n(-1)^m = A_0 - t^n \tag{14.209}$$

parce que m est impair. Nous avons $\operatorname{Im}\big(g(tv)\big) = \operatorname{Im}(A_0)$. Si t est assez petit pour que $t^n < |\operatorname{Re}(A_0)|$ nous avons aussi $|\operatorname{Re}\big(g(tv)\big)| < |\operatorname{Re}(A_0)|$. Donc

$$|g(tv)|^2 = |\operatorname{Re}\big(g(tv)\big)|^2 + |\operatorname{Im}\big(g(tv)\big)|^2 < |\operatorname{Re}(A_0)|^2 + |\operatorname{Im}(A_0)|^2 = |A_0|^2. \tag{14.210}$$

Donc $|g(tv)| < |A_0|$. Contradiction.

(2b) **Si** $\operatorname{Re}(A_0) < 0$ Nous prenons $v = 1$, et même histoire.

(2c) **Si** $\operatorname{Im}(A_0) < 0$ Nous prenons $w \in \mathbb{C}$ tel que

$$w^{2^k} = i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{14.211}$$

Là, il y a un peu d'arrachage de cheveux pour bien voir les cas. La difficulté est que les puissances de i alternent entre 1, -1, i et $-i$. Puisque m est impair, nous avons un l tel que $m = 2l + 1$. Nous subdivisons les cas l pair et l impair.

(2c.i) **Si l est pair** Alors d'une part $\frac{1}{2}(m-1) = l$ est pair et donc

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = 1. \tag{14.212}$$

Et d'autre part, $i^{2l+1} = (-1)^l i = i$. En tout,

$$i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{14.213}$$

(2c.ii) **Si l est impair** Alors $\frac{1}{2}(m-1) = l$ et $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = -1$. Mais en même temps, $i^{2l+1} = -i$, ce qui donne encore une fois

$$i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{14.214}$$

Bref, que l soit pair ou impair, nous avons $i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i$.

Nous avons donc $\operatorname{Re}\big(g(tw)\big) = \operatorname{Re}(A_0)$ et $\operatorname{Im}\big(g(tw)\big) < \operatorname{Im}(A_0)$. Encore contradiction.

(3) **Si** $\operatorname{Im}(A_0) > 0$ Même chose que ce que nous venons de faire, mais avec

$$w^{2^k} = -i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{14.215}$$

□

CORooKKNWooWEQukb

Corolaire 14.93 ([1]).
Tout polynôme de degré 3 à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Démonstration. Soient les racines λ_1, λ_2 et λ_3 du polynôme en question. Toutes trois sont dans $\mathbb{C}$. Supposons que λ_1 ne soit pas réelle. Alors λ_2 ou λ_3 doit être égale à $\bar{\lambda}_1$. Disons λ_2. Nous avons donc les racines λ_1, $\bar{\lambda}_1$ et λ_3. Le polynôme se factorise alors en

$$a(X - \lambda_1)(X - \bar{\lambda}_1)(X - \lambda_3). \tag{14.216}$$

EQooELMMooNbpBgg

Le coefficient a doit être réel parce qu'il est le coefficient du terme en X^3 (réel par hypothèse). Si λ_3 n'est pas réel, alors ce polynôme ne peut pas avoir des coefficients réels. Entre autres parce que le terme indépendant est $a|\lambda_1|^2\lambda_3$, qui est réel si et seulement si λ_3 est réel[46]. □

Tant que vous y êtes, vous pouvez voir que le polynôme (14.216) est à coefficients réels si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

EXooIPLOooSNfiWg

Exemple 14.94.
Toute application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a un vecteur propre. En effet si $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire, son polynôme caractéristique χ_R est de degré 3. Le corolaire 14.93 indique qu'un tel polynôme possède au moins une racine réelle. Une telle racine est une valeur propre de R par le théorème 10.113. △

[46] Notez l'utilisation de la proposition 11.103(1).

DEFooVFTYooJyDePn

Définition 14.95.
*Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de χ_u, l'ordre de l'annulation est la **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ de u. À ne pas confondre avec la **multiplicité géométrique** qui sera la dimension de l'espace propre.*

LEMooPJKEooQwuWMb

Lemme 14.96.
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ n'est pas réel, alors les polynômes $X-\alpha$ et $X-\bar{\alpha}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration. Un polynôme diviseur commun de $X-\alpha$ et $X-\bar{\alpha}$ doit être de la forme $aX+b$ parce qu'un diviseur ne peut pas être de degré plus haut. Si nous voulons que le diviseur commun soit non inversible, il faut $a \neq 0$.

Dire que $aX+b$ divise $X-\alpha$ signifie qu'il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que $(aX+b)s = X-\alpha$. Cela donne $s = 1/a$ et $b = -\alpha/s$. En substituant la première dans la seconde, nous trouvons $b = -\alpha a$.

En recommençant avec $X-\bar{\alpha}$, nous trouvons également la relation $b = -\bar{\alpha}a$. En égalisant,

$$-\alpha a = -\bar{\alpha}a. \tag{14.217}$$

En simplifiant, $\alpha = \bar{\alpha}$. Cela contredit l'hypothèse que α n'est pas réel. □

PROPooUMDQooVmfDYU

Proposition 14.97.
Un polynôme irréductible à coefficients réels est, soit de degré un, soit de degré 2 avec un discriminant négatif.

Démonstration. Soit un polynôme P à coefficients réels de degré plus grand que 1. Alors le théorème de d'Alembert-Gauss (théorème 14.92) implique l'existence d'une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est un réel, P est réductible. Si α n'est pas réel, alors son conjugué complexe $\bar{\alpha}$ est également une racine. Par conséquent les polynômes $(X-\alpha)$ et $(X-\bar{\alpha})$ divisent P dans $\mathbb{C}[X]$..

Ces deux polynômes sont premiers entre eux par le lemme 14.96. Par conséquent le produit

$$X^2 - (\alpha+\bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} \tag{14.218}$$

divise également P. Ce dernier est un polynôme à coefficients réels de degré 2. Donc tout polynôme de degré 3 ou plus est réductible. □

PROPooLXGSooXmVcVG

Proposition 14.98.
Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme possède au moins une valeur propre.

Démonstration. Soit un endomorphisme u sur E. Le théorème 10.113 dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique χ_u. Or ce polynôme possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert 14.92. □

14.10 Trigonalisation

14.10.1 Trigonalisation : généralités

SUBSECooMCOGooEoQCsz

Définition 14.99 ([455]).
*Une matrice dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable*[47] *à une matrice triangulaire supérieure.*

PropKNVFooQflQsJ

Proposition 14.100 (Trigonalisation et polynôme caractéristique scindé)**.**
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Les points suivants sont équivalents.

ItemZKDMooOrTHkwi

(1) L'endomorphisme u est trigonalisable (auquel cas les valeurs propres sont sur la diagonale).

ItemZKDMooOrTHkwii

(2) Le polynôme caractéristique de u est scindé[48]*.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **(2)⇒(1)** Nous avons par hypothèse

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i} \tag{14.219}$$

[47] Définition 10.201.
[48] Définition 8.39.

où les λ_i sont les valeurs propres de u. Le théorème de Cayley-Hamilton 10.116 dit que $\chi_u(u) = 0$, ce qui permet d'utiliser le théorème de décomposition des noyaux 10.90 :

$$E = \ker(X - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \ker(X - \lambda_r)^{\alpha_r}. \tag{14.220}$$

Les espaces $F_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont les espaces caractéristiques de u, ce qui fait que $u - \lambda_i \mathbb{1}$ est nilpotent sur $F_{\lambda_i}(u)$. L'endomorphisme $u - \lambda_i \mathbb{1}$ est donc strictement trigonalisable supérieur sur son bloc[49]. Cela signifie que u est triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale.

(2) **(1)⇒(2)**

C'est immédiat parce que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale.

□

Remarque 14.101.
La méthode des pivots de Gauss[50] certes permet de trigonaliser n'importe quelle matrice, mais elle ne correspond pas à un changement de base. Autrement dit, les pivots de Gauss ne sont pas des similitudes.

C'est là qu'il faut bien avoir en tête la différence entre *équivalence* et *similarité*[51]. Lorsqu'on parle de changement de base, de matrice trigonalisable ou diagonalisable, nous parlons de similarité et non d'équivalence.

14.10.2 Trigonalisation : cas complexe

La proposition 14.100 dit déjà que tous les endomorphismes sont trigonalisables sur $\mathbb{C}$. Nous allons aller plus loin et montrer que la trigonalisation peut être effectuée à l'aide d'une matrice unitaire.

Une démonstration alternative passant par le polynôme caractéristique sera présentée dans la remarque 14.110 utilisant la proposition 14.100.

LemSchurComplHAftTq

Lemme 14.102 (Lemme de Schur complexe, trigonalisation[456])**.**
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire[52] *U telle que UAU^{-1} soit triangulaire supérieure*[53]*. La diagonale de la matrice triangulaire contient alors les valeurs propres de A.*

Démonstration. Étant donné que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos[54], nous pouvons toujours considérer un vecteur propre v_1 de A, de valeur propre λ_1. Nous pouvons utiliser un procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée $\{v_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, et la matrice (unitaire)

$$Q = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}. \tag{14.221}$$

Nous avons $Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Av_1 = \lambda Q^{-1}v = \lambda_1 e_1$, par conséquent la matrice $Q^{-1}AQ$ est de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{14.222}$$

où $*$ représente une ligne quelconque et A_1 est une matrice de $\mathbb{M}(n-1, \mathbb{C})$. Nous pouvons donc répéter le processus sur A_1 et obtenir une matrice triangulaire supérieure (nous utilisons le fait qu'un produit de matrices orthogonales est une matrice orthogonale[55]). □

DefWQNooKEeJzv

Définition 14.103.
*Un endomorphisme est **normal** si il commute avec son conjugué hermitien*[56]*.*

Les opérateurs normaux comprennent évidemment les opérateurs hermitiens, mais également les anti-hermitiens, et ça c'est bien parce que c'est le cas de l'algèbre associée à SU(2).

[49] Proposition 10.213.
[50] Le lemme 6.127.
[51] Définition 6.126.
[52] Définition 10.177.
[53] « triangulaire supérieure » ne signifie pas « strictement triangulaire supérieure ». Ici, il est possible que la diagonale soit non nulle ; non seulement possible, mais même très probable en pratique.
[54] Algébriquement clos, définition 8.74. Le fait que $\mathbb{C}$ le soit est le théorème de d'Alembert 14.92.
[55] Proposition 10.44(1).
[56] Définition 10.175.

ThogammwA

Théorème 14.104 (Théorème spectral pour les matrices normales[361, 457, 458]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ une matrice de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non spécialement distinctes). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

ItemJZhFPSi

(1) A est normale[57],

ItemJZhFPSii

(2) A se diagonalise par une matrice unitaire,

ITEMooIIQTooQORrXP

(3) $\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2$,

ITEMooJRKSooNfsQJb

(4) il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Soit Q la matrice unitaire donnée par la décomposition de Schur (lemme 14.102) : $A = QTQ^{-1}$. Étant donné que A est normale nous avons

$$QTT^*Q^{-1} = QT^*TQ^{-1}, \tag{14.223}$$

ce qui montre que T est également normale. Or une matrice triangulaire supérieure normale est diagonale. En effet nous avons $T_{ij} = 0$ lorsque $i > j$ et

$$(TT^*)_{ii} = (T^*T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} |T_{ki}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |T_{ik}|^2. \tag{14.224}$$

Écrivons cela pour $i = 1$ en tenant compte de $|T_{k1}|^2 = 0$ pour $k = 2, \ldots, n$,

$$|T_{11}|^2 = |T_{11}|^2 + |T_{12}|^2 + \cdots + |T_{1n}|^2, \tag{14.225}$$

ce qui implique que T_{11} est le seul non nul parmi les T_{1k}. En continuant de la sorte avec $i = 2, \ldots, n$ nous trouvons que T est diagonale.

(2) **(2) ⇒ (1)** Si A se diagonalise par une matrice unitaire, $UAU^* = D$, nous avons

$$DD^* = UAA^*U^* \tag{14.226}$$

et

$$D^*D = UA^*AU^*, \tag{14.227}$$

qui ce prouve que A est normale.

(3) **(2) ⇒ (3)** Il existe une matrice unitaire U et une diagonale D telles que $D = U^\dagger AU$. La proposition 10.217 nous dit que la diagonale de D contient les valeurs propres de A, c'est-à-dire $D_{kl} = \delta_{kl}\lambda_k$.

Nous avons $D^\dagger = U^\dagger A^\dagger U$, et donc

$$D^\dagger D = U^\dagger A^\dagger UU^\dagger AU = U^\dagger A^\dagger AU, \tag{14.228}$$

c'est-à-dire que $D^\dagger D$ est semblable à $A^\dagger A$. La proposition 10.205 implique que leurs traces sont donc égales. Petit calcul en utilisant le lemme 10.176 ($A^\dagger_{ij} = A^*_{ji}$) :

EQooAGPLooYXVqGx

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_k (A^\dagger A)_{kk} = \sum_{kl} A^*_{lk}A_{lk} = \sum_{kl} |A_{lk}|^2. \tag{14.229}$$

Deuxième calcul :

EQooTUWNooIigwmx

$$\mathrm{Tr}(D^\dagger D) = \sum_{kl} D^\dagger_{kl}D_{lk} = \sum_{kl} \delta_{lk}\lambda^*_k\delta_{lk}\lambda_k = \sum_k |\lambda_k|^2. \tag{14.230}$$

Nous avons le résultat en égalisant (14.230) avec (14.229).

(4) **(3) ⇒ (2)** Le lemme de Schur complexe 14.102 nous indique qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T telles que $T = UAU^\dagger$ et telle que $T_{ii} = \lambda_i$. Le lemme 10.207 nous indique que $\sum_{ij} |T_{ij}|^2 = \sum_{ij} |A_{ij}|^2$. Donc

$$\sum_{ij} |A_{ij}|^2 = \sum_{ij} |T_{ij}|^2 = \sum_j |\lambda_j|^2 + \sum_{j>i} |T_{ij}|^2. \tag{14.231}$$

Mais l'hypothèse nous dit que $\sum_{ij} |A_{ij}|^2 = \sum_j |\lambda_j|^2$. Nous en déduisons que $\sum_{j>i} |T_{ij}|^2 = 0$, et donc que T est diagonale.

[57] Définition 14.103.

(5) **(2)⇒ (4)** Soit une base $\{e_i\}$ de $\mathbb{C}^n$. Soit $A = UDU^\dagger$. Il suffit de poser $f_i = Ue_i$ pour avoir

$$Af_i = UDU^\dagger Ue_i = UDe_i = \lambda_i Ue_i = \lambda_i f_i. \tag{14.232}$$

Donc f_i est un vecteur propre de A. Le fait que $\{f_i\}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$ est dû au fait que U est inversible.

(6) **(4) ⇒ (2)** Soit la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{C}^n$. Si $\{f_i\}$ est une base de vecteurs propres normalisés de A, alors il existe une matrice unitaire U telle que $f_i = Ue_i$. Alors la matrice $UAU^\dagger$ est diagonale.

□

Tant que nous en sommes à parler de spectre de matrices hermitiennes...Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. La matrice A^*A est hermitienne[58] et le théorème 12.41 nous assure que ses valeurs propres sont réelles. Par la remarque 12.42, ses valeurs propres sont même positives.

LEMooHUGEooVYhZdZ

Lemme 14.105 ([459])**.**
Si A est une matrice carrée et inversible,

$$\mathrm{Spec}(A^*A) = \mathrm{Spec}(AA^*) \tag{14.233}$$

Démonstration. Nous allons montrer l'égalité des polynômes caractéristiques. D'abord une simple multiplication montre que

$$(A^*A - \lambda\mathbb{1})A^{-1} = A^{-1}(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \tag{14.234}$$

Nous prenons le déterminant de cette égalité en utilisant les propriétés 10.15(1) et (3) :

$$\det(A^*A - \lambda\mathbb{1})\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \tag{14.235}$$

En simplifiant par $\det(A^{-1})$ (qui est non nul parce que A est inversible) nous obtenons l'égalité des polynômes caractéristiques et donc l'égalité des spectres. □

En particulier les matrices hermitiennes, anti-hermitiennes et unitaires sont trigonalisables par une matrice unitaire, qui peut être choisie de déterminant 1.

LEMooRCFGooPPXiKi

Lemme 14.106.
Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et une matrice unitaire U telle que $A = UTU^{-1}$ où T est triangulaire.

(1) En ce qui concerne les polynômes caractéristiques, $\chi_A = \chi_T$.

(2) Pour les spectres, $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(T)$.

(3) Les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de T.

Démonstration. Puisque U commute évidemment avec $\mathbb{1}$, nous avons

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det(UTU^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = \det\big(U(T - \lambda\mathbb{1})U^{-1}\big). \tag{14.236}$$

À ce niveau nous utilisons le fait que le déterminant soit multiplicatif 10.15 pour conclure :

$$\chi_A(\lambda) = \det\big(U(T - \lambda\mathbb{1})U^{-1}\big) = \det(U)\det(T - \lambda\mathbb{1})\det(U^{-1}) = \det(T - \lambda\mathbb{1}) = \chi_T(\lambda). \tag{14.237}$$

Pour les spectres, l'égalité des polynômes caractéristiques implique l'égalité des spectres parce que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique par le théorème 10.113.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les valeurs sur la diagonale. □

LemSLGPooIghEPI

Lemme 14.107 (Trigonalisation simultanée)**.**
Une famille de matrices de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ commutant deux à deux est simultanément trigonalisable.

Démonstration. Commençons par enfoncer une porte ouverte par la proposition 14.100 : toutes les matrices de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sont trigonalisables parce que tous les polynômes sont scindés.

Nous effectuons la démonstration par récurrence sur la dimension. Si $n = 1$ alors toutes les matrices sont triangulaires et nous ne nous posons pas de questions. Nous supposons donc $n > 1$.

[58] Définition 10.177.

Soit la famille $(A_i)_{i\in I}$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et A_0 un de ses éléments. Nous nommons $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A_0. Le théorème de décomposition primaire 10.264 nous donne la somme directe d'espaces caractéristiques[59]

$$E = F_{\lambda_1}(A_0)\oplus\dots\oplus F_{\lambda_r}(A_0). \tag{14.238}$$

Nous pouvons supposer que cette somme n'est pas réduite à un seul terme. En effet si tel était le cas, A_0 serait un multiple de l'identité parce que A_0 n'aurait qu'une seule valeur propre et les sommes dans la décomposition de Dunford 10.265(3) se réduisent à un seul terme (et $p_i=\mathrm{Id}$). En particulier les dimensions des espaces $F_\lambda(A_0)$ sont strictement plus petites que n.

Puisque tous les A_i commutent avec A_0, les espaces $F_\lambda(A_0)$ sont stables par les A_i et nous pouvons trigonaliser les A_i simultanément sur chacun des $F_\lambda(A_0)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

ThoUWQBooCvutTO

Théorème 14.108 (Lie-Kolchin[450, 460])**.**
Tout sous-groupe connexe et résoluble[60] *de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *est conjugué à un groupe de matrices triangulaires.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Nous faisons une récurrence sur n.

(1) **Si sous-espace non trivial stable par G** Nous commençons par voir ce qu'il se passe si il existe un sous-espace vectoriel non trivial V de $\mathbb{C}^n$ stabilisé par G. Pour cela nous considérons une base de $\mathbb{C}^n$ dont les premiers éléments forment une base de V (base incomplète, théorème 6.15). Les éléments de G s'écrivent, dans cette base,

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}. \tag{14.239}$$

EqGOKTooEaGACG

Les matrices g_1 et g_2 sont carrées. Nous considérons alors l'application ψ définie par

$$\begin{aligned}\psi\colon G &\to \mathrm{GL}(V)\\ g &\mapsto g_1.\end{aligned} \tag{14.240}$$

Cela est un morphisme de groupes parce que

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 & * \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1h_1 & * \\ 0 & g_2h_2 \end{pmatrix}, \tag{14.241}$$

de telle sorte que $\psi(gh)=\psi(g)\psi(h)$.

Le groupe $\psi(G)$ est connexe et résoluble. En effet $\psi(G)$ est connexe en tant qu'image d'un connexe par une application continue (lemme 9.296). Et il est résoluble en tant qu'image d'un groupe résoluble par un morphisme par la proposition 5.12.

Nous avons prouvé que $\psi(G)$ est un sous-groupe résoluble et connexe de $\mathrm{GL}(V)$. Vu que V est de dimension strictement plus petite que $\mathbb{C}^n$, nous utilisons l'hypothèse de récurrence et nous déduisons que $\psi(G)$ est conjugué à un groupe de matrices triangulaire, c'est-à-dire qu'il existe une base de V dans laquelle toutes les matrices g_1 (avec $g\in G$) sont triangulaires supérieures.

On fait de même avec l'application $g\mapsto g_2$, ce qui donne une base du supplémentaire de V dans laquelle les matrices g_2 sont triangulaires supérieures.

En couplant ces deux bases, nous obtenons une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle toutes les matrices (14.239) (c'est-à-dire toutes les matrices de G) sont triangulaires supérieures.

(2) **Sinon** Nous supposons à présent que $\mathbb{C}^n$ n'a pas de sous-espaces non triviaux stables sous G. Nous posons $m=\min\{k \text{ tel que } D^k(G)=\{e\}\}$, qui existe parce que G et résoluble et que sa suite dérivée termine sur e (proposition 5.11).

(3) **Si $m=1$** Si $m=1$ alors G est abélien et il existe une base de G dans laquelle toutes les matrices de G sont triangulaires (lemme 14.107). Le premier vecteur d'une telle base serait stable par G, mais comme nous avons supposé qu'il n'y avait pas de sous-espaces non triviaux stabilisés par G, ce vecteur tout seul forme un sous-espace trivial, c'est-à-dire que $n=1$. Dans ce cas, le théorème est démontré.

(4) **Si $m>1$** Nous devons maintenant traiter le cas où $m>1$. Nous posons $H=D^{m-1}(G)$; cela est un sous-groupe normal et abélien de G. Encore une fois le résultat de trigonalisation simultanée 14.107

[59] Définition 10.260.
[60] Définition 5.9.

donne une base dans laquelle tous les éléments de H sont triangulaires. En particulier le premier élément de cette base est un vecteur propre commun à toutes les matrices de H.

Soit V le sous-espace engendré par tous les vecteurs propres communs de H. Nous venons de voir que V n'est pas vide. Nous allons montrer que V est stable par G. Soient $h \in H$, $v \in V$ et $g \in G$:

$$h\big(g(v)\big) = g\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H}(v) = g(\lambda v) = \lambda g(v) \tag{14.242}$$

parce que v est vecteur propre de $g^{-1}hg$. Ce que le calcul (14.242) montre est que $g(v)$ est vecteur propre de h pour la valeur propre λ. Donc $g(v) \in V$ et V est stabilisé par G. Mais comme il n'existe pas d'espaces non triviaux stabilisés par G, nous en déduisons que $V = \mathbb{C}^n$. Donc tous les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont vecteurs propres communs de H. Autrement dit on a une base de diagonalisation simultanée de H.

(5) H **est dans le centre de** G

Montrons à présent que H est dans le centre de G, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ et $h \in H$ il faut $ghg^{-1} = h$. D'abord ghg^{-1} est une matrice diagonale (parce qu'elle est dans H) ayant les mêmes valeurs propres que h. En effet si λ est valeur propre de ghg^{-1} pour le vecteur propre v, alors

$$(ghg^{-1})(v) = \lambda v \tag{14.243a}$$
$$h\big(g^{-1}v\big) = \lambda\big(g^{-1}v\big), \tag{14.243b}$$

c'est-à-dire que λ est également valeur propre de h, pour le vecteur propre $g^{-1}v$. Mais comme h a un nombre fini de valeurs propres, il n'y a qu'un nombre fini de matrices diagonales ayant les mêmes valeurs propres que h. L'ensemble $\mathbf{Ad}(G)h$ est donc un ensemble fini. D'autre part, l'application $g \mapsto g^{-1}hg$ est continue, et G est connexe, donc l'ensemble $\mathbf{Ad}(G)h$ est connexe. Un ensemble fini et connexe dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est nécessairement réduit à un seul point. Cela prouve que $ghg^{-1} = h$ pour tout $g \in G$ et $h \in H$.

(6) **Espaces propres stables pour tout** G

Soit $h \in H$ et W un espace propre de h (ça existe non vide, parce que H est triangularisé, voir plus haut). Alors nous allons prouver que W est stable pour tous les éléments de G. En effet si $w \in W$ avec $h(w) = \lambda w$ alors en permutant g et h,

$$hg(w) = g(hw) = \lambda g(w), \tag{14.244}$$

donc $g(w)$ est aussi vecteur propre de h pour la valeurs propre λ, c'est-à-dire que $g(w) \in W$. Comme nous supposons que $\mathbb{C}^n$ n'a pas d'espaces invariants non triviaux, nous devons conclure que $W = \mathbb{C}^n$, c'est-à-dire que H est composé d'homothéties. C'est-à-dire que pour tout $h \in H$ nous avons $h = \lambda_h \mathbb{1}$.

(7) **Contradiction sur la minimalité de** m

Les éléments d'un groupe dérivé sont de déterminant 1 parce que $\det(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = 1$. Par conséquent pour tout h, le nombre λ_h est une racine n^{e} de l'unité. Vu qu'il n'y a qu'une quantité finie de racines n^{e} de l'unité, le groupe H est fini et connexe et donc une fois de plus, réduit à un élément, c'est-à-dire $H = \{e\}$. Cela contredit la minimalité de m et donc produit une contradiction. Nous devons donc avoir $m = 1$.

(8) **Conclusion** Nous avons vu que si $\mathbb{C}^n$ avait un sous-espace non trivial fixé par G alors le théorème était démontré. Par ailleurs si $\mathbb{C}^n$ n'a pas un tel sous-espace, soit $m = 1$ (et alors le théorème est également prouvé), soit $m > 1$ et alors on a une contradiction.

Bref, le théorème est prouvé sous peine de contradiction.

□

Remarque 14.109.
Le lemme mentionne le fait que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de T. Mais attention : ceci ne dit rien au niveau des multiplicités géométriques. Un nombre peut être cinq fois sur la diagonale de T alors que l'espace propre correspondant pour A n'est que de dimension 1. Exemple : la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.245}$$

a deux 1 sur la diagonale. Le nombre 1 est bien une valeur propre de A, mais le système

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{14.246}$$

donne $y=0$ et donc un espace propre de dimension seulement 1.

RemXFZTooXkGzQg

Remarque 14.110.
Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos (comme $\mathbb{C}$ par exemple), alors tous les polynômes sont scindés et toutes les matrices sont trigonalisables[61]. Un exemple un peu simple de cela est la matrice

$$u=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{14.247}$$

Le polynôme caractéristique est $\chi_u(X)=X^2+1$ et les valeurs propres sont $\pm i$. Il est vite vu que dans la base

$$\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\} \tag{14.248}$$

de $\mathbb{C}^2$, la matrice u se note $\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$.

RemREOSooGEDJWX

Remarque 14.111.
Cela nous donne une autre façon de prouver qu'une matrice nilpotente de $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ ou $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est trigonalisable[461]. D'abord dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$, toutes les matrices sont trigonalisables[62], et les valeurs propres arrivent sur la diagonale. Mais comme les valeurs propres d'une matrice nilpotente valent zéro, elle est triangulaire stricte. Par ailleurs, son polynôme caractéristique est alors X^n.

Ensuite si $u\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ nous pouvons voir u comme une matrice dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et y calculer son polynôme caractéristique qui sera tout de même X^n. Ce polynôme étant scindé, la proposition 14.100 nous assure que u est trigonalisable. Une fois de plus, les valeurs propres étant sur la diagonale, elle est triangulaire supérieure stricte.

CorUNZooAZULXT

Corolaire 14.112.
Le polynôme caractéristique[63] *sur $\mathbb{C}$ d'une matrice s'écrit sous la forme*

$$\chi_A(X)=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i} \tag{14.249}$$

où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de A et m_i sont les multiplicités correspondantes.

Démonstration. Le lemme 14.102 nous donne l'existence d'une base de trigonalisation ; dans cette base les valeurs propres de A sont sur la diagonale et nous avons

$$\chi_A(X)=\det(A-X\mathbb{1})=\det\begin{pmatrix}X-\lambda_1&*&*\\0&\ddots&*\\0&0&X-\lambda_r\end{pmatrix}, \tag{14.250}$$

qui vaut bien le produit annoncé. □

CORooTPDHooXazTuZ

Corolaire 14.113.
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et $k\in\mathbb{N}$ alors

$$\operatorname{Spec}(A^k)=\{\lambda^k \text{ tel que } \lambda\in\operatorname{Spec}(A)\}. \tag{14.251}$$

Démonstration. Par le lemme 14.102 nous avons une matrice unitaire U et une triangulaire T telles que $A=UTU^{-1}$. En passant à la puissance k nous avons aussi

$$A^k=UT^kU^{-1}. \tag{14.252}$$

Donc le spectre de A^k est celui de T^k (lemme 14.106 et le fait qu'une puissance d'une matrice triangulaire est encore triangulaire). Or les éléments diagonaux de T^k sont les puissances k^{e} des éléments diagonaux de T, qui sont les valeurs propres de A. □

Pour le cas complexe, c'est le lemme 12.41 et le théorème 14.104.

[61] La proposition 14.100 montre cela, et le lemme de Schur complexe 14.102 va un peu plus loin, et précise que la trigonalisation peut être obtenue par une matrice unitaire.
[62] Parce que le polynôme caractéristique est scindé, voir la proposition 14.100.
[63] Définition 10.109.

14.11 Matrices, spectre et norme

Le lien entre la norme opérateur d'une matrice et son spectre sera entre autres utilisé pour étudier le conditionnement de problèmes numériques. Voir la définition 36.107 et par exemple son lien avec la résolution numérique de systèmes linéaires dans la proposition 36.112.

PROPooKLFKooSVnDzr

Proposition 14.114 ([391]).
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ de rayon spectral $\rho(A)$. Soit une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et la norme opérateur correspondante. Alors

$$\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k} \tag{14.253}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ un couple vecteur-valeur propre. Nous avons $\|Av\| = |\lambda|\|v\|$ et aussi

$$|\lambda|^k\|v\| = \|\lambda^k v\| = \|A^k v\| \leqslant \|A^k\|\|v\|. \tag{14.254}$$

La dernière inégalité est due au fait que nous avons choisi sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ la norme subordonnée à celle choisie sur $\mathbb{C}^n$, via le lemme 12.90. Nous simplifions par $\|v\|$ et obtenons $|\lambda| \leqslant \|A^k\|^{1/k}$. Étant donné que $\rho(A)$ est la maximum de tous les λ possibles, la majoration passe au maximum :

$$\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}. \tag{14.255}$$

□

PROPooJGNFooEwtNmJ

Proposition 14.115.
Soient deux espaces vectoriels normés E et V. Soient des applications continues $f,g\colon E \to \mathrm{End}(V)$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon E &\to \mathrm{End}(V)\\ x &\mapsto f(x)\circ g(x)\end{aligned} \tag{14.256}$$

est continue.

Démonstration. Soit une suite $x_k \xrightarrow{E} x$. Nous devons montrer que $\psi(x_k) \xrightarrow{\mathrm{End}(V)} \psi(x)$. Pour cela nous utilisons le lemme 12.97 qui indique que la norme opérateur est une norme d'algèbre. Nous avons :

$$\begin{aligned}\|\psi(x_k)-\psi(x)\| &= \|f(x_k)\circ g(x_k) - f(x)\circ g(x)\| && \text{(14.257a)}\\ &\leqslant \|f(x_k)\circ g(x_k) - f(x_k)\circ g(x)\| + \|f(x_k)\circ g(x) - f(x)\circ g(x)\| && \text{(14.257b)}\\ &= \|f(x_k)\circ\big(g(x_k)-g(x)\big)\| + \|\big(f(x_k)-f(x)\big)\circ g(x)\| && \text{(14.257c)}\\ &\leqslant \|f(x_k)\|\|g(x_k)-g(x)\| + \|f(x_k)-f(x)\|\|g(x)\|. && \text{(14.257d)}\end{aligned}$$

Pour $k\to\infty$ nous avons $\|f(x_k)\| \to \|f(x)\|$, $\|f(x_k)-f(x)\| \to 0$ (parce que f est continue) et similaire avec g. Donc le tout tend vers zéro. □

14.11.1 Rayon spectral

La chose impressionnante dans la proposition suivante est que $\rho(A)$ est défini indépendamment du choix de la norme sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ ou sur $\mathbb{K}$. Lorsque nous écrivons $\|A\|$, nous disons implicitement qu'une norme a été choisie sur $\mathbb{K}$, et que nous avons pris la norme subordonnée sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$.

PROPooWZJBooTPLSZp

Proposition 14.116 ([462]).
Soit A une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$. Alors

$$\rho(A) \leqslant \|A\|. \tag{14.258}$$

Démonstration. Nous devons séparer les cas, suivant que le corps de base soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) **Pour $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$** Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda|$ soit la plus grande. Nous avons donc $\rho(A) = |\lambda|$. Soit un vecteur propre $u \in \mathbb{C}^n$ pour la valeur propre λ. En prenant la norme sur l'égalité $Au = \lambda u$, et en utilisant le lemme 12.90,

$$|\lambda|\|u\| = \|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|. \tag{14.259}$$

Donc $|\lambda| \leqslant \|A\|$ et $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

(2) **Pour $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$**

L'endroit qui coince dans le raisonnement effectué pour $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est que, certes $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ possède une plus grande valeur propre en module et qu'un vecteur propre lui est associé. Mais ce vecteur propre est, à priori, dans $\mathbb{C}^n$, et non dans $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons donc écrire $Au = \lambda u$, mais pas $\|Au\| = |\lambda|\|u\|$ parce que nous ne savons pas quelle norme prendre sur $\mathbb{C}^n$.

Il n'est pas certain que nous ayons une norme sur $\mathbb{C}^n$ qui se réduit sur $\mathbb{R}^n$ à celle choisie implicitement dans l'énoncé. Nous allons donc ruser un peu.

Soit une norme N sur $\mathbb{C}^n$[64]. Nous nommons également N la norme subordonnée sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et la norme restreinte sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Vu que N est une norme sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et que ce dernier est de dimension finie, le théorème 12.70 nous indique que N est équivalente à $\|.\|$. Il existe donc $C > 0$ tel que

$$N(B) \leqslant C\|B\| \tag{14.260}$$

EQooBNWMooNgaMxC

pour tout $B \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Nous avons maintenant

$$\rho(A)^m \leqslant N(A^m) \leqslant C\|A^m\| \leqslant C\|A\|^m. \tag{14.261}$$

Justifications

- Par la proposition 14.114.
- Parce que $A^m \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et la relation (14.260).
- Par itération du lemme 12.97.

Nous avons donc $\rho(A) \leqslant C^{1/m}\|A\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. En prenant $m \to \infty$ et en tenant compte de $C^{1/m} \to 1$ nous trouvons $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

□

LEMooGBLJooCPvxNl

Lemme 14.117 ([462]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une norme algébrique sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ telle que

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon. \tag{14.262}$$

Démonstration. Soit par le lemme 14.102 une matrice inversible U telle que $T = UAU^{-1}$ soit triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale. Notons que même si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, les matrices U et T sont, à priori, complexes.

Soit $s \in \mathbb{R}$ ainsi que les matrices

$$D_s = \operatorname{diag}(1, s^{-1}, s^{-2}, \dots, s^{1-n}) \tag{14.263}$$

et $T_s = D_s T D_s^{-1}$. Nous fixerons un choix de s plus tard.

La norme que nous considérons est :

$$N(B) = \|(D_sU)B(D_sU)^{-1}\|_\infty \tag{14.264}$$

où $\|.\|_\infty$ est la norme sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ dont nous avons déjà parlé dans l'exemple 12.85. Cela est bien une norme parce que

- Nous avons $\|B\|_\infty = 0$ si et seulement si $B = 0$, et comme (D_sU) est inversible, nous avons $(D_sU)B(D_sU)^{-1} = 0$ si et seulement si $B = 0$.
- $N(\lambda B) = |\lambda|N(B)$.
- Pour l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} N(B+C) &= \|(D_sU)B(D_sU)^{-1} + (D_sU)C(D_sU)^{-1}\|_\infty && \text{(14.265a)}\\ &\leqslant \|(D_sU)B(D_sU)^{-1}\|_\infty + \|(D_sU)C(D_sU)^{-1}\|_\infty && \text{(14.265b)}\\ &= N(B) + N(C). && \text{(14.265c)} \end{aligned}$$

[64] Il y en a plein, par exemple celle du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_k x_k \bar{y}_k$.

En ce qui concerne la matrice A elle-même, nous avons

$$N(A) = \|(D_sU)A(D_sU)^{-1}\|_\infty = \|T_s\|_\infty. \tag{14.266}$$

C'est le moment de se demander comment se présente la matrice T_s. En tenant compte du fait que $(D_s)_{ik} = \delta_{ik}s^{1-i}$ nous avons

$$(T_s)_{ij} = \sum_{kl}(D_s)_{ik}T_{kl}(D_s^{-1})_{lj} = T_{ij}s^{j-i}. \tag{14.267}$$

La matrice T est encore triangulaire supérieure avec les valeurs propres de A sur la diagonale. Les éléments au-dessus de la diagonale sont tous multipliés par au moins s. Il est donc possible de choisir s suffisamment petit pour avoir[65]

$$\sum_{j=i+1}^{n}|(T_s)_{ij}| < \epsilon \tag{14.268}$$

EQooSIEIocTWAXQD

Avec ce choix, la formule 12.235 donne

$$N(T_s) \leqslant \max_i \sum_k |(T_s)_{ik}| \leqslant \epsilon + \rho(A). \tag{14.269}$$

En effet le ϵ vient de la somme sur toute la ligne sauf la diagonale (c'est-à-dire la partie $k \neq i$) et du choix (14.268) pour s. Le $\rho(A)$ provient du dernier terme de la somme (le terme sur la diagonale) qui est une valeur propre de A, donc majorable par $\rho(A)$.

Nous devons encore prouver que N est une norme algébrique. Pour cela nous allons montrer qu'elle est subordonnée à la norme

$$\begin{aligned} n\colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{R}^+ \\ v &\mapsto \|(UD_s)v\|_\infty. \end{aligned} \tag{14.270}$$

Cela sera suffisant pour avoir une norme algébrique par le lemme 12.97. La norme n sur $\mathbb{K}^n$ produit la norme suivante sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$:

$$n(B) = \sup_{v\neq 0}\frac{n(B)}{n(v)} = \sup_{v\neq 0}\frac{\|(UD_s)Bv\|_\infty}{\|UD_sv\|_\infty}. \tag{14.271}$$

Puisque UD_s est inversible, nous pouvons effectuer le changement de variables $v \mapsto (UD_s)^{-1}v$ pour écrire

$$n(B) = \sup_{v\neq 0}\frac{\|(UD_s)B(UD_s)^{-1}v\|_\infty}{\|(UD_s)(UD_s)^{-1}v\|_\infty} = \sup_{v\neq 0}\frac{\|(UD_s)B(UD_s)^{-1}v\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \|(UD_s)B(UD_s)^{-1}\|_\infty = N(B). \tag{14.272}$$

□

PROPooYPLGooWKLbPA

Proposition 14.118.
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ alors $\rho(A)^m = \rho(A^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La matrice A peut être vue dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et nous pouvons lui appliquer le corolaire 14.113 :

$$\mathrm{Spec}(A^k) = \{\lambda^k \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}. \tag{14.273}$$

EQooJJIYooDRacju

À noter qu'il n'y a pas de magie : le spectre de la matrice réelle A est déjà défini en voyant A comme matrice complexe. Le spectre dont il est question dans (14.273) est bien celui dont on parle dans la définition du rayon spectral.

Nous avons ensuite :

$$\rho(A^k) = \max\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A^k)\} \tag{14.274a}$$
$$= \max\{|\lambda^k| \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} \tag{14.274b}$$
$$= \max\{|\lambda|^k \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} \tag{14.274c}$$
$$= \rho(A)^k. \tag{14.274d}$$

□

[65] Il me semble qu'il manque un module dans [462].

PROPooXEQLooHvzVVm

Proposition 14.119.
Soient des espaces vectoriels normés V de dimension n et W de dimension m sur $\mathbb{K}$ (corps normé). Nous considérons une base $\{e_s\}_{s=1,\dots,n}$ de V et $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m}$ de W.

Alors l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathbb{M}(n\times m,\mathbb{K}) &\to \mathcal{L}(V,W)\\ \psi(A)v &= \sum_{s\alpha} A_{s\alpha}v_s f_\alpha\end{aligned} \tag{14.275}$$

est un isomorphisme d'espaces topologiques.

Pour rappel, la topologie sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ est donnée par la définition 11.34.

Démonstration. Nous savons déjà que ψ est une bijection. De plus, elle est linéaire et donc continue par la proposition 12.290. En ce qui concerne son inverse, c'est également une application linéaire (lemme 6.40) ; elle est alors également continue. □

PROPooDRHMooYzXbkl

Proposition 14.120.
Soit un espace vectoriel normé V de dimension finie. Soit une suite d'opérateurs $T_n \in \mathrm{End}(V)$. Si $\{e_i\}$ est une base de V et si $T_n(e_i) \xrightarrow{V} e_i$ pour tout i, alors $T_n \xrightarrow{\mathrm{End}(V)} \mathrm{Id}$.

Démonstration. Nous utilisons l'application $\psi\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{End}(V)$ définie en 6.78. Elle nous permet d'écrire

$$T_n(x) = \sum_{kl} \psi^{-1}(T_i)_{kl} x_l e_k, \tag{14.276}$$

que nous allons particulariser à $x = e_j$. Nous avons

$$\begin{aligned}e_j &= \lim_{n\to\infty} T_n(e_j) && (14.277a)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{kl} \psi^{-1}(T_n)_{kl}\delta_{jl}e_k && (14.277b)\\ &= \sum_k \big(\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n)_{kj}\big)e_k && (14.277c)\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de e_j, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n)_{kj} = \delta_{kj}. \tag{14.278}$$

Pour chaque k et l, à gauche nous avons une limite dans $\mathbb{K}$. Vue la topologie sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$[66], nous pouvons écrire cela comme une limite dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$:

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n) = \mathbb{1}. \tag{14.279}$$

Nous savons que ψ^{-1} est continue (proposition 14.119) de telle sorte que nous pouvons la commuter avec la limite :

$$\mathbb{1} = \lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n) = \psi^{-1}\big(\lim_{n\to\infty} T_n\big). \tag{14.280}$$

Appliquant maintenant ψ des deux côtés, $\psi(\mathbb{1}) = \mathrm{Id}$ et

$$\mathrm{Id} = \lim_{n\to\infty} T_n. \tag{14.281}$$

□

Le point important de la définition 12.331 est la continuité. En dimension infinie, la continuité n'est par exemple pas équivalente à l'inversibilité (penser à $e_k \mapsto ke_k$).

Si V est un espace vectoriel normé, nous avons déjà défini son dual topologique V' comme étant l'ensemble des applications linéaires continues $V \to \mathbb{C}$ ou $V \to \mathbb{R}$ selon le corps de base de V. C'est la définition 6.143.

Proposition 14.121.
Soient un espace vectoriel normé V et un élément $v \in V$ vérifiant $\|v\| = 1$. Il existe une forme $\varphi \in V'$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(v) = 1$.

[66] Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes (théorème 12.70). Sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, nous avons convenu dans la définition 11.34 de considérer la norme maximum.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de la base incomplète 6.28. Pour cela nous considérons $I = V$ et la partie clairement génératrice $G = \{e_i = i\}_{i\in I}$ (si vous avez bien suivi, $G = V$ en fait ; rien de bien profond). Nous considérons ensuite $I_0 = \{v\}$. Le théorème de la base incomplète nous donne l'existence de I_1 tel que $I_0 \subset I_I \subset I$ et tel que $B = \{e_i\}_{i\in I_1}$ est une base.

Tout cela pour dire que $B = \{e_i\}_{i\in I_1}$ est une base contenant v. Nous allons aussi éventuellement redéfinir la norme de e_i pour avoir $\|e_i\| = 1$. Cette renormalisation n'affecte pas le fait que $v \in B$.

Nous passons maintenant à la définition de $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$. Pour $x \in V$ nous commençons par écrire

$$x = \sum_{j\in J} x_j e_j \tag{14.282}$$

et nous posons

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_v & \text{si } v \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.283}$$

Cette définition a un sens par la partie unicité de la proposition 6.8 de décomposition d'un élément dans une base.

Nous devons calculer la norme de φ. Par la proposition 12.79 nous avons

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|. \tag{14.284}$$

EQooEFLLooQWPScv

Avec $x = v$ nous avons $\varphi(x) = 1$ et donc $\|\varphi\| \geqslant 1$.

Nous devons encore montrer que $\|\varphi\| \leqslant 1$. Un élément $x \in V$ s'écrit toujours sous la forme

$$x = \sum_{i\in J} x_j e_j \tag{14.285}$$

pour un certain J fini dans I_1 et pour certains $x_j \in \mathbb{K}$. Pour un tel x nous avons $\varphi(x) = x_v$. Si $|\varphi(x)| \geqslant 1$, alors $|x_v| \geqslant 1$, mais alors

$$\|x\| \leqslant \sum_{j\in J} |x_j|\|e_j\| = \sum_{j\in J} |x_j| \geqslant |x_v| > 1, \tag{14.286}$$

ce qui fait que ce x ne participe pas au supremum (14.284).

Notons que φ est continue (et donc bien dans V') parce qu'elle est bornée (proposition 12.98). □

14.11.2 Normes de matrices et d'applications linéaires

THOooNDQSooOUWQrK

Théorème 14.122 (Norme matricielle et rayon spectral[463])**.**
La norme 2 d'une matrice réelle est liée au rayon spectral de la façon suivante :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}. \tag{14.287}$$

Démonstration. La matrice A^tA est réelle et symétrique ; nous pouvons lui appliquer le théorème spectral 10.228. Il existe une base orthonormée $\{e_i\}$ de vecteurs propres de A^tA. Nous notons λ_i la valeur propre de e_i. La définition de la norme opérateur donne

$$\|A\|^2 = \sum_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sum_{\|x\|=1} (Ax)\cdot(Ax) = \sum_{\|x\|=1} x\cdot A^tA. \tag{14.288}$$

Par ailleurs, soit $x \in \mathbb{R}^n$; nous le décomposons dans la base $\{e_i\}$: $x = \sum_i x_i e_i$. Nous avons

$$A^tAx = \sum_i x_i(A^tAe_i) = \sum_i x_i\lambda_i e_i, \tag{14.289}$$

et donc

$$\begin{aligned} Ax\cdot Ax &= (\sum_j x_i e_j)\cdot(\sum_i x_i\lambda_i e_i) && \text{(14.290a)}\\ &= \sum_i x_i^2\lambda_i && \text{(14.290b)}\\ &\leqslant (\max_i \lambda_i)\|x\|^2 && \text{(14.290c)}\\ &= \rho(A^tA)\|x\|^2. && \text{(14.290d)} \end{aligned}$$

Donc $\|A\|^2 = \sum_{\|x\|=1} Ax \cdot Ax \leqslant \rho(A^tA)$.

Pour avoir l'inégalité dans l'autre sens, nous considérons u, le vecteur parmi les e_i qui a la plus grande valeur propre. Autrement dit $Au = (\max_i \lambda_i)u = \rho(A^tA)u$. Nous avons $\|u\| = 1$ et

$$\|Au\|^2 = A^tAu \cdot u = \lambda = \rho(A^tA). \tag{14.291}$$

Donc $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geqslant \|Au\|^2 = \rho(A^tA)$. □

LEMooNESTooVvUEOv

Lemme 14.123.
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ qui est symétrique, strictement définie positive. Soient λ_{min} et λ_{max} les plus petites et plus grandes valeurs propres. Alors

$$\|A\|_2 = \lambda_{max} \qquad et \qquad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}}. \tag{14.292a}$$

Démonstration. Soient les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ formant une base orthonormée de vecteurs propres[67] de A. Nous notons v_{max} celui de λ_{max}. Nous avons :

$$\|A\|_2 \geqslant \|Av_{max}\| = |\lambda_{max}|\|v_{max}\| = |\lambda_{max}| = \lambda_{max}. \tag{14.293}$$

Voilà l'inégalité dans un sens. Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $x = \sum_i x_i v_i$ avec $\|x\|_2 = 1$. Alors

$$\|Ax\| = \left| \sum_i x_i \lambda_i v_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_i x_i^2 \lambda_i^2} \leqslant \lambda_{max} \sqrt{\sum_i x_i^2} = \lambda_{max}. \tag{14.294}$$

En ce qui concerne l'affirmation pour la norme de A^{-1}, il suffit de remarquer que ses valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de A. □

LEMooCSBVooZzqxqg

Lemme 14.124 ([1, 464])**.**
Soit une matrice diagonale $D \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ dont nous notons $\lambda_i \in \mathbb{C}$ les éléments diagonaux. Alors la norme opérateur[68] de D est donnée par

$$\|D\|_2 = \max_i \{|\lambda_i|\}. \tag{14.295}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Le compact** Puisque la partie $\{x \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \|x\|_2 = 1\}$ est compacte, nous pouvons utiliser un maximum au lieu d'un supremum dans la définition de la norme opérateur (théorème de Weierstrass 9.215.).

(2) **Notations pour $\mathbb{C}^n$** Pour se mettre d'accord sur les notations, si $x \in \mathbb{C}^n$, alors $x = \sum_i x_i e_i$ où $e_1 \in \mathbb{C}^n$ est le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$. C'est un vecteur de base de $\mathbb{C}^n$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Et d'ailleurs $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

(3) **Norme dans $\mathbb{C}^n$** Lorsque A est un opérateur sur $\mathbb{C}^n$, nous avons

$$\|Ax\|_2 = \left(\sum_i |(Ax)_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_i \left| \sum_j A_{ij} x_j \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{14.296}$$

Nous avons utilisé les conventions (6.100).

(4) **Le calcul** Si c'est bon pour vous, je me lance dans le calcul :

$$\|D\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 \tag{14.297a}$$

$$= \max_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \tag{14.297b}$$

$$\leqslant \max_{\|x\|_2=1} \max_i |\lambda_i| \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}}_{=\|x\|_2} = \max_i |\lambda_i|. \tag{14.297c}$$

[67] Possible par le théorème spectral 10.228.

[68] Norme opérateur, définition 12.76. La notation $\|D\|_2$ signifie la norme opérateur de $D : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ où l'on a mis la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire la norme de la définition 12.38.

L'inégalité $\|D\|_2 \leqslant \max_i |\lambda_i|$ est prouvée. Nous démontrons à présent l'inégalité dans l'autre sens. Appliquons D au vecteur de base e_i : $De_i = \lambda_i e_i$. Donc

$$\|D\|_2 \geqslant \|De_i\|_2 = |\lambda_i e_i| = |\lambda_i|. \tag{14.298}$$

Cela étant valable pour tout i, nous avons $\|D\|_2 \geqslant \max_i |\lambda_i|$. □

PropMAQoKAg

Proposition 14.125.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\mapsto \mathrm{Tr}(X^tY) \end{aligned} \tag{14.299}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Il faut vérifier la définition 10.163.

- La bilinéarité est la linéarité de la trace.
- La symétrie de f est le fait que $\mathrm{Tr}(A^t) = \mathrm{Tr}(A)$.
- L'application f est définie positive parce que si $X \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, alors X^tX est symétrique définie positive, donc diagonalisable avec des nombres positifs sur la diagonale. La trace étant un invariant de similitude, nous avons $f(X,X) = \mathrm{Tr}(X^tX) \geqslant 0$. De plus si $\mathrm{Tr}(X^tX) = 0$, alors $X^tX = 0$ (pour la même raison de diagonalisation). Mais alors $\|Xu\| = 0$ pour tout $u \in E$, ce qui signifie que $X = 0$.

□

EXooHDCWooHragNA

Exemple 14.126.
Soient $m = n$, un point λ dans $\mathbb{R}$ et T_λ l'application linéaire définie par $T_\lambda(x) = \lambda x$. La norme de T_λ est alors

$$\|T_\lambda\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} \|\lambda x\|_{\mathbb{R}^n} = |\lambda|.$$

Notez que T_λ n'est rien d'autre que l'homothétie de rapport λ dans $\mathbb{R}^m$. △

EXooVXENooZbtBNi

Exemple 14.127.
Toutes les isométries de $\mathbb{R}^n$ ont norme 1. En effet si T est une isométrie, $\|Tx\| = \|x\|$. En ce qui concerne la norme de T nous avons alors

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1. \tag{14.300}$$

△

LEMooNWQWooBrpXgn

Lemme 14.128.
Soit $b \in \mathbb{R}^m$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} T_b\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto b \cdot x. \end{aligned} \tag{14.301}$$

(1) L'application T_b est linéaire.

(2) Sa norme est $\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \|b\|_{\mathbb{R}^m}$.

Démonstration. La norme de T_b satisfait les inégalités suivantes

$$\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant 1} |b\cdot x| \leqslant \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant 1} \|b\|_{\mathbb{R}^m}\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant \|b\|_{\mathbb{R}^m},$$

$$\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant 1} \|b\cdot x\|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \left| b \cdot \frac{b}{\|b|} \right| = \frac{\|b\|^2}{\|b\|} = \|b\|_{\mathbb{R}^n},$$

donc $\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \|b\|_{\mathbb{R}^n}$. □

Proposition 14.129.
Une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est continue.

Démonstration. Soit x un point dans $\mathbb{R}^m$. Nous devons vérifier l'égalité

$$\lim_{h\to 0_m} T(x+h) = T(x). \tag{14.302}$$

Cela revient à prouver que $\lim_{h\to 0_m} T(h) = 0$, parce que $T(x+h) = T(x) + T(h)$. Nous pouvons toujours majorer $\|T(h)\|_n$ par $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}\|h\|_{\mathbb{R}^m}$ (lemme 12.90). Quand h s'approche de 0_m sa norme $\|h\|_m$ tend vers 0, ce que nous permet de conclure parce que nous savons que de toutes façons, $\|T\|_{\mathcal{L}}$ est fini. □

Note : dans un espace de dimension infinie, la linéarité ne suffit pas pour avoir la continuité : il faut de plus être borné (ce que sont toutes les applications linéaires $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$). Voir la proposition 12.98.

PROPooHXJAooGaDtme

Proposition 14.130 ([1]).
Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. La suite[69] *$(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée*[70] *si et seulement si A est diagonalisable*[71] *et* $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathrm{S}^1$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que A est diagonalisable et que $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathrm{S}^1$. Nous nommons λ_i ses valeurs propres. Par hypothèse $\lambda_i \in \mathrm{S}^1$. Nous avons donc $|\lambda_i| = 1$ et, par la proposition 11.103(7), nous avons $|\lambda_i|^k = 1$.

La proposition 10.217 permet de considérer une matrice inversible Q telle que $A = Q^{-1}DQ$ où D est la matrice diagonale $D_{ii} = \lambda_i$. Nous avons donc aussi

$$A^k = Q^{-1}D^kQ. \tag{14.303}$$

La matrice D^k est diagonale et $D^k_{ii} = \lambda_i^k$.

(1) **Pour $k \geqslant 0$** La norme matricielle étant une norme d'algèbre[72],

$$\|A^k\|_2 = \|Q^{-1}D^kQ\|_2 \leqslant \|Q^{-1}\|_2\|D^k\|_2\|Q\|_2. \tag{14.304}$$

En ce qui concerne la norme $\|D\|_2$, nous avons le lemme 14.124 qui nous annonce que $\|D\|_2 = \max_i\{|\lambda_i|\} = 1$. Dans notre cas, nous avons donc $\|D\|_2 = 1$ et

$$\|A^k\|_2 \leqslant \|Q^{-1}\|_2\|Q\|_2. \tag{14.305}$$

Autrement dit, la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée en norme par le nombre $\|Q^{-1}\|_2\|Q\|_2$.

(2) **Pour $k \leqslant 0$** Alors il suffit de poser $B = A^{-1}$. La matrice B est autant diagonalisable que A et le même raisonnement s'applique : il existe une matrice inversible P telle que

$$\|B^k\|_2 \leqslant \|P^{-1}\|_2\|P\|_2. \tag{14.306}$$

(3) **Pour tous les k** La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc majorée par le maximum entre $\|P^{-1}\|_2\|P\|$ et $\|Q^{-1}\|_2\|Q\|$.

Dans l'autre sens, maintenant.

Puisque nous travaillons sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé et la réduction de Jordan[73] s'applique. Nous considérons une matrice inversible Q telle que $A = Q^{-1}MQ$ avec

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbb{1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s\mathbb{1} + N_s \end{pmatrix}, \tag{14.307}$$

où les N_i sont nilpotents. Notez qu'ici les « $\mathbb{1}$ » sont de différentes tailles.

(1) **Juste un bloc** Nous considérons un bloc de Jordan $\lambda\mathbb{1} + N$. Nous supposons que la suite $(\lambda\mathbb{1} + N)^k$ est bornée, et nous allons montrer que $|\lambda| = 1$ et $N = 0$.

Pour que $k \mapsto (\lambda\mathbb{1} + N)^k$ soit bornée, il faut que $\|\lambda\mathbb{1} + N\| \leqslant 1$. Vu que N est nilpotente, il existe un vecteur u tel que $Nu = 0$. Nous avons

$$\|\lambda\mathbb{1} + N\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda\mathbb{1} + N)x\| \geqslant \|(\lambda\mathbb{1} + N)u\| = |\lambda|. \tag{14.308}$$

[69] Oui, c'est avec $k \in \mathbb{Z}$. Vu que A est dans GL, elle est inversible, donc pas de soucis à considérer A^{-1}.
[70] Nous considérons sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ la norme opérateur dérivant de la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ donnée par la proposition 12.37.
[71] Définition 10.215.
[72] Lemme 12.97.
[73] Théorème 10.295.

Donc $|\lambda| \leqslant 1$ est obligatoire pour que $\|\lambda\mathbb{1} + N\|^k$reste bornée. Nous avons donc deux possibilités : $|\lambda| < 1$ et $|\lambda| = 1$.

Supposons que $|\lambda| = 1$. Si N n'est pas nulle[74], nous pouvons considérer un vecteur u tel que $Nu \neq 0$ et $N^2u = 0$. En utilisant la formule du binôme,

$$(\lambda + N)^n u = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k u \tag{14.309a}$$

$$= \binom{n}{0} \lambda^n u + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} N u \tag{14.309b}$$

$$= \lambda^n u + n\lambda^{n-1} N u. \tag{14.309c}$$

Grâce à la proposition 9.233, nous avons alors

$$\|(\lambda + N)^n\| \geqslant \|(\lambda + N)^n u\| \geqslant \big|1 - n\|Nu\|\big|. \tag{14.310}$$

Cette dernière expression n'est pas bornée quand $n \to \infty$. Nous devons donc avoir $N = 0$.

Nous avons donc deux possibilités :

- $|\lambda| < 1$
- $|\lambda| = 1$ et $N = 0$.

Nous nous tournons maintenant sur la contrainte que $(\lambda\mathbb{1} + N)^k$ doive rester borné pour $k < 0$. Nous avons

$$\lambda\mathbb{1} + N = \lambda(\mathbb{1} + \lambda^{-1}N), \tag{14.311}$$

et nous pouvons appliquer la proposition 10.214 à l'opérateur nilpotent $-\lambda^{-1}N$ pour avoir

$$\big(\mathbb{1} - (-\lambda^{-1}N)\big)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-\lambda)^{-l} N^l \tag{14.312a}$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{\infty} (-\lambda)^{-l} N^l \tag{14.312b}$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{r-1} (-\lambda)^{-l} N^l. \tag{14.312c}$$

Ceci pour dire que $(\lambda\mathbb{1} + N)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbb{1} + \lambda^{-1}N')$ pour une autre matrice nilpotente[75] $N' = \sum_{l=1}^{r-1}(-\lambda)^{-l}N^l$. Le travail déjà fait, appliqué à λ^{-1} et N', nous donne deux possibilités :

- $|\lambda^{-1}| < 1$
- $|\lambda^{-1}| = 1$ et $N' = 0$.

La possibilité $|\lambda^{-1}| < 1$ est exclue parce qu'elle impliquerait $|\lambda| > 1$ qui avait déjà été exclu. Il ne reste donc que la possibilité $|\lambda| = 1$ et $N = N' = 0$.

(2) **Pour la matrice M** Nous supposons que $\{M^k\}$ est borné : $\|M^k\| \leqslant s$ pour tout s. En utilisant le lemme 12.83 et la proposition 12.84, pour tout n et pour tout i nous avons :

$$\|(\mathbb{1} + \lambda_i N_i)^k\| < s. \tag{14.313}$$

Nous appliquons ce que nous venons de montrer pour les blocs et nous obtenons $|\lambda_i| = 1$ et $N_i = 0$.

(3) **La matrice A** Nous pouvons enfin parler de la matrice $A = Q^{-1}MQ$. Nous avons $A^k = Q^{-1}M^kQ$, et donc aussi

$$M^k = QA^kQ^{-1}. \tag{14.314}$$

En ce qui concerne la norme, si la suite (A^k) est bornée par le réel s, alors

$$\|M^k\| = \|QA^kQ^{-1}\| \leqslant \|Q\|\|Q^{-1}\|\|A^k\| \leqslant s\|Q\|\|Q^{-1}\|. \tag{14.315}$$

[74] Méthode alternative pour prouver que $N = 0$ dans [465].
[75] Notez que la somme part de $l = 1$, sinon ce serait raté pour la nilpotence de N'.

Donc la suite (M^k) est bornée et nous pouvons appliquer à M^k ce que nous avons fait sur M. Nous avons donc

$$A = Q^{-1}MQ = Q^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s\end{pmatrix}Q \tag{14.316}$$

avec $|\lambda_i| = 1$. Nous avons prouvé que A est diagonalisable et que $\text{Spec}(A) \subset S^1$.

□

14.12 Droites dans un espace vectoriel

DEFooTQIFooKcloeY

Définition 14.131.
Soit un espace vectoriel E.

(1) *Une **droite vectorielle** dans E est un sous-espace vectoriel de dimension 1.*
ITEMooLJZFooEzSkMT

(2) *Une **droite affine** est une partie de E de la forme $a+V$ où $a \in E$ et V est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E.*

(3) *Un **plan vectoriel** est un sous-espace vectoriel de dimension 2.*
ITEMooQNAYooZymIqK

(4) *Une partie P est un **plan affine** si il existe un $v \in E$ tel que $P - v$ soit un plan vectoriel.*

Le plus souvent, nous parlerons de « droite » et « plan » sans préciser « vectoriel » ou « affine ». Dans ces cas, le plus souvent, ce sera « affine ».

PROPooQTZYooYWmnlu

Proposition 14.132 ([1]).
Si D est une droite dans E, alors il existe $u \in E$ et $a \in E$ tels que

$$D = \{\lambda u + a\}_{\lambda\in\mathbb{K}}. \tag{14.317}$$

Démonstration. Par définition 14.131(2), il existe un sous-espace vectoriel V de dimension 1 et un point $a \in E$ tels que $D = V + a$. Si $\{u\}$ est une base de V, alors $V = \{\lambda u\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$ et donc $D = \{\lambda v + a\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$. □

LEMooLIASooAvjTvt

Lemme 14.133 ([1]).
Soient un espace vectoriel E, un sous-espace V de dimension 1 ainsi que $a, b \in E$ tels que $V + a \cap V + b \neq \varnothing$. Alors $V + a = V + b$.

Démonstration. Soit $p \in V + a \cap V + b$. Il existe $\lambda_a \in \mathbb{K}$ et $\lambda_b \in \mathbb{K}$ tels que

$$p = \lambda_a u + a = \lambda_b u + b. \tag{14.318}$$

Un élément générique de $V + a$ est $\lambda u + a$. Nous montrons que $\lambda u + a \in V + b$:

$$\begin{aligned}\lambda u + a &= \lambda_a u + a + (\lambda - \lambda_a)u && (14.319a)\\ &= \lambda_b u + b + (\lambda - \alpha_a)u && (14.319b)\\ &= (\lambda - \lambda_a + \lambda_b)u + b && (14.319c)\\ &\in V + b. && (14.319d)\end{aligned}$$

Cela prouve que $V + a \subset V + b$. Nous montrons de même que $V + b \subset V + a$. □

PROPooRSKLooVrxrFz

Proposition 14.134.
Soient deux points distincts a et b de l'espace vectoriel E.
ITEMooQSJMooKUBHwf

(1) *Il existe une unique droite contenant a et b.*
ITEMooEOJNooSMCXtA

(2) *Cette droite est donnée par $\{\lambda(b-a)+a\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$.*

Démonstration. Nous posons $V = \{\lambda(b-a)+a\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$. Il est vite vérifié en posant $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ que $a, b \in d_1$. Cela prouve le point (2).

Soit maintenant une autre droite, $W + x$ contenant également a et b. Nous posons $V = \{\lambda(b-a)\}_{\lambda\in\mathbb{K}}$. Nous devons montrer que $W + x = V + a$. Vu que $a, b \in W + x$, il existe $w_a, w_b \in W$ tels que

$$\begin{cases} w_a + x = a & (14.320a)\\ w_b + x = b. & (14.320b)\end{cases}$$

En faisant la différence, $w_b - w_a = b - a$ et donc $b - a \in W$. Cela montre que $W = V$ parce que V et W ont une base commune ($\{b - a\}$).

Il reste à prouver que $V + a = W + x$. Le lemme 14.133 fait le boulot parce que $V + a$ et $V + x$ ont deux points d'intersection : a et b. □

LEMooWDADooGuKwvZ

Lemme 14.135 ([1]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soient une droite D ainsi que 4 points $a, b, x, y \in D$ avec $a \neq b$. Alors il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tels que

$$a - b = \sigma(x - y). \tag{14.321}$$

Démonstration. Par la proposition 14.132, il existe $u, w \in E$ tels que $D = \{\lambda u + w\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$. Il existe donc $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{K}$, tels que $a = \lambda_a u + w$, $b = \lambda_b u + w$, $x = \lambda_x u + w$, $y = \lambda_y u + w$. Nous avons donc $a - b = (\lambda_a - \lambda_b)u$ et $x - y = (\lambda_x - \lambda_y)u$. Étant donné que les points $a \neq b$ sont distincts, nous avons $\lambda_a - \lambda_b \leqslant 0$, et en posant

$$\sigma = \frac{\lambda_x - \lambda_y}{\lambda_a - \lambda_b}, \tag{14.322}$$

nous avons bien

$$\begin{aligned} \sigma(a - b) &= \frac{\lambda_x - \lambda_y}{\lambda_a - \lambda_b}(\lambda_a - \lambda_b)u & \text{(14.323a)} \\ &= (\lambda_x - \lambda_y)u & \text{(14.323b)} \\ &= x - y. & \text{(14.323c)} \end{aligned}$$

□

PROPooEBXLooKewanh

Proposition 14.136 ([1]).
Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Si les points a, m, b sont alignés et distincts, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$b = m + \lambda(m - a). \tag{14.324}$$

14.12.1 Parallélisme et perpendicularité

DEFooXVWGooIDYXGj

Définition 14.137 (Perpendiculaires et parallèles).
Soient un espace vectoriel E ainsi que deux sous-espaces V et W de dimension 1.

ITEMooWTVKooPohmUX

*(1) Nous disons que les droites $a + V$ et $b + W$ sont **parallèles** lorsque $V = W$.*

*(2) Nous disons que les droites $a + V$ et $b + W$ sont **perpendiculaires** si pour tout $v \in V$ et $w \in W$ nous avons $v \cdot w = 0$.*

Vous noterez que le parallélisme est une notion vectorielle alors que la perpendicularité dépend du produit scalaire ; c'est une notion comme qui dirait « métrique ».

PROPooADJNooMyXUxG

Proposition 14.138.
Les propriétés usuelles.

ITEMooSXVYooBUvvxj

(1) Deux droites parallèles ayant une intersection sont confondues.

ITEMooXUBUooJoEKRi

(2) Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites de E.

(3) Si la droite d_1 est parallèle à la droite d_2, alors une droite est perpendiculaire à d_1 si et seulement si elle est perpendiculaire à d_2.

ITEMooOSSTooCzrUeT

(4) Soient trois droites d_1, d_2, d_3. Si $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing$ et si $d_3 \parallel d_1$ alors $d_3 \cap d_2 \neq \varnothing$.

Démonstration. Pour (1), il s'agit du lemme 14.133. □

PROPooKWJLooIYVKhs

Proposition 14.139 ([1]).
Soient deux droites parallèles d_1 et d_2 dans l'espace vectoriel E. Si $a, b \in d_1$ et si $x, y \in d_2$, alors il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tel que $b - a = \sigma(y - x)$.

Démonstration. Par définition 14.137(1), il existe $u \in E$ tel que $d_2 = d_1 + u$. Vu que $x, y \in d_2$, il existe $x', y' \in d_1$ tels que $x = x' + u$ et $y = y' + u$. Nous avons

$$y - x = y' - x'. \tag{14.325}$$

Comme $a, b, x', y' \in d_1$, le lemme 14.135 dit qu'il existe $\sigma \in \mathbb{K}$ tel que $b - a = \sigma(y' - x')$. Et donc aussi $b - a = \sigma(y - x)$. □

LEMooRLFQooJADark

Lemme 14.140.
Deux droites perpendiculaires ont un unique point d'intersection.

PROPooPWNWooYuyrOc

Proposition 14.141.
Soient une droite d et un point p.

ITEMooFWIWooBBORjU

(1) Il existe une unique droite parallèle à d contenant p.

ITEMooWJDDooRiobAu

(2) Il existe une unique droite perpendiculaire à d contenant p.

LEMooQQFFooEZYeck

Lemme 14.142.
Si D est une droite et si $a, b \in D$, alors $D - a = D - b$ et $D - a$ est une droite vectorielle.

Démonstration. Vu que D est une droite, il existe $v \in V$ tel que $D - v$ soit une droite vectorielle que nous notons L. Nous allons montrer que $D - a = D - v$. Comme a est arbitraire, cela suffit.

(1) $\underline{D - a \subset D - v}$ Un élément de $D - a$ est de la forme $x - a$ avec $x \in D$. Nous écrivons $x - a$ sous la forme $y - v$ et nous espérons que $y \in D$. Allons-y : d'abord nous isolons y dans $x - a = y - v$:

$$y = x - a + v = (x - v) - (a - v) + v. \tag{14.326a}$$

Puisque $x - v$ et $a - v$ sont des éléments de L, la somme est dans L et donc $y = l + v$ pour un certain élément de $l \in L$. Nous avons donc prouvé que $y \in D$ et donc que $x - a = y - v \in D - v$.

(2) $\underline{D - v \subset D - a}$ Nous notons $x - v$ un élément générique de $D - v$ ($x \in D$). En posant $y - a = x - v$, nous trouvons

$$y = x - v + a = \underbrace{x - v}_{\in L} + \underbrace{(a - v)}_{\in L} + v \tag{14.327}$$

Donc $y \in D$ et $x - v = y - a \in D - a$.

□

PROPooOKGGooEXvWVm

Proposition 14.143.
Soient deux droites d_1, d_2 dans l'espace vectoriel E. Nous supposons que $d_1 \cap d_2 = \{a\}$. Soit $x \in E$ qui n'est ni sur d_1 ni sur d_2. Alors il existe un unique $m \in d_2$ tel que la droite $d(m, x)$ soit parallèle à d_1.

Démonstration. La proposition 14.141 dit qu'il existe une unique droite d_3 passant par x et parallèle à d_1. En vertu de la proposition 14.138(4), $d_3 \cap d_2 \neq \varnothing$. Étant donné que $x \in d_3$ mais $x \notin d_2$, les droites d_2 et d_3 ne sont pas confondues. Il existe donc un unique point d'intersection $d_2 \cap d_3 = \{m\}$. Ça c'est pour l'existence.

En ce qui concerne l'unicité, si $s \neq m$ est sur d_2 alors la droite $d(s, x)$ n'est pas d_3 et passe par x. En vertu de l'unicité dans 14.141(1), la droite $d(s, x)$ n'est pas parallèle à d_1. □

PROPooQFWYooOxSMQI

Proposition 14.144 ([1])**.**
Soient deux droites d_1, d_2 dans $\mathbb{R}^2$ telles que $d_1 \cap d_2 = \{a\}$. Alors

$$\bigcup_{\substack{s_1 \in d_1 \\ s_2 \in d_2}} d(s_1, s_2) = \mathbb{R}^2. \tag{14.328}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Par la proposition 14.143, il existe un unique $m \in d_1$ tel que $d(x, m) /\!\!/ d_2$. Nous prenons n'importe quel autre point $s_1 \in d_1$. Nous avons alors que la droite $d(x, s_1)$ n'est pas parallèle à d_2. Soit $s_2 = d(x, s_1) \cap d_2$.

Nous avons $x \in d(s_1, s_2)$ parce qu'il y a unicité de la droite passant par s_1 et s_2 (proposition 14.134(1)) et que cette droite est $d(x, s_1)$. □

14.12.2 Droites et applications linéaires

LEMooRWASooOfwjdw

Lemme 14.145.
Soit un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$.

ITEMooYQCIooOrhRwj

(1) Si L est une droite vectorielle, alors pour tout $a \neq 0$ dans L, nous avons $L = \text{Image}(f)$ où f est l'application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K} &\to V \\ \lambda &\mapsto \lambda a. \end{aligned} \tag{14.329}$$

ITEMooZIGMooGruFMP

(2) *Si D est une droite, alors pour tout $a \neq b$ sur D nous avons $D = \text{Image}(f)$ où f est l'application affine donnée par*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K} &\to V \\ \lambda &\mapsto a + \lambda(b-a). \end{aligned} \tag{14.330}$$

ITEMooOKJZooIHYDIk

(3) *Une partie $D \subset V$ est une droite (affine) si et seulement si il existe $a, v \in V$ tels que*

$$D = \{a + \lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{K}}. \tag{14.331}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Comme L est un sous-espace de dimension 1, il possède une base contenant un unique élément, disons $\{b\}$. En particulier $a = \mu b$ pour un certain $\mu \in \mathbb{K}$. Si $x \in L$ nous avons $x = \lambda_x b$ pour un certain λ_x, et donc

$$x = \frac{\lambda_x}{\mu} a. \tag{14.332}$$

Donc $x = f(\lambda_x/\mu)$. Cela prouve que $L \subset \text{Image}(f)$.

L'inclusion inverse est simplement le fait que $\lambda a \in L$ dès que $a \in L$ parce que L est vectoriel.

(2) **Pour (2)** Le lemme 14.142 nous indique qu'il existe une droite vectorielle L telle que $D - x = L$ pour tout $x \in D$.

(2a) $D \subset \text{Image}(g)$ Nous nommons $f\colon \mathbb{K} \to V$ l'application linéaire qui donne L. Puisque $b - a \in L$ nous avons

$$f(\lambda) = \lambda(b-a), \tag{14.333}$$

et tout élément de L est de la forme $f(\lambda)$. Nous avons aussi $D = L + a$; donc un élément de D est de la forme $f(\lambda) + a$ et donc de la forme $\lambda(b-a) + a = g(\lambda)$.

(2b) $\text{Image}(g) \subset D$ donc $\lambda(b-a) \in L$ Un élément de $\text{Image}(g)$ est de la forme $a + \lambda(b-a)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Mais $b - a \in L$, et

$$g(\lambda) = a + \lambda(b-a) \in a + L = D. \tag{14.334}$$

(3) **Pour (3)** En deux parties.

(3a) $\Rightarrow$ Si $D \subset V$ est une droite, alors $D = D_0 + a$ où D_0 est un sous-espace de dimension 1 et $a \in V$. Nous avons $D_0 = \{\lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$, et donc

$$D = D_0 + a = \{a + \lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{K}}. \tag{14.335}$$

(3b) $\Leftarrow$ Si $D = \{a + \lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$, alors en posant $D_0 = \{\lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$, nous avons bien $D = a + D_0$.

□

PROPooNTHVooWWyafJ

Proposition 14.146.
L'image d'une droite par une application affine[76] *est une droite.*

PROPooTFTJooJejuBU

Proposition 14.147.
Soient deux droites d_1 et d_2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$). Alors nous sommes dans une des trois situations suivantes :

(1) $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.

(2) $\text{Card}(d_1 \cap d_2) = 1$

(3) $d_1 = d_2$.

Démonstration. Il y a 3 possibilités : $\text{Card}(d_1 \cap d_2)$ peut être 0, 1 ou $\text{Card}(d_1 \cap d_2) \geqslant 2$. Je vous laisse trouver des exemples explicites des deux premiers cas. Dans le troisième cas, la proposition 14.134 dit que $d_1 = d_2$. □

Exemple 14.148.
Les exemples les plus courants d'applications affines sont les droites et les plans ne passant pas par l'origine.

[76] Définition 10.155.

Les droites Une droite dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) qui ne passe pas par l'origine est l'image d'une fonction de la forme $s(t) = ut + v$, avec $t \in \mathbb{R}$, et u et v dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ selon le cas.

En choisissant des coordonnées adéquates, les droites peuvent être aussi vues comme graphes de fonctions affines. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on retrouve la fonction de l'exemple 6.38, pour $n = m = 1$.

Les plans De la même façon nous savons que tout plan qui ne passe pas par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est le graphe d'une application affine, $P(x, y) = (a, b)^T \cdot (x, y)^T + (c, d)^T$, lorsque les coordonnées sont bien choisies.

△

PROPooTVSZooOJTnnn

Proposition 14.149 ([1]).
Soient trois points a, b, c distincts et non alignés de $\mathbb{R}^n$.

(1) Il existe un unique plan contenant a, b et c.

(2) Ce plan est donné par $P = \{a + \lambda(b - a) + \mu(c - a)$ tel que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n\}$.

PROPooUDLRooShTGmV

Proposition 14.150 ([1]).
Soit un espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$. Soient $a, b \in V$. Si x est un point de la droite (ab), alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda(b - a)$.

14.12.3 Projection orthogonale

Le théorème suivant n'est pas indispensablissime parce qu'il est le même que le théorème de la projection sur les espaces de Hilbert[77]. Cependant la partie existence est plus simple en se limitant au cas de dimension finie.

ThoWKwosrH

Théorème-Définition 14.151 (Théorème de la projection).
Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, $x \in E$, et C un sous-ensemble fermé convexe de E.

(1) Les deux conditions suivantes sur $y \in E$ sont équivalentes :

zzETsfYCSItemi

(1a) $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|$ tel que $z \in C\}$,

zzETsfYCSItemii

(1b) pour tout $z \in C$, $\mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$.

(2) Il existe un unique $y \in E$, noté $y = \texttt{proj}_C(x)$ vérifiant ces conditions.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un élément dans C vérifiant la première condition. Ensuite nous verrons l'équivalence.

(1) **Existence**

Soit $z_0 \in C$ et $r = \|x - z_0\|$. La boule fermée $\overline{B(x, r)}$ est compacte[78] et intersecte C. Vu que C est fermé, l'ensemble $C' = C \cap \overline{B(x, r)}$ est compact. Tous les points qui minimisent la distance entre x et C sont dans C' ; la fonction

$$\begin{aligned} C' &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(x, z) \end{aligned} \tag{14.336}$$

est continue sur un compact et donc a un minimum qu'elle atteint[79]. Un point P réalisant ce minimum prouve l'existence d'un point vérifiant la première condition.

(2) **Unicité** Soient y_1 et y_2, deux éléments de C minimisant la distance avec x, et soit d ce minimum. Nous avons par l'identité du parallélogramme (12.3) que

$$\|y_1 - y_2\|^2 = -4\left\|\frac{y_1 + y_2 - x}{2}\right\|^2 + 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 \leqslant -4d + 2d + 2d = 0. \tag{14.337}$$

Par conséquent $y_1 = y_2$.

[77] Théorème 27.6
[78] C'est ceci qui ne marche plus en dimension infinie.
[79] Théorème 11.56.

(3) **(1a)⇒ (1b)** Soit $z \in C$ et $t \in]0,1[$; nous notons $P = \texttt{proj}_C x$. Vu que y et P sont dans C et que C est convexe[80], le point $z = ty + (1-t)P$ est également dans C, et par conséquent,

$$\|x - P\|^2 \leqslant \|x - tz - (1-t)P\|^2 = \|(x-P) - t(z-P)\|^2. \tag{14.338}$$

Nous sommes dans un cas $\|a\|^2 \leqslant |a-b|^2$, qui implique $2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle \leqslant \|b\|^2$. Dans notre cas,

$$2\operatorname{Re}\langle x - P, t(z-P)\rangle \leqslant t^2\|z-P\|^2. \tag{14.339}$$

En divisant par t et en faisant $t \to 0$ nous trouvons l'inégalité demandée[81] :

$$2\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \leqslant 0. \tag{14.340}$$

(4) **(1b)⇒ (1a)**
Soit un point $P \in C$ vérifiant

$$\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \leqslant 0 \tag{14.341}$$

pour tout $z \in C$. Alors en notant $a = x - P$ et $b = P - z$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 = \|x - P + P - z\|^2 &= \|a + b\|^2 \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \\ &\geqslant \|b\|^2, \end{aligned} \tag{14.342}$$

ce qu'il fallait.

□

PROPooHGGIooIssaTA

Proposition 14.152.
Soient une droite d dans $\mathbb{R}^3$ ainsi qu'un point p. La projection[82] *$\texttt{proj}_d(p)$ est le point d'intersection*[83] *entre d et la perpendiculaire à d passant par p.*

Démonstration. Nous considérons la droite $d = \{a + \lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et un point $p \in \mathbb{R}^3$. Nous notons $x(\lambda) = a + \lambda v$ le point courant dans d. Conformément à la définition 14.151 de la projection orthogonale, nous allons minimiser la distance $\|p - x(\lambda)\|$ par rapport à λ.

Puisque $\|p - x(\lambda)\|$ est toujours positif, nous pouvons chercher à minimiser le carré :

$$\|p - x(\lambda)\|^2 = \|p\|^2 - 2p \cdot a - 2\lambda p \cdot v + \|a\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\lambda a \cdot v. \tag{14.343}$$

Quitte à minimiser ça par rapport à λ, nous pouvons oublier les termes ne contenant pas λ. Nous posons donc

$$f(\lambda) = \|v\|^2\lambda^2 + 2(a-p) \cdot v\lambda \tag{14.344}$$

Comme le coefficient de λ^2 est positif, la proposition 11.116 nous dit que cette fonction aura un minimum (et non un maximum). La valeur λ_0 pour laquelle f est minimal se découvre grâce à 11.116(2) :

$$\lambda_0 = \frac{-2(a-p) \cdot v}{2\|v\|^2}. \tag{14.345}$$

Cela est la valeur de λ pour laquelle

$$\texttt{proj}_d(p) = x(\lambda_0); \tag{14.346}$$

nous avons donc

$$x(\lambda_0) = a - \frac{(a-p) \cdot v}{\|v\|^2}v. \tag{14.347}$$

Nous devons voir maintenant que $\big(p - x(\lambda_0)\big) \cdot v = 0$. Il suffit d'un peu déballer :

$$\big(p - x(\lambda_0)\big) \cdot v = p \cdot v - a \cdot v + \frac{(a-p) \cdot v}{\|v\|^2}\|v\|^2 = p \cdot v - a \cdot v + (a-p) \cdot v = 0. \tag{14.348}$$

□

[80] Définition 9.228.
[81] Ici nous utilisons la proposition 14.37, et c'est une des choses qui font que cette partie sur la « géométrie élémentaire » demande en réalité d'être placée après déjà une partie de l'analyse réelle.
[82] Définition 14.151.
[83] Lemme 14.140.

14.13 Géométrie dans le plan

LEMooYIHXooEwmlPo

Lemme 14.153 (Équation de droite).
Si D est une droite[84] *dans $\mathbb{R}^2$, alors D est d'une des deux formes suivantes :*

- *Soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = \alpha\}, \tag{14.349}$$
- *soit il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que*
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = \alpha x + \beta\}. \tag{14.350}$$

Le premier cas correspond aux droites verticales.

Démonstration. Nous prenons une droite D et une application affine f donnée par (14.145)(3). Il y a deux possibilités : soit $b-a$ est un multiple de e_2, sois pas.

(1) **Si $b - a = \mu e_2$** Alors $f(\lambda) = a + \lambda\mu e_2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} D &= \{a + \lambda e_2\}_{\lambda\in\mathbb{R}} && (14.351a)\\ &= \{\lambda e_2 + a_1 e_1\} && \text{cf. justif.} \quad (14.351b)\\ &= \{(a_1, \lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}} && (14.351c)\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = a_1\}. && (14.351d) \end{aligned}$$

SUBEQooEKMNooQekSeC

Justifications.

- Pour 14.351b. Parce que $a_2e_2 + \lambda e_2$ prend toutes les valeurs de la forme λe_2.

(2) **Sinon** Nous avons
$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda(b-a)_1 \\ a_2 + \lambda(b-a)_2 \end{pmatrix} \tag{14.352}$$
En posant $\alpha = (b-a)_2/(b-a)_1$ et $\beta = -\alpha a_1 + a_2$, nous avons bien
$$f(\lambda)_2 = \alpha f(\lambda)_1 + \beta. \tag{14.353}$$

□

PROPooOFKXooARiQZK

Proposition 14.154.
Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est une droite si et seulement si il existe une application affine[85] *qui n'est pas une translation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*
$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) = 0\}. \tag{14.354}$$

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Soit une droite D. Elle est de la forme $D = D_0 + a$ où D_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, il existe $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_0 = \{\lambda u\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Nous considérons un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\{u, v\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$, et nous posons
$$\begin{aligned} f_0 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_v \end{aligned} \tag{14.355}$$
où x_v est la composante de x dans la direction de v dans la base $\{u, v\}$. On vérifie que f_0 est linéaire. Nous avons $D_0 = \{f_0 = 0\}$.

Maintenant en posant
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_0(x - a), \end{aligned} \tag{14.356}$$
nous avons $D = \{f = 0\}$.

(1a) **f est affine** C'est immédiat parce que $f(x) = f_0(x) - f_0(a)$. L'application f_0 est linéaire et $f_0(a)$ est une constante.

[84] Définition 14.131, mais c'est surtout la caractérisation du lemme 14.145(3) que nous devons avoir en tête.
[85] Définition 10.155.

(1b) $\{f=0\}\subset D$ Si $f(x)=0$, alors $f_0(x-a)=0$. Cela signifie que $x-a\in D_0$ et donc que $x\in D_0+a=D$.

(1c) $D\subset\{f=0\}$ Si $x\in D$, alors $x-a\in D_0$ et $f(x)=f_0(x-a)=0$.

(2) $\Leftarrow$ Soit une application affine $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Nous montrons que $D=\{f=0\}$ est une droite. Il existe une application linéaire $\alpha\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=\alpha(x)+a$. Posons $D_0=\{\alpha=0\}$. La proposition 6.59 dit qu'il existe $u\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(u)=0$. Vu que α est linéaire, $\alpha(\lambda u)=\lambda\alpha(u)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et donc $\{\lambda u\}_{\lambda\in\mathbb{R}}\subset D_0$. Inversement, si $v\in\{\alpha=0\}$ avec v hors de $\mathbb{R}u$, alors $\{u,v\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et nous aurions $\alpha=0$.

Nous avons donc $D_0=\{\alpha=0\}$. Maintenant avec $f(x)=\alpha(x)+a$, nous avons $D=\{f=0\}=D_0-a$. Donc D est une droite.

□

Si f est une application affine quelle que $f(x)=0$ donne la droite D, alors pour tout réel non nul λ, l'application affine λf donnent également D. Il n'y a donc pas d'unicité.

PROPooTIIUooNtbQLz

Proposition 14.155 ([1]).
Soient $v\in\mathbb{R}^2$ et $c\in\mathbb{R}$. Nous posons

$$D_0=\{x\in\mathbb{R}^2\text{ tel que }x\cdot v=0\}\tag{14.357a}$$
$$D=\{x\in\mathbb{R}^2\text{ tel que }x\cdot v=c\}\tag{14.357b}$$

Nous considérons $w\neq0\in D_0$ et $b\in D$. Alors Alors

ITEMooSTSZooKMQImS

(1)

$$D_0=\{x\in\mathbb{R}^2\text{ tel que }x\cdot v=0\}=\{\lambda w\text{ tel que }\lambda\in\mathbb{R}\}\tag{14.358}$$

ITEMooWNRSooLcCikX

(2)

$$D=\{x\in\mathbb{R}^2\text{ tel que }x\cdot v=c\}=\{b+\lambda w\text{ tel que }\lambda\in\mathbb{R}\}\tag{14.359}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (2)** Nous posons $E_0=\{\lambda w\text{ tel que }\lambda\in\mathbb{R}\}$, et nous prouvons que $D_0=E_0$.

(1a) $D_0\subset E_0$ Soit $x\in D_0$. Nous avons $x\cdot v=w\cdot v=0$, c'est-à-dire EQooUPMEooCPCrqw

$$x_1v_1+x_2v_2=0\tag{14.360a}$$
$$w_1v_1+w_2v_2=0.\tag{14.360b}$$

(1a.i) **Si $v_1\neq0$** Nous avons

$$x_1=-\frac{v_2}{v_1}x_2\tag{14.361a}$$
$$w_1=-\frac{v_2}{v_1}w_2.\tag{14.361b}$$

A. **Si $w_2\neq0$** Alors en posant $\lambda=x_2/w_2$ nous avons $x_2=\lambda w_2$, et

$$x_1=-\frac{v_2}{v_1}\lambda w_2=-\frac{v_2}{v_1}w_2\lambda=\lambda w_1.\tag{14.362}$$

Et donc nous avons bien $x_1=\lambda w_1$ et $x_2=\lambda w_2$, c'est-à-dire $x=\lambda w$.

B. **Si $w_2=0$** Alors, vu que $w\neq0$, nous avons $w_1\neq0$. Mais aussi : $w_1v_1=0$. Et comme nous avons dit que $v_1\neq0$, c'est impossible.

(1a.ii) **Si $v_1=0$** Les équations (14.360) deviennent

$$x_2v_2=0\tag{14.363a}$$
$$w_2v_2=0\tag{14.363b}$$

Vu que $v\neq0$, nous avons $v_2\neq0$ et donc $x_2=w_2=0$. Comme $v_2\neq0$, il suffi de poser $\lambda=x_1/w_1$ pour avoir $x_1=\lambda w_1$ et donc $x=\lambda w$.

(1b) $E_0 \subset D_0$ Soit $x \in E_0$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda w$. Vu que $w \in D_0$, nous avons $w \cdot v = 0$. Donc

$$x \cdot v = \lambda w \cdot v = 0. \tag{14.364}$$

Donc $x \in D_0$.

(2) **Pour (2)** Soient $w \in D_0$ et $b \in D$. Nous posons

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\} \tag{14.365a}$$
$$E = \{b + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}, \tag{14.365b}$$

et nous prouvons que $D = E$.

(2a) $D \subset E$ Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \cdot v = c$. Alors $(x - b) \cdot v = 0$ parce que $b \in D$. Donc $x - b \in D_0$. Par le point (1), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x - b = \lambda w$. Et donc $x = b + \lambda w$, c'est-à-dire $x \in E$.

(2b) $E \subset D$ Vu que $b \in D$ et $w \in D_0$, nous avons $b \cdot v = c$ et $w \cdot v = 0$. Donc $(b + \lambda w) \cdot v = c$ et donc $b + \lambda w \in D$.

□

PROPooJSBKooJspdiF

Proposition 14.156 ([1]).
Si D est une droite de $\mathbb{R}^2$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\}. \tag{14.366}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que notre droite a la forme

$$E_0 = \{\lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{14.367}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. En choisissant $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $v \cdot w = 0$ nous posons $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } v \cdot x = 0\}$. Vu que $w \in D_0$, nous avons $E_0 = D_0$ par la proposition 14.155.

Prenons maintenant une droite générale $D = \{a + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}$ avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $w \in \mathbb{R}^2$. En posant $D_0 = \{\lambda w\}$, nous avons $D = D_0 + a$. Par la première partie, il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = 0\}$. En posant $c = a \cdot v$ et $D' = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\}$, nous avons $a \in D'$ et $w \in D_0$. Et donc

$$D' = \{a + \lambda w \text{ tel que } \mu \in \mathbb{R}\} = D_0 + a = D. \tag{14.368}$$

□

14.13.1 Segment, médiatrice et équidistance

DEFooDLBFooYmJPhQ

Définition 14.157 ([1]).
*Soient deux points a et b dans $\mathbb{R}^2$. Nous posons $m = (a+b)/2$, et nous disons que la **médiatrice** du segment $[a, b]$ est la partie*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x - m) \cdot (a - b) = 0\}. \tag{14.369}$$

EQooTOACooUQiNJs

PROPooPOKCooMoEfOB

Proposition 14.158 ([1]).
La médiatrice du segment $[a, b]$ est une droite. Si w vérifie $w \cdot (a - b) = 0$, alors en posant $m = (a + b)/2$ et $c = m \cdot (a - b)$, la médiatrice est également donnée par

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\} = \{m + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{14.370}$$

EQooYJKWooIMBdiQ

Démonstration. La définition (14.369) dit que $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x - m) \cdot (a - b) = 0\}$. En posant $c = m \cdot (a - b)$ et $v = (a - b)$, nous avons

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = c\}. \tag{14.371}$$

La proposition 14.155 dit que c'est une droite. En ce qui concerne la seconde expression de (14.370), il s'agit de prendre la proposition 14.155(2). En notant $M_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot v = 0\}$, nous avons $M = \{m + \lambda w\}$ pour tout $w \in M_0$. En particulier pour le w vérifiant les hypothèses $(w \cdot v = w \cdot (b - a) = 0)$. □

LEMooSZZWooPDHnGl

Lemme 14.159.
Un point M est sur la médiatrice[86] du segment $[A, B]$ si et seulement si $\|M - A\| = \|M - B\|$.

[86] Médiatrice, définition 14.157.

Démonstration. Nous posons $I = (A+B)/2$. D'une part l'expression que M est sur la médiatrice est que

$$(M - I) \cdot (A - B) = 0. \tag{14.372}$$

D'autre part, l'expresson d'être équidistant de A est de B est

$$\|M - A\|^2 - \|M - B\|^2 = 0. \tag{14.373}$$

La preuve consiste à montrer que

$$2(M - I) \cdot (B - A) = \|M - A\|^2 - \|M - B\|^2. \tag{14.374}$$

Pour cela, il suffit d'injecter $I = (A+B)/2$ et d'effectuer les produits.

Nous avons par exemple

$$\begin{aligned} 2(M - I) \cdot (B - A) &= (2M - A - B) \cdot (B - A) && \text{(14.375a)}\\ &= 2M \cdot B - 2M \cdot A - A \cdot B + \|A\|^2 - \|B\|^2 + A \cdot B && \text{(14.375b)}\\ &= 2M \cdot (B - A) + \|A\|^2 - \|B\|^2. && \text{(14.375c)} \end{aligned}$$

□

PROPooIPKSooAOfTDy

Proposition 14.160 ([1]).
Il n'existe pas 4 points distincts de $\mathbb{R}^2$ deux à deux équidistants.

Démonstration. Soient deux points distincts $a, b \in \mathbb{R}^2$. Nous nommons ℓ la distance $\|a - b\|$. Si les points $c, d \in \mathbb{R}^2$ sont équidistants de a et b, alors ils doivent être sur la médiatrice (lemme 14.159). La proposition 14.158 nous indique que, si nous posons $m = (a+b)/2$ et si nous considérons $w \in \mathbb{R}^2$ tel que $w \cdot (a-b) = 0$, alors la médiatrice est

$$M = \{m + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{14.376}$$

Il existe donc λ_c et λ_d tels que $c = m + \lambda_c w$ et $d = m + \lambda_d w$. Nous cherchons donc les $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|x - a\| = \|x - b\| = \ell$ sous la forme $x = l + \lambda x$. Nous posons donc

$$\|m + \lambda w - a\| = \ell \tag{14.377}$$

et nous cherchons pour quelles valeurs de λ l'égalité est respectée. En utilisant le fait que $w \cdot (b - a) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \|m + \lambda w - a\|^2 &= \|\frac{b-a}{2} + \lambda w\|^2 && \text{(14.378a)}\\ &= \big(\frac{b-a}{2} + \lambda w\big) \cdot \big(\frac{b-a}{2} + \lambda w\big) && \text{(14.378b)}\\ &= \frac{1}{4}\|b - a\|^2 + \lambda^2\|w\|^2. && \text{(14.378c)} \end{aligned}$$

Le tout doit être égal à $\ell^2 = \|b - a\|^2$. Nous avons donc $\lambda^2 = \frac{3\ell^2}{4\|w\|^2}$. Vu que ℓ et $\|w\|$ sont positifs, nous pouvons passer à la racine carrée :

$$\lambda_\pm = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{\|w\|}. \tag{14.379}$$

Les points c et d sont donc forcément $c = m + \lambda_+ w$ et $d = m + \lambda_- w$. C'est la seule manière de garantir $\|a - b\| = \|a - c\| = \|b - c\| = \|a - d\| = \|b - d\|$. Hélas, de cette façon nous n'avons pas $\|c - d\| = \ell$ parce que

$$\|c - d\| = 2\lambda\|w\| = \sqrt{3}\ell \neq \ell. \tag{14.380}$$

□

Si A' est l'image de A par σ_ℓ alors ℓ est la médiatrice du segment $[A, A']$. Voir le lemme 20.121.

Définition 14.161.
*Soit une application affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nous appelons **demi-plans** associés à f les parties*

$$H_f^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) > 0\} \tag{14.381}$$

et

$$H_f^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) < 0\}. \tag{14.382}$$

LEMooEZEDooSDbrkq

Lemme 14.162 ([1]).
Les demi-plans sont convexes[87].

Démonstration. Soit une applications affine $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi que $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) > 0$. Vu que f est affine, il existe une application linéaire $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = l(x) + \alpha$ pour tout x.

Nous considérons

$$\begin{aligned}\gamma\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto a + t(b - a).\end{aligned} \tag{14.383}$$

Nous devons prouver que $(f \circ \gamma)(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Nous avons $(f \circ \gamma)(0) > 0$ et $(f \circ \gamma)(1) > 0$. Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(t) &= l\big(a + t(b - a)\big) + \alpha && (14.384a)\\ &= l(a) + fl(b) - tl(a) + \alpha && (14.384b)\\ &= (1 - t)l(a) + tl(b) + t\alpha + (1 - t)\alpha && (14.384c)\\ &= (1 - t)f(a) + tf(b). && (14.384d)\end{aligned}$$

SUBEQooXZIPooMoJCRm

Les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont strictement positifs. Les nombres $(1 - t)$ et t sont positifs, mais ne s'annulent pas en même temps. Donc dans (14.384d), au moins un des deux termes est strictement positifs tandis que l'autre est positif ou nul. Bref, $(f \circ \gamma)(t) > 0$.

Cela prouve que le demi-plan $f(x) > 0$ est convexe. Le même raisonnement tient pour le demi-plan $f(x) < 0$. □

LEMooXLNZooFyqPxG

Lemme 14.163 ([1]).
Si $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont affines et si $\ker(f) = \ker(g)$, alors

$$\{H_f^+, H_f^-\} = \{H_g^+, H_g^-\}. \tag{14.385}$$

Démonstration. Il existe un $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a) > 0$. En effet $f(x) = l(x) + \alpha$ où $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il suffit de prendre x tel que $l(x) < -\alpha$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a) > 0$. Il y a deux possibilités : $g(a) > 0$ ou $g(a) < 0$ parce que $g(a) = 0$ n'est pas possible du fait que f et g s'annulent aux mêmes points..

(1) **Si $g(a) > 0$** Nous allons prouver qu'alors $H_f^+ = H_g^+$ et $H_f^- = H_g^-$. Soit $b \in H_f^+$. Nous savons que H_f^+ est convexe (lemme 14.162), de telle sorte que $f\big([a, b]\big) > 0$. En particulier f ne s'annule pas sur le segment $[a, b]$, et g non plus. Autrement dit, la fonction

$$\begin{aligned}s\colon [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g\big((1 - t)a + tb\big)\end{aligned} \tag{14.386}$$

ne s'annule pas. Vu que $s(0) = g(a) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires[88] nous indique que $g(b) = s(1) > 0$. Donc $b \in H_g^+$.

Nous avons prouvé que $H_f^+ \subset H_g^+$. En inversant les rôles de f et g nous prouvons que $H_g^+ \subset H_f^+$.

(2) **Si $g(a) < 0$** Il se prouve de même que $H_f^+ = H_g^-$ et $H_f^- = H_g^+$.

□

PROPooSIANooTOKlBI

Proposition 14.164.
Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application affine non constante, alors $\ker(f)$ est une droite[89].

Démonstration. Posons $f(x) = l(x) + \alpha$ où $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Commençons avec $\alpha = 0$. Considérons $a \in \ker(f)$ et prouvons que $\ker(f) = \{\lambda a\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. D'abord $f(\lambda a) = l(\lambda a) = \lambda l(a) = 0$. Donc $\{\lambda a\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subset \ker(f)$. D'autre part si $f(x) = 0$ alors que x n'est pas de la forme λa. Dans ce cas, $\{x, a\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et nous concluons que $\ker(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui est contraire à l'hypothèse comme quoi $f \neq 0$.

Nous ne supposons plus que $\alpha = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $l(a) = -\alpha$. Nous allons prouver que $\ker(f) = a + \ker(l)$.

[87] Définition 9.228.
[88] Théorème 11.92.
[89] La caractérisation 14.145(3) est plus pratique que la définition.

(1) $\underline{a+\ker(l)\subset\ker(f)}$ Soit $z\in\ker(l)$. Nous avons $f(a+z)=l(a)+l(z)+\alpha=-\alpha+0+\alpha=0$. Donc $a+z\in\ker(f)$.

(2) $\underline{\ker(f)\subset a+\ker(l)}$. Soit $b\in\ker(f)$. Nous prouvons que $b-a\in\ker(l)$. Nous avons $0=f(b)=l(b)+\alpha$ et donc $l(b)=-\alpha$. Donc
$$l(b-a)=l(b)-l(a)=-\alpha+\alpha=0. \tag{14.387}$$
parce que $l(a)=-\alpha$.

La conclusion est que $\ker(f)=a+\ker(l)$. La première partie ayant déjà montré que $\ker(l)$ est une droite, nous avons fini. □

LEMooTOUOooJbpLVB

Lemme 14.165 ([1, 194]).
Soit une fonction affine $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Soient $a,b\in\mathbb{R}^2$ tels que $f(a),f(b)\neq0$.

ITEMooXLCFooQiDCrR

(1) L'intersection $[a,b]\cap\ker(f)$ contient 0 ou 1 point.

ITEMooMORGooTzNefp

(2) Si $[a,b]\cap\ker(f)=\varnothing$ alors $f(a)$ et $f(b)$ ont même signe.

ITEMooDWIQooXnoMJT

(3) Si $[a,b]\cap\ker(f)\neq\varnothing$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous savons que $\ker(f)$ est une droite (proposition 14.164). Vu que $f(a)\neq0$, l'unique droite passant par a et b (proposition 14.134) n'est pas la droite $\ker(f)$. Donc parmi les trois possibilités de la proposition 14.134, nous sommes forcément dans le cas où l'intersection est vide ou réduite à un unique point.

(2) **Pour (2)** Nous supposons que $\ker(f)\cap[a,b]=\varnothing$. Considérons la fonction
$$\begin{aligned}s\colon[0,1]&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto f\big((1-t)a+tb\big).\end{aligned} \tag{14.388}$$
La fonction s est continue et ne s'annule pas parce que les points $(1-t)a+tb$ sont ceux de $[a,b]$. Si $s(0)$ et $s(1)$ étaient de signe différents, le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 donnerait un $t_0\in]0,1[$ tel que $s(t_0)=0$. Donc $s(0)$ et $s(1)$ ont le même signe.

(3) **Pour (3)** Nous prouvons la contraposée. Supposons que $f(a)$ et $f(b)$ aient le même signe (strict), et disons que $f(a),f(b)>0$ pour fixer les idées. Cela signifie que a et b sont dans le demi-plan H_f^+. Par convexité de ce dernier (lemme 14.162), nous avons $f(x)>0$ pour tout $x\in[a,b]$.

□

LEMooBWFSooBkIcOg

Lemme 14.166 ([1]).
Soient une application affine f. Soient $a\in\ker(f)$ et $v\in\mathbb{R}^2$ tels que[90] $\ker(f)=\{a+\lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Soit un vecteur non nul $w\in\mathbb{R}^2$ non parallèle à v.

ITEMooYDYPooRzupcO

(1) $\{v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

ITEMooHKVWooLAEMTm

(2) Nous considérons l'application
$$\begin{aligned}p\colon\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\ \lambda v+\mu w&\mapsto\mu.\end{aligned} \tag{14.389}$$
Alors l'application
$$\begin{aligned}g\colon\mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto p(x-a)\end{aligned} \tag{14.390}$$
est affine.

ITEMooGRZGooMFQPjM

(3) Les demi-plans de f et de g sont les mêmes.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Les vecteurs v et w ne sont pas colinéaire et forment donc une base par le lemme 6.11(1).

[90] Si on en croit la proposition 14.164, ça existe parce que le noyau d'une application affine est une droite.

(2) **Pour (2)** L'application p est linéaire. Nous avons

$$g(x) = p(x-a) = p(x) - p(a). \tag{14.391}$$

L'application g est donc bien affine.

(3) **Pour (3)** Les applications f et g sont affines. Si $x \in \ker(g)$, alors $p(x-a) = 0$, c'est-à-dire que $x - a = \lambda v$ et donc $x = \lambda v + a \in \ker(f)$. Donc $\ker(g) \subset \ker(f)$. De même nous trouvons que $\ker(f) \subset \ker(g)$.

Deux applications affines ayant le même noyau ont les mêmes demi-plans par le lemme 14.163.

□

LEMooURPNooYRsuaI

Lemme 14.167 ([1]).
Soit une application affine f ainsi qu'une application continue $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $\ker(f) = \ker(g)$. Supposons l'existence de $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$.

Alors les demi-plans de f sont les parties $\{x \text{ tel que } g(x) > 0\}$ et $\{x \text{ tel que } g(x) < 0\}$.

Démonstration. Vu que $g(a) \neq 0$ et que $\ker(f) = \ker(g)$, nous avons $f(a) \neq 0$. Pour fixer les idées[91], nous supposons que $f(a) > 0$. Nous allons prouver que $H_f^+ = \{g > 0\}$.

(1) $H_f^+ \subset \{g > 0\}$ Soit $x \in H_f^+$. Nous avons $f(a) > 0$ et $g(a) > 0$. Vu que H_f^+ est convexe[92], en posant

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto tx + (1-t)a, \end{aligned} \tag{14.392}$$

nous avons $\gamma(t) \in H_f^+$ pour tout t dans $[0,1]$. Nous avons donc

$$\gamma\big([0,1]\big) \cap \ker(g) = \gamma\big([0,1]\big) \cap \ker(f) \subset H_f^+ \cap \ker(f) = \varnothing. \tag{14.393}$$

Vu que γ et g sont continues, l'application $g \circ \gamma$ est continue[93] et vérifie $(g \circ \gamma)(0) = g(a) > 0$, nous avons aussi[94] $(g \circ \gamma)(1) > 0$, c'est-à-dire $g(x) > 0$.

(2) $\{g > 0\} \subset H_f^+$ Soit $x \in \{g > 0\}$, c'est-à-dire $g(x) > 0$. Supposons que $f(x) < 0$. Alors le segment $[x, b]$ est dans H_f^-, et donc $g(b) < 0$ impliquerait $g(x) < 0$.

□

PROPooTPHKooXnpJaV

Proposition 14.168 ([1]).
Soit une droite d dans $\mathbb{R}^2$ et une chemin dérivable $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Nous supposons que $\gamma(t_0) \in d$ et que $\gamma'(t_0)$ est non nul et non parallèle à d.

Alors il existe δ tel que pour tout $\epsilon < \delta$, $\gamma(t_0 + \epsilon)$ est dans un demi-plan de d et $\gamma(t_0 - \epsilon)$ est dans l'autre demi-plan de d.

Démonstration. Posons $a = \gamma(t_0)$. Nous considérons un vecteur $b_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $d = \{a + \lambda b_1\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, ainsi que b_2 tel que $\{b_1, b_2\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

Tout élément de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit de façon unique sous la forme

$$x = a + x_1 b_1 + x_2 b_2. \tag{14.394}$$

Cela nous donne des fonctions continues $\sigma_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\gamma(t) = a + \sigma_1(t) b_1 + \sigma_2(t) b_2, \tag{14.395}$$

et que

$$\gamma'(t) = \sigma_1'(t) b_1 + \sigma_2'(t) b_2. \tag{14.396}$$

Vu que $\gamma'(t_0)$ n'est pas parallèle à la droite d, nous avons $\sigma_2'(t_0) \neq 0$. De plus $\gamma(t_0) = a$, de telle sorte que $\sigma_1(t_0) = \sigma_2(t_0) = 0$.

[91] L'expression « pour fixer les idées » signifie « je ne fais que la moitié de la démonstration, mais vous devriez être capable de la faire complètement ».
[92] Lemme 14.162.
[93] Composée d'applications continues, proposition 9.290.
[94] Corolaire 11.95 au théorème des valeurs intermédiaires.

Que dites-vous ? La fonction dérivable $\sigma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vaut zéro en t_0 et sa dérivée y est non nulle ? Supposons pour fixer les idées que $\sigma_2'(t_0) > 0$. Il existe donc un $\epsilon > 0$ tel que σ_2 est strictement positive sur $[t_0 - \epsilon, t_0[$ et strictement négative sur $]t_0, t_0 + \epsilon]$.

En vertu du lemme 14.166, les points de γ tels que $\sigma_2 > 0$ sont dans un demi-plan de d et les points de γ avec $\sigma_2 < 0$ sont dans l'autre demi-plan. □

DEFooIOALooFNlswL

Définition 14.169 ([1]).
*Soit un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$. Soient $a \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'**homothétie** de rapport λ centrée en a est l'application*

$$\begin{aligned} \phi : V &\to V \\ x &\mapsto a + \lambda(x - a). \end{aligned} \tag{14.397}$$

THOooFMMLooLmAnAd

Théorème 14.170 (Théorème de Thalès[466]).
Soient trois points A, B, C non alignés dans $\mathbb{R}^2$. Soient $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$. Nous supposons que (DE) est parallèle à BC.

Alors

(1)

$$\frac{\|D - A\|}{\|B - A\|} = \frac{\|E - A\|}{\|C - A\|} = \frac{\|E - D\|}{\|C - B\|} \tag{14.398}$$

EQooRDBYooEXWwGl

(2) Il existe une homothétie[95] *$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ centrée en A telle que $\phi(D) = B$ et $\phi(E) = C$.*

Démonstration. Nous définissons $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ par $B = A + u$, $C = A + v$ et $C = B + w$. Vu que D est sur la droite (AB), il existe[96] $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $D = A + \lambda u$. De même il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $E = A + \mu v$.

Le fait que (ED) soit parallèle à (CB) implique qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $E - D = \sigma w$ (proposition 14.139).

Nous écrivons C de deux façons différentes : $C = A + v$ et $C = B + w = A + u + w$, de telle sorte que $v = u + w$ ou encore

$$w = v - u. \tag{14.399}$$

D'autre part, nous avons

$$\sigma w = E - D = A + \mu v - (A + \lambda u) = \mu v - \lambda u. \tag{14.400}$$

Vu que $w = v - u$ nous avons

$$\mu v - \lambda u = \sigma w = \sigma v - \sigma u \tag{14.401}$$

EQooMTYXooLBJpBm

Vu que $\{u, v\}$ est une base[97] de $\mathbb{R}^2$, l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base ainsi que 14.401 donne que $\mu = \sigma$ et $\lambda = \sigma$. Nous avons donc déjà prouvé que

$$\mu = \sigma = \lambda. \tag{14.402}$$

Les équations (14.398) sont maintenant faciles à prouver parce que

$$\frac{\|D - A\|}{\|B - A\|} = \frac{\|\lambda u\|}{\|u\|} = |\lambda|, \tag{14.403}$$

et

$$\frac{\|E - A\|}{\|C - A\|} = \frac{\|\mu v\|}{\|v\|} = |\mu|, \tag{14.404}$$

et

$$\frac{\|E - D\|}{\|C - B\|} = \frac{\|\sigma w\|}{\|w\|} = |\sigma|. \tag{14.405}$$

Nous prouvons maintenant l'existence de l'homothétie. Nous avons déjà vu que

$$D - A = \lambda(B - A) \tag{14.406a}$$
$$E - A = \lambda(C - A). \tag{14.406b}$$

Maintenant nous posons $\rho = 1/\lambda$ et nous considérons

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto A + \rho(x - A). \end{aligned} \tag{14.407}$$

[95] Définition 14.169.
[96] Proposition 14.150.
[97] Parce que les points A, B et C ne sont pas alignés, lemme 6.11.

Nous avons

$$\phi(E) = A + \rho(E - A) = A + \rho\lambda(C - A) = C, \tag{14.408}$$

et

$$\phi(D) = A + \rho(D - A) = A + \phi\lambda(B - A) = B. \tag{14.409}$$

□

THOooGFTWooACQLFJ

Théorème 14.171 (Théorème de Thalès dans le cercle[467])**.**
Soient des points M, A, B, C distincts dans $\mathbb{R}^2$ tels que

(1) $\|A - M\| = \|B - M\| = \|C - M\|$.

(2) A, M et B sont alignés.

Alors le triangle ABC est rectangle en C, c'est-à-dire que $(C - A) \cdot (B - C) = 0$.

Démonstration. Vu que A, M et B sont alignés, la proposition 14.136 dit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = M + \lambda(M - A)$. Nous avons donc $\|B - M\| = |\lambda|\|M - A\|$ et donc $\lambda = \pm 1$. Notons qu'avec $\lambda = -1$ nous aurions $B = M - M + A$, c'est-à-dire $B = A$. Donc $\lambda = 1$ et nous avons

$$B = 2M - A. \tag{14.410}$$

Nous devons calculer $(C-A) \cdot (B-C) = (C-A) \cdot (2M-A-C)$. Pour cela nous substituons $2M-A-C = (M - A) + (M - C)$ et $C - A = (C - M) + (A - M)$ et nous effectuons toutes les distributivités utiles :

$$\begin{aligned}
(C - A) \cdot (B - C) &= (C - A) \cdot (M - A) + (C - A) \cdot (M - C) && \text{(14.411a)}\\
&= \big((M - A) + (C - M)\big) \cdot (M - A) && \text{(14.411b)}\\
&\quad + \big((C - M) - (A - M)\big) \cdot (M - C)\\
&= \|M - A\|^2 + (C - M) \cdot (M - A) && \text{(14.411c)}\\
&\quad - \|C - M\|^2 - (A - M) \cdot (M - C)\\
&= 0 && \text{(14.411d)}
\end{aligned}$$

parce que $\|M - A\|^2 = \|C - M\|^2$. □

14.13.2 Cercles

DEFooLUYWooRPehYU

Définition 14.172 ([1])**.**
*Deux courbes sont **tangentes** si elles ont une tangente commune en un point d'intersection.*

PROPooOCXJooSDeEoB

Proposition-Définition 14.173 (cercles tangents[1])**.**
Soient deux cercles non confondus C_i de centres c_i et de rayons r_i $(i = 1, 2)$. Nous avons équivalence entre

ITEMooSBZFooIIDgvf

(1) L'intersection $C_1 \cap C_2$ est un unique point.

ITEMooLZHQooWsbQZl

(2) Il existe un droite tangents commune passant par un point de $C_1 \cap C_2$.

ITEMooNIZQooSeAWLm

(3) La distance $\|c_1 - c_2\|$ est égal soit à $r_1 + r_2$ soit à $r_1 - r_2$.

ITEMooZUKWooPUVpwH

(4) Il existe un vecteur u et un point d'intersection p tels que

$$u \cdot (c_1 - p) = u \cdot (c_2 - p) = 0. \tag{14.412}$$

ITEMooXRTVooUxEHrk

(5) Les deux centres sont alignés avec un point d'intersection.

*Dans ce cas, nous disons que les cercles C_1 et C_2 sont **tangents**.*

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(2)⇒(3)** Nous notons p le point d'intersection où passe la tangente commune. Notons aussi $v_i = c_i - p$. Si la droite est $\{p + tu\}_{t\in\mathbb{R}}$, alors la tangence nous dit que $u \cdot v_1 = 0$ et $u \cdot v_2 = 0$.

Nous considérons une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\{u, e_2\}$. Nous décomposons

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 u + b_1 e_2 && \text{(14.413a)}\\
v_2 &= a_2 u + b_2 e_2. && \text{(14.413b)}
\end{aligned}$$

Les conditions $u \cdot v_i = 0$ donnent $a_i = 0$ et donc $v_i = b_i e_2$ pour tout i. Donc $|b_i| = r_i$. Petit calcul :

$$\begin{aligned}\|c_1 - c_2\| &= \|v_1 + p - v_2 - p\| && (14.414a)\\ &= \|v_1 - v_2\| && (14.414b)\\ &= \|(b_1 - b_2)e_2\| && (14.414c)\\ &= |b_1 - b_2| && (14.414d)\end{aligned}$$

Nous avons supposé que $r_1 \geqslant r_2$. Donc la dernière valeur absolue peut valoir soit $r_1 - r_2$ soit $r_1 + r_2$ en fonction des signes de l'un ou l'autre.

(2) **(4)⇒(5)** Nous considérons une base orthonormée $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$. Nous décomposons $c_i - p$ dans cette base :

$$\begin{aligned}c_1 - p &= a_1 u + b_1 v && (14.415a)\\ c_2 - p &= a_2 u + b_2 v && (14.415b)\end{aligned}$$

L'hypothèse $u \cdot (c_i - p) = 0$ donne $c_1 - p = b_1 v$ et $c_2 - p = b_2 v$. Donc c_1, c_2 et p sont sur la droite

$$\{p + \lambda v\}. \tag{14.416}$$

Avec $\lambda = 0$ on a p, avec $\lambda = b_1$ on a c_1 et avec $\lambda = b_2$ on a c_2.

□

14.14 Géométrie dans l'espace

14.174.
Les notions de droites, plans et parallélisme sont des notions vectorielles qui auraient pu être traitées beaucoup plus haut. La chose qui rend la géométrie un peu piquante est la notion de perpendicularité. Cette notion demande un produit scalaire et fait intervenir ici et là des polynômes du second degré. Travailler avec le second degré demande la connaissance des racines carrés[98] et donc d'un peu de topologie réelle et de continuité. La résolution dans $\mathbb{R}$ du polynôme du second degré est la proposition 11.116.

14.14.1 Droites et plans dans l'espace

La notion d'application affine entre espaces vectoriels est la définition 10.155.

PROPooONJHooDArmPT

Proposition 14.175 (Équation de plan dans $\mathbb{R}^3$[1])**.**
Si P est un plan dans $\mathbb{R}^3$, alors il existe $v, w \in \mathbb{R}^3$ tels que $\|v\| = \|w\| = 1$, $v \cdot w = 0$ et tels que pour tout $a \in P$, nous avons

$$P = \{a + \lambda v + \mu w \text{ tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \tag{14.417}$$

Dans ce cas l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to P\\ (\lambda, \mu) &\mapsto a + \lambda v + \mu v\end{aligned} \tag{14.418}$$

est une bijection vérifiant

$$\|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)\| = \|\alpha - \beta\| \tag{14.419}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration. Nous démontrons la dernière formule[99]. Soient $x, y, s, t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|\varphi(x, y) - \varphi(s, t)\|^2 &= \|a + xv + yw - a - sv - tw\| && (14.420a)\\ &= \|(x - s)v + (y - t)w\|^2 && (14.420b)\\ &= (x - s)^2 + (y - t)^2 \qquad v, w \text{ orthon.} && (14.420c)\\ &= \|(x, y) - (s, t)\|^2. && (14.420d)\end{aligned}$$

□

[98] Définition 11.97.
[99] Pour le reste, vous pouvez m'envoyer une preuve et je l'ajouterai.

PROPooRACBooQdhyEg

Proposition 14.176 (Équation de droite dans l'espace[1])**.**
Soit une droite D dans $\mathbb{R}^3$. Il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $a \in D$,

$$D = \{a + \lambda w \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{14.421}$$

PROPooQZGVooLTtyQT

Proposition 14.177 ([1])**.**
Si deux droites non confondues de $\mathbb{R}^n$ s'intersectent, alors il existe un unique plan[100] contenant les deux droites.

Démonstration. Soient deux droites D_1 et D_2. Si $a = D_1 \cap D_2$ alors la proposition 14.176 nous assure qu'il existe $v, w \in \mathbb{R}^n$ tels que $D_1 = \{a+\lambda v\}$ et $D_2 = \{a+\mu w\}$. Donc en posant $P = \{a+\lambda v+\mu w \text{ tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ nous avons bien un plan contenant les deux droites.

En ce qui concerne l'unicité, un plan contenant D_1 et D_2 doit contenir les trois points a, $a+v$ et $a+w$ (qui sont non alignés parce que D_1 et D_2 sont non confondues). La proposition 14.149 donne alors l'unicité. □

Une application affine n'est pas linéaire, mais presque au sens où des incréments égaux dans le paramètre donne des incréments égaux dans la valeur.

LEMooEQEAooQaFCMW

Lemme 14.178.
Si f est affine alors pour tout $a, b, v \in V$ nous avons

$$f(a + v) - f(a) = f(b + v) - f(b). \tag{14.422}$$

Démonstration. Simple calcul :

$$f(a + v) - f(a) = u(a + v) + \alpha - u(a) - \alpha = u(a) + u(v) - u(a) = u(v). \tag{14.423}$$

Le même calcul partant de $f(b + v)$ donnera évidemment aussi $u(v)$. □

LEMooGUVMooPXtXnV

Lemme 14.179.
Soit $v_1 \in \mathbb{R}^3$. Il existe des vecteurs v_2 et v_3 tels que les v_i sont deux à deux perpendiculaires.

Démonstration. Nous considérons $w \neq v$ dans $\mathbb{R}^3$ et nous profitons de la proposition 12.58 pour poser $v_2 = v_1 \times w$. Enfin nous définissons $v_3 = v_1 \times v_2$. □

LEMooGXGCooDfgbqG

Lemme 14.180.
Soient trois éléments $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ deux à deux perpendiculaires. Si $x \perp v_1$, alors $x \in \text{Span}\{v_2, v_3\}$.

Démonstration. Il faut se rappeler de la proposition 12.34 qui fait de $\{v_1, v_2, v_3\}$ une partie libre. Elle est donc une base par la proposition 6.20(2).

Soit $x \perp v_1$. Nous le décomposons dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$: $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. En prenant le produit scalaire par v_1, et en tenant compte du fait que $v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_3 = 0$ nous trouvons $0 = v_1 \cdot x = \lambda_1 \|v_1\|^2$. Donc $\lambda_1 = 0$ et $x \in \text{Span}\{v_2, v_3\}$. □

Voici une version dans $\mathbb{R}^3$ de la proposition 14.160.

PROPooVSOQooMwxHNa

Proposition 14.181 ([1])**.**
Il n'existe pas de plan dans $\mathbb{R}^3$ contenant 4 points distincts équidistants.

Démonstration. Soit un plan P dans $\mathbb{R}^2$. Nous considérons la bijection

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to P \\ (\lambda, \mu) &\mapsto a + \lambda v + \mu w \end{aligned} \tag{14.424}$$

de la proposition 14.175. Si a, b, c et d sont 4 points distincts deux à deux équidistants dans P, alors les points $\varphi^{-1}(a)$, $\varphi^{-1}(b)$, $\varphi^{-1}(c)$ et $\varphi^{-1}(d)$ sont 4 points distincts deux à deux équidistants de $\mathbb{R}^2$. La proposition 14.160 dit que de tels points n'existent pas. □

[100] Définition 14.131(4).

14.14.2 Plan médiateur

PROPooSNUDooTxovMz

Proposition 14.182 (plan médiateur[1]).
Soient un espace euclidien V ainsi que deux points distincts $a, b \in V$. Si $m = (a+b)/2$, nous avons

$$\{x \in V \text{ tel que } x - m \perp b - a\} = \{x \in V \text{ tel que } \|x - a\| = \|x - b\|\}. \tag{14.425}$$

Dans le cas de $V = \mathbb{R}^3$, alors cet ensemble est un plan[101].
Ce plan est le ***plan médiateur*** *du segment $[a, b]$.*

Démonstration. Nous notons

$$M = \{x \in V \text{ tel que } x - m \perp b - a\}, \tag{14.426a}$$
$$N = \{x \in V \text{ tel que } \|x - a\| = \|x - b\|\}. \tag{14.426b}$$

(1) $M \subset N$ Soit $x \in M$. Nous avons $(x-m)\cdot(b-a) = 0$, et nous pouvons utiliser Pythagore 12.46 dans les triangles xbm et xma : [SUBEQSooVEIPCooKnyPoq]

$$\|x - a\|^2 = \|x - m\|^2 + \|a - m\|^2 \tag{14.427a}$$
$$\|x - b\|^2 = \|x - m\|^2 + \|m - b\|^2. \tag{14.427b}$$

Vu que m est le milieu, nous avons $a - m = m - b$ et donc $\|a - m\| = \|m - b\|$. Nous voyons donc que les membres de droites des deux équations (14.427) sont égaux. Donc $\|x - a\|^2 = \|x - b\|^2$. Comme une norme est toujours positive, les carrés peuvent être simplifiés : $\|x - a\| = \|x - b\|$.

Donc $x \in N$.

(2) $N \subset M$ Soit $x \in N$. Nous posons $h = \texttt{proj}_{(ab)}(x)$, la projection de x sur la droite (ab). La proposition 14.152 nous dit que h est l'unique point de (ab) tel que $x - h \perp b - a$.

Le théorème de Pythagore 12.46 dans le triangle ahx donne

$$\|x - a\|^2 = \|a - h\|^2 + \|x - h\|^2 \tag{14.428}$$

et dans le triangle bhx il donne :

$$\|b - x\|^2 = \|b - h\|^2 + \|h - x\|^2. \tag{14.429}$$

Par hypothèse nous avons $\|x - a\|^2 = \|x - b\|^2$ et donc

$$\|a - h\| = \|b - h\|. \tag{14.430}$$

Nous cherchons à présent quel(s) point(s) h de la droite (ab) vérifie(nt) cette condition, et nous espérons que ce sera $(a+b)/2$.

Nous cherchons h sous la forme $h = a + \lambda(b - a)$. D'une part nous avons $\|a - h\|^2 = \|\lambda(b-a)\|^2 = \lambda^2\|b - a\|^2$, et d'autre part

$$\|b - h\|^2 = \|b - a - \lambda(b - a)\|^2 = |1 - \lambda|^2\|b - a\|^2 \tag{14.431}$$

Nous en déduisons que $|\lambda| = |1 - \lambda|$. Cela laisse deux possibilités : la première est $\lambda = 1 - \lambda$ qui donne $\lambda = 1/2$ et la seconde est $\lambda = -(1 - \lambda)$ qui est impossible. Donc $\lambda = 1/2$ et

$$h = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}. \tag{14.432}$$

Donc en posant $m = (a+b)/2$ nous avons bien $b - a \perp x - m$.

(3) **C'est un plan** Nous nous mettons maintenant dans le cas où V est l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme usuelle. Posons $f_1 = b - a$ et considérons deux vecteurs f_2, f_3 tels que les f_i soient deux à deux perpendiculaires (lemme 14.179).

Nous allons prouver que $M = \text{Span}\{f_2, f_3\} + m$.

(3a) **Une inclusion** Si $x \in \text{Span}(f_2, f_3) + m$, alors $x = \alpha f_2 + \beta f_3 + m$ et nous avons bien $x - m \perp b - a$.

(3b) **L'autre inclusion** Soit $x \in M$. Donc $x - m \perp b - a$. Le lemme 14.180 nous indique alors que $x - m \in \text{Span}\{f_2, f_3\}$, ce qu'il fallait.

□

[101] Définition 14.131.

14.14.3 Tétraèdre

DEFooMUUMooFVxKyb

Définition 14.183 ([1]).
*Un **tétraèdre régulier** est un ensemble de 4 points A, B, C et D de $\mathbb{R}^3$ deux à deux équidistants.*

Nous allons nommer $\{a_i\}$ les segments entre les points, $\{d_i\}$ les droites sur ces segments, et $\{s_i\}$ les sommets.

Lemme 14.184.
Un tétraèdre régulier existe.

Démonstration. Prenez un triangle équilatéral ABC dans le plan $(.,.,0)$, et prenez ensuite un point D à la verticale du centre, placé à la bonne hauteur pour que les longueurs $\|AD\|$, $\|BD\|$ et $\|CD\|$ soient égales à $\|AB\|$. □

LEMooNWELooZeSEMN

Lemme 14.185.
Si T est un tétraèdre régulier, nous avons $d_i \cap T = a_i$.

LEMooUSKVooQJiBuz

Lemme 14.186.
Les droites $\{d_i\}_{i=1,\dots,6}$ ne sont pas confondues ni parallèles.

Démonstration. Si trois points A, B, C sont alignés, il n'est pas possible d'avoir $\|AB\| = \|AC\| = \|BC\|$. Donc il n'y a pas deux droites parmi les $\{d_i\}$ qui sont confondues.

Supposons que deux des droites AB et CD sont parallèles. En particulier, les points A, B, C et D sont dans un même plan : le plan $A + \text{Span}\{B - A, C - A\}$. Il n'est pas possible d'avoir 4 points dans un plan, tous équidistants deux à deux (proposition 14.181). □

Dans la suite, quand nous parlerons du « tétraèdre », nous parlerons de ses six points et six segments les joignant. L'ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$ ne contient pas les surfaces et les volumes.

LEMooJCMKooOjMqtw

Lemme 14.187.
Soit un tétraèdre régulier T. Un point de $\mathbb{R}^3$ est un sommet si et seulement si il est l'intersection de deux des droites $\{d_i\}$ différentes.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct**

Par définition les sommets sont les points A, B, C, D ; et les droites d_i sont les droites (AB), (AC), (AD), (BC), (DB) et (CD). Donc oui, les sommets sont à des intersections de ces droites.

(2) **Sens inverse** Soit un point $X \in \mathbb{R}^3$ à l'intersection entre deux des d_i. Nous avons déjà vu dans le lemme 14.186 que ces droites ne sont ni parallèles ni confondues. Donc elles ont au plus un point d'intersection. Voyons les couples possibles de droites. Les droites possibles sont (AB), (AC), (AD), (BC), (BD) et (CD). Il y a 15 couples possibles que nous regroupons de la façon suivante :

$(AB),(AC)$	$(AB),(CD)$	(14.433a)
$(AB),(AD)$	$(AC),(BD)$	(14.433b)
$(AB),(BC)$	$(AD),(BC)$	(14.433c)
$(AB),(BD)$		(14.433d)
$(AC),(AD)$		(14.433e)
$(AC),(BD)$		(14.433f)
$(AC),(CD)$		(14.433g)
$(AD),(BD)$		(14.433h)
$(AD),(CD)$		(14.433i)
$(BC),(BD)$		(14.433j)
$(BC),(CD)$		(14.433k)
$(BD),(CD)$		(14.433l)

Dans la colonne de gauche, nous voyons tout de suite que le point d'intersection est un des sommets. Qui de la colonne de droite ? Si $(AB) \cap (CD)$ a une intersection, alors ce sont deux droites coplanaires (proposition 14.177). Dans ce cas, les points A, B, C et D sont coplanaires et équidistants. Impossible par la proposition 14.181.

On a une série de possibilités comme $(AB) \cap (AC)$. Dans ce cas, l'intersection entre ces deux droits est A qui est un des sommets. Ensuite nous avons une série de possibilités comme $(AB) \cap (CD)$. Ces deux droites n'ont pas d'intersection parce que si elles en avaient, les points A, B, C et D seraient dans le même plan, ce qui est impossible[102]. Donc deux droites d_i ont soit, pas d'intersection, soit, une intersection qui est un sommet.

□

14.15 Plan médiateur dans l'espace

LEMooVBVUooOTFFXT

Lemme 14.188.
Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$. Alors le plan médiateur du segment $[A, B]$ est le lieu des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont équidistants de A et B.

Démonstration. Nous nommons σ ce plan.

Soit X un point équidistant de A et B. Alors dans le plan (A, B, X), le triangle ABX est isocèle en X, et la hauteur issue de X coupe perpendiculairement $[A, B]$ en son milieu. Cela prouve que X est dans le plan médiateur du segment $[A, B]$ (lemme 14.159).

Réciproquement, supposons que X soit dans le plan médiateur de $[A, B]$. Soit M le point du segment $[A, B]$ équidistant de A et B. Nous avons $(X, M) \perp (A, B)$. Donc le triangle A, B, X est isocèle en X et donc X est équidistant de A et B. □

14.16 Dérivée : exemples introductifs

14.16.1 La vitesse

Lorsqu'un mobile se déplace à une vitesse variable, nous obtenons la *vitesse instantanée* en calculant une vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus petits. Si le mobile a un mouvement donné par $x(t)$, la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 5$ sera

$$v_{\text{moy}}(2 \to 5) = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2}.$$

Plus généralement, la vitesse moyenne entre 2 et $2 + \Delta t$ est donnée par

$$v_{\text{moy}}(2 \to 2 + \Delta t) = \frac{x(2 + \Delta t) - x(2)}{\Delta t}.$$

Cela est une fonction de Δt. Oui, mais rappellons qu'on a dans l'idée de calculer une vitesse instantanée, c'est-à-dire de voir ce que vaut la vitesse moyenne sur un intervalle très très très très petit. La notion de limite semble toute indiquée pour décrire mathématiquement l'idée physique de vitesse instantanée.

Nous allons dire que la vitesse instantanée d'un mobile est la limite quand Δt tend vers zéro de sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps Δt, ou en formule :

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}. \tag{14.434}$$ Eqvinstlimite

14.16.2 La tangente à une courbe

Passons maintenant à tout autre chose, mais toujours dans l'utilisation de la notion de limite pour résoudre des problèmes intéressants. Comment trouver l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$?

Essayons de trouver la tangente au point P donné de la courbe donnée à la figure 14.1.

La tangente est la droite qui touche la courbe en un seul point sans la traverser. Afin de la construire, nous allons dessiner des droites qui touchent la courbe en P et un autre point Q, et nous allons voir ce qu'il se passe quand Q est très proche de P. Cela donnera une droite qui, certes, touchera la courbe en deux points, mais en deux points *tellement proches que c'est comme si c'étaient les mêmes.* On sent que la notion de limite va encore intervenir.

Nous avons placé le point, sur la figure 14.2, le point P en a et le point Q un peu plus loin, en x. En d'autres termes leurs coordonnées sont

$$P = \big(a, f(a)\big) \qquad Q = \big(x, f(x)\big). \tag{14.435}$$

[102] La proposition 14.177 dit que deux droites qui ont une intersection sont coplanaires.

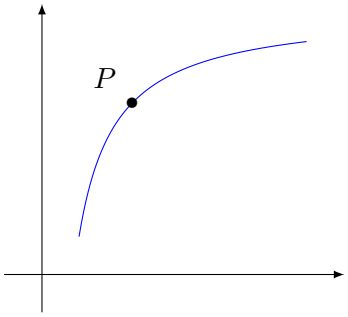


FIGURE 14.1 : Comment trouver la tangente à la courbe au point P ? LabelFigTangenteQuestion

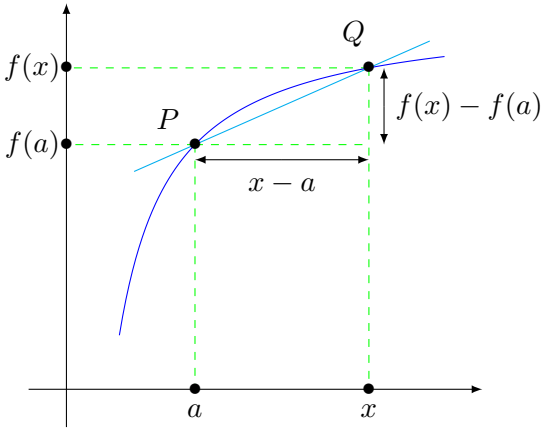


FIGURE 14.2 : Traçons d'abord une corde entre le point P et un point Q un peu plus loin. LabelFigTangenteDetail

En regardant par exemple la figure 14.2, le coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points est donné par

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{14.436}$$

et bang ! Encore le même rapport que celui qu'on avait trouvé à l'équation (14.434) en parlant de vitesses. En regardant la figure 14.3, on constate réellement qu'en faisant tendre x vers a, on obtient la tangente.

14.16.3 L'aire en dessous d'une courbe

SubSecAirePrimInto

Encore un exemple. Nous voudrions bien pouvoir calculer l'aire en dessous d'une courbe. Nous notons $S_f(x)$ l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x, c'est-à-dire l'aire bleue de la figure 14.4.

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x+\Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x+\Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x+\Delta x)-S_f(x)=f(x)\Delta x, \tag{14.437}$$

c'est-à-dire

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S_f(x+\Delta x)-S_f(x)}{\Delta x}. \tag{14.438}$$

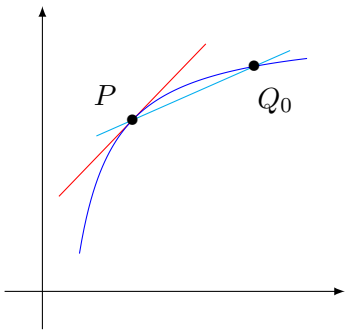
Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en dessous de f. Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

Nous avons déjà vu que calculer la dérivée d'une fonction n'est pas très compliqué. Aussi étonnant que cela puisse paraitre, il se fait que le processus inverse est très compliqué : il est en général extrêmement difficile (et même souvent impossible) de trouver une fonction dont la dérivée est une fonction donnée.

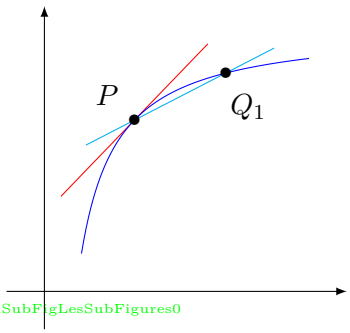
Une fonction dont la dérivée est la fonction f s'appelle une **primitive** de f, et la fonction qui donne l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x est notée

$$S_f(x)=\int_0^x f(t)dt. \tag{14.439}$$

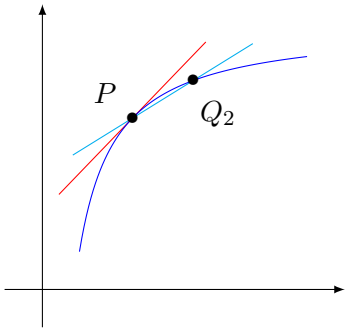
Nous pouvons nous demander si, pour une fonction f donnée, il existe une ou plusieurs primitives, c'est-à-dire si il existe une ou plusieurs fonctions F telles que $F'=f$. La réponse viendra par le corolaire 14.225.



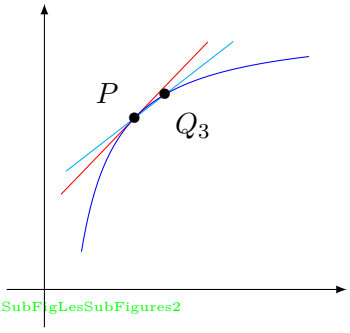
(a) Pas très bon …



(b) …de mieux en mieux …



(c) …de mieux en mieux …



(d) …presque parfait

FIGURE 14.3 : Recherche de la tangente par approximations successives. LabelFigLesSubFigures

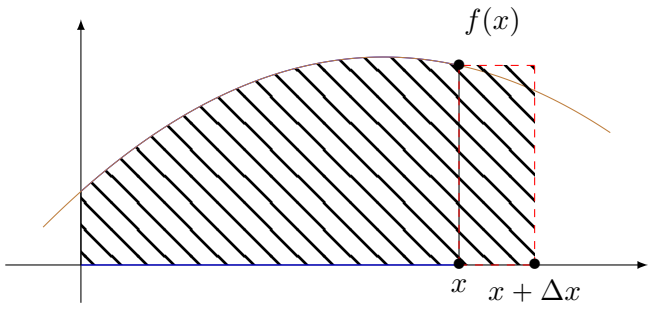


FIGURE 14.4 : L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime l'augmentation de l'aire lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$. LabelFigNOCGooYRHLCn

14.17 Dérivation de fonctions réelles

seccontetderiv

Exemple 14.189.
Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est continue et dérivable[103]. Exceptionnellement (bien qu'on sache que la dérivabilité implique la continuité), montrons ces deux assertions séparément.

Continuité Pour prouver la continuité au point $a \in \mathbb{R}$ nous devons montrer que

$$\lim_{x \to a} x = a \tag{14.440}$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\, |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \epsilon \tag{14.441}$$

ce qui est clair en prenant $\delta = \epsilon$.

Dérivabilité Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons la limite du quotient différentiel

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} 1 = 1 \tag{14.442}$$

ce qui prouve que f est dérivable et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de $\mathbb{R}$.

[103] Définition 12.298.

On a donc montré que la fonction $x \mapsto x$ est continue, dérivable, et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de son domaine.

△

PropSFyxOWF

Proposition 14.190.
Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Démonstration. Soit I un intervalle sur lequel la fonction f est dérivable, et soit $x_0 \in I$. Nous allons prouver la continuité de f en x_0.

Si ϵ est assez petit, nous pouvons poser

$$\begin{aligned} g\colon]-\epsilon,\epsilon[\setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \end{aligned} \tag{14.443}$$

En vertu de la proposition 14.8(2), nous avons

$$\lim_{h\to 0} hg(h) = \big(\lim_{h\to 0} h\big)\big(\lim_{h\to 0} g(h)\big) \tag{14.444a}$$
$$= 0 \cdot f'(x_0) \tag{14.444b}$$
$$= 0, \tag{14.444c}$$

autrement dit, $\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=0$ ou encore

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0). \tag{14.445}$$

La proposition 9.252 dit alors que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce signifie la continuité de f en vertu du théorème 14.54. □

THOooFFOZooCYGets

Théorème 14.191.
Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Démonstration. Soient $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. Nous supposons que f n'est pas continue en a et nous allons en déduire qu'elle n'est pas non plus dérivable en a. Pour cela nous considérons le lien entre limite et continuité donné dans le théorème 14.54. Nier que f est continue en a revient à dire qu'il existe un voisinage V de $f(a)$ tel que

$$\forall r>0,\ \exists \epsilon<r \text{ tel que } f(a+\epsilon)\notin V. \tag{14.446}$$

Si $B\big(f(a),R\big)\subset V$[104], et si $r=1/n$, nous construisons une suite $\epsilon_n\to 0$ telle que

$$|f(a+\epsilon_n)-f(a)|>R. \tag{14.447}$$

Avec cela nous avons

$$\frac{|f(a+\epsilon_n)-f(a)|}{\epsilon_n} > \frac{R}{\epsilon_n}\to\infty. \tag{14.448}$$

Donc la fonction f ne peut pas être dérivable en a. □

Remarque 14.192.
La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : il existe bien des fonctions qui sont continues en un point x_0, mais qui ne sont pas dérivables en x_0. La fonction valeur absolue, $x\mapsto|x|$, par exemple est continue sur tout $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Si f est une fonction dérivable, il peut arriver que la fonction dérivée f' soit elle-même dérivable. Dans ce cas nous notons f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la fonction f'. Cette fonction f'' est la **dérivée seconde** de f. Elle peut encore être dérivable ; dans ce cas nous notons $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite. Nous définissons $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$ la dérivée n^{e} de f. Nous posons évidemment $f^{(0)}=f$.

14.17.1 Exemples

PROPooMEXAooZJJPYx

Proposition 14.193.
La dérivé de la fonction $x\mapsto x$ vaut 1, en notations compactes : $(x)'=1$.

Démonstration. D'après la définition de la dérivée, si $f(x)=x$, nous avons

$$f(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon)-x}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\epsilon}=1, \tag{14.449}$$

et c'est déjà fini. □

[104] Existence par la définition de la topologie métrique 9.158.

14.17.1.1 La fonction carré

Prenons ensuite $f(x) = x^2$. En utilisant le produit remarquable $(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$ nous trouvons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a. \tag{14.450}$$

Lorsque $x \to a$, cela devient $2a$. Nous avons par conséquent

$$f'(x) = 2x. \tag{14.451}$$

LemDeccCarr

Lemme 14.194.
Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Démonstration. Utilisons la définition, et remplaçons f par sa valeur :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} && \text{(14.452a)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x + \epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} && \text{(14.452b)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - x^2}{\epsilon} && \text{(14.452c)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon(2x + \epsilon)}{\epsilon} && \text{(14.452d)}\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} (2x + \epsilon) && \text{(14.452e)}\\
&= 2x, && \text{(14.452f)}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver. □

14.17.1.2 La fonction racine carré

Considérons maintenant la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}\\
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.
\end{aligned} \tag{14.453}$$

Lorsque $x \to a$, nous obtenons

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \tag{14.454}$$

Notons que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ n'existe pas en $x = 0$. En effet elle serait donnée par le quotient

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{14.455}$$

Mais si x devient très petit, la dernière fraction tend vers l'infini.

14.17.2 Interprétation géométrique de la dérivée : tangente

Considérons le **graphe** de la fonction f sur I, c'est-à-dire l'ensemble

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \text{ tel que } x \in I\big\}. \tag{14.456}$$

Le nombre

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{14.457}$$

est la pente de la droite qui joint les points $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(a, f(a)\big)$, voir la figure 14.5.

Étant donné que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $\big(a, f(a)\big)$, l'équation de la tangente est

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \tag{14.458}$$

EqTefese

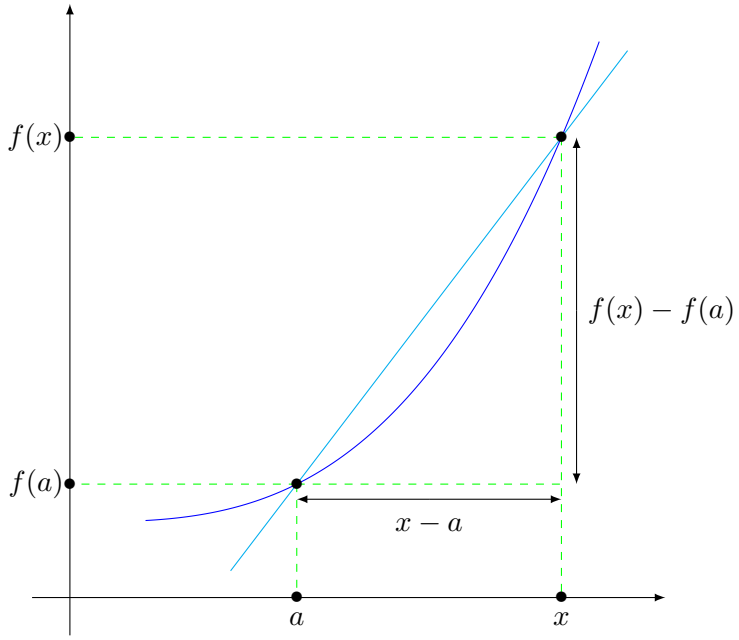


FIGURE 14.5 : Le coefficient directeur de la corde entre a et x. LabelFigGWOYooRxHKSm

14.17.3 Interprétation géométrique de la dérivée : approximation affine

Le fait que la fonction f soit dérivable au point $a \in I$ signifie que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \tag{14.459}$$

pour un certain nombre ℓ. Cela peut être réécrit sous la forme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell = 0, \tag{14.460}$$

ou encore

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \ell(x - a)}{x - a} = 0. \tag{14.461}$$

Introduisons la fonction

$$\alpha(t) = \frac{f(a + t) - f(a) - t\ell}{t}. \tag{14.462}$$

Cette fonction est faite exprès pour que

$$\alpha(x - a) = \frac{f(x) - f(a) - \ell(x - a)}{x - a}; \tag{14.463}$$ EqIntermsaxaama

par conséquent $\lim_{x\to a} \alpha(x - a) = 0$. Nous récrivons l'équation (14.463) sous la forme

$$f(x) - f(a) - \ell(x - a) = (x - a)\alpha(x - a). \tag{14.464}$$ EqCodeDerviffxam

Le second membre tend vers zéro lorsque x tend vers a avec une « vitesse au carré » : c'est le produit de deux facteurs tous deux tendant vers zéro. Si x n'est pas très loin de a, il n'est donc pas une mauvaise approximation de dire

$$f(x) - f(a) - \ell(x - a) \simeq 0, \tag{14.465}$$

c'est-à-dire

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a). \tag{14.466}$$ Eqfxsimesfa

Nous avons retrouvé l'équation (14.458). La manipulation que nous venons de faire revient donc à dire que la fonction f, au voisinage de a, est bien approximée par sa tangente.

L'équation (14.466) peut être aussi écrite sous la forme

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x \tag{14.467}$$ EqfxdxSimeqfxfpx

qui est une approximation d'autant meilleure que Δx est petit.

14.18 Règles de calcul

D'abord une dérivée facile, qui sera utile pour démontrer la formule de dérivation d'un quotient.

Lemme 14.195.
Nous avons :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{14.468}$$

Démonstration. En posant $f(x) = 1/x$, nous avons le calcul

$$\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} = \frac{\frac{1}{x+\epsilon}-\frac{1}{x}}{\epsilon} = \frac{x-(x+\epsilon)}{\epsilon x(x+\epsilon)} = \frac{-1}{x(x+\epsilon)}. \tag{14.469}$$

Nous trouvons le résultat en passant à la limite et en tenant compte de la proposition 14.11 sur la limite d'un quotient. □

PROPooOUZOooEcYKxn

Proposition 14.196 ([468, 469, 470])**.**
Nous avons les règles suivantes.

ITEMooTFNPooYngHnD

(1) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ est dérivable en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a). \tag{14.470}$$

ITEMooIPLRooOZXqMg

(2) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (λf) est dérivable en a et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a). \tag{14.471}$$

ITEMooMQERooBCqnvS

(3) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{14.472}$$

Cette formule est appelée ***règle de Leibniz***[105]*.*

ITEMooLYZCooVUPTyh

(4) Soient deux intervalles I, J dans $\mathbb{R}$. Soient des fonctions $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Soit encore $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{14.473}$$

ITEMooMUNQooLiKffz

(5) Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$; supposons que $g(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{14.474}$$

En particulier, la dérivation est une opération linéaire sur l'espace des fonctions infiniment dérivables.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$\frac{(f+g)(a+\epsilon)-(f+g)(a)}{\epsilon} = \frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} + \frac{g(a+\epsilon)-g(a)}{\epsilon}. \tag{14.475}$$

Par hypothèse, les deux termes de droite ont une limite lorsque $\epsilon \to 0$. Donc le membre de gauche a une limite qui vaut la somme des deux limites[106], c'est-à-dire $f'(a) + g'(a)$.

(2) **Pour (2)** Écrivons la définition de la dérivée avec (λf) au lieu de f, et calculons un petit peu :

$$(\lambda f)'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\lambda f)(x+\epsilon)-(\lambda f)(x)}{\epsilon} \tag{14.476a}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\lambda\big(f(x+\epsilon)\big)-\lambda f(x)}{\epsilon} \tag{14.476b}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \lambda\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \tag{14.476c}$$

$$= \lambda \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \tag{14.476d}$$

$$= \lambda f'(x). \tag{14.476e}$$

[105] Pour des formes plus générales, voir la proposition 32.10 et le lemme 32.11.
[106] Limite de sommes, proposition 14.8(1).

(3) **Pour (3), règle de Leibniz** La définition de la dérivée dit que

$$(fg)'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon}. \tag{14.477}$$

La subtilité est d'ajouter au numérateur la quantité $-f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon)$, ce qui est permis parce que cette quantité est nulle[107]. Le numérateur de (14.477) devient donc

$$\begin{aligned} f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x+\epsilon) + f(x)g(x+\epsilon) - f(x)g(x) \\ = g(x+\epsilon)\big(f(x+\epsilon) - f(x)\big) + f(x)\big(g(x+\epsilon) - g(x)\big), \end{aligned} \tag{14.478}$$

où nous avons effectué deux mises en évidence. Étant donné que nous avons deux termes, nous pouvons couper la limite en deux :

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon)\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0} f(x)\frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} + f(x) \lim_{\epsilon\to 0} \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{14.479}$$

où nous avons utilisé le théorème 14.14 pour scinder la première limite en deux, ainsi que la proposition 14.8(2) pour sortir le $f(x)$ de la limite dans le second terme. Maintenant, dans le premier terme, nous avons évidemment[108] $\lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon) = g(x)$. Les limites qui restent sont les définitions classiques des dérivées de f et g au point x :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \tag{14.480}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(4) **Pour (4)** Nous posons $b = f(a)$ et nous considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} u\colon J &\to \mathbb{R} \\ y \mapsto u(y) &= \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.481}$$

Vu que g est dérivable en b, la seconde ligne existe et u est continue en $y = b = f(a)$. C'est la définition de la dérivée.

Mais f est continue en a, donc $u \circ f$ est également continue en a, et nous avons

$$\lim_{x\to a} (u \circ f)(x) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{14.482}$$

En réécrivant la définition de u en $f(x)$, l'expression suivante est une fonction continue de x :

$$u\big(f(x)\big) = \begin{cases} \dfrac{g\big(f(x)\big) - g(b)}{f(x) - b} & \text{si } f(x) \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases} \tag{14.483}$$

Si $f(x) \neq b$ nous avons :

$$g\big(f(x)\big) - g(b) = u\big(f(x)\big)\big(f(x) - b\big). \tag{14.484}$$

Si par contre $f(x) = b$, en réalité, l'égalité (14.484) est encore valable parce qu'elle se résume à $0 = 0$. Nous divisons par $x - a$ et nous avons l'égalité

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} = u\big(f(x)\big)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{14.485}$$

qui est valable sur $I \setminus \{a\}$.

Il ne s'agit pas maintenant de prendre la limite $x \to a$ des deux côtés, parce que la limite du membre de gauche est précisément ce que ce théorème s'efforce de prouver exister. Nous montrons que la limite du membre de gauche existe en montrant que celle de droite existe.

[107] Nous avons déjà fait le coup d'ajouter et enlever la même chose durant la démonstration du théorème 14.14. C'est une technique assez courante en analyse.

[108] Pas tout à fait évidemment : selon le théorème 14.54, *limite et continuité*, il faut que g soit continue.

D'une part, $u \circ f$ est continue et

$$\lim_{x\to a} u\big(f(x)\big) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{14.486}$$

D'autre part, f est dérivable en a, donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a). \tag{14.487}$$

Tout cela pour dire qu'à droite, la limite existe et vaut $g'(b)f'(a)$. Donc nous avons l'existence de la limite que nous définissons $(g\circ f)'(a)$, et la valeur

$$\lim_{x\to a} \frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)}{x-a} = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{14.488}$$

Le résultat est prouvé.

(5) **Pour (5)** Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{14.489}$$

La fonction g est dérivable en a, la fonction i est dérivable en $g(a)$. Donc par le théorème de dérivation des fonctions composées[109], la fonction $i\circ g$ est dérivable en a et

$$(i\circ g)'(a) = i'\big(g(a)\big)g'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \tag{14.490}$$

Pour le quotient, nous utilisons la formule de la dérivée du produit sur $\frac{f}{g}(x) = f(x)\frac{1}{g(x)}$ pour dire que f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}, \tag{14.491}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 14.197.
Nous ne pouvons pas dire que la dérivée est une opération linéaire sur l'espace des fonctions dérivables. Certes la proposition 14.196 implique entre autres que l'ensemble des fonctions dérivables est un espace vectoriel. Mais la dérivée d'une fonction dérivable n'est pas spécialement dérivable.

Remarque 14.198.
La formule $(1/u)' = -u'/u^2$ ne peut pas être vue comme un cas particulier de $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}$ (proposition 14.476) parce que cette formule est utilisée dans la démonstration de la formule générale.

LEMooZQIAooVbgFKo

Lemme 14.199 ([1]).
Soit le monôme $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donné par $f(x)=x^n$. Alors

ITEMooXPYKooZeZsMg

(1) f est dérivable et $f'(x) = nx^{n-1}$

ITEMooQKYJooKqZhRS

(2) Si $k \leqslant n$ nous avons

$$f^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}. \tag{14.492}$$

Démonstration. Pour le point (1), c'est la règle de Leibniz de la proposition 14.196(3) couplée à une récurrence sur n et la dérivée $x' = 1$ de la proposition 14.193.

Pour (2), nous faisons une récurrence sur k, le cas $k=1$ étant le point (1). Nous avons

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) && \text{(14.493a)}\\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}(n-k-1)x^{n-k-2} && \text{(14.493b)}\\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-2)}x^{n-k-2} && \text{(14.493c)}\\ &= \frac{(n-1)!}{(n-(k+1)-1)}x^{n-(k+1)-1}. && \text{(14.493d)} \end{aligned}$$

[109] Proposition 14.196(4).

□

Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, nous posons la définition suivante.

DEFooNEPUooWOMpyu

Définition 14.200.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables. Nous définissons la fonction f' par

$$f'(x) = \sum_i f_i'(x) e_i, \tag{14.494}$$

c'est-à-dire une dérivation composante par composante.

Cette définition est celle pour une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, et elle est facile. Très différente est la situation d'une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans laquelle il faudra introduire la notion de différentielle[110].

LEMooXHVBooHYjXdq

Lemme 14.201.
Soit une fonction dérivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous posons

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + \lambda t) \end{aligned} \tag{14.495}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Alors g est dérivable et $g'(0) = \lambda f'(a)$.

Démonstration. Nous devons prouver que la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{g(\epsilon) - g(0)}{\epsilon} \tag{14.496}$$

existe et vaut $\lambda f'(a)$. Nous y allons avec les accroissements finis 12.311 :

$$g(\epsilon) - g(0) = f(a + \lambda\epsilon) - f(a) = f(a) + \lambda\epsilon f'(a) - f(a) = \lambda\epsilon f'(a). \tag{14.497}$$

Le quotient différentiel devient donc

$$\frac{g(\epsilon) - g(0)}{\epsilon} = \frac{\lambda\epsilon f'(a)}{\epsilon} = \lambda f'(a). \tag{14.498}$$

Il n'y a donc pas de problème à passer à la limite et nous avons $g'(0) = f'(a)$. □

Par rapport à la dérivation, les produits scalaire et vectoriel vérifient une règle de Leibniz.

PROPooFKKHooQZGXhE

Proposition 14.202.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si u et v sont dans $C^1(I, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(u(t) \cdot v(t)\big) &= \big(u'(t) \cdot v(t)\big) + \big(u(t) \cdot v'(t)\big) \\ \frac{d}{dt}\big(u(t) \times v(t)\big) &= \big(u'(t) \times v(t)\big) + \big(u(t) \times v'(t)\big). \end{aligned} \tag{14.499}$$

EqFormLeibProdscalVect

Démonstration. Nous considérons des fonctions dérivables $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, et nous posons $\varphi(t) = f(t) \cdot g(t)$. En ce qui concerne la dérivée de la fonction $f \cdot g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous devons étudier la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(t+\epsilon) - \varphi(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t+\epsilon) \cdot g(t+\epsilon) - f(t) \cdot g(t)}{\epsilon}. \tag{14.500}$$

EQooGRFKooNHeeiW

La fonction f étant dérivable, la proposition 12.311 nous donne une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(t+\epsilon) = f(t) + \epsilon f'(t) + \epsilon\alpha(\epsilon) \tag{14.501}$$

et $\lim_{\epsilon \to 0} \alpha(\epsilon) = 0$. En substituant cela dans le numérateur de (14.500) nous calculons un peu :

SUBEQSooMNAZooQjGGpg

$$\begin{aligned} f(t+\epsilon) \cdot g(t+\epsilon) - f(t) \cdot g(t) &= \big(f(t) + \epsilon f'(t) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \cdot \big(g(t) + \epsilon g'(t) + \epsilon\beta(\epsilon)\big) && \text{(14.502a)} \\ &\quad - f(t) \cdot g(t) && \text{(14.502b)} \\ &= \epsilon f(t) \cdot g'(t) + \epsilon f(t) \cdot \beta(\epsilon) && \text{(14.502c)} \\ &\quad + \epsilon f'(t) \cdot g(t) + \epsilon^2 f'(t) \cdot g'(t) + \epsilon^2 f'(t) \cdot \beta(\epsilon) && \text{(14.502d)} \\ &\quad + \epsilon\alpha(\epsilon) \cdot g(t) + \alpha(\epsilon)\epsilon^2 \cdot g'(t) + \epsilon^2\alpha(\epsilon) \cdot \beta(\epsilon). && \text{(14.502e)} \end{aligned}$$

[110] Ce sera pour la définition 12.296.

En divisant cela par ϵ et en prenant la limite $\epsilon \to 0$, il nous reste

$$f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t). \tag{14.503}$$

Pour le produit vectoriel nous utilisons le développement du lemme 12.50 et la règle de Leibnitz de la proposition 14.196(3) :

$$\frac{d}{dt}\big[u(t) \times v(t)\big] = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt}\big[u(t)_i v(t)_j\big] \tag{14.504a}$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \big[u'(t)_i v(t)_j + u(t)_i v'(t)_j\big] \tag{14.504b}$$

$$= u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t). \tag{14.504c}$$

□

14.18.1 Dérivée de la réciproque

PropMRBooXnnDLq

Proposition 14.203 ([471]).
Soit $f\colon I \to J$ une fonction bijective, continue et dérivable[111]*. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et sa dérivée est donnée par*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{14.505}$$

EQooXGJEooSRaQBe

Démonstration. Pour rappel, une fonction dérivable est toujours continue (proposition 14.190).

Prouvons que f^{-1} est dérivable au point $b = f(a) \in J$. Étant donné que f est dérivable en a, nous avons

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{14.506}$$

EqJEWooSjOrfk

Par ailleurs, étant donnée la continuité de f^{-1} donnée par la proposition 14.52(4), nous avons

$$\lim_{\epsilon \to 0} f^{-1}(b + \epsilon) = f^{-1}(b) = a. \tag{14.507}$$

Nous pouvons donc remplacer dans (14.506) tous les x par $f^{-1}(b+\epsilon)$ et prendre la limite $\epsilon \to 0$ au lieu de $x \to a$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f\big(f^{-1}(b+\epsilon)\big) - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - a} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{b + \epsilon - f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)} \\ &= \frac{1}{\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f^{-1}(b+\epsilon) - f^{-1}(b)}{\epsilon}} \\ &= \frac{1}{(f^{-1})'(b)}. \end{aligned} \tag{14.508}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(a) = b$ et $a = f^{-1}(b)$. □

Nous cherchons à construire une application dérivable et d'inverse dérivable entre $\mathbb{R}$ (en entier) et un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Il serait tentant de prendre l'application arc tangente

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}, \tag{14.509}$$

mais elle ne sera définie que dans le théorème 20.44.

Nous aimerions donner le logarithme comme exemple, mais l'exponentielle ne sera définie que dans longtemps, à partir des séries entières. Allez voir l'exemple 17.105 pour le logarithme comme réciproque de l'exponentielle.

[111] Définition 12.298.

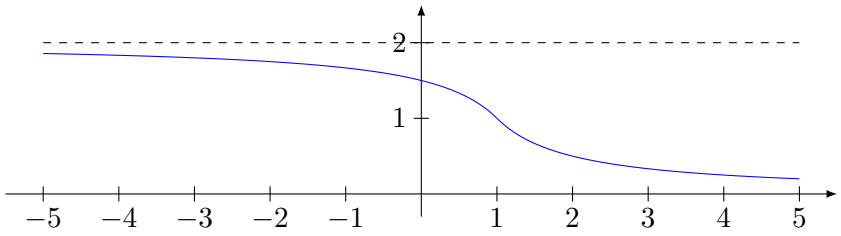
PROPooKPACooElwCbh

Proposition 14.204 (difféomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un ouvert borné)**.**
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to]0,2[\\ x &\mapsto \begin{cases} 2+\frac{1}{x-2} & si\ x\leqslant 1 \\ \frac{1}{x} & si\ x>1. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.510}$$

EQooOSPIooNWZBCs

est un C^1-difféomorphisme[112].



Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Bijection** Nous voyons vite que cette fonction est strictement décroissante ; et un calcul de limite nous dit qu'il s'agit d'une bijection dérivable

$$f\colon \mathbb{R} \to]0,2[. \tag{14.511}$$

La proposition 14.203 s'applique et la bijection réciproque est également dérivable (donc continue aussi).

(2) **Continue en $x=1$** Il suffit de calculer les deux valeurs. Dans les deux cas nous obtenons $f(1)=1$.

(3) **Dérivable en $x=1$**

En ce qui concerne la dérivabilité en $x=1$, nous devons étudier

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(1+\epsilon)-f(1)}{\epsilon}. \tag{14.512}$$

La limite à gauche est égale à la dérivée de $x\mapsto 2+\frac{1}{x-2}$ en $x=1$ et la limite à droite est égale à la dérivée de $x\mapsto 1/x$ en $x=1$. Dans les deux cas nous trouvons -1.

(4) **Dérivée continue** La proposition 14.203 dit que

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(y)}. \tag{14.513}$$

EQooNTHEooUQcMHT

Vu que f' et f^{-1} sont continues, $f'\circ f^{-1}$ est continue[113]. Et comme elle ne s'annule pas, la formule (14.513) donne une fonction continue[114].

□

PROPooFEJXooMjsvFo

Proposition 14.205 ([472])**.**
L'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{R}^n &\to B(0,1) \\ x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}} \end{aligned} \tag{14.514}$$

est un C^∞-difféomorphisme[115].

Démonstration. En plusieurs parties.

[112] Définition 12.321.
[113] Proposition 11.87
[114] Proposition 11.85.
[115] Définition 12.321.

(1) **Injective** Notons pour commencer que $\psi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\psi(x) = \psi(y)$. Nous avons

$$\frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}, \tag{14.515}$$

EQooYGIWooBxSxyd

ce qui donne immédiatement que $y = \lambda x$. Nous devons prouver que $\lambda = 1$. Nous remplaçons y par λx dans le membre de droite de (14.515). En posant $r = \|x\|^2$ nous avons

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2 r}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r}}. \tag{14.516}$$

Nous passons au carré et nous résolvons par rapport à r : $(1 + r)\lambda^2 = 1 + \lambda^2 r$, ce qui donne $\lambda^2 = 1$ et donc $\lambda = \pm 1$. Étant donné que

$$\frac{x}{\sqrt{1 + r}} = \frac{\lambda x}{\sqrt{1 + \lambda^2 r}}, \tag{14.517}$$

nous ne pouvons avoir $\lambda = -1$ que poir $x = 0$.

(2) **surjectif** D'abord $0 = \psi(0)$. Nous considérons $y \in B(0, 1)$ et nous cherchons un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(x) = y$. Nous le cherchons sous la forme $x = \lambda y$ (où λ est une fonction de y). Nous avons à résoudre pour λ l'équation

$$\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2 \|y\|^2} = 1. \tag{14.518}$$

Cela nous mène à

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}, \tag{14.519}$$

et nous vérifions qu'en posant $\lambda = 1$, c'est bon. Notons d'abord qu'il n'y a aucun problèmes de zéros parce que $y \in B(0, 1)$ donne toujours $1 - \|y\|^2 > 0$.

Maintenant, la vérification :

$$\psi\left(\frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}\right) = \frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\|y\|^2}{1 - \|y\|^2}}}. \tag{14.520}$$

En travaillant un peu nous trouvons que le tout est égal à y.

(3) **ψ est C^∞** Ça se voit sur la formule parce que ce qui est dans la racine carrée est toujours strictement positif (et même borné par 1 vers le bas).

(4) **Calcul de la réciproque** Le calcul de la réciproque est déjà fait dans la partie sur la surjectivité. Nous notons juste le résultat :

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \colon B(0, 1) &\to \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto \frac{y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}. \end{aligned} \tag{14.521}$$

EQooOTQZooBXiZGb

(5) **Inverse est C^∞** Cela se voit encore sur la formule (14.521), en gardant en tête que $y \in B(0, 1)$.

□

14.18.2 Dérivée de fonction composée

PROPooDONLooWthqRR

Proposition 14.206 ([473]).
Soient des intervalles I et J dans $\mathbb{R}$ ainsi que des fonctions $f \colon I \to \mathbb{R}$ et $g \colon J \to \mathbb{R}$ tels que $g(J) \subset I$. Soit $a \in J$. Nous supposons que f est dérivable en $g(a)$ et g est dérivable en a.

Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)g'(a). \tag{14.522}$$

Démonstration. Nous considérons la formule des accroissements finis sous la forme (12.910). Pour la fonction g, nous écrivons

$$g(a + \epsilon) = g(a) + \epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon) \tag{14.523}$$

avec $\alpha(\epsilon) \to 0$. Et de même pour $f\big(g(a)\big)$:

$$f\big(g(a+\epsilon)\big) = f\big(g(a) + \epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{14.524a}$$
$$= f\big(g(a)\big) + \big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big)f'\big(g(a)\big) + \epsilon\beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{14.524b}$$

avec $\beta(\epsilon) \to 0$. Nous avons donc, pour ϵ assez petit pour que tout reste dans I et J[116], que

$$\frac{(f\circ g)(a+\epsilon) - (f\circ g)(a)}{\epsilon} = \big(g'(a) + \alpha(\epsilon)\big)f'\big(g(a)\big) + \beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big). \tag{14.525}$$

En ce qui concerne la limite $\epsilon \to 0$, nous avons entre autres,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) = 0, \tag{14.526}$$

et donc bien $(f\circ g)'(a) = g'(a)f'\big(g(a)\big)$. □

14.18.3 Dérivée de fonction périodique

DEFooHUZAooYyBmwe

Définition 14.207.
*Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **périodique** si il existe $T > 0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(x+T) = f(x) \tag{14.527}$$

*pour tout $x \in \mathbb{R}$. Un tel T est une **période** de f. Nous disons que T est* la *période de f si il est le minimum vérifiant la propriété.*

LEMooOGFGooCnTDjO

Lemme 14.208 ([1])**.**
Si f est une fonction périodique de période T, alors toutes les périodes sont de la forme kT avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Considérons une période t. Nous avons $t > T$ par hypothèse. Si t n'est pas un multiple de T, la division euclidienne 3.40 permet d'écrire $t = kT + l$ avec $l < T$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x+t) = f(x+kT+l) = f(x+l). \tag{14.528}$$

Donc l est une période de f. Cela n'est pas possible parce que T est la plus petite. □

LEMooHWQYooXcNLts

Lemme 14.209.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et si T est une période de f, alors f' est périodique et T en est une période.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse f est dérivable en a et les limites qui suivent existent :

$$f'(a+T) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+T+\epsilon) - f(a+T)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = f'(a). \tag{14.529}$$

Nous avons utilisé la condition de périodicité en a et en $a+\epsilon$. □

14.19 Dérivation et croissance

14.19.1 Théorèmes de Rolle

ThoRolle

Théorème 14.210 (Théorème de Rolle[474, 475])**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle compact, soit $[m,M]$ (théorème 9.298). Si $m = M$, alors le théorème est évident : c'est que la fonction est constante, et la dérivée est par conséquent nulle. Supposons que $M > f(a)$ (il se peut que $M = f(a)$, mais alors si f n'est pas constante, il faut avoir $m < f(a)$ et le reste de la preuve peut être adaptée).

Comme M est dans l'image de $[a,b]$ par f, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$. Considérons maintenant la fonction

$$\tau(x) = \frac{f(c+x) - f(c)}{x}. \tag{14.530}$$

[116] Et c'est là qu'on utilise la continuité de f et g garantie par la proposition 14.190.

Par définition, $\lim_{x\to 0}\tau(x)=f'(c)$. Par hypothèse, si $u<c$,

$$\tau(u-c)=\frac{f(u)-f(c)}{u-c}>0 \tag{14.531}$$

parce que $u-c<0$ et $f(u)-f(c)<0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0}\tau(x)\geqslant 0$. Nous avons aussi, pour $v>c$,

$$\tau(v-c)=\frac{f(v)-f(c)}{v-c}<0 \tag{14.532}$$

parce que $v-c>0$ et $f(v)-f(c)<0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0}\tau(x)\leqslant 0$. Mettant les deux ensemble, nous avons $f'(c)=\lim_{x\to 0}\tau(x)=0$, et c est le point que nous cherchions. □

Voici une généralisation du théorème de Rolle, dans le cas où nous n'aurions pas deux points sur lesquels la fonction est identique, mais deux points en lesquels la limite de la fonction est identique. Typiquement, lorsque les points en question sont $\pm\infty$.

THOooXDTBooFeSZoK

Théorème 14.211 (Généralisation du théorème de Rolle[474])**.**
Soient $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Soit une fonction dérivable $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to b}f(x)=\ell \tag{14.533}$$

avec $\ell\in\bar{\mathbb{R}}$. Alors il existe $x\in]a,b[$ tel que $f'(x)=0$.

Démonstration. Soit un difféomorphisme[117] strictement croissant $\varphi\colon\mathbb{R}\to]\alpha,\beta[$. Pour cela vous pouvez bricoler quelque chose à partie de la proposition 14.204. Mais n'utilisez pas la fonction arc tangente, parce qu'elle n'est définie qu'au théorème 20.44.

Nous posons $\tilde{a}=\varphi(a)$, $\tilde{b}=\varphi(b)$ et

$$g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon]\tilde{a},\tilde{b}[\to]\alpha,\beta[. \tag{14.534}$$

Cela est une fonction dérivable et continue sur $[\tilde{a},\tilde{b}]$ en posant $g(\tilde{a})=g(\tilde{b})=\varphi(\ell)$.

Donc il existe $\tilde{c}\in]\tilde{a},\tilde{b}[$ tel que $g'(\tilde{c})=0$. En posant $c=\varphi^{-1}(\tilde{c})$ nous avons $c\in]a,b[$ et, en utilisant de nombreuses fois la règle de dérivation des fonctions composées 14.196(4),

$$\begin{aligned}
f'(c)&=f'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && \text{(14.535a)}\\
&=(\varphi^{-1})'\Big((g\circ\varphi)\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big)\Big)(g\circ\varphi)'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && \text{(14.535b)}\\
&=(\varphi^{-1})'\big(g(\tilde{c})\big)\underbrace{g'(\tilde{c})}_{=0}\varphi'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && \text{(14.535c)}\\
&=0. && \text{(14.535d)}
\end{aligned}$$

□

Une autre généralisation du théorème de Rolle, avec des dérivées d'ordre supérieur :

PROPooCPCAooJjOZNy

Proposition 14.212 ([476])**.**
Soit un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$ contenant a,b ($a\neq b$). Soit une fonction $f\in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Si $f(a)=f(b)$ et si $f^{(j)}(a)=0$ pour $j=1,\dots,n$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c)=0$.

Démonstration. Le théorème de Rolle 14.210 nous dit qu'il existe $c_1\in]a,b[$ tel que $f'(c_1)=0$. Mais alors $f'(a)=f'(c_1)=0$, et le théorème de Rolle appliqué à f' donne $c_2\in]a,c_1[$ tel que $f''(c_2)=0$. Continuant ainsi n fois, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c)=0$. □

PropGFkZMwD

Proposition 14.213.
Si f et f' sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et si f' est strictement positive sur $[a,b]$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

De la même manière, si f' est strictement négative sur $[a,b]$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

[117] Définition 12.321.

Démonstration. Nous n'allons prouver que la première partie. La seconde partie se prouve en considérant $-f$ et en invoquant alors la première[118]. Prenons x_1 et x_2 dans $[a,b]$ tels que $x_1 < x_2$. Par hypothèse, pour tout x dans $[x_1, x_2]$, nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{14.536}$$

Maintenant, la proposition 14.13 dit que quand une limite est positive, alors la fonction dans la limite est positive sur un voisinage. En appliquant cette proposition à la fonction

$$r(\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \tag{14.537}$$

dont la limite en zéro est positive, nous trouvons que $r(\epsilon) > 0$ pour tout ϵ pas trop éloigné de zéro. En particulier, il existe un $\delta > 0$ tel que $\epsilon < \delta$ implique $r(\epsilon) > 0$; pour un tel ϵ, nous avons donc

$$r(\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{14.538}$$

Étant donné que $\epsilon > 0$, nous avons que $f(x+\epsilon) - f(x) > 0$, c'est-à-dire que f est strictement croissante entre x et $x+\epsilon$.

Jusqu'ici, nous avons prouvé que la fonction f était strictement croissante dans un voisinage autour de chaque point de $[a,b]$. Cela n'est cependant pas encore tout à fait suffisant pour conclure. Ce que nous voudrions faire, c'est de prendre un voisinage $]a, m_1[$ autour de a sur lequel f est croissante. Donc, $f(m_1) > f(a)$. Ensuite, on prend un voisinage $]m_1, m_2[$ de m_1 sur lequel f est croissante. De ce fait, $f(m_2) > f(m_1) > f(a)$. Et ainsi de suite, nous voulons construire des m_3, m_4,..., jusqu'à arriver en b. Hélas, rien ne dit que ce processus va fonctionner. Il faut trouver une subtilité. Le problème est que les voisinages sur lesquels la fonction est croissante sont peut-être de plus en plus petits, de telle sorte à ce qu'il faille une infinité d'étapes avant d'arriver à bon port (en b).

Heureusement, nous pouvons drastiquement réduire le nombre d'étapes en nous souvenant du théorème de Borel-Lebesgue 11.18. Nous notons par $\mathcal{O}_x$, un ouvert autour de x tel que f soit strictement croissante sur $\mathcal{O}_x$. Un tel voisinage existe. Cela fait une infinité d'ouverts tels que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} \mathcal{O}_x. \tag{14.539}$$

Ce que le théorème dit, c'est qu'on peut en choisir un nombre fini qui recouvre encore $[a,b]$. Soient $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_n}\}$, les heureux élus, que nous supposons pris dans l'ordre : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Nous avons

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i. \tag{14.540}$$

Quitte à les rajouter à la collection, nous supposons que $x_1 = a$ et que $x_n = b$. Maintenant nous allons choisir encore un sous-ensemble de cette collection d'ouverts. On pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}_{x_1}$. Nous savons que $\mathcal{A}_1$ intersecte au moins un des autres $\mathcal{O}_{x_i}$. Cette affirmation vient du fait que $[a,b]$ est connexe (proposition 11.54), et que si $\mathcal{O}_{x_1}$ n'intersectait personne, alors

$$\mathcal{O}_{x_1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=2}^{n} \mathcal{O}_{x_i} \tag{14.541}$$

forment une partition de $[a,b]$ en deux ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible parce que $[a,b]$ est connexe. Nous nommons $\mathcal{A}_2$, un des ouverts $\mathcal{O}_{x_i}$ qui intersecte $\mathcal{A}_1$. Disons que c'est $\mathcal{O}_k$. Notons que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un intervalle sur lequel f est strictement croissante. En effet, si y_{12} est dans l'intersection, $f(a) < f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1$, et pour tout $x > y_{12}$ dans $\mathcal{A}_2$, $f(x) > f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante dans $\mathcal{A}_2$.

Maintenant, nous éliminons de la liste des $\mathcal{O}_{x_i}$ tous ceux qui sont inclus dans $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Dans ce qu'il reste, il y en a automatiquement un qui intersecte $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, pour la même raison de connexité que celle invoquée plus haut. Nous appelons cet ouvert $\mathcal{A}_3$, et pour la même raison qu'avant, f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

En recommençant suffisamment de fois, nous finissons par devoir prendre un des $\mathcal{O}_{x_i}$ qui contient b, parce qu'au moins un des $\mathcal{O}_{x_i}$ contient b. À ce moment, nous avons fini la démonstration. □

PROPooKZPZooWjIsWg

Proposition 14.214 (Dérivée et croissance)**.**
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ est

[118] Méditer cela.

(1) *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.*
ITEMooKMDXooPBnVoi

(2) *Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.*

(3) *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*

(4) *Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.*
ITEMooYCDQooFvFyEH

(5) *Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*
PROPooSGTBooFxUuXK

Proposition 14.215 ([477]).
Soient des intervalles I et J dans $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et strictement monotone. Si f' ne s'annule pas sur I alors
ITEMooFXHYooRNHYPI

(1) *la fonction f est injective de I vers J,*
ITEMooWPPIooDUAYsH

(2) *la fonction f^{-1} est dérivable sur J,*
ITEMooTVMLooQgjLEB

(3) *et nous avons la formule*
EQooELIHooDxUFxH
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{14.542}$$

Démonstration. Nous supposons que f est strictement croissante sur I. Les adaptations à faire en cas de fonction strictement décroissante sont laissées au lecteur. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Une fonction strictement croissante est injective.

(2) **Pour (2)** Vu que f' ne s'annule pas, la la proposition 14.203 dit que f^{-1} est dérivable.

(3) **Pour (3)** Formule 14.505.

□

14.216.
Très souvent on préfère retenir la formule
EqWWAooBRFNsv
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big((f^{-1})(y_0)\big)} \tag{14.543}$$

Elle est très simple à retrouver : il suffit d'écrire

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \tag{14.544}$$

puis de dériver les deux côtés par rapport à x en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées de la proposition 14.206 :

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big)f'(x) = 1. \tag{14.545}$$

14.19.2 Théorème des accroissements finis

Le théorème suivant est le théorème des **accroissements finis**. Une version avec des dérivées partielles sera la proposition 14.254.
ThoAccFinis

Théorème 14.217 (Accroissements finis).
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
ITEMooFZONooXJqLyX

(1) *Il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{14.546}$$

Autrement dit, la tangente en c est parallèle à la corde entre a et b.
ITEMooXRQKooDBFpdQ

(2) *Nous avons la majoration*

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)||b - a|. \tag{14.547}$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$\tau(x) = f(x) - \Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big), \tag{14.548}$$

c'est-à-dire la fonction qui donne la distance entre f et le segment de droite qui lie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Par construction, $\tau(a) - \tau(b) = 0$, donc le théorème de Rolle s'applique à τ pour laquelle il existe donc un $c \in]a, b[$ tel que $\tau'(c) = 0$.

En utilisant les règles de dérivation, nous trouvons que la dérivée de τ vaut

$$\tau'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{14.549}$$

donc dire que $\tau'(c) = 0$ revient à dire que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

La majoration est une conséquence immédiate, parce que le supremum de $|f'(x)|$ est forcément plus grand que $|f'(c)|$. □

THOooRALIooVGDcFi

Théorème 14.218 (Inégalité des accroissements finis[478])**.**
Soit une application $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Soient m et M tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a) \tag{14.550}$$

Une généralisation pour une fonction sur un intervalle $]a, b[$ où a et b peuvent être infinis.

THOooRIIBooOjkzMa

Théorème 14.219 (Généralisation des accroissements finis)**.**
Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f, g des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.
Si $a = -\infty$:

- *Nous demandons la continuité sur $]-\infty, b]$ et la dérivabilité sur $]-\infty, b[$.*
- *Nous notons $f(a)$ la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, et nous supposons qu'elle est finie.*

Mêmes conventions si $b = +\infty$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{14.551}$$

Démonstration. Nous posons

$$h(t) = \big(g(b) - g(a)\big)f(t) - \big(f(b) - f(a)\big)g(t). \tag{14.552}$$

Nous avons $\lim_{t\to a} h(t) = \lim_{t\to b} h(t)$, de telle sorte que le théorème de Rolle généralisé 14.211 s'applique et il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Pour ce c nous avons

$$0 = h'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c), \tag{14.553}$$

et donc

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{14.554}$$

□

14.19.3 Règle de L'Hôpital

PROPooBZHTooHmyGsy

Proposition 14.220 (Règle de L'Hôpital pour $\frac{0}{0}$[479])**.**
Soient des fonctions f, g dérivables sur $]a, b[$ et dont la limite en a est nulle. Si g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \tag{14.555}$$

alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{14.556}$$

EQooJHWYooLGdbPH

Ici $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, et les hypothèses garantissent l'existence de la limite (14.556).

Démonstration. Soit $x \in]a,b[$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $]a,x[$ et continues sur $[a,x]$, de telle sorte que le théorème 14.219 s'applique et nous avons $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\big(f(x)-f(a)\big)g'(c_x) = \big(g(x)-g(a)\big)f'(c_x). \tag{14.557}$$

Nous nous souvenons de ce que signifient les notations dans le théorème : les notations $f(a)$, $f(x)$, $g(a)$ et $g(x)$ désignent en réalité les limites. Donc dans (14.557), nous avons $f(a)=g(a)=0$.

D'autre part nous avons $g(x) \neq g(a)$, sinon le théorème de Rolle 14.211 annulerait g' quelque part dans $]a,x[$. Nous pouvons donc réécrire (14.557) sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{14.558}$$

Mais $\lim_{x\to a^+} c_x = a$ parce que $c_x \in]a,x[$. Donc la limite du membre de droite de (14.558) lorsque $x \to a^+$ existe et vaut ℓ. La même limite à gauche doit alors exister et valoir la même valeur. □

Proposition 14.221 (L'Hôpital pur $\frac{\infty}{\infty}$)**.**
Soient f et g deux fonctions

(1) dérivables sur $]a,b[$,

(2) dont les limites en a sont toutes deux ∞,

(3) $g' \neq 0$ sur $]a,b[$.

(4)

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}. \tag{14.559}$$

Alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{14.560}$$

Cette dernière égalité signifie « la limite existe et vaut ℓ ».

Démonstration. Soit un intervalle $]x,y[$ strictement inclus dans $]a,b[$ avec $x,y \in \mathbb{R}$. Par le théorème des accroissements finis généralisés 14.219 il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{14.561}$$

Notons que le dénominateur à gauche n'est pas nul à cause du théorème de Rolle et de l'hypothèse que g' ne s'annule pas sur $[x,y]$. Nous isolons $f(x)$:

$$f(x) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\Big(g(x)-g(y)\Big) + f(y). \tag{14.562}$$

Avant de diviser par $g(x)$ nous devons prendre quelques précautions. Soit V, un voisinage de ℓ[119]. Vu la limite (14.559), il existe $y \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \in V \tag{14.563}$$

pour tout $t \in]a,y[$. Nous utilisons ici avec subtilité le fait que ces intervalles sont une base de la topologie autour de ∞. Maintenant $f(y)$ et $g(y)$ sont fixés et sont des nombres réels. Vu que $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ nous pouvons choisir $r < y$ tel que nous ayons simultanément

(1) $g(x) \neq 0$ sur $]a,r[$,

(2)

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{14.564}$$

et

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{14.565}$$

pour tout $x \in]a,r[$.

[119] Vous savez ce que signifie un « voisinage de ∞ » ? Allez voir la définition 14.26.

Nous sommes maintenant armés de y et r satisfaisant tout cela et nous pouvons traiter avec la formule (14.562) en ne la considérant que pour $x \in]a, r[$. Soit $x \in]a, r[$; il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}. \tag{14.566}$$ EQooNEZQooYGImFW

Nous avons :

(1) $\lim_{x\to a^+} c_x = a$,

(2)
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \tag{14.567}$$

(3)
$$\lim_{x\to a^+} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) = 1, \tag{14.568}$$

(4) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$.

Donc chaque partie du membre de droite de (14.566) a une limite bien déterminée pour $x \to a^+$. Les règles de calcul s'appliquent et nous avons

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \times 1 + 0 = \ell. \tag{14.569}$$

□

14.19.4 Dérivée et primitive

CORooEOERooYprteX

Corolaire 14.222.
Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors f est constante sur $[a, b]$.

Démonstration. Si f n'était pas constante sur $[a, b]$, il existerait un $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(a) \neq f(x_1)$, et dans ce cas, il existerait, par le théorème des accroissements finis 14.217, un $c \in]a, x_1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \neq 0, \tag{14.570}$$

ce qui contredirait les hypothèses. □

CorNErEgcQ

Corolaire 14.223.
Soient f et g, deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que

$$f'(x) = g'(x) \tag{14.571}$$

pour tout $x \in [a, b]$. Alors il existe un réel C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Considérons la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$, dont la dérivée est, par hypothèse, nulle. L'annulation de la dérivée entraine par le corolaire 14.223 que h est constante. Si $h(x) = C$, alors $f(x) = g(x) + C$, ce qu'il fallait prouver. □

DefXVMVooWhsfuI

Définition 14.224.
*Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans I.*

Exprimé en termes des primitives, le corolaire 14.223 signifie que

CorZeroCst

Corolaire 14.225.
Si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle, alors il existe une constante c pour laquelle $F(x) = G(x) + c$.

Démonstration. Nous avons $F' = G'$ et donc le corolaire 14.223 dit qu'il existe c telle que $F = G + c$. □

Remarque 14.226.
L'hypothèse de se limiter à un intervalle est importante parce que si on considère la fonction sur deux intervalles disjoints, nous pouvons choisir la constante indépendamment dans l'un et dans l'autre. Par exemple la fonction

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(x) - 7 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{14.572}$$

est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Certains ne s'en privent pas. Le logiciel Sage par exemple fait ceci :

```
sage: f(x)=1/x
sage: F=f.integrate(x)
sage: A=F(x)-F(-x)
sage: A.full_simplify()
I*pi
```

En réalité lorsque $x > 0$, Sage définit $\ln(-x) = \ln(x) + i\pi$. Cela a une certaine logique parce que $\ln(-1) = i\pi$ (du fait que $e^{i\pi} = -1$), mais si on ne le sait pas, ça peut étonner.

14.227.
Il existe plusieurs primitives à une fonction donnée. En physique, la constante arbitraire est souvent fixée par une condition initiale, comme nous le verrons dans la section 44.1.

14.20 Fonctions de plusieurs variables

La physique, et les sciences en général, regorgent de fonctions à plusieurs variables.

Accélération centripète [120] Si une masse m tourne sur un cercle, elle subira une accélération dirigée vers l'intérieur égale à

$$F(v, r) = \frac{mv^2}{r} \tag{14.573}$$

où r est le rayon du cercle et v est la vitesse.

Pression dans un gaz Si on a n moles de gaz dans un volume V a une température T, alors la pression sera donnée par la fonction de trois variables

$$p = \frac{nRT}{V} \tag{14.574}$$

où R est la constante des gaz parfaits.

En mathématique, on peut inventer de nombreuses fonctions de plusieurs variables. La fonction

$$f(x, y) = x^2 + xy \cos(x^2 + y^3) \tag{14.575}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$. La fonction

$$f(x, y, z) = \frac{x + y - 2z}{1 - x^2 - y^2 - z^2} \tag{14.576}$$

est définie sur $\mathbb{R}^3$ moins la sphère unité $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Consacrons nous à l'étude des fonctions de plusieurs variables, en donnant tout d'abord quelques indications sur comment «dessiner» une telle fonction. Vous connaissez déjà la définition de graphe pour une fonction f d'une seule variable à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$. Vous voyez que cet ensemble n'est pas vraiment un gros morceau de $\mathbb{R}^2$ parce que son intérieur est vide : il y a une seule valeur de f qui correspond au point x, donc une boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(x, f(x))$ de n'importe quel rayon contient toujours des points qui ne font pas partie du graphe de f.

Nous voulons donner une définition assez générale pour le graphe d'une fonction.

Définition 14.228.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le **graphe** de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme*

$$\operatorname{Graph} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \,|\, y = f(x)\}. \tag{14.577}$$

[120] Appelez la « centrifuge » si vous voulez ; ça ne me fait ni chaud ni froid.

Cette définition se spécialise de la façon suivante dans les cas communs. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Le graphe de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ donné par

$$\text{Graph } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}. \tag{14.578}$$

Et pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\text{Graph } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}. \tag{14.579}$$

C'est cette définition qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on travaille sur des dessins en trois dimensions.

Si f est une fonction de deux variables indépendantes x et y à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors un point dans le graphe de f est un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$z = f(x, y), \tag{14.580}$$

ou encore, un point de la forme

$$\big(x, y, f(x, y)\big). \tag{14.581}$$

Nous avons parfois besoin de donner des représentations graphiques d'une fonction. Nous pouvons, par exemple, penser à la fonction qui associe à un point de la Terre, son altitude. Lorsqu'on part pour une promenade en montagne on a envie de connaitre le graphe de cette fonction qui correspond en fait à la surface de la montagne. Bien sûr, nous ne voulons pas amener avec nous un modèle en 3D de la montagne, donc il nous faut une méthode efficace pour projeter le graphe de f sur le plan x-y tout en gardant les informations fondamentales. Pour cela nous avons besoin de deux définitions (à ne pas confondre !)

Définition 14.229.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **z-section** de* Graph f *à la hauteur c est donnée par*

$$S_c^z = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x, y) = c\}.$$

def_niveau

Définition 14.230.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **courbe de niveau** de f à la hauteur c est l'ensemble*

$$N_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x_1, \ldots, x_n) = c\}. \tag{14.582}$$

On peut représenter la fonction f d'une façon très précise en traçant quelques-unes de ses courbes de niveau. Dans la suite, on pourra considérer aussi les x-sections et les y-sections du graphe d'une fonction de deux variables. La x-section de Graph f à la hauteur a est

$$S_a^x = \{(a, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(a, y) = z\}.$$

Comme vous avez peut être déjà compris, S_a^x est le graphe de la fonction de y qu'on obtient de f en fixant $x = a$. Cette fonction est appelée x-section de f pour $x = a$.

Certaines surfaces dans $\mathbb{R}^3$ sont le graphe d'une fonction.

Exemple 14.231.
Quelques graphes importants.

Un plan non vertical Tout plan dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrit par une équation de la forme

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = r,$$

où, (x_0, y_0, z_0) est vecteur dans $\mathbb{R}^3$, et a, b, c et r sont des nombres réels. Si $c \neq 0$ alors le plan n'est pas vertical et on peut dire qu'il est le graphe de la fonction

$$P(x, y) = \frac{r + cz_0 - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{c},$$

quitte à choisir des nouvelles constantes s, t, q,

$$P(x, y) = sx + ty + q.$$

Un paraboloïde elliptique Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PE_1(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PE_2(x, y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes elliptiques. Le premier est contenu dans le demi-espace $z \geqslant 0$, l'autre dans $z \leqslant 0$. Le nom de cette surface vient de la forme de ses sections. En fait toutes sections S_c^z sont des ellipses, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Un paraboloïde hyperbolique (selle) Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PH_1(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PH_2(x,y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes hyperboliques. Remarquez que les sections S_c^z de ce graphe sont des hyperboles, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Une demi-sphère La fonction $S^+(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ a pour graphe la demi-sphère supérieure centrée en l'origine et de rayon R. Le dernier de ces exemples nous signale une chose très importante : une sphère entière n'est pas le graphe d'une fonction de x et y. Par contre, une demi-sphère est bien le graphe de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

L'équation que nous utilisons pour décrire une sphère de rayon R centrée en l'origine est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Donc, à chaque point (x,y) dans le disque $x^2+y^2 \leqslant R^2$ (notez que ce disque est contenu dans la section S_0^z), on peut associer deux valeurs de z : $z_1 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Par définition, une fonction n'associe qu'une seule valeur à chaque point de son domaine, d'où l'impossibilité de décrire cette sphère comme le graphe d'une fonction de x et y.

△

Considérons la fonction $Sp : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui associe à (x,y,z) la valeur $x^2 + y^2 + z^2$. La sphère de rayon R centrée en l'origine est l'ensemble de niveau N_{R^2} de Sp. L'ensemble de niveau N_0 de Sp est l'origine, et tous les ensembles de niveau de hauteur négative sont vides. La même chose est vraie pour les ellipsoïdes centrées en l'origine avec les axes x, y et z comme axes principaux et comme longueurs de demi-axes a, b et c. Voici la fonction dont il sont les ensembles de niveau

$$El(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Exemple 14.232.
Des ensembles de niveau importants.

Tout graphe Le graphe de toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peut être considéré comme l'ensemble de niveau zéro de la fonction $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

Hyperboloïdes Les hyperboloïdes, comme les ellipsoïdes, sont une famille d'ensemble de niveau. En particulier, nous considérons des hyperboloïdes dont l'axe de symétrie est l'axe des z et qui sont symétriques par rapport un plan x-y. Une fois que les paramètres a, b et c sont fixés la fonction que nous intéresse est

$$Hyp(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

Les ensembles de niveau N_d pour $d > 0$ sont connexes, on les appelle *hyperboloïdes à une feuille*. L'ensemble de niveau N_0 est un *cône (elliptique)*, les deux moitiés du cône se touchent en l'origine. Enfin, les ensembles de niveau N_d pour $d < 0$ ne sont pas connexes et pour cette raison on les appelle *hyperboloïdes à deux feuilles*.

△

14.20.1 Graphes de fonctions à plusieurs variables

Le **graphe** d'une fonction de deux variables $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Big\{\big(x,y,f(x,y)\big) \text{ tel que } (x,y) \in D\Big\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{14.583}$$

Ce graphe est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

ExempleTroisDxxyy

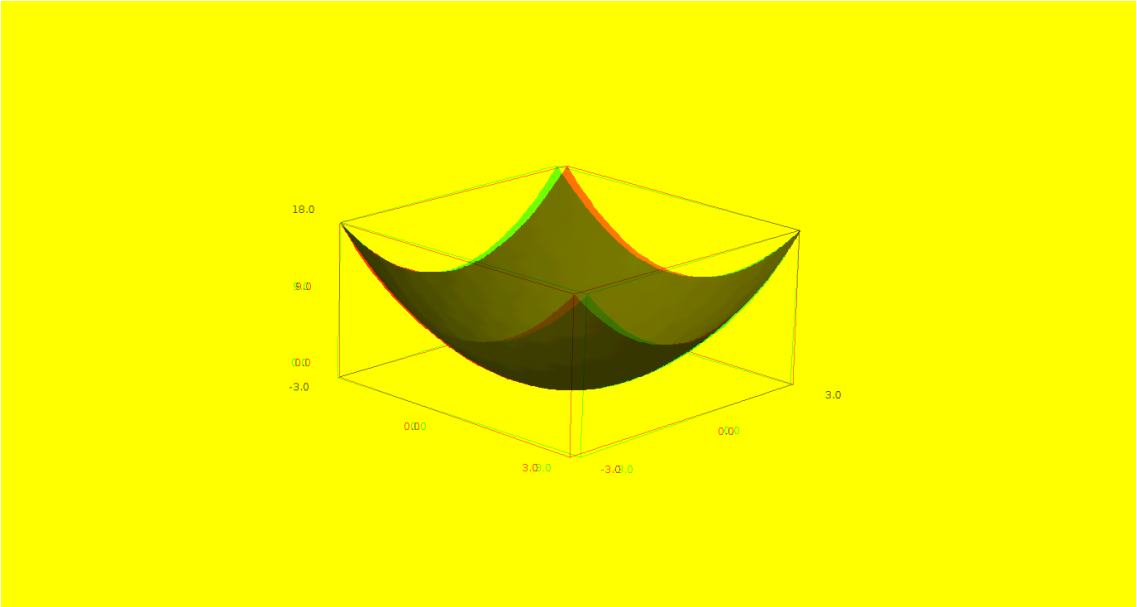
Exemple 14.233.
Tracer le graphe de la fonction

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2. \tag{14.584}$$

Le plus simple est de demander à Sage de nous fournir une représentation 3D

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=x**2+y**2
sage: plot3d(f,(x,-3,3),(y,-3,3))
```

Voici ce que cela donne[121] : (à regarder avec des lunettes bleues et rouges) :



À part que l'ordinateur l'a dit, est-ce qu'on peut comprendre pourquoi le graphe de la fonction $x^2 + y^2$ ressemble à un bol ? En coordonnées cylindriques, le graphe s'écrit

$$z = r^2. \tag{14.585}$$

Donc il apparaît que plus on s'éloigne du point $(0, 0)$ dans le plan XY, plus le graphe va monter. Et il monte à quelle vitesse ? Il monte à la vitesse r^2. Il s'agit donc de dessiner la fonction $z = r^2$ dans le plan et de la « faire tourner ». △

14.20.2 Courbes de niveau

Une technique utile pour se faire une idée de la forme d'une fonction en trois dimensions est de tracer les **courbes de niveau**. La courbe de niveau de hauteur h est la courbe dans le plan donnée par l'équation

$$f(x, y) = h. \tag{14.586}$$

Exemple 14.234.
Dessinons par exemple les courbes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = x + y + 2. \tag{14.587}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x + y + 2 = h$, c'est-à-dire

$$y(x) = -x + h - 2. \tag{14.588}$$

Par conséquent la courbe de niveau de hauteur 0 est $y = -x - 2$, celle de hauteur 5 est $y = -x + 3$, etc.

Nous pouvons également nous aider de Sage pour ce faire :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
```

[121] En vrai, ce que Sage donne est un objet qu'on peut même faire bouger.

```
sage: f(x,y)=x+y+2
sage: var('h')
h
sage: niveau(h,x)=solve(f(x,y)==h,y)[0].rhs()
sage: g1(x)=niveau(1,x)
sage: g1
x |--> -x - 1
```

Ici la fonction `g1` est la courbe de niveau 1.

Si on veut faire tracer une courbe de niveau, Sage peut le faire :

```
sage: implicit_plot(f(x,y)==1,(x,-3,3),(y,-4,4))
```

Cela tracera la courbe de niveau $h = 1$ dans la partie du plan $x \in [-3, 3]$ et $y \in [-4, 4,]$.

△

Il est bien entendu possible de créer automatiquement 50 courbes de niveau et de demander de les tracer toutes sur le même graphe.

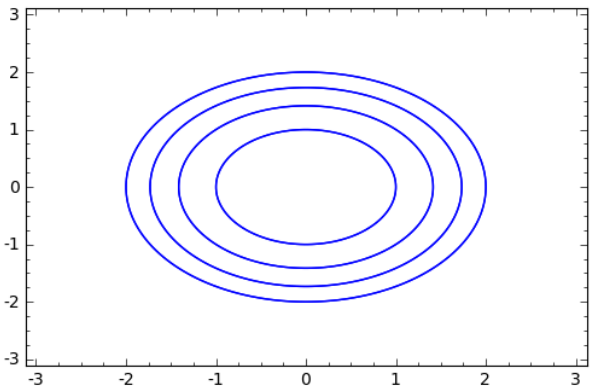
```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

var('x,y')
f=x**2+y**2
G=Graphics()
a=3
for i in range(0,5):
  G=G+implicit_plot(f==i,(x,-a,a),(y,-a,a))
show(G)
```

tex/frido/courbeNiveau.py

Le résultat est :



Notez que les courbes sont censées être des cercles : les axes X et Y n'ont pas la même échelle.

Exemple 14.235.
Un exemple plus riche en enseignements est celui de la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2. \tag{14.589}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x^2 - y^2 = h$.

Commençons par $h = 0$. Dans ce cas nous avons $(x + y)(x - y) = 0$ et par conséquent les courbes de niveau de hauteur zéro sont les deux droites $x + y = 0$ et $x - y = 0$.

Voyons ensuite la courbe de niveau $h = 1$. Cela est l'équation $x^2 - y^2 = 1$, c'est-à-dire

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \tag{14.590}$$

C'est une fonction qui n'est définie que pour $|x| \geqslant 1$. Avec $x = 1$ nous avons $y = 1$. Ensuite, lorsque x grandit, y grandit également, mais la courbe ne peut pas croiser la courbe de niveau $h = 0$. Donc, suivant les notations de la figure 14.6, la courbe de niveau « part » de P et doit monter sans croiser les diagonales.

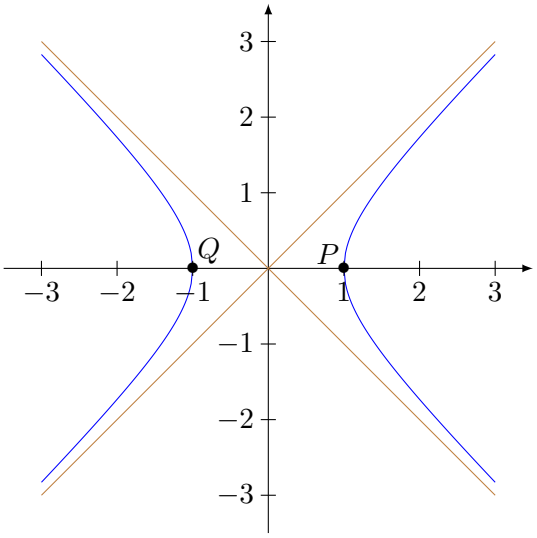


FIGURE 14.6 : La courbe de niveau $h = 1$ de $x^2 - y^2$. Notez qu'elle est en deux morceaux. LabelFigGQQXooBEDnfK

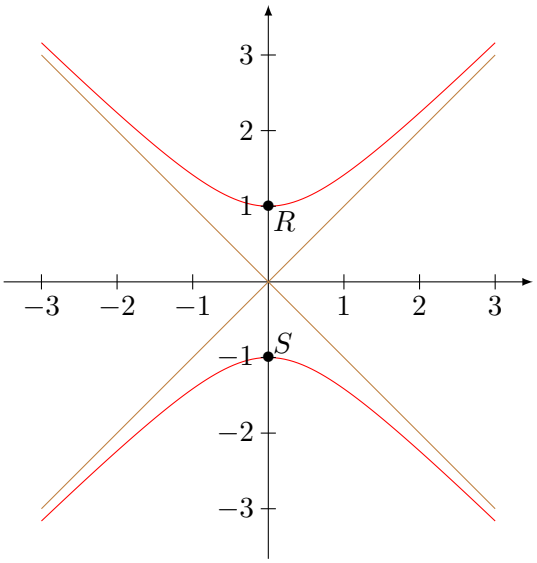


FIGURE 14.7 : La courbe de niveau $x^2 - y^2 = -1$. LabelFigKGQXooZFNVnW

En ce qui concerne la courbe de niveau $h = -1$, elle correspond à la courbe $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$ qui est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement que précédemment nous amène à la figure 14.7. △

Une autre façon de voir les courbes de niveau est de dire que la courbe de niveau de hauteur h est la projection dans le plan XY de la section du graphe de f par le plan $z = h$.

On peut également définir le graphe de fonctions de trois (ou plus) variables. Le graphe de la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\big\{\big(x, y, z, f(x, y, z)\big) \text{ tel que } (x, y, z) \in D\big\} \subset \mathbb{R}^4. \tag{14.591}$$

De tels graphes ne peuvent pas être représentés sur une feuille de papier. Il est toutefois possible de définir les ensembles de niveaux :

$$E_h = \big\{(x, y, z) \in D \text{ tel que } f(x, y, z) = h\big\}. \tag{14.592}$$

Ce sont des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ que l'on peut dessiner.

Exemple 14.236.
Les surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sont des sphères. Il n'y a pas de surfaces de niveau pour les « hauteurs » négatives. △

Exemple 14.237.
Considérons la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. En coordonnées cylindriques, cette fonction s'écrit

$$f(r,\theta,z) = r^2 - z^2. \tag{14.593}$$

La surface de niveau 0 est donnée par l'équation $r = |z|$. Cela fait un cercle à chaque hauteur, dont le rayon grandit linéairement avec la hauteur ; le tout est donc un cône. C'est d'ailleurs le cône obtenu par rotation de la courbe de niveau $h = 0$ que nous avions obtenu pour la fonction $x^2 - y^2$.

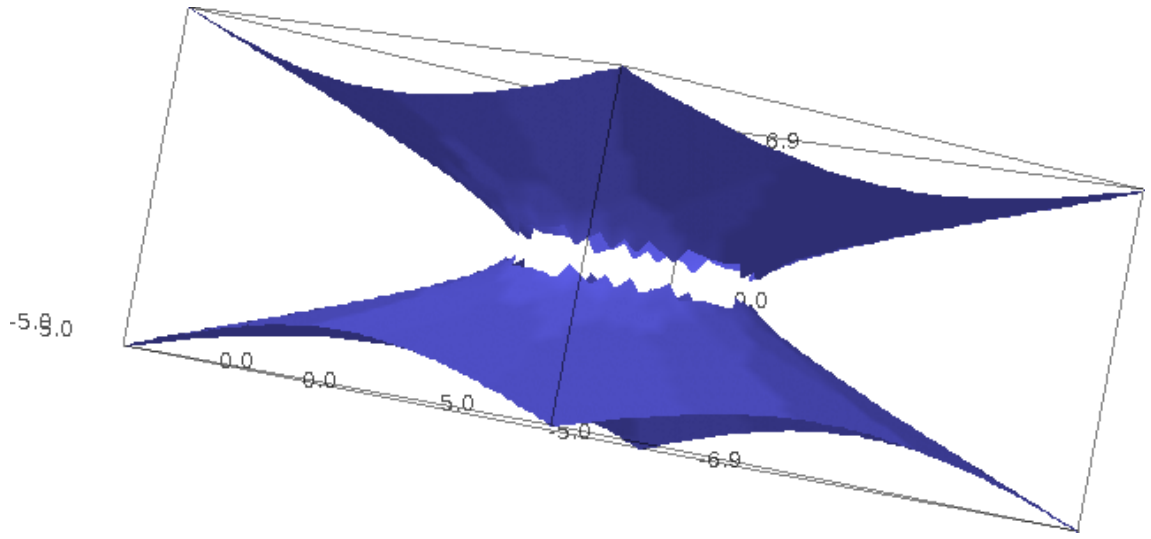
En ce qui concerne les ensembles de niveau positifs, ils sont donnés par

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - h}. \tag{14.594}$$

Notez qu'ils ne sont pas définis pour $r \geqslant h$. Cela pose un petit problème quand on veut le tracer à l'ordinateur :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: F+G
```

Le résultat est[122] :

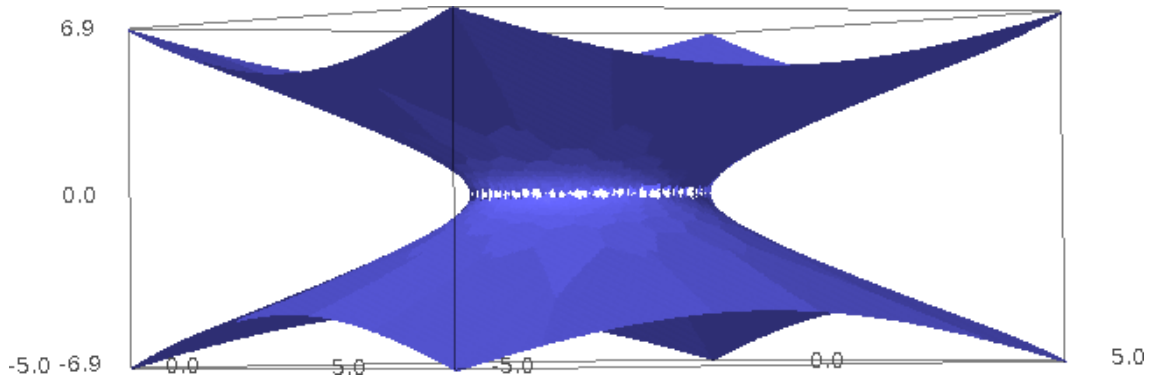


On voit qu'il y a un grand trou au centre correspondant aux z proches de zéro. Or d'après l'équation, il n'en est rien : en $z = 0$ il y a bel et bien tout un cercle. Afin d'obtenir une meilleur image, il faut demander de tracer avec un maillage plus fin :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: F+G
```

[122] Encore une fois : ça donne mieux à l'écran, et vous pouvez le faire bouger ; je vous encourage à le faire !

Le temps de calcul est un peu plus long, mais le résultat est meilleur :



△

14.21 Limites à plusieurs variables

SecLimVarsPlus

Prenons une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous disons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \tag{14.595}$$

lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$.

Remarquez qu'ici, $x \in \mathbb{R}^n$, et sachez distinguer $\|.\|$, la norme dans $\mathbb{R}^n$ de $|.|$ qui est la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Une autre façon d'exprimer cette définition est que l'ensemble des valeurs atteintes par f dans une boule de rayon δ autour de x_0 n'est pas très loin de l. Nous définissons donc

$$E_\delta = \{f(x) \text{ tel que } x \in B(x_0, \delta)\}. \tag{14.596}$$

Notez que si f n'est pas définie en x_0, il n'y a pas de valeurs correspondantes au centre de la boule dans E_δ. Ceci est évidemment la situation générique lorsqu'il y a une indétermination à lever dans le calcul de la limite. Nous avons alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \tag{14.597}$$

lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que

$$\sup\{|v - l| \text{ tel que } v \in E_\delta\} \leqslant \epsilon. \tag{14.598}$$

Eqvmoinsrapplindeux

Une façon classique de montrer qu'une limite n'existe pas, est de prouver que, pour tout δ, l'ensemble E_δ contient deux valeurs constantes. Si par exemple $0 \in E_\delta$ et $1 \in E_\delta$ pour tout δ, alors aucune valeur de l (même pas $l = \pm\infty$) ne peut satisfaire à la condition (14.598) pour toute valeur de ϵ.

Nous laissons à la sagacité de l'étudiant le soin d'adapter tout ceci pour le cas $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

La proposition suivante semble évidente, mais nous sera tellement utile qu'il est préférable de l'expliciter :

PROPooPOAQooPmxEtb

Proposition 14.238.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine D, $a \in \mathrm{Adh}(D)$ et un voisinage V de a. Nous supposons que $V \cap D$ s'écrive comme une intersection finie :

$$V \cap D = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

telle que $a \in \mathrm{Adh}\, A_i$ pour tout $i \leqslant k$. Alors, la limite

$$\lim_{x\to a} f(x) \tag{14.599}$$

EQooEXELooHccCGw

existe et vaut $b \in \mathbb{R}$ si et seulement si chacune des limites

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_i}} f(x) \tag{14.600}$$

existe et vaut b.

Démonstration. On sait déjà que si la limite de $f : D \to \mathbb{R}$ existe, alors toute restriction à A_i admet la même limite[123]. Il suffit donc de prouver la réciproque.

Fixons provisoirement un entier i entre 1 et k ainsi que $\epsilon > 0$. Vu que $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_i}} f(x) = b$, il existe $\delta_i > 0$ tel que si $x \in A_i$ et si $0 < |x - a| < \delta_i$, alors

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{14.601}$$

EQooUCAIooRpUgnE

Quitte à prendre δ_i un peu plus petit, nous supposons que $V \subset B(a, \delta_i)$.

Nous posons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\dots,k}$, et nous considérons $x \in D$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Nous avons alors

(1) $x \in V \cap D$,

(2) il existe i tel que $x \in A_i$.

Ce x est donc un élément de A_i vérifiant $0 < |x - a| < \delta \leqslant \delta_i$. Il vérifie donc (14.601) : $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Cela prouve la limite (14.599). □

Exemple 14.239. (1) Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette une limite en $a \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'elle y admette une limite à droite et une limite à gauche qui soient égales.

Cela est une application de la proposition 14.238 avec $\mathbb{R} =]-\infty, a[\cup]a, \infty[$.

(2) Une suite (x_k) admet une limite si et seulement si les sous-suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Ceci n'est pas une application directe de la proposition, mais la teneur est la même.

△

Lemme 14.240 ([1])**.**
Soient deux espaces vectoriels E et F. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to F$ telle que $\lim_{t\to 0} f(t) = y \in F$. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\to F \\ h &\mapsto f(\|h\|). \end{aligned} \tag{14.602}$$

Alors φ admet une limite pour $h \to 0$ et elle est donnée par

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \lim_{t\to 0} f(t). \tag{14.603}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que si $t < \delta$ alors $\|f(t) - y\|_F < \epsilon$. Si $\|h\| < \delta$ nous avons

$$\|\varphi(h) - y\| = \|f(\|h\|) - y\| < \epsilon. \tag{14.604}$$

Donc c'est bon. □

Voici, dans le même ordre d'idée, un autre résultat qui permet de réduire le nombre de variables dans une limite lorsque la fonction ne dépend pas de certaines variables.

LEMooYLIHooFBQyzC

Lemme 14.241 ([1])**.**
Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{t\to a} g(t) = \ell. \tag{14.605}$$

Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto g(x) \end{aligned} \tag{14.606}$$

vérifie

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ x\neq a}} f(x, y) = \ell. \tag{14.607}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse sur la limite de g en a, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |t - a| < \delta$ implique $|g(t) - \ell| < \epsilon$.

Attention : passage subtil[124]. Si $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$, alors nous avons évidemment aussi $|x - a| < \delta$, mais pas spécialement $0 < |x - a| < \delta$ comme le requis pour utiliser la limite de g.

Dans le calcul de la limite restreinte à $x \neq a$, les points qui interviennent sont les valeurs de (x, y) dans $B\big((a, b), \delta\big) \setminus \{x = a\}$. Or pour celles-là nous avons bien $0 < |x - a| < \delta$. Le calcul suivant fonctionne donc :

$$|f(x, y) - \ell| = |g(x) - \ell| < \epsilon. \tag{14.608}$$

□

[123] C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de la continuité 9.162.

[124] Je rejette déjà en bloc et d'un revers de main toute tentative de dire « la limite épointée, c'est mieux ». Voir aussi l'exemple 14.242.

EXooHSYNooBZhDbE

Exemple 14.242.
Pourquoi prendre la limite $(x,y)\to(a,b)$ avec $x\neq a$ dans l'énoncé du lemme 14.241 ? Imaginons la fonction

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}\tag{14.609}$$

Dans ce cas, le graphe de la fonction $f(x,y)=g(x)$ est tout plat sauf la ligne $x=0$ qui est en hauteur. Nous avons donc $f(0,t)=1$ pour tout t et donc nous n'avons pas $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$: tout voisinage de $(0,0)$ contient des points (x,y) tels que $f(x,y)=1$ et des points (x,y) tels que $f(x,y)=0$. △

14.243.
Il existe de nombreuses façons de calculer des limites à plusieurs variables. Plus nous connaîtrons de mathématiques, plus nous aurons de techniques à notre disposition. Nous allons tout de suite voir quelques méthodes. Voir le thème 68 pour plus de techniques et d'exemples.

14.21.1 Caractérisation de la limite par les suites

ExFNExempleMethodeTrigigi

Exemple 14.244.
Considérons la fonction

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\tag{14.610}$$

et remarquons que, quelle que soit la valeur de y, cette fonction est nulle lorsque $x=0$. De la même manière, nous voyons que si $x=y$, alors la fonction vaut[125] $\frac{1}{2}$.

Il est impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$ parce qu'on ne peut pas trouver un ℓ dont on s'approche à la fois en suivant la ligne $x=0$ et la ligne $x=y$.

Deux autres chemins avec encore deux autres valeurs sont dessinés sur la figure 14.8.

Cet exemple pourra être formalisé en utilisant le théorème 14.245. Voir l'exemple 14.246. △

ThoLimSuite

Théorème 14.245 (Caractérisation de la limite par les suites)**.**
Une fonction $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ admet une limite ℓ en un point d'accumulation a de D si et seulement si pour toute suite (x_n) dans $D\setminus\{a\}$ convergente vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ dans $\mathbb{R}^n$ converge vers ℓ.

Démonstration. Supposons d'abord que la fonction ait une limite ℓ lorsque $x\to a$, et considérons une suite (x_n) dans $D\setminus\{a\}$ convergente vers a. Nous devons montrer que la suite $y_n=f(x_n)$ converge vers ℓ, c'est-à-dire que si nous choisissons $\varepsilon>0$ nous devons montrer qu'il existe un N tel que $n>N$ implique $\|y_n-\ell\|=\|f(x_n)-\ell\|<\varepsilon$.

Nous avons deux hypothèses. La première est la convergence de la fonction et la seconde est la convergence de la suite (x_n). L'hypothèse de convergence de la fonction nous dit que (le ε a déjà été choisi dans le paragraphe précédent)

$$\exists\delta \text{ tel que } 0<\|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-\ell\|<\varepsilon.\tag{14.611}$$

Une fois choisi ce δ qui « va avec » le ε qui a été choisi précédemment, la définition de la convergence de la suite nous enseigne que

$$\exists N \text{ tel que } n>N\Rightarrow\|x_n-a\|<\delta.\tag{14.612}$$

Récapitulons ce que nous avons fait. Nous avons choisi un ε, et puis nous avons construit un N. Lorsque $n>N$, nous avons $\|x_n-a\|<\delta$. Mais alors, par construction de ce δ, nous avons $\|f(x_n)-\ell\|<\varepsilon$. Au final, $n>N$ implique bien $\|y_n-\ell\|<\varepsilon$, ce qu'il nous fallait.

Nous supposons maintenant que la fonction f *ne* converge *pas* vers ℓ, et nous allons construire une suite d'éléments x_n qui converge vers a sans que $(y_n)=(f(x_n))$ ne converge vers ℓ. La fonction f vérifie la condition (14.66). Nous prenons donc un ε tel que $\forall\delta$, il existe un x qui vérifie *en même temps* les deux conditions

$$\begin{cases}0<\|x-a\|<\delta & \text{(14.613a)}\\ \|f(x)-\ell\|>\varepsilon. & \text{(14.613b)}\end{cases}$$

Un tel x existe pour tout choix de δ. Choisissons un n arbitraire et $\delta=\frac{1}{n}$. Nous nommons x_n le x correspondant à ce choix de n. La suite (x_n) ainsi construite converge vers a parce que

$$\|x_n-a\|<\delta_n=\frac{1}{n},\tag{14.614}$$

[125] En fait ce que nous sommes en train de faire est de poser $\theta=\pi/2$ et $\theta=\pi/4$ dans (20.878).

donc dès que n est grand, $\|x_n - a\|$ est petit. Mais la suite $y_n = f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ parce que

$$\|f(x_n) - \ell\| > \varepsilon \tag{14.615}$$

pour tout n. La suite y_n ne s'approche donc jamais à moins d'une distance ε de ℓ. □

EXooNBTYooFyKRTB

Exemple 14.246.
Reprenons l'exemple 14.244. Considérons les deux suites $x_n = (0, \frac{1}{n})$ et $y_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Ce sont deux suites dans $\mathbb{R}^2$ qui tendent vers $(0,0)$. Si la fonction f convergeait vers ℓ, alors nous aurions au moins | Eq3007Lixxyyell

$$\lim f(x_n) = \ell \tag{14.616a}$$
$$\lim f(y_n) = \ell, \tag{14.616b}$$

mais nous savons que pour tout n, $f(x_n) = f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(y_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Il n'y a donc aucun nombre ℓ qui vérifie les deux équations (14.616) parce que $\lim f(x_n) = 0$ et $\lim f(y_n) = \frac{1}{2}$. △

14.21.2 Règle de l'étau

Une première façon de calculer la limite d'une fonction est de la « coincer » entre deux fonctions dont nous connaissons la limite.

ThoRegleEtau

Théorème 14.247 (Règle de l'étau[480])**.**
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant le point a. Soient f, g et h, trois fonctions définies sur $\mathcal{O} \setminus \{a\}$. Supposons que

(1)

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x). \tag{14.617}$$

pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{a\}$

(2)

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell. \tag{14.618}$$

Alors la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous devons trouver un voisinage V de a tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour tout $x \in V \setminus \{a\}$. Étant donné que $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, il existe un voisinage ouvert V de a tel que[126]

$$|g(x) - \ell| < \epsilon \tag{14.619a}$$
$$|h(x) - \ell| < \epsilon. \tag{14.619b}$$

pour tout $x \in V \setminus \{a\}$. Pour tout $x \neq a$ dans V, nous avons

$$\ell - \epsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \epsilon. \tag{14.620}$$

Donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$, comme nous l'avions annoncé. □

Cette méthode est très pratique lorsqu'on a des fonctions trigonométriques qui se factorisent parce qu'elles sont toujours majorables par 1 ; voir l'exemple 20.79.

Exemple 14.248.
Prouver la continuité en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.621}$$

Considérons une suite $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ qui tend vers $(0,0)$. Étant donné que $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$ pour tout x et y, nous avons

$$0 \leqslant |f(x_n, y_n)| = \left| \frac{x_n |y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leqslant |x_n| \to 0. \tag{14.622}$$

[126] Si vous ne voyez pas comment avoir les deux conditions en même temps, prenez V_1 pour g et V_2 pour h, et considérez $V = V_1 \cap V_2$ qui sera encore un ouvert.

Donc nous avons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0), \tag{14.623}$$

ce qui prouve que la fonction est continue en $(0,0)$ par la proposition 9.206. Nous avons utilisé la règle de l'étau (théorème 14.247). △

14.249.
Nous notons $f \sim g$ pour $x \to a$ lorsque $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Cela signifie que f et g tendent vers la même limite, à la même vitesse.

14.21.3 Méthode des chemins

Lorsque la limite n'existe pas, il y a une façon en général assez simple de le savoir, c'est la **méthode des chemins**.

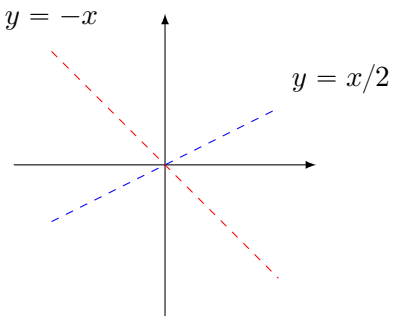


FIGURE 14.8 : Sur toute la droite $y = -x$, la fonction vaut $-1/2$, tandis que sur toute la droite $y = x/2$, elle vaut $\frac{2}{5}$. Il est donc impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$, parce que dans toute boule autour de zéro, il y aura toujours un point de chacune de ces deux droites. LabelFigMethodeChemin

C'est la proposition suivante qui va faire une grosse partie du travail.

PROPooSAFIooWvmSiT

Proposition 14.250 ([1]).
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'adhérence de D. Alors nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{14.624}$$

si et seulement si pour toute fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = a$, nous avons

$$\lim_{t\to 0} (f \circ \gamma)(t) = \ell. \tag{14.625}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Soit une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = a$. Par le théorème 14.245, il suffit de montrer que $(f \circ \gamma)(t_n) \to \ell$ pour toute suite $t_n \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

Nous savons que la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$ est une suite qui converge vers a. Mais l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ implique que pour toute suite $x_n \to a$ nous avons $f(x_n) \to \ell$. Cela est en particulier vrai pour la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\gamma(t_n)\big) = \ell, \tag{14.626}$$

ce qu'il fallait prouver.

(2) **Réciproque** Pour les mêmes raisons de caractérisation séquentielle que précédemment, il faut prouver que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ pour tout suite $x_n \to a$.

(2a) **Un chemin** Soit la fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ affine par morceaux et telle que

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n. \tag{14.627}$$

Nous prolongeons γ par $\gamma(t) = a$ pour $t \leqslant 0$.

(2b) $\gamma(t) \to a$ Nous montrons que $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$. Soient $\epsilon > 0$ et N tel que $x_n \in B(a,\epsilon)$ pour tout $n \geqslant N$. Si $t < \frac{1}{N}$ alors $t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ pour un certain $k > N$. Donc

$$\gamma(t) \in [\gamma(\frac{1}{k+1}), \gamma(\frac{1}{k})] \tag{14.628}$$

et donc $\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k]$ parce que γ est formé de ces segments de droites. Mais comme $B(a,\epsilon)$ est convexe[127], nous avons

$$\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k] \subset B(a,\epsilon). \tag{14.629}$$

Nous avons donc bien $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$.

(2c) **Conclusion** L'hypothèse nous donne alors $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$. En particulier le critère de la caractérisation séquentielle de la limite dit que

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\gamma(\frac{1}{n})\big) = \ell, \tag{14.630}$$

ce qui signifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

□

CorMethodeChemin

Corolaire 14.251.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si nous avons deux fonctions $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que

$$\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = \lim_{t\to 0}\gamma_2(t) = a \tag{14.631}$$

tandis que

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) \neq \lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_2)(t), \tag{14.632}$$

ou bien que l'une des deux limites n'existe pas, alors la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$ n'existe pas.

CorMethodeChemoinNegatif

Corolaire 14.252.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si il existe une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ avec $\gamma(0) = a$ telle que la limite $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t)$ n'existe pas, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

En ce qui concerne le calcul de limites, la méthode des chemins peut être utilisé de trois façons :

(1) Dès que l'on trouve une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$, alors nous savons que *si la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe*, alors cette limite vaut ℓ.

(2) Dès que l'on a trouvé deux fonctions γ_i qui tendent vers a, mais dont les limites de $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_i)(t)$ sont différentes, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

(3) Dès qu'on trouve une chemin le long duquel il n'y a pas de limite, alors la limite n'existe pas (corolaire 14.252).

La méthode des chemins ne permet donc pas de calculer une limite quand elle existe. Elle permet uniquement de la « deviner », ou bien de prouver que la limite n'existe pas.

Exemple 14.253.
Soit à calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}. \tag{14.633}$$

Eq3007ExempleLimiche

Si nous prenons le chemin $\gamma_1(t) = (t,t)$, nous avons bien $\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = (0,0)$, et nous avons

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t-t}{t+t} = 0. \tag{14.634}$$

Donc si la limite (14.633) existait, elle vaudrait obligatoirement 0. Mais si nous considérons $\gamma_2(t) = (0,t)$, nous avons

$$(f\circ\gamma_2)(t) = \frac{-t}{t} = -1, \tag{14.635}$$

donc si la limite existe, elle doit obligatoirement valoir -1. Ne pouvant être égale à 0 et à -1 en même temps, la limite (14.633) n'existe pas. △

[127] C'est la proposition 9.276.

14.22 Dérivée directionnelle

Nous sommes capables de dériver une fonction de deux variables $f(x,y)$ par rapport à x et par rapport à y. C'est-à-dire que nous sommes capables de donner la variation de la fonction lorsqu'on bouge le long des axes horizontal et vertical. Il est évidemment souhaitable de parler de la variation de la fonction lorsqu'on se déplace le long d'autre droites.

Soit donc $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire $u_1^2 + u_2^2 = 1$), et considérons la fonction de une variable

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+tu_1, b+tu_2). \end{aligned} \tag{14.636}$$

La fonction φ n'est rien d'autre que la fonction f vue le long de la droite de direction donnée par le vecteur u. Nous pouvons aussi l'écrire $\varphi(t) = f(p+tu)$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. La façon la plus naturelle de définir une dérivée à deux variables est de considérer les **dérivées partielles** définies par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}. \end{aligned} \tag{14.637}$$

Ces nombres représentent la façon dont le nombre $f(x,y)$ varie lorsque soit seul x varie soit seul y varie. Les dérivées partielles se calculent de la même façon que les dérivées normales. Pour calculer $\partial_x f$, on fait « comme si » y était une constante, et pour calculer $\partial_y f$, on fait comme si x était une constante.

14.23 Accroissements finis et dérivées partielles

PROPooCAWBooINcNxj

Proposition 14.254 (Accroissements finis)**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soit une application $f\colon V \to W$. Soient des points $a,b \in V$ tels que f est continue sur le segment $[a,b]$ et partiellement dérivable dans la direction $b-a$ sur $]a,b]$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (\partial_\beta f)(c) \tag{14.638}$$

où $c \in [a,b]$ et $\beta = b-a$.

Démonstration. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,1] &\to W \\ t &\mapsto f\big(a+t(b-a)\big). \end{aligned} \tag{14.639}$$

Par le théorème des accroissements finis 14.217, il existe $s \in [0,1]$ tel que[128]

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(s)(1-0). \tag{14.640}$$

Autrement dit,

$$f(b) = f(a) + (\partial_\beta f)\big(a+s(b-a)\big). \tag{14.641}$$

Nous avons le résultat en posant $c = a + s(b-a)$. □

LEMooNMTAooLgMkgH

Lemme 14.255 (Accroissements finis[1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soit une fonction $f\colon V \to W$ qui est différentiable sur un voisinage $\mathcal{O}$ de $a \in V$. Soient $v \in V$ et $\epsilon > 0$ tels que $a+\epsilon v$ reste dans $\mathcal{O}$.

Nous considérons une base de V pour donner un sens aux dérivées partielles $\partial_k f$. Alors il existe une fonction $\alpha\colon V \to W$ telle que

$$\begin{cases} f(a+\epsilon v) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \epsilon v_k (\partial_k f)\big(a + \sum_{i=k+1}^{n} \epsilon v_i e_i\big) + \epsilon\alpha(\epsilon) & \text{(14.642a)} \\ \lim_{\epsilon\to 0} \alpha(\epsilon) = 0. & \text{(14.642b)} \end{cases}$$

où la somme sur i est nulle dans le cas $k = n$.

[128] Les a et b dans l'énoncé de 14.217 sont les valeurs $s=0$ et $s=1$ ici. Rien à voir avec les a et b d'ici qui sont des éléments de V.

Démonstration. Nous commençons par nous attaquer à la dérivation par rapport à la première variable. La définition 12.297 de la dérivation partielle nous invite à poser

$$\varphi(t) = f\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k + t v_1 e_1\big). \tag{14.643}$$

Nous avons :

$$\varphi'(0) = v_1(\partial_1 f)\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k\big). \tag{14.644}$$

Nous appliquons les accroissements finis 12.311 à la fonction φ en $t = 0$. Nous avons une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to W$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha_1(t) = 0$ et

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\alpha_1(t). \tag{14.645}$$

Nous écrivons cette égalité pour $t = \epsilon$, tout en rappelant que $\varphi(\epsilon) = f(a + \epsilon v)$:

$$f(a + \epsilon v) = \varphi(\epsilon) = f\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k\big) + \epsilon v_1(\partial_1 f)\big(a + \sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k\big) + \epsilon\alpha_1(\epsilon). \tag{14.646}$$

Pour la suite, il suffit de recommencer en écrivant $\sum_{k=2}^{n} \epsilon v_k e_k = \epsilon v_2 e_2 + \sum_{k=3}^{n} \epsilon v_k e_k$ dans le second terme. □

Voici une version un peu moins technologique.

PROPooYYSMooUDxtlB

Proposition 14.256.
Soit une fonction $f\colon V \to \mathbb{R}$ où V est un espace vectoriel métrique. Soit $a \in V$ tel que $(\partial_i f)(a)$ existe. Alors il existe une fonction $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(a + \epsilon e_i) = f(a) + \epsilon(\partial_i f)(a) + \epsilon\beta(\epsilon) \tag{14.647}$$

et $\lim_{\epsilon\to 0} \beta(\epsilon) = 0$.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + te_i). \end{aligned} \tag{14.648}$$

Par hypothèse (et définition 12.297 de la dérivée partielle), la fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(0) = (\partial_i f)(a). \tag{14.649}$$

Nous appliquons le théorème des accroissements finis 12.311 sur la fonction φ :

EQooGSLNooJrLIb

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\beta(t) \tag{14.650}$$

pour une certaine fonction $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\lim_{t\to 0} \beta(t) = 0$. En remplaçant φ par sa valeur en termes de f dans (14.650),

$$f(a + te_i) = f(a) + t(\partial_i f)(a) + t\beta(t). \tag{14.651}$$

□

14.24 Formes différentielles

SecFormDiffRappel

Nous parlerons de formes différentielles exactes et fermées dans la section 22.84.

14.24.1 Décomposition dans la base duale

DEFooMGXSooWioKie

Définition 14.257.
*Soit U, un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une 1-**forme différentielle** ω sur U est une application*

$$\begin{aligned} \omega\colon U &\to (\mathbb{R}^n)^* \\ x &\mapsto \omega_x. \end{aligned} \tag{14.652}$$

*Une k-**forme différentielle** est une application*

$$\omega\colon U \to \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \tag{14.653}$$

telle que ω_x est alternée pour tout x.

Étant donné que $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé (définition 12.118), nous savons ce qu'est une forme différentielle continue ou de classe C^k.

REMooSKKSooDZFMAr

Remarque 14.258.
L'ensemble des 1-formes différentielles devient un espace vectoriel avec les définitions

$$\begin{aligned}(\lambda\omega)_x(v) &= \lambda\omega_x(v)\\ (\omega+\mu)_x(v) &= \omega_x(v)+\mu_x(v).\end{aligned} \tag{14.654}$$

Nous connaissons la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ définie en 6.144. Nous allons noter ces formes par dx_i :

$$\begin{aligned}e_1^* &= dx_1 \colon v \mapsto v_1\\ &\vdots\\ e_n^* &= dx_n \colon v \mapsto v_n\end{aligned} \tag{14.655}$$

EQooITHKooDzigDY

Toute forme différentielle s'écrit

$$\omega_x = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)dx_i \tag{14.656}$$

où $a_1,\ldots,a_n$ sont les composantes de ω dans la base usuelle, et sont des fonctions à valeurs réelles.

LEMooNSFKooLOKGGy

Lemme 14.259.
Une 1-forme différentielle est ***continue*** *si les fonctions a_i sont continues. La forme sera C^k quand les a_i seront C^k.*

Pour un vecteur $v=(v_1,\ldots,v_n)$ on a donc par définition de dx_i

$$\omega_x(v) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)v_i. \tag{14.657}$$

Ces fonctions a_i peuvent être trouvées en appliquant ω aux éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$a_j(x) = \omega_x(e_j) \tag{14.658}$$

parce que $\omega_x(e_j) = \sum_i a_i(x)dx_i(e_i) = \sum_i a_i(x)\delta_{ij} = a_j(x)$.

14.24.2 L'isomorphisme musical

Si G est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, et si $x\in\mathbb{R}^n$, nous pouvons définir

$$\begin{aligned}G_x^\flat \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto \langle G(x), v\rangle\end{aligned} \tag{14.659}$$

EqDefBemol

Pour chaque x, l'application $G_x^\flat$ est une forme sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Nous écrivons que

$$G_x^\flat \in \big(\mathbb{R}^n\big)^*. \tag{14.660}$$

Nous pouvons ainsi déterminer le développement de $G^\flat$ dans la base des dx_i en faisant le calcul

$$G_x^\flat(e_i) = \langle G(x), e_i\rangle = G_i(x), \tag{14.661}$$

donc les composantes de $G^\flat$ dans la base dx_i sont exactement les composantes de G dans la base e_i :

$$G_x^\flat = G_1(x)dx_1 + \cdots + G_n(x)dx_n. \tag{14.662}$$

La construction inverse existe également. Si ω est une 1-forme différentielle, nous pouvons définir le champ de vecteurs $\omega^\sharp$ par la formule (implicite)

$$\omega_x(v) = \langle \omega^\sharp(x), v\rangle \tag{14.663}$$

pour tout $v\in\mathbb{R}^n$. Par définition, $(\omega^\sharp)^\flat = \omega$.

Lemme 14.260.
En composantes nous avons :

$$\omega^\sharp(x) = \big(a_1(x),\ldots,a_n(x)\big). \tag{14.664}$$

Si G est un champ de vecteurs, alors $(G^\flat)^\sharp = G$.

14.25 Différentielle

Nous avons déjà donné une définition abstraite de la différentielle dans la définition 12.296. Nous en voyons maintenant quelques motivations dans le cas de fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$.

14.25.1 Exemples introductifs

SEBSECooLPRQooJRQCFL

La notion de dérivée est associée à la recherche de la droite tangente à une courbe. Reprenons rapidement le cheminement. La dérivée de $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ au point a est un nombre $f'(a)$, qui définit donc une application linéaire dont le coefficient angulaire est $f'(a)$, et que nous notons df_a :

$$\begin{aligned} df_a\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ u&\mapsto f'(a)u. \end{aligned} \tag{14.665}$$

La droite donnée par l'équation

$$y(a+u)=f'(a)u \tag{14.666}$$

est parallèle à la tangente en a. Pour trouver la tangente, il suffit de la décaler de la hauteur qu'il faut. L'équation de la droite tangente au graphe de f au point $\big(a,f(a)\big)$ devient

$$y(x)=f(a)+f'(a)(x-a)=f(a)+df_a(x-a). \tag{14.667}$$

EqDiffRapTgDer

Nous nous proposons de généraliser cette formule au cas de la recherche du plan tangent à une surface.

Exemple 14.261.
Considérons $f(x,y)=x^2y+y^2e^x$. Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}&=2xy+y^2e^x\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=x^2+2ye^x. \end{aligned} \tag{14.668}$$

△

Cet exemple était l'exemple facile où tout se passe bien.

Exemple 14.262.
Les choses sont moins simples lorsqu'on considère la fonction suivante :

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases} \tag{14.669}$$

On voit que pour tout x et tout y, nous avons $f(x,0)=f(0,y)=0$. Donc cette fonction est nulle sur les axes horizontaux et verticaux. Nous avons en particulier

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=0. \end{aligned} \tag{14.670}$$

Donc ces dérivées partielles existent.

Il n'est par contre pas question de dire que cette fonction « va bien » autour du point $(0,0)$. En effet si nous regardons sa valeur sur la droite diagonale $y=x$, nous avons

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}. \tag{14.671}$$

Par conséquent si nous suivons la fonction le long de la droite $y=x$, la hauteur vaut $\frac{1}{2}$ en permanence, sauf juste en $(0,0)$ où la fonction fait un grand plongeon !

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=(x*y)/(x**2+y**2)
sage: plot3d(f,(x,-2,2),y(-2,2))
```

D'ailleurs elle fait un plongeon le long de toutes les droites (sauf verticale et horizontale). En effet si nous regardons la fonction le long de la droite $y = mx$, nous avons

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}. \tag{14.672}$$

La fonction est donc *constante* sur chacune de ces droites. Il n'est donc pas question de dire que cette fonction est « dérivable » en $(0, 0)$, vu qu'elle fait des grands sauts dans presque toutes les directions. △

Nous devons donc trouver mieux que les dérivées partielles pour étudier le comportement des fonctions un peu problématiques.

14.25.2 Différentielle

Nous nous souvenons de l'équation (14.464) qui nous dit que pour une fonction d'une variable la dérivabilité signifiait qu'il existait un nombre ℓ et une fonction α tels que

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + (x - a)\alpha(x - a) \tag{14.673}$$

et $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$.

En nous inspirant de cela, nous comprenons peut-être un peu le pourquoi de la définition 12.296.

14.263.
L'objet df_a est *en soi* une application $df_a \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nous notons $df_a(u)$ la valeur de df_a sur le vecteur $u \in \mathbb{R}^m$. En particulier, l'application df est une forme différentielle au sens de la définition 14.257.

14.264.
Les propositions 14.275 et 14.325 vont montrer qu'en étudiant bien les dérivées partielles, nous pouvons conclure à la différentiabilité d'une fonction. Attention cependant, nous verrons dans l'exemple 14.284 que l'existence des dérivées directionnelles partielles ne permettait pas de conclure à la différentiabilité.

14.25.3 Matrice de la différentielle

La différentielle est une application linéaire. Elle possède donc une matrice lorsque des bases sont fixées.

PROPooBMROooThgLuU

Proposition 14.265.
Soient une application différentiable $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^m$. Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, la matrice de df_a est

$$(df_a)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{14.674}$$

Démonstration. Le lien entre matrice et application linéaire est vu dans la proposition 6.81. Dans le cas des bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ nous savons qu'extraire une composante revient à prendre le produit scalaire. Nous avons donc

$$(df_a)_{ij} = \big(df_a(e_j)\big)_i = df_a(e_j) \cdot e_i. \tag{14.675}$$

La linéarité de la dérivation donne alors

$$(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f(a + te_j)\Big]_{t=0} \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f_i(a + te_j)\Big]_{t=0} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{14.676}$$

□

LEMooDDUZooLwXkRp

Lemme 14.266 ([1])**.**
Soit une fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Nous posons

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto g(x). \end{aligned} \tag{14.677}$$

Alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Le problème lorsqu'il faut démontrer qu'une fonction est de classe C^∞, c'est que $d^k f$ sera une application de $\mathbb{R}^2$ vers un espace qui est un terrible emboîtement de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \dots)$. Pour traiter cette difficulté, nous considérons les espaces suivants : $V_0 = \mathbb{R}$ et par récurrence $V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, V_k)$.

Et nous considérons également les éléments

$$\begin{aligned}\alpha_1\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (u,v) &\mapsto u\end{aligned} \tag{14.678}$$

et plus généralement $\alpha_k \in V_k$ donné par

$$\begin{aligned}\alpha_k\colon \mathbb{R}^2 &\to V_{k-1}\\ (u,v) &\mapsto u\alpha_{k-1}.\end{aligned} \tag{14.679}$$

Notons que dans l'expression $u\alpha_{k-1}$, il s'agit d'un produit entre un scalaire $u \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\alpha_{k+1} \in V_{k-1}$.

Nous prouvons maintenant par récurrence que $d^k f_{(a,b)} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, en utilisant directement la définition.

(1) **Initialisation**

Pour $k = 1$, nous calculons

$$\frac{|f(a+h_1,b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \tag{14.680}$$

Notre but est de calculer la limite de cela lorsque $h \xrightarrow{\mathbb{R}^2} 0$ avec $h \neq 0$. L'hypothèse sur la dérivabilité de g nous indique que si $0 < |t| < \delta$, alors

$$\frac{|g(a+t) - g(a) - tg'(a)|}{|t|} < \epsilon. \tag{14.681}$$

EQooQLWNooLRKhUv

Nous considérons donc la boule épointée de $\mathbb{R}^2$ de rayon δ : $B = B\big((0,0),\delta\big) \setminus \{(0,0)\}$, et nous considérons $h \in B$. Deux cas sont à distinguer : $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$.

Si $h_1 = 0$, alors

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} = 0. \tag{14.682}$$

Sinon nous avons $0 < h_1 \leqslant \|h\| < \delta$ et donc

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \leqslant \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{|h_1|} < \epsilon \tag{14.683}$$

par la relation (14.681). Nous avons donc bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h_1,b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = 0. \tag{14.684}$$

(2) **Récurrence**

Nous supposons que $d^k f_{a,b} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, et nous devons prouver que $d^k f$ est différentiable et que $d^{k+1} f_{(a,b)} = g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}$. Pour cela nous introduisons tout dans la définition de la différentielle pour voir ce qui arrive.

Nous avons :

$$\begin{aligned}&\frac{d^k f_{(a+h_1,b+h_2)} - d^k f_{(a,b)} - g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}(h_1,h_2)}{\|h\|}\\ &= \frac{g^{(k)}(a+h_1)\alpha_k - g^{(k)}(a)\alpha_k - g^{(k+1)}(a)h_1\alpha_k}{\|h\|}.\end{aligned} \tag{14.685}$$

Cela est, pour chaque $h \neq 0$, un élément V_k, mais le coefficient α_k se factorise de telle sorte que nous devons seulement calculer la limite (si elle existe)

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{(k)}(a+h_1) - g^{(k)}(a) - h_1 g^{(k+1)}(a)}{\|h\|}. \tag{14.686}$$

Le même jeu de séparation entre $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$ que dans le cas $k = 1$ nous permet de déduire que cette limite existe et vaut zéro, grace à la définition de $g^{(k+1)}$.

Nous avons donc prouvé que f est différentiable autant que fois que souhaité. Elle est donc de classe C^∞ comme annoncé. □

14.25.4 Différentielle, dual et forme différentielle

14.25.4.1 Dans la base duale

Nous avons déjà parlé en (14.655) de la base $\{dx_i\}_{i=1,\dots,n}$ des formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 14.267.
La forme de base dx_i est la différentielle de la fonction de projection

$$\begin{aligned}\texttt{proj}_i\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto v_i.\end{aligned} \tag{14.687}$$

Autrement dit nous avons

$$d(\texttt{proj}_i)_a = dx_i \tag{14.688}$$

pour tout i et pour tout a.

Démonstration. Le quotient

$$\frac{\texttt{proj}_i(a+h) - \texttt{proj}_i(a) - dx_i(h)}{\|h\|} \tag{14.689}$$

est toujours nul. La limite est a fortiori nulle. □

Nous avons donc $(d\,\texttt{proj}_i)_a = dx_i$ pour tout a. Notons que les fonctions dx_i et $\texttt{proj}_i$ sont les mêmes. Cela justifie la notation « dx_i » pour les formes différentielles de base, parce que ce sont les différentielles des fonctions « coordonnées » que nous pouvons noter x_i.

Étant donnée une fonction f, il est légitime de nous demander comment (si elle existe) la différentielle se décompose en chaque point dans la base duale. C'est-à-dire fixer les fonctions a_i en termes des dérivées de f pour avoir

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i. \tag{14.690}$$

C'est ce que nous allons faire dans le corolaire 14.272.

Exemple 14.268.
Si $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, sa différentielle est la forme

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy. \tag{14.691}$$

Si nous nommons f et g les fonctions $\partial_x F$ et $\partial_y F$, nous avons donc

$$Df = f dx + g dy, \tag{14.692}$$

qui vérifie

$$\partial_y f = \partial_x g, \tag{14.693}$$

parce que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Ce que nous avons donc prouvé, c'est que △

Lemme 14.269.
Si $f dx + g dy$ est la différentielle d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors $\partial_y f = \partial_x g$.

14.25.5 Ce n'est pas la différentielle extérieure

Il existe une notion de différentielle extérieure, mais ce n'est pas celle-là que nous utilisons la majorité du temps. En particulier si E et F sont des espaces vectoriels normés, lorsque $f\colon E \to F$ est une fonction, df est une application

$$df\colon E \to \mathcal{L}(E,F) \tag{14.694}$$

et la différentielle seconde est la différentielle de cette application-là. Chose faisable parce que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel on ne peut plus respectable.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle extérieure d'une 1-forme, nous avons une formule de Leibniz

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega. \tag{14.695}$$

En particulier,

$$d(f dx) = df \wedge dx + f \underbrace{d(dx)}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx. \tag{14.696}$$

Attention : la différentielle extérieure n'est pas la différentielle usuelle. Certes dans le cas d'une 0-forme (c'est-à-dire d'une fonction), les deux notions coïncident, mais ça ne va pas plus loin. La différentielle extérieure vérifie $d^2\omega = 0$ pour tout ω, y compris pour les fonctions : si $\omega = df$ alors $d\omega = 0$.

Nous mentionnerons la différentielle extérieure dans le cas de

(1) Théorème de Stockes 22.71.

14.25.6 Continuité, dérivabilité et différentiabilité

Le théorème suivant reprend les principales propriétés d'une fonction différentiable. Il est à ne pas confondre avec le théorème 14.325 qui dira que si les dérivées partielles sont continues sur un voisinage de a, alors f est différentiable en a.

ThoRapPropDiffSi

Proposition 14.270.
Soit un espace vectoriel normé V et une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to V$. Si f est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$ alors

(1) elle est continue en a,

(2) elle admet une dérivée dans toutes les directions de $\mathbb{R}^n$,

(3) toutes les dérivées directionnelles $\partial_u f(a)$ existent et nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} df_a\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u_i, \end{aligned} \tag{14.697}$$

EqDiffPartRap

si les u_i sont les composantes de u dans la base canonique $\mathbb{R}^n$.

La dernière égalité sera de temps en temps utilisée sous la forme

$$df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}. \tag{14.698}$$

EqQWQSaMA

Démonstration. La limite

$$\lim_{h\to 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n}{\|h\|_m} = 0,$$

implique que

$$\lim_{h\to 0_m} \|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n = 0.$$

Comme T est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, on a $\lim_{h\to 0} T(h) = 0$, d'où la continuité de f au point a.

Si u est un vecteur non nul, la différentiabilité de f au point a implique

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(a+tu) - f(a) - T(tu)\|_n}{\|tu\|_m} = 0,$$

par la linéarité de T et par l'égalité $\|tu\|_m = |t|\|u\|_m$ on obtient

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{|t|} = T(u).$$

Donc f est dérivable suivant le vecteur u et $\partial_u f(a) = T(u) = df_a(u)$. □

CORooTBUMooHPncPH

Corolaire 14.271 (Différentielle et dérivée)**.**
Soit une application différentiable $f\colon \mathbb{R} \to V$ où V est un espace vectoriel normé. Alors $f'(u) = df_u(1)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 14.270, nous avons

$$df_u(1) = \frac{d}{dt}\Big[f(u+t1)\Big]_{t=0} = f'(u). \tag{14.699}$$

Nous avons utilisé le fait que pour une fonction sur $\mathbb{R}$, l'unique dérivée partielle est la dérivée normale. □

CORooXURPooQMKvBl

Corolaire 14.272.
Si f est différentiable, alors la forme différentielle df_a se décompose en

$$df_a = \sum_i (\partial_i f)(a)dx_i. \tag{14.700}$$

Démonstration. Vue la définition des formes dx_i nous pouvons remplacer u_i par $dx_i(u)$ dans l'égalité (14.697) et écrire

$$df_a(u) = \sum_i (\partial_i f)(a) dx_i(u) \tag{14.701}$$

et donc écrire l'égalité demandée. □

Le lemme suivant regroupe quelques égalités avec lesquelles nous allons souvent travailler. Il explique comment sont liées les dérivées directionnelles, les dérivées partielles et la différentielle.

LemdfaSurLesPartielles

Lemme 14.273.
Si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, alors

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a) \cdot u \tag{14.702}$$

pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^m$

Démonstration. La première égalité est la proposition 14.270, et la seconde est seulement la définition de la dérivée directionnelle avec des notations un peu plus snob. En particulier nous avons

$$df_a(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{14.703}$$

Pour le reste c'est la linéarité de la différentielle qui joue : le vecteur u peut être écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base

$$u = \sum_{i=1}^m u_i e_i, \qquad u_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Alors, la linéarité de df_a nous donne

$$df_a(u) = df_a\left(\sum_{i=1}^m u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m u_i \left(df_a e_i\right) = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{14.704}$$

Le lien avec le gradient est la définition du produit scalaire (10.168). □

La formule $df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ est bien utile pour calculer des différentielles, mais elle ne permet pas de prouver que f est différentiable. Autrement dit, même si le calcul de la dérivée $\frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ donne un résultat pour tout u, nous ne pouvons pas en déduire que f est différentiable au point a.

PROPooJMBJooQzjXYf

Proposition 14.274 ([1]).
Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application différentiable, alors sa matrice est donnée par

$$(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = (\partial_j f_i)(a). \tag{14.705}$$

Démonstration. En suivant la formule de la proposition 6.81(1), nous devons calculer

$$(df_a)_{ij} = \big(df_a(e_j)\big)_i. \tag{14.706}$$

En utilisant les formules du lemme 14.273, nous avons $df_a(e_i) = (\partial_i f)(a)$, et donc

$$(df_a)_{ij} = \big(df a_a(e_j)\big)_i = (\partial_j f)(a)_i = (\partial_j f_i)(a). \tag{14.707}$$

□

PropExistDiffUn

Proposition 14.275.
Soient f une fonction de x et y et un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si les nombres $\partial_x f(a,b)$ et $\partial_y f(a,b)$ existent et si il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ + \|(x,y)-(a,b)\|\alpha\Big(\|(x,y)-(a,b)\|\Big) \end{aligned} \tag{14.708}$$

eqCritDiffabert

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0, \tag{14.709}$$

alors f est différentiable en (a,b).

14.276.
Dans cet énoncé nous avons écrit $d\big((x,y),(a,b)\big)$ la distance entre (x,y) et (a,b), c'est-à-dire le nombre $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Afin d'écrire l'équation (14.708) sous forme plus compacte, nous introduisons le vecteur

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \end{pmatrix} \tag{14.710}$$

L'équation (14.708) devient alors

$$f(X) = f(P) + \nabla f(a,b) \cdot (X-P) + \|X-P\|\alpha\big(\|X-P\|\big). \tag{14.711}$$ EqdiffComp

Le vecteur $(\nabla f)(a,b)$ est appelé le **gradient** de f au point (a,b).

Remarque 14.277.
Nous avons introduit la notation ∇f pour le gradient d'une fonction f. Nous allons par la suite introduire $\nabla \cdot F$ pour la divergence du champ de vecteurs F et $\nabla \times F$ pour son rotationnel.

Toutes les formules pour ∇f, $\nabla \cdot F$ et $\nabla \times F$ peuvent facilement être mémorisées en pensant à ∇ comme étant le vecteur

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{14.712}$$ EQooQKGQooOPeFoo

Nous allons ici cependant seulement penser à (14.712) comme un moyen mnémotechnique ; nous ne donnons pas de définition à « ∇ » tout seul.

PROPooEYPKooAVjJRF

Proposition 14.278.
Si f est différentiable en (a,b) alors pour tout vecteur u, la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+tu_1, b+tu_2) \end{aligned} \tag{14.713}$$

est dérivable en 0 et on a

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \tag{14.714}$$

où nous avons noté $p=(a,b)$.

Démonstration. Réécrivons la formule (14.711) sous la forme

$$f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p) + \|x-p\|\alpha(\|x-p\|). \tag{14.715}$$

Cela étant vrai pour tout x, nous l'écrivons en particulier pour $x = p+tu$ où t est un réel et u est le vecteur unitaire choisi. Nous avons donc

$$f(p+tu) = f(p) + t\nabla f(p) \cdot u + \|tu\|\alpha(\|tu\|). \tag{14.716}$$

En utilisant le fait que u est unitaire, $\|tu\| = |t|\|u\| = |t|$. La dérivée de φ en 0 est alors donnée par

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tu)-f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \nabla f(p) \cdot u + \alpha(|t|). \tag{14.717}$$

Lorsque nous prenons la limite, le membre de gauche devient $\varphi'(0)$ tandis que dans le membre de droite, le second terme disparaît. Nous avons finalement

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \tag{14.718}$$

□

LEMooXZGQooYxDRRU

Lemme 14.279 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel normé V. Si $f\colon \mathbb{R} \to V$ est différentiable en a, alors df_a est l'opérateur de multiplication par $f'(a)$.

Démonstration. La définition 12.298 dit que $f'(a) = (\partial_1 f)(a)$. Le lemme 14.273 dit alors que

$$f'(a) = (\partial_1 f)(a) = df_a(1). \tag{14.719}$$

En utilisant la linéarité de df_a,

$$df_a(t) = tdf_a(1) = f'(a)t. \tag{14.720}$$

□

14.25.7 Calcul de valeurs approchées

Si nous remplaçons les accroissements $x-a$ et $y-b$ par h et k, le critère de différentiabilité s'écrit

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ + \sqrt{h^2+k^2}\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big). \end{aligned} \tag{14.721}$$

Le dernier terme du membre de droite tend vers zéro à une vitesse double lorsque h et k tendent vers zéro : d'une part parce que $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers zéro et d'autre part parce que $\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)$ tend vers zéro. Nous avons donc la « bonne » approximation

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b). \tag{14.722}$$

lorsque (x,y) n'est pas trop loin de (a,b). Cette expression est évidemment une généralisation immédiate de l'équation (14.467). Elle exprime que l'on peut obtenir des informations sur la valeur d'une fonction en (x,y) si on peut calculer la fonction et ses dérivées en un point (a,b) non loin de (x,y).

Cette formule peut aussi être vue sous la forme suivante, plus pratique dans certains calculs :

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \simeq f(a,b) + \Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \tag{14.723}$$

Exemple 14.280.
Prenons la fonction $f(x,y)=\cos(x)\sin(y)$ et calculons une approximation de

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01, \frac{\pi}{2}+0.03\big). \tag{14.724}$$

D'abord les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\sin(x)\sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos(x)\cos(y). \end{aligned} \tag{14.725}$$

Nous allons utiliser l'approximation

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01, \frac{\pi}{2}+0.03\big) \simeq f\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) + 0.01\frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) + 0.03\frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big). \tag{14.726}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) &= -\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big) &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned} \tag{14.727}$$

Par conséquent

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01, \frac{\pi}{2}+0.03\big) \simeq \frac{1}{2} - 0.01\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{200}. \tag{14.728}$$

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=cos(x)*sin(y)
sage: a=f(pi/3+0.01,pi/2+0.03)
sage: numerical_approx(a)
0.491093815387986
sage: b=1/2-sqrt(3)/200
sage: numerical_approx(b)
0.491339745962156
sage: numerical_approx(a-b)
-0.000245930574169814
```

Cela fait une erreur de l'ordre du dix millième.

△

Remarque 14.281.
Les esprits les plus critiques diront que cette vérification par Sage n'en est pas une parce que Sage a certainement utilisé un algorithme d'approximation qui se base sur la même idée que ce que nous venons de faire, et que par conséquent le fait qu'il obtienne le même résultat que nous est un peu tautologique.

Ils n'auront pas tort. Cependant, le code source de Sage est disponible publiquement[129] ; vous pouvez aller le lire et vérifier qu'il y a effectivement une *preuve* que le résultat fourni par Sage possède une bonne dizaine de décimales correctes.

Cette disponibilité publique du code source est une des nombreuses différences fondamentales entre Sage et votre calculatrice[130]. Dois-je vous rappeler qu'un des principes fondamentaux de l'éthique scientifique est que les résultats et les méthodes utilisés doivent être absolument ouverts à la vérification et à la critique de tous ?

14.25.8 Différentielle et tangente

La notion de dérivée partielle (ou de dérivée suivant un vecteur) pour une fonction de plusieurs variables n'est pas une généralisation de la notion de dérivée en une variable d'espace. En fait, du point de vue géométrique, la dérivée de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point a est la pente de la ligne droite tangente au graphe de g au point $(a, g(a))$. Cette ligne, d'équation $r(x) = g'(a)x + g(a)$, est la meilleure approximation affine du graphe de g au point a, comme à la figure 14.9.

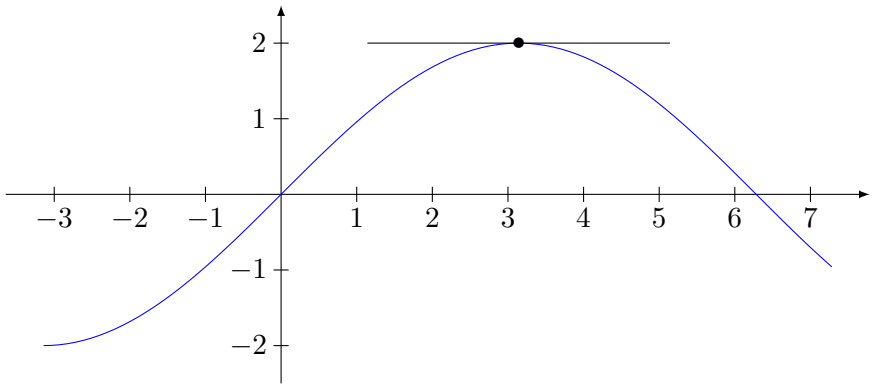


FIGURE 14.9 : Tangentes au graphe d'une fonction d'une variable LabelFigTangentSegment

Le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une surface de deux paramètres dans $\mathbb{R}^3$. Si l'approximation affine d'une telle surface au point $(x, y, f(x, y))$ existe, alors elle est un plan tangent. En dimension plus haute, le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une surface de m paramètres dans $\mathbb{R}^{m+1}$ et son approximation affine (si elle existe) est un hyperplan de $\mathbb{R}^m$.

Nous allons voir que si f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ l'approximation affine de f au point a est l'élément de $f(a) + \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ qui ressemble le plus à f au voisinage de a. Plus précisément, on utilise les définitions suivantes.

Définition 14.282.
*Soient f et g deux applications d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. On dit que g est **tangente** à f au point $a \in U$ si $f(a) = g(a)$ et*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - g(x)\|_n}{\|x - a\|_m} = 0.$$

La relation de tangence est une relation d'équivalence. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où f admet une application affine tangente au point a.

En ce qui concerne l'interprétation géométrique, si nous regardons la figure 14.10, et d'ailleurs aussi en voyant la définition 12.872, la fonction est différentiable et la différentielle est T si il existe une fonction α telle que

$$f(a + u) - f(a) - T(u) = \alpha(u) \tag{14.729}$$

où la fonction α satisfait

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|\alpha(u)\|}{\|u\|} = 0 \tag{14.730}$$ EqPresqueTa

[129] Voir http://www.sagemath.org
[130] et les autres logiciels de type fenêtre, pomme ou feuille d'érable.

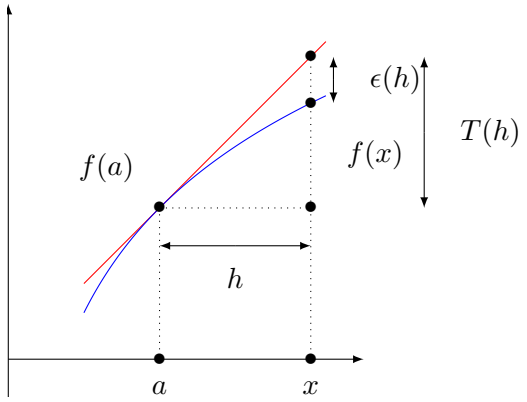


FIGURE 14.10 : Interprétation géométrique de la différentielle. LabelFigDifferentielle

C'est cela qui fait écrire $f(a+u)-f(a)-df_a(u)=o(\|u\|)$ à ceux qui n'ont pas peur de la notation o.

La différentielle df_a est donc la partie linéaire de l'application affine qui approxime au mieux la fonction f autour du point a. La notion de différentielle est la vraie généralisation du concept de dérivée pour fonctions de plusieurs variables, en outre elle nous permet d'expliciter la relation qui associe au vecteur u la dérivée $\partial_u f(a)$, pour f et a fixés.

Remarque 14.283.
Si on remplace les normes $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_n$ par d'autres normes, l'existence et la valeur de la différentielle de f au point a ne sont pas remises en cause. En effet, soient $\|\cdot\|_M$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|_N$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème 12.70, ces normes sont équivalentes à $\|.\|_m$ et $\|.\|_n$ respectivement ; il existe donc des constantes k, K, l, $L>0$ telles que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^m$ et tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$

$$k\|u\|_M \leqslant \|u\|_m \leqslant K\|u\|_M,$$

$$l\|v\|_N \leqslant \|v\|_n \leqslant L\|v\|_N.$$

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ sont les mêmes et on a

$$\begin{aligned}\frac{l}{K}\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_N}{\|h\|_M} \leqslant \frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_n}{\|h\|_m} \leqslant \\ \leqslant \frac{L}{k}\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_N}{\|h\|_M}.\end{aligned} \tag{14.731}$$

Il est donc possible, pour démontrer la différentiabilité ou pour calculer la différentielle, d'utiliser le critère (12.872) avec une norme au choix. Parfois c'est utile.

14.25.9 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable

Chacun des points du théorème 14.270 est en soi un critère pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point.

14.25.9.1 Continuité

Le premier critère à vérifier est donc la continuité. Si une fonction n'est pas continue en un point, alors elle n'y sera pas différentiable. Pour rappel, la continuité en a se teste en vérifiant si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

14.25.9.2 Linéarité

Un second test est la linéarité de la dérivée directionnelle par rapport à la direction : l'application $u\mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ doit être linéaire, sinon df_a n'existe pas.

Exemple0046Diff

Exemple 14.284.
Examinons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{14.732}$$

Prenons $u = (u_1, u_2)$ et calculons la dérivée de f dans la direction de u au point $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{tu_1 t^2 u_2^2}{t^2u_1^2 + t^4u_2^4}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{u_1u_2^2}{u_1^2 + t^2u_2^4}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{si } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } u_1 = 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{14.733}$$

Cette application n'est pas linéaire par rapport à u. En effet, notons

$$\begin{aligned} A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(0,0), \end{aligned} \tag{14.734}$$

et vérifions que pour tout u et v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous ayons $A(\lambda u) = \lambda A(u)$ et $A(u+v) = A(u) + A(v)$. La première égalité est vraie, parce que

$$A(\lambda u) = A(\lambda u_1, \lambda u_2) = \frac{\lambda^2 u_2^2}{\lambda u_1} = \lambda \frac{u_2^2}{u_1} = \lambda A(u). \tag{14.735}$$

Mais nous avons par exemple

$$A\big((0,1) + (2,3)\big) = A(2,4) = \frac{16}{2} = 8, \tag{14.736}$$

tandis que

$$A(0,1) + A(2,3) = 0 + \frac{9}{2} \neq 8. \tag{14.737}$$

La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$, parce que la candidate différentielle, $df_{(0,0)}(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, n'est même pas linéaire.

△

Voici une autre façon de traiter la fonction de l'exemple 14.284.

ExeFHmCLII

Exemple 14.285.
La figure 14.11 représente le domaine d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et sur chacune des parties, elle est définie différemment.

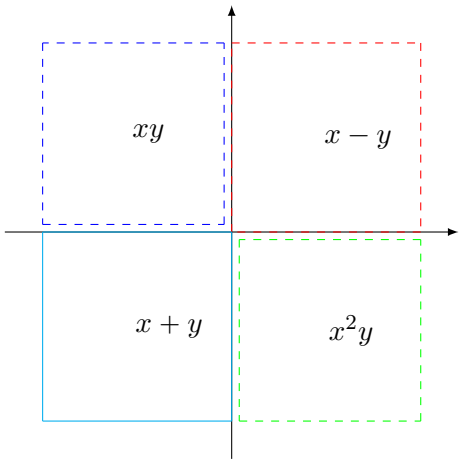


FIGURE 14.11 : La fonction de l'exemple 14.285.

LabelFigFWJuNhU

L'expression de f est ici

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ x - y & \text{si } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ x^2y & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ x + y & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.738}$$

On note que les deux axes forment une zone à problèmes. La zone hors des axes est un ouvert sur lequel f est différentiable car composée de polynômes. Analysons chacun des points de la forme (a,b) dans la zone à problèmes (c'est-à-dire si $ab=0$).

(1) **Si $a=0$ et $b>0$** Un tel point $(0,b)$ est sur l'axe vertical, dans la moitié supérieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y>0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} x-y = 0-b = -b$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} xy = 0b = 0$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0,b)$ avec $b>0$.

(2) **Si $a=0$ et $b<0$** Un tel point $(0,b)$ est sur l'axe vertical, dans la moitié inférieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y<0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} x^2y = 0^2b = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} x+y = 0+b = b$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0,b)$ avec $b<0$.

(3) **Si $a>0$ et $b=0$** Un tel point $(a,0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié droite. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x>0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} x-y = a-0 = a$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} x^2y = a^20 = 0$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a,0)$ avec $a>0$.

(4) **Si $a<0$ et $b=0$** Un tel point $(a,0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié gauche. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x<0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} xy = a0 = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} x+y = a+0 = a$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a,0)$ avec $a<0$.

(5) **Si $a=0$ et $b=0$** Le cas du point $(0,0)$ est particulier, puisque il est adhérent aux quatre composantes du domaine où la fonction est définie différemment. Pour étudier la continuité, il faut donc étudier quatre limites. Ces limites ont déjà été étudiées ci-dessus et valent toutes 0, ce qui prouve la continuité de f en $(0,0)$.

En ce qui concerne la différentiabilité, on sait qu'il est nécessaire que toutes les dérivées directionnelles existent. Calculons la dérivée dans la direction $(0,1)$ (au point $(0,0)$) :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \dots$$

qu'on sépare en deux cas, car $f(0,t)$ possède une formule différente si $t<0$ ou si $t\geqslant 0$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \begin{cases} \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{0+t}{t} = 1 \\ \lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}} \frac{0-t}{t} = -1 \end{cases}$$

ce qui prouve que la limite n'existe pas, donc que la dérivée directionnelle n'existe pas, et finalement que la fonction n'est pas différentiable.

Conclusion : La fonction donnée est continue hors des axes et au point $(0,0)$, mais discontinue partout ailleurs sur les axes. Elle est différentiable hors des axes, mais ne l'est pas sur les axes.

△

14.25.9.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle

Dans la pratique, nous pouvons calculer $\partial_u f(a)$ pour une direction u générale, et puis en déduire $\partial_x f$ et $\partial_y f$ comme cas particuliers en posant $u=(1,0)$ et $u=(0,1)$. Une chose incroyable, mais pourtant possible est qu'il peut arriver que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \neq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i. \tag{14.739}$$

Ceci se produit lorsque f n'est pas différentiable en a.

14.25.9.4 Un candidat dans la définition (marche toujours)

Lorsqu'une fonction est donnée, un candidat différentielle au point (a_1,a_2) est souvent assez simple à trouver en un point :

$$T(u_1,u_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)u_2. \tag{14.740}$$

L'application T est la candidate différentielle en ce sens que si la différentielle existe, alors elle est égale à T. Ensuite, il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y)-f(a_1,a_2)-T\big((x,y)-(a_1,a_2)\big)}{\|(x,y)-(a_1,a_2)\|} = 0 \tag{14.741}$$

EqLimDefDiff

ou non. Si oui, alors la différentielle existe et $df_{(a,b)}(u)=T(u)$, sinon[131], la différentielle n'existe pas.

Attention : dans la ZAP, les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne peuvent en général pas être calculées en utilisant les règles de calcul (c'est bien pour ça que la ZAP est une zone à problèmes). Il faut d'office utiliser la définition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t}, \tag{14.742}$$

et la définition correspondante pour $\partial_y f$.

Conclusion

Soient $f : A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et $a\in \mathrm{Int}(A)$. Si f est différentiable en a,

$$(df_a(e_j))_i = d(f_i)_a(e_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = [Jac(f)_{|a}]_{ij} \tag{14.743}$$

et la matrice de l'application linéaire df_a est la matrice jacobienne $m\times n$ de f en a notée $Jac(f)_{|a}$.

[131] y compris si la limite (14.741) n'existe même pas.

14.25.10 Gradient

Définition 14.286.
Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. On appelle ***gradient*** *de f la fonction $\nabla f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de composantes*

$$\partial_1 f, \dots, \partial_m f.$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))^T$. On appelle ***matrice jacobienne*** *de f la fonction $J(f) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par*

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_m f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \dots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix} \tag{14.744}$$

14.25.11 Linéarité

La proposition suivante signifie que la différentiation est une opération linéaire sur l'ensemble des fonctions différentiables.

PropDiffLineaire

Proposition 14.287.
Soient f et g deux fonctions de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$, et soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$ et λf sont différentiables au point a et on a

$$\begin{aligned} d(f+g)(a) &= df(a) + dg(a), \\ d(\lambda f)(a) &= \lambda df(a), \end{aligned} \tag{14.745}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0_m} \frac{\|(f(a+h) + g(a+h)) - (f(a) + g(a)) - df(a).h - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} \leqslant \\ &\lim_{h \to 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a).h\|_n}{\|h\|_m} + \lim_{h \to 0_m} \frac{\|g(a+h) - g(a) - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} = 0. \end{aligned} \tag{14.746}$$

De même on démontre la propriété $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$. □

14.26 Produit

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous notons $f \cdot g$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donnée par le produit scalaire point par point, c'est-à-dire

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \tag{14.747}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Le point dans le membre de droite est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Le cas particulier $n = 1$ revient au produit usuel de fonctions :

$$(fg)(x) = f(x)g(x). \tag{14.748}$$

LemDiffProsuid

Lemme 14.288.
Si f et g sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction produit fg est également différentiable et

$$(dfg)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a \tag{14.749}$$

EqDiffgProd

au sens où pour chaque u dans $\mathbb{R}^m$,

$$(dfg)_a(u) = g(a)df_a(u) + f(a)dg_a(u). \tag{14.750}$$

Démonstration. Ce que nous devons faire pour vérifier la formule 14.749, c'est de vérifier le critère (12.872) en remplaçant f par fg et $T(h)$ par $g(a)df(a).h + f(a)dg(a).h$.

Ce que nous avons au numérateur est

$$\begin{aligned} \clubsuit &= (fg)(a+h) - (fg)(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h \\ &= f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h. \end{aligned} \tag{14.751}$$

Maintenant, nous allons faire apparaitre $\big(f(a+h)-f(a)-df(a)\big)g(a+h)$ en ajoutant et soustrayant ce qu'il faut pour conserver ♣ :

$$\begin{aligned}\clubsuit &= \big(f(a+h)-f(a)-df(a).h\big)g(a+h)\\ &\quad + f(a)g(a+h)+g(a+h)df(a).h\\ &\quad - f(a)g(a)-g(a)df(a).h-f(a)dg(a).h.\end{aligned}\tag{14.752}$$

Nous mettons maintenant $f(a)$ et $df(a).h$ en évidence là où c'est possible :

$$\begin{aligned}\clubsuit &= \big(f(a+h)-f(a)-df(a).h\big)g(a+h)\\ &\quad + f(a)\big(g(a+h)-g(a)-dg(a).h\big)\\ &\quad + \big(g(a+h)-g(a)\big)df(a).h.\end{aligned}\tag{14.753}$$

Nous devons maintenant considérer la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\clubsuit\|}{\|h\|}.\tag{14.754}$$

Étant donné que f et g sont différentiables, les deux premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\big(f(a+h)-f(a)-df(a).h\big)}{\|h\|}g(a+h)=0\\ \lim_{h\to 0}f(a)\frac{\big(g(a+h)-g(a)-dg(a).h\big)}{\|h\|}=0.\end{aligned}\tag{14.755}$$

En ce qui concerne le troisième terme, en utilisant la norme d'une application linéaire, nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|df(a).h\|}{\|h\|}\leqslant\sup_{h\in\mathbb{R}^m}\frac{\|df(a).h\|}{\|h\|}=\|df(a)\|,\tag{14.756}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{h\to 0}\|g(a+h)-g(a)\|\frac{\|df(a).h\|\|h\|}{\|h\|}\\ &\leqslant\lim_{h\to 0}\|g(a+h)-g(a)\|\|df(a)\|=0\end{aligned}\tag{14.757}$$

parce que g est continue (la limite du premier facteur est nulle tandis que la norme de $df(a)$ est un nombre constant). Nous avons donc bien prouvé que la formule (14.749) est la différentielle de fg au point a. □

Ce résultat se généralise pour des fonctions f et g de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ dans la proposition suivante qui généralise tout en même temps la proposition 14.202.

Proposition 14.289.
Soient f et g deux fonctions de $U\subset\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a\in U$. Alors la fonction $f\cdot g$ est différentiable au point a et on a

$$d(f\cdot g)(a)=g(a)\cdot df(a)+f(a)\cdot dg(a)\tag{14.758}$$

au sens où

$$d(f\cdot g)_a(u)=g(a)\cdot\big(df_a(u)\big)+f(a)\cdot\big(dg_a(u)\big)\tag{14.759}$$ Eqdfcdotgexpl

pour tout $u\in\mathbb{R}^m$.

Démonstration. La preuve du cas $n=1$ est déjà faite ; c'est la formule (14.749). Pour le cas général $n\geqslant 2$, nous passons aux composantes en nous rappelant que

$$(f\cdot g)(a)=\sum_{i=1}^n f_i(a)g_i(a)=\sum_{i=1}^n(f_ig_i)(a).\tag{14.760}$$

En utilisant la linéarité de la différentiation, nous nous réduisons donc au cas des produits f_ig_i qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}d(f\cdot g)(a)&=d\left(\sum_{i=1}^n f_ig_i\right)(a)\\ &=\sum_{i=1}^n\big(df_i(a)g_i(a)+f_i(a)dg_i(a)\big)\\ &=g(a)\cdot df(a)+f(a)\cdot dg(a).\end{aligned}\tag{14.761}$$

Ceci termine la preuve. □

14.26.1 Difficulté d'ordre supérieur

14.290.
Il serait tentant de faire une récurrence sur le lemme 14.288 pour dire que si f et g sont de classe C^p, alors le produit fg est également de classe C^p, parce que la formule de $d(fg)$ contient des produits de fonctions de classe C^p et C^{p-1}.

Le problème est que le lemme 14.288 est énoncé et prouvé pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors que déjà la formule

$$d(fg) = gdf + fdg \tag{14.762}$$

contient le produit de $g\colon E \to \mathbb{R}$ par $df\colon E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Lorsque nous montons dans les différentielles, la situation empire, et les produits dont sont composés les formules sont réellement à définir…

Oublions un instant les questions de régularité, et calculons sans ménagement, pour voir ce qu'il se passe. Nous considérons un espace vectoriel E ainsi que des fonctions $f\colon E \to \mathbb{R}$ et $g\colon E \to V$ où V est un autre espace vectoriel.

Nous avons

$$d(fg)_a(u) = df_a(u)g(a) + f(a)dg_a(u). \tag{14.763}$$

Les deux termes sont des produits $\mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$. Montons un coup :

$$d(gdf)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(gdf)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[g(a+tu)df_{a+tu}\Big]_{t=0} = dg_a(u)df_a + g(a)(d^2f)_a(u). \tag{14.764}$$

Un autre pour voir comment ça se passe plus haut :

$$d(df dg)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(df dg)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}dg_{a+tu}\Big]_{t=0} = (d^2f)_a(u)dg_a + df_a(d^2g)_a(u). \tag{14.765}$$

Là déjà vous noterez que nous sommes passés par le produit

$$df_{a+tu}df_{a+tu} \tag{14.766}$$

qui pour chaque t est un produit $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(E, V)$ que nous n'avons pas réellement défini.

En continuant le calcul ainsi nous trouvons par exemple

$$\begin{aligned}(d^3fg)_a(u) = {} & d^3f_a(u)g(a) + d^2f_a dg_a(u) \\ & + d^2f_a(u)dg_a + df_a d^2g_a(u) \\ & + d^2f_a(u)dg_a + df_a(d^2g)_a(u) \\ & + df_a(u)d^2g_a + f(a)(d^3g)_a(u).\end{aligned} \tag{14.767}$$

Vous noterez que cette formule contient trois termes que nous aurions eu envie de noter $d^2f dg$. Or ces trois termes ne sont pas identiques : deux sont $d^2f_a(u)dg_a$ et un est $(d^2f)_a dg_a(u)$.

14.26.2 Solution : produit tensoriel

Afin de donner un sens à tous les produits, nous allons passer par les produits tensoriels. Nous avons déjà le théorème 12.350 qui fait pratiquement tout.

PROPooWNCGooHbmcVb

Proposition 14.291 ([1]).
Soient des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p. Alors fg est de classe C^p.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1 \otimes 1 &\mapsto 1\end{aligned} \tag{14.768}$$

dont nous avons déjà parlé dans le lemme 12.288. En utilisant la notation $\tilde{\otimes}$ de la définition 12.346, nous avons

$$fg = \varphi \circ (f \tilde{\otimes} g). \tag{14.769}$$

La proposition 12.350 nous dit que $f\tilde{\otimes}g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ est de classe C^p. Vu que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, la proposition 12.337 nous dit que $\varphi \circ (f\tilde{\otimes}g)$ est encore de classe C^p.

Et voilà. □

14.26.3 Formes bilinéaires

Nous avons aussi une formule importante pour la différentielle des formes bilinéaires.

bilin_diff

Lemme 14.292.
Toute application bilinéaire

$$\begin{aligned} B\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \\ B(a_1, a_2) &= a_1 \star a_2 \end{aligned} \tag{14.770}$$

est différentiable en tout point (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, et on a

$$dB(a_1, a_2).(h_1, h_2) = h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\frac{\|B(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - B(a_1, a_2) - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|(a_1 + h_1) \star (a_2 + h_2) - a_1 \star a_2 - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \spadesuit \end{aligned} \tag{14.771}$$

on rajoute et on enlève la quantité $(a_1 + h_1) \star a_2$ dans le numérateur, et on obtient

$$\begin{aligned} \spadesuit &= \frac{\|(a_1 + h_1) \star h_2 + h_1 \star a_2 - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|h_1 \star h_2\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} \leqslant C \frac{\|h_1\|_m \|h_2\|_n}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} \\ &\leqslant C \frac{\|(h_1, h_2)\|^2_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = C\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{14.772}$$

Si on prend la limite de cette expression pour $(h_1, h_2) \to (0_m, 0_n)$ on obtient 0, donc la preuve est complète. À noter, que dans l'avant-dernier passage on a utilisé la continuité des applications linéaires $\texttt{proj}_m : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\texttt{proj}_n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à chaque point (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ associent a_1 et a_2 respectivement. □

PropEKLTooSvZjdW

Proposition 14.293.
Soit V et W deux espaces vectoriels et $\varphi\colon V \to W$ un isomorphisme. Soit $f\colon \mathbb{C} \to V$ une application telle que $\varphi \circ f\colon \mathbb{C} \to W$ soit différentiable.

Alors f est différentiable et $df = \varphi^{-1} \circ d(\varphi \circ f)$.

Démonstration. Si T est la différentielle de $\varphi \circ f$ au point z nous avons

$$0 = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{(\varphi \circ f)(z + h) - (\varphi \circ f)(z) + T(h)}{h} \tag{14.773a}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{(\varphi \circ f)(z + h) - (\varphi \circ f)(z) + \varphi\big((\varphi \circ T)(h)\big)}{h} \tag{14.773b}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \varphi\left(\frac{f(z + h) - f(z) + (\varphi \circ T)(h)}{h}\right) \tag{14.773c}$$

$$= \varphi \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z) + \varphi^{-1}T(h)}{h}. \tag{14.773d}$$

Pour la dernière ligne, nous avons permuté φ avec la limite (parce que φ est continue). Nous avons prouvé que f est différentiable et que $df = \varphi^{-1} \circ T = \varphi^{-1} \circ d(\varphi \circ f)$. □

14.27 Différentielle de fonction composée

Une importante règle de différentiation est la règle de différentiation d'une fonction composée (*chain rule* dans les livres anglais et américains). Cette règle généralise la règle de dérivation pour fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette règle a déjà été donnée dans le théorème 12.335, mais si vous avez seulement envie d'entendre parler de $\mathbb{R}^n$, vous pouvez lire le lemme 14.294 suivi de la proposition 14.296.

Le lemme suivant est essentiellement une reformulation du lemme 12.330.

Def_diff2

Lemme 14.294.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. La fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ est différentiable au point a dans U, si et seulement si il existe une fonction $\sigma_f : U \times U \to \mathbb{R}^n$ telle que SubEqsDiff2

$$\sigma_f(a,a) = \lim_{x\to a} \sigma_f(a,x) = 0 \tag{14.774a}$$

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \sigma_f(a,x)\|x-a\|_m, \tag{14.774b}$$

def_diff2

pour une certaine application linéaire $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Si les conditions (14.774) sont satisfaites alors T est la différentielle de f en a. En effet, dans ce cas nous avons

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \sigma_f(a, a+h)\|h\|, \tag{14.775}$$

et la condition (12.872) devient

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\sigma_f(a,a+h)\|\|h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \|\sigma_f(a,a+h)\| = 0 \tag{14.776}$$

Si f est différentiable au point a il suffit de prendre $T = df(a)$ et

$$\sigma_f(a,x) = \frac{f(x) - f(a) - df(a).(x-a)}{\|x-a\|_m}.$$

□

Remarque 14.295.
La fonction $\sigma_f(a,x)\|x-a\|_m$ est ce qui avait été appelé $\epsilon(h)$ sur la figure 14.10.

PropDiffCompose

Proposition 14.296.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables respectivement au point a dans U et $b = f(a)$ dans V. Alors la fonction composée $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable au point a et

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a. \tag{14.777}$$

EqDiffCompose

Démonstration. En tenant compte du lemme 14.294 on peut écrire

$$f(a+h) - f(a) = df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m, \qquad \forall h \in U\setminus\{0\}, \tag{14.778a}$$

$$g(b+k) - g(b) = dg_b(k) + \sigma_g(b,b+k)\|k\|_n, \qquad \forall k \in V\setminus\{0\}. \tag{14.778b}$$

On sait que $f(a) = b$ et que $f(a+h)$ est un élément de V et $f(a+h) = f(a)+k$ pour $k = df(a).h + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m$. Par substitution dans la deuxième équation on obtient

$$\begin{aligned}
&g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) \\
&\quad = dg_{f(a)}\Big(df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\Big) \\
&\qquad + \sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\left\|df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\right\|_n \\
&\quad = g\circ f(a+h) - g\circ f(a) \\
&\quad = dg_{f(a)} \circ df_a(h) \\
&\qquad + \|h\|_m\Big[dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h) \\
&\qquad + \sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\Big\|df_a\frac{h}{\|h\|_m} + \sigma_f(a,a+h)\Big\|_n\Big],
\end{aligned} \tag{14.779}$$

donc

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = dg_f(a)\circ df_a(h) + S(a,a+h)\|h\|_m \tag{14.780}$$

où S représente le contenu du dernier grand crochet. Il ne reste plus qu'à prouver que $S(a,a+h)$ est $o(\|h\|_m)$. En tenant compte du fait que $\sigma_f(a,a+h)$ et $\sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)$ sont $o(\|h\|_m)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0_m} \frac{S(a,a+h)}{\|h\|_m} &= \lim_{h\to 0_m} \frac{dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h)}{\|h\|_m} + \\
&+ \lim_{h\to 0_m} \frac{\sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\left\|df_a\frac{h}{\|h\|_m} + \sigma_f(a,a+h)\right\|_n}{\|h\|_m} = 0.
\end{aligned} \tag{14.781}$$

□

Remarque 14.297.
Note : la formule (14.777) est à comprendre de la façon suivante. Si $u \in \mathbb{R}^m$, alors

$$d(g \circ f)_a(u) = \underbrace{dg_{f(a)}}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} \Big(\underbrace{df_a(u)}_{\in \mathbb{R}^n} \Big) \in \mathbb{R}^p. \tag{14.782}$$

PROPooYNQYooSjXBfU

Proposition 14.298 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés V et W munis d'une base[132]*. Soient des applications $s\colon \mathbb{R} \to V$ et $g\colon V \to W$. Nous supposons que s est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ et que g est différentiable en $f(a)$. Alors*

$$(g \circ s)'(a) = \sum_i (\partial_i g)\big(s(a)\big) s_i'(a). \tag{14.783}$$

PROPooXAGQooRLMshw

Proposition 14.299 ([1]).
Soit une application $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Nous posons

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t, \dots, t). \end{aligned} \tag{14.784}$$

Alors

$$h^{(k)}(t) = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} g)(t, \dots, t). \tag{14.785}$$

Démonstration. Nous faisons une récurrence sur k en posant

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^k \\ t &\mapsto (t, \dots, t) \end{aligned} \tag{14.786}$$

et en utilisant la proposition 14.298. Nous avons $h = g \circ s$ et donc

$$h'(t) = \sum_i (\partial_i g)\big(s(t)\big) \underbrace{\frac{\partial s_i}{\partial t}(t)}_{=1}, \tag{14.787}$$

et donc $h' = \sum_i (\partial_i g) \circ s$.
Ensuite c'est la récurrence. □

Le lemme suivant sert à prouver les théorèmes 17.9 et 22.72. Il est fondamentalement la raison de la formule définissant l'intégrale d'une forme sur un chemin (définition 22.47).

LEMooKNBVooQSowos

Lemme 14.300 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé F de dimension finie, ainsi que E, un espace vectoriel normé. Nous considérons un chemin de classe C^1

$$\gamma\colon [a, b] \to E \tag{14.788}$$

et une application de classe C^1

$$f\colon E \to F. \tag{14.789}$$

Si $g = f \circ \gamma$, alors

$$g'(t) = (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) \tag{14.790}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Démonstration. Nous écrivons la dérivée de g de la façon suivante : SUBEQSooWKRYooGyVgNl

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{ds}\Big[g(t+s)\Big]_{s=0} && \text{(14.791a)} \\ &= \frac{d}{ds}\Big[(f \circ \gamma)(t+s)\Big]_{s=0} && \text{(14.791b)} \\ &= d(f \circ \gamma)_t(1) && \text{(14.791c)} \\ &= (df)_{\gamma(t)}\big(d\gamma_t(1)\big) && \text{(14.791d)} \\ & && \text{(14.791e)} \end{aligned}$$

SUBEQooHUZVooWECnVZ

SUBEQooOAYLooIzltaY

Justifications :

[132] Par rapport à laquelle seront écrites les dérivées partielles.

- Pour (14.791c) : les formules (14.273). Notez que le 1 à qui s'applique la différentielle de $f\circ\gamma$ est le vecteur de $\mathbb{R}$ qui est multiplié par s dans l'expression $(f\circ\gamma)(t+s)$.
- Pour (14.791d) : la différentiation de fonctions composées de la proposition 14.296.

Mais

$$d\gamma_t(1)=\frac{d}{ds}\Big[\gamma(t+s)\Big]_{s=0}=\gamma'(t). \tag{14.792}$$

En remettant au bout de (14.791), nous obtenons le résultat. □

14.27.1 Fonctions composées

Cette façon de voir la différentielle nous permet de jeter un nouveau regard sur la formule de différentiation des fonctions composées. Soient

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}^p&\to\mathbb{R}^n\\ g\colon\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R},\end{aligned} \tag{14.793}$$

et $h\colon\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ définie par

$$h(u)=g\big(f(u)\big)=(g\circ f)(u). \tag{14.794}$$

Nous allons noter x les coordonnées de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathbb{R}^p$ et u, un vecteur de $\mathbb{R}^p$ accroché au point a. Pour $\mathbb{R}^n$, les notations seront y pour les coordonnées, b pour un point de $\mathbb{R}^n$ et v, un vecteur « accroché » au point b.

Nous avons

$$dg_b(v)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)dy_i(v). \tag{14.795}$$

Ici $dy_i(v)$ signifie la $i$ème composante de v. C'est simplement v_i. Cette formule étant valable pour tout point $b\in\mathbb{R}^n$ et pour tout vecteur v, nous pouvons l'écrire en particulier pour

$$\begin{cases}b=f(a) & \text{(14.796a)}\\ v=df_a(u). & \text{(14.796b)}\end{cases}$$

Cela donne

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big)dy_i\big(df_a(u)\big). \tag{14.797}$$

Mais

$$df_a(u)=\sum_{j=1}^p\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j(u), \tag{14.798}$$

donc la $i$ème composante de ce vecteur est

$$\big(df_a(u)\big)_i=\sum_{j=1}^p\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)dx_j(u). \tag{14.799}$$

En remplaçant $dy_i\big(df_a(u)\big)$ par cela dans l'expression (14.797), nous trouvons

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big)\sum_{j=1}^p\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)dx_j(u). \tag{14.800}$$

Nous pouvons vérifier que c'est la différentielle de $g\circ f$ au point a, appliquée au vecteur u. En effet

$$d(g\circ f)_a(u)=\sum_{j=1}^p\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)dx_j(u), \tag{14.801}$$

tandis que, par la dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{14.802}$$

Au final, ce que nous avons prouvé est que

$$d(g\circ f)_a(u)=dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big). \tag{14.803}$$

14.28 Différentielle de fonctions à plusieurs variables

PROPooPRDIooNYOesw

Proposition 14.301 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et W. Soit une fonction différentiable $f: V \to W$. Nous avons

$$df_a(u) = \sum_{i=1}^{n} u_k(\partial_k f)(a). \tag{14.804}$$

Démonstration. Nous devons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} h_k(\partial_k f)(a)}{\|h\|}. \tag{14.805}$$

EQooMBURooBWNzQQ

Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$ et $h \in V$ tel que $\|h\| = \epsilon$. Nous posons $h = \epsilon u$ avec $\|u\| = 1$ et nous utilisons la formule des accroissements finis (proposition 14.256). Le numérateur de (14.805) est

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon u_k(\partial_k f)\big(a + \sum_{i=k+1}^{n} \epsilon u_i e_i\big) + \epsilon\alpha(\epsilon) - \sum_{i=1}^{n} \epsilon u_k(\partial_k f)(a). \tag{14.806}$$

Le dénominateur est juste $\|h\| = \epsilon$. Nous pouvons simplifier par ϵ :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\partial_k f)\big(a + \sum_{i=k+1}^{n} \epsilon u_i e_i\big) + \alpha(\epsilon) - \sum_{i=1}^{n} u_k(\partial_k f)(a). \tag{14.807}$$

Et quand nous faisons la limite $\epsilon \to 0$, tout part et il reste zéro. □

PROPooCAZBooJZKXod

Proposition 14.302 ([1]).
Soient des espaces vectoriels $S, E_1, \dots, E_n$ de dimensions finies. Soient des applications différentiables $a_i: S \to E_i$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi: S &\to E_1 \times \dots \times E_n \\ x &\mapsto \big(a_1(x), \dots, a_n(x)\big) \end{aligned} \tag{14.808}$$

est différentiable et

$$(d\varphi_a)(h) = \Big((da_1)_a(h), \dots, (da_n)_a(h)\Big). \tag{14.809}$$

Démonstration. Nous devons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a) - \big((d\varphi_1)_a(h), \dots, (d\varphi_n)_a(h)\big)}{\|h\|}. \tag{14.810}$$

Nous considérons $\epsilon > 0$ et posons $h = \epsilon u$ avec $\|u\| = 1$. Nous utilisons les accroissements finis du lemme 14.255. Après simplification par ϵ comme dans la preuve de 14.301, il reste

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\partial_k \varphi)\big(a + \sum_{i=k+1}^{b} \epsilon u_i e_i\big) + \alpha(\epsilon) - \big((da_1)_a(u), \dots, (da_n)_a(u)\big). \tag{14.811}$$

Lorsqu'on fait $\epsilon \to 0$, il reste

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\partial_k \varphi)(a) - \big((da_1)_a(u), \dots, (da_n)_a(u)\big). \tag{14.812}$$

EQooLBBYooKqIdBh

La dérivée d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel est la dérivée composante par composante :

$$(\partial_k \varphi)(a) = \big((\partial_k \varphi_1)(a), \dots, (\partial_k \varphi_n)(a)\big). \tag{14.813}$$

Mais 14.301 nous dit que pour chaque i nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\partial_k \varphi_i)(a) = (d\varphi_i)_a(u). \tag{14.814}$$

Il reste à substituer ça dans (14.812) en nous souvenant que $\varphi_i = a_i$. □

PROPooCTXUooTGJbIK

Proposition 14.303 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies $E_1, \dots, E_n, S, F$ ainsi que des fonctions différentiables $a_i : S \to E_i$ et $\phi : E_1 \times \dots \times E_n \to F$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f : S &\to F \\ x &\mapsto \phi\big(a_1(x), \dots, a_n(x)\big) \end{aligned} \tag{14.815}$$

est différentiable et

$$df_a(u) = \sum_{i=1}^{n} (d_i\phi)_{\left(a_1(a),\dots,a_n(a)\right)}\big((da_i)_a(u)\big). \tag{14.816}$$

Démonstration. Il s'agit de remarquer que $f = \phi \circ \varphi$ avec φ comme dans la proposition 14.302, et d'utiliser la différentielle de la composée, proposition 14.296. □

PROPooBEYNooJlrFTC

Proposition 14.304 ([1]).
Soient des espaces de Banach V, W, E. Soit une fonction différentiable $f : V \times W \to E$. Pour chaque $v \in V$, l'application partielle

$$\begin{aligned} f_v : W &\to E \\ w &\mapsto f(v, w) \end{aligned} \tag{14.817}$$

est différentiable et

$$(df_v)_a u = df_{(v,a)}(0, u). \tag{14.818}$$

Démonstration. Il faut calculer la limite [EQooDUQNooHrWalt]

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in W}} \frac{f_v(a+h) - f_v(a) - df_{(v,a)}(u,0)}{\|h\|} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in W}} \frac{f(v,a+h) - f(v,a) - df_{(v,a)}(u,0)}{\|h\|} \tag{14.819a}$$

$$\leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in W}} \frac{f(v,a+h) - f(v,a) - df_{(v,a)}(u,0)}{\|(l,h)\|}. \tag{14.819b}$$

La dernière inégalité est vraie pour tout $l \in V$.

Soit $\epsilon > 0$. Étant donné que f est différentiable, il existe $\delta > 0$ tel que si $(l, h) \in B\big((0,0), \delta\big)$ alors

$$\frac{f(v,a+h) - f(v,a) - df_{(v,a)}(u,0)}{\|(l,h)\|} < \epsilon. \tag{14.820}$$

Si $\|h\| < \epsilon$ nous avons

$$\frac{f(v,a+h) - f(v,a) - df_{(v,a)}(u,0)}{\|h\|} < \frac{f(v,a+h) - f(v,a) - df_{(v,a)}(u,0)}{\|(l,h)\|} < \epsilon. \tag{14.821}$$

Donc la limite (14.819) est bien zéro. □

PROPooUXWIooTVVURR

Proposition 14.305 ([1]).
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = 0. \tag{14.822}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| \leqslant \delta$ alors $|f(x)| < \epsilon$. Étant donné que $|x| \leqslant \|(x,y)\|$, si $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$ nous avons $|x| \leqslant \delta$ et donc $|f(x)| < \epsilon$. □

PROPooIOMBooXoNBTM

Proposition 14.306 ([1]).
Soient des applications $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$. Nous supposons que f est différentiable en $a \in E$ et que g est différentiable en $b \in F$. Alors l'application

$$\begin{aligned} P : E \times F &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x)g(y) \end{aligned} \tag{14.823}$$

est différentiable en (a,b) et

$$dP_{(a,b)}(u,v) = df_a(u)g(b) + f(a)dg_b(v). \tag{14.824}$$

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon E\times F&\to\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto f(x)\end{aligned}\tag{14.825}$$

et similairement pour $\tilde{g}$. Nous avons alors $P(x,y)=\tilde{f}(x,y)\tilde{g}(x,y)$. Il nous suffit alors de prouver que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont différentiables. Nous prouvons que $d\tilde{f}_{(a,b)}(u,v)=df_a(u)$. Cela est un calcul :

$$\lim_{h\to0}\frac{\tilde{f}\big((a,b)+(h_1,h_2)\big)-\tilde{f}(a,b)-df_a(h_1)}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h_1)-f(a)-df_a(h_1)}{\|h\|}\tag{14.826a}$$

$$\leqslant\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(a+h_1)-f(a)-df_a(h_1)}{\|h_1\|}\tag{14.826b}$$

parce que $\|h_1\|\leqslant\|(h_1,h_2)\|$. Nous déduisons que le tout est nul par la proposition 1.179 et le fait que

$$\lim_{h_1\to0}\frac{f(a+h_1)-f(a)-df_a(h_1)}{\|h_1\|}=0\tag{14.827}$$

par définition de la différentiabilité de f. □

14.29 Autres trucs sur la différentielle

14.29.1 Dérivée partielle et directionnelles

Lorsque f est différentiable, la dérivée directionnelle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p)=\nabla f(p)\cdot u.\tag{14.828}$$

EqDerDirnablau

LEMooASGNooCWqAmN

Lemme 14.307.
Les projections canoniques sont des applications différentiables.

Démonstration. Parce que ce sont des application linéaires, voir lemme 12.326. □

LEMooGYJUooOudNLH

Lemme 14.308.
Toute fonction polynômiale[133] *à n variables est différentiable comme application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Chacune des fonctions $x\mapsto x^k$ est différentiable. La proposition 14.306 dit alors que les applications $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ sont différentiables. □

LEMooUMRXooDUQHpK

Lemme 14.309.
Toute fonction rationnelle, du type $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, est différentiable en tout point a tel que $Q(a)\neq0$.

Démonstration. Le numérateur et le dénominateur sont différentiables par le lemme 14.308. Ensuite $x\mapsto\frac{1}{Q(x)}$ est différentiable en utilisant la composition (proposition 12.336) et l'inverse (proposition 12.345). Et enfin le produit (proposition 12.341) fait le travail. □

deriveepartielles

14.310.
En pratique, ayant une formule pour la fonction f, nous la dérivons par rapport à la variable x_i en utilisant les règles usuelle de dérivation en considérant que les autres (x_j avec $j\neq i$) sont des constantes.

Exemple 14.311.
Pour $f(x,y)=xy+x^2$, les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+2x\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=x$$

△

[133] Polynôme à n variables, définition 3.182.

14.29.2 Gradient : direction de plus grande pente

Étant donné que u est de norme 1, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|\nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right| \leqslant \|\nabla f(a,b)\|. \tag{14.829}$$

Donc

$$-\|\nabla f(p)\| \leqslant \nabla f(p) \cdot u \leqslant \|\nabla f(p)\|. \tag{14.830}$$

La norme de la dérivée directionnelle (qui est la valeur absolue du nombre au centre) est donc « coincée » entre $-\|\nabla f(p)\|$ et $\|\nabla f(p)\|$. Prenons par exemple

$$u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}. \tag{14.831}$$

Dans ce cas, nous avons exactement

$$\nabla f(p) \cdot u = \|\nabla f(p)\|, \tag{14.832}$$

qui est la valeur maximale que la dérivée directionnelle peut prendre.

La direction du gradient est donc la direction suivant laquelle la dérivée directionnelle est la plus grande. Pour la même raison, la dérivée directionnelle est la plus petite dans le sens opposé au gradient.

En termes bien clairs : lorsqu'on veut aller le plus vite possible au ski, on prend la direction du gradient de la piste de ski. C'est dans cette direction que ça descend le plus vite. Dans quelle direction vont les débutants ? Ils vont perpendiculairement à la pente (ce qui ennuie tout le monde, mais c'est un autre problème). Les débutants vont donc dans la direction perpendiculaire au gradient. Prenons donc $u \perp \nabla f(p)$ et calculons la dérivée directionnelle de f dans la direction u en utilisant la formule (14.828) :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u = 0 \tag{14.833}$$

parce que nous avons choisi $u \perp \nabla f(p)$. Nous voyons donc que les débutants en ski ont eu la bonne intuition que la direction dans laquelle la piste ne descend pas, c'est la direction perpendiculaire au gradient.

C'est aussi pour cela que l'on a tendance à faire du zig-zag à vélo lorsqu'on monte une pente très forte et qu'on est fatigué. C'est toujours pour cela que les routes de montagne font de longs lacets. La montée est moins rude en suivant une direction proche d'être perpendiculaire au gradient !

Théorème 14.312.
Le gradient des fonctions suit à peu près les mêmes règles que les dérivées. Soient f et g deux fonctions différentiables. Nous avons entre autres

(1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(2) $\nabla(fg)(a,b) = g(a,b)\nabla f(a,b) + f(a,b)\nabla g(a,b)$;

(3) Dès que $g(a,b) \neq 0$, nous avons

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{g(a,b)\nabla f(a,b) - f(a,b)\nabla g(a,b)}{g(a,b)^2}. \tag{14.834}$$

14.29.3 Gradient : orthogonal au plan tangent

Vu que le gradient d'une fonction est la direction de plus grande pente et que le plan tangent est le plan de plus petite pente, quoi de plus naturel que de penser que le gradient est orthogonal au plan tangent ?

Lemme 14.313.
Soit $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et la partie

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \phi(x) = C\} \tag{14.835}$$

pour une certaine constante C.

Soit $x_0 \in \Gamma$. Le gradient de ϕ en x_0 est orthogonal au plan tangent à Γ en x_0.

Démonstration. Un vecteur tangent à Γ en x_0 est de la forme $\gamma'(0)$ où $\gamma\colon \mathbb{R} \to \Gamma$ vérifie $\gamma(0) = x_0$. Puisque ϕ est constante sur Γ nous avons

$$\frac{d}{ds}\Big[\phi\big(\gamma(s)\big)\Big]_{s=0} = 0, \tag{14.836}$$

ce qui donne

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\big(\gamma(0)\big)\gamma_i'(0) = 0, \tag{14.837}$$

ce qui signifie exactement $\langle (\nabla\phi)(x_0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Le vecteur $(\nabla\phi)(x_0)$ est donc perpendiculaire à tout vecteur tangent de Γ en x_0. □

14.29.4 Mise en bouche en dimension 2

Nous savons déjà comment dériver les fonctions composées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est la proposition 14.206. Si nous avons deux fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous formons la composée $\varphi = f \circ u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la dérivée vaut

$$\varphi'(a) = f'\big(u(a)\big)u'(a). \tag{14.838}$$

Considérons maintenant le cas un peu plus compliqué des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et de la composée

$$\begin{aligned} \varphi&\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \varphi(x,y) &= f\big(u(x,y)\big). \end{aligned} \tag{14.839}$$

Afin de calculer la dérivée partielle de φ par rapport à x, nous admettons que pour tout a, b et t, il existe $c \in [a, a+t]$ tel que

$$u(a+t,b) = u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b). \tag{14.840}$$

Cela est une généralisation immédiate du théorème 14.217. Nous devons calculer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a+t,b) - \varphi(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\big(u(a+t,b)\big) - f\big(u(a,b)\big)}{t}. \tag{14.841}$$

Étant donné l'hypothèse que nous avons faite sur u, nous avons

$$f\big(u(a+t,b)\big) = f\big(u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big). \tag{14.842}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis pour f, nous avons un point d entre $u(a,b)$ et $u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$ tel que

$$f\big(u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big) = f\big(u(a,b)\big) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{14.843}$$

Le numérateur de (14.841) devient donc

$$t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{14.844}$$

Certes les points c et d sont inconnus, mais nous savons que c est entre a et $a+t$ ainsi que d se situe entre $u(a,b)$ et $u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$. Lorsque nous prenons la limite $t \to 0$, nous avons donc $\lim_{t\to 0} c = a$ et $\lim_{t\to 0} d = u(a,b)$. Nous avons alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)f'\big(u(a,b)\big). \tag{14.845}$$

La formule que nous avons obtenue (de façon pas très rigoureuse) est

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(u(x,y)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)f'\big(u(x,y)\big). \tag{14.846}$$

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué où nous voudrions connaître les dérivées partielles de la fonction φ donnée par

$$\varphi(x,y,z) = f\big(u(x,y), v(x,y,z)\big) \tag{14.847}$$

où $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Commençons par la dérivée partielle par rapport à z. Étant donné que φ ne dépend de z que via la seconde entrée de f, il est normal que seule la dérivée partielle de f par rapport à sa seconde entrée arrive dans la formule :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z). \tag{14.848}$$

La dérivée partielle par rapport à y demande de tenir compte en même temps de la façon dont f varie avec sa première entrée et la façon dont elle varie avec sa seconde entrée ; cela nous fait deux termes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y), v(x,y,z)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z). \tag{14.849}$$

Cette formule a une interprétation simple. Lançons un caillou du sommet d'une falaise. Son mouvement est une chute libre avec une vitesse initiale horizontale :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t & \text{(14.850a)} \\ y(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2} & \text{(14.850b)} \end{cases}$$

où v_0 est la vitesse initiale horizontale et h_0 est la hauteur de la falaise. Si nous sommes intéressés à la distance entre le caillou et le bas de la falaise (point $(0,0)$), le théorème de Pythagore nous dit que

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \tag{14.851}$$

Pour trouver la variation de la distance par rapport au temps il faut savoir de combien la distance varie lorsque x varie et multiplier par la variation de x par rapport à t, et puis faire la même chose avec y.

14.29.5 Différentielle et dérivées partielles

Étant donné que pour tout vecteur u dans $\mathbb{R}^m$ on a $\partial_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$, le gradient de f nous donne la direction dans laquelle la croissance de f est maximale.

La matrice jacobienne calculée au point a est la matrice associée canoniquement à l'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

14.29.6 Plan tangent

On a dit au début de cette section que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ alors le graphe de f est une surface à deux paramètres et que l'application affine tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est un plan. Maintenant on sait que ce plan est celui d'équation

$$T_a(x,y) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2). \tag{14.852}$$

Le plan tangent au graphe de f au point a est le graphe de cette fonction T_a.

14.29.7 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent

ssecConceptPlanTag

Notons G, le graphe d'une fonction f, c'est-à-dire

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x,y)\}. \tag{14.853}$$

Première affirmation : si $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ est une courbe telle que $\gamma(0) = \big(a, f(a)\big)$, alors $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ est dans le plan tangent à G au point $\big(a, f(a)\big)$.

Plus fort : tous les éléments du plan tangent sont de cette forme.

Le plan tangent à G en un point $x \in G$ est donc constitué des vecteurs vitesse de tous les chemins qui passent par x.

Prenons maintenant S, une courbe de niveau de G, c'est-à-dire

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x,y) = C\}. \tag{14.854}$$

Si nous prenons un chemin dans G qui est, de plus, contraint à S, c'est-à-dire tel que $\gamma(t) \in S$, alors $\gamma'(0)$ sera tangent à G (ça, on le savait déjà), mais en plus, $\gamma'(0)$ sera tangent à S, ce qui est logique.

La morale est que si vous prenez un chemin qui se ballade dans n'importe quoi, alors la dérivée du chemin sera un vecteur tangent à ce n'importe quoi.

En outre, si $\gamma(t) \in S$ et $\gamma(0) = a$, alors

$$\langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = 0, \tag{14.855}$$

c'est-à-dire que le vecteur tangent à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient. Cela est intuitivement logique parce que la tangente à la courbe de niveau correspond à la direction de *moins* grande pente.

14.29.8 Gradient et recherche du plan tangent

Nous avons maintenant en main les concepts utiles pour trouver l'équation du plan tangent à une surface.

De la même manière que la tangente à une courbe était la droite de coefficient directeur donné par la dérivée, maintenant, le plan tangent à une surface est le plan dont les vecteurs directeurs sont les dérivées partielles :

La généralisation de l'équation (14.667) est

$$T_a(x) = f(a) + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x-a)_k \tag{14.856}$$ EqDefPlanTag

Nous introduisons aussi souvent l'opérateur différentiel abstrait **nabla**, noté ∇ et qui est donné par le vecteur

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \tag{14.857}$$

Les égalités suivantes sont juste des notations, sommes toutes logiques, liées à ∇ :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \tag{14.858}$$

et

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \tag{14.859}$$ EqDefGradient

Ce dernier est un élément de $\mathbb{R}^n$: chaque entrée est un nombre réel.

Définition 14.314.
Le vecteur gradient de f au point a est le vecteur donné par la formule (14.859).

La notation ∇ permet d'écrire la différentielle sous forme un peu plus compacte. En effet, la formule (14.697) peut être notée

$$df_a(u) = \langle \nabla f(a), u \rangle. \tag{14.860}$$

En utilisant ce produit scalaire, l'équation (14.856) peut se réécrire

$$T_a(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x-a)^i = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle. \tag{14.861}$$

Afin d'éviter les confusions, il est souhaitable de bien mettre les parenthèses et noter $(\nabla f)(a)$ au lieu de $\nabla f(a)$.

14.29.8.1 Plan tangent en dimension deux

Le plan T_a avec $a = (a_1, a_2)$ a pour équation dans $\mathbb{R}^3$:

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\,(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{14.862}$$ EqPlanTgEnDimDeux

Définition 14.315.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point a. Le plan tangent *au graphe de f en $(a, f(a))$ est l'ensemble des points*

$$\begin{aligned} T_a f &= \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + df_a(x-a)\} \\ &= \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle\} \end{aligned}$$

Exemple 14.316. EXooELTHooDdJyJE
Dessiner les courbes de niveaux des fonctions suivantes. Représenter ensuite leur graphe dans l'espace. Donner l'équation du plan tangent en l'origine.

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(2) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

(3) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy$. Item0041

Les courbes de niveau de l'exercice (3) sont les *ovales de Cassini* ; en particulier, la courbe de niveau 0 est la *lemniscate de Bernouilli*.

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+y^2}$. Les courbes de niveau $f(x) = C$ sont des cercles (sauf $f(x) = 0$ qui se réduit à un point). Les sections horizontales étant des cercles, et le rayon de ces cercles augmentant linéairement, le graphe est une cône. Nous pouvons nous en convaincre en vérifiant par exemple que la droite $t \mapsto (t, 0, t)$ est bien entièrement contenue dans $z = f(x, y)$.

Afin de déterminer la différentielle, nous calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{14.863}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{14.864}$$

Pour le plan tangent, nous essayons d'utiliser la formule (14.862). Pour cela, nous devons trouver les dérivées partielles en zéro.

Il est vite vu que la formule (14.863) n'a pas de limite pour $(x, y) \to (0, 0)$. Ceci *ne prouve pas* que la différentielle de f n'existe pas en $(0, 0)$. L'existence de la différentielle implique la continuité de la fonction, et non de la différentielle elle-même. En effet, une différentielle peut exister en un point sans qu'elle soit la limite de la différentielle aux autres points. Nous verrons par exemple, dans l'exercice 20.38(4), un exemple de fonction dérivable[134] en 0, mais dont la dérivée n'est pas continue en zéro.

Il ne suffit donc pas de calculer les limites de 14.863 et de 14.864 pour trouver la différentielle de f en $(0, 0)$. Il n'est par contre pas très compliqué de remarquer que les dérivées partielles n'existent pas en $(0, 0)$, par exemple parce que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} \tag{14.865}$$

n'existe pas pour cause de limite différente pour $t > 0$ et $t < 0$. Il n'y a donc pas de plan tangent. Ceci est conforme à l'intuition : il n'y a pas de plan tangent à un cône en son sommet.

Nous pouvons faire une petite vérification du fait que le graphe est bien un cône : la droite reliant $(0, 0, 0)$ à $(x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ est entièrement contenue dans le graphe de f. En effet si nous posons

$$\gamma(t) = (tx, ty, t\sqrt{x^2+y^2}), \tag{14.866}$$

pour tout t, nous avons $\gamma_z(t) = f\big(\gamma_x(t)^2 + \gamma_y(t)^2\big)$.

(2) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Les courbes de niveau $f(x, y) = C$ n'existent que pour $C \leqslant 1$, et ce sont des cercles

$$x^2 + y^2 = 1 - C. \tag{14.867}$$

Cette fois, le graphe est une coupole de sphère. Nous allons en effet vérifier que l'arc de cercle centré en $(0, 0, 0)$ joignant se sommet $(0, 0, 1)$ à $(1, 0, 0)$ dans le plan $y = 0$ est entièrement contenu dans le graphe de f. La symétrie de f sous les rotations dans le plan $x - y$ fait le reste. L'arc de cercle en question est le chemin

$$\gamma(t) = \big(1 - t, 0, \sqrt{1-(1-t)^2}\big). \tag{14.868}$$

Chaque point de ce chemin vérifie bien la relation

$$f\big(\gamma_x(t), \gamma_y(t)\big) = \gamma_z(t). \tag{14.869}$$

Le plan tangent à la coupole de sphère en $(0, 0, 1)$ est évidemment horizontal. Nous nous attendons donc à trouver que la différentielle de f en $(0, 0)$ est nulle. Simple calcul :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \tag{14.870}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \tag{14.871}$$

Évaluées en $(0, 0)$, ce deux dérivées partielles sont nulles. Donc *si la différentielle existe* en $(0, 0)$, elle sera nulle (voir l'expression (14.697)). Afin de voir qu'elle existe, il faut juste montrer que $df_{(0,0)}(x, y) = 0$ fonctionne dans la définition 12.296.

[134] Pour rappel, en dimension un, la dérivée est *exactement* la notion de différentielle.

(3) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy$. La courbe de niveau zéro, en coordonnées polaires est donnée par

$$r = 2\sqrt{\sin(2\theta)}. \tag{14.872}$$

Les dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4(x^2+y^2)x - 8y\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4(x^2+y^2)y - 8x\end{aligned} \tag{14.873}$$

△

14.29.8.2 Plan tangent en dimension trois

Nous avons vu que, de la même façon qu'en deux dimensions nous avions l'approximation (14.466) d'une fonction par sa tangente, en trois dimensions nous avons l'approximation suivante d'une fonction de deux variables :

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \tag{14.874}$$

lorsque (x,y) n'est pas trop loin de (a,b). Cela signifie que le graphe de f ressemble au graphe de la fonction $T_{(a,b)}$ donnée par

$$T_{(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(x-a). \tag{14.875}$$

En notations compactes :

$$T_p(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p). \tag{14.876}$$

Le graphe de la fonction T_p sera le **plan tangent** au graphe de f au point p. L'équation du plan tangent sera donc

$$z - f(p) = \nabla f(p) \cdot (x-p). \tag{14.877}$$

Remarque 14.317.
Lorsque nous utilisons la notation vectorielle, la lettre « x » désigne le vecteur (x,y). Il faut être attentif. Dans un cas x est un vecteur dans l'autre c'est une composante d'un vecteur.

14.30 Jacobienne

14.30.1 Rappels et définitions

Dans cette section nous considérons des fonctions $f : D \to \mathbb{R}^m$ où $D \subset \mathbb{R}^n$, et un point $a \in \operatorname{Int} D$ où f est différentiable.

Remarque 14.318.
La définition de continuité (resp. différentiabilité) pour une fonction à valeurs vectorielles est celle introduite précédemment, et on remarque que pour avoir la continuité (resp. différentiabilité) de f en un point, il faut et il suffit que chacunes des composantes de $f = (f_1, \dots, f_m)$, vues séparément comme fonctions à n variables et à valeurs réelles, soient continues (resp. différentiables) en ce point.

Définition 14.319.
*La **jacobienne** de f en a est la matrice de l'application linéaire donnée par la différentielle. Elle a de nombreuses notations*

$$J_f(a) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial x_1,\dots,x_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \tag{14.878}$$

*Autrement dit, c'est la matrice composée de l'ensemble des dérivées partielles de f. Le **jacobien** de f au point a est le déterminant de cette matrice.*

*Si $m = 1$, cette matrice ne contient qu'une ligne ; c'est donc un vecteur appelé le **gradient** de f au point a et noté $\nabla f(a)$.*

Remarque 14.320. (1) Si la fonction est supposée différentiable, calculer la jacobienne revient à connaitre la différentielle. En effet, par linéarité de la différentielle et par définition des dérivées partielles, nous avons

$$df_a(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ et où le membre de droite est un produit matriciel

(2) Remarquons que la jacobienne peut exister en un point donné sans que la fonction soit différentiable en ce point !

NORMooKBJVooDDDmOa

14.321.
Le théorème de différentiation de fonctions composées 14.296 peut également se lire au niveau des matrices jacobiennes. La matrice jacobienne de $g \circ f$ au point a est le produit matriciel des matrices jacobiennes de g et de f. Plus précisément, nous avons

$$J_{g\circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big)J_f(a). \tag{14.879}$$

Remarquez que nous considérons la matrice jacobienne de g au point $f(a)$.

Dans le cas particulier où $m = 1$ et f est une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^n$, dérivable au point a, on trouve que la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point a si g est différentiable, et alors

$$(g \circ f)'(a) = dg\,(f(a))\,.f'(a).$$

En fait, pour les fonctions d'une seule variable la dérivabilité coïncide avec la différentiabilité.

14.31 Fonctions de classe C^1

La définition des fonctions de classe C^k est la définition 12.317.

Soit f une fonction différentiable de U, ouvert de $\mathbb{R}^m$, dans $\mathbb{R}^n$. L'application différentielle de f est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^m &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ a &\mapsto df_a \end{aligned} \tag{14.880}$$

Nous savons que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel normé avec la définition 6.35. Si T est un élément dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ alors la norme de T est définie par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{\|T(x)\|_n}{\|x\|_m} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m \\ \|x\|_m\leqslant 1}} \|T(x)\|_n.$$

Lorsqu'il existe un $M > 0$ tel que $\|df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} < M$ pour tout a dans U, nous disons que la différentielle de f est **bornée** sur U.

NORMooDAZZooDiGFoW

14.322.
Quelques précisions sur l'énoncé de la proposition 14.323. Lorsque nous parlons de $\partial_i f$, nous supposons donnée une base de V. Il n'y a aucune raison que la norme sur V soit adaptée à cette base. Nous allons donc utiliser une norme « euclidienne » adaptée à la base, et invoquer l'équivalence de toutes les normes pour dire que si une fonction est différentiable pour une norme elle l'est pour toutes les normes.

14.31.0.1 Différentielle et dérivées partielles

PROPooUDJLooHwzjQF

Proposition 14.323 ([388])**.**
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E ainsi qu'une application $f : V \to E$. Nous supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur un voisinage de $a \in V$ et qu'elles sont continues en a. Alors

(1) l'application f est différentiable en a,

(2) la différentielle est donnée par[135]

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \times_1 \omega_j. \tag{14.881}$$

[135] Voir la définition 12.320 pour $\times_n$.

Démonstration. L'espace V a une norme que nous notons $\|.\|_V$; nous n'allons presque pas l'utiliser. Nous nommons $\{e_i\}$ la base de V sous-entendue lorsque nous parlons des dérivées partielles, et nous considérons la norme $\|\|$ sur V donnée par $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ pour $x = \sum_i x_i e_i$. Toutes les normes et boules dont nous allons parler dans la suite seront par rapport à cette norme.

Nous posons $\epsilon > 0$. La continuité des dérivées partielles en a nous permet de considérer $\delta > 0$ tel que

$$\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(s) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \| < \epsilon \tag{14.882}$$

pour tout $s \in B(a, \delta)$, et pour tous les j en même temps[136].

Soit $x \in B(a, \delta)$. Nous considérons les points

$$s_j = (x_1, \dots, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n). \tag{14.883}$$

Précision : $s_n = x$.

(1) **Un peu de convexité** Nous montrons que le segment $[s_j, s_{j-1}]$ est dans $B(a, \delta)$. Nous avons $s_j - a = (x_1 - a_1, \dots, x_j - a_j, 0, \dots, 0)$, et donc

$$\|s_j - a\| \leqslant \|x - a\| < \delta, \tag{14.884}$$

et donc $s_j \in B(a, \delta)$ pour tout j. Vu que la sphère $B(a, \delta)$ est convexe[137], tout le segment entre s_j et s_{j-1} est dedans.

(2) **Accroissements finis** En nous souvenant que x et a ont été fixés, nous considérons les fonctions intermédiaires suivantes :

$$\begin{cases} g_1(t) = f(t, a_2, \dots, a_n) & \text{(14.885a)} \\ g_j(t) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) & \text{(14.885b)} \\ g_n(t) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, t). & \text{(14.885c)} \end{cases}$$

Elles vérifient en particulier $g_j(x_j) = f(s_j)$ et $g_j(a_j) = f(s_{j-1})$. Donc le théorème des accroissements finis 14.217 nous donne l'existence de τ_j entre x_j et a_j tel que

$$f(s_j) - f(s_{j-1}) = g_j(x_j) - g_j(a_j) = g_j'(\tau_j)(x_j - a_j). \tag{14.886}$$

(3) **Dérivées partielles** Les fonctions g_j ont été construites de telle sorte à donner les dérivées partielles de f via une simple dérivation :

$$g_j'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t_0, a_{j+1}, \dots, a_n). \tag{14.887}$$

Or lorsque[138] $t_0 \in [x_j, a_j]$, le point $(x_1, \dots, x_{j-1}, t_0, a_{j+1}, \dots, a_n)$ est dans $[s_j, s_{j-1}]$. Cela est le cas pour $t_0 = \tau_j$. Nous notons

$$\bar{s}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \tag{14.888}$$

et nous avons

$$g_j'(\tau_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j) \tag{14.889}$$

avec $\bar{s}_j \in [s_{j-1}, s_j]$. Tout cela pour récrire (14.886) sous la forme

$$f(s_j) - f(s_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j)(x_j - a_j). \tag{14.890}$$

(4) **Une belle somme télescopique** En nous souvenant que $s_0 = a$ et que $s_n = x$, nous avons cette somme télescopique

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{j=1}^n \big(f(s_j) - f(s_{j-1})\big) && \text{(14.891a)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j)(x_j - a_j) && \text{(14.891b)} \\ &= \sum_{j=1}^n \big[(\partial_j f)(\bar{s}_j) - (\partial_j f)(a)\big](x_j - a_j) + \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(a)(x_j - a_j). && \text{(14.891c)} \end{aligned}$$

[136] Ce qui peut n'être pas possible en dimension infine. Je dis ça comme ça, juste pour faire remarquer que cette proposition n'est peut-être pas vraie en dimension infine. Voir aussi l'exemple de la fonction (27.152).

[137] Proposition 9.276.

[138] Retournez éventuellement les intervalles sur $a_j < x_j$.

Nous isolons les termes qui nous intéressent dans la définition de la différentielle :

$$f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}(\partial_j f)(a)(x_j-a_j)=\sum_{j=1}^{n}\big[(\partial_j f)(\bar{s}_j)-(\partial_j f)(a)\big](x_j-a_j). \tag{14.892}$$

(5) **Et enfin : le quotient différentiel** En utilisant la majoration (14.882), et en remarquant que $\|x-a\|$ majore $|x_j-a_j|$ pour chaque j, nous avons l'inégalité

$$\|f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)\|\leqslant n\epsilon\|x-a\|. \tag{14.893}$$

Autrement dit, en posant $T=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\omega_j$ nous avons

$$\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|\leqslant n\epsilon\|h\|, \tag{14.894}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|}{\|h\|}=0. \tag{14.895}$$

(6) **Et donc ?** La limite (14.895) nous indique que f serait différentiable de différentielle T si $\|.\|$ était la norme sur V. C'est l'équivalence de toutes les normes[139] qui fait en sorte que la norme sur V n'est pas importante.

□

Proposition 14.324.
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E ainsi qu'une application $f\colon V\to E$. Nous supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continues sur un ouvert $\mathcal{U}$ de V.

Alors f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{U}$ le voisinage sur lequel les dérivées partielles de f existent et sont continues. Il s'agit d'appliquer la proposition 14.323 en chaque point de $\mathcal{U}$. Nous avons alors

$$df_x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\times_1\omega_j \tag{14.896}$$

pour tout $x\in\mathcal{U}$. Pour $a\in V$ et $h\in V$ supposé petit, nous avons

$$\begin{aligned}\|df_a-df_{a+h}\|_{\mathcal{L}(V,E)}&=\sup_{\|v\|=1}\|df_a(v)-df_{a+h}(v)\|_E && (14.897a)\\ &=\sup_{\|v\|=1}\|\sum_{j=1}^{n}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h)\big)v_j\| && (14.897b)\\ &\leqslant\sup_{\|v\|=1}\|\sum_{j=1}^{n}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h)\big)\||v_i| && (14.897c)\\ &\leqslant\|\sum_{j=1}^{n}\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h)\big)\| && (14.897d)\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (14.897d), nous avons majoré $|v_i|\leqslant\|v\|=1$.
- Pour (14.897c), nous avons utilisé le lemme 12.90.

La continuité de $\partial_j f$ conclut que $\lim_{h\to 0}\|df_a-df_{a+h}\|=0$, ce qui signifie que df est continue et donc que f est de classe C^1. □

Théorème 14.325.
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E. Soit un ouvert $\mathcal{U}$ de V. Une application $f\colon V\to E$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Dans ce cas, nous avons la formule

$$df_a=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\times_1\omega_i. \tag{14.898}$$

[139] Sur un espace de dimension finie, 12.70.

Démonstration. Le premier sens, y compris la formule (14.898), a été fait dans la proposition 14.324. Nous supposons maintenant que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et nous allons prouver que ses dérivées partielles existent et sont continues. Pour tout $t \neq 0$ nous avons l'égalité

$$\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \frac{f(a+te_i)-f(a)-df_a(te_i)}{t} + df_a(e_i). \tag{14.899}$$

Par définition de la différentielle, prendre la limite $t \to 0$ à droite donne $df_a(e_i)$ parce que la fraction tend vers zéro. La limite définissant la dérivée partielle existe donc et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i). \tag{14.900}$$

Il nous reste à prouver que les dérivées partielles sont continues :

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\| &= \|df_a(e_i) - df_{a+h}(e_i)\| && \text{(14.901a)}\\
&= \|(df_{a+h} - df_a)(e_i)\| && \text{(14.901b)}\\
&\leqslant \|df_{a+h} - df_a\|\|e_i\| && \text{(14.901c)}\\
&= \|df_{a+h} - df_a\|. && \text{(14.901d)}
\end{aligned}$$

Vu que f est de classe C^1, la limite $h \to 0$ de cela donne zéro. □

Voici une version du même théorème, démontré dans le cas seulement de dimension deux. Il rend peut-être aussi plus clairement pourquoi ça ne marche pas en dimension infinie.

Diff_totale

Proposition 14.326.
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et a un point dans U. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. Si toutes les dérivées partielles de f existent sur U et sont continues au point a alors f est différentiable au point a.

Démonstration. On se limite au cas $m = 2$. Pour rendre les calculs plus simples on utilise ici la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$, mais comme on a vu plus en haut, cela ne peut pas avoir des conséquences sur la différentiabilité de f. Si la différentielle de f au point a existe alors elle est définie par la formule

$$df_a(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v_2$$

pour tout v dans $\mathbb{R}^m$.

On commence par prouver le résultat en supposant que les dérivées partielles de f au point a sont nulles. La différentiabilité de f signifie que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta > 0$ telle que si $\|v\|_\infty \leqslant \delta$ alors

$$\frac{\|f(a_1+v_1, a_2+v_2) - f(a_1,a_2)\|_n}{\|v\|_\infty} \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
&\|f(a_1+v_1,a_2+v_2) - f(a_1,a_2)\|_n = \\
&= \|f(a_1+v_1,a_2+v_2) - f(a_1+v_1,a_2) + f(a_1+v_1,a_2) - f(a_1,a_2)\|_n \leqslant \\
&\leqslant \|f(a_1+v_1,a_2+v_2) - f(a_1+v_1,a_2)\|_n + \|f(a_1+v_1,a_2) - f(a_1,a_2)\|_n.
\end{aligned} \tag{14.902}$$

Comme la dérivée partielle $\partial_x f$ est nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta_1 > 0$ telle que si $|v_1| \leqslant \delta_1$ alors

$$\|f(a_1+v_1,a_2) - f(a_1,a_2)\|_n \leqslant \varepsilon|v_1|.$$

Pour l'autre terme on a, par la proposition 12.313,

$$\|f(a_1+v_1,a_2+v_2) - f(a_1+v_1,a_2)\|_n \leqslant \sup\{\|\partial_y f(x)\|_n \,|\, x \in S\}|v_2|. \tag{14.903}$$

où S est le segment d'extrémités (a_1+v_1,a_2) et (a_1+v_1,a_2+v_2). Comme la dérivée partielle $\partial_y f$ est continue et nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il existe une constante $\delta_2 > 0$ telle que si $\|(u_1,u_2)\|_\infty \leqslant \delta_2$ alors $\|\partial_y f(a_1+u_1,a_2+u_2)\|_n \leqslant \varepsilon$. Si on choisit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ le segment S est contenu dans la boule de rayon δ centrée au point a et on obtient

$$\|f(a_1+v_1,a_2+v_2) - f(a_1,a_2)\|_n \leqslant \varepsilon|v_1| + \varepsilon|v_2| \leqslant 2\varepsilon\|v\|_\infty.$$

Cela prouve que f est différentiable en (a_1, a_2) et que la différentielle est nulle :

$$df_{(a_1,a_2)} = 0. \tag{14.904}$$

Dans le cas général, où les dérivées partielles de f au point a ne sont pas spécialement nulles, on peut considérer la fonction[140]

$$g(x, y) = f(x, y) - \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y, \tag{14.905}$$

EqXHVooJeQKrR

qui a dérivées partielles nulles au point a. La fonction g est donc différentiables. La fonction f est maintenant la somme de g et de la fonction linéaire et continue $(x, y) \mapsto \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y$. On verra dans la prochaine section que la somme de deux fonctions différentiables est une fonction différentiable. Par conséquent, la fonction f est différentiable. □

Remarque 14.327.
En dimension infinie, il n'est pas vrai que l'existence et la continuité de toutes les dérivées partielles en un point implique la différentiabilité en ce point. Pour donner un exemple, nous allons continuer l'exemple 12.99 avec la fonction 27.152 sur un espace de Hilbert.

En dimension infinie nous aurons le théorème 12.359 qui donnera quelque chose de moins fort.

14.328.
À la question « Est-ce qu'il existe une fonction différentiable dont les dérivées partielles ne sont pas continues », en juillet 2026, Mistral propose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{14.906}$$

M'est avis que ce n'est pas vrai. Les dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$.

Nous verrons dans la proposition 20.78 qu'il existe une fonction différentiable dont les dérivées partielles ne sont pas continues.

14.31.0.2 Dérivée partielle de fonctions composées

14.329.
Une petite note sur les notations du théorème de dérivation partielle de fonctions composées. La formule (14.918) est plus souvent écrite sous la forme

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g(a)\big) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a). \tag{14.907}$$

Du point de vue du névrosé des notations précises que je suis, cette façon d'écrire est délicate à exprimer parce qu'il faudrait décider ce que signifie « noter x les variables de $\mathbb{R}^n$ et y celles de $\mathbb{R}^m$ ».

Et je ne vous parle même pas des problèmes que ça pose si x est justement le nom d'une fonction quand on considère un changement de variable.

14.330.
À propos de changement de variables … J'ai une bonne nouvelle : il n'y a pas de notions de « différentielle partielle » et de « différentielle totale ». Ces notions sont introduites par les personnes qui utilisent de mauvaises notations pour distinguer deux notions différentes qu'ils sont incapables de distinguer par des notations claires[141].

Les choses mal faites en une dimension Voici comment on présente (mal) les choses. Soit une fonction $y(x)$. Si on effectue un changement de variables $x = x(t)$, on peut voir y comme une fonction de t au lieu de x, et parler de la dérivée de y à travers x.

Si $y(x) = x^2$ et si $x(t) = \sin(t)$, on se retrouve à écrire

$$y'(t) = 2\sin(t)\cos(t) \tag{14.908}$$

EQooNGFYooCJDmNq

et

$$y'(x) = 2x. \tag{14.909}$$

EQooYXJEooQYfCYQ

[140] Vous verrez dans la discussion à propos de la fonction (27.152) pourquoi cette fonction ne fonctionne pas dans le cas de la dimension infinie.

[141] Là je vise la quasi totalité des sources parlant de changement de variable dans les équations différentielles et les physiciens, en particulier les mécaniciens.

Comment l'objet y' peut dépendre du nom de la variable ?!? Notez qu'en substituant $x = \sin(t)$ dans (14.909), le compte n'est pas bon : on n'a pas (14.908).

Pour résoudre ce problème, on peut dire que la bonne quantité à regarder n'est pas y' mais bien dy. Alors on doit en fait regarder non $y'(x)$ mais $y'(x)dx$ où $dx = \cos(t)dt$. Avec ça, on a en effet

$$dy = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt = 2\sin(t)\cos(t)dt, \tag{14.910}$$

et

$$dy = \frac{dy}{dt}dt = 2\sin(t)\cos(t)dt. \tag{14.911}$$

Il faut alors bien comprendre que le « y » dans $\frac{dy}{dt}$ n'est pas le même que le y dans $\frac{dy}{dx}$.

Les choses bien faites en une dimension Soit une fonction $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous considérons une application (appelée « changement de variable » si on veut, mais surtout appelée « difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ») $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Maintenant que la notation « x » est prise pour désigner une fonction, il n'est plus possible d'écrire $y(x)$, parce que y est une application qui prend en argument un élément de $\mathbb{R}$ et non de $C^\infty(\mathbb{R})$.

On introduit donc une nouvelle fonction $z = y \circ x$. Donc $z(t) = y\big(x(t)\big) = \sin(t)^2$. Le nom de la variable importe peu tant que ce n'est pas un nom déjà utilisé. Nous avons alors aucune ambigüité :

$$y'(u) = 2u \tag{14.912}$$

et

$$z'(u) = 2\sin(u)\cos(u). \tag{14.913}$$

Notez que les égalités suivante sont parfaitement correctes et ne souffrent d'aucun problème d'interprétation :

- $y(t) = t^2$
- $z(\xi) = \sin(\xi)^2$
- $x(s) = \sin(s)$
- $x\big(y(u)\big) = \sin\big(y(u)\big) = \sin(u^2)$.

Si les fonctions y et x représentent des quantités physiques, certaines de ces formules sont peut-être idiotes à écrire, mais elles sont correctes.

Les choses mal faites en dimension 2 Soit une fonction f de la position et du temps qu'on note $f(x,t)$. Cette fonction vérifie une équation aux dérivées partielles, mettant en jeu $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Coup de théâtre : on veut savoir la valeur de f le long d'une trajectoire $x(t)$. Nous voici avec

$$f\big(x(t),t\big). \tag{14.914}$$

Et là quand on veut parler de la dérivée de f par rapport à t, on doit distinguer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ qui consiste à ne dériver l'expression $f\big(x(t),t\big)$ que par rapport aux t qui apparaissent « vraiment », de la « dérivée totale » qui consiste à dériver par rapport à toutes les occurrences de t, y compris à travers x.

Les choses bien faites en dimension 2 Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Prenons par exemple $f(x,t) = x\sin(t)$. Soit une trajectoire $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous nous gardons bien de noter « x ». Ce qu'on entend par « voir f sur la trajectoire s » signifie en réalité considérer la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f\big(s(t),t\big). \end{aligned} \tag{14.915}$$

Ce qu'on aurait appelé la dérivée totale de f par rapport à t est simplement la dérivée usuelle φ' de φ en tant que bête fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si par exemple $s(t) = t^2$, nous avons

$$\varphi(t) = t^2\sin(t). \tag{14.916}$$

Nous avons donc toutes les dérivées sans ambigüité :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sin(t) \tag{14.917a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = x\cos(t) \tag{14.917b}$$

$$\varphi'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t). \tag{14.917c}$$

Le mieux serait même d'écrire $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$, parce que ce sont des fonctions complètement déterminées par f et non par la notation x et t qu'on a choisie pour nommer les variables au moment d'écrire $f(x,t) = x\sin(t)$.

14.331.
Et d'ailleurs en mathématique, il n'y a rien qui s'appelle « changement de variable ». Il y a seulement des choses qui s'appellent « composition de fonction ».

Cela n'est pas limité à l'analyse. Il n'y a par exemple pas de concept de « choisir une base dans laquelle une matrice est diagonale ». Si S est une matrice symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale A telles que $D = ASA^{-1}$. Quand on veut démontrer une théorème sur S, on commence par démontrer le théorème dans le cas particulier où S est diagonale, puis on espère que le résultat se généralise facilement aux matrices de la forme ADA^{-1} où D est diagonale et A est orthogonale.

14.332.
Tout cela pour dire que nous allons maintenant prouver le théorème de dérivation partielle de fonctions composées. C'est ce théorème qui est utilisé chaque fois qu'on fait un « changement de variables » dans une équation aux dérivées partielles.

THOooKBTYooWFtoSF

Théorème 14.333 ([1, 481]).
Soient :

1. *trois espaces vectoriels normés U, V et W de dimension finie*
2. *$a \in V$, un voisinage Ω de a*
3. *des applications $g\colon \Omega \to U$ et $f\colon g(\Omega) \to W$*
4. *des bases de U, V et W de telle sorte que parler des dérivées partielles ait un sens. Toutes les bases vont être notées $\{e_i\}$ sans précisions. Sinon, on ne va pas s'en sortir.*

Nous supposons que

1. *f est de classe C^1 sur un voisinage de $g(a)$*[142],
2. *g admet une dérivée partielle dans la direction de e_i en a.*

Alors

1. *La fonction $f \circ g$ a une dérivée partielle dans la direction de e_i en a,*
2. *nous avons la formule*
$$\partial_i(f\circ g)(a) = \sum_k (\partial_k f)\big(g(a)\big)(\partial_i g_k)(a). \tag{14.918}$$

EQooZMAUooIusxeD

Démonstration. Vu que f est différentiable en $g(a)$, nous pouvons y utiliser le lemme 14.273 et écrire

EQooFZBVooTwNexc

$$df_{g(a)}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(g(a) + t\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\big)\Big]_{t=0} \tag{14.919a}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f\big(g(a)+\epsilon\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\big) - f\big(g(a)\big)}{\epsilon}. \tag{14.919b}$$

Maintenant, le jeu est de travailler $f\big(g(a)+\epsilon\partial_i g(a)\big)$ de deux façons différentes. D'une part en effectuant un développement de f autour de $g(a)$ et d'autre part dé-développant $g(a)+\epsilon\partial_i g(a)$ pour le changer en $g(a+\epsilon e_i)$.

(1) **Développer f** En utilisant le lemme 14.255 pour f autour de $g(a)$, nous avons

$$f\big(g(a)+\epsilon\partial_i g(a)\big) = f\big(g(a)+\epsilon\sum_k(\partial_i g_k)(a)e_k\big) \tag{14.920a}$$
$$= f\big(g(a)\big) + \epsilon\sum_k(\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)+\epsilon u_k\big) \tag{14.920b}$$

où $u_k = \sum_{l=k+1}^n(\partial_i g_l)(a)e_l$. La forme exacte de u_k n'est pas importante pour notre histoire.

[142] Classe C^1, définition 12.317.

En mettant cela dans la dernière fraction de (14.919),

$$\frac{f\big(g(a)+\epsilon(\partial_i g)(a)\big)-f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{14.921a}$$

$$=\frac{f\big(g(a)\big)+\epsilon\sum_k(\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)+\epsilon u_k\big)+\epsilon\alpha(\epsilon)-f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{14.921b}$$

$$=\sum_k(\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)+\epsilon u_k\big)+\alpha(\epsilon). \tag{14.921c}$$

Nous prenons la limite $\epsilon\to 0$ en tenant compte du fait que $\lim_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon)=0$ et du fait que les dérivées partielles de f sont continues en $g(a)$ (théorème 14.325). Nous avons

$$df_{g(a)}\big((\partial_i g)(a)\big)=\sum_k(\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)\big). \tag{14.922}$$

(2) **Développer g** Nous développons maintenant g à l'intérieur de f. Pour cela nous utilisons les accroissements finis 14.256 pour g :

$$g(a)+\epsilon\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=g(a+\epsilon e_i)-\epsilon\alpha(\epsilon). \tag{14.923}$$

Pour avancer dans (14.919), nous considérons le terme

$$f\big(g(a)+\epsilon\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\big)=f\big(g(a+\epsilon e_i)-\epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{14.924}$$

dans lequel nous allons développer f autour de $g(a+\epsilon e_i)$. Vu que la fonction $\epsilon\mapsto g(a+\epsilon e_i)$ est continue (elle est dérivable par hypothèse), pourvu que ϵ soit assez petit, le point $g(a+\epsilon e_i)$ est encore dans le voisinage de $g(a)$ sur lequel f est de classe C^1, de telle sorte qu'un développement de f ne pose pas de problèmes. Nous pouvons appliquer le lemme (14.255) :

$$f\big(g(a+\epsilon e_i)-\epsilon\alpha(\epsilon)\big)=f\big(g(a+\epsilon e_i)\big)-\sum_k\epsilon\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)+\epsilon\beta(\epsilon). \tag{14.925}$$

Ce que nous avons dans la limite dans (14.919) est

$$\frac{f\big(g(a+\epsilon e_i)\big)-\sum_k\epsilon\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)-f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{14.926a}$$

$$=\frac{(f\circ g)(a+\epsilon e_i)-(f\circ g)(a)}{\epsilon}-\sum_k\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(f(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big). \tag{14.926b}$$

Nous allons passer à la limite. Vu que f est de classe C^1, ses dérivées partielles sont continue. Le vecteur u_k ne dépendant pas de ϵ, toute la partie $(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)$ peut être majorée uniformément en ϵ. Et comme $\alpha(\epsilon)\to 0$, tout le second terme disparait.

Ce qui reste à la limite est

$$df_{g(a)}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right)=\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(a). \tag{14.927}$$

□

CORooNQURooAWjfcA

Corolaire 14.334.
Soient $a\in\mathbb{R}$, un voisinage ouvert I de a, une application $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon\gamma(I)\to\mathbb{R}$. Nous supposons que f est de classe C^1 sur $\gamma(I)$ et que γ est dérivable en a.

Alors

(1) La fonction $f\circ\gamma$ est dérivable en a.

(2) Nous avons la formule

$$(f\circ\gamma)'(a)=\gamma'(a)\cdot(\nabla f)\big(\gamma(a)\big). \tag{14.928}$$

Démonstration. Toutes les hypothèses sont calquées sur celles du théorème 14.333. L'application $f\circ\gamma$ est donc dérivable en a. Pour les applications sur $\mathbb{R}$, la seule dérivée partielle est la dérivée usuelle, donc la formule (14.918) s'écrit

$$(f\circ\gamma)'(t)=\sum_k(\partial_k f)\big(\gamma(a)\big)\gamma_k'(a)=(\nabla f)\big(\gamma(a)\big)\cdot\gamma'(a). \tag{14.929}$$

□

Donnons un exemple d'utilisation de cette formule. Si

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{14.930}$$

nous avons $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les dérivées partielles de φ sont données par les formules

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) \tag{14.931}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \tag{14.932}$$

Notez que les dérivées de φ et des composantes de g sont calculées en (x,y), tandis que celles de f sont calculées en $g(x,y)$.

LEMooRSDHooDpNEjo

Lemme 14.335 (Ouverture de la condition de rang maximum[3])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Nous supposons que df_a est de rang m. Alors il existe $r > 0$ tel que $\text{rang}(df_x) = m$ pour tout $x \in B(a,r)$.

Démonstration. Le lemme 6.118 dit qu'il existe une base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que $df_a(e_i) \neq 0$ pour tout i. Vu que f est de classe C^1, les fonctions $x \mapsto df_x(e_i)$ sont continues. Donc on a un $r > 0$ tel que $df_x(e_i) \neq 0$ pour tout $x \in B(a,r)$. Pour chacun de ces x, l'application df_x est de rang m. □

14.32 Différentielle et dérivée complexe

SECooJWNOooOgMiWR

14.336.
Nous commençons par donner quelques éléments à propos de dérivée et de différentielle pour des fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ parce que les séries entières vont souvent être des fonctions complexes. Le gros du chapitre sur les fonctions holomorphes est le chapitre 28.

Une avalanche de conditions équivalentes à l'holomorphie sera donnée dans le théorème 28.85.

Nous identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto x + iy. \end{aligned} \tag{14.933}$$

Dans cette partie, nous désignons par Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

LEMooLFNVooUOCGMF

Lemme 14.337 ([1])**.**
Si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue en 0, alors

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} f(\bar{z}). \tag{14.934}$$

Démonstration. L'application de conjugaison complexe $c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue[143]. La continuité de f en 0 donne l'existence de la limite que nous notons $\lim_{z\to 0} f(z) = L$. Nous utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité de f est 0 (proposition 9.173). Pour toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $z_n \to 0$ nous avons $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$. En particulier nous avons $c(z_n) \to 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} f\big(c(z_n)\big) = 0, \tag{14.935}$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty}(f \circ c)(z_n) = L$. Et vu que cette égalité est vraie pour toute suite $z_n \to 0$, nous en déduisons

$$\lim_{z\to 0}(f \circ c)(z) = L. \tag{14.936}$$

□

DEFooVJVXooKlnFkh

Définition 14.338.
*Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-**dérivable** si la limite*

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{14.937}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est la dérivée de f et est notée f'.

[143] Lemme 12.39.

DefMMpjJZ

Définition 14.339 (Fonction holomorphe)**.**
En deux parties.

*(1) Une application $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est **holomorphe** sur Ω si df_z existe et est $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire si*

$$df_z(ih) = idf_z(h). \tag{14.938}$$

*(2) Une application $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est **holomorphe** si chacune de ses composantes est holomorphe.*

PROPooBXIWooUvIJMW

Proposition 14.340.
Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe[144] *si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.*

DEFooQSMCooOoWVZk

Définition 14.341.
*Si K est un compact de $\mathbb{C}$, nous disons qu'une fonction est **holomorphe** sur K si il existe un ouvert contenant K sur lequel f est holomorphe.*

Et si f n'est réellement définie que sur K, elle est holomorphe sur K si il existe une extension holomorphe de f vers un ouvert contenant K.

DEFooSRKYooLkGVUe

Définition 14.342 (Similitude)**.**
Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{14.939}$$

*avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est une **similitude**.*

LEMooJNFEooZCbJMo

Lemme 14.343.
En tant qu'application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, l'opération de multiplication par $\alpha + \beta i$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{14.940}$$

Démonstration. Cela est vite remarqué en calculant explicitement $(\alpha + \beta i)(u_1 + iu_2)$. □

LEMooKIOZooEUxfsB

Lemme 14.344.
Une application $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est une similitude en tant qu'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A(z) = z_0 z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Commençons par considérer l'application A sur $\mathbb{R}^2$. Elle est en particulier une application $\mathbb{R}$-linéaire et par conséquent il existe une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{14.941}$$

Nous voulons maintenant imposer la $\mathbb{C}$-linéarité, c'est-à-dire que nous voulons

$$A\big((a+bi)(x+iy)\big) = (a+bi)A(x+iy) \tag{14.942}$$

pour tout $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. À gauche nous avons

$$A\big(ax - by + i(bx + ay)\big) \tag{14.943}$$

et à droite nous avons

$$(a+bi)\big(\alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)\big). \tag{14.944}$$

En égalant les deux expressions nous obtenons les équations

$$\begin{cases} \beta b = -b\gamma & \text{(14.945a)} \\ -\alpha b + \beta a = a\beta - b\delta & \text{(14.945b)} \\ \delta b = b\alpha & \text{(14.945c)} \\ -\gamma b + \delta a = b\beta + a\delta, & \text{(14.945d)} \end{cases}$$

[144] Définition 14.339.

dont nous tirons immédiatement que $\gamma = -\beta$ et $\delta = \alpha$. La matrice de A est donc de la forme demandée.

Inversement nous devons prouver que la fonction

$$f(x+iy) = \alpha x + \beta y + i(-\beta x + \alpha y) \tag{14.946}$$

EqOEWYooMaHCNb

est $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire qu'elle vérifie $f(z_0 z) = z_0 f(z)$ pour tout $z_0, z \in \mathbb{C}$. Cela est un simple calcul que nous confions à Sage : le code suivant affiche « 0 ».

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

def f(z):
    var('alpha,beta')
    x=z.real_part()
    y=z.imag_part()
    return alpha*x+beta*y+I*( -beta*x+alpha*y  )


var('a,b,x,y')

A=a+b*I
Z=x+y*I

z1=f( A*Z  )
z2=A*f( Z )

rep=z1-z2
print(rep.full_simplify())
```

tex/frido/code_sage3.py

Pour conclure, notons que la fonction (14.946) est la fonction de multiplication par $\alpha - i\beta$. □

NORMooMKNDooBeoGRN

14.345.
Soient une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et l'isomorphisme canonique $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$. La fonction f définit la fonction

$$F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2. \tag{14.947}$$

Cela est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à f. Il serait tentant de croire que tout ce qui est vrai pour F est également vrai pour f. Eh bien non.

Par exemple, F peut être différentiable sans que f le soit. La proposition suivante donne une condition sur dF pour que f soit différentiable.

La proposition suivante donne le lien entre df et la dérivée complexe f'. Pour avoir le lien avec $\partial_z f$, il faudra voir la proposition 28.5.

PropKJUDooJfqgYS

Proposition 14.346.
Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si et seulement si elle est différentiable en a et si df_a est une similitude.

Plus précisément avec les notations de 14.345, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable (donc holomorphe) au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si la fonction F est différentiable en (x_0, y_0) et si la matrice de dF est de la forme

$$dF = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{14.948}$$

EQooWZGKooLDEHGr

c'est-à-dire si $dF_{(x_0,y_0)}$ fournit une application $\mathbb{C}$-linéaire.

Dans ce cas, le lien entre $\mathbb{C}$-dérivée et différentielle est donné par

$$(df_{z_0})(z) = f'(z_0)z \tag{14.949}$$

EqPAEFooYNhYpz

où f' est la dérivée complexe de f.

Démonstration. Nous décomposons f en parties réelles et imaginaires :

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y) \tag{14.950}$$

où P et Q sont des fonctions réelles. La jacobienne de F est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{14.951}$$

et la condition dont nous parlons s'écrit comme le système EqFDUrXBP

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} & \text{(14.952a)} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. & \text{(14.952b)} \end{cases}$$

Si F est différentiable en (x_0, y_0) alors nous avons

$$F\big((x_0,y_0)+(h,k)\big) = F(x_0,y_0) + dF_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + s(|h|+|k|) \tag{14.953}$$

où s est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0} \frac{s(t)}{t} = 0$. Soit

$$dF_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{14.954}$$

Si nous posons $\sigma = \alpha - i\beta$ et $w = h + ik$, l'équation (14.953) s'écrit dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \sigma w + s(|w|), \tag{14.955}$$

ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

Supposons maintenant que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Alors nous avons

$$f'(z_0) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w) - f(z_0)}{w} = \sigma \in \mathbb{C}, \tag{14.956}$$

ce qui se récrit sous la forme

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w) - f(z_0) - \sigma w}{w} = 0. \tag{14.957}$$

Si nous posons $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = h + ik$ et $\sigma = \alpha - i\beta$ nous avons

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{F\big((x_0,y_0)+(h,k)\big) - F(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{|w|} \right| = 0, \tag{14.958}$$

ce qui signifie que F est différentiable et que sa différentielle est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{14.959}$$

La matrice (14.959) est, vue dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de multiplication dans $\mathbb{C}$ par $\alpha - i\beta = f'(z_0)$. En d'autre termes, dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$df_{z_0}(z) = f'(z_0)z, \tag{14.960}$$

et en particulier la différentielle est donnée par

$$df_{z_0} = f'(z_0)dz. \tag{14.961}$$

□

Nous venons de voir dans (14.949) que si f' est la dérivée complexe de la fonction holomorphe f, alors df_{z_0} est l'opérateur de multiplication par $f'(z_0)$. Nous allons un peu approfondir ce lien pour lier la dérivée complexe et la dérivée usuelle.

LEMooKJOEooLRUzSA

Lemme 14.347 ([1]).
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est différentiable, alors df_{t_0} est l'opérateur de multiplication par $f'(t_0)$ où f' est la dérivée usuelle.

Démonstration. Nous écrivons $f(t) = u(t) + iv(t)$ pour les fonctions réelles u et v. Par linéarité,

$$df_{t_0}(t) = du_{t_0}(t) + idv_{t_0}(t). \tag{14.962}$$

Le lemme 14.279 dit que du_{t_0} est l'opérateur de multiplication par $u'(t_0)$. Donc

$$df_{t_0}(t) = \big(u'(t_0) + iv'(t_0)\big)t = f'(t_0)t. \tag{14.963}$$

□

PROPooBLGMooYeZZYJ

Proposition 14.348 ([1]).
Soient une application holomorphe $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ainsi qu'un chemin C^1 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Alors

$$(f \circ \gamma)'(t) = (f' \circ \gamma)(t)\gamma'(t) \tag{14.964}$$

où f' est la dérivée complexe et les autres dérivées sont les dérivées usuelles.

Démonstration. Nous passons par la différentielle parce que la différentielle est l'opérateur de multiplication par la dérivée autant dans le cas « usuel » (lemme 14.347) que dans le cas complexe (équation 14.949). Nous avons

$$d(f \circ \gamma)_{t_0}(t) = df_{\gamma(t_0)}(d\gamma)_{t_0}(t) \tag{14.965a}$$
$$= f'\big(\gamma(t_0)\big)\gamma'(t_0)t. \tag{14.965b}$$

SUBEQooPWBLooQezBMc

Notez que pour (14.965b) nous avons utilisé 14.347 et 14.949.

Et comme $d(f \circ \gamma)_{t_0}$ est l'opérateur de multiplication par $(f \circ \gamma)'(t_0)$, nous en déduisons que

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'\big(\gamma(t_0)\big)\gamma'(t_0) = (f' \circ \gamma)(t_0)\gamma'(t_0). \tag{14.966}$$

□

Exemple 14.349 (Une application C^∞ mais pas $\mathbb{C}$-dérivable).
Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x + iy &\mapsto x. \end{aligned} \tag{14.967}$$

Vu que c'est une application linéaire, elle est différentiable une infinité de fois et sa différentielle est elle-même[145]. C'est donc une application C^∞.

Elle n'est cependant pas $\mathbb{C}$-dérivable. En effet le quotient différentiel est, pour $\epsilon \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(x + iy + \epsilon_x + i\epsilon_y) - f(x + iy)}{\epsilon} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon}. \tag{14.968}$$

Cela n'a pas de limite lorsque $\epsilon \to 0$. Pour voir cela nous invoquons la méthode des chemins du corolaire 14.251 avec les chemins $\epsilon_1(t) = t$ et $\epsilon_2(t) = it$. Dans le premier cas, le quotient différentiel vaut 1 pour tout t, tandis que dans le second il vaut zéro pour tout t. △

14.32.1 Quelques règles de calcul

LEMooVDXOooUyFHXZ

Lemme 14.350.
Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si g ne s'annule pas sur Ω, alors f/g est holomorphe sur Ω.

14.33 Théorèmes des accroissements finis

SecThoAccrsFinis

Nous avons déjà démontré (lemme 14.273) que si f est différentiable au point x alors $df_x(u) = \partial_u f(x)$. Une importante conséquence est le théorème des accroissements finis

[145] Lemme 12.326.

val_medio_2

Théorème 14.351 (Accroissements finis, inégalité de la moyenne)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. Soient a et b deux points dans U, $a \neq b$, tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U. Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{14.969}$$

Démonstration. On utilise le théorème 12.313 et le fait que

$$\|\partial_u f(x)\|_n \leqslant \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|u\|_m,$$

pour tout u dans $\mathbb{R}^m$. □

La proposition suivante est une application fondamentale du théorème des accroissements finis 14.351.

PropAnnulationEtConstance

Proposition 14.352.
Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^m$ et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

ItemPropCstDiffZeroi

(1) f est constante ;

ItemPropCstDiffZeroii

(2) f est différentiable et $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$;

ItemPropCstDiffZeroiii

(3) les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ existent et sont nulles sur U.

Démonstration. Nous allons démonter les équivalences en plusieurs étapes. D'abord (1) ⇒ (2), puis (2) ⇒ (3), ensuite (3) ⇒ (2) et enfin (2) ⇒ (1).

Commençons par montrer que la condition (1) implique la condition (2). Si $f(x)$ est constante, alors la condition (12.872) est vite vérifiée en posant $T(h) = 0$.

Afin de voir que la condition (2) implique la condition (3), remarquons d'abord que la différentiabilité de f implique que les dérivées partielles existent (proposition 14.270) et que nous avons l'égalité $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ (lemme 14.273). L'annulation de $\sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout u implique l'annulation des $\partial_i f(a)$ pour tout i.

Prouvons maintenant que la propriété (3) implique la propriété (2). D'abord, par le théorème 14.325, l'existence et la continuité des dérivées partielles $\partial_i f(a)$ implique la différentiabilité de f. Ensuite, la formule $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ implique que $df(a) = 0$.

Il reste à montrer que (2) implique la condition (1), c'est-à-dire que l'annulation de la différentielle implique la constance de la fonction. C'est ici que nous allons utiliser le théorème des accroissements finis. En effet, si a et b sont des points de U, le théorème 14.351 nous dit que

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{14.970}$$

Mais $\|df(x)\| = 0$ pour tout $x \in U$, donc ce supremum est nul et $f(b) = f(a)$, ce qui signifie la constance de la fonction. □

14.34 Fonctions lipschitziennes

DEFooQHVEooDbYKmz

Définition 14.353.
Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques[146]*, $f\colon E \to F$ une application et un réel k strictement positif. Nous disons que f est **lipschitzienne** de constante k sur E si pour tout $x, y \in E$,*

$$d_F\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k d_E(x, y). \tag{14.971}$$

Soit f une fonction k-lipschitzienne. Si $y \in \overline{B(x,\delta)}$ alors $\|x - y\| \leqslant \delta$ et donc $\big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k\delta$. Cela signifie que la condition de Lipschitz peut s'énoncer en termes de boules fermées par

$$f\big(\overline{B(x,\delta)}\big) \subset \overline{B\big(f(x), k\delta\big)} \tag{14.972}$$

EqDZytUbn

tant que $\overline{B(x,\delta)}$ est contenue dans le domaine sur lequel f est lipschitzienne.

[146] Pour rappel, les espaces métriques sont définis par la définition 9.155 et le théorème 9.158 ; je précise que nous ne supposons pas que E soit vectoriel ; en particulier il peut être un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 14.354.
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. La fonction f est lipschitzienne sur U si et seulement si df est bornée sur U.

Démonstration. Le fait que l'application différentielle df soit bornée signifie qu'il existe un $M > 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\|df_a\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \leqslant M$, pour tout a dans U. Si cela est le cas, alors le théorème 14.351 et la convexité[147] de U impliquent évidemment que f est de Lipschitz de constante plus petite ou égale à M.

Inversement, si f est lipschitzienne de constante k, alors pour tout a dans U et u dans $\mathbb{R}^m$ on a

$$\left\| \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \right\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

En passant à la limite pour $t \to 0$ on a

$$\|\partial_u f(a)\|_n = \|df_a(u)\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

donc la norme de df_a est majorée par k pour tout a dans U. □

Notez cependant qu'une fonction peut être lipschitzienne sans être différentiable.

PropFZgFTEW

Proposition 14.355.
Une fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de la continuité donnée par le théorème 9.286. Prouvons donc la continuité en $a \in \mathbb{R}$. Pour tout x nous avons

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k|x - a|. \tag{14.973}$$

Si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\delta < \frac{\epsilon}{k}$ pour avoir

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon. \tag{14.974}$$

Donc f est continue en a. □

DefJSFFooEOCogV

Définition 14.356.
Une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^p \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned} \tag{14.975}$$

est ***localement lipschitzienne*** *en y au point (t_0, y_0) si il existe des voisinages V de t_0 et W de y_0 et un nombre $k > 0$ tels que pour tout $(t, y) \in V \times W$ on ait*

$$\big\|f(t_0, y_0) - f(t, y)\big\| \leqslant k\|y - y_0\|. \tag{14.976}$$

La fonction est localement lipschitzienne sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si elle est localement lipschitzienne en chaque point de U.

NORMooYNRAooBgobcK

14.357.
Autrement dit, une fonction est localement lipschitzienne en sa deuxième variable lorsque tout point admet un voisinage sur lequel elle est lipschitzienne.

PROPooVZSAooUneOQK

Proposition 14.358.
Toute application lipschitzienne[148] *est uniformément continue*[149].

Démonstration. Soit une application k-lipschitzienne $f : E \to F$ entre deux espaces métriques. Soient $\epsilon > 0$ ainsi que $a \in E$. Nous considérons $\delta = \epsilon/k$. Si $x \in B(a, \delta)$ nous avons

$$d_F\big(f(a), f(x)\big) \leqslant k d_E(a, x) \leqslant k\delta \leqslant \epsilon. \tag{14.977}$$

□

[147] La convexité de U sert à assurer que la droite reliant a à b est contenue dans U ; c'est ce que nous utilisons dans la démonstration du théorème 14.351.
[148] Définition 14.353.
[149] Définition 9.395.

PropGIBZooVsIqfY

Proposition 14.359.
Si f et g sont deux fonctions localement lipschitziennes alors $f+g$ l'est.

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul avec une majoration standard :

$$\begin{aligned}\|(f+g)(t_0,y_0)-(f+g)(t,y)\| &\leqslant \|f(t_0,y_0)-f(t,y)\|+\|g(t_0,y_0)-g(t,y)\| &\text{(14.978a)}\\ &\leqslant k_f\|y-y_0\|+k_g\|y-y_0\| &\text{(14.978b)}\\ &= (k_f+k_g)\|y-y_0\|. &\text{(14.978c)}\end{aligned}$$

□

LemCFZUooVqZmpc

Lemme 14.360.
La fonction donnée par

$$f(t,(x,y))=xy \tag{14.979}$$

est localement lipschitzienne en tout point.

Démonstration. Nous avons la majoration classique

$$|f\big(t,(x_0,y_0)\big)-f\big(t,(x,y)\big)|=|x_0y_0-xy|\leqslant|x_0y_0-x_0y|+|x_0y-xy|\leqslant|x_0||y_0-y|+|y||x_0-x|. \tag{14.980}$$

Vu que nous parlons de fonction *localement lipschitzienne*, nous pouvons majorer $|y|$ et $|x_0|$ par un même nombre k dans un voisinage de (x_0,y_0). Cela donne

$$|f\big(t,(x_0,y_0)\big)-f\big(t,(x,y)\big)|\leqslant k\big(|y_0-y|+|x_0-x|\big)\leqslant\sqrt{2}k\|\begin{pmatrix}x_0-x\\y_0-y\end{pmatrix}\|. \tag{14.981}$$

Nous avons utilisé l'équivalence de norme de la proposition 12.68(1). □

14.35 Différentielles d'ordre supérieur

SecDiffOrdSup

14.35.1 Différentielle et dérivées partielles

La définition des applications de classe C^k est 12.317. C'est également le moment de relire la définition 12.318 des espaces emboîtés.

Définition 14.361.
Une sorte de projection. Pour $u\in V$ nous définissons

$$\begin{aligned}\texttt{proj}_u\colon\mathcal{L}^n(V,E)&\to\mathcal{L}^{n-1}(V,E)\\ \texttt{proj}_u(\omega)(v_1,\dots,v_{n-1})&=\omega(u,v_1,\dots,v_{n-1}).\end{aligned} \tag{14.982}$$

LEMooSMZQooJBVySP

Lemme 14.362 ([1, 482])**.**
À propos de dimensions[150]*,*

ITEMooUWEBooSzFseN

(1) $\dim(E_n)=\dim(V)^n\dim(E)$.

ITEMooFMKQooFSMpgF

(2) $\dim\big(\mathcal{L}^n(V,E)\big)=\dim(E)\dim(V)^n$.

LEMooTDLNooTcPkLg

Lemme 14.363 ([1])**.**
Nous définissons les ϕ_k par récurrence. D'abord

$$\begin{aligned}\phi_1\colon\mathcal{L}^n(V,E)&\to\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}^{n-1}(V,E)\big)\\ \phi_1(\omega)u&=\texttt{proj}_u(\omega),\end{aligned} \tag{14.983}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\phi_k\colon\mathcal{L}^n(V,E)&\to\mathcal{L}^{n-k}(V,E)_k\\ \phi_k(\omega)u&=\phi_{k-1}\big(\texttt{proj}_u(\omega)\big).\end{aligned} \tag{14.984}$$

Les applications ϕ_k sont bijectives.

Démonstration. Nous prouvons par récurrence.

[150] E_n, définition 12.318.

(1) **Injective, $k = 1$** Soit $\omega \in \mathcal{L}^n(V, E)$ tel que $\phi_1(\omega) = 0$. Pour tout $u \in V$ nous avons $\phi_1(\omega)u = 0$, ce qui signifie que $\texttt{proj}_u(\omega) = 0$ ou encore que pour tout $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ nous avons $\omega(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = 0$. Nous avons donc bien $\omega = 0$.

(2) **Surjective, $k = 1$** Soit $\alpha \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}^{n-1}(V, E)\big)$. Nous allons construire $\omega \in \mathcal{L}^n(V, E)$ tel que $\phi_1(\omega) = \alpha$. Nous posons

$$\omega(v_0, \dots, v_{n-1}) = \alpha(v_0)(v_1, \dots, v_{n-1}). \tag{14.985}$$

Avec lui nous avons bien $\texttt{proj}_{v_0}(\omega) = \alpha(v_0)$.

(3) **Injective, $k = k$** Nous supposons que $\phi_k(\omega) = 0$, c'est-à-dire que pour tout $u \in V$ nous avons

$$\phi_{k-1}\big(\texttt{proj}_u(\omega)\big) = 0. \tag{14.986}$$

Cela implique $\texttt{proj}_u(\omega) = 0$ parce que ϕ_{k-1} est injective par hypothèse de récurrence. Nous déduisons que $\omega = 0$, et que ϕ_k est injective.

(4) **Surjective, $k = k$** Nous allons montrer que $\phi_k : \mathcal{L}^n(V, E) \to \mathcal{L}^{n-k}(V, E)_k$ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension.

Il s'agit d'utiliser le lemme 14.362. D'abord

$$\dim\big(\mathcal{L}^{n-k}(V, E)_k\big) = \dim(V)^k \dim\big(\mathcal{L}^{n-k}(V, E)\big) = \dim(V)^n \dim(E). \tag{14.987}$$

Ensuite $\dim\big(\mathcal{L}^n(V, E)\big) = \dim(V)^n \dim(E)$. Le compte est bon.

Le théorème du rang (formule (6.55)) avec $\dim\big(\ker(\phi_k)\big) = 0$ nous dit que le rang de ϕ_k est maximal et donc que ϕ_k est surjective.

□

LEMooLTYCooAoMJKD

Lemme 14.364.
Soit $w \in W$. Nous avons

$$\big[w \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l = w \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I}). \tag{14.988}$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer les deux membres à un élément $v \in V$. D'abord

$$\big[w \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l(v) = \omega_l(v) w \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{14.989a}$$
$$= w \times_k \big(\phi_k(\omega_I) v_l\big) \tag{14.989b}$$

SUBEQooMWPMooYAsYCR

Pour (14.989b) nous avons utilisé le fait que $\omega_{l,I}(v) = v_l \in \mathbb{R}$ et que le produit $\times_k$ est linéaire. De l'autre côté, en utilisant les définitions de $\times_k$ et de ϕ_k, nous avons

$$\big[w \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I})\big] v = w \times_k \big(\phi_{k+1}(\omega_{l,I}) v\big) \tag{14.990a}$$
$$= w \times_k \phi_k\big(\texttt{proj}_v(\omega_{l,I})\big) \tag{14.990b}$$
$$= w \times_k \phi_k(v_l \omega_I) \tag{14.990c}$$

parce que $\texttt{proj}_v(\omega_{l,I}) = v_l \omega_I$. □

PROPooVGRRooHSwcPl

Proposition 14.365 ([1]).
Soit une application $f : V \to E$ de classe C^n. Alors

(1) pour tout n-multiindice I, la dérivée partielle $\partial_I^n f$ existe,

(2) nous avons la formule

$$(d^n f)_a = \sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) \times_n \phi_n(\omega_{i_1, \dots, i_n}) \tag{14.991}$$

où la somme porte sur tous les multiindices de taille n, le produit $\times_n$ est la définition 12.320 et l'application ϕ_n est donnée dans l'énoncé du lemme 14.363.

Démonstration. Nous faisons tout cela par récurrence. Le cas $n = 1$ est déjà fait par le théorème 14.325 parce que $\phi_1(\omega) = \omega$. Nous supposons que le résultat est démontré pour une valeur k, et nous considérons f de classe C^n avec $n \geqslant k + 1$. L'hypothèse de récurrence dit que

$$(d^k f)_a = \sum_I (\partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{14.992}$$

EQooBOZUooCiEIYR

est continuement différentiable par rapport à a. Nous pouvons donc utiliser la formule (14.898) pour calculer la différentielle de (14.992) :

$$(d^{k+1}f)_a = \sum_l \frac{\partial(d^k f)}{\partial x_l}(a) \times_1 \omega_l \tag{14.993a}$$

$$= \sum_l \sum_I \big[(\partial_l \partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l \tag{14.993b}$$

$$= \sum_{l,I} (\partial_{l,I} f)(a) \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I}) \tag{14.993c}$$

SUBEQooOXUHooFDJow

où nous avons utilisé le lemme 14.364 pour obtenir (14.993c). □

PROPooKOBVooQhrAeJ

Proposition 14.366.
Soit une application $f : V \to E$ telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$ existent et sont continues sur un ouvert $\mathcal{U}$. Alors f est de classe C^n sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. Pour $n = 1$, cette proposition est déjà contenue dans le théorème 14.325. Nous pouvons donc directement passer au pas de récurrence. Nous définissons les objets

$$T_k(a) = \sum_I (\partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{14.994}$$

où la somme porte sur tous les k-multiindices. Ces applications T_k existent et sont continues par hypothèse.

Le théorème 14.325 nous indique que $T_1(a) = df_a$. Nous supposons maintenant que $(d^k f)_a = T_k(a)$ et nous allons prouver que T_{k+1} est la différentielle de $d^k f$. Pour cela nous devons prouver que

$$\lim_{h \to 0} \frac{T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h}{\|h\|} = 0. \tag{14.995}$$

EQooPKXDooWWVjkT

En utilisant le lemme 14.364 nous pouvons dégrossir le terme $T_{k+1}(a)h$:

$$T_{k+1}(a)h = \sum_{l,I} \big[(\partial_{l,I} f)(a) \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I})\big]h \tag{14.996a}$$

$$= \sum_{l,I} \big[(\partial_{l,I} f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l(h) \tag{14.996b}$$

$$= \sum_{l,I} h_l (\partial_{l,I} f)(a) \times_k \phi_k(\Omega_I) \tag{14.996c}$$

$$= \sum_l h_l \big[\partial_l \sum_I (\partial_I f)(a)\big] \times_k \phi_k(\omega_I). \tag{14.996d}$$

SUBEQooACCZooXrxHnY

Vu que $\partial_I f$ est une fonction dont les dérivées partielles existent et sont continues, le théorème 14.325 (toujours lui) nous dit qu'elle est différentiable et que

$$d(\partial_I f)_a(h) = \sum_l h_l \partial_l (\partial_I f)(a). \tag{14.997}$$

En mettant la somme sur I tout devant dans (14.996d), nous trouvons

$$T_{k+1}(a)h = \sum_I d(\partial_I f)_a(h) \times_k \phi_k(\omega_I). \tag{14.998}$$

C'est pas beau la vie ? Nous pouvons écrire le numérateur du quotient différentiel (14.995) :

$$T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h = \sum_I \big[(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a)\big] \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{14.999a}$$

$$- \sum_I d(\partial_I f)_a(h) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{14.999b}$$

$$= \sum_I \big[(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a) - d(\partial_I f)(a)h\big] \times_l \phi_k(\omega_I). \tag{14.999c}$$

Nous utilisons le fait que l'application $w \mapsto w \times_k \phi_k(\omega_I)$ est linéaire et commute avec la limite, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \to 0} \big(w(h) \times_k \phi_k(\omega_I)\big) = \big(\lim_{h \to 0} w(h)\big) \times_k \phi_k(\omega_I). \tag{14.1000}$$

Et bien sûr, la somme sur les multiindices I commute également avec la limite. Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{T_k(a+h)-T_k(a)-T_{k+1}(a)h}{\|h\|}=\sum_I\left(\lim_{h\to 0}\frac{(\partial_I f)(a+h)-(\partial_I f)(a)-d(\partial_I f)_a h}{\|h\|}\right)\times_k\phi_k(\omega_I) \tag{14.1001a}$$

$$=0. \tag{14.1001b}$$

Cela prouve que T_{k+1} est bien la différentielle de T_k. Par récurrence, la fonction f est bien n fois continuement différentiable. □

Maintenant que nous avons plein de lemmes et de résultats, il est facile de démontrer un très gros résultat en peu de lignes.

THOooPZTAooTASBhZ

Théorème 14.367.
Soit une application $f\colon V\to E$ entre deux espaces vectoriels normés de dimension finies. Nous avons équivalence entre

ITEMooBOWTooXgxhpS

(1) f est de classe C^n

ITEMooPVZHooHihSRD

(2) les dérivées partielles $\partial_i f$ sont de classe C^{n-1}

ITEMooVBQMooBleazN

(3) les dérivées partielles $\partial_I^n f$ existent et sont continues pour tout multiiindice de longueur n.

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(3) implique (1)** C'est la proposition 14.366.

(2) **(1) implique (3)** C'est la proposition 14.365.

(3) **(3) implique (2)** En posant $g_i=\partial_i f$, l'hypothèse est que les $\partial_I^{n-1}g_i$ existent et sont continues pour tout multiindices I de longueur $n-1$. En appliquant « (3) implique (1) » à la fonction g_i, la fonction g_i est de classe C^{n-1}.

(4) **(2) implique (3)** Les fonctions g_i déjà définies sont de classe C^{n-1}. Nous leur appliquons « (1) implique (3) », nous savons que les fonctions $\partial_I^{n-1}g_i$ sont continues, c'est-à-dire que les $\partial_I\partial_i f$. Vu que tout multiiindice de longueur n peut être écrit sous la forme iI où I est de longueur $n-1$, nous avons prouvé que les $\partial_J^n f$ existent et sont continues pour tout multiindice J de longueur n.

□

PROPooCKROooYutfEX

Proposition 14.368 ([1]).
Soit un espace vectoriel V de dimension finie n sur K ($=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$). Soit une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de V. Pour chaque i, la projection

$$\begin{aligned}\texttt{proj}_i\colon V&\to\mathbb{K}\\ \sum_k e_k&\mapsto a_i\end{aligned} \tag{14.1002}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

PROPooMOMMooDYIayv

Proposition 14.369 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés de dimension finie V et W. Soient des bases $\{e_i\}$ et $\{e'_j\}$ de V et W. Une application $f\colon V\to W$ est de classe C^p si et seulement si chacune de ses composantes le sont, c'est-à-dire si en écrivant

$$f(s)=\sum_j f_j(s)e'_j, \tag{14.1003}$$

les applications $f_j\colon V\to\mathbb{R}$ sont de classe C^p.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Considérant la proposition 14.368, la projection

$$\begin{aligned}\texttt{proj}_i\colon W&\to\mathbb{R}\\ \sum_k a_k e'_k&\mapsto a_i\end{aligned} \tag{14.1004}$$

est de classe C^∞. Vu que f est de classe C^p, la composée $\mathtt{proj}_i \circ f$ est de classe C^p par la proposition 12.339.

(2) **Sens réciproque** Si I est un multiindice de longueur p, nous avons

$$(\partial_I^p f)(s) = \sum_k (\partial_I^p f_k)(s) e'_k, \tag{14.1005}$$

qui est continue parce que les f_k sont de classe C^p. Donc f est de classe C^p par le théorème 14.367(3).

□

PROPooWOYSooVERAAx

Proposition 14.370 ([1]).
Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit une application $s\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Alors

$$\begin{aligned} f\colon U &\to U \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \big(x, s(x)\big) \end{aligned} \tag{14.1006}$$

est de classe C^k.

14.35.2 Application à valeurs dans les opérateurs

PROPooUCRNooaqsebj

Proposition 14.371 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une application $A\colon U \to \mathrm{End}(V,W)$. L'application A est de classe C^k si et seulement si toutes les applications $s \mapsto A(s)_{ij}$ sont de classe C^k.

Démonstration. Nous utilisons les applications f_{ij} de la proposition 6.87, en nous souvenant que les éléments de matrice de $A(s)$ sont les coordonnées de $A(s) \in \mathrm{End}(V,W)$ dans ces coordonnées (proposition 6.88). Le résultat est alors seulement un cas particulier de la proposition 14.369. □

PROPooYORGooDmwrJg

Proposition 14.372 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une application $A\colon U \to \mathrm{End}(V,W)$. Nous supposons que pour chaque $v \in V$, l'application $s \mapsto A(s)v$ est C^k.
Alors A est C^k.

Démonstration. Soient une base $\{e_i\}$ de V et $\{e'_j\}$ de W. Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} f_i\colon U &\to W \\ s &\mapsto A(s)e_i. \end{aligned} \tag{14.1007}$$

Par hypothèse, f_i est une application C^k. Nous avons

$$f_i(s) = A(s)e_i = \sum_j A(s)_{ji} e'_j \tag{14.1008}$$

Nous profitons de la proposition 14.368 qui dit que la projection est de classe C^∞, et de la proposition 12.339 à propos des composées, l'application $(\mathtt{proj}_j \circ f_i)$ est de classe C^p. Or nous avons

$$(\mathtt{proj}_j \circ f_i)(s) = A(s)_{ji}. \tag{14.1009}$$

La proposition 14.371 conclut que f est de classe C^p. □

14.35.3 Espaces d'applications multilinéaires et identifications

Si V et E sont des espaces vectoriels de dimensions finies, la différentielle de $f\colon V \to E$ est une application $df\colon V \to \mathcal{L}(V,E)$. La différentielle seconde est une application $d(df)\colon V \to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,E)\big)$ et ainsi de suite.

Une grande difficulté de la manipulation des différentielles d'ordre supérieurs provient de cet emboîtement d'espaces d'applications linéaires. Nous nous attaquons à présent à la description de ces espaces emboîtés[151].

Pour la suite, nous considérerons des espaces vectoriels normés V et E de dimension finie. Nous notons $\mathcal{L}^n(V,E)$ l'espace des applications multilinéaires $V^n \to E$.

[151] Toutes les constructions, tous les énoncés et les preuves qui suivent sont de l'invention personnelle de l'auteur de ces lignes. Je n'ai trouvé nulle part une source qui s'attaque réellement à la récurrence.

Nous introduisons le produit suivant[1] :

$$\begin{aligned} \cdot : W \times \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})\big) &\to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, W)\big) \\ \big((w \cdot \psi)(u)\big)v &= \big(\psi(u)v\big)w. \end{aligned} \tag{14.1010}$$

Dans la suite, pour économiser des parenthèses et des maux de tête, nous allons noter $\psi(u, v)$ le nombre $\psi(u)v$. Il n'est cependant pas question de dire que ψ est une application bilinéaire. En effet, identifier $\mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, W)\big)$ à l'espace des applications bilinéaires $V \times V \to W$ ne sert pas à grand chose pour l'instant parce qu'une telle identification a le prix de devoir prouver que toutes les propriétés des différentielles passent à travers l'identification, tâche qui est à priori (conservation de la difficulté) de la même nature que celle à laquelle nous nous attachons à présent.

LEMooHCUSooXYHuBR

Lemme 14.373 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés V et E ainsi que $\psi \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})\big)$. Pour tout $a \in E$ nous avons

$$\|a \cdot \psi\|_{\mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,E)\big)} = \|\psi\|_{\mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big)} \|a\|_E. \tag{14.1011}$$

Démonstration. Il s'agit seulement d'un calcul :

$$\|a \cdot \psi\| = \sup_{\|v\|=1} \|(a \cdot \psi)(v)\|_{\mathcal{L}(V,E)} \tag{14.1012a}$$

$$= \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} \|(a \cdot \psi)(v)w\|_E \tag{14.1012b}$$

$$= \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} \|\big(\psi(v)w\big)a\|_E \tag{14.1012c}$$

SUBEQooDVSVooFksDQb

$$= \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} |\psi(v)w| \, \|a\|_E \tag{14.1012d}$$

SUBEQooBJQDooDxZMQv

$$= \sup_{\|v\|=1} \|\psi(v)\| \, \|a\| \tag{14.1012e}$$

$$= \|\psi\|\|a\|. \tag{14.1012f}$$

Notez que dans (14.1012c), $|\psi(v)w|$ est un simple réel ; c'est pourquoi nous le retrouvons hors de la norme $\|.\|_E$ dans (14.1012d), muni d'une simple valeur absolue. □

Lemme 14.374 ([1]).
Soient $\psi \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})\big)$ et une fonction continue $f : V \to E$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} g : V &\to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, E)\big) \\ x &\mapsto f(x) \cdot \psi \end{aligned} \tag{14.1013}$$

est continue.

Démonstration. Pour des raisons de notations, nous allons écrire g_x pour $g(x)$. Cela étant dit nous considérons $a \in E$, une suite $x_k \xrightarrow{E} a$ et nous calculons :

$$\|g_a - g_{x_k}\| = \sup_{\|u\|=1} \|g_a(u) - g_{x_k}(u)\|_{\mathcal{L}(V,E)} \tag{14.1014a}$$

$$= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \|g_a(u)v - g_{x_k}(u)v\|_E \tag{14.1014b}$$

$$= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \|f(a)\psi(u)v - f(x_k)\psi(u)v\| \tag{14.1014c}$$

$$= \sup_{\|u\|=1} \sup_{\|v\|=1} \|f(a) - f(x_k)\|\big|\psi(u)v\big| \tag{14.1014d}$$

$$= \big\|f(a) - f(x_k)\big\| \sup_{u,v} |\psi(u)v| \tag{14.1014e}$$

$$= \|f(a) - f(x_k)\| \, \|\psi\|. \tag{14.1014f}$$

En prenant la limite $k \to \infty$, et en considérant que f est continue en a, nous obtenons

$$\lim_{k\to\infty} \|g_a - g_{x_k}\| = 0. \tag{14.1015}$$

□

Lemme 14.375 ([1]).
Soient une application différentiable $f\colon V \to E$ ainsi que $\psi \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, \mathbb{R})\big)$. Soit

$$\begin{aligned} g\colon V &\to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, E)\big) \\ x &\mapsto f(x) \cdot \psi. \end{aligned} \tag{14.1016}$$

Alors g est différentiable et pour tout $a \in V$ nous avons

$$dg_a(h) = df_a(h) \cdot \psi. \tag{14.1017}$$

Notons que nous n'avons pas $dg_a = df_a \cdot \psi$. En effet, $df_a \in \mathcal{L}(V, W)$, de telle sorte que $df_a \cdot \psi \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, W)\big)\big)$. Les espaces ne s'emboîtent pas dans le bon ordre.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que $h \mapsto df_a(h) \cdot \psi$ vérifie la condition de la définition 12.296. En utilisant le fait que $(a + b) \cdot \psi = a \cdot \psi + b \cdot \psi$ ainsi que le lemme 14.373 nous écrivons

$$\frac{\|f(a+h) \cdot \psi - f(a) \cdot \psi - df_a(h) \cdot \psi\|}{\|h\|} = \|\frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h} \cdot \psi\| \tag{14.1018a}$$

$$= \|\frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h}\|\|\psi\|. \tag{14.1018b}$$

Vu que f est différentiable en a et que df_a est la différentielle, nous avons bien

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{h}\|\|\psi\| = 0. \tag{14.1019}$$

□

Démonstration. Nous faisons (1) par récurrence. D'abord $\dim(E_0) = \dim(E)$ et ensuite

$$\dim(E_{k+1}) = \dim \mathcal{L}(V, E_k) = \dim(V) \dim(E_k) = \dim(V)^{n+1} \dim(E). \tag{14.1020}$$

Pour (2), si $\{e_i\}$ est une base de V, un élément $\omega \in \mathcal{L}^n(V, E)$ est déterminé par les valeurs de $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ qui peuvent être n'importe quel vecteur de E. Donc la dimension est $\dim(V)^n \dim(E)$. □

Lemme 14.376 ([1]).
Soit $n \in \mathbb{N}$ nous définissons par récurrence

$$\begin{aligned} \psi_{n,0}\colon E_n &\to E_n \\ \alpha &\mapsto \alpha. \end{aligned} \tag{14.1021}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_{n,k}\colon E_n &\to \mathcal{L}^k(V, E_{n-k}) \\ \psi_{n,k}(\alpha)(v_1, \dots, v_k) &= \big(\psi_{n,k-1}(\alpha)(v_1, \dots, v_{k-1})\big)v_k. \end{aligned} \tag{14.1022}$$

L'application

$$\psi_{n,n}\colon E_n \to \mathcal{L}^n(V, E) \tag{14.1023}$$

est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. Nous allons démontrer par récurrence sur k que tous les $\psi_{n,k}$ sont des isomorphismes isométriques. Pour $k = 0$ c'est évident parce que $\psi_{n,0}$ est l'identité.

(1) **Injective** Soient $\alpha \in E_n$ tels que $\psi_{n,k+1}(\alpha) = 0$. Cela signifie que pour tout $v_1, \dots, v_{k+1}$ nous avons

$$\psi_{n,k}(\alpha)(v_1, \dots, v_k)v_{k+1} = 0. \tag{14.1024}$$

c'est-à-dire $\psi_{n,k}(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = 0$. Vu que $\psi_{n,k}$ est injective (hypothèse de récurrence), nous avons $\alpha = 0$.

(2) **Surjective** Soit $\omega \in \mathcal{L}^{k+1}(V, E_{n-k})$; nous cherchons $\alpha \in E_n$ tel que $\psi_{n,k+1}(\alpha) = \omega$, c'est-à-dire tel que

$$\psi_{n,k+1}(\alpha)(v_1, \dots, v_{k+1}) = \psi_{n,k}(\alpha)(v_1, \dots, v_k)v_{k+1} = \omega(v_1, \dots, v_{k+1}). \tag{14.1025}$$

EQooACUOooKCKame

Notez que

$$\psi_{n,k}(\alpha) \in \mathcal{L}^k(V, E_{n-k}) = \mathcal{L}^k\big(V, \mathcal{L}(V, E_{n-k-1})\big). \tag{14.1026}$$

En considérant $\sigma \in \mathcal{L}^k\big(V, \mathcal{L}(V, E_{n-k-1})\big)$ donné par

$$\sigma(v_1, \dots, v_k)v_{k+1} = \omega(v_1, \dots, v_{k+1}), \tag{14.1027}$$

il existe (hypothèse de récurrence sur k) un $\alpha \in E_n$ tel que $\psi_{n,k}(\alpha) = \sigma$.

Pour ce α, la condition (14.1025) est satisfaite.

(3) **Isométrique** Encore une fois par récurrence. Soit $\alpha \in E_n$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi_{n,k}(\alpha)\|_{\mathcal{L}^k(V,E_{n-k})} &= \sup_{\|v_i\|=1} \|\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\dots,v_k)\|_{E_{n-k}} && (14.1028a)\\
&= \sup_{\|v_i\|=1} \|\psi_{n,k-1}(\alpha)(v_1,\dots,v_{k-1})v_k\|_{E_{n-k}} && (14.1028b)\\
&= \sup_{\substack{\|v_i\|=1\\ i=1,\dots,k-1}} \|\psi_{n,k-1}(v_1,\dots,v_{k-1})\|_{\mathcal{L}(V,E_{n-k-1})} && (14.1028c)\\
&= \|\psi_{n,k-1}(\alpha)\| && (14.1028d)\\
&= \|\alpha\|. && (14.1028e)
\end{aligned}$$

La dernière égalité est l'hypothèse de récurrence. Notez la subtile utilisation du lemme 9.216 qui permet de donner un sens aux supremums, grace au fait que $\{v \in V \text{ tel que } \|v\| = 1\}$ est compact.

□

LEMooFBEGooCqrzxH

Lemme 14.377.
Nous avons $\psi_{n,n} = \phi_n^{-1}$.

Démonstration. Pour nous échauffer nous posons $\omega \in \mathcal{L}^n(V,\mathbb{R})$, et nous calculons [EQooPBQIooUValDA]

$$\begin{aligned}
\psi_{n,2}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,v_2) &= \Big(\psi_{n,1}\big(\phi_n(\omega)\big)v_1\Big)v_2 && (14.1029a)\\
&= \big(\phi_n(\omega)v_1\big)v_2 && (14.1029b)\\
&= \phi_{n-1}\big(\mathtt{proj}_{v_1}(\omega)\big) && (14.1029c)\\
&= \phi_{n-2}\big(\mathtt{proj}_{v_2}\mathtt{proj}_{v_1}(\omega)\big). && (14.1029d)
\end{aligned}$$

Cela étant dit, nous allons prouver ceci par récurrence :

$$\psi_{n,k}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_k) = \phi_{n-k}\Big(\prod_{i=1}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\Big). \tag{14.1030}$$

Notez l'ordre du produit des projections. En ce qui concerne cet ordre, pour fixer les idées voici un exemple :

$$\mathtt{proj}_{v_2}\mathtt{proj}_{v_1}(\omega) = \big(\mathtt{proj}_{v_1}(\omega)\big)(v_2) = \omega(v_1,v_2). \tag{14.1031}$$

Faisons maintenant la récurrence.

(1) **Pour $k=2$** C'est le calcul (14.1029).

(2) **Pour $k+1$** C'est encore un calcul, en faisant attention à l'ordre dans lequel viennent les projections :

$$\begin{aligned}
\psi_{n,k+1}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_{k+1}) &= \Big(\psi_{n,k}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_k)\Big)v_{k+1} && (14.1032a)\\
&= \Big(\phi_{n-k}\big(\prod_{i=1}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big)\Big)v_{k+1} && (14.1032b)\\
&= \phi_{n-k-1}\big(\mathtt{proj}_{v_{k+1}}\prod_{i=1}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big) && (14.1032c)\\
&= \phi_{n-(k+1)}\big(\prod_{i=1}^{k+1}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big). && (14.1032d)
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à écrire la formule démontrée avec $k=n$:

$$\psi_{n,n}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\dots,v_n) = \phi_{n-n}\big(\prod_{i=1}^{n}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\big) = \omega(v_1,\dots,v_n). \tag{14.1033}$$

Donc nous avons bien que $\psi_{n,n}\big(\phi_n(\omega)\big) = \omega$. □

LEMooDGUGooTXOtih

Lemme 14.378.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Nous considérons une application linéaire $A\colon V \to E$, une forme $\omega \in \mathcal{L}^n(V,\mathbb{R})$ ainsi que la forme

$$\begin{aligned}\alpha\colon V &\to E_n\\ u &\mapsto A(u)\psi^{-1}(\omega).\end{aligned} \tag{14.1034}$$

Alors

$$\psi_{n+1,n+1}(\alpha)(v_1,\dots,v_{n+1}) = A(v_1)\omega(v_2,\dots,v_{n+1}). \tag{14.1035}$$

Démonstration. Nous prouvons la formule suivante par récurrence :

$$\psi_{n+1,k}(\omega)(v_1,\dots,v_k) = A(v_1)\phi_{n-k+1}\Big(\prod_{i=2}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}(\omega)\Big). \tag{14.1036}$$

Nous commençons la récurrence avec $k=2$, en tenant compte que $\psi^{-1}=\phi_n$ (lemme 14.377) :

$$\begin{aligned}\psi_{n+1,2}(\alpha)(v_1,v_2) &= \big(\psi_{n+1,1}(\alpha)v_1\big)v_2 && \text{(14.1037a)}\\ &= \alpha(v_1)v_2 && \text{(14.1037b)}\\ &= A(v_1)\big(\psi^{-1}(\omega)v_2\big) && \text{(14.1037c)}\\ &= A(v_1)\big(\phi_n(\omega)v_2\big) && \text{(14.1037d)}\\ &= A(v_1)\phi_{n-1}\big(\mathtt{proj}_{v_2}(\omega)\big). && \text{(14.1037e)}\end{aligned}$$

C'est bon pour $k=2$. Nous passons à la récurrence :

$$\begin{aligned}\psi_{n+1,k+1}(\omega)(v_1,\dots,v_{k+1}) &= \big(\phi_{n+1,k}(\omega)(v_1,\dots,v_k)\big)v_{k+1} && \text{(14.1038a)}\\ &= A(v_1)\Big(\phi_{n-k+1}\Big(\prod_{i=2}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\Big)\Big)v_{k+1} && \text{(14.1038b)}\\ &= A(v_1)\phi_{n-k}\Big(\mathtt{proj}_{v_{k+1}}\prod_{i=2}^{k}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\Big) && \text{(14.1038c)}\\ &= A(v_1)\phi_{n-(k+1)}\Big(\prod_{i=2}^{k+1}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\Big). && \text{(14.1038d)}\end{aligned}$$

La récurrence est terminée. Nous écrivons la formule pour $k=n+1$ en tenant compte de $\phi_0=\mathrm{Id}$ pour terminer la preuve de ce lemme :

$$\psi_{n+1,n+1}(\omega)(v_1,\dots,v_{n+1}) = A(v_1)\phi_0\Big(\prod_{i=2}^{n+1}\mathtt{proj}_{v_i}\omega\Big) = A(v_1)\omega(v_2,\dots,v_{n+1}). \tag{14.1039}$$

□

14.35.4 Fonctions différentiables plusieurs fois

Définition 14.379.
*Un C^k-**difféomorphisme** est une application inversible de classe C^k dont l'inverse est également de classe C^k.*

bilin_2diff

Exemple 14.380.
Soit $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application bilinéaire. On définit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ par $f(x) = B(x,x)$. Le lemme 14.292 nous dit que B est différentiable. Cela implique la différentiabilité de f. Pour trouver la différentielle de la fonction f, nous écrivons $f = B\circ s$ où $s\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ est l'application $s(x)=(x,x)$. En utilisant la règle de différentiation de fonctions composées,

$$df(a) = dB\big(s(a)\big)\circ ds(a). \tag{14.1040}$$

Mais $ds(a).u = (u,u)$ parce que $s(a+h)-s(a)-(h,h)=0$. Par conséquent,

$$df(a).u = dB\big(s(a)\big)(u,u) = B(u,a)+B(a,u) \tag{14.1041}$$

EqdBssExp

où nous avons utilisé la formule du lemme 14.292. La formule (14.1041) peut être écrite sous la forme compacte

$$df(a) = B(\ \cdot\ , a) + B(a,\ \cdot\ ) \tag{14.1042}$$

La fonction $df(a)$ ainsi écrite est linéaire par rapport à a, donc différentiable. En outre elle coïncide avec sa différentielle, comme on a vu dans le lemme 12.326, au sens que la différentielle de df au point a sera l'application que à chaque x dans $\mathbb{R}^m$ associe l'application linéaire $B(x,\ \cdot\ ) + B(\ \cdot\ , x)$. On voit bien que $d^2 f$ au point a est une application de $\mathbb{R}^m$ vers l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On peut utiliser d'autre part l'isomorphisme des espaces $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et dire que, une fois que a est fixé, l'application $d^2 f(a)$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. On écrit alors $d^2 f(a)(x, y) = B(x, y) + B(y, x)$. △

14.35.5 Différentielle seconde, fonction de classe C^2

La différentielle seconde dans l'exemple 14.380 est symétrique, c'est-à-dire que $d^2 f(a)(x_1, x_2) = d^2 f(a)(x_2, x_1)$. En fait toute différentielle seconde est symétrique.

Le théorème de Schwarz permet de permuter les dérivées partielles d'ordre 2 dans le cas d'une fonction de classe C^2. Il y aura une généralisation pour les fonctions de classe C^m dans la proposition 14.394.

Schwarz

Théorème 14.381 (Schwarz)**.**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, pour tout couple i, j d'indices dans $\{1, \dots, m\}$ et pour tout point a dans U, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Démonstration. Pour simplifier nous nous limitons ici au cas $m = 2$. Soit (h, g) un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ on note

$$\begin{aligned} \Delta_h f(v) &= f(v + he_1) - f(v) = f(x + h, y) - f(x, y), \\ \Delta_g f(v) &= f(v + ge_2) - f(v) = f(x, y + g) - f(x, y), \end{aligned} \tag{14.1043}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_g \Delta_h f(v) &= \big(f(x + h, y + g) - f(x, y + g)\big) - \big(f(x + h, y) - f(x, y)\big)\,, \\ \Delta_h \Delta_g f(v) &= \big(f(x + h, y + g) - f(x + h, y)\big) - \big(f(x, y + g) - f(x, y)\big)\,, \end{aligned} \tag{14.1044}$$

donc,

$$\frac{1}{g}\Delta_g \left(\frac{1}{h}\Delta_h f(v)\right) = \frac{1}{h}\Delta_h \left(\frac{1}{g}\Delta_g f(v)\right). \tag{14.1045}$$

On utilise alors le théorème des accroissements finis 14.217

$$\frac{1}{h}\Delta_h f(v) = \frac{1}{h}\big(f(x + h, y) - f(x, y)\big) = \frac{1}{h}\partial_1 f(x + t_1 h, y)h = \partial_1 f(x + t_1 h, y), \tag{14.1046}$$

pour un certain t_1 dans $]0, 1[$. De même on obtient

$$\frac{1}{g}\Delta_g f(v) = \partial_2 f(x, y + t_2 g),$$

pour un certain t_2 dans $]0, 1[$. Alors

$$\frac{1}{g}\Delta_g\big(\partial_1 f(x + t_1 h, y)\big) = \frac{1}{h}\Delta_h\big(\partial_2 f(x, y + t_2 g)\big). \tag{14.1047}$$

En appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis on a

$$\partial_2 \partial_1 f(x + t_1 h, y + s_1 g) = \partial_1 \partial_2 f(x + s_2 h, y + t_2 g). \tag{14.1048}$$

Il suffit maintenant de passer à la limite pour $(h, g) \to (0, 0)$ et de se souvenir du fait que f est $\mathcal{C}^2$ seulement si ses dérivées partielles secondes sont continues[152] pour avoir $\partial_2 \partial_1 f(v) = \partial_1 \partial_2 f(v)$. □

[152] Théorème 14.367.

Si f est deux fois différentiable $d^2f(a)$ est l'application bilinéaire associée avec la matrice symétrique

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \dots & \partial_1\partial_m f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\partial_m f(a) & \dots & \partial_m^2 f(a), \end{pmatrix} \tag{14.1049}$$

Cette matrice est dite la matrice **hessienne** de f.

Exemple 14.382.
Montrons qu'il n'existe pas de fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 5\sin x & \text{(14.1050a)} \\ \partial_y(x,y) = 6x + y. & \text{(14.1050b)} \end{cases}$$

Ceci est vite fait en appliquant le théorème de Schwarz, 14.381 ; ce que nous trouvons est

$$\partial_y(\partial_x f) = 0$$

alors que

$$\partial_x(\partial_y f) = 6. \tag{14.1051}$$

Vu que $\partial_x(\partial_y f) \neq \partial_y(\partial_x f)$, le théorème 14.381 dit que f ne peut pas être de classe C^2. △

NORMooKSAVooCeILmI

14.383.
Soit une fonction de classe C^2 $f\colon V \to \mathbb{R}$ où V est un espace vectoriel de dimension $n < \infty$. Nous avons

$$f\colon V \to \mathbb{R} \tag{14.1052a}$$
$$df\colon V \to \mathcal{L}(V,\mathbb{R}) \tag{14.1052b}$$
$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}\Big(V, \mathcal{L}(V,\mathbb{R})\Big), \tag{14.1052c}$$

avec, en suivant les différentes formules du lemme 14.273,

$$df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} \tag{14.1053}$$

et

$$(d^2f)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}\Big]_{t=0} \tag{14.1054}$$

pour tout $a, u \in V$. Notons que dans le deuxième cas, il s'agit d'une limite dans $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Si $\dim(V) = n$, alors $\dim\mathcal{L}(V,\mathbb{R}) = n$ et avec un choix de base, nous pouvons trouver une matrice $n \times n$ pour $(d^2f)_a$.

Soit une base $\{e_i\}$ de V et la base duale $\{e_i^*\}$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Nous allons chercher la matrice de $(d^2f)_a$ pour ces bases. L'élément de matrice

$$\big[(d^2f)_a\big]_{ij} \tag{14.1055}$$

est la composante e_j^* de $(d^2f)_a$ appliqué à e_i. Trouver cette composante e_j^* revient à appliquer l'élément $(d^2f)_a e_i$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ à e_j. Le calcul est donc :

$$\big[(d^2f)_a\big]_{ij} = \big((d^2f)_a e_i\big)(e_j) \tag{14.1056a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+te_i}(e_j)\Big]_{t=0} \tag{14.1056b}$$
SUBEQooDRZFooAuuaad
$$= \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+te_i+se_j)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} \tag{14.1056c}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a). \tag{14.1056d}$$

Attention : le passage à (14.1056b) n'est pas une trivialité. Le fait est que si $t \mapsto A(t)$ est une application continue $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{t\to 0}\big(A(t)v\big) = \big(\lim_{t\to 0} A(t)\big)v. \tag{14.1057}$$

Donc la matrice de d^2f est la matrice des dérivées secondes. Il s'agit d'une matrice symétrique par le théorème de Schwarz 14.381.

NORMooZAOEooGqjpLH

14.384.
Si $a \in V$, nous pouvons aussi voir $(d^2f)_a$ comme une forme bilinéaire sur V grâce à la proposition 12.122. Si $u, v \in V$ nous notons

$$(d^2f)_a(u,v) = (d^2f)_a(u)v. \tag{14.1058}$$

À droite, il s'agit de la définition réelle de d^2f sans abus de notations, et à gauche, il s'agit d'une notation. Cette application bilinéaire $(d^2f)_a \in \mathcal{L}^{(2)}(V,\mathbb{R})$ a pour matrice symétrique la matrice des dérivées secondes calculées en a.

ExZHZYcNH

Exemple 14.385.
Voyons comment la différentielle seconde fonctionne entre deux espaces vectoriels. Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W. Pour que les choses soient claires, nous avons :

$$f\colon V \to W \tag{14.1059a}$$
$$df\colon V \to \mathcal{L}(V,W) \tag{14.1059b}$$
$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}\Big(V, \mathcal{L}(V,W)\Big). \tag{14.1059c}$$

Si $a \in V$, alors $(d^2f)_a$ est une application $V \to \mathcal{L}(V,W)$. Il faut donc l'appliquer à $u \in V$ et ensuite à $v \in V$ pour obtenir un élément de W :

$$(d^2f)_a(u)v = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}\Big]_{t=0}v \tag{14.1060a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}(v)\Big]_{t=0} \tag{14.1060b}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+tu+sv)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} \tag{14.1060c}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \tag{14.1060d}$$

Par conséquent nous voyons

$$d^2f\colon V \to \mathcal{L}^{(2)}(V,W)$$
$$d^2f_a(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \tag{14.1061}$$

EqQHINNtD

Dans le cas d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous avons une seule direction et par linéarité de (14.1061) par rapport à u et v, nous avons

$$d^2f_a(u,v) = f''(a)uv \tag{14.1062}$$

EQooSOCGopIiNGmG

où les produits sont des produits usuels dans $\mathbb{R}$ et f'' est la dérivée seconde usuelle. △

Tout ceci est un peu résumé dans la proposition suivante.

PROPooFWZYooUQwzjW

Proposition 14.386.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors en désignant par H_af sa matrice hessienne au point a nous avons

$$(d^2f)_a(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \langle (H_af)u, v\rangle \tag{14.1063}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. La première égalité est l'équation (14.1062) déjà faite. Pour la seconde, il faut se rappeler du lien entre dérivée partielle et dérivée directionnelle, donné en le lemme 14.273. En particulier ici nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sum_{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(a)u_k v_l = \langle (H_af)u, v\rangle. \tag{14.1064}$$

□

En particulier, la matrice hessienne H_af est symétrique et donc diagonalisable (théorème spectral 10.228). Si e_i est un vecteur propre unitaire pour la valeur propre λ_i nous avons

$$(d^2f)_a(e_i,e_i) = \langle (H_af)e_i, e_i\rangle = \lambda\langle e_i, e_i\rangle = \lambda. \tag{14.1065}$$

Enfin pour celles qui aiment les notations matricielles de tout poil, il y a cette façon-ci d'écrire :

$$(d^2f)_a(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x^2 f(a) & \partial_{xy}^2 f(a)\\ \partial_{xy}^2 f(a) & \partial_y^2 f(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}. \tag{14.1066}$$

14.35.6 Ordre supérieur

Les notions de classe C^k et C^∞ sont dans la définition 12.317.

LEMooXKBPooMsDLuq

Lemme 14.387 ([1]).
Toute application linéaire est de classe C^∞.

PROPooJAUVooBhhDkD

Proposition 14.388 ([1]).
Si f et g sont des fonctions de classe C^k, alors $f+g$ et fg sont de classe C^k.

PROPooMGFBooHWGXyC

Proposition 14.389.
Tout polynôme $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^∞.

Démonstration. Nous posons $e_n(x) = x^n$, et nous prouvons par récurrence que e_n est de classe C^∞. D'abord e_0 est une fonction constante et donc est C^∞ lemme 14.387.

Ensuite si e_n est de classe C^∞, alors le lemme 14.199 donne $e_{n+1}(x) = xe_n(x)$ est C^∞ parce qu'il s'agit du produit de e_n par $x \mapsto 0$ et que le produit conserve le caractère C^∞ par la proposition 14.388. □

PROPooZCUSooLUUrxi

Proposition 14.390 (Exemple en dimension infinie[1]).
L'endomorphisme de dérivation sur l'espace des fonctions[153] $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'a pas de polynôme minimal.

Démonstration. Nous considérons l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}\colon C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^{\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Comme demandé dans la définition 8.64 nous considérons la partie

$$I_{\mathcal{D}} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(\mathcal{D}) = 0\}. \tag{14.1067}$$

Nous montrons que $I_{\mathcal{D}} = \{0\}$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Nous considérons $f(x) = x^{n+1}$ qui est de classe C^∞ parce que c'est ce que dit la proposition 14.389. Nous considérons aussi le plus petit k pour lequel $a_k \neq 0$. Le lemme 14.199(2) donne

$$(a_k\mathcal{D}^k)(f)(x) = a_k \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}. \tag{14.1068}$$

Tous les autres termes de $P(\mathcal{D})f$ sont de degrés plus petits. Donc $P(\mathcal{D})f$ est un polynôme non nul.

Tout ça pour dire que $I_{\mathcal{D}} = \{0\}$ et que donc $\mathcal{D}$ n'a pas de polynôme minimal. □

14.35.7 Différentielle et dérivées partielles multiples

Intuitivement, une fonction est de classe C^p si elle est p fois continûment différentiable. Cela est la définition 12.317.

Ce qui est terrible avec les différentielles d'ordre supérieurs, c'est l'emboîtement des espaces. Pour une fonction $f\colon E \to F$, nous allons souvent poser

$$V_0 = F \tag{14.1069a}$$
$$V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k), \tag{14.1069b}$$

de telle sorte à avoir

$$df\colon E \to \mathcal{L}(E,F) = V_1 \tag{14.1070}$$

et

$$d^2f\colon E \to \mathcal{L}(E,V_1) = V_2, \tag{14.1071}$$

ce qui donne en général

$$d^kf\colon E \to \mathcal{L}(E,v_{k-1}) = V_k. \tag{14.1072}$$

La proposition suivante lie une bonne fois pour toute dérivée et différentielle dans le cadre de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

PROPooCNDHooKRwils

Proposition 14.391 ([1]).
Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^p si et seulement si elle est p fois continûment dérivable.

Démonstration. Nous commençons par poser un certain nombre de notations. Comme souvent nous posons $V_0 = \mathbb{R}$ et

$$V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R}, V_k). \tag{14.1073}$$

[153] Les classes C^k, définition 12.317.

De plus nous considérons $M_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donnée par $M_1(t) = t$. Et par récurrence

$$M_{k+1}(t) = tM_k. \tag{14.1074}$$

Nous avons $M_1 \in V_1$ et $M_k \colon \mathbb{R} \to V_{k-1}$, c'est-à-dire $M_k \in V_k$.

Les formules que nous allons prouver sont que d'une part,

$$df_a = f'(a)M_1. \tag{14.1075}$$

et que d'autre part, plus généralement,

$$(d^k f)_a = f^{(k)}(a)M_k. \tag{14.1076}$$

En plusieurs parties et par récurrence.

(1) **Si f est continûment dérivable, alors f est C^1** Nous montrons que l'application T donnée par $T(h) = hf'(a)$ vérifie la condition pour être la différentielle de f en a :

$$\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} - 1_h f'(a). \tag{14.1077}$$

où nous avons noté 1_h le vecteur unité dans la direction de h, c'est-à-dire $1_h = h/\|h\|$. Vu que $h \in \mathbb{R}$, c'est simplement

$$1_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases} \tag{14.1078}$$

et nous ne définissons pas 1_h si $h = 0$.

C'est le moment de prendre la limite de (14.1077) pour $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$ séparément. Lorsque $h \to 0^+$, nous avons $\|h\| = h$ et $1_h = 1$. Vu que f est supposée dérivable, la limite du quotient existe et vaut $f'(a)$. Donc le tout a une limite nulle :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0. \tag{14.1079}$$

En ce qui concerne la limite $h \to 0^-$, nous avons $\|h\| = -h$ et $1_h = -1$, et à nouveau une limite nulle. La proposition 14.40 nous permet alors de conclure que la limite existe et est nulle. Les limites à gauche et à droite étant nulles, la limite existe et est nulle par la proposition 14.40.

(2) **Si $f^{(p)}$ est continue alors $d^p f$ aussi** Nous passons à la récurrence de notre preuve. Sous l'hypothèse que $f^{(p)}$ existe et est continue, nous allons montrer que $d^p f$ existe, est continue et vaut

$$(d^p f)_a = f^{(p)}(a)M_p. \tag{14.1080}$$

Soit $k < p$ tel que ce soit bon (pour $k = 1$ c'est déjà fait). Nous avons $(d^k f)_a = f^{(k)}(a)M_k$, et pour prouver que $(d^{k+1} f)_a = f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ nous l'y mettons dans la définition de la différentielle. Nous avons :

$$\frac{(d^k f)_{a+h} - (d^k f)_a - f^{(k+1)}(a)M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{f^{(k)}(a+h)M_k - f^{(k)}(a)M_k - hf^{(k+1)}(a)M_k}{\|h\|}. \tag{14.1081}$$

La limite $h \to 0$ est une limite dans V_k, et elle se traite comme précédemment. Elle vaut zéro parce que $f^{(k+1)}$ est la dérivée de $f^{(k)}$. Cela justifie les faits que $d^k f$ est différentiable en a et que la différentielle est donné par la formule voulue.

Par hypothèse, $k + 1 \leqslant p$, donc $f^{(k+1)}$ est continue. Par conséquent l'application $a \mapsto f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ est continue.

(3) **Si f est de classe C^1 alors f' existe et est continue** Dire que f est de classe C^1 revient à dire que la différentielle $df \colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existe et est continue. Soyons conscient que $df_a(\epsilon) = \epsilon df_a(1)$ et calculons

$$\frac{f(a+\epsilon) - f(a) - df_a(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} - df_a(1). \tag{14.1082}$$

La définition de la différentielle est que la limite de cela pour $\epsilon \to 0$ soit nulle. Cela implique que la limite suivante existe et vaut

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = df_a(1). \tag{14.1083}$$

Nous avons prouvé que $f'(a) = df_a(1)$.

La fonction $a \mapsto df_a$ est continue. Pouvons-nous en déduire que f' est continue ? Nous avons

$$f' = ev_1 \circ df \tag{14.1084}$$

où ev_1 est l'application d'évaluation dont le lemme 12.91 a déjà donné la continuité. Donc f' est continue comme composée d'applications continues.

(4) **f est C^p. Récurrence** Nous supposons que f est de classe C^p, et nous allons montrer par récurrence que $f^{(k)}$ existe et est continue pour tout $k \leqslant p$. Posons exactement l'énoncé de notre récurrence.

Pour $k = 1$ c'est fait. Nous supposons que la formule soit correcte pour un certain $k < p$ et nous y allons pour $k+1$. Nous avons [SUBEQSooUPLAooQhueCl]

$$\frac{(d^k f)(a+h) - (d^k f)(a) - f^{(k+1)}(a)M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{\big[f^{(k)}(a+h) - f^k(a) - hf^{(k+1)}(a)\big]M_k}{\|h\|} \tag{14.1085a}$$

$$= \big[\frac{f^{(k)}(a+h) - f^{(k)}(a)}{\|h\|} - 1_h f^{(k+1)}(a)\big]M_k. \tag{14.1085b}$$

où nous avons aussi tenu compte que $M_{k+1}(h) = hM_k$.

C'est le moment de calculer séparément les limites $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$. Cela fonctionne comme toutes les autres fois.

□

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. L'application

$$d^l f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}\Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\dots)\big)\Big) \tag{14.1086}$$

au point x appliquée à $v^{(1)}$ appliquée au point $v^{(2)}$, ..., appliquée à $v^{(l)}$ est notée

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \dots, v^{(l)}) \in \mathbb{R}. \tag{14.1087}$$

[EQooITOLooQlIIJJ] [PROPooQKZIooXTvkIr]

Proposition 14.392.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. Avec la notation (14.1087) nous avons

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \dots v^{(l)}) = \sum_{k_1,\dots,k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots, v^{(l)}_{k_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_l}}(x). \tag{14.1088}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur l, en sachant que la formule est déjà vraie pour $l = 1$ et $l = 2$. Si la formule est valable pour l, nous avons

$$(d^{l+1} f)_x(v^{(1)}, \dots, v^{(l+1)}) = \frac{d}{dt}\Big[(d^l f)_{x+tv^{(l+1)}}(v^{(1)}, \dots, v^{(l)})\Big]_{t=0} \tag{14.1089a}$$

$$= \sum_{k_1 \dots k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots v^{(l)}_{k_l} \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_l}}(x + tv^{l+1})\Big]_{t=0} \tag{14.1089b}$$

$$= \sum_{k_1 \dots k_l} v^{(1)}_{k_1} \dots v^{(l)}_{k_l} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_k}(x). \tag{14.1089c}$$

Cela donne le résultat attendu. □

14.393.
La formule de la proposition 14.392 nous permet d'écrire de jolies formules comme

$$(d^3 f)_x(h,h,h) = \sum_{ijk} h_i h_j h_k (\partial^3_{ijk} f)(x). \tag{14.1090}$$

[EQooXRWWooMoKoQB]

À mon avis la proposition 14.394 se fait par récurrence avec 14.381.

[PROPooYGJDooOqibbh]

Proposition 14.394 ([1]).
Soit un espace vectoriel V. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to V$ est une application de classe C^m, alors pour tout $p \leqslant m$ nous pouvons permuter les dérivées partielles. Plus précisément, si $i_1, \dots, i_p$ sont dans $\{1, \dots, n\}$ et si $\sigma \in S_p$, nous avons

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} f = \partial_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{i_{\sigma(p)}} f. \tag{14.1091}$$

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

14.36 Suites et séries : généralités

SECooTDZNooJvjPks

14.36.1 Norme supremum

LEMooLPRZooUPsWTR

Lemme 14.395.
Soient un espace compact K et une fonction continue $f\colon K \to \mathbb{C}$ qui se décompose en partie réelle et complexe comme $f(x) = u(x) + iv(x)$. Alors

(1) Les fonctions u et v sont continues sur K.

(2) $\|u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$,

(3) $\|v\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$

où $\|.\|_\infty$ est la norme supremum 12.128.

Démonstration. Tout repose sur le fait que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant |x+iy|$. Prouvons la continuité de u. Soit $a \in K$. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que si $|f(a+\delta) - f(a)| < \epsilon$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} |u(a+\delta) - u(a)| &\leqslant |u(a+\delta) - u(a) + iv(a+\delta) - iv(a)| && (14.1092a)\\ &= |f(a+\delta) - f(a)| && (14.1092b)\\ &< \epsilon. && (14.1092c)\end{aligned}$$

En ce qui concerne les normes pour tout $x \in K$ nous avons

$$|u(x)| \leqslant |u(x) + iv(x)| = |f(x)|. \tag{14.1093}$$

□

14.36.2 Convergence uniforme

ThoUnigCvCont

Théorème 14.396 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit A, un ensemble mesuré et $f_n\colon A \to \mathbb{R}^n$, une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues en $x_0 \in A$, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Si $x \in A$ nous avons, pour tout n, la majoration

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leqslant \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\| && (14.1094a)\\ &\leqslant \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + 2\|f_n - f\|_\infty. && (14.1094b)\end{aligned}$$

Grâce à l'uniforme convergence, nous considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\| \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Pour de tels n, nous avons

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant 2\epsilon + \|f_n(x) - f_n(x_0)\|. \tag{14.1095}$$

La continuité de f_n nous fournit un $\delta > 0$ tel que $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| < \epsilon$ dès que $\|x - x_0\| < \delta$. Pour ce δ, nous avons alors $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \epsilon$.

Donc lorsque $n \geqslant N$ (N est choisi en fonction de ϵ), et $\|x - x_0\| < \delta$ (δ est choisi en fonction de N), nous avons

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant 3\epsilon, \tag{14.1096}$$

ce qui prouve la continuité de f en x_0. □

14.36.2.1 Complétude avec la norme uniforme

PropCZslHBx

Proposition 14.397 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Si une suite de fonctions $f_n\colon X \to Y$ continues converge uniformément[154]*, alors la limite est séquentiellement continue*[155]*.*

Démonstration. Soit $a \in X$ et prouvons que f est séquentiellement continue en a. Pour cela nous considérons une suite $x_n \to a$ dans X. Nous savons que $f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$ nous avons la majoration

$$\begin{aligned} \big\|f(x_n) - f(x)\big\| &\leqslant \big\|f(x_n) - f_k(x_n)\big\| + \big\|f_k(x_n) - f_k(x)\big\| + \big\|f_k(x) - f(x)\big\| && (14.1097a)\\ &\leqslant 2\|f - f_k\|_\infty + \big\|f_k(x_n) - f_k(x)\big\|. && (14.1097b)\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si nous choisissons k suffisamment grand la premier terme est plus petit que ϵ. Et par continuité de f_k, en prenant n assez grand, le dernier terme est également plus petit que ϵ. □

[154] Convergence uniforme, définition 12.129.
[155] Si X est métrique, alors c'est la continuité usuelle par la proposition 9.206.

PropSYMEZGU

Proposition 14.398.
Soit X un espace topologique métrique (Y,d) un espace métrique complet. Alors les espaces

(1) $\left(C_b^0(X,Y),\|.\|_\infty\right)$ *des fonctions continues et bornées $X\to Y$,*

(2) $\left(C_0^0(X,Y),\|.\|_\infty\right)$ *des fonctions continues et s'annulant à l'infini*

(3) $\left(C_0^k(X,Y),\|.\|_\infty\right)$ *des fonctions de classe C^k et s'annulant à l'infini*

sont complets.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $C(X,Y)$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que si $k,l>N$ nous avons $\|f_k-f_l\|_\infty\leqslant\epsilon$. Cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme 12.162 et donc converge uniformément vers une fonction $f\colon X\to Y$. La continuité (ou l'aspect C^k) de la fonction f découle de la convergence uniforme et de la proposition 14.397 (c'est pour avoir l'équivalence entre la continuité séquentielle et la continuité normale que nous avons pris l'hypothèse d'espace métrique).

Si les fonctions f_k sont bornées ou s'annulent à l'infini, la convergence uniforme implique que la limite le sera également. □

Notons que si X est compact, les fonctions continues sont bornées par le théorème 9.298 et nous pouvons simplement dire que $C^0(X,Y)$ est complet, sans préciser que nous parlons des fonctions bornées.

LemdLKKnd

Lemme 14.399.
Soient un espace topologique compact A et un espace complet B. L'ensemble des fonctions continues de A vers B muni de la norme uniforme est complet.

Dit de façon courte : $\left(C(A,B),\|.\|_\infty\right)$ est complet.

Démonstration. Soit (f_k) une suite de Cauchy de fonctions dans $C(A,B)$. Pour chaque $x\in A$ nous avons

$$\|f_k(x)-f_l(x)\|_B\leqslant\|f_k-f_l\|_\infty,\tag{14.1098}$$

de telle sorte que la suite $(f_k(x))$ est de Cauchy dans B et converge donc vers un élément de B. La suite de Cauchy (f_k) converge donc ponctuellement vers une fonction $f\colon A\to B$. Nous devons encore voir que cette fonction est continue ; ce sera l'uniformité de la norme qui donnera la continuité. En effet soit $x_n\to x$ une suite dans A qui converge vers $x\in A$. Pour chaque $k\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\|f(x_n)-f(x)\|\leqslant\|f(x_n)-f_k(x_n)\|+\|f_k(x_n)-f_k(x)\|+\|f_k(x)-f(x)\|.\tag{14.1099}$$

En prenant k et n assez grands, cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut ; le premier et le troisième terme par convergence ponctuelle $f_k\to f$, le second terme par continuité de f_k. La suite $f(x_n)$ est donc convergente vers $f(x)$ et la fonction f est continue. □

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 14.400
Il serait sans doute bon de revoir cette preuve à la lumière du critère de Cauchy uniforme 12.162.

14.401 ([483]).
Le théorème de Stone-Weierstrass indique que les polynômes sont denses pour la topologie uniforme dans les fonctions continues. Donc il existe des limites uniformes de fonctions C^∞ qui ne sont même pas dérivables. Les espaces de type C^p munis de $\|.\|_\infty$ ne sont donc pas complets sans quelques hypothèses. Voir la proposition 14.398 et le thème 37.

ThoUFPLEZh

Théorème 14.402 (Théorème de Dini[484]).
Soient un espace métrique complet D et une suite de fonctions $f_n\in C(D,\mathbb{R})$ telle que

(1) $f_n\to g$ *ponctuellement,*

(2) $g\in C(D,\mathbb{R})$,

(3) *la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $x\in D$ et pour tout $n\geqslant 0$ nous avons $f_{n+1}(x)\geqslant f_n(x)$.*

Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Soit $x \in D$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$g(x) - \epsilon \leqslant f_{N(x)} \leqslant g(x). \tag{14.1100}$$

De plus g et $f_{N(x)}$ sont des fonctions continues, donc il existe $\eta(x)$ tel que si $y \in B\big(x, \eta(x)\big)$ alors

$$g(y) \in B\big(g(x), \epsilon\big) \tag{14.1101a}$$
$$f_{N(x)}(y) \in B\big(f_{N(x)}(x), \epsilon\big). \tag{14.1101b}$$

Si $n \geqslant N(x)$ et si $y \in B(x, \eta(x))$ alors nous avons les majorations

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant f_{N(x)}(y) \geqslant f_{N(x)}(x) - \epsilon \geqslant g(x) - 2\epsilon \geqslant g(y) - 3\epsilon. \tag{14.1102}$$

Justifications :

(1) Les deux premières inégalités sont la croissance de la suite.
(2) La suivante est (14.1101b).
(3) Ensuite il y a le choix de $N(x)$.
(4) Et enfin il y a (14.1101a).

Nous retenons que si $x \in D$ et si $n \geqslant N(x)$ alors

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant g(y) - 3\epsilon \tag{14.1103}$$

pour tout $y \in B(x, \eta(x))$.

Nous utilisons maintenant la compacité de D. Pour chaque $x \in D$ nous pouvons considérer la boule ouverte $B\big(x, \eta(x)\big)$; ces boules recouvrent D. Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire un ensemble fini d'éléments x_1,..., x_K tels que

$$D = \bigcup_{k=1}^{K} B\big(x_k, \eta(x_k)\big). \tag{14.1104}$$

Si à ce moment vous ne comprenez pas pourquoi c'est une égalité au lieu d'une inclusion, il faut lire l'exemple 9.45. Considérons

$$n \geqslant N = \max\{N(x_1), \dots, N(x_K)\}. \tag{14.1105}$$

Pour tout $y \in D$ il existe $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que $y \in B\big(x_k, \eta(x_k)\big)$, et vu que $n \geqslant N(x_k)$ nous reprenons la majoration (14.1103) :

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant g(y) - 3\epsilon. \tag{14.1106}$$

Pour le n choisi nous avons ces inégalités pour tout $y \in D$, c'est-à-dire que nous avons $\|f_n - g\| \leqslant 3\epsilon$ et donc la convergence uniforme. □

Proposition 14.403 ([1])**.**
Soient une suite de fonctions continues $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction continue u telle que $u_i \to u$ simplement. Alors la convergence est uniforme sur tout compact.

Démonstration. Soit un compact K ; nous notons $\|.\|$ la norme uniforme sur K. Supposons que la limite ne soit pas uniforme, c'est-à-dire qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\|u_i - u\| > 2\epsilon \tag{14.1107}$$

pour tout i. Cela permet de considérer pour tout i un élément $x_i \in K$ tel que[156]

$$\|u_i(x_i) - u(x_i)\| > \epsilon. \tag{14.1108}$$

Pour cela, il faut noter que K est compact et que la fonction $x \mapsto \|u_i(x) - u(x)\|$ est continue sur K. Elle est donc bornée et atteint son maximum (c'est le théorème de Weierstrass 9.215).

La suite $i \mapsto x_i$ est une suite dans un compact, et quitte à prendre une sous-suite, nous supposons qu'elle converge vers $a \in K$ (ça, c'est Bolzano-Weierstrass 9.212).

La convergence ponctuelle $u_i \to u$, prise en a, dit qu'il existe un N tel que $|u_i(a) - u(a)| < \epsilon$ pour tout $i \geqslant N$. Pour un tel i, nous avons aussi

$$|u_i(x) - u(x)| < \epsilon \tag{14.1109}$$

sur un voisinage de a, parce que $u_i - u$ est continue. Mais tout voisinage de a contient un élément x_j pour lequel

$$|u_i(x_j) - u(x_j)| > \epsilon. \tag{14.1110}$$

Contradiction. □

[156] Notez l'inégalité stricte, obetenue en considérant 2ϵ plus haut.

14.36.3 Série de fonctions

Les séries de fonctions sont des cas particuliers de suites.

DEFooYEIUooCAgrxI

Définition 14.404.
Si (f_n) est une suite de fonctions, nous définissons la somme des f_n de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n. \tag{14.1111}$$

Le membre de droite est une définition de la notation introduite dans le membre de gauche.

Avant de vous lancer, relisez une bonne fois les définitions de convergence absolue (définition 12.130) et de convergence uniforme (équation 12.362).

LEMooJDYSooRnurKb

Lemme 14.405.
Soit un ensemble dénombrable I. Soient des fonctions $(u_i : \Omega \to \mathbb{C})_{i\in I}$. Si il existe des réels positifs $(a_i)_{i\in I}$ telle que

(1) pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $i \in I$ nous avons $|u_i(z)| \leqslant a_i$ (c'est-à-dire $a_i \geqslant \|u_i\|_\infty$),

(2) la somme $\sum_{i\in I} a_i$ converge,

alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

(1) converge normalement[157]*,*

(2) converge uniformément.

Démonstration. Le premier point découle du lemme de comparaison 12.179. Le second point est alors le lemme 12.164. □

ThoSerCritAbel

Théorème 14.406.
Soit $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, une série de fonctions complexes où $g_k(x) = \varphi_k(x)\psi_k(x)$. Supposons que

(1) $\varphi_k : A \to \mathbb{C}$ et $|\sum_{k=1}^{K} \varphi_k(x)| \leqslant M$ où M est indépendant de x et K,

(2) $\psi_k : A \to \mathbb{R}$ avec $\psi_k(x) \geqslant 0$ et pour tout x dans A, $\psi_{k+1}(x) \leqslant \psi_k(x)$, et enfin supposons que $\psi_k(x)$ converge uniformément vers 0.

Alors $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ est uniformément convergente.

ThoAbelSeriePuiss

Théorème 14.407.
Soit une série de puissances réelle dont le disque de convergence est $B(x_0, R)$. Si la série converge en $x = x_0 + R$, alors elle converge uniformément sur $[x_0 - R - \epsilon, x_0 + R]$ ($\epsilon > 0$) vers une fonction continue.

PropOMBbwst

Proposition 14.408.
Soient E et F, deux espaces vectoriels normés, Ω une partie ouverte de E et une suite de fonctions continues $u_n : \Omega \to F$ convergeant normalement sur Ω, c'est-à-dire que $\sum_n \|u_n\|_\infty$ converge, la norme $\|.\|_\infty$ devant être comprise comme la norme supremum sur Ω. Alors la fonction $u = \sum_n u_n$ est continue sur Ω.

Démonstration. Soit $x, x' \in \Omega$ en supposant que $\|x - x'\|$ est petit. Soit encore $\epsilon > 0$. Nous allons montrer la continuité en x. Pour cela nous savons que pour tout N l'inégalité suivante est correcte :

$$\|u(x) - u(x')\| \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{N} u_n(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x') \right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x')\|. \tag{14.1112}$$

Les deux derniers termes sont majorés par $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty$ qui, par hypothèse, peut être rendu aussi petit que souhaité en choisissant N assez grand. Nous choisissons donc un N tel que ces deux termes soient plus petits que ϵ. Ce N étant fixé, la fonction $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est continue et nous pouvons choisir x' assez proche de x pour que le premier terme soit majoré par ϵ. □

ThoSerUnifCont

Théorème 14.409 (Série uniforme de fonctions continues[1])**.**
Soit un espace topologique X ainsi qu'un espace vectoriel normé V. Soient des fonctions continues $f_n : X \to V$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément[158]*, alors la fonction somme est séquentiellement continue.*
Si X est métrisable, alors la somme est continue.

[157] Définition 12.131.
[158] Définition 12.132.

Démonstration. Nous notons f la somme (qui existe par hypothèse) et par (s_N) la suite des sommes partielles. En tant que somme finie de fonctions continues, chacune des fonctions s_N est continue. Ce que dit la définition 12.132, c'est que la convergence des sommes partielles est uniforme :

$$s_N \xrightarrow{unif} f. \tag{14.1113}$$

La proposition 14.397 dit alors que f est séquentiellement continue.

Nous en déduisons la continuité de f dans le cas d'un espace métrisable avec la proposition 9.173. □

Le corolaire suivant permet de considérer des séries de fonctions indexées par exemple par $\mathbb{Z}$ plutôt que par $\mathbb{N}$.

CORooEWOBooShCysg

Corolaire 14.410.
Une famille dénombrable de fonctions continues convergeant normalement converge vers une fonction continue.

Démonstration. Soit I dénombrable. Considérons une famille de fonctions continues $(f_n)_{n\in I}$ telles que la famille $(\|f_i\|_\infty)_{i\in I}$ soit sommable. Le proposition 12.158 nous permet d'utiliser une bijection entre I et $\mathbb{N}$. La proposition 14.408 s'applique alors. □

ThoCritWeierstrass

Théorème 14.411 (Critère de Weierstrass)**.**
Soit une suite de fonctions $f_k\colon A \to \mathbb{C}$ telles que $|f_k(x)| \leqslant M_k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absolument et uniformément.

Démonstration. La convergence normale est facile : l'hypothèse dit que $\|f_k\|_\infty \leqslant M_k$, et donc que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_k M_k < \infty. \tag{14.1114}$$

La convergence uniforme est à peine plus subtile. Nous nommons F la fonction somme. Pour tout x et pour tout N, nous avons

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - F(x) \right\| = \| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \| \tag{14.1115a}$$

$$\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \|f_k(x)\| \tag{14.1115b}$$

$$\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_\infty. \tag{14.1115c}$$

La convergence normale étant assurée, la série $\sum_{n_1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ est finie, ce qui implique que la queue de somme $\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ tend vers zéro lorsque $N \to \infty$. Pour tout ϵ, il existe donc un N (non dépendant de x) tel que

$$\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - F(x) \| \leqslant \epsilon. \tag{14.1116}$$

En prenant le supremum sur $x \in A$ nous trouvons la convergence uniforme. □

Remarque 14.412.
Il n'y a pas de critère correspondant pour les suites. Il n'est pas vrai que si $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|$ existe, alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, comme le montre l'exemple

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \text{ et } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \text{ et } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.1117}$$

14.37 Permuter limite et dérivée

Une version avec intégrales de la démonstration qui suit est dans 16.327. Le même pour les dérivées partielles sera le théorème 14.416.

THOooXZQCooSRteSr

Théorème 14.413 ([388, 426, 1], thème 62)**.**
Soient une suite de fonctions $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

(1) f_i est de classe C^1 pour tout i,

(2) $f_i \to f$ simplement,

(3) $f_i' \to g$ uniformément sur tout compact.

Alors

ITEMooYSWDooFFeQCd

(1) $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

ITEMooFAWUooVQJPZh

(2) $f' = g$,

(3) f est de classe C^1,

Démonstration. Un point à la fois.

(1) **Pour (1)** Soit un compact $K \subset \mathbb{R}$. Dans cette partie, toutes les fonctions en jeu sont restreintes à K. En particulier, lorsque nous parlerons du module de continuité[159] ω_g pour g ou ω_i pour f_i', nous parlerons en réalité des fonctions $g|_K$ et $f_i'|_K$.

Ceci dit, nous allons montrer que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme[160].

Soit $\epsilon > 0$. On note ω_i le module de continuité de f_i'. Soient $y \in K$, $n \in \mathbb{N}$ et posons $\alpha_n = \frac{y-x}{n+1}$. Pour tout $i \geqslant 0$, nous avons la somme télescopique

$$f_i(y) = f_i(x) + \sum_{k=0}^{n} \Big[f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) \Big]. \tag{14.1118}$$

Par le théorème des accroissements finis 14.217, il existe pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ un réel $u_{n,i,k} \in [k\alpha_n, (k+1)\alpha_n]$ tel que

$$f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) = |\alpha_n| f_i'(x + u_{n,i,k}), \tag{14.1119}$$

de sorte que

$$f_i(y) = f_i(x) + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} f_i'(x + u_{n,i,k}). \tag{14.1120}$$

Et pour tout $i, j \geqslant 0$, on obtient

SUBEQSooUYFTooWPVfWt

$$\begin{aligned}
|f_i(y) - f_j(y)| &\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \big| && \text{(14.1121a)} \\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| && \text{(14.1121b)} \\
&\quad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} |f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k})| \\
&\quad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,j,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \big| \\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| && \text{EQooYMHKooDEYPIf (14.1121c)} \\
&\quad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} |f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k})| \\
&\quad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \|f_i' - f_j'\| \\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \omega_i(|\alpha_n|) + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \|f_i' - f_j'\| && \text{EQooGHDOooMMNXdj (14.1121d)} \\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |x - y| \left(\omega_i(|\alpha_n|) + \|f_i' - f_j'\|_K \right) && \text{EQooZCFIooNDciBX (14.1121e)} \\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M \Big(\omega_i\big(\frac{M}{n+1}\big) + \|f_i' - f_j'\|_K \Big) && \text{SUBEQooISWEooBfnJVN (14.1121f)}
\end{aligned}$$

Justifications :

[159] Définition 12.375.

[160] Et si vous avez bien suivi l'avertissement, c'est bien de la norme uniforme sur K que nous parlons.

- Pour (14.1121c) La norme supremum est forcément plus grande que la valeur en un point.
- Pour (14.1121d) Remarquer que $\|x+u_{n,i,k}-(x+u_{n,j,k})\| = \|u_{n,i,k}-u_{n,j,k}\| \leqslant |\alpha_n|$. Cela est donc une bonne occasion de prendre la définition (12.1157) du module de continuité :
$$|f_i'(x+u_{n,i,k})-f_i'(x+u_{n,j,k})| \leqslant \omega_i(\alpha_n). \tag{14.1122}$$
- Pour (14.1121e), il y a $n+1$ termes dans les sommes et $\alpha_n = (y-x)/(n+1)$.
- Pour (14.1121f), nous travaillons uniquement sur le compact K. En particulier $x,y \in K$ et il existe un nombre M ne dépendant que de K tel que $|y-x|<M$. De plus ω_i est décroissante. Donc en remplaçant $|y-x|$ par M nous majorons.

Recopions notre dernière inéquation :
$$|f_i(y)-f_j(y)| \leqslant |f_i(x)-f_j(x)| + M\Big(\omega_i\big(\frac{M}{n+1}\big) + \|f_i'-f_j'\|_K\Big) \tag{14.1123}$$
Vu que f_i est de classe C^1, la fonction f_i' est continue. Et vu que nous travaillons sur le compact K, elle est même uniformément continue (proposition 14.80). Le lemme 12.377 dit qu'une fonction uniformément continue a un module de continuité continu en zéro : $\lim_{\delta\to 0}\omega_i(\delta)=0$. Nous pouvons donc prendre la limite $n\to 0$ pour nous supprimer le module de continuité :
$$|f_i(y)-f_j(y)| \leqslant |f_i(x)-f_j(x)| + M\|f_i'-f_j'\|_K. \tag{14.1124}$$
Nous prenons maintenant le supremum par rapport à y :
$$\|f_i-f_j\|_K \leqslant |f_i(x)-f_j(x)| + M\|f_i'+f_j'\|_K. \tag{14.1125}$$
Par hypothèse nous avons la convergence simple $f_i\to f$, c'est-à-dire la convergence $f_i(x)\xrightarrow{\mathbb{R}} f_i(x)$ pour tout x. Pour le x que nous nous sommes fixés, la suite $i\mapsto f_i(x)$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Soit $\epsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tels que si $i,j>N$ nous avons $|f_i(x)-f_j(x)|<\epsilon$. De même la convergence uniforme $f_i'\xrightarrow{\|.\|_K} g$ implique que f_k' est également de Cauchy pour la norme uniforme. Donc pour un $i,j>N$ (éventuellement un autre N, mais on prend le maximum entre les deux), nous avons $\|f_i'-f_j'\|<\epsilon$.

Donc si $i,j>N$ nous avons
$$\|f_i-f_j\|_K \leqslant \epsilon + M\epsilon = (M+1)\epsilon. \tag{14.1126}$$
Nous avons donc prouvé que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_K$. Cela implique que (f_i) a une limite uniforme sur K. Vu que nous avons déjà $f_i\to f$, nous en déduisons que sur K, cette limite est uniforme :
$$f_i \xrightarrow{\|.\|_K} f. \tag{14.1127}$$
Voilà qui prouve la convergence uniforme sur tout compact.

(2) **Pour (2)** Nous ne savons encore rien de la fonction limite f. Nous montrons qu'elle est dérivable et que $f'=g$.

Soient $y\in\mathbb{R}$ et un voisinage compact $K=\overline{B(y,\delta)}$ de y avec $\delta>0$. Pour tout $i>0$ nous avons :
$$\Big|\frac{f(y+\delta)-f(y)}{\delta}-g(y)\Big| \tag{14.1128a}$$
$$\leqslant \frac{|f(y)-f_i(y)|}{\delta} + \frac{|f(y+\delta)-f_i(y+\delta)|}{\delta} + \Big|\frac{f_i(y+\delta)-f_i(y)}{\delta}-g(y)\Big| \tag{14.1128b}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i-f\|_K + \Big|\frac{f_i(y+\delta)-f_i(y)}{\delta}-g(y)\Big| \tag{14.1128c}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i-f\|_K + |f_i'(u)-g(y)| \tag{14.1128d}$$
SUBEQooUKMFooGybSKz
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i-f\|_K + |f_i'(u)-f_i'(y)| + |f_i'(y)-g(y)| \tag{14.1128e}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i-f\|_K + |f_i'(u)-f_i'(y)| + \|f_i'-g\|_K \tag{14.1128f}$$
SUBEQooWHLZooCGTjcH
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i-f\|_K + \omega_i(|u-y|) + \|f_i'-g\|_K \tag{14.1128g}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i-f\|_K + \|f_i'-g\|_K + \omega_i(2\delta) \tag{14.1128h}$$
SUBEQooVRWIooCwEWPE
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i-f\|_K + \|f_i'-g\|_K + \omega_g(2\delta) \tag{14.1128i}$$
SUBEQooQNMMooRsAjvb

Justifications :

- Pour 14.1128d. Nous avons utilisé le théorème des accroissements finis 14.217, qui assure l'existence de $u \in B(y,\delta)$ tel que
$$\frac{f_i(y+\delta)-f_i(y)}{\delta} = f_i'(u). \tag{14.1129}$$
- Pour 14.1128f. Nous faisons un supremum sur le $y \in K$ dans le dernier terme.
- Pour 14.1128h. Nous majorons $|u-y|$ par le diamètre 2δ du compact $K = \overline{B(y,\delta)}$.
- Pour 14.1128i. Le lemme 12.378 et le fait que $f_i' \xrightarrow{\|.\|_K} g$.

Recopions la dernière inégalité :

$$\Big|\frac{f(y+\delta)-f(y)}{\delta} - g(y)\Big| \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \|f_i' - g\|_K + \omega_g(2\delta). \tag{14.1130}$$

Nous prenons la limite $i \to \infty$. Par le point (1) nous savons que $\|f_i - f\|_K \to 0$. Par hypothèse nous savons aussi que $\|f_i' - g\|_K \to 0$. Nous restons donc avec

$$\Big|\frac{f(y+\delta)-f(y)}{\delta} - g(y)\Big| \leqslant \omega_g(2\delta). \tag{14.1131}$$

Or, par uniforme continuité de g, nous avons $\lim_{\delta\to 0}\omega_g(\delta) = 0$, donc la limite dans le membre de gauche se passe bien et

$$\lim_{\delta\to\delta}\frac{f(y+\delta)-f(y)}{\delta} = g(y), \tag{14.1132}$$

ce qui signifie que f est dérivable en y et que la dérivée est $g(y)$.

□

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 14.414
Aussi incroyable que cela puisse paraitre, je n'ai pas trouvé d'énoncés du théorème 14.416. Donc soyez prudente. C'est donc une adaptation personnelle du cas sur $\mathbb{R}$. Écrivez-moi si vous avez un problème ou un doute.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 14.415
De plus, l'énoncé de 14.416 demande la convergence uniforme des dérivées directionnelles dans toutes les directions. Je ne serais pas étonné que la convergence uniforme seulement des dérivées partielles dans les directions « de base » suffise.

ThoSerUnifDerr

Théorème 14.416 ([388, 426, 1], thème 62)**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient un ouvert U de V et des fonctions $f_k : U \to W$, une autre fonction $f : U \to W$ ainsi que, pour toute direction[161] *$\alpha \in V$, des fonctions $g_\alpha : U \to W$. Nous supposons que*

(1) Les f_k sont de classe C^1.

(2) $f_k \to f$ simplement.

(3) $\partial_\alpha f_k \to g_\alpha$ uniformément sur tout compact.

Alors

ITEMooQOSUooQGSUXC

(1) Nous avons la convergence $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

ITEMooGFPLooGYEvkh

(2) Pour toute direction α, nous avons $\partial_\alpha f = g_\alpha$.

(3) La fonction f est de classe C^1 sur U.

Démonstration. En plusieurs parties.

[161] Ici le mot « direction » n'a pas de sens particulier ; c'est juste un élément quelconque. Si nous faisions de la géométrie différentielle hard-core, ce serait un vecteur tangent.

(1) **Uniforme convergence sur les boules fermées** Soit $a \in U$. Nous considérons $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$ (ça existe parce que U est ouvert ; il suffit de prenre r plus petit qu'un qui fait que $B(a,r) \subset U$), et nous posons $K = \overline{B(a,r)}$. Nous allons prouver l'uniforme convergence $f_i \xrightarrow{\|.\|_{\overline{B(a,r)}}} f$, et nous verrons plus tard comment faire pour l'uniforme convergence sur un compact général dans U.

Nous restreignons toutes les fonctions à K. Nous notons $\omega_{\alpha,i}$ le module de continuité[162] de $\partial_\alpha f_i$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous définissons encore

$$\begin{aligned} \alpha_n \colon V &\to V \\ x &\mapsto \frac{a-x}{n+1}. \end{aligned} \tag{14.1133}$$

Soit $x \in \overline{B(a,r)}$. Nous écrivons la somme télescopique

$$f_i(x) = f_i(a) + \sum_{k=0}^{n} \big[f_i\big(a + (k+1)\alpha_n(x)\big) - f_i\big(a + k\alpha_n(x)\big) \big] \tag{14.1134}$$

Notez que les points auxquels sont évalués f_i sont dans $\overline{B(a,r)}$ parce que, si $l \in [0, n+1]$, nous avons

$$\|a + l\alpha_n(x) - a\| = \|l\alpha_n(x)\| = l\frac{\|a-x\|}{n+1} \leqslant \|a-x\| \leqslant r. \tag{14.1135}$$

Ce point est important parce que rien ne nous dit que U est convexe ; pour la suite nous avons besoin que tous les points sur les segments entre a et les différents points que nous allons considérer restent dans $\overline{B(a,r)}$. C'est d'ailleurs pour cette convexité de la boule que nous commençons notre preuve par le cas où K est une boule. Bref.

Le théorème des accroissements finis 14.254 nous assure l'existences d'éléments

$$y_{k,i} \in \big[a + (k+1)\alpha_n(x), a + k\alpha_n(x)\big] \tag{14.1136}$$

tels que

$$f_i\big(a + (k+1)\alpha_n(x)\big) - f_i\big(a + k\alpha_n(x)\big) = (\partial_\beta f)\big(y_{k,i}(x)\big)\alpha_n(x). \tag{14.1137}$$

Notez que les $y_{j,i}(x)$ sont dans $\overline{B(a,r)}$.

Soit $\epsilon > 0$. Nous allons calculer $\|f_i(x) - f_j(x)\|$ en substituant les valeurs de $f_i(x)$ et $f_j(x)$ données par (14.1134). Nous avons :

$$\begin{aligned}
\clubsuit = \|f_i(x) - f_j(x)\| &\leqslant \|f_i(a) - f_j(a)\| + \sum_{k=0}^{n} \|\alpha_n(x)\| \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| && \text{(14.1138a)} \\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| && \text{(14.1138b)} \\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_i)\big(y_{k,j}(x)\big)\| && \text{(14.1138c)} \\
&\quad + \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,j}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| \\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \big\|\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big)\big\| && \text{(14.1138d)} \\
&\quad + \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|\partial_\beta f_i - \partial_\beta f_j\| \\
&\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \big\|\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big)\big\| + \frac{r}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \epsilon && \text{(14.1138e)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (14.1138c). Majoration $\|\alpha_n(x)\| \leqslant \frac{r}{n+1}$. De plus nous considérons des i et j assez grands pour que $\|f_i(a) - f_j(a)\|_K \leqslant \epsilon$. Cela est possible parce que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme sur K.

[162] Définition 12.375.

- Pour (14.1138d). Utilisation du module de continuité, définition 12.375.
- Pour (14.1138e). Nous avons la convergence uniforme $\partial_\beta f_i \xrightarrow{\overline{B(a,r)}} g_\beta$, de sorte que $i \mapsto \partial_\beta f_i$ est une suite de Cauchy. Si i et j sont assez grands, nous pouvons majorer $\|\partial_\beta f_i - \partial_\beta f_j\| \leqslant \epsilon$.

Étudions deux minutes ce qui est dans le module de continuité de (14.1138e). Nous avons $y_{k,i}(x) \in \big[a + (k+1)\alpha_n(x), a + k\alpha_n(x)\big]$, donc la différence $\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|$ se majore par la taille de cet intervalle :

$$\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\| \leqslant \|a - k\alpha_n(x) - \big(a + (k+1)\alpha_n(x)\big)\| = \|\alpha_n(x)\|. \tag{14.1139}$$

Vu que le module de continuité est une fonction croissante,

$$\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big) \leqslant \omega_{\beta,i}\big(\|\alpha_n(x)\|\big) \leqslant \omega_{\beta,i}\left(\frac{\|a-x\|}{n+1}\right) \leqslant \omega_{\beta,i}\left(\frac{r}{n+1}\right). \tag{14.1140}$$

En substituant tout ça dans (14.1138e), nous continuons :

$$\clubsuit \leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \omega_{\beta,i}\big(\frac{r}{n+1}\big) + r\epsilon \leqslant \epsilon + r\omega_{\beta,i}\left(\frac{r}{n+1}\right) + r\epsilon \tag{14.1141}$$

Résumons. Pour tout $x \in \overline{B(a,r)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si i et j sont assez grands, nous avons la majoration

$$\|f_i(x) - f_j(x)\| \leqslant \epsilon + r\omega_{\beta,i}\big(\frac{r}{n+1}\big) + r\epsilon. \tag{14.1142}$$

Nous pouvons prendre la limite $n \to \infty$ de deux côtés. Vu que $\partial_\beta f_i$ est uniformément continue[163], le module de continuité tend vers zéro (lemme 12.377).

Si i et j sont assez grands, nous avons donc

$$\|f_i(x) - f_j(x)\| \leqslant \epsilon(1+r), \tag{14.1143}$$

et donc aussi

$$\|f_i - f_j\|_{\overline{B(a,r)}} \leqslant \|f_i(x) - f_j(x)\| \leqslant \epsilon(1+r). \tag{14.1144}$$

Cela prouve que (f_i) est une suite de Cauchy pour $\|.\|_K$. Donc f_i converge uniformément vers une certaine fonction. Vu qu'elle converge simplement vers f, elle converge uniformément vers f.

Nous avons donc prouvé que

$$f_i \xrightarrow{\|.\|_{\overline{B(a,r)}}} f, \tag{14.1145}$$

c'est-à-dire la convergence uniforme sur toute boule compacte.

(2) **Convergence uniforme sur tout compact** Soient un compact K de U, et $\epsilon > 0$. L'ensemble $\{B(x,r)\}_{x\in K, r>0}$ est un recouvrement de K par des ouverts. On en extrait un sous-recouvrent fini, et on ferme les boules sans changer le fait que ce soit un recouvrement :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(a_i, r_i)}. \tag{14.1146}$$

Vue la convergence uniforme sur toute boule fermée, pour chaque i, il existe N_i tel que $n > N_i$ implique

$$\|f_n - f\|_{\overline{B(a_i,r_i)}} < \epsilon. \tag{14.1147}$$

En prenant $N > \max\{N_i\}$, nous avons

$$\|f_n - f\|_K < \epsilon \tag{14.1148}$$

pour tout $n > N$.

[163] Elle est continue sur un compact, proposition 14.80.

(3) **Pour (2)** Soit $a \in U$ et un voisinage compact $K = \overline{B(a,\delta)}$ de a. Nous considérons une direction u avec $\|u\| = 1$. Nous calculons un peu :

$$\begin{aligned}\heartsuit = \|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| &\leqslant \|\frac{f(a+\delta u)-f_i(a+\delta u)}{\delta}\| \quad (14.1149a)\\ &+ \|\frac{f_i(a+\delta u)-f_i(a)}{\delta} - g_u(a)\| \\ &+ \|\frac{f_i(a)-f(a)}{\delta}\| \\ &\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|\frac{f_i(a+\delta u)-f_i(a)}{\delta} - g_u(a)\| \quad (14.1149b)\end{aligned}$$

Ici, la norme $\|f_i - f\|$ est une norme supremum sur K (vous devriez l'avoir deviné du contexte). C'est le moment d'utiliser le théorème des accroissements finis 14.254 : il existe $y \in [a+\delta u, a]$ tel que

$$\frac{f_i(a+\delta u)-f_i(a)}{\delta} = (\partial_i f_i)(y) \quad (14.1150)$$

Nous continuons :

$$\begin{aligned}\heartsuit &\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|(\partial_u f_i)(y) - g_u(a)\| \quad (14.1151a)\\ &\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|(\partial_u f_i)(y) - (\partial_u f_i)(a)\| + \|(\partial_u f_i)(a) - g_u(a)\| \quad (14.1151b)\end{aligned}$$

SUBEQooCLCQooGcFAZD

Nous introduisons le module de continuité[164] $\omega_{i,u}$ de $(\partial_u f_i)$ pour traiter le premier terme :

$$\|(\partial_u f_i)(y) - (\partial_u f_i)(a)\| \leqslant \omega_{i,u}\big(\|y-a\|\big) \leqslant \omega_{i,u}(\delta). \quad (14.1152)$$

Nous utilisons aussi la convergence uniforme sur tout compact (point (1)) $\partial_u f_i \xrightarrow{\|.\|_K} g_u$ pour majorer le second terme de (14.1151b) par ϵ lorsque i est grand.

Nous continuons. Pour tout i assez grand, nous avons

$$\|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \epsilon + \omega_{i,u}(\delta). \quad (14.1153)$$

Nous prenons la limite $i \to \infty$ en tenant compte du lemme 12.378 : $\lim_{i\to\infty}\omega_{i,u}(\delta) = \omega_g(\delta)$:

$$\|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| \leqslant \epsilon + \omega_g(\delta). \quad (14.1154)$$

Et enfin en prenant la limite $\delta \to 0$ nous trouvons que pour tout ϵ,

$$\lim_{\delta\to 0}\|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| \leqslant \epsilon, \quad (14.1155)$$

et donc nous avons prouvé que

$$\lim_{\delta\to 0}\|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| = 0. \quad (14.1156)$$

Cela prouve que $(\partial_u f)(a)$ existe et vaut $g_u(a)$.

Vu que les g_u sont continues, la fonction f est également de classe C^1 par le théorème 14.325. □

14.38 La fonction puissance

Si x et y sont des réels, définir x^y n'est pas une mince affaire. Pour l'instant nous savons déjà définir x^n lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Voir la définition 3.30 et le thème 52.

Pour la suite nous notons

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = x^\alpha & (14.1157a)\\ g_a(x) = a^x & (14.1157b)\end{cases}$$

pour autant que ces fonctions sont définies[165].

[164] Définition 12.375.

[165] L'objet des pages suivantes est de déterminer pour quelles valeurs de a, α et x nous pouvons trouver des définitions raisonnables pour ces fonctions.

14.38.1 Sur les naturels

DEFooKEBlooZtPkac

Définition 14.417.
La fonction puissance définie sur $\mathbb{N}$ s'étend à $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \tag{14.1158}$$

pour $n \geqslant 0$. Cela donne donne donc x^n pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ a l'exception de $x = 0$ lorsque $n < 0$.

Nous étudions quelques propriétés de cette fonction pour $n > 0$ fixé.

14.418.
La limite

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty \tag{14.1159}$$

demande la topologie sur la droite réelle achevée. C'est le lemme 14.33.

PROPooXQYFooPxoEHE

Proposition 14.419.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; nous posons $f_n(x) = x^n$.
Si n est pair,

$$f_n : [0, \infty[\to [0, \infty[\tag{14.1160}$$

est bijective.
Si n est impair,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{14.1161}$$

est bijective.
Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs morceaux, pas spécialement dans l'ordre auquel on s'attend.

(1) **Continuité**
Soit $x \in \mathbb{R}$. En vertu de 14.54 nous allons prouver que $\lim_{\epsilon \to 0} f_n(x + \epsilon) = f_n(x)$. Pour cela nous utilisons la formule du binôme 3.75 avec $x, h > 0$:

$$f_n(x + h) = (x + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \tag{14.1162}$$

Nous fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Calcul :

$$|f_n(x_0 + h) - f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k| \tag{14.1163a}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^k \tag{14.1163b}$$

$$= h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^{k-1} \tag{14.1163c}$$

$$\leqslant h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k}. \tag{14.1163d}$$

Justifications :

- Le terme $k = 0$ est égal à $x^n = f_n(x)$ parce que $\binom{n}{0} = 1$.
- Dans la somme nous avons majoré $|h|$ par 1, opération justifiée par le fait que nous ayons dans l'idée de faire $h \to 0$.

Nous avons donc

$$\lim_{h \to 0} |f_n(x_0 + h) - f_n(x)| \leqslant \lim_{h \to 0} h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} = 0. \tag{14.1164}$$

D'où la continuité de f_n en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) **Pour n pair ou impair, bijection sur les positifs** Ceci sera déjà le résultat complet pour les n pairs, et a moitié du résultat pour les n impairs.

(2a) **Stricte croissance** Soit $n \neq 0$ dans $\mathbb{N}$. Nous commençons par prouver que f_n est strictement croissante sur $[0,\infty[$. Nous repartons de la formule du binôme, mais cette fois, nous séparons les termes $k=0$ et $k=n$ des autres (si $n=1$, il y a un peu de réécriture) en tenant compte de $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$:

$$f_n(x+h)=x^n+h^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k>x^n=f_n(x). \tag{14.1165}$$

Vous noterez que l'inégalité est stricte même si $n=1$.

Vu que nous avons stricte monotonie, le théorème 14.52(2) nous dit que

$$f_n\colon [0,\infty[\to f_n\big([0,\infty[\big) \tag{14.1166}$$

est une bijection.

(2b) **Bijection**

Nous prouvons que $f_n\big([0,\infty[\big)=[0,\infty[$. Si $x>0$ alors $f_n(x)>0$, cela prouve une inclusion.

Pour l'autre inclusion nous savons que $\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\infty$ par le lemme 14.33. Si $y\in[0,\infty[$, alors il existe x_0 tel que $f_n(x_0)>y$. Étant donné que $f_n(0)=0$ et que nous avons déjà prouvé que f_n était continue (proposition 14.419), le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous indique l'existence de $x_1\in[0,x_0[$ tel que $f_n(x_1)=y$.

Nous avons prouvé que pour tout n, la fonction

$$f_n\colon [0,\infty[\to[0,\infty[\tag{14.1167}$$

EQooYWHCooJWMTUI

est une bijection.

(3) **Pour n impair**

Nous montrons à présent que si n est impair, alors

$$f_n\colon]-\infty,0]\to]-\infty,0] \tag{14.1168}$$

EQooTSLJooMAAUXH

est une bijection.

Tout se base sur le fait que si $x>0$ alors $f_n(-x)=-f_n(x)$. Le fait que (14.1167) soit injective et surjective montre alors tout de suite le fait que (14.1168) soit également injective et surjective.

□

Vous noterez que la continuité de f_n démontrée dans la proposition 14.419 est indépendant de la proposition 14.63 qui sera invoquée plus tard pour définir a^x lorsque $a>0$ dans $\mathbb{R}$.

14.38.2 Sur les rationnels, racines

L'existence, pour tout réel $a\geqslant 0$, d'un réel r tel que $r^2=a$ est déjà faite en la proposition 4.99.

DEFooJWQLooWkOBxQ

Définition 14.420 (Exposant rationnels)**.**
La proposition 14.419 nous dit entre autres que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,\infty[&\to[0,\infty[\\ x&\mapsto x^n \end{aligned} \tag{14.1169}$$

est bijective. Nous définissions alors, pour $a\in[0,\infty[$,

$$a^{1/n}=f_n^{-1}(a). \tag{14.1170}$$

Autrement dit, le nombre $a^{1/n}$ est l'unique solution positive de

$$x^n=a. \tag{14.1171}$$

NORMooDUNZooUNdUKg

14.421.
Nous ne définissons pas $a^{1/n}$ pour $a<0$, du moins pas encore. Vu que f_3 est bijective sur $\mathbb{R}$, il serait tentant de définir $(-1)^{1/3}=f_3^{-1}(-1)=-1$.

Cela causera un certain nombre de problèmes plus tard vu que nous aurons envie de deux choses en même temps :

- d'une part $\ln(-1) = i\pi$,
- d'autre part, $a^x = e^{x\ln(a)}$.

De cette façon, nous devrions avoir

$$(-1)^{1/3} = e^{i\pi/3}, \tag{14.1172}$$

qui est un nombre complexe non réel. Voici un exemple de ce que ça donne avec Sage :

```
sage: a=(-1)**(1/3)
sage: a.real_part()
1/2
sage: a.imag_part()
1/2*sqrt(3)
```

tex/sage/sageSnip019.sage

DEFooPOELooPouwtD

Définition 14.422 (Racine)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons $\sqrt[n]{x} = f_n^{-1}(x)$. Lorsque n est pair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, et lorsque n est impair, elle est définie sur tout $\mathbb{R}$.

NORMooYPRNooWCjEgR

14.423.
Notons que les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \mapsto x^{1/3}$ ne sont pas les mêmes : la première est définie sur tout $\mathbb{R}$ et donne des valeurs réelles tandis que la seconde n'est (pour l'instant) définie que sur les positifs, et donnera (quand on l'aura définie par l'exponentielle) des nombres complexes sur les négatifs.

En suivant cette convention, c'est-à-dire en réservant la notation $\sqrt{\ }$ pour l'inverse de f_2, nous ne devrions pas écrire des choses comme « $\sqrt{-1} = i$ », mais plutôt « $(-1)^{1/2} = i$ ». En effet, $\sqrt{-1}$ n'est pas défini et ne sera jamais défini alors que $(-1)^{1/2}$ n'est pas encore défini, mais sera défini par

$$(-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(-1)} = e^{i\pi/2} = i. \tag{14.1173}$$

En résumé, nous avons les fonctions suivantes :

(1) $\sqrt[n]{\ }: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n est impair,

(2) $\sqrt[n]{\ }: [0, \infty[\to [0, \infty[$ si n est pair,

(3) $x^{1/n}: [0, \infty[\to [0, \infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cependant nous n'hésiterons pas à utiliser la notation $\sqrt{x}$ pour $x^{1/2}$ même lorsque x est négatif, parce c'est une notation très pratique. Il faut garder en tête que cette façon de faire est incohérente parce qu'elle inciterait à penser que $\sqrt[3]{-1} = e^{i\pi/3}$ au lieu de $\sqrt[3]{-1} = -1$.

Pour toute la suite de cette section, nous allons considérer a^x uniquement pour $a > 0$.

DEFooHXUFooOJTVXA

Définition 14.424.
Pour $m, n \in \mathbb{N}$ nous définissons ($a^{1/n}$ est la définition 14.420)

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}, \tag{14.1174}$$

EQooZFOAooTsMbub

ce qui définit la fonction puissance sur $\mathbb{Q}^+$. Enfin nous posons

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \tag{14.1175}$$

DEFooTUCVooXikxRb

lorsque $q \in \mathbb{Q}^+$.

Et avec tout ça, lorsque $a > 0$ nous avons défini a^q pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Nous allons souvent noter la définition (14.1174) sous la forme

$$f_{m/n}(x)^n = x^m. \tag{14.1176}$$

EQooZIKKooVfikZo

LEMooOFPMooIEmSNA

Lemme 14.425 ([1])**.**
Si $a, b > 0$, nous avons

ITEMooEFUAooYBeJza

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$ nous avons $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.

ITEMooHGPPooDBzWKx

(2) *Pour $n, m \in \mathbb{N}$ nous avons $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.*

ITEMooUYTLooHzXwtf

(3) *Pour $q \in \mathbb{N}$ nous avons $(ab)^q = a^q b^q$.*

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Utilisant la formule pour les exposants entiers, nous avons

$$\left[(a^{1/n})(b^{1/n})\right]^n = (a^{1/n})^n(b^{1/n})^n = ab. \tag{14.1177}$$

Donc le nombre $x = a^{1/n}b^{1/n}$ vérifie $x^n = ab$. Autrement dit $x = f_n^{-1}(ab) = (ab)^{1/n}$

(2) **Pour (2)**

(3) **Pour (3)**

□

LEMooIDLJooZALNaD

Lemme 14.426 ([1]).
Pour $a > 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p. \tag{14.1178}$$

Démonstration. Nous divisons la preuve en fonction de la positivité du numérateur et du dénominateur.

(1) **Numérateur et dénominateurs positifs**

Nous commençons avec $p, q \in \mathbb{N}$. La première égalité est la définition 14.420. Pour la seconde, la définition de $(a^p)^{1/q}$ est d'être le $x > 0$ tel que

$$x^q = a^p. \tag{14.1179}$$

La définition de $a^{1/q}$ est d'être le $y > 0$ tel que

$$y^q = a. \tag{14.1180}$$

Ce y vérifie donc aussi $y^{pq} = a^p$ et donc $(y^p)^q = a^p$. Autrement dit, $y^p = x$, c'est-à-dire exactement

$$(a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}. \tag{14.1181}$$

Le lemme est prouvé dans le cas où $p, q \in \mathbb{N}$.

(2) **Numérateur et dénominateur négatifs**

Si p et q sont tous les deux négatifs, nous remarquons que $p/q = (-p)/(-q)$ et nous sommes dans le même cas qu'avant.

(3) **Numérateur négatif, dénominateur positif**

Pour simplifier les notations nous supposons toujours $p, q \in \mathbb{N}$ mais nous considérons $a^{(-p)/q}$. Nous avons d'une part :

$$a^{(-p)/q} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p}. \tag{14.1182}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé au dénominateur le résultat dans le cas positif.

Le lemme 9.168(3) nous dit que $(1/a^p) = (1/a)^p$. Nous faisons le calcul suivant :

$$(a^{-p})^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^p\right)^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/q}\right)^p = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p} \tag{14.1183}$$

où nous avons utilisé le résultat avec $1/a$ en guise de a.

(4) **Numérateur positif, dénominateur négatif**

Nous traitons maintenant $a^{p/(-q)}$. Nous avons d'une part

$$a^{p/(-q)} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^p)^{1/q}} = (a^p)^{-(1/q)} = (a^p)^{1/(-q)}. \tag{14.1184}$$

Et d'autre part :

$$a^{p/(-q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \left(a^{-(1/q)}\right)^p = (a^{1/(-q)})^p. \tag{14.1185}$$

□

Le lemme suivant montre que la définition sur $\mathbb{Q}^-$ est cohérente avec celle sur $\mathbb{Q}^+$, au sens où finalement nous retrouvons que $a^{m/n}$ vérifie $x^n = a^m$ quel que soient les signes de m et n.

Lemme 14.427 ([1]).
Le nombre $y = a^{-m/n}$ vérifie l'équation $y^{-n} = a^m$

Démonstration. Nous posons $x = a^{m/n}$, c'est-à-dire $x^n = a^m$. Nous avons, par définition $y = a^{-m/n} = \frac{1}{x}$. Alors

$$y^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = x^n = a^m, \tag{14.1186}$$

donc c'est bon. □

LEMooJYGUooHhLASp

Lemme 14.428 ([1]).
Pour $a > 0$ et $q, q' \in \mathbb{Q}$ nous avons

$$a^q a^{q'} = a^{q+q'}. \tag{14.1187}$$

Démonstration. Nous mettons q et q' au même dénominateur. Soient $q = s/c$ et $q' = r/c$ avec $s, r \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$. En utilisant les égalités du lemme 14.426 nous trouvons

$$a^{s/c}a^{r/c} = (a^{1/c})^s(a^{1/c})^r = (a^{1/c})^{s+r} = a^{(s+r)/c} = a^{q+q'}. \tag{14.1188}$$

□

LEMooXJXUooLoiTMo

Lemme 14.429 ([1]).
La fonction puissance prend les valeurs suivantes.

(1) Si $a = 1$ alors $a^q = 1$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

ITEMooKZCGooKskUQx

(2) Si $a > 1$ alors

- *$a^q > 1$ si $q > 0$*
- *$a^q < 1$ si $q < 0$*
- *$a^0 = 1$.*

(3) Si $a < 1$ alors

- *$a^q < 1$ si $q > 0$*
- *$a^q > 1$ si $q < 0$*
- *$a^0 = 1$.*

Démonstration. Si $a = 1$ alors $a^k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{n/m}$ est solution de $x^m = a^n = 1$, donc $x = 1$. En ce qui concerne les puissances négatives, $1/1 = 1$.

Si $a > 1$ alors $a^k > 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus pour $q > 0$ nous avons $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $a^{m/n}$ est solution de $x^m = a^n > 1$. Or pour $x \leqslant 1$ nous avons $x^m \leqslant 1$, donc la solution à $x^m = a^n$ vérifie forcément $x > 1$.

Toujours avec $a > 1$, si $q < 0$ nous posons $q = -q'$ avec $q' > 0$. Alors

$$a^q = q^{-q'} = \frac{1}{a^{q'}}. \tag{14.1189}$$

Mais $a^{q'} > 1$, donc l'inverse est inférieur à 1.

En ce qui concerne les cas $a < 1$, ils sont obtenus en posant $b = 1/a$ et en calculant

$$a^q = \left(\frac{1}{b}\right)^q = \frac{1}{b^q} = b^{-q}. \tag{14.1190}$$

□

PROPooVXKBooQPPjMn

Proposition 14.430 ([1]).
Soit $a > 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty. \tag{14.1191}$$

Démonstration. Soient $a > 1$ et $M > 0$. Nous devons prouver qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n > M$. Nous posons $a = 1 + h$. Alors en utilisant la formule du binôme,

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k}. \tag{14.1192}$$

Tous les termes de la somme sont strictement positifs. Prenons le terme $k = n - 1$. Il vaut

$$\binom{n}{n-1} h = nh. \tag{14.1193}$$

Donc $a^n \geqslant nh$, donc oui, cela peut être rendu arbitrairement grand avec n sans toucher à a parce que $\mathbb{N}$ est archimédien par la proposition 1.174. □

PROPooGCBZooTcyGtO

Proposition 14.431 ([1]).
Pour $a > 0$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q. \end{aligned} \tag{14.1194}$$

(1) Si $a \in]0,1[$ alors g_a est décroissante et

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = 0, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = \infty. \tag{14.1195a}$$

ITEMooGOEVooKVoVpZ

(2) Si $a > 1$ alors g_a est croissante et

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = \infty, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = 0. \tag{14.1196a}$$

Démonstration. Nous prouvons le cas $a > 1$. L'autre cas s'en déduit en posant $b = 1/a$. Pour la croissance, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. En utilisant le lemme 14.428, nous avons

$$a^{q+r} = a^q a^r > a^q \tag{14.1197}$$

parce que $a^r > 1$ par le lemme 14.429.

En ce qui concerne la limite $q \to \infty$, la fonction g_a est croissante et non bornée par la proposition 14.430. Donc sa limite est ∞.

Pour la limite $q \to -\infty$, nous avons

$$\lim_{q\to-\infty} a^q = \lim_{q\to\infty} a^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{a^q} = 0. \tag{14.1198}$$

□

PROPooIIDGooTRtlUD

Proposition 14.432 ([1]).
Soit $a > 0$. Nous avons

$$\lim_{q\to 0} a^q = 1. \tag{14.1199}$$

Notons que cette limite est une limite dans $\mathbb{Q}$ parce que nous n'avons même pas encore défini a^x lorsque x est irrationnel.

Démonstration. Nous notons, comme à l'accoutumée, $g_a(x) = a^x$. Nous allons prouver que pour toute suite (x_k) dans $\mathbb{Q}$ telle que $x_k \to 0$, nous avons $a^{x_k} \to 1$.

(1) **Suite positive** Soit une suite de rationnels $x_k \to 0$ avec $x_k > 0$. En définissant y_k par $x_k = 1/y_k$ nous savons que a^{1/y_k} est la solution de $x^{y_k} = a$.

Nous posons $t_k = a^{x_k}$ et notre but est de prouver que $t_k \to 1$. Pour tout k nous avons la relation

$$t_k^{y_k} = a. \tag{14.1200}$$

Soit $s > 1$. Il existe un $M > 0$ tel que $y_k > M$ implique $s^{y_k} > a$ (proposition 14.430). Donc dès que $y_k > M$ nous avons $t_k < s$.

De la même manière, si $r < 1$, il existe un $R > 0$ tel que $y_k > R$ implique $r^{y_k} < a$. Donc dès que $y_k > R$ nous avons $t_k > r$.

Soit donc un voisinage $]r, s[$ de 1 (avec $r < 1$ et $s > 1$). Nous avons les nombres M et R correspondant et nous posons $L = \max\{M, R\}$. Soit K tel que $k > K$ implique $y_k > L$. Alors pour $k > K$ nous avons aussi $t_k < s$ et $t_k > r$, c'est-à-dire $t_k \in]r, s[$.

Cela prouve que $t_k \to 1$.

(2) **Suite négative** Supposons maintenant que (x_k) est une suite de rationnels vérifiant $x_k \to 0$ avec $x_k < 0$. En posant $z_k = -x_k$, la suite (z_k) est dans le cas précédent et nous avons

$$a^{x_k} = a^{-z_k} = \frac{1}{a^{z_k}} \to 1. \tag{14.1201}$$

(3) **Suite générale** Si $x_k \xrightarrow{\mathbb{Q}} 0$ avec $x_k \neq 0$. Nous considérons la suite $t_k = a^{x_k}$. Toute sous-suite contient une sous-suite avec $x_k > 0$ ou une sous-suite avec $x_k < 0$. Dans les deux cas, la sous-sous-suite converge vers 1. Le lemme 9.94 conclut que $t_k \to 1$.

(4) **Conclusion** Pour toute suite $x_k \to 0$ nous avons $g_a(x_k) \to 1$. Par le critère séquentiel de la limite (proposition 9.167) nous avons $\lim_{x\to 0} g_a(x) = 1$.

□

LEMooKDBPooLQwxMD

Lemme 14.433.
Soit $a > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{14.1202}$$

est continue.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{Q}$ et une suite $x_k \to 0$ (toujours dans $\mathbb{Q}$) et utilisons le lemme 14.428 :

$$a^{x+x_k} = a^x a^{x_k}. \tag{14.1203}$$

Cela est, dans $\mathbb{R}$, le produit entre une constante (a^x) et une suite. La limite est donc le produit de cette constante et la limite de la suite (si elle existe). Par la proposition 14.432 nous avons la limite $a^{x_k} \to 1$, et donc

$$\lim_{k\to\infty} a^{x+x_k} = a^x, \tag{14.1204}$$

ce qui prouve la continuité (caractérisation séquentielle, proposition 9.206) de g_a. □

PROPooQRFSooVzYdJM

Proposition 14.434 ([1, 194])**.**
Soit $a > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q \end{aligned} \tag{14.1205}$$

est Cauchy-continue.

Démonstration. En quelque étapes.

(1) **Pour $a > 1$** Avant de nous lancer dans la preuve directe, nous prouvons une petite formule. Soit $\epsilon > 0$. Vu que, par la proposition 14.432, $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| < \epsilon$.

Soient maintenant $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $|p - q| < \delta$. En utilisant de plus la définition (14.1175) et la formule du lemme 14.428,

$$|g_a(q) - g_a(p)| = |g_a(q)| \left|1 - \frac{g_a(p)}{g_a(q)}\right| \tag{14.1206a}$$

$$= |g_a(q)||1 - g_a(p - q)| \tag{14.1206b}$$

$$\leqslant |g_a(q)|\epsilon. \tag{14.1206c}$$

Nous y allons pour la preuve directe. Soit une suite de Cauchy (q_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous devons prouver que la suite $n \mapsto g_a(q_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$.

La suite (q_n) étant de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, elle l'est également dans $\mathbb{R}$, elle est bornée parce que convergente vu que $\mathbb{R}$ est complet[166]. Vu que g_a est croissante[167] et que (q_n) est bornée, il existe M tel que $|g_a(q_n)| \leqslant M$ pour tout n.

Nous considérons δ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| \leqslant \epsilon$, ainsi que N tel que $i, j > N$ implique $|q_i - q_j| \leqslant \delta$ (là nous utilisons le fait que (q_n) est de Cauchy). Pour de tels N, i, j nous avons

$$|g_a(q_i) - g_a(q_j)| \leqslant M\epsilon. \tag{14.1207}$$

Donc la suite $g_a(q_n)$ est de Cauchy.

[166] Théorème 9.360.
[167] Proposition 14.431(2).

(2) **Pour $a = 1$** La fonction g_a est constante.

(3) **Pour $a = 0$** Dans ce cas $a^q = 0$ pour tout q, et l'image de toute suite de Cauchy est de Cauchy.

(4) **Pour $0 < a < 1$** Considérons une suite de Cauchy (q_i) dans $\mathbb{Q}$. Nous posons $b = 1/a$, et nous utilisons la définition 14.424 ainsi que le lemme 14.425 :

$$a^{q_i} = \frac{1}{b^{q_i}} = b^{-q_i}. \tag{14.1208}$$

La suite $(-q_i)$ est de Cauchy et $b > 1$, donc la suite $i \mapsto b^{-q_i}$ est de Cauchy par le point précédent.

□

14.435.
L'ingrédient magique qui fait fonctionner la proposition 14.434 est le fait que $g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y)$ couplé au fait que $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$. C'est cela qui débloque la situation pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ en utilisant le lemme 14.63.

Le chemin suivi par [485] pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ est un peu différent : il définit $a^x = \sup\{a^q \text{ tel que } q < x, q \in \mathbb{Q}\}$. La preuve que cette définition donne $x \mapsto a^x$ continue sur $\mathbb{R}$ repose, elle aussi, essentiellement sur le fait que $\lim_{q\to 0} a^q = 1$.

Il y a donc une certaine justice.

DEFooOJMKooJgcCtq

Proposition-Définition 14.436 (Fonction puissance[1])**.**
Si $a > 0$ la fonction

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned} \tag{14.1209}$$

est Cauchy-continue par la proposition 14.434. Si $x \in \mathbb{R}$ nous définissons

$$a^x = \tilde{g}_a(x) \tag{14.1210}$$

où $\tilde{g}_a$ est l'extension de g_a donnée par le lemme 14.63.

Nous allons la noter g_a également, et écrire a^x la valeur de g_a même lorsque x n'est pas un rationnel.

PROPooVADRooLCLOzP

Proposition 14.437 ([1])**.**
Quelques propriétés de la fonction puissance.

ITEMooQHYRooJIewyp

(1) *Pour $a > 0$, la fonction $g_a\colon x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

ITEMooIZBLooSGtWIp

(2) *Pour $a > 1$, la fonction $g_a\colon x \mapsto a^x$ est croissante.*

ITEMooSCJBooNVJZah

(3) *Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons*

$$a^x a^y = a^{x+y}. \tag{14.1211}$$

EQooEWIHooDBAQGR

En particulier,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{14.1212}$$

Démonstration. La continuité de $x \mapsto a^x$ est par construction. Le point (1) est fait.

Pour le point (2), lorsque $a > 1$, la fonction $f_a\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est croissante (proposition 14.431). Donc par la proposition 14.65, la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Et enfin pour le point (3), il faut faire un peu plus attention. Soient des suites $x_i \to x$ et $y_i \to y$ dans $\mathbb{Q}$. Calculons : SUBEQSooMPNLooPoyjwJ

$$\begin{aligned} a^x a^y &= (\lim_i a^{x_i}) a^y && \text{(14.1213a)} \quad \text{SUBEQooOCIQooZcswMo} \\ &= \lim_i \left(a^{x_i} a^y\right) && \text{(14.1213b)} \quad \text{SUBEQooEKQXooPLqzrG} \\ &= \lim_i \left(\lim_k a^{x_i} a^{y_k}\right) && \text{(14.1213c)} \quad \text{SUBEQooZEXDooBytDvS} \\ &= \lim_i \left(\lim_k a^{x_i + y_k}\right) && \text{(14.1213d)} \quad \text{SUBEQooSYNBooIQZJzJ} \\ &= \lim_i a^{x_i + y} && \text{(14.1213e)} \quad \text{SUBEQooKHKCooGwaPDQ} \\ &= a^{x+y}. && \text{(14.1213f)} \quad \text{SUBEQooMZBFooSqSgKU} \end{aligned}$$

Justifications :

- Pour 14.1213a. Définition de a^x lorsque $x \in \mathbb{R}$.
- Pour 14.1213b. Nous entrons le nombre a^y dans la limite. Entrer un facteur dans une limite convergente dans $\mathbb{R}$ est un acte anodin.
- Pour 14.1213c. Définition de a^y, et renter le nombre réel a^{x_i} dans la limite sur k.
- Pour 14.1213d. Utilisation du lemme 14.428, valable pour $x_i, y_k \in \mathbb{Q}$.
- Pour 14.1213e. Pour i fixé, la suite $k \mapsto x_i + x_k$ est une suite de rationnels qui converge vers le réel $x_i + y$. Par définition 14.436 de la fonction puissance nous avons alors $\lim_k a^{x_i+y_k} = a^{x_i+y}$.
- Pour 14.1213f. La suite de réels $i \mapsto x_i+y$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel $x+y$. Par la continuité de $t \mapsto a^t$ (ça fait partie du lemme 14.63 définissant la fonction puissance sur $\mathbb{R}$) nous avons $\lim_i a^{x_i+y} = a^{x+y}$.

Vous remarquerez que les limites sur k et sur i ne s'enlèvent pas tout à fait avec la même justification. Nous aurions pu invoquer la continuité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto a^t$ pour les deux limites. Mais cette continuité, dans le cas d'une suite purement constituée de rationnels, est la définition de la prolongation vers $\mathbb{R}$. □

LEMooIPLLooCgpCIn

Lemme 14.438.
Soient $a, b > 0$. Si $1 < x < y$ alors

$$a - b < ay - bx. \tag{14.1214}$$

Démonstration. Nous posons $y = x + s$ avec $s > 0$. Alors

$$ay - bx = a(x + s) - bx = (a - b)x + as > (a - b)x > a - b \tag{14.1215}$$

parce que $as > 0$ et $x > 1$. □

PROPooJXHFooCDwxCS

Proposition 14.439 ([1]).
Pour $q > 0$ dans $\mathbb{Q}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_q \colon \mathbb{Q}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^q \end{aligned} \tag{14.1216}$$

est strictement croissante.

Démonstration. Division selon la généralité de q.

(1) **Si q est entier positif** Soit $q = n \in \mathbb{N}$. Si $s > 0$ alors l'inégalité $(x + s)^n > x^n$ découle du binôme de Newton de la proposition 3.75.

(2) **Si q est rationnel** Soient un rationnel $q = m/n$ et un nombre strictement positif s. Nous avons, par la définition 14.420 sous la forme (14.1176) :

$$f_{m/n}(x + s)^n = (x + s)^m > x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{14.1217}$$

Nous avons utilisé la stricte croissance de $x \mapsto x^m$. Cela donne

$$f_{m/n}(x + s)^n > f_{m/n}(x)^n. \tag{14.1218}$$

En utilisant encore la stricte croissance de $x \mapsto x^n$, nous avons le résultat.

□

CORooYWNNooLwKmiD

Corolaire 14.440.
Soient $1 < b < a$ dans $\mathbb{R}$ et des rationnels strictement positifs $p < q$. Alors

$$a^p - b^p < a^q - b^q \tag{14.1219}$$

Démonstration. Nous notons $q = p + r$ avec $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Par la proposition 14.439,

$$a^r > b^r. \tag{14.1220}$$

Cela nous permet d'utilise le lemme 14.438 pour écrire

$$a^p - b^p < a^p a^r - b^p b^r = a^q - b^q. \tag{14.1221}$$

□

PROPooKWRGooMTbRdU

Proposition 14.441 ([1]).
Soient $a, b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha. \tag{14.1222}$$

Démonstration. Nous supposons que c'est bon pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pour les autres, nous donnons plus de détails.

(1) $\mathbb{Q}^+$ Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Si $a^{m/n} = x$ et $b^{m/n} = y$, alors

EQooGNMAooQJMNsL

$$x^n = a^m \tag{14.1223a}$$
$$y^n = b^m \tag{14.1223b}$$

par (14.1176). Nous multiplions (14.1223a) par y^n à gauche et par b^m à droite : $x^n y^n = a^m b^m$. En tenant compte du résultat pour $\mathbb{N}$, nous avons

$$(xy)^n = (ab)^m, \tag{14.1224}$$

ce qui signifie que le nombre xy est $(ab)^{m/n}$.

(2) **Pour $\mathbb{Q}^-$** Soit $q \in \mathbb{Q}^+$, nous avons le calcul

$$a^{-q} b^{-q} = \frac{1}{a^q b^q} = \frac{1}{(ab)^q} = (ab)^{-q}. \tag{14.1225}$$

(3) **Pour $\mathbb{R}$** Soit une suite de rationnels $\alpha_i \to \alpha$. Nous avons

$$a^\alpha b^\alpha = \big(\lim_i a^{\alpha_i}\big)\big(\lim_j b^{\alpha_j}\big) = \lim_i \big(a^{\alpha_i} b^{\alpha_i}\big) = \lim_i (ab)^{\alpha_i} = (ab)^\alpha. \tag{14.1226}$$

Justifications :

- la proposition 11.27 pour le produit des limites,
- le résultat dans $\mathbb{Q}$ que nous venons de prouver,
- la définition de $(ab)^\alpha$ comme limite de $(ab)^{\alpha_i}$.

□

Pour rappel, la proposition suivante, dans le cas de $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est la proposition 14.439.

PROPooUOFKooYyGwIr

Proposition 14.442 ([1]).
Pour $\alpha > 0$, la fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon]0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{14.1227}$$

est strictement croissante.

Démonstration. Nous rappellons que le cas $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est déjà traité par la proposition 14.439. Soient $x \in]0, \infty[$ et $s > 0$. Nous allons montrer que $f_\alpha(x + s) - f_\alpha(x) > 0$. Pour cela nous décomposons en plusieurs cas.

(1) $x > 1$ Par la proposition 4.77, nous considérons une suite strictement croissante de rationnels strictement positifs $\alpha_i \to \alpha$. Pour tout i nous avons $\alpha_i > \alpha_0$.

En utilisant la stricte croissance de f_{α_0} et le lemme 14.429(2), nous avons les inégalités $1 < x^{\alpha_0} < (x + s)^{\alpha_0}$, et en particulier

$$0 < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{14.1228}$$

De plus nous avons $1 < x < x + s$ et $\alpha_0 < \alpha_i$ pour tout i. Donc le corolaire 14.440 s'applique et nous avons, pour tout i :

$$0 < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} < (x + s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}. \tag{14.1229}$$

C'est le moment de passer à la limite $i \to \infty$. La seconde inégalité devient non stricte, mais la première reste :

$$0 < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} \leqslant (x + s)^\alpha - x^\alpha. \tag{14.1230}$$

Nous avons donc bien la stricte croissance de f_α sur $]1, \infty[$.

(2) $\underline{0 < x \leqslant 1}$ Nous choisissons encore $\alpha_i \to \alpha$ strictement croissante dans $\mathbb{Q}$. Pour chaque i, nous avons encore

$$(x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} > 0. \tag{14.1231}$$

Le passage à la limite change l'inégalité stricte en inégalité large, et ne permet donc pas de conclure immédiatement. Nous devons donc ruser. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k(x+s) > 1$ et $kx > 1$ (existence parce que $\mathbb{R}$ est archimédien, proposition 4.59). Nous avons :

$$\big(k(x+s)\big)^{\alpha} - (kx)^{\alpha} > 0 \tag{14.1232}$$

par la partie « $x > 1$ » que nous venons de prouver. Grâce à la proposition 14.441 nous pouvons factoriser k^{α} :

$$0 < \big(k(x+s)\big)^{\alpha} - (kx)^{\alpha} = k^{\alpha}\big((x+s)^{\alpha} - x^{\alpha}\big). \tag{14.1233}$$

Vu que $k^{\alpha} > 0$, cela implique $(x+s)^{\alpha} - x^{\alpha} > 0$, ce qu'il fallait.

Nous avons fini de prouver que la fonction f_{α} était strictement croissante sur $]0, \infty[$. □

LEMooJVXQooDPUuuJ

Lemme 14.443.
Si $p \geqslant 1$ et si $x \in [0,1]$ alors $x^p \leqslant x$.

Démonstration. Vu que $p \geqslant 1$, nous avons $p = 1 + \alpha$ avec $\alpha \geqslant 0$. Nous pouvons donc écrire[168]

$$x^p = x^{1+\alpha} = xx^{\alpha} = xf_{\alpha}(x). \tag{14.1234}$$

Vu que f_{α} est croissante (proposition 14.442), que $f_{\alpha}(0) = 1$ et que $f_{\alpha}(1) = 1$, nous avons $f_{\alpha}(x) \in [0,1]$ dès lors que $x \in [0,1]$. Donc

$$xf_{\alpha}(x) \leqslant x. \tag{14.1235}$$

□

Nous prouvons à présent que f_{α} est localement injective ; nous en avons besoin pour prouver la continuité. Or cette continuité est nécessaire à prouver que f_{α} est localement bijective. Donc nous ne pouvons pas énoncer la bijectivité ici. Ce sera la proposition 14.450.

PROPooHKTKooCUEBjh

Proposition 14.444.
Soient $\alpha \neq 0$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il existe un voisinage V de x sur lequel

$$f_{\alpha} : V \to f_{\alpha}(V) \tag{14.1236}$$

est injective.

Démonstration. Soit $x > 0$; nous considérons un voisinage V de x inclu à $]0, \infty[$. Soit $y \in V$; pour fixer les idées nous supposons $y < x$. Par la stricte croissance de f_{α} sur $]0, \infty[$ (proposition 14.442), nous avons $f_{\alpha}(y) < f_{\alpha}(x)$ et en particulier $f_{\alpha}(x) \neq f_{\alpha}(y)$.

Le cas $x < 0$ se traite de façon analogue, avec la stricte décroissance de f_{α} sur $]-\infty, 0[$. □

Notons que les voisinages sur lesquels f_{α} est injective sont assez grands. Ils peuvent être toute une demi-droite, si l'on veut.

LEMooQTNKooLVEytN

Lemme 14.445.
Soient $\alpha > 0$, une suite de rationnels strictement décroissante $\alpha_i \to \alpha$ ainsi que les fonctions

$$\begin{aligned} f_{\alpha_i} :]1, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{14.1237}$$

La famille $\{f_{\alpha_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est équicontinue[169].

Démonstration. Soient $x > 1$, et $\alpha > 0$. Nous allons montrer que $\{f_{\alpha_i}\}$ est équicontinue en x. Soit s tel que $1 < x < x + s$; le corolaire 14.440 nous enseigne que

$$(x+s)^p - x^p < (x+s)^q - x^q \tag{14.1238}$$

dès que $p < q$. En particulier, f_p étant croissante par la proposition 14.442,

$$0 < (x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{14.1239}$$

[168] En utilisant la proposition 14.437(3).
[169] Définition 9.391.

Soit $\epsilon > 0$ et δ tel que $s < \delta$ implique $|(x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon$. Alors nous avons aussi, pour de tels δ et s :

$$|(x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| < |(x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon. \tag{14.1240}$$

En procédant de même pour $s < 0$, nous trouvons bien que

$$|y^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| \leqslant \epsilon \tag{14.1241}$$

pour tout $y \in B(x, \delta)$.

Cela signifie que $\{f_i\}$ est équicontinue. □

PROPooUQNZooSSHLqr

Proposition 14.446 ([1]).
Soit $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{14.1242}$$

est continue.

Démonstration. Nous allons subdiviser quelque cas.

(1) **Pour $\alpha \in \mathbb{N}$** Nous prouvons que f_n est continue pour tout n par récurrence. D'abord la fonction f_1 est continue parce que c'est l'identité. Pour les autres, il s'agit d'une récurrence en utilisant le théorème 11.86(2).

(2) **Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^+$** Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous avons :

$$f_{m/n}(x)^n = x^m \tag{14.1243a}$$
$$f_{m/n}(x+\epsilon)^n = (x+\epsilon)^m. \tag{14.1243b}$$

SUBEQooGNCSooWAeRcI

L'équation (14.1243b) s'écrit aussi bien sous la forme

$$f_n\big(f_{m/n}(x+\epsilon)\big) = (x+\epsilon)^m. \tag{14.1244}$$

En prenant la limite,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \big[f_n\big(f_{m/n}(x+\epsilon)\big)\big] = x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{14.1245}$$

Vu que f_n est continue, nous pouvons la permuter avec la limite dans le membre de gauche tout en écrivant $f_{m/n}(x)^n = f_n\big(f_{m/n}(x)\big)$ dans le membre de droite :

$$f_n\big[\lim_{\epsilon \to 0} f_{m/n}(x+\epsilon)\big] = f_n\big(f_{m/n}(x)\big). \tag{14.1246}$$

La fonction f_n étant injective dans un voisinage autour de x (proposition 14.444),

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_{m/n}(x+\epsilon) = f_{m/n}(x), \tag{14.1247}$$

ce qui est la continuité de $f_{m/n}$ en x.

(3) **Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$**

Nous prouvons séparément le cas $x < 1$ et le cas $x \geqslant 1$.

(3a) **Si $x \in]1, \infty[$**
Commençons par $x \in]1, \infty[$.
Soit une suite $\alpha_i \to \alpha$ strictement décroissante dans $\mathbb{Q}^+$. Le lemme 14.445 nous dit que l'ensemble de fonctions $\{f_{\alpha_i} \colon]1, \infty[\to \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est équicontinu. La convergence simple $f_{\alpha_i} \to f_\alpha$ étant par définition, la proposition 9.394 nous dit que la fonction $f_\alpha \colon]1, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.

(3b) **Si $x \in]0, 1]$**
Soient maintenant $x \in]0, 1]$, et $\epsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kx > 1$, et $k^\alpha > 1$. Soit $\delta_1 > 0$ tel que $B(x, \delta_1) > 0$. Si $y \in B(x, \delta_1)$, alors

$$|y^\alpha - x^\alpha| \leqslant k^\alpha |y^\alpha - x^\alpha| = \big|(ky)^\alpha - (kx)^\alpha\big|. \tag{14.1248}$$

Par ailleurs, vu que $kx > 1$, la fonction f_α est continue en kx. Il existe donc δ_2 tel que

$$z \in B(kx, \delta_2) \Rightarrow \big|z^\alpha - (kx)^\alpha\big| < \epsilon. \tag{14.1249}$$

Nous considérons $\delta < \min(\delta_1, \delta_2/k)$. Si $y \in B(x, \delta)$, alors d'une part

$$|ky - kx| = k|y - x| \leqslant k\delta < \delta_2. \tag{14.1250}$$

Pour un tel y nous avons donc $ky \in B(kx, \delta_2)$ et donc

$$|y^\alpha - x^\alpha| \leqslant \big|(ky)^\alpha - (kx)^\alpha\big| < \epsilon. \tag{14.1251}$$

Donc la continuité de f_α en x.

(4) **Pour $\alpha \in \mathbb{R}^-$**

Si $\alpha > 0$, la fonction $f_{-\alpha}$ est donnée par

$$f_{-\alpha}(x) = \frac{1}{f_\alpha(x)} \tag{14.1252}$$

et est donc continue (sauf en $x = 0$ où elle n'existe pas).

□

PROPooDWZKooNwXsdV

Proposition 14.447 ([1]).
Soient $a > 0$ ainsi que $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}. \tag{14.1253}$$

Démonstration. Nous découpons en fonction de la nature de x et y.

(1) **x rationnel, y naturel** Si $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors la formule

$$(a^q)^n = a^{nq} \tag{14.1254}$$

découle seulement d'une récurrence sur la formule 14.1211.

(2) **$x, y \in \mathbb{Q}$** Soient $y = m/n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Q}$. Nous avons, en utilisant la partie déjà démontrée et le lemme 14.426,

$$(a^q)^y = (a^q)^{m/n} = \big((a^q)^m\big)^{1/n} = (a^{mq})^{1/n} = a^{mq/n} = a^{yq}. \tag{14.1255}$$

(3) **x, y irrationnels**

Soient des suites des rationnels $x_i \to x$ et $y_i \to y$. En utilisant les définitions,

$$(a^x)^y = \lim_i (a^x)^{y_i} = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i}. \tag{14.1256}$$

EQooXITUooHYNSPU

Fixons un i pour commencer. Nous avons, par la continuité de f_{y_i} (proposition 14.446)

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = f_{y_i}\big(\lim_j a^{x_j}\big) = \lim_j \big(f_{y_i}(a^{x_j})\big) = \lim_j a^{x_j y_i}. \tag{14.1257}$$

Nous avons utilisé le résultat déjà démontré dans le cas des rationnels. La suite $j \mapsto x_j y_i$ est une suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers le réel xy_i, donc la limite sur j redonne la fonction puissance :

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_j a^{x_j y_i} = a^{xy_i}. \tag{14.1258}$$

EQooWORSooFoRBod

Le résultat découle maintenant de la prise de limite dans (14.1256) qui revient à prendre la limite $i \to \infty$ de l'expression dans (14.1258) :

$$(a^x)^y = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_i a^{xy_i} = a^{xy}. \tag{14.1259}$$

□

PROPooURSHooFfEsFS

Proposition 14.448 ([1]).
Soient $a, b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha. \tag{14.1260}$$

PROPooJRWCooGiXAYt

Proposition 14.449.
Soit $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty. \tag{14.1261}$$

Démonstration. Nous séparons la preuve en fonction de la nature de α.

(1) **Si $\alpha \in \mathbb{N}$** C'est le lemme 14.33.

(2) **Si $\alpha = 1/n$** Soit $n \neq 0$ dans $\mathbb{N}$, et prouvons que $\lim_{x\to\infty} x^{1/n} = \infty$. La proposition 14.437 nous indique que $x \mapsto x^{1/n} = f_n^{-1}(u)$ est croissante et continue. Elle possède donc une limite ℓ éventuellement infinie par la proposition 14.58. Posons

$$\lim_{x\to\infty} f_n^{-1}(x) = \ell. \tag{14.1262}$$

Nous voulons appliquer f_n des deux côtés et profiter de la continuité de f_n pour permuter avec la limite. Si vous avez peur du cas $\ell = +\infty$, supposez $\ell \neq +\infty$ et considérez ce qui suit comme une preuve par l'absurde que $\ell = +\infty$. Nous avons :

$$f_n\big(\lim_{x\to\infty} f_n^{-1}(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f_n\big(f_n^{-1}(x)\big) = \lim_{x\to\infty} x = \infty. \tag{14.1263}$$

donc $f_n(\ell) = \infty$, et nous concluons que $\ell = \infty$.

(3) **Si $\alpha \in \mathbb{Q}$** Nous posons $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Alors

$$x^\alpha = (x^{1/q})^p \tag{14.1264}$$

par la proposition 14.447. Autrement dit,

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \lim_{x\to\infty} (f_p \circ f_{1/q})(x) = \infty \tag{14.1265}$$

parce que tant f_p que $f_{1/q}$ ont une limite $+\infty$.

(4) **Le cas général** Nous considérons enfin $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Le lemme 4.60 nous permet de considérer $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \alpha$. La proposition 14.437(2) nous dit que, pour chaque x, $x^q < x^\alpha$. Donc

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \geqslant \lim_{x\to\infty} x^q = \infty \tag{14.1266}$$

en utilisant le point précédent.

□

PROPooEXGKooCqzLor

Proposition 14.450.
Soit $\alpha > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon [0,\infty[&\to [0,\infty[\\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{14.1267}$$

est bijective.

Démonstration. La proposition 14.442 nous dit que $f_\alpha \colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante. Vu que $f_\alpha(0) = 0$, nous savons que $f_\alpha([0,\infty[) \subset [0,\infty[$. La stricte croissance nous dit également que f_α est injective.
Il reste à voir que f_α est surjective. Rappelons quelque faits.

- D'abord une facile : $f_\alpha(0) = 0$.
- Nous avons $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ par la proposition 14.449.
- La fonction f_α est continue par la proposition 14.446.

Le théorème des valeurs intermédiaires[170] conclut que f_α est surjective sur $[0,\infty[$. □

Le lemme suivant montre en gros que x^y croît plus rapidement en y qu'en x.

LemLJOSooEiNtTs

Lemme 14.451.
Pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$ nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = 0 \tag{14.1268}$$

[170] Dans sa version de la proposition 11.93.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ plus grand que α. Soit la suite numérique $s_n = n^k a^n$. Tous ses termes sont positifs et

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{1}{a}. \tag{14.1269}$$

Étant donné que $n/n+1 \to 1$ et que $a < 1$, il existe un certain rang à partir duquel la suite (s_n) est décroissante. Deux conclusions :

- Elle est majorée par une constante M.
- Elle est convergente par le lemme 11.36.

Soit l tel que $ka^l < 1$ et $n > l$ alors

$$s_{n+l} = (n+l)^k a^{n+l} \leqslant kn^k a^n a^l = ka^l s_n \leqslant ka^l M. \tag{14.1270}$$

La majoration est due au fait que dans $(n+l)^k$ nous avons k termes tous plus petits que n^k. De la même façon,

$$s_{2n+2l} \leqslant ka^{2l} s_{2n} \leqslant ka^{2l} M. \tag{14.1271}$$

En posant $\varphi(i) = in + il$ nous avons

$$s_{\varphi(i)} \leqslant ka^i M, \tag{14.1272}$$

qui est une sous-suite convergente vers 0. Or si une suite est convergente (ce qui est le cas de (s_n)), toutes les sous-suites convergent vers la même limite. Nous en concluons que $s_n \to 0$. □

14.452.
Une conséquence est que si vous voulez choisir un mot de passe fort, la longueur du mot est plus importante que la taille de l'alphabet choisi : il est plus efficace de choisir une combinaison longue qu'une combinaison mélangeant des lettres, chiffres et symboles spéciaux.

Exemple : si vous choisissez un mot de passe contenant majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux complètement mélangés (ne mentez pas, vous ne le faites pas), mais que vous ne le choisissez que de taille 6, vous avez 72^6 possibilités (en supposant un jeu de 10 symboles spéciaux).

Eh bien, en seulement 8 lettres minuscules, vous avez plus de possibilités : $26^8 > 72^6$.

De nombreux sites font l'erreur de considérer que

- « ggzxzheaiynshunxuydajkwyohgqxz » est un mot de passe faible,
- « azerty.2019A » est un mot de passe fort.

Il n'en est rien. Le premier est considérablement meilleur que le second, même si le second, très superficiellement, mélange les lettres majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux.

Voilà voilà. La prochaine fois qu'un site vous refusera un mot de passe de 30 lettres minuscules mélangées, vous saurez pourquoi il n'y a rien qui marche en informatique, et en particulier pourquoi la sécurité générale de nos systèmes d'information est désastreuse.

THOooHWNWooTewPvt

Théorème 14.453.
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(N, \mathbb{C})$. La suite $(A^n x)$ tend vers zéro pour tout x si et seulement si $\rho(A) < 1$ où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A

Démonstration. Dans le sens direct, il suffit de prendre comme x, un vecteur propre de A. Dans ce cas nous avons $A^n x = \lambda^n x$. Mais $\lambda^k x$ ne tend vers zéro que si $\lambda < 1$. Donc toutes les valeurs propres de A doivent être plus petites que 1 et $\rho(A) < 1$.

Pour l'autre sens nous utilisons la décomposition de Dunford (théorème 10.265) : il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}(D+N)P \tag{14.1273}$$

où D est diagonale, N est nilpotente et $[D, N] = 0$. Étant donné que $D+N$ est triangulaire, son polynôme caractéristique est

$$\chi_{D+N}(X) = \prod_i (D_{ii} - X). \tag{14.1274}$$

Par similitude, c'est le même polynôme caractéristique que celui de A et nous savons alors que la diagonale de D contient les valeurs propres de A.

Vu que $A^n = P^{-1}(D+N)^nP$, nous allons montrer que $\|(D+N)^n\| \to 0$, et ce sera suffisant. Notons r l'ordre de nilpotence de N (c'est-à-dire $N^r = 0$), et prenons $n > r$. En utilisant le fait que D et N commutent, pour tout $n \geqslant r$ nous avons :

$$\|(D+N)^n\| \leqslant \|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^{n-k}N^k\| \tag{14.1275a}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\|D\|^{n-k}\|N^k\| \tag{14.1275b}$$
$$= \sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\rho(D)^{n-k}\|N\|^k \tag{14.1275c}$$
$$\leqslant c\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\rho(D)^n \tag{14.1275d}$$
$$= c\rho(D)^n\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k} \tag{14.1275e}$$
$$\leqslant c\rho(D)^n\sum_{k=0}^{r-1}\frac{n^{k-1}}{k!} \tag{14.1275f}$$
$$\leqslant c\rho(D)^n\sum_{k=0}^{r-1}n^{r-2} \tag{14.1275g}$$
$$= cr\rho(D)^n n^{r-2}. \tag{14.1275h}$$

Justifications.

- Pour (14.1275d). Nous avons posé $c = \max_{k=1,\dots,r-1}\|N\|^k\rho(D)^{-k}$.
- Pour (14.1275f). Lemme 3.76.
- Pour (14.1275g). On oublie le $k!$ et on remplace k par $r-1$.

Récapitulons ces inéquations :

$$\|(D+N)^n\| \leqslant c'\rho(D)^n n^{r-2} \tag{14.1276}$$

où c' est une nouvelle constante. Du coup si $\rho(D) < 1$ alors $\|(D+N)^k\| \to 0$ par lemme 14.451. □

Lemme 14.454 ([486, 1])**.**
Soient $a_n \geqslant 0$ tels que

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n|x|^n < \infty \tag{14.1277}$$

pour tout $x \in B(0,r)$.

Alors

$$\lim_{t\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^{n-1} = 0. \tag{14.1278}$$

Démonstration. Soit $0 < \epsilon < 1$. Soit $0 < x < \min\{r, 1\}$. Nous notons $M = \sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n$. Nous considérons un nombre $0 < t_0 < 1$ tel que

$$t_0 < x^2. \tag{14.1279}$$

En utilisant les propositions 14.447 et 14.442, nous avons $t_0^{n-1} < x^{2n-2}$. Mais vu que nous ne considérons que $n \geqslant 2$ et que $0 < x < 1$, nous en déduisons

$$t_0^{n-1} < x^{2n-2} < x^n. \tag{14.1280}$$

Nous posons enfin $t_1 < \epsilon t_0$ de telle sorte à avoir, en utilisant 14.448,

$$a_n t_1^{n-1} < a_n\epsilon^{n-1}t_0^{n-1} < \epsilon^n a_n x^n < \epsilon a_n x^n. \tag{14.1281}$$

Enfin nous avons

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n t_1^{n-1} \leqslant \epsilon\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n = \epsilon M. \tag{14.1282}$$

Nous avons donc trouvé un $t > 0$ (donné par ϵt_0) tel que si $t_1 < t$ alors $\sum_{n=2}^{\infty}a_n t^{n-1} < \epsilon M$. Cela prouve bien la limite demandée. □

14.39 Densité des polynômes

14.39.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Voir le thème 34.

Note : le lemme 14.455 est utilisé dans la démonstration du théorème 14.459 ; c'est pour cela que nous l'avons isolé.

LemYdYLXb

Lemme 14.455.
Il existe une suite de polynômes sur $[0,1]$ convergeant uniformément vers la fonction racine carrée.

Démonstration. Nous donnons cette suite par récurrence :

$$P_0(t) = 0 \tag{14.1283a}$$
$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - P_n(t)^2\big). \tag{14.1283b}$$

Nous commençons par montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $P_n(t) \in [0, \sqrt{t}]$. Pour P_0, c'est évident. Ensuite nous avons

$$P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = P_n(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \tag{14.1284a}$$
$$= \big(P_n(t) - \sqrt{t}\big)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{t - P_n(t)^2}{P_n(t) - \sqrt{t}}\right) \tag{14.1284b}$$
$$= \big(P_n(t) - \sqrt{t}\big)\left(1 - \frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2}\right) \tag{14.1284c}$$
$$\leqslant 0 \tag{14.1284d}$$

parce que $\sqrt{t} \leqslant 1$ et $P_n(t) \leqslant 1$ par hypothèse de récurrence.

Nous savons au passage que $P_n(t)$ est une suite réelle croissante parce que $t - P_n(t)^2 \geqslant t - (\sqrt{t})^2 = 0$. La suite $P_n(t)$ est donc croissante et majorée par $\sqrt{t}$; elle converge donc. Les candidats limites sont déterminés par l'équation

$$\ell = \ell + \frac{1}{2}(t - \ell^2), \tag{14.1285}$$

dont les solutions sont $\ell = \pm\sqrt{t}$. La suite étant positive, nous avons une convergence ponctuelle de P_n vers la racine carrée. Cette suite étant une suite croissante de fonctions continues sur un compact, convergeant ponctuellement vers une fonction continue, la convergence est uniforme par le théorème de Dini 14.402. □

LemUuxcqY

Lemme 14.456.
Soit K, un compact de $\mathbb{R}$ et f_n une suite de fonctions sur K convergeant uniformément vers f. Soient un espace topologique X et une application $g\colon X \to K$. Alors $f_n \circ g$ converge uniformément vers $f \circ g$.

Démonstration. En effet, pour tout $x \in X$ nous avons

$$\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f_n\big(g(x)\big) - f\big(g(x)\big)\| \leqslant \|f_n - f\|_\infty. \tag{14.1286}$$

Par conséquent, si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de choisir n de telle sorte à avoir $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ et nous avons $\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty \leqslant \epsilon$. □

Définition 14.457.
*Nous disons qu'une algèbre A de fonctions sur un espace X **sépare les points** de X si pour tout $x_1 \neq x_2$ il existe $g \in A$ telle que $g(x_1) \neq g(x_2)$.*

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer une forme nettement plus générale du théorème de Stone-Weierstrass. Le théorème 14.459 le donne pour $C(X, \mathbb{C})$ et le théorème 14.458 le donne pour $C(X, \mathbb{R})$.

THOooMDILooGPXbTW

Théorème 14.458 (Stone-Weierstrass[487])**.**
Soient X, un espace compact et Hausdorff. Soit A, une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\big(C(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$ si et seulement si A sépare les points de X.

Démonstration. Nous allons écrire la démonstration en plusieurs étapes (dont la première est le lemme 14.455). Nous commençons par la première partie, sur les réels.

Première étape Pour tout $x \neq y \in X$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, vu que A sépare les points nous pouvons considérer une fonction $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$ et ensuite poser

$$f(z) = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{g(y) - g(x)}\big(g(z) - g(x)\big). \tag{14.1287}$$

Les constantes faisant partie de A, cette fonction f est encore dans A.

Seconde étape Pour tout n-uples de fonctions $f_1, \dots, f_n$ dans $\bar{A}$, les fonctions $\min(f_1, \dots, f_n)$ et $\max(f_1, \dots, f_n)$ sont dans $\bar{A}$.

Nous le démontrons pour $n = 2$; le reste allant évidemment par récurrence. Soient $f, g \in \bar{A}$. Étant donné que

$$\max(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} \tag{14.1288a}$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2}, \tag{14.1288b}$$

if suffit de montrer que si $f \in \bar{A}$ alors $|f| \in \bar{A}$. Si f est nulle, c'est évident ; supposons que $f \neq 0$ et posons $M = \|f\|_\infty \neq 0$. Pour tout $x \in X$ nous avons

$$\frac{f(x)^2}{M^2} \in [0, 1]. \tag{14.1289}$$

Nous considérons alors la suite

$$h_n = P_n \circ \frac{f^2}{M^2} \tag{14.1290}$$

où P_n est une suite de polynômes convergent uniformément vers la racine carrée (voir lemme 14.455). Le lemme 14.456 nous assure que h_n converge uniformément vers $\frac{|f|}{M}$ dans $C(X, \mathbb{R})$. Étant donné que $\bar{A}$ est également une algèbre, h_n est dans $\bar{A}$ pour tout n et la limite s'y trouve également (pour rappel, la fermeture $\bar{A}$ est celle de la topologie de la convergence uniforme).

Troisième étape Soit $\epsilon > 0$, $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $x \in X$. Il existe une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) & \text{(14.1291a)} \\ g_x(y) \leqslant f(y) + \epsilon & \text{(14.1291b)} \end{cases}$$

pour tout $y \in X$.

Soit $z \in X \setminus \{x\}$ et une fonction h_z telle que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$. Une telle fonction existe par une des étapes précédentes. Étant donné que f et h_z sont continues, il existe un voisinage ouvert V_z de z sur lequel

$$h_z(y) \leqslant f(y) + \epsilon \tag{14.1292}$$

pour tout $y \in V_z$. Nous pouvons sélectionner un nombre fini de points $z_1, \dots, z_n$ tels que les ouverts $V_{z_1}, \dots, V_{z_n}$ recouvrent X (parce que X est compact, de tout recouvrement par des ouverts, nous extrayons un sous recouvrement fini.). Nous posons

$$g_x = \min(h_{z_1}, \dots, h_{z_n}) \in \bar{A}. \tag{14.1293}$$

Si $y \in X$, nous sélectionnons le i tel que $h_{z_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon$ et nous avons

$$g_x(y) \leqslant h_{z_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon. \tag{14.1294}$$

Étape finale Soit $\epsilon > 0$ et $f \in C(X, \mathbb{R})$. Pour chaque $x \in X$ nous considérons une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) & \text{(14.1295a)} \\ g_x(y) \leqslant f(y) + \epsilon & \text{(14.1295b)} \end{cases}$$

pour tout $y \in X$. Les fonctions f et g_x sont continues, donc il existe un voisinage ouvert W_x de x sur lequel

$$g_x(y) \geqslant f(y) - \epsilon. \tag{14.1296}$$

De ces W_x nous extrayons un sous recouvrement fini de X : $W_{x_1},\dots,W_{x_m}$ et nous posons

$$\varphi=\max(g_{x_1},\dots,g_{x_n})\in\bar{A}. \tag{14.1297}$$

Si $y\in X$, il existe un i tel que

$$\varphi(y)\geqslant g_{x_i}(y)\geqslant f(y)-\epsilon. \tag{14.1298}$$

La première inégalité est le fait que φ est le maximum des g_{x_k}, et la seconde est le choix de i. Donc pour tout $y\in X$ nous avons

$$f(y)-\epsilon\leqslant\varphi(y)\leqslant f(y)+\epsilon. \tag{14.1299}$$ EqJMxHaF

La première inégalité est ce que l'on vient de faire. La seconde est le fait que pour tout i nous ayons $g_{x_i}(y)\leqslant f(y)+\epsilon$; le fait que φ soit le maximum sur les i ne change pas l'inégalité.

Le fait que les inégalités (14.1299) soient vraies pour tout $y\in X$ signifie que $\|\varphi-f\|_\infty\leqslant\epsilon$, et donc que $f\in\text{Adh}\big(\text{Adh}(A)\big)=\text{Adh}(A)$.

Tout cela prouve que $C(X,\mathbb{R})\subset\text{Adh}(A)$. L'inclusion inverse est le fait que $C(X,\mathbb{R})$ est fermé pour la norme $\|.\|_\infty$, étant donné qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Nous pouvons maintenant nous tourner vers l'énoncé concernant $C(X,\mathbb{C})$. □

ThoWmAzSMF

Théorème 14.459 (Stone-Weierstrass[1])**.**
Soit X, un espace compact et Hausdorff. Soit une sous-algèbre[171] *A stable par conjugaison*[172] *de $C(X,\mathbb{C})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\Big(C(X,\mathbb{C}),\|.\|_\infty\Big)$ si et seulement si A sépare les points de X.*

Entendons-nous bien : ici A et $C(X,\mathbb{C})$ sont des algèbres à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. La preuve de cette version dans $C(X,\mathbb{C})$ va bien entendu fortement reposer sur le cas dans $C(X,\mathbb{R})$ que nous venons de prouver. Soit donc A, une sous-algèbre vérifiant les hypothèses.

(1) $\underline{\text{Re}(A)\subset A}$ Nous prouvons que si $f\in A$, alors $\text{Re}(f)\in A$. En effet, vu que A est stable par conjugaison, si $f\in A$, alors $\bar{f}\in A$ et $f+\bar{f}=2\,\text{Re}(f)\in A$.

Nous posons

$$A_1=\{\text{Re}(g)\text{ tel que }g\in A\}. \tag{14.1300}$$

(1) $\underline{A_1\textbf{ est une sous-algèbre de }A}$ Le fait que les éléments de A_1 soient dans A est déjà fait. Pour le produit, si $g_1,h_1\in A_1$, alors il existe $g,h\in A$ tels que $g_1=\text{Re}(g)$ et $h_1=\text{Re}(h)$. Nous avons

$$(g_1+ig_2)(h_1+ih_2)=g_1h_1-g_2h_2+i(g_1h_2+g_2h_1)\in A. \tag{14.1301}$$

La partie réelle de cela est dans A_1, donc

$$g_1h_2-g_2h_1\in A_1. \tag{14.1302}$$ EQooYAGUooJVpaEa

Mais comme $g_1+ig_2\in A$, nous avons aussi $g_1-ig_2\in A$ et donc

$$(g_1-ig_2)(h_1+ih_2)=g_1h_1+g_2h_2+i(g_1h_2-g_2h_1)\in A. \tag{14.1303}$$

La partie réelle de cela est dans A_1. Donc

$$g_1h_1+g_2h_2\in A_1. \tag{14.1304}$$

En comparant avec (14.1302), nous avons $g_1h_1\in A_1$.

(2) $\underline{A_1\textbf{ sépare les points de }X}$ Soient $x,y\in X$ ainsi que $f\in A$ séparant les points x et y, c'est-à-dire

$$f(x)\neq f(y). \tag{14.1305}$$

Supposons $f_1(x)=f_1(y)$. Vu que f sépare, si ce ne sont pas les parties réelles, ce sont les parties imaginaires. C'est-à-dire que $f_2(x)\neq f_2(y)$. Mais d'autre part, $if=-f_2+if_1\in A$, donc en réalité $f_2\in A_1$ également.

[171] Algèbre, définition 3.111.
[172] Pour tout $g\in A$, nous avons $\bar{g}\in A$.

Le partie A_1 dans $C(X,\mathbb{R})$ vérifie les hypothèses de Stone-Weierstrass réel 14.458, donc A_1 est dense dans $C(X,\mathbb{R})$. Le même raisonnement montre que A_2 est également dense dans $C(X,\mathbb{R})$[173]

Soit maintenant le vif de la preuve : $f\in C(X,\mathbb{C})$ avec $f=u+iv$, les fonctions u et v étant dans $C(X,\mathbb{R})$. Nous avons des suites $u_k\xrightarrow{unif}u$ et $v_k\xrightarrow{unif}v$ pour des suites (u_k) et (v_k) dans $C(X,\mathbb{R})$.

Par le même genre de raisonnements que nous avons déjà fait, nous nous convainquons que $u_k+iv_k\in A$ pour chaque k. Nous avons

$$\|u_k+iv_k-u-iv\|_\infty\leqslant\|u_k-u\|_\infty+\|v_k-v\|_\infty \tag{14.1306}$$

En prenant k assez grand, les deux termes peuvent être rendus plus petit que ϵ. □

CORooNIUJooLDrPSv

Corolaire 14.460 ([1]).
Soit B, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. La partie $C^\infty(B,\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\big(C(B,B),\|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Soit $f\in C(B,B)$ et $\epsilon>0$. La fonction donnant la composante i est une fonction $f_i\in C(B,\mathbb{R})$ et il existe donc, par le théorème de Stone-Weierstrass 14.459, une fonction $g_i\in C^\infty(B,\mathbb{R})$ telle que $\|g_i-f_i\|_\infty\leqslant\epsilon$.

La fonction g dont les composantes sont les g_i ainsi construits vérifie $\|g-f\|_\infty\leqslant n\epsilon$. □

Attention toutefois que rien n'assure que les fonctions construites par le corolaire 14.460 prennent leurs valeurs dans B.

Le théorème suivant est un des énoncés les plus classiques de Stone-Weierstrass. Il découle évidemment du théorème général 14.459 (encore qu'il faut alors bien comprendre qu'il faut traiter la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ séparément). Il en existe cependant une preuve indépendante via les polynômes de Bernstein, dans le théorème 38.193. Par contre, n'allez pas croire que c'est plus simple.

ThoGddfas

Théorème 14.461 (Stone-Weierstrass).
Soit f, une fonction continue sur un compact $K\subset\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon>0$, il existe un polynôme P tel que $\|P-f\|_\infty<\epsilon$.

Autrement dit, les polynômes sont denses dans $\big(C^0(K,\mathbb{R}),\|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Nous allons prouver que les polynômes sur $\mathbb{R}$, restreins à K satisfont les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass 14.458.

(1) **Partie de $C^0(K,\mathbb{R})$** Les polynômes sont des fonctions continues par la proposition 14.446.

(2) **Sous-algèbre** Les produits et sommes de polynômes restent des polynômes.

(3) **Contient une fonction constante non nulle** Les fonctions constantes sont des polynômes.

(4) **Sépare les points de K** Le polynôme $P(x)=x$ sépare tous les points que vous voulez.

□

THOooJGAJooBcTtDH

Théorème 14.462 (Stone-Weierstrass).
Soit $f\in C^0(K,\mathbb{R}^n)$ où K est un compact $K\subset\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon>0$, il existe un polynôme $P\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tel que $\|P-f\|_K<\epsilon$.

Autrement dit, les polynômes sont denses dans $\big(C^0(K,\mathbb{R}^n),\|.\|_K\big)$.

14.40 Primitive de fonction continue

PropQACVooBnHtRJ

Proposition 14.463 ([488]).
Soit un intervalle compact K de $\mathbb{R}$ et une suite (f_n) de fonctions continues sur K telles que $f_n\xrightarrow{unif}f$. Si chacune des fonctions f_n a une primitive sur K alors f également.

[173] Il me semble même que $A_1=A_2$ et qu'il y a un raccourci possible dans cette preuve en exploitant ce fait. Écrivez-moi pour dire ce que vous en pensez.

Démonstration. Soit $x_0 \in K$ et les primitives F_n choisies[174] pour avoir $F_n' = f_n$ et $F_n(x_0) = 0$. Nous allons voir que (F_n) est une suite de Cauchy dans $\big(K, \|.\|_\infty\big)$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in K$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|F_n - F_m\|_\infty &= \sup_{x\in K} \|F_n(x) - F_m(x)\| && \text{(14.1307a)}\\
&= \sup_{x\in K} \|(F_n - F_m)(x)\| && \text{(14.1307b)}\\
&\leqslant \sup_{x\in K} \Big(\|F_n' - F_m'\|_{[x,x_0]} \|x - x_0\| \Big) && \text{(14.1307c)}\\
&\leqslant \sup_{x\in K} \Big(\|f_n - f_m\| \operatorname{diam}(K) \Big) && \text{(14.1307d)}\\
&\leqslant \operatorname{diam}(K) \|f_n - f_m\|_K. && \text{(14.1307e)}
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (14.1307c). Théorème des accroissements finis 12.357.
- Pour (14.1307d). Parce que $x \in K$ et que K est borné, $\|x - x_0\|$ est majoré par $\operatorname{diam}(K)$.

Vu que (f_n) est de Cauchy, si n et m sont assez grands, cela tend vers zéro. La suite (F_n) converge donc vers une certaine fonction F.

Le théorème 14.413 nous permet de permuter la limite et la dérivée pour conclure que $F' = f$ et donc que f a une primitive sur K. □

PropKKGAooDQYGKg

Proposition 14.464 ([488]).
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ qui admet une primitive sur tout compact de I. Alors f a une primitive sur I.

Démonstration. Nous considérons une suite exhaustive[175] de compacts K_n pour I et $x_0 \in K_0$. Nous considérons aussi F_n la primitive de f sur K_n telle que $F_n(x_0) = 0$ (possible parce que $x_0 \in K_n$ pour tout n). Les fonctions F_n sont des restrictions les unes des autres, et nous pouvons définir

$$\begin{aligned} F\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_n(x) \text{ si } x \in K_n. \end{aligned} \tag{14.1308}$$

Nous avons évidemment $F(x_0) = 0$ et nous allons prouver que F est une primitive de f sur I. Soit $x \in I$ vu que I est ouvert, nous pouvons choisir n_0 tel que $x \in \operatorname{Int}(K_{n_0})$. Les fonctions F et F_{n_0} sont égales sur K_n et donc sur un ouvert autour de x. Par conséquent F est dérivable en x et $F'(x) = F_{n_0}'(x) = f(x)$. □

ThoEXXyooCLwgQg

Théorème 14.465.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur I admet une primitive[176] *sur I.*

Démonstration. Sur chaque compact de I, la fonction f est limite uniforme de polynômes[177] (théorème de Stone-Weierstrass 14.461). Donc f est primitivable sur tout compact de I (proposition 14.463) et donc sur I par la proposition 14.464. □

14.40.1 Dérivation de la fonction puissance (première)

Nous n'allons pas complètement résoudre la question de la dérivation de la fonction $x \mapsto a^x$; il faudrait des logarithmes, et nous ne les avons pas encore définis. Le logarithme sera introduit comme fonction inverse de l'exponentielle en 17.95.

PROPooMXCDooBffXbl

Proposition 14.466 ([485]).
Soit la fonction puissance

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned} \tag{14.1309}$$

(1) La fonction g_a est dérivable.

[174] Les fonctions F_n étant dérivables sont continues.
[175] Voir le lemme 9.379.
[176] Définition 14.224.
[177] Si tu veux te passer de Stone-Weierstrass, tu peux prouver que toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions affines par morceaux, par exemple. Voir [488].

(2) La dérivée vérifie l'équation

$$g_a'(x) = g_a'(0)g_a(x). \tag{14.1310}$$

EQooNIUJooPqDnax

Démonstration. La fonction g_a est continue par 14.437(1). La proposition 14.465 nous dit donc que la fonction g_a admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Nous notons F une telle primitive.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $F_x(t) = F(x+t)$, nous avons une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. En effet

$$F_x'(t) = F'(x+t)\frac{d}{dt}\Big[x+t\Big]_{t=0} = a^{x+t} = a^x a^t. \tag{14.1311}$$

Par ailleurs la fonction $t \mapsto a^x F(t)$ est également une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. Donc il existe un nombre $C(x)$ tel que

$$F_x(t) = F(x+t) = a^x F(t) + C(x). \tag{14.1312}$$

Le nombre $F(1) - F(0)$ est un nombre sans histoires. Nous avons : SUBALIGNooVARJooIcPEHN

$$\begin{aligned} g_a(x)\big(F(1)-F(0)\big) &= g_a(x)F(1) - g_a(x)F(0) && (14.1313a)\\ &= F_x(1) - C(x) - F_x(0) + C(x) && (14.1313b)\\ &= F_x(1) - F_x(0) && (14.1313c)\\ &= F(1+x) - F(x). && (14.1313d) \end{aligned}$$

La fonction F étant dérivable, nous en déduisons que g_a est dérivable.

Vu que nous n'avons aucune idée de la forme de F, nous ne pouvons pas tirer beaucoup d'informations d'une dérivation des membres de gauche et de droite de (14.1313).

En ce qui concerne la formule, nous écrivons la fameuse équation fonctionnelle[178]

$$g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y) \tag{14.1314}$$

Nous fixons x et dérivons par rapport à y en $y = y_0$:

$$g_a'(x+y_0) = g_a(x)g_a'(y_0). \tag{14.1315}$$

En posant $y_0 = 0$ nous trouvons le résultat demandé. □

14.467.
La démonstration donnée dans [485] s'assure d'abord de l'existence d'une intégrale (lemme 16.258), pose ensuite $A = \int_0^1 g_a(t)dt$ et fait le calcul suivant :

$$Ag_a(x) = \int_0^1 g_a(x)g_a(t)dt = \int_0^1 g_a(x+t)dt = \int_x^{x+1} g_a(t)dt. \tag{14.1316}$$

Vu que le membre de droite est une fonction dérivable de x, nous concluons que g_a est dérivable. Cela demande donc toute la théorie de l'intégration pour prouver la *dérivabilité* d'une fonction.

La démonstration donnée ici est à peine mieux. Elle utilise l'existence d'une primitive et donc tout le théorème de Stone-Weierstrass 14.461.

Dans les deux cas, je trouve que la situation n'est pas fameuse. Si vous êtes capable de montrer l'existence de la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \tag{14.1317}$$

sans recourir à autre chose que des astuces sur les limites, je suis preneur. Ou, au contraire, si vous avez un argument pour dire que c'est impossible, dites-le moi également. Écrivez-moi.

Nous posons une définition

DEFooPJKMooOfZzgy

Définition 14.468.
*Soit $a > 0$. Nous nommons l'**équation fonctionnelle** l'équation* EQooULHBooByFVec

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) & (14.1318a)\\ f(1) = a & (14.1318b) \end{cases}$$

pour la fonction inconnue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Note : une équation du même type, avec $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sera dans le lemme 19.167.

[178] Pour rappel, proposition 14.437(3).

DEFooXMQTooSbZzqJ

Définition 14.469.
*Soit $a > 0$. Nous nommons l'**équation exponentielle** l'équation* EQooGDBYooUoAFPW

$$\begin{cases} y' = y & (14.1319a) \\ y(1) = a & (14.1319b) \end{cases}$$

pour la fonction inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

LEMooWUQBooXzjmZv

Lemme 14.470 ([1])**.**
Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = y & (14.1320a) \\ y(0) = 1 & (14.1320b) \end{cases}$$

vérifie $y(x) = 1/y(-x)$.

En particulier une telle solution ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que y soit une solution, et posons $h(x) = y(x)y(-x)$. Une dérivation montre que $h'(x) = 0$. Vu que $h(0) = 1$, nous avons $h(x) = 1$ pour tout x. Par conséquent $y(x)y(-x) = 1$ pour tout x. □

PropDJQSooYIwwhy

Proposition 14.471 (Unicité de l'exponentielle)**.**
Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = y & (14.1321a) \\ y(0) = 1 & (14.1321b) \end{cases}$$

est unique.

Démonstration. Soient y et g deux solutions et considérions la fonction $h(x) = g(x)y(-x)$. Un calcul immédiat donne

$$h'(x) = 0 \tag{14.1322}$$

et donc h est constante. Vu que $h(0) = 1$ nous avons $g(x)y(-x) = 1$ pour tout x. Grâce au lemme 14.470 qui nous indisque que y ne s'annule pas, nous pouvons alors écrire

$$g(x) = \frac{1}{y(-x)} = y(x). \tag{14.1323}$$

□

14.472.
Nous savons qu'il existe une unique solution de l'équation exponentielle avec $a = 1$. Avec la relation

$$g_a'(x) = g_a(x)g_a'(0), \tag{14.1324}$$

de la proposition 14.466, nous n'en sommes pas loin. Il faut encore savoir si il existe un $a > 0$ tel que $g_a'(0) = 1$. Notre culture générale nous dit qu'un tel réel existe et est la fameuse constante e.

Nous nous attelons maintenant à la tâche de montrer l'existence de la chose.

14.40.2 Équation fonctionnelle

Il n'est un secret pour personne (proposition 14.437(3)) que la fonction

$$\begin{aligned} g_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{14.1325}$$

vérifie l'équation fonctionnelle (14.1318). Nous pouvons nous demander à quel point cette propriété caractérise la fonction puissance.

PROPooJDPEooYTDVtU

Proposition 14.473 ([485])**.**
Encore plusieurs résultats sur la fonction g_a avec $a > 0$.

ITEMooZJUEooVoqKul

(1) La fonction g_a vérifie l'équation fonctionnelle.

ITEMooCSQXooUDyiMq
(2) *La dérivée vérifie* $g_a'(0) \neq 0$.

ITEMooCKIHooNuDwrk
(3) *Pour tout* a, *en posant* $\alpha = 1/g_a'(0)$ *nous avons*

$$g_{a^\alpha}'(0) = 1. \tag{14.1326}$$

ITEMooQQFRooWtlViJ
(4) *Il existe un unique* $e > 0$ *tel que*

$$g_e' = g_e. \tag{14.1327}$$

ITEMooERTLooWLjlnZ
(5) *Pour la valeur de* e *donnée en (4), la fonction* g_e *vérifie l'équation exponentielle* (14.1319)

$$\begin{cases} g_e' = g_e & \text{(14.1328a)} \\ g_e(1) = e. & \text{(14.1328b)} \end{cases}$$

Démonstration. Un point à la fois.

(1) **Pour (1)** Le fait que g_a vérifie l'équation fonctionnelle est la proposition 14.437(3).

(2) **Pour (2)**
La formule (14.1310) de la proposition 14.466 nous assure que

EQooSCDJooTynjEp
$$g_a'(x) = g_a(x)g_a'(0). \tag{14.1329}$$

Donc $g_a'(0) = 0$ impliquerait que g_a est constante, ce qui n'est pas le cas.

(3) **Pour (3)** Par ailleurs la proposition 14.447 nous permet d'écrire

$$g_a(\alpha x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{14.1330}$$

En dérivant des deux côtés,

EQooIHCDooGSEGNm
$$\alpha g_a'(\alpha x) = g_{a^\alpha}'(x). \tag{14.1331}$$

En posant donc $\alpha = g_a'(0)$ et en évaluant (14.1331) en $x = 0$ nous trouvons le résultat.

(4) **Pour (4), existence**
Pour les valeurs de α données par le point (3), nous avons $g_{a^\alpha}'(0) = 1$, et l'équation (14.1329) nous donne alors

$$g_{a^\alpha}'(x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{14.1332}$$

Comme de plus $g_{a^\alpha}(0) = 1$, cette fonction vérifie bien l'équation exponentielle.

(5) **Pour (4), unicité**
Si a et b font en sorte que $g_a' = g_a$ et $g_b' = g_b$, alors nous avons aussi $g_a'(0) = g_b'(0) = 1$ à cause de (14.1329). Donc g_a et g_b vérifient l'équation de la proposition 14.471 dont la solution est unique. Donc $g_a = g_b$.
Pour tout x nous avons $g_a(x) = g_b(x)$. En particulier pour $x = 1$ nous avons $a = b$.

□

PROPooGBUPooWtWaFI
Proposition 14.474 ([485]).
Soit $a > 0$. *Nous considérons l'équation fonctionnelle 14.468 et l'équation exponentielle 14.469 pour une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ITEMooYHAVooWzJqBj
(1) *Si* f *vérifie l'équation fonctionnelle, alors*

$$f(q) = a^q \tag{14.1333}$$

pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

ITEMooQHOMooNVzSxn
(2) *Si* f *vérifie l'équation fonctionnelle et est monotone, alors* $f = g_a$.

ITEMooCNXOooZcrxeB
(3) *Si* f *vérifie l'équation fonctionnelle et est continue, alors* $f = g_a$.

Démonstration. En beaucoup de parties. Nous commençons par prouver (1). Nous supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle[179].

[179] Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire ici, nous rappelons qu'une telle fonction existe par la proposition 14.473.

(1) $f(x) \geqslant 0$ Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geqslant 0. \tag{14.1334}$$

Vous noterez que cet argument ne fonctionne pas si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

(2) **Pour $n \in \mathbb{N}$** Soit $n \in \mathbb{N}$. Je vous laisse rédiger la récurrence correctement, mais l'idée est que $f(1) = a$ et ensuite que

$$f(n+1) = f(n)f(1) = f(1)^n f(1) = f(1)^{n+1}. \tag{14.1335}$$

(3) **Pour $m \in \mathbb{Z}$** Nous avons d'une part que $f(-m+m) = f(0) = 1$, mais d'autre part que $f(-m+m) = f(-m)f(m)$. Donc $1 = f(-m)f(m)$; et nous concluons que

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)}. \tag{14.1336}$$

(4) **Pour $q = 1/n$** Nous savons que $f(1) = a$, mais $1 = \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}$ (avec n termes), donc

$$a = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^n. \tag{14.1337}$$

Cela implique que $f(\frac{1}{n})^n = a$. La proposition 14.419 indique qu'il existe un unique $x > 0$ tel que $x^n = a$. Vu que nous savons déjà que f est partout positive[180], cette contrainte fixe $f(1/n)$ et la définition 14.420 nous permet d'écrire

$$f(\frac{1}{n}) = a^{1/n}. \tag{14.1338}$$

(5) **Pour $q \in \mathbb{Q}$** Nous posons $q = m/n$. Le nombre q peut être écrit sous la forme $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ avec m termes. Donc

$$f(\frac{m}{n}) = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n} \tag{14.1339}$$

où nous avons utilisé le lemme 14.426.

La preuve de (1) est terminée.

(1) **Démonstration de (2)** Nous faisons maintenant la preuve de (2). Nous supposons que f vérifie l'équation fonctionnelle et qu'elle est monotone. Pour fixer les idées, nous supposons qu'elle est monotone croissante[181].

Nous considérons les parties[182]

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q < x\} \tag{14.1340a}$$
$$B = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q > x\}. \tag{14.1340b}$$

Vu que f est croissante, nous avons $f(x) \geqslant f(q)$ pour tout $q \in A$ et $f(x) \leqslant f(q)$ pour tout $q \in B$. En passant au supremum et à l'infimum,

$$\sup_{q \in A} f(q) \leqslant f(x) \leqslant \inf_{q \in B} f(q). \tag{14.1341}$$

Mais il existe dans A une suite strictement croissante convergente q_i vers x (parce que $x = \sup(A)$), donc

$$a^x = \lim_i a^{q_i} \tag{14.1342}$$

par la définition 14.436. Et de même, il existe une suite r_i décroissante dans B telle que $x = \lim r_i$. Cette suite donne aussi

$$a^x = \lim_i a^{r_i}. \tag{14.1343}$$

Nous avons donc l'encadrement

$$a^x \leqslant f(x) \leqslant a^x, \tag{14.1344}$$

qui implique que $f(x) = a^x$.

[180] C'est ici que l'hypothèse de fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est cruciale. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ceci ne fonctionne pas, et de loin.
[181] Si f est monotone décroissante, soit vous adaptez la preuve, soit vous essayez de voir si on ne peut pas recycler le cas croissant en l'appliquant à $-f$.
[182] Il du meilleur gout de citer le lemme 4.60 pour dire qu'ils sont non vides.

(2) **Démonstration de (3)**

Nous ne supposons plus que f est monotone. Au lieu de cela nous supposons qu'elle est continue. Nous avons déjà vu en (1) que $f = g_a$ sur $\mathbb{Q}$. Mais par hypothèse f est continue et par la proposition 14.437, g_a est continue. La proposition 14.64 conclut que $f = g_a$ sur $\mathbb{R}$.

□

PROPooLTLWooBGcXAZ

Proposition 14.475 ([485]).
Soit $a \in \mathbb{R}$.

ITEMooJDMKooAfUWnv

(1) Si elle existe, une solution y à l'équation différentielle EQooSJBOooWbgvDg

$$\begin{cases} y' = y & \text{(14.1345a)} \\ y(1) = a. & \text{(14.1345b)} \end{cases}$$

est nulle soit sur tout $\mathbb{R}$ soit nulle part.

ITEMooYPYAooHtCflq

(2) L'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y & \text{(14.1346a)} \\ y(1) = a. & \text{(14.1346b)} \end{cases}$$

possède une unique solution $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cette solution est donnée par

$$y(x) = \frac{a}{e} e^x \tag{14.1347}$$

EQooNHOOooLLGzBR

où e est la constante définie en 14.473(4).

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Supposons que y est une solution non identiquement nulle. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $y(x_1) \neq 0$. Alors en posant

$$z(x) = \frac{y(x + x_1)}{y(x_1)} \tag{14.1348}$$

nous avons $z' = z$ et $z(0) = 1$. Le lemme 14.470 nous dit alors que z ne s'annule pas. Donc y non plus.

(2) **Pour (2), existence** Si $a = 0$ alors nous avons la solution $y = 0$ qui fonctionne. Sinon, il suffit de vérifier que (14.1347) fonctionne. C'est le cas grâce à la proposition 14.473 et au fait que $y = \frac{a}{e} g_e$.

(3) **Pour (2), unicité** Si $a = 0$ alors le point (1) dit que l'unique solution est $y = 0$. Si $a \neq 0$ alors nous savons qu'aucune solution ne s'annule où que ce soit, et nous pouvons travailler.

Nous supposons que y et g sont des solutions du problème (14.1345). En posant $h_1(x) = y(x)y(-x)$ et en dérivant nous trouvons que h est constante. Nous posons $A = h(x)$. En particulier pour $x = 1$ nous avons $y(1) = a$ et donc

$$A = h(1) = ay(-1). \tag{14.1349}$$

Nous faisons de même avec $h_2(x) = g(x)y(-x)$. Nous trouvons de même que h_2 est constante et nous posons $h_2(x) = B$. En évaluant en $x = 1$ nous trouvons

$$B = h_2(1) = ay(-1), \tag{14.1350}$$

de telle sorte que $A = B$.

Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{h_2(x)}{y(-x)} && \text{(14.1351a)} \\ &= \frac{B}{y(-x)} && \text{(14.1351b)} \\ &= B\frac{y(x)}{A} && \text{(14.1351c)} \\ &= y(x). && \text{(14.1351d)} \end{aligned}$$

Notons que ce calcul est possible parce que $y(-x) \neq 0$ pour tout x. D'où l'importance du point (1).

□

14.40.3 Dérivation de la fonction puissance (seconde)

La proposition suivante donne la dérivée de $x \mapsto x^q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. La formule donnée est encore valable pour $x \mapsto x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais elle demandera plus de théorie pour être démontrée, voir la proposition 16.297.

PROPooSGLGooIgzque

Proposition 14.476 ([1]).
Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{14.1352}$$

En particulier, f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Petit à petit.

(1) **Naturel** Nous prouvons que $(x^n)' = nx^{n-1}$ par récurrence en utilisant la règle de Leibniz de la propositon 14.196(3).

D'abord pour $n = 1$ nous avons $f_1(x) = x$ et donc

$$f'_1(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x+\epsilon) - x}{\epsilon} = 1. \tag{14.1353}$$

Supposons que $f'_k(x) = kx^{k-1}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Nous prouvons que $f'_{k+1}(x) = (k+1)x^k$. Nous avons

$$x^{k+1} = xx^k. \tag{14.1354}$$

En utilisant la règle de Leibniz et l'hypothèse de récurrence,

$$\big(x^{k+1}\big)' = (x)'x^k + x\big(x^k\big)' = x^k + x\big(kx^{k-1}\big) = x^k + kx^k = (k+1)x^k, \tag{14.1355}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(2) **Rationnel positif** Soit donc $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Le lemme 14.426 nous permet d'écrire $f_{p/q}(x) = x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$. Cela donne

$$f_{p/q}(x)^q = x^p. \tag{14.1356}$$

Nous dérivons cette relation par rapport à x en utilisant à la fois la règle pour les entiers et la règle des fonctions composées[183] :

$$qf'_{p/q}(x)^{q-1} f_{p/q}(x) = px^{p-1}. \tag{14.1357}$$

En isolant $f'_{p/q}(x)$ dans cette expression et en utilisant le fait que $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, nous trouvons le résultat.

(3) **Rationnels négatifs**

Soit $\alpha = -p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous avons $x^{-p/q} = \frac{1}{f_{p/q}(x)}$. En utilisant la proposition 14.196(5) et le point déjà prouvé sur les rationnels positifs,

$$f'_{p/q} = -\frac{f'_{-p/q}}{f^2_{p/q}} = -\frac{(-p/q)x^{-p/q-1}}{x^{-2p/q}} = (p/q)x^{p/q-1}. \tag{14.1358}$$

Notez l'utilisation de la proposition 14.447 au dénominateur.

(4) **Irrationnel**

Ah ah ! On vous a bien eu. Les irrationnels, c'est pour la proposition 16.297.

En ce qui concerne le fait que la fonction f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, c'est simplement une récurrence. Attention : si le rationnel α est négatif, $f_\alpha(0)$ n'est pas défini. Mais, lorsque α est positif non entier, à partir d'un certain ordre, les dérivées font intervenir x^β avec $\beta < 0$. D'où la restriction à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ du domaine sur lequel f_α est de classe C^∞.

Si α est positif entier, alors f_α est de classe C^∞ sur tout $\mathbb{R}$ parce que toutes les dérivées sont nulles à partir d'un certain ordre. □

[183] Proposition 14.196(4).

14.40.4 Vers les complexes

Nous avons déjà vu la proposition 14.473 qui dit essentiellement que si une fonction continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$, alors $f(x) = a^x$. Comme indiqué durant la preuve, cette proposition (et en particulier sa preuve) ne fonctionne pas pour les fonctions à valeurs complexes. L'endroit où cela coinçait est que la contrainte

$$f(\frac{1}{n})^n = a \tag{14.1359}$$

n'implique pas grand chose lorsque f est à valeurs complexes.

Nous allons maintenant attaquer ce problème.

LEMooDEGEooXheixp

Lemme 14.477.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = \alpha y & \text{(14.1360a)} \\ y(0) = 1 & \text{(14.1360b)} \end{cases}$$

pour $y: \mathbb{R} \to S^1$ est unique.

Démonstration. Soient deux solutions y_1 et y_2. Nous posons $h(x) = y_1(x)y_2(-x)$. Une dérivation donne

$$h'(x) = y_1'(x)y_2(-x) - y_1(x)y_2'(-x). \tag{14.1361}$$

En y substituant $y_1'(x) = \alpha y_1(x)$ et $y_2'(-x) = \alpha y_2(x)$ nous trouvons $h'(x) = 0$. Donc h est constante et nous avons

$$y_1(x)y_2(-x) = 1 \tag{14.1362}$$

EQooTWBQooBLLKSt

pour tout x. Notons que cette identité est encore valable avec $y_1 = y_2$. Nous avons en particulier les égalités $y_1(x)y_1(-x) = 1$ et $y_2(x)y_2(-x) = 1$, et nous notons au passage que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne s'annulent pas.

En substituant dans (14.1362) la valeur $y_2(-x) = \frac{1}{y_2(x)}$ nous trouvons

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = 1, \tag{14.1363}$$

ce qui signifie $y_1(x) = y_2(x)$. □

Dans la proposition suivante, S^1 désigne l'ensemble des nombres complexes de norme 1, dont un paramétrage sera donné dans la proposition 20.66(1) :

$$S^1 = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\} = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in [0, 2\pi[\}. \tag{14.1364}$$

PROPooVJLYooOzfWCd

Proposition 14.478 ([1]).
Soit une fonction continue $f: \mathbb{R} \to S^1$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y). \tag{14.1365}$$

EQooHANKooHimTUc

Alors

(1) f est dérivable,

(2) f satisfait au système

$$\begin{cases} f'(x) = f'(0)f(x) & \text{(14.1366a)} \\ f(0) = 1, & \text{(14.1366b)} \end{cases}$$

(3) il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$.

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g_m(x) = e^{imx} \tag{14.1367}$$

vérifie évidemment toutes les conditions. Le but de cette démonstration est de montrer que les conditions imposées à f la déterminent de façon univoque (à part ce m).

La condition (14.1365) nous dit que $f(0) = 1$. Soit une primitive F de f. Il existe $s > 0$ tel que $F(s) > F(0)$ parce que $F' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction G_a donnée par $G_a(x) = F(x+a)$ est une primitive de $x \mapsto f(x)f(a)$. Donc $G_a(x) = f(a)F(x)$. Cela dit nous avons

$$f(x)\big(F(s) - F(0)\big) = f(x)F(s) - f(x)F(0) = G_1(x) - G_0(x). \tag{14.1368}$$

Le membre de droite est évidemment dérivable, et $F(s) - F(0) \neq 0$. Donc f est dérivable.

Nous dérivons maintenant la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y en $y = 0$. Cela donne

$$f'(x) = f'(0)f(x). \tag{14.1369}$$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f'(x) = \alpha f(x)$.

Jusqu'ici nous avons prouvé qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha f(x) & (14.1370a) \\ f(0) = 1. & (14.1370b) \end{cases}$$

Or le lemme 14.477 donne l'unicité de la solution à ce système, et il ne faut pas chercher loin : la solution est

$$f(x) = e^{\alpha x}. \tag{14.1371}$$

Pour avoir $f(x) \in S^1$, nous devons de plus imposer que α soit imaginaire pur. Donc, en posant $\alpha = im$, nous avons $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$. □

14.41 Polynômes de Taylor

DEFooCLQZooTaylorPoly

Définition 14.479.
*Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-**analytique** sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite complexe (c_n) et $r > 0$ tels que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{14.1372}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Définition 14.480.
*Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si il existe, nous définissons le n^e **polynôme de Taylor** de f au point $a \in \mathbb{R}$ par*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{14.1373}$$

*Et la **série de Taylor** de f est la limite :*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{14.1374}$$

dans la mesure où la somme converge.

Tant que f est n fois dérivable, le polynôme P_n existe et vérifie $P_n(a) = f(a)$. Nous ne pouvons rien en dire de plus pour l'instant. En particulier, si f est de classe C^∞ il ne faudrait pas croire que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{14.1375}$$

pour tout x dans un voisinage de a. Autrement dit, même si toutes les dérivées de f existent, la série entière T n'est pas garantie de

- un rayon de convergence[184] plus grand que zéro,
- et même avec un grand rayon de convergence, que la limite soit les valeurs de f.

NORMooADIZooUmevqk

14.481.
Il n'est pas très compliqué de construire une fonction f telles que $f(0) = 0$ et telle que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k, sans pour autant que f soit nulle partout (voir les fonctions plateaux 17.14.1). Les polynômes de Taylor d'une telle fonction sont tous identiquement nuls.

[184] Définition 17.12.

Ceci pour dire qu'en posant

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \tag{14.1376}$$

nous n'avons aucune garantie de $T = f$, même pas sur le rayon de convergence de la série entière définissant P. Et nous n'avons pas de garanties d'avoir un rayon de convergence plus grand que 0.

Notons toutefois que les polynômes étant denses pour la norme supremum parmi les fonctions continues[185], pour tout compact, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément uniformément f. Mais ces polynômes ne sont pas spécialement ceux de Taylor.

14.482.
Ce que nous venons de dire en 14.481 n'est pas vrai pour les fonctions analytiques[186]. Une fonction analytique $f : \Omega \to \mathbb{R}$ s'écrit, autour de 0, sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{14.1377}$$

Demander $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k implique $a_n = 0$ pour tout n, et donc $f = 0$ sur un voisinage de 0.

La condition d'analycité est donc très rigide.

Le théorème de Taylor que nous démontrons à présent n'est pas un résultat que va dans le sens de $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. C'est un résultat qui dit juste que $\lim_{x\to a} P_n(x) = f(a)$, et que la limite va d'autant plus vite que n est grand.

Le théorème de Taylor généralise le développement limité au premier ordre de la proposition 12.311.

14.483.
Lorsque le contexte n'est pas ambigu, nous notons simplement P_n le polynôme d'ordre n de f au point a. De même nous notons le reste

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{14.1378}$$

PROPooUYCMooQjeXpn

Proposition 14.484 ([489]).
Soit une fonction f qui est n fois dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant a. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{14.1379}$$

où P_n est le n^e polynôme de Taylor de f autour de $x = a$.

Démonstration. Pour tout $k = 0, \dots, n$ nous avons $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$ et donc

$$R_n^{(k)}(a) = 0 \tag{14.1380}$$

pour $k = 0, \dots, n$. En posant d'autre part $s(x) = (x-a)^n$ nous avons $s^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$. Par conséquent la règle de L'Hôpital de la proposition 14.220 s'applique au quotient $R_n(x)/s(x)^n$. En l'utilisant n fois,

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{s(x)} = \lim_{x\to a} \frac{R^{(k)}(x)}{k!(x-a)^0} = \frac{0}{k!} = 0. \tag{14.1381}$$

□

Nous démontrons à présent que le polynôme de Taylor est le seul à avoir la propriété de la proposition 14.484.

Proposition 14.485 ([489]).
Soit f, une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. Soit un polynôme Q de degré n (ou moins) tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{14.1382}$$

EQooXPTIooQZgBsD

Alors Q est le polynôme de Taylor de degré n pour f en a ci-après simplement noté P_n.

[185] Théorème 14.461.
[186] Définition 14.479 qu'il faut écrire pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Démonstration. D'après la proposition 14.484, la fonction $f - P_n$ vérifie la même limite que $f - Q$. Donc $P_n - Q$ vérifie également la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(P_n - Q)(x)}{x^n} = 0. \tag{14.1383}$$

Nous notons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. La relation (14.1383) donne en particulier

$$\lim_{x\to 0} (P_n - Q)(x) = 0 \tag{14.1384}$$

qui donne $a_0 - b_0 = 0$. Nous continuons par récurrence en supposant que $a_i = b_i$ pour $i = 0, \dots, k$. Alors

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{(P_n - Q)(x)}{x^{k+1}} = \lim_{x\to 0} \sum_{l=k+1}^{n} (a_l - b_l) x^{l-(k+1)}. \tag{14.1385}$$

Le seul terme non nul à droite est celui vérifiant $l - (k+1) = 0$. Et ce terme donne l'équation

$$a_{k+1} - b_{k+1} = 0, \tag{14.1386}$$

c'est-à-dire $a_{k+1} = b_{k+1}$. La récurrence continue ainsi jusqu'à $k = n$, et nous pouvons conclure que $Q = P_n$. □

L'intérêt de cette proposition est que si l'on trouve, par n'importe quel moyen, un polynôme Q vérifiant la condition (14.1382), alors nous savons que c'est le polynôme de Taylor.

ThoTaylor

Théorème 14.486 (Théorème de Taylor[388, 490])**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ ainsi que $a \in I$. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors il existe une fonction α définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

SubEqsDevTauil

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \alpha(x)(x-a)^n, \tag{14.1387a}$$

subeqTepseqb

$$\lim_{t\to a} \alpha(t) = 0 \tag{14.1387b}$$

pour tout $x \in I$. Ici $f^{(k)}$ dénote la k-ième dérivée de f (en particulier, $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$).

Démonstration. Si $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, il suffit de poser

$$\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \tag{14.1388}$$

et d'utiliser la proposition 14.484. □

Remarque 14.487.
Quelque remarques.

(1) La formule (14.1387a) est une égalité, et non une approximation. Ce qui serait une approximation serait de réécrire la formule dans le terme contenant α.

(2) Nous avons l'égalité (14.1387a) uniquement sur I. Pour les x hors de I, le polynôme existe évidemment, mais nous n'avons pas spécialement de fonction α, et d'ailleurs la fonction f n'est pas spécialement définie.

14.488.
Les conditions (14.1387) sont souvent aussi énoncées sous la forme qu'il existe une fonction α telle que

SUBEQooPYABooKpDg

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{t^n} = 0 & \text{(14.1389a)} \\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \alpha(h). & \text{(14.1389b)} \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une expression pas tout à fait explicite, mais pas mal quand même pour le reste de Taylor.

THOooSIGRooJTLvlV

Théorème 14.489.
Soient un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ ainsi que $a \in I$. Soit encore une fonction de classe C^{k+1} sur I.

(1) Pour tout $x \in I$, il existe un $c \in]a,x[$ tel que l'égalité

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{14.1390}$$

EQooQFMFooBVpGzy

soit vérifiée.

ITEMooVGBVooGXXvIz

(2) Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{B(a,h)} \subset I$. Il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{14.1391}$$

Démonstration. Pour les besoins de la preuve, nous allons démontrer la formule (14.1390) pour un $b \in I$ au lieu de x. C'est juste que nous allons écrire b au lieu de x parce que nous aurons besoin de la notation x dans le courant de la preuve.

Nous posons

$$R(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{14.1392}$$

Cela vérifie $R(a) = f(a) - f(a) = 0$ et même

$$R^{(j)}(a) = 0 \tag{14.1393}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$. Nous posons encore

$$F(x) = R(x) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1}. \tag{14.1394}$$

Nous avons $F^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, n$ ainsi que

$$F(b) = R(b) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(b-a)^{n+1} = 0. \tag{14.1395}$$

et aussi

$$F(a) = R(a) - 0 = 0. \tag{14.1396}$$

Bref, la fonction F vérifie les conditions de la généralisation 14.212 du lemme de Rolle. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $F^{(n+1)}(c) = 0$. Mais vu que $P_n^{(n+1)}(x) = 0$, nous avons $R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, de telle sorte que

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{R(b)(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}. \tag{14.1397}$$

En injectant cela dans la définition de F

$$F(x) = R(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{14.1398}$$

En évaluant en $x = b$, et en nous souvenant que $F(b) = 0$, nous trouvons

$$0 = R(b) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{14.1399}$$

qui est ce que nous voulions prouver.

En ce qui concerne la seconde formule, un point arbitraire entre a et $a+h$ est bien $a+\theta h$ avec $\theta \in]0,1[$[187]. □

Voici un énoncé pour les fonctions à plusieurs variables.

THOooTDFRooEkChgi

Théorème 14.490 ([491]).
Si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est une application n fois différentiable en $a \in E$ alors il existe une fonction $\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \ldots + & \text{(14.1400a)} \\ \qquad + \ldots + \frac{1}{n!}(d^nf)_a(h,\ldots,h) + \|h\|^n\epsilon(\|h\|) & \text{(14.1400b)} \\ \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0. & \text{(14.1400c)} \end{cases}$$

[187] Faites le calculs, je ne l'ai pas fait. Écrivez-moi pour me dire si c'est bon ou non.

14.41.1 Fonctions « petit o »

Nous voulons formaliser l'idée d'une fonction qui tend vers zéro « plus vite » qu'une autre. Nous disons que $f \in o\big(\varphi(x)\big)$ si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0. \tag{14.1401}$$

En particulier, nous disons que $f \in o(x)$ lorsque $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$.

En termes de notations, nous définissons l'ensemble $o(x)$ l'ensemble des fonctions f telles que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \tag{14.1402}$$

Plus généralement si g est une fonction telle que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, nous disons $f \in o(g)$ si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{14.1403}$$

De façon intuitive, l'ensemble $o(g)$ est l'ensemble des fonctions qui tendent vers zéro « plus vite » que g.

Nous pouvons donner un énoncé alternatif au théorème 14.486 en définissant $h(x) = \epsilon(x + a)x^n$. Cette fonction est définie exprès pour avoir

$$h(x - a) = \epsilon(x)(x - a)^n, \tag{14.1404}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \epsilon(x - a) = \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0. \tag{14.1405}$$

Donc $h \in o(x^n)$.

Le théorème dit donc qu'il existe une fonction $\alpha \in o(x^n)$ telle que

$$f(x) = T^a_{f,n}(x) + \alpha(x - a). \tag{14.1406}$$

pour tout $x \in I$.

Remarque 14.491.
À titre personnel, l'auteur de ces lignes déconseille d'utiliser cette notation qui est un peu casse-figure pour qui ne la maîtrise pas bien.

Exemple 14.492.
Le développement en série du cosinus sera traité dans la proposition 20.81. △

PROPooTOXIooMMlghF

Proposition 14.493 (Ordre deux sur $\mathbb{R}^n$[1])**.**
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$ ainsi qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2 f)_a(h, h) + \|h\|^2\alpha(h) & \text{(14.1407a)} \\ \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. & \text{(14.1407b)} \end{cases}$$

Ici, la notation $(d^2 f)_a(h, h)$ réfère à ce qui est expliqué en 14.384.

Démonstration. Dans la suite nous considérons t et h tels que toutes les expressions suivantes aient un sens, c'est-à-dire que tous les trucs comme $a + th$ restent dans Ω. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ nous nommons e_h le vecteur unitaire dans la direction de h, c'est-à-dire $e_h = h/\|h\|$ et nous posons

$$k_h(t) = f(a + te_h). \tag{14.1408}$$

et nous lui appliquons Taylor 14.486 à l'ordre deux : il existe une fonction β_h telle que

$$k_h(x) = k_h(0) + xk'_h(0) + \frac{x^2}{2}k''_h(0) + x^2\beta_h(x). \tag{14.1409}$$

EQooETDFooAmiRcV

avec $\lim_{x\to 0} \beta_h(x) = 0$.

En ce qui concerne les dérivées de k_h nous avons

$$k'_h(0) = df_a(e_h) \tag{14.1410}$$

et

$$k_h''(0) = (d^2f)_a(e_h, e_h). \tag{14.1411}$$

Il est maintenant temps d'écrire $f(a+h) = k(\|h\|)$ et de substituer les dérivées de k par les différentielles de f dans (14.1409) :

$$f(a+h) = k(\|h\|) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h^2\|\beta_h(\|h\|). \tag{14.1412}$$

EQooUSUGooYPscxV

Il reste à voir que la fonction $\alpha\colon h \mapsto \beta_h(\|h\|)$ tend vers zéro pour $h \to 0$. En prenant la limite $h \to 0$ dans (14.1412), il est manifeste que la limite du membre de gauche existe et vaut $f(a)$. Donc la limite du membre de droite doit exister et valoir également $f(a)$. Nous en déduisons que la limite de

$$df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \|h\|^2\beta_h(\|h\|) \tag{14.1413}$$

existe et vaut zéro. La limite des deux premiers termes existe et vaut zéro, donc la limite du troisième existe et vaut zéro :

$$\lim_{h\to 0} \|h\|^2\beta_h(\|h\|) = 0. \tag{14.1414}$$

□

PROPooWWMYooPOmSds

Proposition 14.494.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et deux fois différentiable sur $]x, x+h[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_{x+\theta h}(h,h). \tag{14.1415}$$

14.41.2 Autres formulations

ExempleUtlDev

Exemple 14.495.
Une des façons les plus courantes d'utiliser les formules (14.1387) est de développer $f(a+t)$ pour des petits t en posant $x = a+t$ dans la formule :

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + f''(a)\frac{t^2}{2} + \epsilon(a+t)t^2 \tag{14.1416}$$

EqDevfautourapps

avec $\lim_{t\to 0} \epsilon(a+t) = 0$. Ici, la fonction T dont on parle dans le théorème est $T^a_{f,2}(a+t) = f(a) + f'(a)t + f''(a)\frac{t^2}{2}$.

Lorsque x et y sont deux nombres « proches[188] », nous pouvons développer $f(y)$ autour de $f(x)$:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + f''(x)\frac{(y-x)^2}{2} + \epsilon(y-x)(y-x)^2, \tag{14.1417}$$

Eqfydevfx

et donc écrire

$$f(x) - f(y) = -f'(x)(y-x) - f''(x)\frac{(y-x)^2}{2} - \epsilon(y-x)(y-x)^2. \tag{14.1418}$$

De cette manière nous obtenons une formule qui ne contient plus que y dans la différence $y - x$. △

14.41.3 Formule et reste

PropDevTaylorPol

Proposition 14.496.
Soient $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \text{Int}(I)$. Soit un entier $k \geqslant 1$. Si f est k fois dérivable en a, alors il existe un et un seul polynôme P de degré $\leqslant k$ tel que

$$f(x) - P(x-a) \in o\big(|x-a|^k\big) \tag{14.1419}$$

lorsque $x \to a$, $x \neq a$. Ce polynôme est donné par

$$P(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k. \tag{14.1420}$$

[188] par exemple dans une limite $(x,y) \to (h,h)$.

Notons encore deux façons alternatives d'écrire le résultat. Si $f \in C^k$ il existe une fonction α telle que $\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0$ et

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\alpha(x-a). \tag{14.1421}$$

Si $f\in C^{k+1}$ alors

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^{n+1}\xi(x-a) \tag{14.1422}$$

EquQtpoN

où ξ est une fonction telle que $\xi(t)$ tend vers une constante lorsque $t\to 0$.

14.41.4 Reste intégral

Comme son nom l'indique, le « reste intégral » demande de savoir les intégrales. La formule du reste intégral sera donc pour après la définition des intégrales, proposition 22.129.

14.42 Développement limité autour de zéro

Dans cette sections nous supposons toujours que les fonctions sont définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, I, contenant 0.

14.42.1 Généralités

Définition 14.497.
*Soit $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert I autour de zéro. Nous disons que f admet un **développement limité** autour de 0 à l'ordre n si il existe une fonction $\alpha\colon I\to\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} f(x)=P_n(x)+x^n\alpha(x) & \text{(14.1423a)}\\ \lim_{x\to 0}\alpha(x)=0 & \text{(14.1423b)}\end{cases}$$

*où $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ est une polynôme de degré n. Le polynôme P_n est appelé la **partie régulière** du développement.*

La fonction α est appelé le **reste** du développement et sera parfois noté α_f. Lorsque P est la partie régulière d'un développement limité de f nous notons parfois $f\sim P$.

Proposition 14.498 (Troncature)**.**
Si f admet un développement limité d'ordre n alors il admet également un développement limité d'ordre n' pour tout $n'<n$. Ce dernier s'obtient en tronquant le polynôme d'ordre n à l'ordre n'.

Proposition 14.499 (Unicité)**.**
Si f admet une développement limité alors ce dernier est unique : il existe un unique polynôme P_n d'ordre n et une unique fonction α vérifiant simultanément les deux conditions

$$\begin{cases} f(x)=P_n(x)+x^n\alpha(x), & \text{(14.1424a)}\\ \lim_{x\to 0}\alpha(x)=0. & \text{(14.1424b)}\end{cases}$$

ExTHGooCBcnAy

Exemple 14.500.
En ce qui concerne les séries géométriques de raison x nous savons les formules

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{14.1425}$$

et

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x} \tag{14.1426}$$

pour tout $x\in\,]-\infty,1[$. Comparant les deux, il est naturel d'essayer de prendre $1+x+x^2+\cdots+x^n$ comme développement limité de la fonction $f(x)=\frac{1}{1-x}$. Pour voir si cela fonctionne, il faut vérifier si « le reste » est bien de la forme $x^n\alpha(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

Le reste en question est donné par

$$\frac{1}{1-x}-1-x-x^2-\ldots-x^n=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{x^{n+1}}{1-x}=x^n\frac{x}{1-x}. \tag{14.1427}$$

En posant $\alpha(x) = \frac{x}{1-x}$ nous avons donc bien

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x} \tag{14.1428}$$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Cela est le développement limité de f à l'ordre n autour de 0. △

La formule des accroissements finis est un cas particulier de développement fini. Supposons que f soit dérivable en 0. En effet nous pouvons facilement trouver la fonction α qui convient. Sachant que $f(0)+xf'(0)$ donne l'approximation affine de f autour de 0, nous cherchons α en écrivant

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x). \tag{14.1429}$$

Cela nous pousse à définir

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0). \tag{14.1430}$$ EqDCFooKozKrt

Notons que cette fonction n'est pas définie en $x = 0$, mais cela n'a pas d'importance : seule la limite $\lim_{x\to 0} \alpha(x)$ nous intéresse. Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = 0. \tag{14.1431}$$

En conclusion si f est dérivable, son développement limité à l'ordre 1 est donné par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x) \tag{14.1432}$$

où $\alpha(x)$ est donnée par la formule (14.1430).

14.42.2 Formule de Taylor-Young

Plus généralement nous avons la proposition suivante qui donne le développement limité de toute fonction dérivable n fois.

PropVDGooCexFwy

Proposition 14.501 (Formule de Taylor-Young)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\alpha(x) \tag{14.1433}$$ EQooBKZDooToYyJR

et

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0. \tag{14.1434}$$

Cette proposition nous permet de calculer facilement des développements limités tant que nous sommes capables de calculer les dérivées successives de la fonction à développer. Dans l'exemple 14.500 nous avons dû utiliser des astuces et des formules pour déterminer le développement limité de $\frac{1}{1-x}$. Au contraire la formule (14.1433) nous permet de trouver le polynôme en appliquant mécaniquement une formule simple.

Exemple 14.502.
Utilisation de la formule (14.1433) pour déterminer le développement limité de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{14.1435}$$

Il faut calculer les dérivées successives de f :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{14.1436a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{14.1436b}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \tag{14.1436c}$$

Avec ces résultats, nous devinons que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \tag{14.1437}$$

Pour en être sûr nous le prouvons par récurrence. La dérivée de $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ est donnée par

$$\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}. \tag{14.1438}$$

Évaluées en $x=0$, les dérivées successives de f sont $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$,...,$f^{(n)}(0)=n!$. Utilisant la formule (14.1433) nous avons

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\alpha(x), \tag{14.1439}$$

conformément à ce que nous avions déjà trouvé. △

EXooFLBJooYfuRsG

Exemple 14.503.
Soient $r \in \mathbb{Q}$ et la fonction donnée par

$$f(x) = (1+x)^r. \tag{14.1440}$$

Nous notons I le domaine de cette fonction : c'est $\mathbb{R}$ si $r > 0$ ou $[-1, \infty]$ si $r < 0$. Si par contre $r = 0$, la fonction est constante et le domaine est $I = \mathbb{R}$.

En ce qui concerne les dérivées[189] : $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$ et plus généralement

$$f^{(k)}(x) = r(r-1)\dots(r-k+1)(1+x)^{r-k} \tag{14.1441}$$

si $k > 0$. Pour $k = 0$ nous avons $f^{(k)}(0) = 1$. Le développement de Taylor-Young est alors

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}x^k + x^n\alpha(x). \tag{14.1442}$$

Notons que que si r est un entier, pour $k = r$, le produit au numérateur s'annule et le développement s'arrête.

Dans le développement de $(1+x)^r$, nous reconnaissons la formule de $\binom{r}{k}$, sauf que nous ne pouvons pas l'écrire avec cette notation lorsque r n'est pas entier. △

Cet exemple fonctionnera encore avec $r \in \mathbb{R}$ au lieu de $r \in \mathbb{Q}$, mais il faudra la proposition 17.107 pour la dérivée

Remarque 14.504.
Pour alléger la notation et ne pas écrire $\dots + x^n\alpha(x)$ nous pouvons aussi écrire

$$f(x) \sim 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, \tag{14.1443}$$

mais il est interdit d'écrire

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{14.1444}$$

en mettant un signe d'égalité entre une fonction et son développement limité[190].

Notons cependant que la proposition 14.501 ne donne pas de moyen simple de trouver la fonction α. Si la fonction f est très régulière dans l'intervalle I on a le résultat suivant.

PropResteTaylorc

Proposition 14.505 (Taylor avec reste de Lagrange)**.**
Soient I, un intervalle dans $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k sur I telle que $f^{(k+1)}$ existe sur I. Soient $a \in \mathrm{Int}(I)$ et $x \in I$. Alors il existe $c \in]x, a[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{14.1445}$$

14.42.3 Règles de calcul

Les règles suivantes permettent de calculer les développements limités des fonctions qu'on peut écrire comme combinaison de fonctions dont nous savons déjà le développement.

Il est toujours possible de calculer le développement limité d'une fonction par la formule de Taylor-Young (proposition 14.501). Les règles suivantes peuvent nous économiser de l'effort et du temps.

[189] Nous utilisons la proposition 14.476.

[190] Il faut cependant être très prudents avec la notation abrégée. Elle pourrait nous faire oublier des informations importantes, voir les développements des fonctions trigonométriques pour un exemple.

14.42.3.1 Linéarité des développements limités

L'opération qui consiste à prendre le développement limité d'une fonction est une opération linéaire : connaissant les développements limités de f et de g, il suffit de les sommer pour obtenir celui de $f+g$. De même, si λ est une constante, le développement limité de λf est le développement limité de f fois λ.

PROPooAUVPooGRIZYF

Proposition 14.506.
Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions acceptant des développements limités d'ordre n EqJPPooCHihNn

$$f(x) = P(x) + x^n\alpha_f(x) \tag{14.1446a}$$
$$g(x) = Q(x) + x^n\beta(x) \tag{14.1446b}$$

avec $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = \lim_{x\to 0}\beta(x) = 0$, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet le développement limité

$$(\lambda f + mug)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + x^n(\lambda\alpha + \mu\beta)(x). \tag{14.1447}$$ EqCIFooVpvCtc

Remarque 14.507.
La forme explicite du reste ne nous interesse pas. Dans la pratique on écrira toujours $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n\alpha(x)$, où on appelle α une fonction opportune telle que $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.

Démonstration. Vu les définitions (14.1446) des polynômes P, Q et des restes α et β, l'égalité (14.1447) est une conséquence de la linéarité de la dérivation et de la proposition 14.501

De plus $P+Q$ est un polynôme de degré n dès que P et Q sont des polynômes de degré n, et

$$\lim_{x\to 0}(\lambda\alpha + \mu\beta)(x) = \lim_{x\to 0}\lambda\alpha(x) + \lim_{x\to 0}\mu\beta(x) = 0. \tag{14.1448}$$

Par conséquent $\lambda\alpha + \mu\beta$ est la fonction de reste de $\lambda f + \mu g$. □

ExKPBooJmdFvY

Exemple 14.508.
Calculer le développement de la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x}. \tag{14.1449}$$

Le développement de $\sqrt[3]{1+x}$ est donné par la formule de l'exemple 14.503 avec $\alpha = \frac{1}{3}$. Nous avons donc dans un premier temps

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3 + x^3\alpha(x) \tag{14.1450a}$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x). \tag{14.1450b}$$

Nous avons alors

$$3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x} = 3\Big[1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x)\Big] + 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\beta(x) \tag{14.1451a}$$
$$= 4 - x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{31}{27}x^3 + x^3\big(\alpha(x) + \beta(x)\big). \tag{14.1451b}$$

△

La condition $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$ signifie que l'approximation qui consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme n'est pas une trop mauvaise approximation lorsque x est petit. Cela ne signifie rien de plus. En particulier si x est grand, l'approximation polynomiale peut-être (et est souvent) très mauvaise.

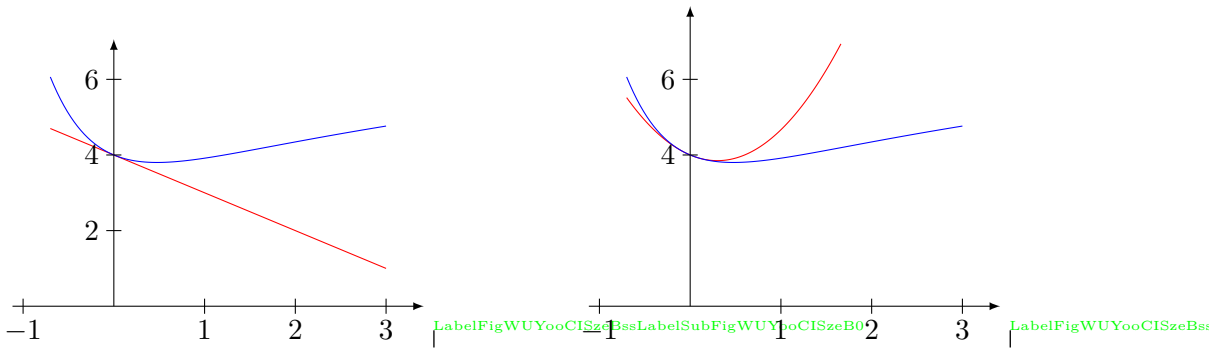
À ce propos, notez qu'un polynôme tend toujours vers $\pm\infty$ lorsque x est grand. Une approximation polynomiale d'une fonction bornée est donc toujours (très) mauvaise pour les grandes valeurs de x.

À titre d'exemple nous avons tracé sur la figure 14.12 la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} + e^{-2x} \tag{14.1452}$$

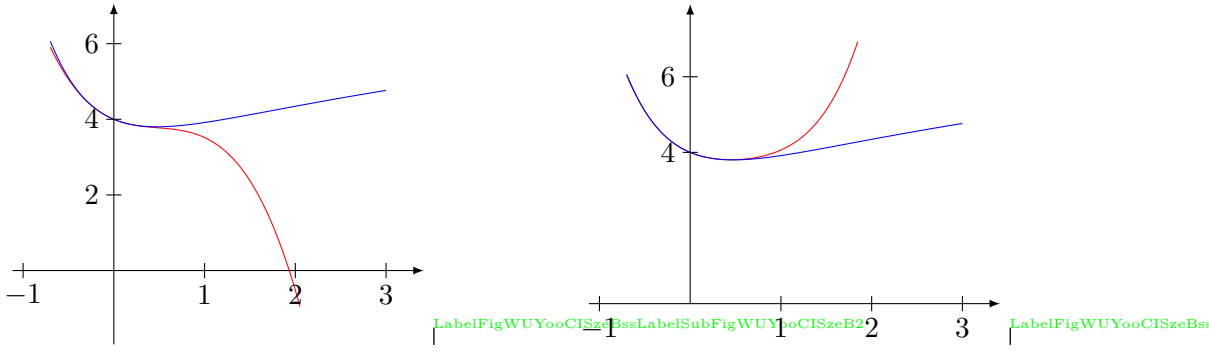
et ses développements limités d'ordre 1 à 3. Il est particulièrement visible que l'approximation est assez bonne pour la partie gauche du graphe sur laquelle la fonction est bien croissante, alors qu'elle est franchement mauvaise sur la droite où le graphe ressemble plutôt à une constante[191].

[191] Pouvez-vous cependant dire que vaut $\lim_{x\to\infty} f(x)$?



(a) Polyôme d'ordre 1

(b) Polyôme d'ordre 2



(c) Polyôme d'ordre 3

(d) Polyôme d'ordre 4

FIGURE 14.12 : Les développements limités d'ordre de plus en plus grand de la fonction de l'exemple 14.508. La fonction est en bleu et les « approximations » sont en rouge.

LabelFigWUYooCISzeB

14.42.3.2 Développement limité d'un quotient

PROPooMANAooXhuanS

Proposition 14.509.
Si P_f est le polynôme du développement limité de f à l'ordre n et P_g celui de g, alors nous obtenons le développement limité de f/g à l'ordre n en effectuant la division selon les puissances croissantes de P_f par P_g.

Attention : il s'agit bien de faire une division selon les puissances croissantes, et non une divisions euclidienne. La division euclidienne de A par B consiste à écrire $A = BQ + R$ avec le reste R de degré le plus *petit* possible. Ici nous voulons avoir un reste de degré le plus *grand* possible.

14.42.3.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 14.510.
Soient f et g des fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. Nous supposons que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Alors la composée $f\big(g(x)\big)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en substituant le développement de g à chaque «x» du développement de f, et en supprimant tous les termes de degré plus élevé que n.

14.43 Développement ailleurs qu'à l'origine

Il est intéressant de développer une fonction au voisinage de zéro lorsque nous nous intéressons à son comportement pour les x pas très grands. Il est toutefois souvent souhaitable de savoir le comportement d'une fonction au voisinage d'autres valeurs que zéro.

Pour développer la fonction f autour de x_0, nous considérons la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ que nous développons autour de zéro (pour h). L'objectif est de trouver une polynôme P et une fonction α tels que

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \alpha(x) & \text{(14.1453a)} \\ \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0. & \text{(14.1453b)} \end{cases}$$

En pratique, le développement limité à l'ordre n d'une fonction autour d'un point x_0 quelconque à l'intérieur de son domaine prend la forme suivante, qui généralise la formule de Taylor-Young vue dans la

proposition 14.501

Proposition 14.511 (Formule de Taylor-Young, cas général).
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

EqTJRpoUbevzJ

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+ \\ + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\alpha(x-x_0) \tag{14.1454}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0. \tag{14.1455}$$

14.44 Développement au voisinage de l'infini

Il est souvent utile de connaitre le comportement d'une fonction pour les grandes valeurs de x et de déterminer ses asymptotes éventuelles. La technique que nous allons utiliser consiste à poser $x = \frac{1}{h}$ et de développer la fonction "auxiliaire" $g(h) = f(1/h)$ autour de $h = 0$. La limite avec $h \to 0^+$ donnera le comportement pour $x \to \infty$ et la limite $h \to 0^-$ donnera le comportement pour $x \to -\infty$.

Dans le cas d'une développement autour de $\pm\infty$ nous ne parlons plus de développement *limité* mais de **développement asymptotique**.

14.44.1 La fonction puissance : remarques pour la suite

Il y a encore de nombreuses choses à dire sur la fonction puissance. Pour savoir lesquelles, voir le thème 52.

14.45 Fonctions réelles de deux variables réelles

Une **fonction réelle de 2 variables réelles** est une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$.

Le **graphe de** f, noté $\operatorname{Gr} f$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ et } z = f(x, y)\}$$

Les **courbes de niveau** de la fonction f sont obtenues en posant $f(x, y) = \lambda$.

14.45.1 Limites de fonctions à deux variables

Ici nous n'allons pas entrer dans tous les détails, mais simplement mentionner les quelques techniques les plus courantes.

ThoLimiteCompose

Théorème 14.512.
Soient deux fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si a est un point adhérent au domaine de $g \circ f$ et si

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= b \\ \lim_{y\to b} g(y) &= c, \end{aligned} \tag{14.1456}$$

alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c. \tag{14.1457}$$

Les techniques usuelles sont

(1) La règle de l'étau. Cette technique demande un peu plus d'imagination parce qu'il faut penser à un « truc » différent pour chaque exercice. En revanche, la justification est facile : il y a un théorème qui dit que ça marche.

(2) Lorsqu'on applique la règle de l'étau, penser à

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{14.1458}$$

Cela permet de majorer le numérateur. Attention : ce genre de majoration fonctionne seulement au numérateur : agrandir le dénominateur ferait diminuer la fraction.

(3) Il n'est pas vrai que

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^4} \leqslant \sqrt{x^4 + 2y^4}. \tag{14.1459}$$

En effet, si x est petit, alors $x^2 > x^4$, et non le contraire.

Une technique très efficace pour les limites $(x, y) \to (0, 0)$ est le passage aux coordonnées polaires. Il s'agit de poser

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) & \text{(14.1460a)} \\ y = r\sin(\theta) & \text{(14.1460b)} \end{cases}$$

et puis de faire la limite $r \to 0$.

Si la limite obtenue **ne dépend pas de** θ, alors c'est la limite cherchée. Voici quelque exemples.

EXooASMWooCBSyVf

Exemple 14.513.
Calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}. \tag{14.1461}$$

Ici la méthode des chemins pour est particulièrement éclairante. Regardons d'abord la fonction sur la droite $x = y$. Nous avons

$$f(x, y) = \frac{x - x}{2x} = 0. \tag{14.1462}$$

Donc la fonction est nulle sur toute la ligne.

Si nous regardons maintenant la ligne verticale $x = 0$, nous avons

$$f(0, y) = \frac{-y}{y} = -1, \tag{14.1463}$$

donc la fonction vaut -1 sur toute la ligne verticale. △

Beaucoup d'autres exemples seront donné en 20.245 lorsque nous aurons vu les coordonnées polaires.

14.45.2 Dérivées partielles

La **dérivée partielle** par rapport à x au point (x, y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \tag{14.1464}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à x en considérant que y est constante.

De la même manière, la dérivée partielle par rapport à y au point (x, y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \tag{14.1465}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à y en considérant que x est constante.

Pour les dérivées partielles secondes,

- $f''_{xx}(x, y) = (f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$.
- $f''_{yy}(x, y) = (f'_y)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$.
- $f''_{xy}(x, y) = (f'_x)'_y = (f'_y)'_x = f''_{yx}(x, y)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

14.45.3 Différentielle et accroissement

La **différentielle totale** de f au point (a, b) est donnée, quand elle existe (!), par la formule

$$df(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy. \tag{14.1466}$$

De la même façon que la formule des accroissements finis disait que $f(x + a) \simeq f(x) + af'(x)$, en deux dimensions nous avons que l'**accroissement** approximatif de f au point (a, b) pour des accroissements Δx et Δy est

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \tag{14.1467}$$

Le **plan tangent** au graphe de f au point $\big(a,b,f(a,b)\big)$ est

$$T_{(a,b)}(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \tag{14.1468}$$

essayez d'écrire l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x)$ au point $x=a$ en termes de la dérivée de f, et comparez votre résultat à cette formule.

Un des principaux théorèmes pour tester la différentiabilité d'une fonction est le suivant.

ThoProuverDiffable

Théorème 14.514.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$. Si les dérivées partielles existent dans un voisinage de a et donc continues en a, alors f est différentiable en a.

Le plus souvent, nous prouvons qu'une fonction est différentiable en calculant les dérivées partielles et en montrant qu'elles sont continues.

Dérivation implicite : Soit $F(x,f(x))=0$ la représentation implicite d'une fonction $y=f(x)$ alors

$$y'=f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

14.46 Les fonctions à valeurs vectorielles

Jusqu'à présent nous avons vu des fonctions de plusieurs variables qui prenaient leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons maintenant voir ce qu'il se passe lorsque les fonctions prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Une fonction d'une variable est dite **à valeurs vectorielles** lorsque

$$\begin{aligned} f\colon I\subset\mathbb{R}&\to\mathbb{R}^3\\ f(x)&=\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\f_3(x)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14.1469}$$

Les fonctions $f_i\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont les **composantes** de f. Ce que nous avons raconté à propos des dérivées passe facilement :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}=\begin{pmatrix}\frac{f_1(a+\epsilon)-f_1(a)}{\epsilon}\\\frac{f_2(a+\epsilon)-f_2(a)}{\epsilon}\\\frac{f_3(a+\epsilon)-f_3(a)}{\epsilon}\end{pmatrix}. \tag{14.1470}$$

En particulier dès que les fonctions f_i sont dérivables, nous avons

$$f'(a)=\begin{pmatrix}f'_1(a)\\f'_2(a)\\f'_3(a)\end{pmatrix} \tag{14.1471}$$

comme dérivée de la fonction. Cette dérivée est un vecteur.

Exemple 14.515.
Si

$$f\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{pmatrix}x^2e^x\\\cos(x^2)\\x^3+x\end{pmatrix}, \tag{14.1472}$$

alors

$$f'(x)=\begin{pmatrix}2xe^x+x^2e^x\\-2x\sin(x^2)\\3x^2+1\end{pmatrix}. \tag{14.1473}$$

△

14.47 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Ce sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} f\colon\mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}f_1(x,y,z)\\f_2(x,y,z)\\f_3(x,y,z)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14.1474}$$

En ce qui concerne les dérivées, tout se passe comme avant. Si les dérivées partielles des composantes f_i existent au point $a \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(a) \\ \partial_x f_2(a) \\ \partial_x f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \partial_y f_1(a) \\ \partial_y f_2(a) \\ \partial_y f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \begin{pmatrix} \partial_z f_1(a) \\ \partial_z f_2(a) \\ \partial_z f_3(a) \end{pmatrix}. \tag{14.1475}$$

14.48 Limites à plusieurs variables

PropLimParcompos

Proposition 14.516.
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \tag{14.1476}$$

si et seulement si

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i \tag{14.1477}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ où $f_i(x)$ dénote la i-ème composante de $f(x)$ et ℓ_i la i-ème composante de $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Cette proposition revient à dire que la convergence d'une fonction est équivalente à la convergence de chacune de ses composantes.

Démonstration. L'élément clef de la preuve est le fait que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^p$, nous ayons l'inégalité

$$|u_i| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |u_k|^2} = \|u\|. \tag{14.1478}$$

Equilequnorme

La norme (dans $\mathbb{R}^p$) d'un vecteur est plus grande ou égale à la valeur absolue de chacune de ses composantes.

Supposons que nous ayons une fonction dont chacune des composantes a une limite en a : $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$. Montrons que dans ce cas la fonction f tend vers ℓ. Si nous considérons $\varepsilon > 0$, par définition de la limite de chacune des fonctions f_i, il existent des δ_i tels que

$$\|x - a\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon. \tag{14.1479}$$

Notez que la norme à gauche est une norme dans $\mathbb{R}^m$ et que celle à droite est une simple valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Considérons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\dots n}$. Si $\|x - a\| < \delta$, alors

$$\|f(x) - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - \ell_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2} = \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon. \tag{14.1480}$$

Nous voyons qu'en choisissant les δ_i tels que $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$, nous trouvons $\|f(x) - \ell\| < \sqrt{n}\varepsilon$. Afin d'obtenir $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$, nous choisissons donc les δ_i de telle manière a avoir $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$.

Nous avons donc prouvé que la limite composante par composante impliquait la limite de la fonction. Nous devons encore prouver le sens inverse.

Supposons donc que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, et prouvons que nous ayons $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$ pour chaque i. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\|x - a\| < \delta$ implique $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Avec ces choix, nous avons

$$|f_i(x) - \ell_i| \leqslant \|f(x) - \ell\| < \varepsilon \tag{14.1481}$$

où nous avons utilisé la majoration (14.1478) avec $f(x) - \ell$ en guise de u. □

De même, pour la continuité nous avons la proposition suivante :

Proposition 14.517.
Soit une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si chacune de ses composantes l'est, c'est-à-dire si et seulement si chacune des fonctions $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ est continue en a.

Essayez de prouver cette proposition directement par la définition de la continuité, en suivant pas à pas la démonstration de la proposition 14.516.

Propfaposfxposcont

Proposition 14.518.
Soit $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et a, un point du domaine de f telle que $f(a) > 0$. Alors il existe un rayon r tel que $f(x) > 0$ pour tout x dans $B(a, r)$.

Cette proposition signifie que si la fonction est strictement positive en un point, alors elle restera strictement positive en tous les points « pas trop loin ».

Démonstration. Prenons $\varepsilon = f(a)/2$ dans la définition de la continuité. Il existe donc un rayon δ tel que pour tout x dans $B(a,\delta)$,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{f(a)}{2}, \tag{14.1482}$$

en d'autres termes, $f(x) \in B\big(f(a), \frac{f(a)}{2}\big)$. évidemment aucun nombre négatif ne fait partie de cette dernière boule lorsque $f(a)$ est strictement positif. □

CorfneqzOuvert

Corolaire 14.519.
Si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m \text{ tels que } f(x) \neq 0\} \tag{14.1483}$$

est ouvert.

Démonstration. Soit $x \in A$. Si $x > 0$ (le cas $x < 0$ est laissé en exercice), alors il existe une boule autour de x sur laquelle f reste strictement positive (proposition 14.518). Cette boule est donc contenue dans A. Étant donné qu'autour de chaque point de A nous pouvons trouver une boule contenue dans A, ce dernier est ouvert. □

ExBNOQEWe

Exemple 14.520.
Soit $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles. Nous allons montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. L'identification entre les vecteurs et les matrices consiste simplement à « déplier » la matrice pour en faire un vecteur. Par exemple, en dimension deux,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \tag{14.1484}$$

En dimension 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9. \tag{14.1485}$$

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant est un polynôme en les composantes de la matrice. En dimension deux, nous avons

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \tag{14.1486}$$

mais en écriture « dépliée », nous pouvons aussi bien écrire

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{14.1487}$$

En dimension 3, le déterminant est donc un polynôme des 9 variables qui apparaissent dans le vecteur « déplié ». En général, dans $\mathbb{R}^{n^2}$, nous considérons donc le polynôme $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ qui à un vecteur $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ fait correspondre le déterminant de la matrice obtenue en « repliant » le vecteur X.

Donc dans $\mathbb{R}^{n^2}$, l'ensemble des matrices inversibles est donné par l'ensemble des vecteurs sur lesquels le polynôme det ne s'annule pas, c'est-à-dire

$$\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \text{ tels que } \det(X) \neq 0\}. \tag{14.1488}$$

Mais le déterminant est un polynôme, et donc une fonction continue. Cet ensemble est par conséquence ouvert par le corolaire 14.519. △

La proposition suivante montre que la limite peut « passer à travers » les fonctions continues.

PropLimCompose

Proposition 14.521 (limite de fonction composée)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ *et* $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *telles que*

$$\lim_{x\to a} g(x) = p \tag{14.1489a}$$
EqLimCompHypa

$$\lim_{y\to p} f(y) = q \tag{14.1489b}$$
EqLimCompHypb

Alors nous avons $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = q$.

Démonstration. Comme presque toute preuve à propos de limite ou de continuité, nous commençons par choisir $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un δ tel que $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique $\|f\big(g(x)\big) - q\| \leqslant \varepsilon$.

La limite (14.1489b) impose l'existence d'un $\tilde{\delta}$ tel que $\|y-p\| \leqslant \tilde{\delta}$ implique $\|f(y)-q\| \leqslant \varepsilon$, tandis que la limite (14.1489a) donne un δ tel que $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique $\|g(x)-p\| \leqslant \tilde{\delta}$ (nous avons pris $\tilde{\delta}$ en guise de ε dans la définition de la limite pour g).

Avec ces choix, si $\|x-a\| \leqslant \delta$, alors $\|g(x)-p\| \leqslant \tilde{\delta}$, et par conséquent,

$$\|f\big(g(x)\big) - q\| \leqslant \varepsilon, \tag{14.1490}$$

ce que nous voulions. □

De façon pragmatique, la proposition 14.521 nous fournit une formule pour les limites de fonctions composée :

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim_{y\to \lim_{x\to a} g(x)} f(y) \tag{14.1491}$$
Eqlimfgcomp

lorsque f est continue.

Remarque 14.522.
La formule (14.1491) ne peut pas être utilisée à l'envers. Il existe des cas où $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = q$, et $\lim_{x\to a} f(x) = p$ sans pour autant avoir $\lim_{y\to q} g(y) = q$. Par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{14.1492a}$$

$$f(x) = |x|. \tag{14.1492b}$$

Nous avons $(g\circ f)(x) = 2$ pour tout x, ainsi que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, mais la limite $\lim_{y\to 0} g(y)$ n'existe pas.

En général, lorsqu'un ensemble est donné par des inégalités, prendre la fermeture consiste à transformer les inégalités strictes en inégalités non strictes ; prendre l'intérieur consiste à rendre stricte toutes les inégalités ; la frontière consiste *en gros* à transformer toutes les inégalités en égalités (nous allons voir que pour la frontière, c'est un peu plus de travail). Comprenez bien que cela n'est vrai que « en général ». Il faut toujours bien regarder sur chaque exemple si il n'y a pas l'un ou l'autre point problématique.

La proposition 14.518 sera une des clefs pour dire que si une inégalité stricte est satisfaite en un point, alors elle sera satisfaite en tout point dans un voisinage. Voir aussi l'exemple 14.523.

exoEspVectoNorme0008

Exemple 14.523.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ défini par $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > f(x)\big\}$ est ouvert.

Prouver que l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \geqslant f(x)\}$ est fermé.

Nous considérons la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = f(x) - y$. Cela est une fonction continue parce que c'est une différence de fonctions continues. Par définition,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } g(x,y) > 0\}. \tag{14.1493}$$

Par la proposition 14.518, autour de chaque point (x,y) tel que $g(x,y) > 0$ (c'est-à-dire autour de chaque point de A), il existe une boule sur laquelle g reste strictement positive. L'ensemble A est donc ouvert.

Pour prouver que l'ensemble B est fermé, prouver que le complémentaire est ouvert, c'est-à-dire que les points tels que $y - f(x) < 0$ forment un ouvert. Cela revient au même que ce que nous avons fait pour A.

△

14.49 Champs de vecteurs

Un champ de vecteur est une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Géométriquement, il s'agit simplement de mettre un vecteur en chaque point de l'espace. Cela arrive très souvent en physique.

Exemple 14.524.
Si un fluide (eau, gaz) coule dans un tube, en tout point le point a une vitesse, qui sera un vecteur généralement dirigé le long du tube. △

Exemple 14.525.
La force d'attraction de la Terre sur une masse m située au point $r = (x, y, z)$ est donnée par

$$F(r) = -G\frac{Mmr}{\|r\|^3}. \tag{14.1494}$$

Dans cette expression, tant r que $F(r)$ sont des vecteurs. Nous l'avons représenté sur la figure 14.13.

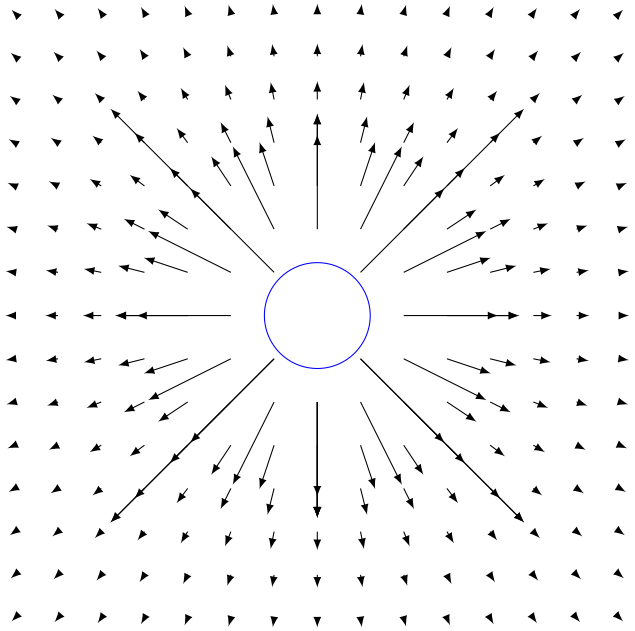


FIGURE 14.13 : Le champ de gravitation de la Terre. LabelFigSQNPooPTrLRQ

L'application

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ r &\mapsto F(r) \end{aligned} \tag{14.1495}$$

est le champ gravitationnel de la Terre.

△

14.49.1 Matrice jacobienne

La **matrice jacobienne** de la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ au point $a \in \mathbb{R}^3$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, c'est-à-dire

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix}. \tag{14.1496}$$

Exemple 14.526.
Si

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xye^z \\ x^2 + \cos(yz) \\ xyz \end{pmatrix}, \tag{14.1497}$$

alors

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ 2x & -z\sin(yz) & -y\sin(yz) \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}. \tag{14.1498}$$

△

14.50 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla

Nous avons déjà vu le gradient d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{14.1499}$$

EqDefNablaf

Afin de définir la divergence et le rotationnel, nous introduisons ∇ sous une forme un peu plus abstraite comme le « vecteur »

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{14.1500}$$

Vue comme ça, la formule (14.1499) est claire.

Si F est un champ de vecteurs, nous introduisons la **divergence** de F par

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{14.1501}$$

Cela est une fonction. Et nous introduisons le rotationnel du champ de vecteur F par

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) e_x - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) e_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) e_z. \end{aligned} \tag{14.1502}$$

Cela est un champ de vecteur. En utilisant le symbole complètement antisymétrique ϵ_{ijk}, le rotationnel d'un champ de vecteur peut s'écrire

$$\nabla \times F = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i F_j e_k. \tag{14.1503}$$

Le gradient, la divergence et le rotationnel consistent à appliquer simplement à ∇ les trois produits qu'on peut effectuer sur un vecteur :

(1) Le produit d'un vecteur par un scalaire multiplie chacune des composantes :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}. \tag{14.1504}$$

(2) Le produit scalaire d'un vecteur avec un autre vecteur donne lieu à la divergence :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{14.1505}$$

(3) Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{14.1506}$$

Ces trois opérations joueront un rôle central en électromagnétisme dans les équations de Maxwell.

Exemple 14.527.
Soit $F(x,y,z)=xe_x+xye_y+e_z$, c'est-à-dire

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\xy\\1\end{pmatrix}. \tag{14.1507}$$

Son rotationnel est donné par

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}e_x & e_y & e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y}\\ x & xy & 1\end{vmatrix}=(0-0)e_x-(0-0)e_y+(y-0)e_z=ye_z=\begin{pmatrix}0\\0\\y\end{pmatrix}. \tag{14.1508}$$

△

Afin d'étudier comment se comporte la composition de ces opérateurs, nous aurons besoin de ce lemme que nous n'énoncerons pas précisément.

LemPermDerrxyz

Lemme 14.528.
Si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors on peut permuter l'ordre des dérivées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{14.1509}$$

La fonction

$$(x,y,z)\mapsto\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) \tag{14.1510}$$

sera notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}. \tag{14.1511}$$

Il y a deux propriétés importantes :

Théorème 14.529.
Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors

$$\nabla\times(\nabla f)=0. \tag{14.1512}$$

Si $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^2, alors

$$\nabla\cdot(\nabla\times F)=0. \tag{14.1513}$$

Démonstration. Ce sont seulement deux calculs qui manipulent les définitions. Pour le premier, la divergence de f est le champ de vecteurs

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}e_x+\frac{\partial f}{\partial y}e_y+\frac{\partial f}{\partial z}e_z. \tag{14.1514}$$

En mettant ce champ dans la définition du rotationnel,

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla f)=\begin{vmatrix}e_x & e_y & e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}&=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]e_x\\ &\quad-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_y\\ &\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_z.\end{aligned} \tag{14.1515}$$

En utilisant le lemme 14.528, chacun des termes fait zéro.

La seconde propriété se démontre en utilisant le même type de calcul. □

Remarque 14.530.
Il n'y a pas de propriétés du même style pour la combinaison $\nabla\times(\nabla\cdot F)$ pour le rotationnel de la divergence. En effet la divergence d'un champ de vecteur est une fonction, et il n'y a pas de rotationnel pour une fonction.

14.51 Interprétation géométrique et physique de la divergence

En physique, on dit qu'un champ de vecteurs à divergence nulle est **incompressible**. Nous allons essayer de comprendre pourquoi. Lorsqu'un fluide incompressible se déplace, il faut qu'en chaque point il y ait autant de fluide qui rentre que de fluide qui sort. Nous allons voir sur quelques exemples que la divergence d'un champ de vecteurs est le « bilan de masse » d'un fluide qui se déplace selon le champ de vecteurs.

Si en un point la divergence est positive, cela signifie qu'il y a une perte de masse et si la divergence est négative, cela signifie qu'il y a une accumulation de masse.

Prenons par exemple un fluide qui se déplace selon le champ de vitesse montré à figure 14.14.

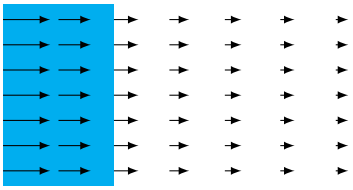


FIGURE 14.14 : Le champ de vecteurs $F(x,y)=\frac{1}{x}(1,0)$. LabelFigBEHTooWsdrys

Étant donné que la vitesse diminue lorsque x avance, il y a une accumulation de fluide. Regardez en effet la quantité de fluide qui rentre dans le rectangle par rapport à la quantité de fluide qui en sort. Ce champ de vecteurs a pour équation :

$$F(x,y)=\frac{1}{x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/x\\0\end{pmatrix}. \tag{14.1516}$$

Sa divergence vaut donc

$$(\nabla\cdot F)(x,y)=\frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y)+\underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y)}_{=0}=-\frac{1}{x^2}. \tag{14.1517}$$

Cette divergence étant négative, il y a bien accumulation de fluide en tout point, et d'autant plus que x est petit.

ExamDivFrot

Exemple 14.531.
Prenons le champ de vecteurs tournant

$$F(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix} \tag{14.1518}$$

représenté à la figure 14.15. Cela est un vecteur qui est constamment perpendiculaire au rayon.

Un fluide dont la vitesse serait donné par ce champ de vecteur se contente de tourner. Intuitivement il ne devrait pas y avoir de divergence parce qu'il n'y a aucune accumulation de fluide. En effet,

$$\nabla\cdot F(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=0. \tag{14.1519}$$

△

Exemple 14.532.
Prenons le cas du champ de force de gravitation :

$$F(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}. \tag{14.1520}$$

Nous pouvons rapidement remarquer que $\nabla\cdot F=0$. Est-ce que cela peut se comprendre sur le dessin de la figure 14.16 ?

Essayons de voir combien de fluide entre dans la zone bleue et combien en sort. D'abord, il est certain que les vecteurs qui sortent sont plus courts que ceux qui rentrent, ce qui voudrait dire qu'il y a plus de fluide qui rentre. Mais on voit également que le *nombre* de vecteurs qui sortent est plus grand parce que la seconde sphère est plus grande et qu'il y a un vecteur en chaque point de la sphère.

Intuitivement nous pouvons dire que la quantité qui rentre dans la sphère de rayon r_1 donnée par la taille des vecteurs entrants multiplié par la surface de la sphère, c'est-à-dire

$$4\pi r_1^2\|F(x,y,z)\|, \tag{14.1521}$$

EqQpinormeVecto

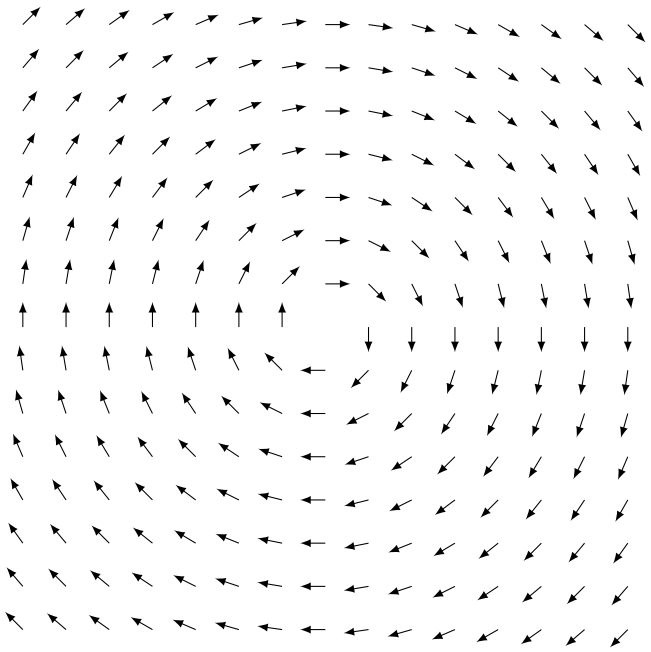


FIGURE 14.15 : Le champ de vecteurs $F(x,y)=(y,-x)$. LabelFigYQVHooYsGLHQ

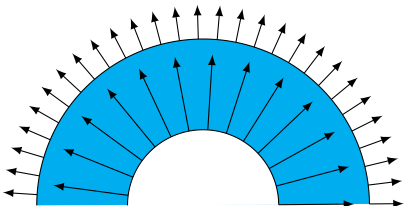


FIGURE 14.16 : Le champ de vecteur de la gravité. Nous avons tracé, sur les deux cercles la même densité de vecteurs, c'est-à-dire le même nombre de vecteurs par unité de surface. LabelFigZGUDooEsqCWQ

mais $\|F(x,y,z)\|=\frac{1}{r^2}$, donc la quantité de fluide entrant est 4π. La quantité de fluide sortant sera la même.

Cela explique deux choses

(1) Pourquoi les forces de gravitation et électromagnétiques sont en $1/r^2$; c'est parce que nous vivons dans un monde avec trois dimensions d'espace. En étudiant très précisément le champ de gravitation, certains physiciens espèrent trouver des déviations expérimentales par rapport à la règle du $1/r^2$; cela *pourrait* être un signe que l'espace contient des dimensions supplémentaires.

(2) Pourquoi il y a un 4π comme coefficient dans beaucoup d'équations en électromagnétisme ; en particulier dans certaines anciennes unités de flux.

△

Remarque 14.533.
Nous allons voir plus loin comment s'assurer que l'équation (14.1521) représente bien la « quantité de fluide » qui rentre dans la zone délimitée

14.52 Quelques formules de Leibniz

La divergence étant une combinaison de dérivées, il n'est pas tellement étonnant que la divergence de produits donne lieux à des formules en deux termes. Si f est une fonction et si F et G sont des champs de vecteurs, nous avons la proposition suivante.

PROPooDMWEooNaJBCM

Proposition 14.534.
Si F et G sont des champs de vecteurs dont toutes les dérivées partielles existent, alors

(1) $\nabla\cdot(fF)=f\nabla\cdot F+F\cdot\nabla f$

(2) $\nabla\cdot(F\times G)=G\cdot\nabla\times F-F\cdot\nabla\times G$

ITEMooFDJIooKTnvKj

(3) $\nabla \times (fF) = f\nabla \times F + \nabla f \times F$.