Le Frido 2026
volume 3
Laurent Claessens

Plusieurs extensions et versions de ce livre.

1. La version courante, régulièrement mise à jour et qui deviendra petit à petit le Frido 2027. Téléchargeable sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf`

2. La version la plus complète, contenant beaucoup de géométrie différentielle

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/giulietta.pdf`

3. Et bien entendu les sources LaTeX

   `https://github.com/LaurentClaessens/mazhe`

Copyright 2011-2026 Laurent Claessens, and many contributors. A complete list could be retrieved from the git log.
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled “GNU Free Documentation License”.

(c) 2015-2026 David Revoy pour les illustrations de couverture CC-BY,
https://www.peppercarrot.com/

ISBN : 979-10-97085-48-3

Chapitre 15

Analyse sur des groupes

15.0.1 Groupe topologique

DEFooCHZVooHnvSgW

Définition 15.1.
*Un **groupe topologique** est un groupe G muni d'une topologie telle que les applications $(g,h) \mapsto gh$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues.*

PROPooYNAXooWlUwfJ

Proposition 15.2 ([1, 3])**.**
Soit un ouvert S d'un groupe topologique[1] G. Il existe $W \subset G$ tel que

(1) W est un voisinage ouvert de e.

(2) $W \subset S$

(3) $W = W^{-1}$

(4) $WW \subset S$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Construction de W_1** Vu que S est ouvert et que l'inversion $i\colon G \to G$ est continue, la partie $i^{-1}(S) = i(S)$ est ouverte. Nous posons $W = i(S) \cap S$.

(1a) W_1 est ouvert en tant qu'intersection d'ouverts.

(1b) $W_1 = W_1^{-1}$ par le lemme 2.18.

(1c) $e \in W_1$ et donc W_1 est un voisinage ouvert de e.

Construction de W_2 La multiplication $m\colon G \times G \to G$ est continue. Nous posons $U = m^{-1}(S)$. C'est un ouvert contenant (e,e). En vertu de la définition de la topologie produit 9.66, il existe des voisinages ouverts $A, B \subset G$ de e tels que $A \times B \subset U$. Nous posons $A' = A \cap B$ et nous avons encore $A' \times A' \subset U$. Nous posons alors $W_2 = A' \cap i(A')$ de telle sorte à avoir

$$W_2 \times W_2 \subset A' \times A' \subset U. \tag{15.1}$$

La partie W_2 vérifie

(1) $W_2 = W_2^{-1}$

(2) $W_2 W_2 \subset S$ parce que $W_2 \times W_2 \subset U = m^{-1}(S)$.

Définition de W Nous posons $W = W_1 \cap W_2$.

Vérification des propriétés Vérifions que W vérifie les propriétés demandées.

(1) $W = W^{-1}$ Nous avons :

$$x \in W \Rightarrow x \in W_1 \Rightarrow x^{-1} \in W_1 \tag{15.2a}$$
$$x \in W \Rightarrow x \in W_2 \Rightarrow x^{-1} \in W_2, \tag{15.2b}$$

et donc donc si $x \in W$ alors $x^{-1} \in W_1 \cap W_2 = W$.

[1] Définition 15.1.

(2) $\underline{W \subset S}$ Parce que $W \subset W_1 = S \cap i(S) \subset S$.

(3) $\underline{W \text{ est ouvert}}$ Comme intersection d'ouverts.

(4) $\underline{WW \subset S}$ Soient $x, y \in W$. Vu que $x, y \in W_2$ nous avons

$$(x, y) \in W_2 \times W_2 \subset A' \times A' \subset U = m^{-1}(S) \tag{15.3}$$

Donc $xy = m(x, y) \in S$.

□

15.1 Action de groupe et connexité

DEFooFRFGooPkzoyV

Définition 15.3 (Groupe agissant continûment[492]).
*Si $\phi\colon G \times X \to X$ est une action du groupe[2] topologique G sur l'espace topologique X, nous disons que G **agit continument** sur X lorsque ϕ est une application continue pour la topologie produit[3] sur $G \times E$.*

PROPooVWHJooXaMvTj

Proposition 15.4 ([492]).
Soit un groupe G agissant sur l'ensemble E. Pour chaque $x \in E$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi_x\colon G &\to \mathrm{Orb}(x) \\ g &\mapsto g \cdot x. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Alors il existe une unique application $\tilde{\phi}_x\colon G/\mathrm{Stab}(x) \to \mathrm{Orb}(x)$ telle que

$$\phi_x = \tilde{\phi}_x \circ \pi. \tag{15.5}$$

Cette application $\tilde{\phi}_x$ est une bijection et

$$\tilde{\phi}_x^{-1} = \pi \circ \phi_x^{-1}. \tag{15.6}$$

EQooIOGMooFjMaCP

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $\underline{\textbf{Existence et unicité}}$ Nous montrons que si $g \sim h$ alors $\phi_x(g) = \phi_x(h)$. La proposition 1.58 donnera l'existence et l'unicité. Soient $g, h \in G$. La condition $g \sim h$ signifie qu'il existe $z \in \mathrm{Stab}(x)$ tel que $g = hz$ (c'est la définition du quotient $G/\mathrm{Stab}(x)$). Nous avons alors

$$\phi_x(g) = \phi_x(hz) = (hz) \cdot x = h \cdot (z \cdot x) = h \cdot h = \phi_x(h). \tag{15.7}$$

Cela montre l'existence et l'unicité.

(2) $\underline{\textbf{Surjective}}$ Soit $y \in \mathrm{Orb}(x)$. Il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. Nous avons alors

$$y = \phi_x(g) = \tilde{\phi}_x([g]). \tag{15.8}$$

(3) $\underline{\textbf{Injective}}$ Soient $g, h \in G$ tels que $\tilde{\phi}_x([g]) = \tilde{\phi}_x([h])$. Nous avons donc $\phi_x(g) = \phi_x(h)$ et donc $g \cdot x = h \cdot x$. En agissant avec g^{-1} des deux côtés nous trouvons

$$x = (g^{-1}h) \cdot x. \tag{15.9}$$

Autrement dit $g^{-1}h \in \mathrm{Stab}(x)$. Nous avons $h = g(g^{-1}h) \in g\,\mathrm{Stab}(x)$. Donc $h \sim g$.

(4) $\underline{\textbf{Inverse}}$ Il nous reste à prouver la formule (15.6). Soit $y \in \mathrm{Orb}(x)$. Nous avons

$$\phi_x^{-1}(y) = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot x = y\}, \tag{15.10}$$

et donc

$$\begin{aligned} (\pi \circ \phi_x^{-1})(y) &= \{[g] \in G/\mathrm{Stab}(x) \text{ tel que } g \cdot x = y\} && \text{(15.11a)} \\ &= \{[g] \in G/\mathrm{Stab}(x) \text{ tel que } \tilde{\phi}_x([g]) = y\} && \text{(15.11b)} \\ &= \{\alpha \in G/\mathrm{Stab}(x) \text{ tel que } \tilde{\phi}_x(\alpha) = y\} && \text{(15.11c)} \\ &= \tilde{\phi}_x^{-1}(y). && \text{(15.11d)} \end{aligned}$$

[2] Définition 3.236.
[3] Définition 9.65.

□

ThojrLKZk

Théorème 15.5 ([492]).
Si G est un groupe topologique compact agissant continûment[4] *sur l'espace topologique séparé X, alors pour tout $x \in X$, l'application*

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_x \colon G/\operatorname{Stab}(x) &\to X \\ [g] &\mapsto g \cdot x\end{aligned} \tag{15.12}$$

définie en 15.4 est un homéomorphisme[5].

Démonstration. En vertu de la proposition 9.77, l'application $\tilde{\phi}_x$ est continue parce que $\tilde{\phi}_x \circ \pi = \phi_x$ est continue.

Nous devons maintenant prouver que $\tilde{\phi}_x^{-1}$ est continue. Nous utilisons pour cela la proposition 9.52. Par définition de la topologie quotient (définition 9.72), la projection canonique est continue. Étant donné que G est compact, l'espace $G/\operatorname{Stab}(x) = \pi(G)$ est compact (théorème 9.298).

Soit un fermé F dans $G/\operatorname{Stab}(x)$. La partie F est compacte par le lemme 9.137(1). Donc $\tilde{\phi}_x(F)$ est compacte dans X. Donc $\tilde{\phi}_x(F)$ est fermé par le lemme 9.137(2). □

LemkLRAet

Lemme 15.6.
Si G et H sont des groupes topologiques tels que G/H et H sont connexes[6]*, alors G est connexe.*

Démonstration. Soit $f \colon G \to \{0,1\}$ une fonction continue. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\tilde{f} \colon G/H &\to \{0,1\} \\ [g] &\mapsto f(g).\end{aligned} \tag{15.13}$$

D'abord nous montrons qu'elle est bien définie. En effet si $h \in H$ nous aurions $\tilde{f}([gh]) = f(gh)$, mais étant donné que H est connexe, l'ensemble gH est également connexe ; la fonction continue f est donc constante sur gH. Nous avons donc $f(gh) = f(g)$.

Étant donné que G/H est également connexe, la fonction $\tilde{f}$ doit être constante. Si g_1 et g_2 sont deux éléments du groupe, nous avons $f(g_1) = \tilde{f}([g_1]) = \tilde{f}([g_2]) = f(g_2)$. Nous en déduisons que f est constante et que G est connexe. □

15.7.
La connexité de $\mathrm{SO}(3)$ peut être démontrée en suivant les lignes de [493]. Le corolaire 14.93 permet de dire que les éléments de $\mathrm{SO}(3)$ ont une valeur propre égale à 1.

THOooYQFNooPaYmaP

Théorème 15.8.
Pour tout $n \geqslant 2$, le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe, le groupe $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes.

Démonstration. La seconde assertion découle de la première parce que les matrices de déterminant 1 et celles de déterminant -1 ne peuvent pas être reliées par un chemin continu tandis que l'application

$$M \mapsto \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} M \tag{15.14}$$

est un homéomorphisme entre les matrices de déterminant 1 et celles de déterminants -1. Montrons donc que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs pour $n \geqslant 2$ en procédant par récurrence sur la dimension.

Nous acceptons le résultat pour $G = \mathrm{SO}(2)$. Notons que nous en avons besoin pour prouver que la sphère S^{n-1} est connexe.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ agit, par définition, de façon transitive sur la sphère S^{n-1}. Soit $a \in S^{n-1}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1} \tag{15.15a}$$

$$G_a \simeq \mathrm{SO}(n-1) \tag{15.15b}$$

où G_a est le fixateur de a dans G. Pour montrer le second point, nous considérons $\{e_i\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M \in G$ telle que $Ma = e_1$. Le fixateur de e_1 est évidemment isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$ parce qu'il

[4] Définitions 3.236 et 15.3.
[5] Isomorphisme d'espaces topologiques, définition 9.54.
[6] Définition 9.118.

est constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{15.16}$$

où $(a_{ij}) \in \mathrm{SO}(n-1)$. L'application

$$\begin{aligned} \alpha\colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM \end{aligned} \tag{15.17}$$

est un isomorphisme entre G_a et $\mathrm{SO}(n-1)$. Le théorème 15.5 nous montre alors que, en tant qu'espaces topologiques,

$$G/G_a = S^{n-1}. \tag{15.18}$$

L'hypothèse de récurrence montre que $G_a = \mathrm{SO}(n-1)$ est connexe tandis que nous savons que S^{n-1} est connexe. Le lemme 15.6 conclut que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe. □

LemIbrsFT

Lemme 15.9.
Une bijection continue entre un espace compact et un espace séparé est un homéomorphisme.

PROPooTVHJooBRmUCd

Proposition 15.10.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ *et* $\mathrm{SU}(n)$ *sont connexes.*

Démonstration. Soit $G(n)$ le groupe $\mathrm{SU}(n)$ ou $\mathrm{U}(n)$. Ce groupe opère transitivement sur la sphère complexe

$$S^{n-1}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } |z| = 1\}. \tag{15.19}$$

En notons, pour chaque k, $z_k = x_k + iy_k$, nous considérons l'application continue

$$\begin{aligned} s\colon S^{n-1}_{\mathbb{C}} &\to S^{2n-1} \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n). \end{aligned} \tag{15.20}$$

Vérifions que s prend bien ses valeurs dans S^{2n-1}. Nous avons

$$|s(z_1, \dots, z_n)| = \sqrt{\sum_k |x_k|^2 + |y_k|^2} = \sqrt{\sum_k |z_k|^2} = 1 \tag{15.21}$$

parce que $|z_k|^2 = |x_k|^2 + |y_k|^2$. Le lemme 15.9 dit que cette bijection continue est un homéomorphisme. Soit $a \in S^{n-1}_{\mathbb{C}}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1}_{\mathbb{C}} \tag{15.22a}$$

$$G_a \simeq G(n-1). \tag{15.22b}$$

La seconde ligne est un isomorphisme de groupe et un homéomorphisme. Il est donné de la façon suivante. D'abord le fixateur de e_1 dans $G(n)$ est donné par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{15.23}$$

où $(a_{ij}) \in G(n-1)$. Par ailleurs si M est une matrice de $G(n)$ telle que $Ma = e_1$, nous avons l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha\colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM. \end{aligned} \tag{15.24}$$

Encore une fois, cela est un homéomorphisme par le lemme 15.9. Par composition nous avons $G_a \simeq G(n-1)$ et un homéomorphisme

$$G(n)/G_a = S^{n-1}_{\mathbb{C}}. \tag{15.25}$$

Le groupe G_a et l'ensemble $S^{n-1}_{\mathbb{C}}$ étant connexes, le groupe $G(n)$ est connexe par le lemme 15.6. □

Lemme 15.11 ([450]).
Si G est un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ alors son groupe dérivé[7] *l'est également.*

Démonstration. Soit S_m l'ensemble des produits de m commutateurs de G :

$$S_m = \{g_1, \ldots, g_m \text{ où les } g_i \text{ sont des commutateurs}\}. \tag{15.26}$$

La partie S_m est l'image de G par l'application continue

$$\begin{aligned} \underbrace{G \times \ldots \times G}_{2m \text{ facteurs}} &\to G \\ (g_1, h_1, g_2, h_2, \ldots, g_m, h_m) &\mapsto [g_1, h_1] \ldots [g_m, h_m] \end{aligned} \tag{15.27}$$

En tant qu'image d'un connexe par une application continue, S_m est connexe par le lemme 9.296. Puisque les S_m ont l'identité en commun, le groupe dérivé

$$D(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \tag{15.28}$$

est également connexe. □

15.2 Espaces de matrices

15.2.1 Dilatations et transvections

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $n \geqslant 2$.

ThoooAZKDooNDcznv

Théorème-Définition 15.12 ([450]).
Soit une application linéaire $u\colon E \to E$ dont les points fixes forment un hyperplan noté H d'équation $H = \ker(f)$ avec $f \in E^*$.

ITEMooGTKRooQSPNoI

(1) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

ITEMooZHYRooFGKaifi

(1a) $\det(u) \neq 1$

ooXKLWooTfUMzV

(1b) L'application u est diagonalisable et a une valeur propre qui vaut $\det(u) \neq 1$.

ooMZPTooCLylbh

(1c) $\mathrm{Image}(u - \mathrm{Id}) \not\subseteq H$.

ITEMooZHYRooFGKaifiv

(1d) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda)$ *avec* $\lambda \neq 1$.

ITEMooMSJXooUsLCHx

(2) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

ITEMooRTIEooOoWCFsa

(2a) Il existe $a \in H$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

ITEMooRTIEooOoWCFsb

(2b) Dans une base adaptée, la matrice de u est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{15.29}$$

EQooFXBDooTcZwMv

(3) Les conditions (1a)-(1d) sont respectées si et seulement si les conditions (2a)-(2b) ne sont pas respectées (elles sont les négations l'une de l'autre.).

*Une **dilatation** est soit l'identité soit un endomorphisme qui respecte les conditions (1).*
*Une **transvection** est soit l'identité soit un endomorphisme qui vérifie les conditions (2).*

Démonstration. Nous allons prouver plein d'implications …

(1) **(1a) implique (1b)** Le théorème de la base incomplète (voir remarque 6.16) permet de considérer une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ soit une base de H. Dans cette base, la matrice de

[7] Définition 2.154.

u est de la forme suivante (les cases non remplies sont nulles et les étoiles correspondent à des valeurs inconnues mais pas spécialement nulles) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & * \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{15.30}$$

EqooPQOEooGUxIwa

Le fait que le déterminant de u ne soit pas 1 implique que $\lambda \neq 1$. Par conséquent le polynôme caractéristique

$$\chi_u(X) = (1-X)^{n-1}(\lambda - X) \tag{15.31}$$

possède une racine $\lambda \neq 1$, et donc u possède un vecteur propre v pour cette valeur[8]. Le vecteur v est linéairement indépendant de $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ (parce que vecteur propre de valeur propre différente). Par conséquent l'ensemble $\{e_1, \dots, e_{n-1}, v\}$ est une base par la proposition 6.20. C'est une base de vecteurs propres et donc une base de diagonalisation[9].

(2) **(1b) implique (1c)** Nous nommons maintenant $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base de diagonalisation. Nous avons $u(e_n) = \lambda e_n$ avec $\det(u) = \lambda \neq 1$. Nous avons

$$(u - \mathrm{Id})(e_n) = (\lambda - 1)e_n \notin H, \tag{15.32}$$

ce qui prouve que l'image de e_n par $u - \mathrm{Id}$ n'est pas dans H.

(3) **(1c) implique (1d)** Reprenons une base $\{e_1, \dots, , e_n\}$ donnant la matrice (15.30). Il existe $x \in E$ tel que $u(x) - x$ n'est pas dans H, c'est-à-dire tel que $u\big(u(x) - x\big) \neq u(x) - x$. Nous en déduisons que

$$u^2(x) - 2u(x) + x \neq 0 \tag{15.33}$$

ou encore que

$$(X-1)^2(u)x \neq 0. \tag{15.34}$$

C'est-à-dire que $(X-1)^2$ n'est pas un polynôme annulateur de u. Or ce serait le cas si $X - 1$ était le polynôme minimal (proposition 10.98). Le polynôme caractéristique étant $(X-1)^{n-1}(X-\lambda)$ (et étant annulateur[10]), le polynôme minimal est de la forme

$$\mu_u(X) = \begin{cases} (X-1)(X-\lambda) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ X - 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \tag{15.35}$$

Dans notre cas nous venons de voir que ce n'est pas $X - 1$ et donc c'est $(X-1)(X-\lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.

Nous devons trouver une base de diagonalisation … Supposons

$$u(e_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \lambda e_n, \tag{15.36}$$

dans lequel nous venons de prouver que $\lambda \neq 1$, et cherchons

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n} p_j e_j \tag{15.37}$$

de telle sorte à avoir $u(e'_n) = \lambda e'_n$. Nous avons

$$u(e'_n) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j u(e_j) + p_n u(e_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (p_j + p_n a_j)e_j + p_n \lambda e_n. \tag{15.38}$$

En égalisant à $\lambda \sum_{j=1}^{n} p_j e_j$, il vient

$$p_j + p_n a_j = \lambda p_j \tag{15.39}$$

[8] Proposition 10.119.

[9] Nous pourrions en dire à peine un peu plus et prouver le point (1d), mais cela ne servirait à rien parce que nous voulons prouver les équivalences et qu'il faudra quand même prouver que (1c) implique (1d).

[10] Théorème de Cayley-Hamilton 10.116.

pour tout $j = 1, \dots, n-1$ et la condition triviale $p_n\lambda = \lambda p_n$ pour $j = n$. Nous en déduisons que le choix

$$p_j = \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} \tag{15.40}$$

fonctionne (parce que $\lambda \neq 1$ comme nous l'avons démontré plus haut). En bref, il suffit de poser

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} e_j + p_n e_n \tag{15.41}$$

avec p_n au choix pour avoir une base $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n\}$ de diagonalisation de u avec $\lambda \neq 1$ comme dernière valeur propre.

(4) **(1d) implique (1a)** Évident … encore faut-il se souvenir d'invoquer l'invariance du déterminant par changement de base.

Nous avons terminé la première série d'équivalences. Nous continuons avec la seconde.

(1) **(2a) implique (2b)** Nous prenons $e_{n-1} = a$ et nous complétons en une base de H. Pour e_n il suffit de prendre n'importe quel vecteur v tel que $f(v) \neq 0$ (qui existe parce que $f = 0$ est seulement un hyperplan), et de le normaliser.

Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée parce que $u(e_n) = e_n + f(e_n)a = e_n + e_{n-1}$ du fait que $e_{n-1} = a$ et $f(e_n) = 1$.

(2) **(2b) implique (2a)** Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ cette base. En prenant $a = e_{n-1}$ et en posant $x = \sum_k x_k e_k$ nous avons

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k + x_n(e_{n-1} + e_n) = x + x_n e_{n-1} = x + x_n a. \tag{15.42}$$

Mais puisque $f(x) = \sum_i f_i x_i$, et que $f(e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$ nous avons $f(x) = f_n x_n$. Il n'y a cependant pas de raison d'avoir $f_n = 1$. Mais en définissant

$$e'_i = \frac{1}{f_n} e_i \tag{15.43}$$

nous avons bien $u(e'_n) = \frac{1}{f_n}(e_{n-1} + e_n) = e'_{n-1} + e'_n$. Donc dans cette base nous avons encore la matrice de u de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{15.44}$$

mais cette fois avec $f(e'_n) = 1$.

Nous avons terminé avec la seconde série d'équivalences. Il nous reste à prouver que la première est équivalente à la négation de la seconde.

(1) **non (1c) implique (2a)** Considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$ et posons $a = u(x_0) - x_0 \in \text{Image}(u - \text{Id})$. Par la négation de (1c) nous avons $a \in H$. De plus $x_0 \notin H$ (sinon $f(x_0) = 0$) donc $u(x_0) \neq x_0$ et $a \neq 0$.

Nous montrons que ce choix de a fonctionne : $u(x) = x + f(x)a$ pour tout $x \in E$. Nous faisons cela séparément pour $x \in H$ et pour $x = x_0$.

Si $h \in H$ alors $u(h) = h$ et $f(h) = 0$ donc $h + f(h)a = h = u(h)$. Si $x = x_0$ alors $u(x_0) = a + x_0$ (c'est la définition de a) et $x_0 + f(x_0)a = x_0 + a$.

(2) **(2b) implique non (1a)** Dans une base adaptée nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{15.45}$$

et donc $\det(u) = 1$, ce qui contredit (1a).

□

15.13.
Dans le cas des dilatations et des transvections, les points fixes forment un hyperplan.

Selon cette terminologie, l'application $x \mapsto \lambda x$ n'est pas une dilatation mais un produit de dilatations.

PROPooNCKGooTuaYeq

Proposition 15.14 ([3, 1, 494]).
Les transvections de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *sont dans* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$*, c'est-à-dire qu'elles ont un déterminant égal à* 1.

Démonstration. Si vous voulez des matrices, utilisez la définition 10.14 et la forme (15.29). Sous cette forme, le déterminant est clairement 1.

Soit une transvection $u(x) = x + f(x)a$ avec $H = \{f = \}$ et $a \in H$. En utilisant le lemme des déterminants 6.149(2), nous avons $\det(u) = 1 + f(a) = 1$ parce que $f(a) = 0$. □

LEMooYTUSooKqDJce

Lemme 15.15 ([1]).
Quelques trucs à propos des transvections[11].

ITEMooOGTOooVGYOUA

(1) Si τ *est une transvection, alors* τ^2 *est une transvection.*

ITEMooCSBVooTWYMvd

(2) Les transvections de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *sont dans* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$

ITEMooYQKNooYCbpBP

(3) Toutes les transvections sont conjuguées dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$*, c'est-à-dire que si* τ_1 *et* τ_2 *sont des transvections, alors il existe* $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ *tel que* $\tau_1 = g\tau_2 g^{-1}$.

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Nous considérons une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ adaptée à τ et par facilité de notations, nous supposons $\tau(e_1) = e_1$ et $\tau(e_2) = e_1 + e_2$. En posant

$$\begin{cases} f_1 = ae_1 + be_2 & \text{(15.46a)} \\ f_2 = ce_1 + de_2, & \text{(15.46b)} \end{cases}$$

et en imposant $\tau^2(f_1) = f_1$, $\tau^2(f_2) = f_1 + f_2$, il est vite vu que ça marche avec $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 1$. Bref, en posant $f_1 = 2e_1$ et $f_2 = e_1 + e_2$ nous avons bien $\tau^2(f_1) = f_1$ et $\tau^2(f_2) = f_1 + f_2$, c'est-à-dire que $\{f_1, f_2, e_3, \dots, e_n\}$ est une base adaptée pour τ^2.

(2) **Pour (2)** C'est la proposition 15.14.

(3) **Pour (3)** Soient deux transvections τ_1 et τ_2. Il existe des applications linéaire inversibles P et Q telle que $A = P\tau_1 P^{-1}$ et $A = Q\tau_2 Q^{-1}$ où A est l'application de la matrice (15.29). Nous avons alors

$$\tau_1 = (P^{-1}Q)\tau_2(P^{-1}Q)^{-1}. \tag{15.47}$$

Donc τ_1 et τ_2 sont conjugués dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Nous devons encore prouver qu'elles sont conjuguées dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

Soit $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ tel que $\tau_1 = g\tau_2 g^{-1}$. Si $\det(g) = \lambda$, en posant $h = \lambda^{-1}g \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ nous avons $\tau_1 = h\tau_2 h^{-1}$. Donc τ_1 et τ_2 sont conjuguées par $h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$.

□

Remarque 15.16.
Nous notons E_{ij} la matrice qui possède uniquement 1 en position (i,j). C'est-à-dire que $\big(E_{ij}\big)_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Soit H l'hyperplan des points fixes de f. Dans une base contenant une base de H, la matrice d'une transvection a pour forme type :

EqooZAKHooBiKlTd

$$T_{ij}(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda E_{ij} \tag{15.48}$$

avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et une dilatation a pour forme type la matrice diagonale

$$D_i(\alpha) = \mathbb{1} + (\alpha - 1)E_{ii} \tag{15.49}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Bien entendu, en choisissant une base quelconque, les matrices des dilatations et des translations peuvent avoir des formes différentes.

[11] Définition 15.12.

LemooTQJXooGoIxsI

Lemme 15.17.
Quelques manipulations de lignes et de colonnes pour les matrices.

ITEMooRWANooPAVjkm

(1) *La multiplication à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de ligne*

$$L_i \to L_i + \lambda L_j. \tag{15.50}$$

ITEMooHPSMooWBrSXP

(2) *La multiplication à droite par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de colonne*

$$C_j \to C_j + \lambda C_i. \tag{15.51}$$

ITEMooXUGFooKcbrxs

(3) *La multiplication à gauche par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ revient à la substitution de lignes*

$$\begin{cases} L_i \to L_j & \text{(15.52a)} \\ L_j \to -L_i. & \text{(15.52b)} \end{cases}$$

Notons qu'il n'est pas possible d'inverser deux lignes à l'aide de transvections sans changer un signe parce que les transvections sont de déterminant 1 alors que l'inversion de lignes change le signe du déterminant.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous devons prouver que

$$\big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl} = \begin{cases} A_{kl} & \text{si } k \neq i \\ A_{il} + \lambda A_{jl} & \text{si } k = i. \end{cases} \tag{15.53}$$

Un peu de calcul matriciel avec utilisation modérée des indices donne :

$$\begin{aligned} \big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl} &= \sum_s \big(T_{ij}(\lambda)\big)_{ks} A_{sl} && \text{(15.54a)} \\ &= \sum_s \delta_{ks}A_{sl} + \lambda\delta_{ik}\delta_{js}A_{sl} && \text{(15.54b)} \\ &= A_{kl} + \lambda\delta_{ik}A_{jl}. && \text{(15.54c)} \end{aligned}$$

(2) **Pour (2)** C'est la même chose.

(3) **Pour (3)** Si nous appliquons successivement ces trois matrices (de droite à gauche) nous effectuons les substitutions :

$$\begin{cases} L'_i = L_i + L_j \\ L'_j = L_j \end{cases} \quad \text{suivi de} \quad \begin{cases} L''_i = L'_i \\ L''_j = L'_j - L'_i \end{cases} \quad \text{et de} \quad \begin{cases} L'''_i = L''_i + L''_j \\ L'''_j = L''_j. \end{cases} \tag{15.55}$$

En effectuant ces substitutions,

$$L'''_i = L''_i + L''_j = L'_i + (L'_j - L'_i) = L'_j = L_j \tag{15.56}$$

et

$$L'''_j = L''_j = L'_j - L'_i = L_j - (L_i + L_j) = -L_i, \tag{15.57}$$

ce qu'il fallait.

□

PropooFDNRooWFfUDd

Proposition 15.18 ([495]).
Soient $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

(1) *Si $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, il existe des transvections $U_1, \dots, U_r$, $V_1, \dots, V_s$ telles que*

$$A = U_1 \dots U_r \, D_n\big(\det(A)\big) \, V_1 \dots V_s. \tag{15.58}$$

EQooKSQVooIpkdIE

ITEMooLRYXooSoKRiA

(2) *L'ensemble des transvections engendre le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.*

(3) *L'ensemble des transvections et des dilatations engendre le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.*

Démonstration. Nous allons montrer que toutes les matrices de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être écrites comme produits de matrices de la forme (15.48). Cela montrera qu'étant donné un endomorphisme f et une base *pas spécialement liée à* f, il est possible d'écrire la matrice de f comme produit de transvections dont les hyperplans invariants sont « contenus » dans cette base. Cela suffit à prouver que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ grâce au lemme 2.146.

Toutes les transvections ont un déterminant égal à 1. Donc le groupe engendré par les transvections est inclus dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$. Soit $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$; nous allons utiliser le pivot de Gauss pour la diagonaliser. Étant donné que A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $A_{i1}\neq 0$ alors une multiplication à gauche par $L_{1i}\big((A_{11}-1)/A_{i1}\big)$ effectue la substitution

$$L_1\to L_1-\frac{A_{11}-1}{A_{i1}}L_i \tag{15.59}$$

qui met un 1 en la position $(1,1)$. Notons que si la première colonne est de la forme

$$\begin{pmatrix} s\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \tag{15.60}$$

avec $s\neq 0$ alors il faut plutôt faire les substitutions $L_2\to L_2+L_1$ et ensuite $L_1\to L_1-\frac{1}{s}L_2$ pour obtenir le même résultat. En effectuant le pivot avec A_{11}, une suite d'opérations sur les lignes et les colonnes donnent

$$M_1\dots M_pAN_1\dots N_q=\begin{pmatrix}1&0\\0&A_1\end{pmatrix} \tag{15.61}$$

où $A_1\in\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{K})$ et $\det(A_1)=\det(A)$. En continuant de la sorte nous arrivons sur une matrice diagonale[12]

$$M_1\dots M_{p'}AN_1\dots N_{q'}=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&\alpha\end{pmatrix} \tag{15.62}$$

avec $\alpha=\det(A)$. En d'autres termes nous avons prouvé qu'il existe des transvections $U_1,\dots,U_r$ et $V_1,\dots,V_s$ telles que

$$A=U_1\dots U_r\,D_n\big(\det(A)\big)\,V_1\dots V_s. \tag{15.63}$$

EQooZYYFooQGCgxU

Cela prouve que les transvections et les translations engendrent $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Si $A\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ alors $D_n\big(\det(A)\big)=1$ et l'équation (15.63) est un produit de transvections. □

Proposition 15.19.
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est engendré par les endomorphismes inversibles diagonalisables.*

Démonstration. Par la proposition 15.18, le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est engendré par les dilatations et les transvections. Il suffit donc de montrer qu'à leur tour, ces deux types d'endomorphismes sont engendrés par les endomorphismes inversibles et diagonalisables.

Les dilatations sont diagonalisables et inversibles. C'est bon pour elles.

Soit une transvection u, et une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ dans laquelle u est de la forme (15.29). Nous considérons l'endomorphisme $d\colon E\to E$ défini par $d(e_k)=ke_k$. Cet endomorphisme est diagonalisable parce que son polynôme minimal, $\mu_d=\prod_{k=1}^n(X-k)$, est scindé à racines simples (voir le théorème 10.220).

Nous avons évidemment $u=d^{-1}\circ(d\circ u)$ où d^{-1} est diagonalisable et inversible. Voyons que $d\circ u$ est également diagonalisable en montrant que μ_d est son polynôme minimal (qui est scindé à racines simples).

Il suffit de montrer que $\mu_d(d\circ u)(e_k)=0$ pour tout k. Ainsi μ_d sera un polynôme annulateur de $d\circ u$ de degré n, et donc minimal.

(1) **Si $k\leqslant n-1$** Alors $u(e_k)=e_k$ et $(d\circ u-n)e_k=(k-n)e_k$. Donc :

$$\mu_d(d\circ u)(e_k)=(d\circ u-1)(d\circ u-2)\dots(d\circ u-n)e_k=(k-1)(k-2)\dots(k-n)e_k=0 \tag{15.64}$$

parce que dans le produit des $k-i$, il y en a forcément un de nul.

[12] Attention : les opérations sur les lignes et les colonnes ne sont pas des opérations de similitude. Il n'est pas question de prétendre ici que toutes les matrices de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ sont diagonales, voir la définition 6.126.

(2) **Si $k = n$** Dans un premier temps,

$$(d \circ u - n)e_n = d(e_n + e_{n-1}) - ne_n = ne_n + (n-1)e_{n-1} - ne_n = (n-1)e_{n-1}. \tag{15.65}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\big(d \circ u - (n-1)\big)e_{n-1} &= d(e_{n-1}) - (n-1)e_{n-1} && (15.66a)\\ &= d(e_{n-1}) - (n-1)e_{n-1} && (15.66b)\\ &= (n-1)e_{n-1} - (n-1)e_{n-1} && (15.66c)\\ &= 0 && (15.66d)\end{aligned}$$

Le polynôme μ_d est donc un polynôme scindé à n racines simples annulateur de $d \circ u$, qui est alors diagonalisable et inversible (parce que u et d le sont).

Donc sous la forme $u = d^{-1}(du)$, la transvection u est écrite comme produit de diagonalisables inversibles. □

PROPooSAOTooIlpJoY

Proposition 15.20 ([182]).
Soient $n \geqslant 3$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Alors

(1) le groupe dérivé[13] *de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$;*

(2) le groupe dérivé de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.

Démonstration. Soit une transvection τ. Dans une base adaptée nous avons $\tau(e_1) = e_1 + e_2$, $\tau(e_2) = e_2$. Pour ces vecteurs nous avons $\tau^2(e_1) = e_1 + 2e_2$. Étant donné que la caractéristique est différente de 2 nous avons $2 \neq 0$ et donc $\tau^2(e_2) \neq e_2$. Tout ça pour dire que $\tau^2 \neq \mathrm{Id}$.

En utilisant le lemme 15.15 nous savons que τ^2 est une transvection et donc que τ^2 est conjugué à τ dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$: il existe $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ telle que $\tau^2 = g\tau g^{-1}$. Donc

$$\tau = g\tau g^{-1}\tau^{-1} \in D\big(\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})\big). \tag{15.67}$$

Nous avons donc montré que $D\big(\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})\big)$ contient toutes les transvections. À fortiori, $D\big(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\big)$ contient également toutes les transvections. Par 15.18, nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) &\subset D\big(\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})\big) && (15.68a)\\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) &\subset D\big(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\big) && (15.68b)\end{aligned}$$

Mais vu que le déterminant est multiplicatif[14], nous avons aussi $D\big(\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})\big) \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, et $D\big(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\big) \subset \mathrm{SL}(n\mathbb{K})$. □

15.2.2 Connexité de certains groupes

LEMooIPOVooZJyNoH

Lemme 15.21.
Le groupe $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Démonstration. La non connexité par arcs est facile parce que les éléments de déterminant 1 ne peuvent pas être reliés aux éléments de déterminant -1 par un chemin continu restant dans $\mathrm{O}(n)$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires 11.92.

En ce qui concerne la connexité, il faut en dire un peu plus.

Les éléments de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ ont des déterminants égaux à 1 ou à -1. Ces deux parties sont des ouverts (pour la topologie induite de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$). En effet soit $A \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ (la partie contenant les déterminants 1 ; ce que l'on va dire tient pour l'autre partie). Alors, parce que le déterminant est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de A dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ dans lequel le déterminant reste entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ (c'est la définition de la continuité avec $\epsilon = 1/2$). L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est par définition un ouvert de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ et ne contient que des éléments de déterminant 1.

La partie $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ est donc non-connexe par la proposition 9.114. □

LEMooQMXHooZQozMK

Lemme 15.22.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont connexes par arcs.

[13] Définition 2.154.
[14] Par le lemme 10.15(1).

Démonstration. Soient A une matrice unitaire, et Q une matrice unitaire qui diagonalise A. Étant donné que les valeurs propres arrivent par paires complexes conjuguées,

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\theta_r} & \\ & & & & e^{-i\theta_r} \end{pmatrix}. \tag{15.69}$$

Le chemin $U(t)$ obtenu en remplaçant θ_i par $t\theta_i$ avec $t \in [0,1]$ joint QAQ^{-1} à l'identité. Par conséquent $Q^{-1}U(t)Q$ joint A à l'unité. □

Théorème 15.23.
Les matrices normales[15] *forment un espace connexe par arc.*

Démonstration. Soient A une matrice normale et U une matrice unitaire qui diagonalise A. Nous considérons $U(t)$, un chemin qui joint $\mathbb{1}$ à U dans $\mathrm{U}(n)$. Pour chaque t, la matrice

$$A(t) = U(t)^{-1}AU(t) \tag{15.70}$$

est normale. Nous avons donc trouvé un chemin dans les matrices normales qui joint A à une matrice diagonale. Il est à présent facile de la joindre à l'identité.

Toutes les matrices normales étant connexes à l'identité, l'ensemble des matrices normales est connexe. □

PROPooALQCooLZCKrH

Proposition 15.24.
Le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$; par la proposition 15.18(2) nous pouvons écrire

$$A = \prod_{c\in X} T_c(\lambda_c) \tag{15.71}$$

où X est une partie de l'ensemble des couples (i,j) dans $\{1,\dots,n\}$. En posant

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,1] &\to \mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) \\ t &\mapsto \prod_{c\in X} T_c(t\lambda_c) \end{aligned} \tag{15.72}$$

nous avons une application continue de A vers $\mathbb{1}$, qui, à tout t fait correspondre la matrice $\varphi(t)$, inversible de déterminant 1.

Donc tous les éléments de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être reliés à $\mathbb{1}$. Par conséquent, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est connexe par arcs. □

PROPooVJNIooMByUJQ

Proposition 15.25 ([496])**.**
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et sa décomposition (15.58). Comme montré précédemment, chacune des transvections peut être reliée à $\mathbb{1}$ par un chemin continu dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. En ce qui concerne le facteur de translation, nous ne pouvons pas simplement prendre le chemin donné par $t \mapsto D_n\big(t\det(A)\big)$ parce que le résultat n'est pas inversible en $t = 0$.

Puisque $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs il existe une application continue $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que $\alpha(0) = \det(A) \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha(1) = 1$. Il suffit alors de prendre $D_n\big(\alpha(t)\big)$ et nous avons un chemin continu de A vers $\mathbb{1}$ restant dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. □

PROPooBIYQooWLndSW

Proposition 15.26.
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *a exactement deux composantes connexes par arcs.*

Démonstration. Nous notons $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ les parties de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ formées des applications de déterminant strictement positifs et strictement négatifs respectivement. D'après le théorème des valeurs

[15] Définition 14.103.

intermédiaires (théorème 11.92), il n'existe pas d'application continue dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ reliant $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ à $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ tout en restant dans les applications de déterminant non nul[16].

Montrons que $\mathrm{GL}^{\pm}(n,\mathbb{R})$ sont connexes par arcs. Si $A\in\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ alors grâce à la décomposition (15.58), il existe un chemin continu de A vers $D_n\big(\det(A)\big)$. Puisque $\mathbb{R}^{\pm}$ sont connexes par arcs, il est possible de relier $D_n\big(\det(A)\big)$ à $D_n(\pm1)$ par un chemin continu. □

15.2.3 Densité

PropDigDensVxzPuo

Proposition 15.27.
Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$.

Démonstration. D'après le lemme de Schur 14.102, une matrice de $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est de la forme

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}. \tag{15.73}$$

Les valeurs propres sont sur la diagonale. La matrice est diagonalisable si les éléments de la diagonales sont tous différents. Il suffit maintenant de considérer n suites $(\epsilon_k^{(r)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes vers zéro telles que pour chaque k les nombres $\lambda_r+\epsilon_k^{(r)}$ soient tous différents. La suite de matrices

$$A_k=Q\begin{pmatrix}\lambda_1+\epsilon_k^{(1)} & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n+\epsilon_k^{(n)}\end{pmatrix}Q^{-1}. \tag{15.74}$$

est alors diagonalisable pour tout k et nous avons $\lim_{k\to\infty}A_k=A$. □

PropQGUPooVudelJ

Proposition 15.28.
Les matrices inversibles sont denses dans l'ensemble des matrices. C'est-à-dire que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; le lemme de Schur réel 10.227 nous permet d'écrire

$$A=Q^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}Q \tag{15.75}$$

EQooJHPAooWFVSst

avec Q orthogonale.

Nous allons définir une suite (A_k) de matrices inversibles convergeant vers A. Pour cela nous considérons, pour chaque i, une suite $(\epsilon_k^{(i)})$ telle que $\lambda_i+\epsilon_k^{(i)}\neq0$ et $\epsilon_k^{(i)}\to0$. La matrice A_k est la matrice donnée par (15.75) dans laquelle nous remplaçons λ_i par $\lambda_i+\epsilon_k^{(i)}$.

En ce qui concerne les blocs, ceux dont le déterminant est non nul, nous n'y touchons pas, et ceux dont le déterminant est nul, nous remplaçons a par $a+\epsilon_k$.

Avec cela, $Q^{-1}A_kQ$ est une suite dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui converge vers A. □

PROPooZUHOooQBwfZq

Proposition 15.29.
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ *alors*

$$e^{\mathrm{Tr}(A)}=\det(e^A). \tag{15.76}$$

Démonstration. Ici, e^A est l'exponentielle, soit d'endomorphisme, soit de matrice définie par la proposition 12.366.

Le résultat est un simple calcul pour les matrices diagonalisables. Si A n'est pas diagonalisable, nous considérons une suite de matrices diagonalisables A_k dont la limite est A (proposition 15.27). La suite

$$a_k=e^{\mathrm{Tr}(A_k)} \tag{15.77}$$

[16] Si $\varphi\colon[0,1]\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est le chemin, la fonction à mettre dans le théorème des valeurs intermédiaires est la fonction $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ $t\mapsto\det\big(\varphi(t)\big)$.

converge vers $e^{\mathrm{Tr}(A)}$ tandis que la suite

$$b_k = \det(e^{A_k}) \tag{15.78}$$

converge vers $\det(e^A)$. Mais nous avons $a_k = b_k$ pour tout k ; les limites sont donc égales. □

CORooOKKSooHrsYOs

Corolaire 15.30.
Si $X \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ alors

$$\frac{d}{dt}\Big[\det(e^{tX})\Big]_{t=0} = \mathrm{Tr}(X). \tag{15.79}$$

Démonstration. Nous écrivons la proposition 15.29 pour tX au lieu de X ; pour chaque t nous avons

$$\det\left(e^{tX}\right) = e^{\mathrm{Tr}(tX)} = e^{t\,\mathrm{Tr}(X)}. \tag{15.80}$$

La dérivation par rapport à t en $t = 0$ donne le résultat attendu. □

ThoHZTooWDjTYI

Théorème 15.31 (Cayley-Hamilton[497, 498])**.**
Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif quelconque annule son propre polynôme caractéristique

Une autre démonstration est donnée par le théorème 10.116.

Démonstration. La preuve est divisée en plusieurs étapes.

(1) **Endomorphisme diagonalisable** Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel V de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et χ_u sont polynôme caractéristique. Nous savons que si λ est une valeur propre de u alors $\chi_u(\lambda) = 0$ par le théorème 10.113(2). En combinant avec le lemme 10.93, si x est vecteur propre pour la valeur propre λ de u nous avons

$$\chi_u(u)x = \chi_u(\lambda)x = 0. \tag{15.81}$$

Donc tant que u possède une base de vecteurs propres nous avons $\chi_u(u) = 0$.

(2) **Le cas complexe**

Nous nous restreignons à présent (et provisoirement) au cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce qui nous donne $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ par la proposition 15.27. Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ nous considérons une suite de matrices diagonalisables $A_k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})} A$. Pour chaque k nous avons par le point précédent

$$\chi_{u_k}(u_k) = 0. \tag{15.82}$$

Chacune des composantes de $\chi_{u_k}(u_k)$ est un polynôme en les composantes de u_k, ce qui légitime le passage à la limite :

$$\chi_u(u) = 0. \tag{15.83}$$

Le théorème est établi pour toutes les matrices de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et donc aussi pour tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

(3) **Le cas général**

Par définition, $\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1})$; les coefficients de X sont des polynômes à coefficients entiers en les composantes de u. En substituant u à X nous obtenons une matrice dont chacune des entrées est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u. Pour chaque i et j entre 1 et n il existe donc un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{Z}(X_1, \dots, X_{n^2})$ tel que

$$\chi_u(u)_{ij} = P(u_{11}, \dots, u_{nn}). \tag{15.84}$$

Ces polynômes ne dépendent pas de u ni du corps sur lequel on travaille. Notre but est maintenant de prouver que $P_{ij} = 0$.

Étant donné que le cas complexe (et a fortiori entier) est déjà prouvé nous savons que pour tout $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{Z})$ nous avons $P(u_{11}, \dots, u_{nn}) = 0$. La proposition 8.185 nous donne effectivement $P = 0$, en conséquence de quoi l'endomorphisme $\chi_u(u)$ est nul.

□

Exemple 15.32.
Pour montrer que chaque composante $\chi_u(u)$ est bien un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u, voyons l'exemple 2×2 : $u=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. D'abord

$$\chi_u(X)=\det\begin{pmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{pmatrix}=X^2-(a+d)X+ad-cb. \tag{15.85}$$

Le coefficient de X^2 est 1, celui de X est $-a-d$ et le terme indépendant est $ad-cb$; tout trois sont des polynômes à coefficients entiers en a,b,c,d. Après substitution de X par u,

$$\chi_u(u)_{ij}=(u^2)_{ij}-(a+d)u_{ij}+ad-cb. \tag{15.86}$$

C'est bien un polynôme à coefficients entiers en les entrées de la matrice u. △

15.2.4 Racine carrée d'une matrice hermitienne positive

PropVZvCWn

Proposition-Définition 15.33.
Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne[17] *positive, alors il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $A=R^2$. De plus R est un polynôme (de $\mathbb{R}[X]$) en A.*

La matrice R ainsi définie est la ***racine carrée*** *de A, et est notée $\sqrt{A}$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Existence** Étant donné que A est hermitienne, elle est diagonalisable par une matrice unitaire (proposition 14.104), et ses valeurs propres sont réelles et positives (parce que A est positive). Soit donc P une matrice unitaire telle que

$$P^*AP=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{15.87}$$

avec $\alpha_i>0$. Si on pose

$$R=P\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}P^*, \tag{15.88}$$

alors $R^2=A$ parce que $P^*P=\mathbb{1}$.

(2) **Hermitienne positive** La matrice R est hermitienne parce que, avec un peu de notation raccourcie, $\overline{R=P^*\sqrt{\alpha}P}$ et $R^*=P^*\sqrt{\alpha}P$. D'autre part, elle est positive parce que ses valeurs propres sont les $\sqrt{\alpha_i}$ qui sont positives.

(3) **Polynôme** Nous montrons maintenant que la matrice R est un polynôme en A. Pour cela nous considérons un polynôme Q tel que $Q(\alpha_i)=\sqrt{\alpha_i}$ pour tout i. Soit $\{e_i\}$ une base de diagonalisation de A : $Ae_i=\alpha_ie_i$. Alors c'est encore une base de diagonalisation de $Q(A)$. En effet si $Q=\sum_k a_kX^k$, alors

$$Q(A)e_i=(\sum_k a_kA^k)e_i=(\sum_k a_k\alpha_i^k)e_i=Q(\alpha_i)e_i=\sqrt{\alpha_i}e_i. \tag{15.89}$$

Les valeurs propres de $Q(A)$ sont donc $\sqrt{\alpha_i}$. Nous savons maintenant que $Q(A)$ a la même base de diagonalisation de A (et donc la même matrice unitaire P qui diagonalise), c'est-à-dire que

$$Q(A)=P^*\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}=R. \tag{15.90}$$

Donc oui, R est un polynôme en A.

Notons que ce Q n'est pas du tout unique ; il existe une infinité de polynômes envoyant n nombres donnés sur n nombres donnés.

[17] Définition 10.177.

(4) **Unicité** Soit S une matrice hermitienne positive telle que $R^2 = S^2 = A$. D'abord S commute avec A parce que

$$SA = S^3 = S^2S = AS. \tag{15.91}$$

Donc S commute aussi avec $Q(A) = R$. Étant donné que S et R commutent et sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables par le corolaire 10.221. Soient $D_R = PRP^*$ et $D_S = PSP^*$ les formes diagonales de R et S dans une base de simultanée diagonalisation. Les carrés des valeurs propres de R et S étant identiques (ce sont les valeurs propres de A) et les valeurs propres de R et S étant positives, nous déduisons que $D_R = D_S$ et donc que $R = P^*D_RP = P^*D_SP = S$.

□

Une des applications usuelles de cette proposition est la décomposition polaire.

15.2.5 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

LemTLlTAAf

Lemme 15.34 ([499]).
Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ *est compact.*

Démonstration. Nous avons $O(n) = f^{-1}\big(\{\mathbb{1}_n\}\big)$ où f est l'application continue $A \mapsto A^tA$. En tant qu'image inverse d'un fermé par une application continue, le groupe $O(n)$ est fermé.

De plus il est borné parce que tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont $\leqslant 1$, donc $\|A\|_\infty$ pour tout $A \in O(n)$. □

PropPEMDqVT

Proposition 15.35.
Une matrice symétrique définie ou semi définie positive, admet une unique racine carrée symétrique. Le spectre de la racine carrée est la racine carrée du spectre de la matrice de départ.

Démonstration. Propriétés de la racine carrée d'une matrice symétrique

(1) **Existence** Soit T une matrice symétrique et Q une matrice orthogonale qui diagonalise[18] T : $QTQ^{-1} = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ et $\lambda_i \geqslant 0$. En posant $R = Q^{-1}\sqrt{D}Q$, il est vite vérifié que $R^2 = T$ et que R est symétrique. En ce qui concerne le spectre, R a pour valeurs propres les $\sqrt{\lambda_i}$.

(2) **Unicité**

Soit R une matrice symétrique de T : $R^2 = T$. Du coup R et T commutent : $RT = R^3 = TR$. Par conséquent les espaces propres de T sont stables sous R. Soit E_λ l'un d'eux de dimension d, et T_F, R_F les restrictions de T et R à E_λ. L'application T_F est une homothétie et $R_F^2 = T_F = \lambda\mathbb{1}$. Mais R_F est encore une matrice symétrique définie positive, donc nous pouvons considérer une base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de E_λ qui diagonalise R_F avec les valeurs propres μ_i ; nous avons donc en même temps

$$R_f^2(e_i) = \mu_i^2 e_i \tag{15.92a}$$
$$T_F(e_i) = \lambda e_i, \tag{15.92b}$$

de telle sorte que $\mu_i^2 = \lambda$. Mais les valeurs propres de R_F sont positives, sont $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ pour tout i. En conclusion R_F est univoquement déterminé par la donnée de T. Vu que cela est valable pour tous les espaces propres de T et que ces espaces propres engendrent tout E, l'opérateur R est déterminé de façon univoque par T.

□

Notons que nous n'avons démontré l'unicité qu'au sein des matrices symétriques.

15.2.6 Décomposition polaires : cas réel

Nous rappelons que $S^{++}(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives, d'après le paragraphe 10.232.

LemMGUSooPqjguE

Lemme 15.36.
La partie $S^+(n, \mathbb{R})$ *est fermée dans* $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

[18] Théorème 10.228.

Démonstration. En effet si S_k est une suite de matrices symétriques convergeant dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ vers la matrice A, les suites $(S_k)_{ij}$ et $(S_k)_{ji}$ des composantes ij et ji sont des suites égales, et donc leurs limites sont égales[19]. Donc la limite est symétrique.

En ce qui concerne le spectre, le théorème 10.228 nous permet de diagonaliser : $S_k = Q_k D_k Q_k^{-1}$ où les D_k sont des matrices diagonales remplies de nombres positifs ou nuls. Comme $O(n)$ est compact[20], nous avons une sous-suite $Q_{\varphi(k)}$ convergente : $Q_{\varphi(k)} \to Q$. Pour chaque k, nous avons

$$S_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)} D_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}^{-1}, \tag{15.93}$$

dont la limite existe et vaut A. Puisque pour tout k, $D_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)}^{-1} S_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}$ et que le produit matriciel est continu, la suite $k \mapsto D_{\varphi(k)}$ est une suite convergente dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Nous notons D sa limite qui est encore une matrice diagonale contenant des nombres positifs ou nuls sur la diagonale.

$$A = \lim_{k\to\infty} S_{\varphi(k)} = QDQ^{-1}, \tag{15.94}$$

et donc le spectre de A est la limite de ceux des matrices $D_{\varphi(k)}$. Chacun étant positif, la limite est positive. Donc $A \in S^+(n,\mathbb{R})$. □

LemZKJWqIP

Lemme 15.37.
La fermeture de l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives est l'ensemble des matrices définies positives : $\mathrm{Adh}(S^{++}(n,\mathbb{R})) = S^+(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Le lemme 15.36 nous dit que $S^+(n,\mathbb{R})$ était fermé. Nous devons prouver que pour tout élément de $S^+(n,\mathbb{R})$, il existe une suite (S_k) dans $S^{++}(n,\mathbb{R})$ convergeant vers S.

Si $S \in S^+(n,\mathbb{R})$ alors nous avons la diagonalisation

$$S = QDQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{15.95}$$

où $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i. Nous définissons

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \epsilon_k^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + \epsilon_k^{(n)} \end{pmatrix} \tag{15.96}$$

où ϵ_k^i est une suite convergent vers 0 telle que $\lambda_i + \epsilon_n^{(i)} > 0$ pour tout i et k. Typiquement si $\lambda_i > 0$ alors $\epsilon_k^{(i)} = 0$ et sinon $\epsilon_k^{(i)} = 1/k$.

Pour tout k nous avons $QD_kQ^{-1} \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ et de plus $QD_kQ^{-1} \to QDQ = S$. □

ThoLHebUAU

Théorème 15.38 (Décomposition polaire de matrices symétriques définies positives[499, 500, 501])**.**
En ce qui concerne les matrices inversibles :

$$\begin{aligned} f\colon O(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{15.97}$$

est un homéomorphisme[21]*.*

En ce qui concerne les matrices en général :

$$\begin{aligned} g\colon O(n,\mathbb{R}) \times S^{+}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{15.98}$$

est une surjection mais pas une injection.

De plus les mêmes conclusions tiennent si nous prenons $(Q,S) \mapsto QS$ au lieu de SQ.

[19] Ici nous utilisons le critère de convergence composante par composante et le fait que nous ne sommes pas trop inquiétés par la norme que nous choisissons parce que toutes les normes sont équivalentes par le théorème 12.70.

[20] Lemme 15.34.

[21] Cela est en réalité un difféomorphisme, voir la remarque 15.40.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 15.39
Je crois que les éléments de la décomposition polaire sont des polynômes en M. Écrivez-moi si vous pouvez confirmer ou infirmer.

Démonstration. Nous commençons par prouver les résultats concernant les matrices inversibles.

(1) **Existence et unicité**

Si $M = SQ$, alors $MM^t = SQQ^tS^t = S^2$, donc S doit être une racine carrée symétrique de la matrice définie positive MM^t. La proposition 15.35 nous dit que ça existe et que c'est unique. Donc S est univoquement déterminé par M. Maintenant avoir $Q = MS^{-1}$ est obligatoire (unicité) et fonctionne :

$$Q^tQ = (S^{-1})^tM^tMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathbb{1}, \tag{15.99}$$

donc Q ainsi défini est orthogonale.

Notons que ceci ne fonctionne pas lorsque M n'est pas inversible parce qu'alors S n'est pas inversible.

(2) **Homéomorphisme**

Le fait que f soit continue n'est pas un problème : c'est un produit de matrices. Nous devons vérifier que f^{-1} est continue. Soit une suite convergente $M_k \to M$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Si nous nommons (Q_k, S_k) la décomposition polaire de M_k et (Q, S) celle de M, nous devons prouver que $Q_k \to Q$ et $S_k \to S$. En effet dans ce cas nous aurions

$$\lim_{k\to\infty} f^{-1}(M_k) = \lim_{k\to\infty} (Q_k, S_k) = (Q, S) = f^{-1}(M). \tag{15.100}$$ EqJIkoaIv

Étant donné que $O(n)$ est compact (lemme 15.34), la suite (Q_k) admet une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass, théorème 9.213) que nous nommons

$$Q_{\varphi(k)} \to F \in O(n). \tag{15.101}$$

Vu que la suite (M_k) converge, sa sous-suite converge vers la même limite : $M_{\varphi(k)} \to M$ et vu que pour tout k nous avons $S_k = M_kQ_k^{-1}$,

$$S_{\varphi(k)} \to G = MF^{-1}. \tag{15.102}$$

Vu que chacune des matrices $S_{\varphi(k)}$ est symétrique définie positive, la limite est symétrique et semi-définie positive[22]. Donc $G \in S^+(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ parce que de plus M et F étant inversibles, G est inversible. En ce qui concerne la sous-suite nous avons

$$M_{\varphi(k)} = S_{\varphi(k)}Q_{\varphi(k)} \to GF = M \tag{15.103}$$

où $F \in O(n)$ et $G \in S^+(n,\mathbb{R})$. Par unicité de la décomposition polaire de M (partie déjà démontrée), nous avons $G = S$ et $F = Q$.

Nous avons prouvé que toute sous-suite convergente de Q_k a Q pour limite. Donc la suite elle-même converge[23] vers Q. Donc $Q_k \to Q$. Du coup vu que $S_k = M_kQ_k^{-1}$ est un produit de suites convergentes, S_k converge également, vers S : $S_k \to S$.

Au final l'application f^{-1} est bien continue parce que les égalités (15.100) ont bien lieu.

Nous passons maintenant à la preuve dans le cas des matrices en général.

Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; par densité (lemme 15.28), il existe une suite (A_k) dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telle que $A_k \to A$. Pour chacun des k nous appliquons la décomposition polaire déjà prouvée : $A_k = Q_kS_k$. D'abord (Q_k) est une suite dans le compact[24] $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et accepte donc une sous-suite convergente. Quitte à redéfinir la suite de départ, nous supposons pour alléger les notations que $Q_k \to Q \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Vu que Q_k est inversible,

$$S_k = Q_k^{-1}A_k \tag{15.104}$$

Le produit matriciel étant continu nous avons $S_k \to S$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Mais $S^+(n,\mathbb{R})$ étant fermé (lemme 15.36) nous avons aussi $S \in S^+(n,\mathbb{R})$. □

RemBJCBooGLiRmG

Remarque 15.40.
Pour démontrer que f est différentiable, nous devons utiliser le théorème d'inversion locale 19.76 ; cela est fait dans la proposition 19.86.

[22] Lemme 15.37
[23] Proposition 9.378, pas difficile.
[24] Lemme 15.34.

CorAWYBooNCCQSf

Corolaire 15.41.
Toute matrice peut être écrite sous la forme Q_1DQ_2 où Q_1 et Q_2 sont orthogonales et D est diagonale.

Démonstration. Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ alors la décomposition polaire 15.38 nous donne $A = SQ$ où S est symétrique définie positive et Q est orthogonale. La matrice S peut ensuite être diagonalisée par le théorème 10.228 : $S = RDR^{-1}$ où D est diagonale et R est orthogonale. Avec ces deux décompositions en main, $A = SQ = RDR^{-1}Q$. La matrice $R^{-1}Q$ est orthogonale. □

15.2.7 Enveloppe convexe

Définition 15.42.
*Un point a d'un ensemble convexe C est un **point extrémal** si $C \setminus \{a\}$ est convexe.*

ThoBALmoQw

Théorème 15.43 ([112]).
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires sur E sur lequel nous considérons la norme subordonnée[25] à celle sur E. L'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$ est le groupe orthogonal $O(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$. Montrons pour commencer que les éléments de $O(n)$ sont extrémaux dans $\mathcal{B}$. D'abord si $A \in O(E)$ alors $\|A\| = 1$ parce que $\|Ax\| = \|x\|$. Supposons maintenant que A n'est pas extrémal, c'est-à-dire qu'il est le milieu d'un segment joignant deux points (distincts) de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$. Soient donc $T,U \in \mathcal{B}$ tels que $A = \frac{1}{2}(T+U)$. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ nous avons

$$1 = \|x\| = \|Ax\| = \frac{1}{2}\|Tx + Ux\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(\|T\| + \|U\|\big) \leqslant 1 \tag{15.105}$$

EqKTuAUE

Toutes les inégalités sont en réalité des égalités. En particulier nous avons

$$\|Tx + Ux\| = \|Tx\| + \|Ux\|, \tag{15.106}$$

mais alors nous sommes dans un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 12.1) et donc il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $Tx = \lambda Ux$. Mais de plus les ~~inégalité~~ égalités (15.105) nous donnent

$$\frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) = 1 \tag{15.107}$$

alors que nous savons que $\|Tx\|, \|Ux\| \leqslant 1$, donc $\|Tx\| = \|Ux\| = 1$. La seule possibilité est d'avoir $\lambda = 1$. Nous avons prouvé que $Tx = Ux$ pour tout x de norme 1. Nous en déduisons que $T = U$.

Au final A n'est pas le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Nous passons donc à l'inclusion inverse : nous prouvons que les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont dans $O(E)$. Pour cela nous prenons $U \in \mathcal{B} \setminus O(E)$ et nous allons montrer que U n'est pas un point extrémal : nous allons l'écrire comme milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Par la seconde partie du théorème de décomposition polaire 15.38, il existe $Q \in O(n,\mathbb{R})$ et $S \in S^+(n,\mathbb{R})$ tels que $U = QS$. Nous diagonalisons S à l'aide de la matrice orthogonale P :

$$S = PDP^{-1} \tag{15.108}$$

avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. En termes de normes, nous avons

$$\|U\| = \|S\| = \|D\|. \tag{15.109}$$

En effet vu que Q est orthogonale, $\|Ux\| = \|QSx\| = \|Sx\|$ pour tout x, donc $\|U\| = \|S\|$. De plus pour tout x nous avons

$$\|Sx\| = \|PDP^{-1}x\| = \|DP^{-1}x\|. \tag{15.110}$$

Étant donné que P^{-1} est une bijection, le supremum des $\|Sx\|$ sera le même que celui des $\|Dx\|$ et donc $\|S\| = \|D\|$. Étant donné que par définition $\|U\| \leqslant 1$, nous avons aussi $\|D\| \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ (pour rappel, les valeurs propres de D sont positives ou nulles parce que S est ainsi).

Comme $U \notin O(E)$, au moins une des valeurs propres n'est pas 1, supposons que ce soit λ_1. Alors nous avons $\alpha, \beta \in [-1,1]$ avec $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ et $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Nous posons alors

$$D_1 = \operatorname{diag}(\alpha, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{15.111a}$$
$$D_2 = \operatorname{diag}(\beta, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{15.111b}$$

[25] Définition 12.76.

Nous avons bien $D_1 \neq D2$ et $D_1 + D_2 = D$. Par conséquent

$$U = \frac{1}{2}\big(QPD_1P^{-1} + QPD_2P^{-1}\big) \tag{15.112}$$

avec $QPD_1P^{-1} \neq QPD_2^{-1}$. La matrice U est donc le milieu d'un segment. Reste à montrer que ce segment est dans $\mathcal{B}$. Pour ce faire, prenons $x \in E$ et calculons :

$$\|QPD_iP^{-1}x\| = \|D_iP^{-1}x\| \leqslant \|P^{-1}x\| = \|x\| \tag{15.113}$$

parce que $\|D_i\| \leqslant 1$ et P^{-1} est orthogonale. Au final la norme de QPD_iP est plus petite que 1 et donc U est bien le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$, et donc non extrémal. □

ThoVBzqUpy

Théorème 15.44 ([502]).
L'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme induite de $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n,\mathbb{R})\big)$ l'enveloppe convexe de $O(n,\mathbb{R})$. Vu que $\mathcal{B}$ est convexe nous avons $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big) \subset \mathcal{B}$.

Maintenant nous devons prouver l'inclusion inverse. Pour ce faire nous supposons avoir un élément $A \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big)$ et nous allons dériver une contradiction.

Remarquons que $O(n)$ est compact par le lemme 15.34 et que par conséquent $\mathcal{C}\text{onv}(O(n))$ est compacte par le corolaire 13.42 et donc fermée. Nous considérons un produit scalaire $(X,Y) \mapsto X \cdot Y$ sur $\mathbb{M}$. Vu que $\mathcal{C}\text{onv}\big(O(n)\big)$ est un fermé convexe nous pouvons considérer la projection[26] sur $\mathcal{C}\text{onv}(A)$ relativement au produit scalaire choisi.

Nous notons $P = \texttt{proj}_{\mathcal{C}\text{onv}\left(O(n)\right)}(A)$. En vertu du théorème de projection, nous avons

$$(A - P) \cdot (M - P) \leqslant 0 \tag{15.114}$$

EqYSisLTL

pour tout $M \in \mathcal{C}\text{onv}\, O(n)$. Notons $B = A - P$ pour alléger les notations. L'équation (15.114) s'écrit

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P. \tag{15.115}$$

EqQDLZqXQ

D'autre part vu que $B \neq 0$ nous avons $B \cdot B > 0$, c'est-à-dire $B \cdot (A - P) > 0$ et donc

$$B \cdot A > B \cdot P. \tag{15.116}$$

En combinant avec (15.115),

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P < B \cdot A. \tag{15.117}$$

EqIQNlwal

Nous utilisons maintenant la décomposition polaire, théorème 15.38, pour écrire $B = QS$ avec $Q \in O(n)$ et $S \in S^+(n,\mathbb{R})$. Vu que l'inégalité (15.117) tient pour tout $M \in \mathcal{C}\text{onv}(O(n))$, elle tient en particulier pour $Q \in O(n)$. Donc

$$B \cdot Q < B \cdot A. \tag{15.118}$$

EQooOSAXooLbTQAG

Nous nous attachons à présent au produit scalaire $(X,Y) \mapsto \text{Tr}(X^tY)$ de la proposition 14.125. D'abord

$$B \cdot Q = \text{Tr}(B^tQ) = \text{Tr}(S^tQ^tQ) = \text{Tr}(S^t) = \text{Tr}(S), \tag{15.119}$$

EaHVxWdau

et ensuite l'inégalité (15.118) devient

$$\text{Tr}(S) < B \cdot A = \text{Tr}(S^tQ^tA). \tag{15.120}$$

Nous choisissons une basse $\{e_i\}$ diagonalisant S : $Se_i = \lambda_i e_i$ vérifiant automatiquement $\lambda_i \geqslant 0$ parce que S est semi-définie positive[27]. Alors

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(S) &< \text{Tr}(S^tQ^tA) && \text{(15.121a)}\\
&= \sum_i \langle S^tQ^tAe_i, e_i\rangle && \text{(15.121b)}\\
&= \sum_i \langle Ae_i, QSe_i\rangle && \text{(15.121c)}\\
&\leqslant \sum_i \|Ae_i\||\lambda_i| \underbrace{\|Qe_i\|}_{=1} && \text{(15.121d)}\\
&\leqslant \sum_i \lambda_i && A \in \mathcal{B} \Rightarrow \|Ae_i\| \leqslant 1 \quad \text{(15.121e)}\\
&= \text{Tr}(S). && \text{(15.121f)}
\end{aligned}$$

Il faut noter que la première inégalité est stricte, et donc nous avons une contradiction. □

[26] Le théorème de projection : théorème 14.151.
[27] Définition 10.231.

15.2.8 Décomposition de Bruhat

ThoizlYJO

Théorème 15.45 (Décomposition de Bruhat)**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps ; un élément $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$M = T_1 P_\sigma T_2 \tag{15.122}$$

où T_1 et T_2 sont des matrices triangulaires supérieures inversibles et où P_σ est une matrice de permutations $\sigma \in S_n$. De plus il y a unicité de σ.

Démonstration. Afin de rendre les choses plus visuelles, nous nous permettons de donner des exemples au fur et à mesure de la preuve. Nous prenons l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{15.123}$$

(1) **Existence** Soit $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; puisqu'elle est inversible, on a un indice i_1 maximum tel que $M_{i_1,1} \neq 0$. Nous changeons toutes les lignes jusque là, c'est-à-dire que nous faisons, pour $1 \leqslant i < i_1$,

$$L_i \to L_i - \frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}} L_{i_1}. \tag{15.124}$$

EqCHUhwR

Voir le lemme 15.17(3).

Nous avons donc obtenu une matrice dont la première colonne est nulle sauf la case numéro i_1. L'opération (15.124) revient à considérer la multiplication par la matrice de transvection

$$T_1^{(i)} = T_{ii_1}\left(-\frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}}\right) \tag{15.125}$$

pour tout $i < i_1$. Pour rappel nous ne changeons que les lignes *au-dessus* de la i_1. Du coup les matrices $T_1^{(i)}$ sont triangulaires supérieures. Nous avons donc la nouvelle matrice $M_1 = \left(\prod_{i<i_1} T_1^{(i)}\right) M$ pour laquelle toute la première colonne est nulle sauf un élément.

Dans le cas de l'exemple, le « pivot » sera la ligne $(2,5,6)$ et la matrice se transforme à l'aide de la matrice $T_1 = T_{12}(-1/2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{15.126}$$

EqvjXIYf

Maintenant nous faisons de même avec les colonnes (en renommant M la matrice obtenue à l'étape précédente) :

$$C_j \to C_j - \frac{M_{i_1 j}}{M_{i_1 1}} C_1, \tag{15.127}$$

qui revient à multiplier à droite par les matrices $T_{1j}(\frac{M_{i_1 i}}{M_{i_1 1}})$ avec $j > 1$. Encore une fois ce sont des matrices triangulaires supérieures.

Dans l'exemple, pour traiter la seconde colonne, nous multiplions (15.126) à droite par la matrice $T_{12}(-5/2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{15.128}$$

Appliquer encore la matrice $T_{13}(-6/2)$ apporte la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{15.129}$$

Enfin nous multiplions la matrice obtenue par $\frac{1}{M_{i_1 1}}\mathbb{1}$ pour normaliser à 1 l'élément « pivot » que nous avions choisi. Dans notre exemple nous multiplions par $1/2$ pour trouver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{15.130}$$

Eqduqlwu

La matrice obtenue jusqu'ici possède une ligne et une colonne de zéros avec un 1 à leur intersection, et elle est de la forme

$$M' = T_1 M T_2 \tag{15.131}$$

où T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures et inversibles, produits de matrices de transvection (et d'une matrice scalaire pour la normalisation).

Il reste à recommencer l'opération avec la seconde colonne (qui n'est pas toute nulle parce que le déterminant est encore non nul) puis la suivante, etc. Dans notre exemple de l'équation (15.130), nous éliminerions le 1/4 et le 4 en utilisant le 7/2.

Encore une fois tout cela se fait à l'aide de matrices supérieures parce qu'à chaque étape, les colonnes précédent le pivot sont déjà nulles (sauf un 1) et ne doivent donc pas être touchées.

À la fin de ce processus, ce qui reste est une matrice TMT' qui ne contient plus qu'un seul 1 sur chaque ligne et chaque colonne, c'est-à-dire une matrice de permutations : $P_\sigma = TMT'$ et donc

$$M = T_\sigma^{-1}(T')^{-1}. \tag{15.132}$$

(2) **Unicité**

Soient $\sigma, \sigma \in S_n'$ tels que $T_1 P_\sigma T_2 = S_1 P_\tau S_2$ avec T_i et S_i triangulaires supérieures et inversibles. En posant $T = T_2 S_2^{-1}$ et $S = T_1^{-1} S_1$, nous avons

$$P_\sigma T = S P_\tau \tag{15.133}$$

où S et T sont des matrices triangulaires supérieures et inversibles. Par les calculs de la preuve du lemme 6.115,

$$\begin{cases} (P_\sigma T)_{kl} = T_{\sigma^{-1}(k)l} & \text{(15.134a)} \\ (SP_\tau)_{kl} = S_{k\tau(l)}, & \text{(15.134b)} \end{cases}$$

et donc

$$T_{\sigma^{-1}(k)l} = S_{k\tau(l)}. \tag{15.135}$$

En écrivant cette équation avec $k = \sigma(i)$ (nous rappelons que σ est bijective),

$$T_{il} = S_{\sigma(i)\tau(l)}. \tag{15.136}$$

Nous savons que les termes diagonaux de T sont non nuls parce que T est triangulaire supérieure et inversible (donc pas de colonnes entières nulles). Nous avons donc, en prenant $i = l = k$,

$$0 \neq T_{kk} = S_{\sigma(k)\tau(k)}. \tag{15.137}$$

La matrice étant triangulaire supérieure, cela implique

$$\sigma(k) \leqslant \tau(k). \tag{15.138}$$

De la même manière en écrivant (15.135) avec $l = \tau^{-1}(i)$,

$$S_{ki} = T_{\sigma^{-1}(k)\tau^{-1}(i)} \tag{15.139}$$

et donc

$$\sigma^{-1}(k) \leqslant \tau^{-1}(k). \tag{15.140}$$

En écrivant cela avec $k = \sigma(j)$, nous avons $j \leqslant \tau^{-1}\sigma(j)$ et en appliquant enfin τ,

$$\tau(j) \leqslant \sigma(j). \tag{15.141}$$

En comparant avec (15.138), nous avons $\sigma = \tau$.

□

15.3 Sous-groupes du groupe linéaire

LemOCtdiaE

Lemme 15.46 ([112]).
Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme euclidienne $\|.\|$. Soit K un compact convexe de V et G, un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ tel que

$$u(K) \subset K \tag{15.142}$$

pour tout $u \in G$. Alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.

Démonstration. Avant de nous lancer dans la preuve, nous avons besoin d'un petit résultat.

(1) **Un pré-résultat**

Nous commençons par prouver que si $v \in \mathcal{L}(V)$ vérifie $v(K) \subset K$, alors v a un point fixe dans K. Pour cela nous considérons $x_0 \in K$ et la suite

$$x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^i(x_0). \tag{15.143}$$

Étant donné que K est convexe et stable par v, la suite (x_k) est contenue dans K et accepte une sous-suite convergente[28] que nous allons noter $x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Soit $a \in K$ la limite :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a. \tag{15.144}$$

Tant que nous y sommes nous pouvons aussi calculer $v(x_k)$:

$$\begin{aligned} v(x_k) &= v\left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} v^i(x_0) \right) && \text{(15.145a)} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^{i+1}(x_0) && \text{(15.145b)} \\ &= x_k + \frac{1}{k+1}\Big(v^{k+1}(x_0) - x_0 \Big). && \text{(15.145c)} \end{aligned}$$

EqUAfcaKG

La norme $\|v^{k+1}(x_0) - x_0\|$ est bornée par le diamètre de K, donc en prenant la limite $k \to \infty$ le second terme de (15.145c) tend vers zéro. En prenant ces égalités en $k = \varphi(n)$ et en prenant $n \to \infty$, nous trouvons

$$v(a) = a, \tag{15.146}$$

c'est-à-dire le résultat que nous voulions dans un premier temps.

(2) **Une norme sur V**

Nous passons maintenant à la preuve du lemme. D'abord nous remarquons que le groupe G agit sur V par $u \cdot x = u(x)$ et de plus, considérant la fonction continue

$$\begin{aligned} \alpha\colon G &\to V \\ u &\mapsto u(x), \end{aligned} \tag{15.147}$$

nous voyons que les orbites de cette action sont compactes en tant qu'image par α du compact G (théorème 9.298). Nous posons

$$\begin{aligned} \nu\colon V &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \max_{u\in G} \|u(x)\|. \end{aligned} \tag{15.148}$$

Cette définition a un sens parce que l'orbite $\{u(x) \text{ tel que } u \in G\}$ est compacte dans V et donc l'ensemble des normes est compact dans $\mathbb{R}$ et admet un maximum. De plus cela donne une norme sur V parce que nous vérifions les conditions de la définition 9.232 :

(2a) Pour tout $x, y \in V$ nous avons :

$$\nu(x+y) = \max_{u\in G} \|u(x) + u(y)\| \leqslant \max_{u\in G} \big(\|u(x)\| + \|u(y)\|\big) \leqslant \nu(x) + \nu(y). \tag{15.149}$$

[28] C'est Bolzano-Weierstrass, théorème 9.213.

(2b) Si $\nu(x)=0$, alors l'égalité $\max_{u\in G}\|u(x)\|=0$ nous enseigne que $\|u(x)\|=0$ pour tout $u\in G$ et donc en particulier avec $u=\mathrm{Id}$ nous trouvons $x=0$.

(2c) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in V$,

$$\nu(\lambda x)=\max_{u\in G}\|u(\lambda x)\|=\max\|\lambda u(x)\|=\max|\lambda|\|u(x)\|=|\lambda|\nu(x). \tag{15.150}$$

De plus la fonction ν est constante sur les orbites de G.

(3) **Un point fixe**

Pour tout $u\in G$ nous posons

$$F_u=\{x\in K\text{ tel que }u(x)=x\}; \tag{15.151}$$

par le pré-résultat, aucun de ces ensembles n'est vide. Ils sont de plus tous fermés par continuité de u (le complémentaire est ouvert). Nous devons prouver que $\bigcap_{u\in G}F_u\neq\varnothing$ parce qu'une intersection serait un point fixe de tous les éléments de G. Supposons donc que $\bigcap_{u\in G}F_u=\varnothing$. Alors les complémentaires des F_u forment un recouvrement ouvert de K et nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Soient $\{u_i\}_{i=1,\ldots,p}$ les éléments qui réalisent ce recouvrement. Alors

$$\bigcap_{i=1}^{p}F_{u_i}=\varnothing. \tag{15.152}$$

Nous considérons l'opérateur

$$v=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}u_i\in\mathcal{L}(V). \tag{15.153}$$

Puisque K est convexe et stable sous chacun des u_i, nous avons aussi $v(K)\subset K$ et donc il existe $a\in K$ tel que $v(a)=a$. Pour ce a, nous avons

$$\begin{aligned}\nu\big(v(a)\big)&=\nu\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}u_i(a)\right) &\text{(15.154a)}\\ &\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\nu\left(u_i(a)\right) &\text{(15.154b)}\\ &=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\nu(a) &\text{(15.154c)}\\ &=\nu(a) &\text{(15.154d)}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la constance de ν sur les orbites de G. Par ailleurs nous savons que $v(a)=a$, donc en réalité à gauche dans (15.154a) nous avons $\nu(a)$ et toutes les inégalités sont des égalités. Nous avons en particulier

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{p}u_i(a)\right)=\sum_{i=1}^{p}\nu\left(u_i(a)\right). \tag{15.155}$$

Notons $u_0\in G$ l'élément qui réalise le maximum de la définition de ν pour le vecteur $\sum_i u_i(a)$:

$$\nu\left(\sum_i u_i(a)\right)=\|u_0\left(\sum_i u_i(a)\right)\|\leqslant\sum_i\|u_0u_i(a)\|\leqslant\sum_i\nu\big(u_i(a)\big). \tag{15.156}$$

Mais nous venons de voir (équation (15.155)) que l'expression de gauche est égale à celle de droite. Donc les inégalités sont des égalités et en particulier la première inégalité devient l'égalité

$$\|\sum_i u_0u_i(a)\|=\sum_i\|u_0u_i(a)\|. \tag{15.157}$$

En vertu du lemme 12.33, il existe des nombres positifs λ_i tels que

$$u_0u_1(a)=\lambda_2u_0u_2(a)=\ldots=\lambda_pu_0u_p(a). \tag{15.158}$$

Du fait que u_0 est inversible nous avons aussi

$$u_1(a)=\lambda_2u_2(a)=\ldots=\lambda_pu_p(a). \tag{15.159}$$

Mais par constance de ν sur les orbites nous avons $\nu(u_i(a)) = \nu(u_j(a))$ pour tout i et j ; en appliquant ν à la série d'égalités (15.159), nous trouvons que tous les λ_i doivent être égaux à 1. En particulier

$$u_1(a) = u_2(a) = \ldots = u_p(a). \tag{15.160}$$

Nous récrivons maintenant l'équation $v(a) = a$ avec la définition de v :

$$a = v(a) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a) = u_j(a) \tag{15.161}$$

pour n'importe quel j. Donc

$$a \in \bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i}, \tag{15.162}$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ.

□

PropQZkeHeG

Proposition 15.47 ([502, 112, 503]).
Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Alors

(1) Il existe une forme quadratique définie positive q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathrm{O}(q)$.

(2) Le groupe G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous considérons le (pas tout à fait) morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\to \mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big) \\ u &\mapsto \rho_u\colon s \mapsto u^t s u, \end{aligned} \tag{15.163}$$

et tant que nous en sommes à considérer, nous considérons l'ensemble

$$H = \{M^t M \text{ tel que } M \in G\} \subset \mathrm{S}(n,\mathbb{R}). \tag{15.164}$$

Cet ensemble est constitué de matrices définies positives parce que si $\langle M^t M x, x\rangle = 0$, alors $0 = \langle Mx, Mx\rangle = \|Mx\|$, mais M étant inversible, cela implique que $x = 0$. Qui plus est, cet ensemble est compact dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en tant qu'image du compact G par l'application continue $M \mapsto M^t M$. L'enveloppe convexe $K = \mathcal{C}\mathrm{onv}(H)$ est alors également compacte par le théorème 13.42. Enfin nous considérons $L = \rho(G)$, qui est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big)$ parce que $\rho_u\rho_v = \rho_{vu} \in \rho(G)$. Nous remarquons que ρ_u étant linéaire, elle préserve les combinaisons convexes et donc pour tout $u \in G$, $\rho_u(K) \subset K$.

Bref, L est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ préservant le compact K de $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$. Par le lemme 15.46, il existe $s \in K$ tel que $\rho_u(s) = s$ pour tout $u \in G$. Ou encore :

$$u^t s u = s \tag{15.165}$$

pour tout $u \in G$. Fort de ce s bien particulier, nous considérons la forme quadratique associée : $q(x) = x^t s x$. Cette forme est définie positive parce que s l'est. Nous avons $G \subset \mathrm{O}(q)$ parce que si $u \in G$ alors

$$q\big(ux\big) = (ux)^t s u x = x^t \underbrace{u^t s u}_{=s} x = q(x). \tag{15.166}$$

Le premier point est prouvé.

La matrice s est symétrique et définie positive. Le théorème 10.228 nous permet donc de la diagonaliser en $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$, et ensuite transformée en la matrice $\mathbb{1}_n$ par la matrice $\mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_i})$. Nous avons donc une matrice $a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telle que $a^t s a = \mathbb{1}_n$. Avec ça, si $u \in G$, nous avons

$$(a^{-1}ua)^t(a^{-1}ua) = (a^{-1}ua)^t\mathbb{1}_n(a^{-1}ua) = a^t u^t (a^t)^{-1} a^t s a a^{-1} u a = a^t u^t s u a = a^t s a = \mathbb{1}, \tag{15.167}$$

ce qui prouve que $a^{-1}ua$ est dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, et donc que $a^{-1}Ga \subset \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. □

Chapitre 16

Tribus, théorie de la mesure, intégration

16.1 Tribus

Vous pouvez vous reporter au thème 23 pour voir plus vite où sont les définitions associées.

16.1.1 Généralités

DefjRsGSy

Définition 16.1 (Tribu, espace mesurable[504])**.**
Si Ω est un ensemble, un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de Ω est une ***tribu*** *si*

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$ *;*

(2) $A^c \in \mathcal{A}$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *;*

ItemooPEQNooYiYNtN

(3) si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$*, alors* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$*.*

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ *est alors un* ***espace mesurable****.*

Remarque 16.2.
Nous trouvons parfois la notation

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \sup_{k\geqslant 0} A_k. \tag{16.1}$$

LemBWNlKfA

Lemme 16.3.
Opérations ensemblistes sur les tribus.

ITEMooTDXNooFszBzi

(1) Une tribu est stable par intersections au plus dénombrables.

ItemXQVLooFGBQNj

(2) Une tribu est stable par différence ensembliste.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$. Nous devons prouver que $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de $\mathcal{A}$. Pour cela nous passons au complémentaire :

$$\complement\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement A_i. \tag{16.2}$$

La définition d'une tribu implique que le membre de droite est un élément de la tribu. Par stabilité d'une tribu par complémentaire, l'ensemble $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de la tribu.

La seconde assertion est immédiate à partir de la première parce que $A \setminus B = A \cap \complement B$. □

Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est un ensemble de tribus (indexé par un ensemble I quelconque) alors

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \tag{16.3}$$

est également une tribu.

16.1.2 Tribu engendrée

DEFooJSAKooSDnGzt

Définition 16.4.
*Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de parties de Ω. La **tribu engendrée** par $\mathcal{D}$ est l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{D}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{D}$. Nous la noterons le plus souvent $\sigma(\mathcal{D})$*

LEMooCAUMooEdpjRs

Lemme 16.5.
Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et si A est une partie mesurable de Ω, alors la tribu engendrée[1] par A est

$$\sigma(A) = \{\varnothing, A, \complement A, \Omega\}. \tag{16.4}$$

DefNOJWooLGKhmJ

Lemme-Définition 16.6 (Tribu engendrée[505])**.**
Soit une application $f : S_1 \to S_2$ et $\mathcal{F}$ une tribu de S_1. Alors

(1) L'ensemble

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \tag{16.5}$$

est une tribu sur S_2.

(2) C'est la plus grande tribu de S_2 pour laquelle f est mesurable.

*Cette tribu est la est la **tribu engendrée** par f. Elle sera souvent notée $\sigma(f)$.*

Démonstration. Vérifier les trois propriétés de la définition 16.1.

(1) $S_2 \in \mathcal{F}$ parce que $f^{-1}(S_2) = S_1 \in \mathcal{F}_f$.

(2) Si $B \in \mathcal{F}_f$, alors nous prouvons que $B^c \in \mathcal{F}_f$. Nous avons $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et donc $f^{-1}(B)^c \in \mathcal{F}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

(3) Si $(B_i) \in \mathcal{F}_f$, alors

$$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}_f. \tag{16.6}$$

Donc $\bigcup_i B_i \in \mathcal{F}_f$.

En ce qui concerne la maximalité, si $R \subset S_2$ n'est pas dans $\mathcal{F}_f$ alors $f^{-1}(R)$ n'est pas dans $\mathcal{F}$ et donc f ne serait pas mesurable. □

PropHYLooLgOCy

Proposition 16.7 ([506])**.**
Soit S un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu de S. Soit une classe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(S)$ telle que

(1) Si $A \in \mathcal{N}$ alors il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$.

(2) Si $A \in \mathcal{N}$ et $B \subset A$ alors $B \in \mathcal{N}$.

(3) La classe $\mathcal{N}$ est stable par union dénombrable.

Alors la classe

$$\mathcal{T} = \{X \cup A \text{ avec } A \in \mathcal{N} \text{ et } X \in \mathcal{F}\} \tag{16.7}$$

est une tribu.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable parce que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}$ le sont. De plus S et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$ et donc dans $\mathcal{T}$. Nous devons voir que $\mathcal{T}$ est stable par complémentarité.

Soit donc $A \in \mathcal{N}$ et $X \in \mathcal{F}$; nous savons que $(A \cup X)^c = A^c \cap X^c$. De plus il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$ et nous pouvons exprimer A^c en termes de Y : $A^c = Y^c \cup (Y \setminus A)$. Donc

$$(A \cup X)^c = \big(Y^c \cup (Y \setminus A)\big) \cap X^c = \underbrace{(Y^c \cap X^c)}_{\in\mathcal{F}} \cup \underbrace{\big((Y \setminus A) \cap X^c\big)}_{\in\mathcal{N}}. \tag{16.8}$$

Le fait que la seconde partie soit dans $\mathcal{N}$ est due au fait que ce soit une partie de $Y \in \mathcal{N}$. Nous avons donc bien $(A \cup X)^c \in \mathcal{T}$. □

[1] Tribu engendrée par une partie, définition 16.4.

16.1.3 Tribu induite

DefDHTTooWNoKDP

Proposition-Définition 16.8 (Tribu induite, tribu-trace[507]).
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et une partie $R \subset S$. L'ensemble

EQooNOQNooYIdDOz

$$\mathcal{F}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} \tag{16.9}$$

*est une tribu. Elle est la **tribu induite** de R depuis S. Elle est aussi nommée « tribu trace ».*

Démonstration. D'abord R et $\varnothing$ dont dans $\mathcal{F}_R$. Si $C \in \mathcal{F}_R$ alors $C = A \cap R$ pour un certain $A \in \mathcal{F}$ et nous devons prouver que $R \cap C^c$ est dans $\mathcal{F}_R$ (le complémentaire de C dans R). Nous avons

$$R \cap C^c = R \cap (A \cap R)^c = R \cap A^c \in \mathcal{F}_R \tag{16.10}$$

parce que $A^c \in \mathcal{F}$. Enfin si $C_i \in \mathcal{F}_R$ alors $C_i = R \cap A_i$ pour des A_i dans $\mathcal{F}$. Nous avons

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (R \cap A_i) = R \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \big), \tag{16.11}$$

mais $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ donc $\bigcup_i C_i \in \mathcal{F}_R$. □

PROPooUNNSooMUQKfp

Proposition 16.9.
Si R est mesurable dans $(\Omega, \mathcal{A})$ alors

$$\mathcal{A}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{A}\} = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}, \tag{16.12}$$

où $\mathcal{A}_R$ est la tribu induite de $\mathcal{A}$ sur R.

Démonstration. La première égalité est simplement la définition (16.9) de la tribu induite. Pour le reste, nous notons $\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}$, et nous prouvons que $\mathcal{A}_R = \mathcal{F}$.

(1) $\underline{\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_R}$ Si $S \in \mathcal{F}$, alors $S \in \mathcal{A}$ et $S \subset R$. Donc $S = S \cap R \in \mathcal{A}_R$.

(2) $\underline{\mathcal{F}_R \subset \mathcal{A}_R}$ Dans l'autre sens, si $S \in \mathcal{A}_R$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $S = A \cap R$. Donc $S \subset A$ et $S \in \mathcal{A}$ parce que R et A sont des éléments de $\mathcal{A}$ (stable par intersection).

□

16.2 Théorie de la mesure

DefSLWooleMiaf

Définition 16.10 ([508]).
*Une **mesure extérieure** sur un ensemble S est une application $m^* \colon \mathcal{P}(S) \to [0, \infty]$ telle que*

(1) $m^*(\varnothing) = 0$,

(2) Si $A \subset B$ dans S alors $m^*(A) \leqslant m^*(B)$

ItemARKooppZfDaiii

(3) Si les A_n sont des parties de S alors

EqZLMooSxvaL

$$m^*\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \big) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(A_n). \tag{16.13}$$

La différence avec une mesure est que nous ne demandons pas que (16.13) soit une égalité lorsque les A_n sont disjoints.

16.2.1 Mesure sur un ensemble de parties

DefWUPHooEklLmR

Définition 16.11 (Mesure sur un ensemble de parties[509]).
*Soient S un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de S contenant $\varnothing$. Une **mesure positive** sur $(S, \mathcal{C})$ est une application $\mu \colon \mathcal{C} \to [0, \infty]$ telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) Si $A_n \in \mathcal{C}$ sont des éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{C}$ et tels que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$ alors

$$\mu\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n). \tag{16.14}$$

La mesure est ***finie*** *si* $\mu(S) < \infty$ *et* σ***-finie*** *si il existe une suite* (S_n) *dans* $\mathcal{C}$ *telle que* $S = \bigcup_n S_n$ *et* $\mu(S_n) < \infty$.

Remarque 16.12.
La condition $\mu(\varnothing) = 0$ est nécessaire. Certes, si $A \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing) \tag{16.15}$$

EQooCDSQopZMjsQY

parce que A et $\varnothing$ sont disjoints. Cela semble indiquer que $\mu(\varnothing) = 0$, mais pas tout à fait : il est encore possible d'avoir $\mu(B) = \infty$ pour tout $B \in \mathcal{A}$, y compris $\mu(\varnothing) = \infty$. À cause de cette exception, la relation (16.15) n'implique pas $\mu(\varnothing) = 0$.

Sans hypothèse sur l'ensemble de parties considéré, nous ne pouvons pas dire grand chose de plus.

16.2.2 Mesure sur une algèbre de parties

DefTCUoogGDud

Définition 16.13 (Algèbre de parties[508])**.**
Soit S*, un ensemble. Une classe* $\mathcal{D}$ *de parties de* S *est une* ***algèbre de parties*** *de* S *si*

(1) $S \in \mathcal{D}$ *et* $\varnothing \in \mathcal{D}$,

(2) si $A \in \mathcal{D}$ *alors* $A^c \in \mathcal{D}$,

(3) si $A, B \in \mathcal{D}$ *alors* $A \cup B \in \mathcal{D}$.

16.14.
En anglais, ce sont des *field of sets*[510].

Les algèbres de parties ne sont pas des classes si sauvages que ça ; en témoigne le lemme suivant.

LemBFKootqXKl

Lemme 16.15.
Une algèbre de partie est stable par intersection (finie) et par différence ensembliste.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $A \cap B = \big(A^c \cup B^c\big)^c$ et que $A \setminus B = A \cap B^c$. □

LemZQUooMdCpq

Lemme 16.16 ([508])**.**
Si $\mathcal{D}$ *est une algèbre de parties de* S *et si* μ *est une mesure sur* $(S, \mathcal{D})$ *alors*

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ *avec* $A \subset B$ *alors* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$

ItemMFUooWCPNnii

(2) si $A_n \in \mathcal{D}$ *et* $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$ *alors*

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{16.16}$$

La propriété (2) est la σ**-sous-additivité**.

Démonstration. Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \setminus A)$ avec A et $B \setminus A$ disjoints donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A). \tag{16.17}$$

Pour la seconde, on passe par les compléments deux à deux : nous posons

$$\begin{cases} B_0 = \varnothing & \text{(16.18a)} \\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k<n} B_k. & \text{(16.18b)} \end{cases}$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints et $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$, donc

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu\Big(A_n \setminus \bigcup_{k<n} B_k\Big) \leqslant \sum_n \mu(A_n), \tag{16.19}$$

où nous avons utilisé la première partie du lemme. □

PropIUOoobjfIB

Proposition 16.17 (Mesure extérieure à partir d'une algèbre de parties[508]).
Soient $\mathcal{D}$ une algèbre de partie sur l'ensemble S et μ une mesure sur $(S,\mathcal{D})$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\mu^*\colon \mathcal{P}(S) &\to [0,+\infty]\\ X &\mapsto \inf\left\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n\in\mathcal{D}, X\subset\bigcup_n A_n\right\}\end{aligned} \tag{16.20}$$

est une mesure extérieure[2] *sur S et pour tout $A\in\mathcal{D}$ nous avons $\mu^*(A)=\mu(A)$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **La définition est bonne** L'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : il suffit de prendre $A_1=S$ et $A_{n\geqslant 2}=\varnothing$.

(2) **Le vide** D'abord $\mu^*(\varnothing)=0$ parce que $\varnothing\in\mathcal{D}$. Prendre ensuite $A_n=\varnothing$.

(3) **μ^* est croissante** Soit $X\subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si une suite (A_n) dans $\mathcal{D}$ vérifie $Y\subset\bigcup_n A_n$, alors la même suite vérifie $X\subset\bigcup_n A_n$. Par conséquent nous avons l'inclusion

$$\left\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n\in\mathcal{D}, X\subset\bigcup_n A_n\right\}\subset\left\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n\in\mathcal{D}, Y\subset\bigcup_n A_n\right\}, \tag{16.21}$$

et donc l'inégalité $\mu^*(X)\leqslant\mu^*(Y)$.

(4) **Inégalité par union dénombrable** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de S. Si il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0})=\infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n\mu^*(X_n)=\infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quel nombre est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc maintenant que $\mu^*(X_n)<\infty$ pour tout n.

Soit $\epsilon>0$. Pour tout $n\geqslant 1$ il existe une suite $(B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}$ telle que $X_n\subset\bigcup_k B_k^{(n)}$ et

$$\mu^*(X_n)+\frac{\epsilon}{2^n}\geqslant\sum_k\mu(B_k^{(n)}). \tag{16.22}$$

Étant donné que

$$\bigcup_n X_n\subset\bigcup_n\big(\bigcup_k B_k^{(n)}\big), \tag{16.23}$$

nous avons[3]

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big)\leqslant\sum_n\sum_k\mu^*(B_k^{(n)})\leqslant\sum_n\Big(\mu^*(X_n)+\frac{\epsilon}{2^n}\Big)=\sum_n\mu^*(X_n)+\epsilon. \tag{16.24}$$

Cette inégalité étant valable pour tout ϵ, nous avons bien

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big)=\sum_n\mu^*(X_n). \tag{16.25}$$

(5) **Restriction** Soit $A\in\mathcal{D}$. Nous avons automatiquement $\mu^*(A)\leqslant\mu(A)$ parce que $\mu(A)$ est dans l'ensemble dont nous prenons l'infimum (prendre $A_1=A$ et $A_{n\geqslant 2}=\varnothing$).

En ce qui concerne l'inégalité inverse nous considérons une suite A_n dans $\mathcal{D}$ telle que $A\subset\bigcup_n A_n$. Étant donné que $A\in\mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est une algèbre de parties nous avons $A\cap A_n\in\mathcal{D}$ et $\bigcup_n(A\cap A_n)=A\in\mathcal{D}$. Par conséquent

$$\mu(A)=\mu\big(\bigcup_n(A\cap A_n)\big)\leqslant\sum_n\mu(A\cap A_n)\leqslant\sum_n\mu(A_n). \tag{16.26}$$

Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons l'infimum sont plus grands que $\mu(A)$. Nous en déduisons que $\mu^*(A)\geqslant\mu(A)$.

□

[2] Définition 16.10.
[3] Nous utilisons la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1/2^n)=1$, proposition 12.186(2).

16.2.3 Mesure sur une tribu, espace mesuré

La définition suivante est une simple copie de la définition générale 16.11 d'une mesure sur un ensemble de parties. La seule différence est que l'union d'éléments d'une tribu est encore dans la tribu, et la condition (2) ne demande pas de le préciser.

DefBTsgznn

Définition 16.18 (Espace mesuré[509, 511])**.**
Soit un espace mesurable[4] $(\Omega, \mathcal{A})$.

Une ***mesure signée*** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $\mu\colon \mathcal{A} \to]-\infty, \infty]$ *telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

ItemQFjtOjXiii

(2)

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \tag{16.27}$$

EQooKJHQooHJQxUj

si les A_i *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints.*

La mesure signée μ *est une* ***mesure positive*** *si elle prend ses valeurs dans* $[0, \infty]$.
Lorsque μ *est une mesure positive, le triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est un* ***espace mesuré****.*
Une mesure est σ***-finie*** *si il existe un recouvrement dénombrable de* Ω *par des ensembles de mesure finie. Si la mesure est* σ*-finie, nous disons que l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré* σ*-fini.*
La mesure μ *sur* Ω *est* ***finie*** *si* $\mu(\Omega) < \infty$.

LEMooECDQooEBtMxL

Lemme 16.19 ([1])**.**
Soit un espace mesuré[5] $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *Si* $Z \in \mathcal{A}$ *est une partie de mesure nulle, et si* $A \subset Z$ *est mesurable alors* $\mu(A) = 0$.

Démonstration. Nous pouvons écrire $Z = A \cup (Z \setminus A)$. Vu que A et $Z \setminus A$ sont disjoints, nous avons

$$0 = \mu(Z) = \mu(A) + \mu(Z \setminus A). \tag{16.28}$$

La seule façon pour deux nombres positifs d'avoir une somme nulle est qu'ils soient tous les deux nuls. □

16.2.4 Mesures sigma-finies

LEMooXOPMooMmIbmD

Lemme 16.20 ([512])**.**
Soient deux mesures σ*-finies*[6] μ *et* λ *sur le même espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Il existe des parties mesurables* Z_n *telles que*

(1) $\mu(Z_n) < \infty$,

(2) $\lambda(Z_n) < \infty$

(3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = \Omega$.

Nous pouvons de plus choisir ces Z_n *pour qu'ils soient disjoints.*

Démonstration. Le fait que les mesures soient σ-finies donne des parties mesurables (X_n) et(Y_n) telles que $\mu(X_n) < \infty$, $\lambda(Y_n) < \infty$, $\bigcup_n X_n = \bigcup_n Y_n = \Omega$.

Pour chaque $i, j \in \mathbb{N}^2$ nous posons $Z_{ij} = X_i \cap Y_j$. Nous avons $\lambda(Z_{ij}) \leqslant \lambda(Y_j) < \infty$. De même $\mu(Z_{ij}) \leqslant \mu(X_i) < \infty$. Et enfin

$$\bigcup_{ij} Z_{ij} = \bigcup_{n} (X_i \cap Y_j) = \bigcup_{i} \Big(\bigcup_{j} (X_i \cap Y_j) \Big) = \bigcup_{i} X_i = \Omega. \tag{16.29}$$

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable[7], nous considérons une bijection $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ et les ensembles $Z'_i = Z_{\varphi(i)}$ répondent à la question.

En ce qui concerne la possibilité que les (Z_n) soient disjoints, supposons qu'ils ne le soient pas. Alors il suffit de poser $Z'_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} Z'_k$ pour que les Z'_n aient les bonnes propriétés tout en étant disjoints. □

[4] Les définitions de tribus et d'espaces mesurables sont en 16.1.
[5] Définition 16.18.
[6] Définition 16.18.
[7] L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable par 2.35 et $\mathbb{N}^2$ l'est pas 2.38.

16.2.5 Suite du texte

16.21 ([1]).
Dans le cas d'une mesure signée, μ prend ses valeurs dans $]-\infty,\infty]$ et non dans $[-\infty,\infty]$ parce que nous ne voulons pas avoir des sommes contenant $\infty-\infty$.

Notez aussi que la condition (16.27) interdit d'avoir, pour un $\alpha>0$ fixé, une infinité de parties disjointes de mesure plus petite que α.

Si $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et $(S,\mathcal{F},\nu)$ sont deux espaces mesurés, alors nous notons

$$(\Omega,\mathcal{A},\mu)\subset(S,\mathcal{F},\nu) \tag{16.30}$$

lorsque $\Omega\subset S$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}$ et pour tout $A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)=\nu(A)$.

DefHGsQxHB

Définition 16.22 (Ensemble mesurable).
*Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les ensembles **mesurables** pour la mesure μ.*

Si la mesure est σ-finie, nous pouvons choisir le recouvrement croissant pour l'inclusion. En effet si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le recouvrement, il suffit de considérer $F_n=\bigcup_{k\leqslant n}E_k$. Ces ensembles F_n forment tout autant un recouvrement dénombrable, mais ils vont évidemment croissants.

Le lemme suivant complète la propriété 16.18(2) lorsque les ensembles ne sont pas disjoints.

LemPMprYuC

Lemme 16.23 (Unions et différences ensemblistes dans un espace mesurable).
Soit un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

ITEMooSUIRooNDVOoB

(1) Soient $A,B\in\mathcal{F}$ avec $A\subset B$. Alors

$$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A) \tag{16.31}$$

ITEMooLEGKooWnYmlf

(2) Si $A,B\in\mathcal{F}$ avec $A\subset B$, alors

$$\mu(A)\leqslant\mu(B). \tag{16.32}$$

ITEMooMCNBooRGVGqA

(3) Si $A,B\in\mathcal{F}$ avec $A\subset B$, et si $\mu(B)<\infty$, alors $\mu(A)<\infty$.

ITEMooABPYooFQEzqE

(4) Si (M_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ pas spécialement disjoints, alors

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big)\leqslant\sum_k\mu(M_k). \tag{16.33}$$

EqWWFooYPCTt

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous décomposons $B=A\cup(B\setminus A)$ en remarquant que l'union est disjointe et que $B\setminus A\in\mathcal{F}$ par le lemme 16.3. La propriété (2) de la définition de mesure nous donne alors

$$\mu(B)=\mu\big((B\setminus A)\cup A\big)=\mu(B\setminus A)+\mu(A) \tag{16.34}$$

et donc

$$\mu(B)=\mu(B\setminus A)+\mu(A) \tag{16.35}$$

EQooTWCWooGGQRiZ

comme demandé.

(2) **Pour (2)** Il s'agit de reprendre (16.35) :

$$\mu(A)=\mu(B)-\mu(B\setminus A)\leqslant\mu(B). \tag{16.36}$$

EQooXGVQooRucyoF

(3) **Pour (3)** Il s'agit de continuer (16.36) :

$$\mu(A)\leqslant\mu(B)<\infty. \tag{16.37}$$

(4) **Pour (4)** Nous considérons la suite disjointe

$$\begin{cases} M'_0=\varnothing & \text{(16.38a)}\\ M'_k=M_k\setminus M'_{k-1}. & \text{(16.38b)}\end{cases}$$

Nous avons $\bigcup_k M'_k=\bigcup_k M_k$. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big)=\mu\Big(\bigcup_k M'_k\Big)=\sum_k\mu(M'_k)=\sum_k\mu(M_k\setminus M'_{k-1})\leqslant\sum_k\mu(M_k). \tag{16.39}$$

La dernière inégalité utilise le point (2).

□

LemAZGByEs

Lemme 16.24 ([1])**.**
Résultats sur les unions croissantes d'ensembles mesurables dans $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

ItemJWUooRXNPci

(1) Si (A_k) est une suite croissante d'ensembles μ-mesurables dont l'union est mesurable, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_k A_k). \tag{16.40}$$

ItemJWUooRXNPcii

(2) Soit K_n, une suite emboîtée d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $K_n \to S$. Si $A \in \mathcal{A}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap K_n) = \mu(A). \tag{16.41}$$

Démonstration. Pour prouver (1), nous faisons le coup de l'union télescopique, en posant $A_0 = \varnothing$:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1}). \tag{16.42}$$

Les ensembles $A_k \setminus A_{k-1}$ sont deux à deux disjoints, donc la propriété (2) de la définition d'une mesure donne

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1})\right) \tag{16.43a}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \tag{16.43b}$$

subEqMDRRorb

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) \tag{16.43c}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) - \mu(A_0) \tag{16.43d}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k). \tag{16.43e}$$

où pour obtenir 16.43c, nous avons utilisé le lemme 16.23.

Le point (2) est une application du point (1). □

Exemple 16.25.
L'intégration « à la Riemann » n'est pas dans la théorie des espaces mesurés. En effet l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{A \subset [0,1] \text{ tel que } \mathbb{1}_A \text{ est intégrable au sens de Riemann}\} \tag{16.44}$$

n'est pas une tribu. Par exemple les singletons en font partie tandis que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ n'en fait pas partie bien que ce soit une union dénombrable de singletons. △

Définition 16.26.
*Si μ est une mesure nous disons qu'une propriété est vraie μ-**presque partout** si elle est fausse seulement sur un ensemble de mesure nulle.*

Par exemple la fonction de Dirichlet est presque partout égale à la fonction 1 (pour la mesure de Lebesgue).

Définition 16.27 (fonction mesurable)**.**
Une application entre espace mesurés

$$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}') \tag{16.45}$$

*est **mesurable** si pour tout $B \in \mathcal{A}'$, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est dans $\mathcal{A}$.*

LemIDITgAy

Lemme 16.28.
Une union dénombrable de parties de mesure nulle est de mesure nulle.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 16.23(4) : si les A_i sont de mesure nulle,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0 \tag{16.46}$$

□

Définition 16.29.
*Si (A_n) est une suite croissante d'ensembles alors la **limite** est*

$$\lim_n A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{16.47}$$

Si la suite est décroissante alors la limite est

$$\lim_n A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{16.48}$$

PropAFNPSsm

Proposition 16.30 ([513]).
Soient μ une mesure sur Ω et (S_n) une suite croissante d'ensembles μ-mesurables de Ω. Nous notons

$$S = \lim_n S_n. \tag{16.49}$$

Alors pour tout ensemble mesurable[8] $A \subset \Omega$ nous avons

$$\mu(A \cap S) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n). \tag{16.50}$$

Démonstration. L'inégalité $\lim \mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S)$ est simple à prouver. En effet pour tout n nous avons $A \cap S_n \subset A \cap S$ et donc par le lemme 16.23 nous avons

$$\mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S). \tag{16.51}$$

En passant à la limite (qui respecte les inégalités) nous avons l'inégalité.

Nous passons à l'inégalité dans l'autre sens.

(1) **Si ∞** D'abord si $\mu(A \cap S_n) = \infty$ pour un certain n, alors cela vaut encore ∞ pour tous les n suivants, et la limite est ∞ sans problème. Donc nous supposons que $\mu(A \cap S_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) **Une petite hypothèse en plus** Quitte à renommer les indices, nous supposons que $S_0 = \varnothing$.

(3) **S comme union de différences** Nous montrons à présent que $S = \bigcup_n (S_{n+1} \setminus S_n)$. Soit $x \in S$. Il existe $n \geqslant 0$ tel que $x \in S_n$. Et vu que $S_0 = \varnothing$, il existe même un $n \geqslant 0$ tel que $x \notin S_n$ et $x \in S_{n+1}$. Autrement dit, pour tout $x \in S$, il existe $n \geqslant 0$ tel que $x \in S_{n+1} \setminus S_n$.

Nous avons donc bien

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \setminus S_n) \tag{16.52}$$

Comme annoncé.

(4) **Un bon petit calcul** Par conséquent

$$A \cap S = A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \setminus S_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A \cap (S_{n+1} \setminus S_n) \tag{16.53}$$

Étant donné que les ensembles $A \cap (S_{n+1} \setminus S_n)$ sont disjoints,

$$\mu(A \cap S) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\big(A \cap (S_{n+1} \setminus S_n)\big) \tag{16.54a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\Big((A \cap S_{n+1}) \setminus (A \cap S_n)\Big) \tag{16.54b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mu(A \cap S_{n+1}) - \mu(A \cap S_n)\big) \tag{16.54c}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_{n+1}) - \underbrace{\mu(A \cap S_0)}_{=0} \tag{16.54d}$$

subeqLTvmTiO

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n). \tag{16.54e}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé plusieurs fois le fait que les S_n et A étaient mesurables (et la propriété de tribu qui dit que $A \cap S_n$ est également mesurable) ainsi que le lemme 16.23. Nous avons aussi utilisé la série télescopique dans $\mathbb{R}$ pour obtenir (16.54d).

□

[8] Définition 16.22

16.2.6 λ-système

DefRECXooWwYgej

Définition 16.31 (λ-système[514]).
Soit E un ensemble. Un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E est un ***λ-système*** *lorsqu'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{D}$,

(2) si $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{D}$ alors $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}$.

Note : une tribu est un λ-système.

Lemme 16.32 ([514]).
Une intersection quelconque de λ-systèmes dans E est un λ-système dans E.

Démonstration. Soient $\{\mathcal{D}_l\}_{l\in L}$ des λ-systèmes indicés par un ensemble L. Si $A, B \in \bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$ alors $B\setminus A \in \mathcal{D}_l$ pour tout $l \in L$ et donc $B \setminus A \in \bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$. De la même façon si (A_k) est une suite croissante dans $\bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$ alors pour tout $l \in L$ nous avons $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}_l$. Donc $\bigcup_k A_k \in \bigcap_l \mathcal{D}_l$. □

Ce lemme est ce qui permet de définir le λ-système **engendré** par une classe $\mathcal{A}$ de parties de E : c'est l'intersection de tous les λ-systèmes de E contenant $\mathcal{A}$.

LemLUmopaZ

Lemme 16.33 ([514]).
Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E (contenant E lui-même) qui soit stable par intersection finie. Alors le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{E}$ le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Étant donné que $\mathcal{F}$ est un λ-système nous avons $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Pour montrer l'inclusion inverse nous allons prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu.

D'abord pour $C \in \mathcal{C}$ nous posons

$$\mathcal{G}_C = \{A \subset \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap C \in \mathcal{E}\}. \tag{16.55}$$

et pour $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{H}_F = \{A \in \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap F \in \mathcal{E}\}. \tag{16.56}$$

Nous allons montrer que $\mathcal{G}_C$ et $\mathcal{H}_F$ sont des λ-systèmes et que $\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

Nous commençons par $\mathcal{G}_C$. Si $A, B \in \mathcal{G}_C$ avec $A \subset B$ alors

$$(B \setminus A) \cap C = \underbrace{(B \cap C)}_{\in\mathcal{E}} \setminus \underbrace{(A \cap C)}_{\in\mathcal{E}}. \tag{16.57}$$

Puisque $\mathcal{E}$ est un λ-système et que $(A\cap C) \subset (B\cap C)$, nous avons bien $(B \setminus A)\cap C \in \mathcal{E}$ et donc $B \setminus A \in \mathcal{G}_C$. Soit maintenant (A_k) une suite croissante dans $\mathcal{G}_C$. Nous avons

$$(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap C = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap C) \tag{16.58}$$

qui est une union d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. Donc $\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap C) \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}_C$. Cela termine la preuve du fait que $\mathcal{G}_C$ soit un λ-système.

Étant donné que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, si $K \in \mathcal{C}$ nous avons $C \cap K \in \mathcal{C}$, ce qui signifie que $K \in \mathcal{G}_C$. Nous avons donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C$. Donc $\mathcal{G}_C$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C \subset \mathcal{E}$. Mais comme $\mathcal{E}$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$ nous avons en fait $\mathcal{G}_C = \mathcal{E}$.

Nous montrons à présent que $\mathcal{H}_F$ est un λ-système. Si $A, B \in \mathcal{H}_F$ avec $A \subset B$ alors $(B \setminus A) \cap F = (B\cap F) \setminus (A\cap F)$. Comme $\mathcal{E}$ est un λ-système et que $A\cap F$ et $B\cap F$ sont dans $\mathcal{E}$ avec $A\cap F \subset B\cap F$, nous avons

$$(B \cap F) \setminus (A \cap F) \in \mathcal{H}_F. \tag{16.59}$$

Soit maintenant $(A_k)_{k\geqslant 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{H}_F$. Pour tout k nous avons $A_k \cap F \in \mathcal{E}$, ce qui donne

$$(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \cap F = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k \cap F) \in \mathcal{E}. \tag{16.60}$$

Donc $\mathcal{H}_F$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_F \subset \mathcal{E}$. Nous en concluons que pour tout $C \in \mathcal{C}$ et pour tout $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}. \tag{16.61}$$

Nous allons maintenant prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu[9].

(1) Si $F \in \mathcal{E}$ alors $E \cap F = F \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $E \in \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

(2) Si $A \in \mathcal{E}$ alors $E \setminus A \in \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{E}$ est un λ-système et $E \in \mathcal{E}$. Donc $\complement A \in \mathcal{E}$.

(3) Montrons que $\mathcal{E}$ est stable par union finie en considérant $A, B \in \mathcal{E}$. Comme E est également un élément de $\mathcal{E}$ nous avons
$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \in \mathcal{E}. \tag{16.62}$$
Cela prouve que $\complement(A \cup B) \in \mathcal{E}$. Par complémentarité nous avons aussi $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Soient $A_k \in \mathcal{E}$, et nommons $B_p = A_1 \cup \ldots \cup A_p$. Les ensembles B_p forment une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. L'union est donc dans $\mathcal{E}$ et ce dernier est, au final, stable par union dénombrable.

Maintenant que $\mathcal{E}$ est une tribu nous avons $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Nous en déduisons que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, ce qu'il fallait démontrer. □

16.2.7 π-système

DEFooGYADooTudZmJ

Définition 16.34.
*Soit un ensemble X. Un **π-système** sur X est un ensemble de parties $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que si $A, B \in \mathcal{S}$ alors $A \cap B \in \mathcal{S}$.*

PROPooWFCWooCCzZLT

Proposition 16.35 ([1])**.**
Deux mesures qui coïncident sur un ϕ-système coïncident sur la tribu engendrée.

16.2.8 Unicité des mesures

Le théorème suivant permet de prouver que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure possible ayant les bonnes valeurs sur les intervalles (théorème 16.144). Si vous voulez il y a aussi le théorème de Dynkin qui est un peu similaire[515].

ThoJDYlsXu

Théorème 16.36 (Unicité des mesures[514])**.**
Soient μ et ν, deux mesures sur $(E, \mathcal{A})$ et un ensemble $\mathcal{E}$ de parties de E telles que

(1) La tribu engendrée par $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{A}$.

(2) si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $A \cap B \in \mathcal{E}$

(3) il existe une suite croissante (E_n) dans $\mathcal{E}$ telle que

(3a) $E = \lim E_n$,

(3b) $\mu(E_n)$ et $\nu(E_n)$ sont finis pour tout n.

Alors si les mesures μ et ν coïncident sur $\mathcal{E}$, elles coïncident sur $\mathcal{A}$ en entier.

Démonstration. Soit (E_n) une suite croissante dans $\mathcal{E}$ telle que $E = \lim E_n$.

(1) **Des restrictions** Nous considérons μ_n et ν_n, les restrictions de μ et ν à E_n, c'est-à-dire
$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \tag{16.63a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n). \tag{16.63b}$$
Puisque les E_n sont dans $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, ils sont mesurables au sens de μ et ν. Par la proposition 16.30, pour tout $A \in \mathcal{E}$ nous avons alors
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A) \tag{16.64a}$$
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \nu(A) \tag{16.64b}$$

(2) **Ce que nous devons prouver** Nous devons donc seulement montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(A) = \nu_n(A)$. Pour cela nous nous fixons un n et nous considérons l'ensemble de parties
$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu_n(A) = \nu_n(A)\}. \tag{16.65}$$
Le but sera de prouver que $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.

[9] Définition 16.1.

(3) $\nu_n = \mu_n$ **sur** $\mathcal{E}$ Soit $A \in \mathcal{E}$. Vu que $E_n \in \mathcal{E}$, par hypothèse $A \cap E_n \in \mathcal{E}$ et donc

$$\begin{aligned} \mu_n(A) &= \mu(A \cap E_n) && (16.66a)\\ &= \nu(A \cap E_n) && (16.66b)\\ &= \nu_n(A). && (16.66c) \end{aligned}$$

SUBaEQooUJDPooQLSWmn

Pour (16.66b), nous avons utilisé l'hypothèse comme quoi $\mu = \nu$ sur $\mathcal{E}$.

(4) **Encore d'autres parties** Nous définissons $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E\}$. En particulier $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}$.

(5) $\mu_n = \nu_n$ **sur** $\mathcal{E}'$ Nous avons déjà vue l'égalité sur $\mathcal{E}$. Il suffit de vérifier l'égalité sur E. Vu que $E \cap E_n = E_n \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap E_n) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu(E_n \cap E) = \nu_n(E). \tag{16.67}$$

(6) $\mathcal{D}$ **est un** λ**-système** Montrons que $\mathcal{D}$ est un λ-système. Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Alors, étant donné que les mesures μ_n et ν_n sont finies, le lemme 16.23 nous donne

$$\begin{aligned} \mu_n(B \setminus A) &= \mu_n(B) - \mu_n(A) && (16.68a)\\ \nu_n(B \setminus A) &= \nu_n(B) - \nu_n(A). && (16.68b) \end{aligned}$$

Donc $\mu_n(B \setminus A) = \nu_n(B \setminus A)$ et $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

Soit par ailleurs une suite croissante $(A_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{D}$. Le lemme 16.24(1) nous donne

$$\mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{p \to \infty} \mu_n(A_p). \tag{16.69}$$

Mais puisque pour chaque p nous avons $\mu_n(A_p) = \nu_n(A_p)$, nous avons aussi

$$\mu_n\Big(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p\Big) = \nu_n\Big(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p\Big). \tag{16.70}$$

Donc $\mathcal{D}$ est bel et bien un λ-système contenant $\mathcal{E}'$.

(7) **Conclusion** Par le lemme 16.33, le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{E}'$, mais par hypothèse la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est $\mathcal{A}$, donc le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{D}$ est un λ-système contenant $\mathcal{E}'$, nous avons alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, ce qu'il fallait.

□

PROPooAMTTooDfFqcP

Proposition 16.37 ([516]).
Si $\mathcal{E}$ est une base dénombrable de la topologie de l'espace X, alors $\mathcal{B}or(X) = \sigma(\mathcal{E})$.

ExDMPoohtNAj

Exemple 16.38.
La partie $\mathcal{E}$ des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$ (avec $a, b \in \mathbb{Q}$) engendre les boréliens par les proposition 9.207 et 16.37. Par conséquent pour vérifier que deux mesures sont égales sur les boréliens de $\mathbb{R}$, il suffit de prouver qu'elles sont égales sur les intervalles ouverts. △

16.2.9 Mesure extérieure

Nous avons déjà défini la notion de mesure extérieure en la définition 16.10.

LemULSooBgZLI

Lemme 16.39 ([508]).
Soit $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $X \subset S$. Alors

$$\inf_{\substack{A \in \mathcal{F}\\ X \in A}} \mu(A) = \inf\left\{ \sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k \right\}. \tag{16.71}$$

Démonstration. Pour montrer l'inégalité $\geqslant$, nous remarquons qu'il y a plus d'éléments dans l'ensemble du second membre que dans le premier. En effet si $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ alors dans le membre de gauche nous pouvons prendre $A_1 = A$ et $A_{n \geqslant 1} = \varnothing$.

Pour l'inégalité dans l'autre sens, nous montrons que tout élément de

$$\left\{\sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k\right\} \tag{16.72}$$

est plus grand qu'un élément de

$$\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}. \tag{16.73}$$

En effet si $A_n \in \mathcal{F}$ avec $X \subset \bigcup_k A_k$ alors en posant $A = \bigcup_k A_k$ nous avons $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ ainsi que $\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$. Cela prouve que l'élément $\sum_n \mu(A_n)$ de (16.72) est plus grand que l'élément $\mu(A)$ de (16.73). □

16.40.
La proposition 16.41 pourrait être vue comme un cas particulier de la proposition 16.17 en utilisant 16.39. Nous en donnons cependant une preuve directe, qui est presque identique à celle de 16.17, mais avec une ou deux simplifications.

Proposition 16.41 ([508])**.**
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et l'application

$$\begin{aligned}\mu^* \colon \mathcal{P}(S) &\to [0, \infty] \\ X &\mapsto \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}.\end{aligned} \tag{16.74}$$

Alors μ^* est une mesure extérieure sur S et sa restriction à $\mathcal{F}$ est égale à μ.

Démonstration. Notons que la définition est bonne parce que l'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : considérer $A = S$.

(1) **Le vide** D'abord $\mu^*(\varnothing) = 0$ parce que $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(2) **μ^* est croissante** Soit $X \subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si $Y \subset A$ alors $X \subset A$, donc

$$\inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, Y \subset A\}, \tag{16.75}$$

ce qui signifie que $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y)$.

(3) **Inégalité par union dénombrable** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de S. Si il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0}) = \infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n \mu^*(X_n) = \infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quel nombre est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc que $\mu^*(X_n) < \infty$ pour tout n.

Soit $\epsilon > 0$ et par définition pour chaque n, il existe un $A_n \in \mathcal{F}$ tel que $X_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) \leqslant \mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Bien entendu nous avons

$$\bigcup_n X_n \subset \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}. \tag{16.76}$$

Nous en déduisons que

$$\mu^*\Big(\bigcup_n X_n\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big). \tag{16.77}$$

Mais $(S, \mathcal{F}, \mu)$ étant un espace mesuré,

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{16.78}$$

Au final nous avons les inégalités

$$\begin{aligned}\mu^*\Big(\bigcup_n X_n\Big) &\leqslant \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) && \text{(16.79a)}\\ &\leqslant \sum_n \mu(A_n) && \text{(16.79b)}\\ &\leqslant \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon \underbrace{\sum_n \frac{1}{2^n}}_{=1} && \text{(16.79c)}\\ &= \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon. && \text{(16.79d)}\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ,

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) \leqslant \sum_n \mu^*(X_n), \tag{16.80}$$

ce qui prouve que μ^* est une mesure extérieure.

(4) **Restriction** Supposons que $X \in \mathcal{F}$. Alors si $X \subset A$ nous avons $\mu(X) \leqslant \mu(A)$; mais en même temps, $\mu(X)$ est dans l'infimum qui définit $\mu^*(X)$ donc

$$\mu^*(X) \leqslant \mu(X) \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \mu(X) \leqslant \mu^*(X). \tag{16.81}$$

Donc nous avons égalité de tous les éléments de cette chaine d'inégalité.

□

DefTRBoorvnUY

Définition 16.42.
*Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Une partie $A \subset S$ est m^*-**mesurable** si pour tout $X \subset S$,*

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c). \tag{16.82}$$

Remarque 16.43.
L'inégalité

$$m^*(X) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{16.83}$$

étant toujours vraie, pour prouver qu'un ensemble est m^*-mesurable, il est suffisant de prouver l'inégalité inverse :

$$m^*(X) \geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{16.84}$$

La définition 16.42 est motivée par la proposition suivante.

PropOJFoozSKAE

Proposition 16.44.
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et μ^* la mesure extérieure qui va avec. Alors tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables.

En d'autres termes, pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{16.85}$$

Démonstration. Puisque $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$, et que μ^* est une mesure extérieure,

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{16.86}$$

Nous devons montrer l'inégalité inverse.

Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$. D'une part nous avons $X \cap A \subset B \cap A \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A) \leqslant \mu^*(B \cap A) = \mu(B \cap A). \tag{16.87}$$

Et d'autre part, $X \cap A^c \subset B \cap A^c \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A^c). \tag{16.88}$$

En rassemblant,

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) = \mu(B). \tag{16.89}$$

EqLSMooTvHLR

La dernière égalité vient du fait que $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont disjoints et que μ est une mesure. L'inégalité (16.89) étant vraie pour tout $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$, elle est encore vraie pour l'infimum :

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \inf\{\mu(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, X \subset B\} = \mu^*(X). \tag{16.90}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu^*(X). \tag{16.91}$$

□

Remarque 16.45.
Notons la duplicité du vocabulaire. Les ensembles μ-mesurables sont les éléments de $\mathcal{F}$, qui sont à priori les seuls sur lesquels μ est calculable[10], alors que les μ^*-mesurables sont les parties de S qui vérifient une certaine propriété (et μ^* est calculable sur toutes les parties de S).

[10] « calculable » au sens où μ y vaut un nombre bien défini ; après, que ce soit facile ou pas à calculer dans la pratique, c'est une autre histoire.

16.3 Applications mesurables

16.3.1 Propriétés

DefQKjDSeC

Définition 16.46 (Fonction mesurable)**.**
*Soient $(E,\mathcal{A})$ et $(F,\mathcal{F})$ deux espaces mesurés. Une fonction $f\colon E\to F$ est **mesurable** si pour tout $\mathcal{O}\in\mathcal{F}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est dans $\mathcal{A}$.*

PROPooEFHKooARJBwW

Proposition 16.47.
Soient $(S_i,\mathcal{F}_i)$ $(i=1,2,3)$ des espaces mesurables et des fonctions mesurables $f\colon S_1\to S_2$ et $g\colon S_2\to S_3$. Alors la fonction $g\circ f\colon S_1\to S_3$ est mesurable.

Démonstration. Soit $B\in\mathcal{F}_3$. Alors

$$(g\circ f)^{-1}(B)=f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big)\in f^{-1}(\mathcal{F}_2)\subset\mathcal{F}_1. \tag{16.92}$$

□

16.3.2 D'une tribu à l'autre

LemooVDXJooZNYelH

Lemme 16.48 ([505])**.**
Soient une application $f\colon S_1\to S_2$ et une tribu $\mathcal{F}_2$ sur S_2. Alors $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ est une tribu sur S_1

Démonstration. Il faut prouver les trois propriétés de la définition 16.1 d'une tribu.

(1) D'abord f est définie sur tout S_1, donc $f^{-1}(S_2)=S_1$ alors que $S_2\in\mathcal{F}_2$.

(2) Soit $A\in f^{-1}(\mathcal{F}_2)$, c'est-à-dire $A=f^{-1}(B)$ pour un certain $B\in\mathcal{F}_2$. En ce qui concerne le complémentaire :
$$A^c=f^{-1}(B)^c=S_1\setminus f^{-1}(B)=f^{-1}(S_2\setminus B)=f^{-1}(B^c). \tag{16.93}$$

(3) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ avec $A_i=f^{-1}(B_i)$ alors
$$\bigcup_i A_i=\bigcup_i f^{-1}(B_i)=f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big). \tag{16.94}$$
Ce qui est dans la dernière parenthèse est dans $\mathcal{F}_2$ parce que cette dernière est une tribu.

□

PROPooJXMKooNNNXaT

Proposition 16.49 ([1])**.**
Si $f\colon(\Omega_1,\mathcal{A}_1)\to(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ est une application mesurable et si $\mu\colon\mathcal{A}_1\to[0,\infty]$ est une mesure, alors

$$\begin{aligned}\mu'\colon\mathcal{A}_1&\to[0,\infty]\\ A&\mapsto(\mu\circ f^{-1})(A)\end{aligned} \tag{16.95}$$

est une mesure.

Le lemme suivant est également nommé « lemme de transfert ».

LemOQTBooWGYuDU

Lemme 16.50 (Lemme de transport)**.**
Soit $f\colon S_1\to S_2$ une application et une classe $\mathcal{C}$ de parties de S_2. Alors

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)=f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big). \tag{16.96}$$

Démonstration. Puisque $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu dans S_2 alors le lemme 9.6 dit que $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$ est une tribu qui contient en particulier $f^{-1}(\mathcal{C})$. Nous en déduisons que $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)\subset f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$.

Réciproquement. Dans S_1 nous avons la tribu $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Nous pouvons alors considérer la tribu

$$\mathcal{F}_f=\{B\subset S_2\text{ tel que }f^{-1}(B)\in\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)\}. \tag{16.97}$$

Montrons que $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}_f$. Lorsque $B\in\mathcal{C}$ nous avons $f^{-1}(B)\in f^{-1}(\mathcal{C})\subset\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Du coup $B\in\mathcal{F}_f$. Nous avons alors, en passant aux tribus engendrées :

$$\sigma(\mathcal{C})\subset\sigma(\mathcal{F}_f)=\mathcal{F}_f. \tag{16.98}$$

Si maintenant $B\in\sigma(\mathcal{C})$, nous avons $f^{-1}(B)\in\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$, ce qui signifie que

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)\subset\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big). \tag{16.99}$$

□

Le théorème suivant est important pour prouver qu'une application est mesurable. En effet, il permet de ne tester si une application n'est mesurable uniquement que sur une partie génératrice de la tribu d'arrivée[11].

ThoECVAooDUxZrE

Théorème 16.51.
Soient des espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application $f : S_1 \to S_2$. Si il existe un ensemble de parties $\mathcal{C}$ de S_2 tel que

- $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$
- $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}$

alors f est mesurable.

Démonstration. Par hypothèse, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$ et $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$ et nous pouvons utiliser le lemme de transfert 16.50 :

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big) \tag{16.100}$$

qui s'écrit ici

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}(\mathcal{F}_2). \tag{16.101}$$

Mais comme $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$, nous avons aussi $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset \mathcal{F}_1$, ce qui signifie que

$$f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{16.102}$$

Cela est exactement le fait que f soit mesurable. □

16.4 Tribu borélienne

16.4.0.1 Définition

DEFooQBQGooTqGdtY

Définition 16.52 (Tribu borélienne)**.**
*La tribu des **boréliens**, notée $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Plus généralement si Y est un espace topologique, la tribu des boréliens est la tribu engendrée par les ouverts de Y.*

PROPooYEkvbWBz

Proposition 16.53.
La tribu engendrée par une base dénombrable de la topologie est celle des boréliens.

Démonstration. Si une base de topologie est donnée, tout ouvert peut être écrit comme union d'élément de la base, proposition 9.2. Dans le cas d'une base dénombrable, cette union sera forcément dénombrable. Une tribu étant stable par union dénombrable, tout ouvert est dans la tribu engendrée par la base de topologie. Les autres boréliens suivent automatiquement.

Dit avec plus de lettres et moins de phrases, si $\mathcal{D}$ est une base dénombrable de la topologie de X, et si $\mathcal{O}$ est un ouvert de X, nous avons $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathcal{D}$. Puisqu'une tribu est stable par union dénombrable[12], nous avons $\mathcal{O} \in \sigma(\mathcal{D})$. En conséquence, $\mathcal{B}or(X) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

Mais comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}or(X)$ l'inclusion inverse est automatique. D'où l'égalité $\mathcal{B}or(X) = \sigma(\mathcal{D})$. □

16.4.0.2 Les boréliens de $\mathbb{R}$

Nous rappelons que la topologie de $\mathbb{R}$ est celle des boules donnée par le théorème 9.158. Nous rappelons (voir la proposition 9.207 et sa preuve) que les boules ouvertes de la forme $B(q, r)$ avec $q, r \in \mathbb{Q}$ forment une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$.

LemZXnAbtl

Lemme 16.54.
Soit $\{q_i\}$ une énumération des rationnels. La tribu engendrée par les ouverts $\sigma_i =]q_i, \infty[$ est la tribu des boréliens.

Démonstration. Si $a < b$ dans $\mathbb{Q}$ alors $\sigma_a \setminus \sigma_b =]a, b]$. Ensuite

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_a \setminus \sigma_{b - \frac{1}{n}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a, b - \frac{1}{n}] =]a, b[. \tag{16.103}$$

Par union dénombrable, tous les intervalles $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ sont dans la tribu engendrée par les σ_i. Ces boules ouvertes forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$ par la proposition 9.207 et la proposition 16.53 conclut. □

[11] Typiquement les ouverts pour les boréliens.
[12] Définition 16.1(3)

Exemple 16.55.
Les singletons sont des boréliens de $\mathbb{R}$ parce que

$$\{x\} = \Big(]-\infty, x[\cup]x, +\infty[\Big)^c. \tag{16.104}$$

Puisqu'une tribu est stable par union dénombrable, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Et comme les tribus sont stables par différence ensembliste (16.3(2)), l'ensemble des irrationnels est un borélien de $\mathbb{R}$. △

16.4.0.3 Diverses expressions

LEMooUPYDooPVjscA

Lemme 16.56.
Soient un espace topologique X et un borélien B de X. Nous considérons sur B la topologie induite[13] *de X et les boréliens $\mathcal{B}or(B)$ correspondants. Nous avons :*

$$\mathcal{B}or(B) = \{A \in \mathcal{B}or(X) \text{ tel que } A \subset B\} = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}or(X)\}. \tag{16.105}$$

En particulier,

EQooEUWVooCBUims

$$\mathcal{B}or(B) = \mathcal{B}or(X)_B. \tag{16.106}$$

Démonstration. L'égalité

$$\{A \in \mathcal{B}\text{or}(X) \text{ tel que } A \subset B\} = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\} \tag{16.107}$$

est déjà dans la proposition 16.9.

Nous démontrons maintenant que

$$\mathcal{B}\text{or}(B) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{16.108}$$

Pour ce faire, nous nous rappelons du lemme de transport 16.50. Soit l'injection canonique $f\colon B \to X$; pour tout $A \subset X$ nous avons $f^{-1}(A) = A \cap B$.

Nous considérons la classe $\mathcal{T}$ des ouverts de X. Par définition de la topologie induite, les ouverts de B sont les éléments de $f^{-1}(\mathcal{T})$. Donc

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big) = \mathcal{B}\text{or}(B). \tag{16.109}$$

Mais d'autre part,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{16.110}$$

Donc le lemme de transport 16.50 nous dit que

$$\mathcal{B}\text{or}(B) = \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{16.111}$$

Pour finir, l'égalité (16.106) se démontre :

$$\mathcal{B}\text{or}(X)_B = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\} = \mathcal{B}\text{or}(B). \tag{16.112}$$

□

16.4.1 Applications continues et boréliennes

DefHHIBooNrpQjs

Définition 16.57 (Fonction borélienne)**.**
Une application $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d))$[14] *est* ***borélienne*** *si elle est mesurable, c'est-à-dire si pour tout $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ nous avons $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Si rien n'est précisé, une application entre deux espaces topologiques est borélienne lorsqu'elle est mesurable en considérant la tribu borélienne sur les deux *espaces.*

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur un ensemble E, nous notons $m(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions qui sont $\mathcal{A}$-mesurables.

Le plus souvent lorsque nous parlerons de fonctions $f\colon X \to Y$ où Y est un espace topologique, nous considérons la tribu borélienne sur Y. Ce sera en particulier le cas dans la théorie de l'intégration.

Le théorème suivant est très important parce qu'en pratique c'est souvent lui, en conjonction avec la proposition 16.127 qui permet de déduire qu'une fonction est borélienne.

ThoJDOKooKaaiJh

Théorème 16.58 ([505])**.**
Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors toute application continue $f\colon X \to Y$ est borélienne[15]*.*

[13] Définition 9.30.
[14] Tribu des boréliens, définition 16.52.
[15] Définition 16.57.

Démonstration. Pour vérifier que f est borélienne, nous devons prouver que $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien B de Y. Heureusement, le théorème 16.51 nous permet de limiter la vérification aux B appartenant à une classe engendrant les boréliens de Y.

La classe en question est toute trouvée : ce sont les ouverts. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X et donc un borélien de X. □

Le théorème suivant donne une importante compatibilité entre l'induction de tribu et l'induction de topologie : la tribu induite à partir des boréliens sur un sous-espace topologique est la tribu des boréliens pour la topologie induite.

ThoSVTHooChgvYa

Théorème 16.59 ([505]).
Soit X, un espace topologique et $Y \subset X$ une partie munie de la topologie induite. Alors

$$\mathcal{B}or(Y) = \mathcal{B}or(X)_Y \tag{16.113}$$

où $\mathcal{B}or(X)_Y$ est la tribu sur Y induite de $\mathcal{B}or(X)$ par la définition 16.8.

Démonstration. Nous notons τ_X et τ_Y les topologies de X et Y.

(1) **$\mathcal{B}\mathrm{or}(Y) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$** Si $A \in \tau_Y$ alors $A = Y \cap \Omega$ pour un $\Omega \in \tau_X$. Mais puisque Ω est un ouvert de X, il est un borélien de X, ce qui donne que $Y \cap \Omega$ est un élément de $\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$. Cela prouve que $\tau_Y \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y$ est une tribu sur Y contenant les ouverts de Y. Nous avons donc

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y. \tag{16.114}$$

(2) **Réciproquement** L'application $\mathrm{Id}\colon (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ est continue parce que si Ω est ouvert de X alors $\mathrm{Id}^{-1}(\Omega) = \Omega \cap Y \in \tau_Y$. Par conséquent l'identité est une application borélienne (théorème 16.58), ce qui signifie que $\mathrm{Id}^{-1}\big(\mathcal{B}\mathrm{or}(X)\big) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$, ou encore que si $B \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)$, alors $\mathrm{Id}^{-1}(B) = B \cap Y \in \mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$. Cela signifie que

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(Y). \tag{16.115}$$

□

CorooMJQYooFfwoTd

Corolaire 16.60.
Si U est un borélien de l'espace topologique X, alors les boréliens de U sont les boréliens de X inclus dans U :

$$\mathcal{B}or(U) = \{B \in \mathcal{B}or(X) \text{ tel que } B \subset U\}. \tag{16.116}$$

Démonstration. Si $B' \in \mathcal{B}\mathrm{or}(U)$, le théorème 16.59 donne un borélien $B \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)$ tel que $B' = B \cap U$. Mais U étant borélien de X, l'intersection $B \cap U$ est encore un borélien de X. □

Ce corolaire s'applique en particulier lorsque U est un ouvert.

La proposition suivante montre comment il est possible de construire un espace mesuré à partir d'une bijection avec un espace mesuré déjà connu. Attention cependant : la mesure construite dans cette proposition n'est pas celle qui est le plus adapté. Voir la proposition 16.286 et le blabla 16.287.

PROPooXQHTooUxJoyq

Proposition 16.61.
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ *pour tout* $B \in \mathcal{A}'$.

Alors $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace mesuré.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **$\mathcal{A}'$ est une tribu** Il faut vérifier les différents points de la définition 16.1. D'abord, puisque $\Omega \in \mathcal{A}$, nous avons $\Omega' = \varphi(\Omega) \in \mathcal{A}'$. Pour le complémentaire, si $B \in \mathcal{A}'$ alors $B = \varphi(A)$ pour un certain $A \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu nous avons alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ et donc $\varphi(\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}'$. Mais comme φ est bijective,

$$\varphi(\Omega \setminus A) = \Omega' \setminus \varphi(A) = \Omega' \setminus B. \tag{16.117}$$

Le complémentaire de B est donc bien dans $\mathcal{A}'$. Pour la troisième condition, soient $B_i \in \mathcal{A}'$. Pour chaque i, il existe $A_i \in \mathcal{A}$ tel que $B_i = \varphi(A_i)$. Nous avons $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$, donc

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_i \varphi(A_i) = \varphi\Big(\bigcup_i A_i\Big) \in \mathcal{A}'. \tag{16.118}$$

Nous avons fini de prouver que $(\Omega', \mathcal{A}')$ était un espace mesurable.

(2) μ' **est une mesure positive** D'abord $\mu'(\varnothing) = \mu\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big) = \mu(\varnothing) = 0$. Ensuite si les A_i sont disjoints dans $\mathcal{A}'$ nous avons

$$\mu'\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big) = \mu\left(\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\Big)\right) = \mu\left(\bigcup_i \varphi^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu\big(\varphi^{-1}(A_i)\big) = \sum_i \mu'(A_i). \tag{16.119}$$

□

PROPooIKYYooCFaDaI

Proposition 16.62.
Soit une bijection continue d'inverse continue $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Alors

$$\varphi\big(\mathcal{B}or(\Omega)\big) = \mathcal{B}or(\Omega'). \tag{16.120}$$

Démonstration. Si $A \in \mathcal{B}\text{or}(\Omega')$, alors $A = \varphi\big(\varphi^{-1}(A)\big) \in \varphi\big(\mathcal{B}\text{or}(\Omega)\big)$ parce que φ est continue et donc borélienne (proposition 16.58). Le même raisonnement fonctionne dans l'autre sens parce que nous avons supposé que φ est continue et d'inverse continu. □

16.4.2 Tribu de Baire

Définition 16.63.
*Une partie d'un espace topologique est **rare** si elle est contenue dans un fermé d'intérieur vide.*
*Une partie est **maigre** si elle est réunion finie ou dénombrable de parties rares.*

Exemple 16.64.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est maigre mais n'est pas rare parce que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. △

PROPooCHTWooZFiSMf

Proposition 16.65 ([506]).
Soit X un espace topologique. L'ensemble de parties[16]

$$\mathcal{B}a(X) = \{B \cup A \text{ avec } B \text{ borélien et } A \text{ maigre}\} \tag{16.121}$$

*est une tribu. Elle est appelée la **tribu de Baire** de l'espace X.*

Démonstration. Nous allons montrer que les boréliens et les maigres vérifient les conditions de la proposition 16.7.

(1) Si A est maigre, il s'écrit comme $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ où les R_i sont rares. Il existe donc des fermés d'intérieur vide F_i tels que $R_i \subset F_i$; en particulier $A \subset \bigcup_i F_i$. En tant que fermés, $F_i \in \mathcal{B}\text{or}(X)$; de plus chaque F_i est rare, donc $\bigcup_i F_i$ est maigre. L'ensemble A est donc bien contenu dans un ensemble maigre et borélien.

(2) Soit A maigre et $B \subset A$. Nous avons, avec les mêmes notations, $A = \bigcup_i R_i$ et $B = \bigcup_i (R_i \cap B)$. Les ensembles $R_i \cap B$ sont encore rares, donc B est une union dénombrable d'ensembles rares. L'ensemble B est donc maigre.

(3) Si les ensembles (A_i) sont maigres, alors ils sont unions dénombrables de rares : $A_i = \bigcup_k R_k^{(i)}$. Nous avons alors

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}^2} R_k^{(i)}, \tag{16.122}$$

et donc $\bigcup_i A_i$ est encore une union dénombrable d'ensembles rares.

□

PropGRHootvAWq

Proposition 16.66 ([506]).
Une partie B de l'espace topologique X est dans la tribu de Baire de X si et seulement si il existe un ouvert U tel que $B\Delta U$ est maigre.

Démonstration. Nous définissons la relation d'équivalence[17] suivante sur $\mathcal{P}(X)$: nous disons que $A \sim B$ si et seulement si $A\Delta B$ est maigre.

[16] Pour rappel, la tribu borélienne est définie en 16.52.
[17] Définition 1.55

(1) **Réflexive** Nous avons $A\Delta A = \varnothing$, donc $A \sim A$.

(2) **symétrique** Nous avons $A\Delta B = B\Delta A$, donc $\sim$ est symétrique.

(3) **transitive** Si A, B, C sont des parties de X alors nous avons toujours

$$A\Delta C \subset (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A\Delta B) \cup (B\Delta C). \tag{16.123}$$

Donc si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A\Delta C$ est contenu dans une union de maigres et est donc maigre.

(4) **Autres propriétés de $\sim$** De plus la relation d'équivalence $\sim$ vérifie $A \sim B$ si et seulement si $A^c \sim B^c$, par le lemme 1.54(1).

Pour compléter les propriétés de $\sim$ mentionnons encore le fait que si F est fermé alors $F \sim \text{Int}(F)$. En effet $F \cup \text{Int}(F) = F$ et $F \cap \text{Int}(F) = \text{Int}(F)$, de telle sorte que $F\Delta \,\text{Int}(F) = F \setminus \text{Int}(F)$. Cet ensemble est un fermé parce que son complémentaire est $F^c \cup \text{Int}(F)$ qui est une union d'ouverts. De plus $F \subset \text{Int}(F)$ est d'intérieur vide, de telle sorte qu'il est rare et donc maigre.

Pour la suite de la preuve nous posons

$$\mathcal{F} = \{A \subset X \text{ tel que il existe un ouvert } U \text{ avec } U \sim A\}, \tag{16.124}$$

et nous devons prouver que $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{a}(X)$.

(1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}\mathbf{a}(X)$

Soit $A \in \mathcal{F}$ et un ouvert U tel que $U \sim A$. Alors nous posons $M = U\Delta A$ qui est maigre. En vertu du lemme 1.54(2), nous avons

$$A = M\Delta U = (M \cup U) \setminus (M \cap U), \tag{16.125}$$

ce qui prouve que A est dans la tribu engendrée par les ouverts et les maigres, laquelle tribu est contenue dans $\mathcal{B}\text{a}(X)$.

(2) $\mathcal{B}\mathbf{a}(X) \subset \mathcal{F}$

Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu contenant tous les ouverts et tous les maigres. Alors en particulier $\mathcal{F}$ contiendra $\mathcal{B}\text{a}(X)$. Si U est ouvert, $U \sim U$ et donc $U \in \mathcal{F}$. Si M est maigre, alors $M \sim \varnothing$ et donc $M \in \mathcal{F}$. Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est une tribu.

(2a) **Vide et tout l'ensemble** C'est facile : $\varnothing$ et X sont dans $\mathcal{F}$.

(2b) **Comlémentaire** Commençons par nous souvenir que $F \sim \text{Int}(F)$ dès que F est fermé. Si $A \in \mathcal{F}$ alors il existe un ouvert U tel que $A \sim U$ et donc aussi $A^c \sim U^c$. D'autre part U^c est fermé, donc $U^c \sim \text{Int}(U^c)$, donc

$$A^c \sim U^c \sim \text{Int}(U^c), \tag{16.126}$$

ce qui implique que $A^c \in \mathcal{F}$.

(2c) **Union dénombrable** Soit $A_n \in \mathcal{F}$ et $M_n = A_n\Delta U_n$ avec M_n maigre et U_n ouvert. Nous allons prouver que

$$\bigcup_n A_n \sim \bigcup_n U_n. \tag{16.127}$$

Pour cela il faut remarquer que

$$\Big(\bigcup_n A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_n U_n\Big) \subset \bigcup_n (A_n\Delta U_n) = \bigcup_n M_n. \tag{16.128}$$

Le terme le plus à droite est maigre, ce qui signifie que celui le plus à gauche est contenu dans un maigre et donc est maigre lui-même.

□

Proposition 16.67.
Si B est un borélien de X, alors il existe un ouvert U et un maigre M tels que

(1) $B\Delta U$ est maigre,

(2) $M\Delta U = B$,

(3) $B\Delta M$ est ouvert.

Démonstration. Puisque B est borélien, il est aussi dans la tribu de Baire et il existe par la proposition 16.66 un ouvert U tel que $M = B\Delta U$ est maigre. En prenant ce U et ce M, les trois conditions sont vérifiées parce que

$$M\Delta U = (B\Delta U)\Delta U = B \tag{16.129}$$

et

$$B\Delta M = M\Delta B = (U\Delta B)\Delta B = U. \tag{16.130}$$

Tout ceci par le lemme 1.54(2). □

16.5 Espace mesuré complet

16.5.1 Partie négligeable

DefAVDoomkuXi

Définition 16.68.
*Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Une partie N de X est **négligeable** pour μ si il existe $Y \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$.*

LemVKNooOCOQw

Lemme 16.69.
L'ensemble des parties négligeables est stable par union dénombrable.

Démonstration. Si les ensembles N_i sont négligeables, alors pour chaque i nous avons $Y_i \in \mathcal{A}$ tel que $N_i \subset Y_i$ et $\mu(Y_i) = 0$. Alors bien entendu $\bigcup_i N_i \subset \bigcup_i Y_i$ et en utilisant (16.33),

$$\mu\Big(\bigcup_i Y_i\Big) \leqslant \sum_i \mu(Y_i) = 0. \tag{16.131}$$

□

DefBWAoomQZcI

Définition 16.70.
*L'espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est **complet** si tout ensemble μ-négligeable est dans $\mathcal{F}$.*

Notons que la proposition 16.7 s'applique si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties μ-négligeables. C'est ce qui permet de donner le théorème suivant, que nous redémontrons de façon indépendante de la proposition 16.7.

thoCRMootPojn

Théorème 16.71 (Complétion d'espace mesuré[508, 517, 518])**.**
Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables de X.

(1) Les ensembles suivants sont égaux :

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B, C \in \mathcal{F} \text{ tel que } B \subset A \subset C, \mu(C \setminus B) = 0\} \tag{16.132a}$$
$$\mathcal{B} = \{B \cup N \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\} \tag{16.132b}$$
EqEJoorZNU
$$\mathcal{C} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B \in \mathcal{F} \text{ tel que } A\Delta B \in \mathcal{N}\}. \tag{16.132c}$$

Ici $A\Delta B$ est la différence symétrique de A et B, définition 1.52.

(2) L'ensemble $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ est une tribu.

(3) La définition

$$\begin{aligned} \mu' : \mathcal{B} &\to [0, \infty] \\ A \cup N &\mapsto \mu(A) \end{aligned} \tag{16.133}$$

est cohérente.

(4) L'application μ' ainsi définie est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

(5) L'espace $(X, \mathcal{A}, \mu')$ est complet.

(6) La mesure μ' prolonge μ.

thoCRMootPojnvii

(7) La mesure μ' est minimale au sens où toute mesure complète prolongeant μ prolonge μ'.

Démonstration. Commençons par prouver que les trois ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont égaux.

(1) $\underline{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}.}$ Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors nous avons des ensembles $B, C \in \mathcal{F}$ tels que $B \subset A \subset C$ avec $\mu(C \setminus B) = 0$. Alors nous avons aussi $A = B \cup (C \setminus B)$, ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}$.

(2) $\underline{\mathcal{B} \subset \mathcal{C}.}$ Soit $A \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$. Nous avons évidemment $A \cup B = A$ et donc

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus (A \cap B) = (B \cup N) \setminus (A \cap B) \subset N. \tag{16.134}$$

Pour comprendre la dernière inclusion, si x appartient à $A = B \cup N$ sans être dans N alors $x \in B$ et donc $x \in A \cap B$. Par conséquent nous avons $A\Delta B \subset N$ et donc $A\Delta B \in \mathcal{N}$.

(3) $\underline{\mathcal{C} \subset \mathcal{A}}$ Soit donc $A \in \mathcal{C}$; il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $A\Delta B \in \mathcal{N}$ ou encore, il existe $D \in \mathcal{F}$ tel que $A\Delta B \subset D$ avec $\mu(D) = 0$. Si nous posons $B' = B \cap D^c$ et $C' = B \cup D$ alors nous prétendons avoir

$$B' \subset A \subset C'. \tag{16.135}$$

Et nous le prouvons. En effet si $x \in B \cap D^c$ alors en remarquant que B se divise en

$$B = (B \cap A) \cup \big(B \cap (A\Delta B)\big), \tag{16.136}$$

et en nous souvenant que $B \cap (A\Delta B) \subset D$, il vient que $B \cap D^c \subset B \cap A$. Et en particulier $x \in A$. D'autre part

$$A \subset B \cup (A\Delta B) \subset B \cup D. \tag{16.137}$$

Nous avons donc bien $B' \subset A \subset C'$. Par stabilité de la tribu $\mathcal{F}$ sous les intersections et complémentaires, nous avons aussi $B', C' \in \mathcal{F}$. De plus

$$C' \setminus B' = (B \cup D) \setminus (B \cap D^c) \subset D, \tag{16.138}$$

et donc

$$\mu(C' \setminus B') \leqslant \mu(D) = 0. \tag{16.139}$$

Nous avons donc prouvé que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$. Nous pouvons maintenant noter $\mathcal{A}$ indifféremment les trois ensembles.

Nous prouvons à présent que $\mathcal{A}$ est une tribu.

(1) $\underline{\textbf{Tribu : le vide}}$ Pas de problème à $\varnothing \in \mathcal{A}$

(2) $\underline{\textbf{Tribu : complémentaire}}$ Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors il existe $B, C \in \mathcal{F}$ tels que $B \subset A \subset C$ avec $\mu(C \setminus B) = 0$. En passant au complémentaire,

$$C^c \subset A^c \subset B^c. \tag{16.140}$$

Mais $B^c \setminus C^c = C \setminus B$, donc $\mu(B^c \setminus C^c) = 0$.

(3) $\underline{\textbf{Tribu : union dénombrable}}$ Soit (A_n) des éléments de $\mathcal{A}$. Pour chaque n nous avons des ensembles $B_n, C_n \in \mathcal{F}$ tels que$B_n \subset A_n \subset C_n$ avec $\mu(C_n \setminus B_n) = 0$. En ce qui concerne les unions nous avons

$$\bigcup_n B_n \subset \bigcup_n A_n \subset \bigcup_n C_n, \tag{16.141}$$

et

$$\big(\bigcup_n C_n\big) \setminus \big(\bigcup_n B_n\big) \subset \bigcup_n (C_n \setminus B_n). \tag{16.142}$$

Par conséquent, en utilisant (16.33),

$$\mu\left(\big(\bigcup_n C_n\big) \setminus \big(\bigcup_n B_n\big)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_n (C_n \setminus B_n)\right) \leqslant \sum_n \mu(C_n \setminus B_n) = 0. \tag{16.143}$$

Cela prouve que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

(4) $\underline{\textbf{Définition cohérente}}$ Soient $A, A' \in \mathcal{F}$ et $N, N' \in \mathcal{N}$ tels que $A \cup N = A' \cup N'$. Nous considérons $Y, Y' \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$, $N' \subset Y'$ et $\mu(Y) = \mu(Y') = 0$. En vertu de (16.33) nous avons

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cup Y) \leqslant \mu(A' \cup Y \cup Y') \leqslant \mu(A') + \mu(Y) + \mu(Y') = \mu(A'). \tag{16.144}$$

En écrivant la même chose en échangeant les primes, nous prouvons également $\mu(A') \leqslant \mu(A)$. Au final $\mu(A) = \mu(A')$, c'est-à-dire

$$\mu'(A \cup N) = \mu'(A' \cup N'). \tag{16.145}$$

La définition de μ' est donc cohérente.

(5) μ' **est une mesure**

Le fait que μ' soit positive et que $\mu'(\varnothing)$ soit nul ne pose pas de problème. Il faut voir l'union dénombrable disjointe. Si les ensembles $A_i = B_i \cup N_i$ sont disjoints, alors les B_i et le N_i sont tous disjoints deux à deux. De plus l'ensemble $\bigcup_i N_i$ est négligeable parce que nous avons déjà vu que $\mathcal{N}$ était stable par union dénombrable (16.33). Donc

$$\mu'\left(\bigcup_i B_i \cup N_i\right) = \mu'\Big((\bigcup_i B_i) \cup \underbrace{(\bigcup_i N_i)}_{\in\mathcal{N}}\Big) = \mu(\bigcup_i B_i) = \sum_u \mu(B_i) = \sum_i \mu'(B_i \cup N_i). \tag{16.146}$$

(6) **Espace complet** Un ensemble μ'-négligeable est automatiquement μ-négligeable. En effet si H est μ'-négligeable, il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $H \subset B \cup N$ avec $\mu(B) = 0$. Comme N est μ-négligeable, il existe $Y \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$. Donc $H \subset B \cup N \subset B \cup Y$ avec $\mu(B \cup Y) = 0$.

Tous les ensembles μ-négligeables faisant partie de $\mathcal{B}$, tous les ensembles μ'-négligeables font partie de $\mathcal{A}$.

(7) **Prolongement** La mesure μ' prolonge μ. En effet si $A \in \mathcal{F}$ alors $A = A \cup \varnothing \in \mathcal{B}$ et A est μ'-mesurable. De plus $\mu'(A) = \mu'(A \cup \varnothing) = \mu(A)$.

(8) **Minimalité**

Soit un espace mesuré complet $(X, \mathcal{M}, \nu)$ prolongeant $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Pour $A \in \mathcal{A}$ nous devons prouver que $A \in \mathcal{M}$ et que $\mu'(A) = \nu(A)$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $A = B \cup N$. Puisque N est μ-négligeable, il est également ν-négligeable et donc ν-mesurable parce que ν est complète : $A \in \mathcal{M}$. Nous avons le calcul

$$\nu(B) \leqslant \nu(B \cup N) \leqslant \nu(B) + \nu(N) = \nu(B). \tag{16.147}$$

Vu que le premier et dernier termes de ces inégalités sont égaux, toutes les inégalités sont des égalités et nous avons $\nu(B) = \nu(B \cup N)$. Nous pouvons enfin faire le calcul

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu(B \cup N) && \text{(16.148a)}\\
&= \nu(B) && \text{(16.148b)}\\
&= \mu(B) && \text{(16.148c)}\\
&= \mu'(B \cup N) && \text{(16.148d)}\\
&= \mu'(A). && \text{(16.148e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooVCBQooSeRAjw

SUBEQooBDASooTBBBMs

Justifications.

- Pour (16.148c). La mesure ν prolonge μ.
- Pour (16.148d). Définition de μ'.

L'égalité $\mu'(A) = \nu(A)$ est prouvée.

□

Définition 16.72.
*L'espace mesuré complet $(X, \mathcal{A}, \mu')$ défini par le théorème 16.71 est l'**espace mesuré complété** de $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Nous noterons le complété de $(S, \mathcal{F}, \mu)$ par $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$*

ThoUUIooaNljH

Théorème 16.73 (Carathéodory[508])**.**
Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Alors

RPPooHSWWsi

(1) l'ensemble $\mathcal{M}$ des parties m^*-mesurables est une tribu,

(2) la restriction de m^* est une mesure sur $(S, \mathcal{M})$,

(3) l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est complet[18]*.*

Démonstration. Une grosse partie de la preuve sera de prouver la stabilité de $\mathcal{M}$ par union dénombrable quelconque ; cela sera divisé en plusieurs parties.

(1) **Tribu : le vide** L'ensemble vide est m^*-mesurable.

[18] Définition 16.70.

(2) **Tribu : complémentaire** Soit $A \in \mathcal{M}$ et $X \in S$. La condition qui dirait $A^c \in \mathcal{M}$ est :

$$m^*(X) = m^*(X \cap A^c) + m^*(X \cap A), \tag{16.149}$$

qui est la même que celle qui dit que A est dans $\mathcal{M}$.

(3) **Tribu : union finie** Soient $A, B \in \mathcal{M}$ et $X \subset S$. Alors, comme m^* est une mesure extérieure,

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*\big(X \cap (A \cup B)\big) + m^*\big(X \cap (A \cup B)^c\big) && (16.150a)\\ &= m^*\big((X \cap A) \cup (X \cap B)\big) + m^*\big(X \cap A^c \cap B^c\big). && (16.150b) \end{aligned}$$

Mais nous pouvons écrire la première union sous forme d'une union disjointe de la façon suivante :

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (X \cap A) \cup (X \cap B \cap A^c), \tag{16.151}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap A^c) + m^*(X \cap A^c \cap B^c) && (16.152a)\\ &= m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) && (16.152b)\\ &= m^*(X) && (16.152c) \end{aligned}$$

parce que les deux derniers termes de (16.152a) se somment à $m^*(X \cap A^c)$ parce que $B \in \mathcal{M}$. La dernière ligne est le fait que A soit m^*-mesurable.

(4) **Union finie disjointe** Soient $\{A_1, \dots, A_n\}$ des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$. Nous allons maintenant prouver par récurrence que

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k). \tag{16.153}$$

Si $n = 1$ le résultat est évident. Sinon, le fait que A_{n+1} soit m^*-mesurable donne

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) = m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}\Big) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c\Big). \tag{16.154}$$

Le fait que les A_k soient disjoints implique aussi que

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1} = X \cap A_{n+1} \tag{16.155}$$

et

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c = X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) \tag{16.156}$$

et donc

$$\begin{aligned} m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) &= m^*(X \cap A_{n+1}) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) && (16.157a)\\ &\overset{rec.}{=} m^*(X \cap A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k) && (16.157b)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} m^*(X \cap A_k). && (16.157c) \end{aligned}$$

La relation (16.153) est prouvée.

Notons qu'en particularisant à $X = S$ nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) \tag{16.158}$$

dès que les A_k sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$.

(5) **Union dénombrable disjointe** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{M}$. Nous allons prouver les affirmations suivantes :

- $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$
- $m^*\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n m^*(A_n)$

où toutes les sommes et unions sur n sont entre 1 et ∞.

(5a) **Première affirmation**
Nous posons $A = \bigcup_k A_k$ et $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Nous savons que $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout n par le point précédent. Donc si $X \in S$ nous avons

$$m^*(X) = m^*(X \cap B_n) + m^*(X \cap B_n^c) \tag{16.159a}$$
$$= \sum_{k=1}^n m^*(X \cap A_k) + m^*(X \cap B_n^x) \tag{16.159b}$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^n m^*(X \cap A_k) + m^*(X \cap A^c) \tag{16.159c}$$

où nous avons utilisé la relation (16.153) sur les B_n ainsi que le fait que $A^c \subset B_n^c$ (parce que $B_n \subset A$). L'inégalité (16.159a) étant vraie pour tout n, elle est vraie à la limite :

$$m^*(X) \geqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap A_k) + m^*(X \cap A^c) \tag{16.160a}$$
$$\geqslant m^*\Big(\bigcup_k (X \cap A_k)\Big) + m^*(X \cap A^c) = m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_k A_k\big)\Big) + m^*(X \cap A^c) \tag{16.160b}$$
$$\geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c), \tag{16.160c}$$

ce qui signifie que $A \in \mathcal{M}$.

(5b) **Seconde affirmation** En particularisant à $X = A$ et en tenant compte des faits que $A \cap A_k = A_k$ et $A \cap A^c = \varnothing$,

$$m^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap A_k) + m^*(A \cap A^c), \tag{16.161}$$

c'est-à-dire que pour tout n nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) \geqslant \sum_{k=1}^n m^*(A_k). \tag{16.162}$$

L'inégalité est encore vraie à la limite, et l'inégalité inverse étant toujours vraie pour une mesure extérieure,

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) = \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k). \tag{16.163}$$

(6) **Union dénombrable quelconque** Soit maintenant une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ que nous ne supposons plus être disjoints. Nous nous ramenons au cas disjoint en posant

$$\begin{cases} B_1 = A_1 & (16.164a)\\ B_n = A_n \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\big)^c, & (16.164b) \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous mettons dans B_n les éléments de A_n qui ne sont dans aucun des A_k précédents. Autrement dit, nous posons $B_0 = \varnothing$ et $B_n = A_n \setminus B_{n-1}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ étant stable par réunion finie, par complément et par intersection finie nous avons $B_n \in \mathcal{M}$. De plus les B_n sont disjoints, donc

$$\bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigcup_{k=1}^\infty B_k \in \mathcal{M}. \tag{16.165}$$

La première égalité se justifie de la façon suivante : si $x \in \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ alors nous notons n_0 le plus petit n tel que $x \in A_n$ et alors $x \in B_{n_0}$.

(7) **Espace complet** Nous prouvons à présent que $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est un espace mesuré complet. Soit N une partie m^*-négligeable de S et $Y \in \mathcal{M}$ tel que $m^*(Y) = 0$ et $N \subset Y$. D'abord $m^*(N) = 0$ parce que

$$m^*(N) \leqslant m^*(Y) = 0. \tag{16.166}$$

Si $X \subset S$ nous avons

$$X \cap N \subset N \Rightarrow m^*(X \cap N) = 0 \tag{16.167a}$$
$$X \cap N^c \subset X \Rightarrow m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X). \tag{16.167b}$$

Donc

$$m^*(X \cap N) + m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X), \tag{16.168}$$

ce qui montre que N est m^*-mesurable.

□

16.74.
Ce théorème nous pousse à adopter des éléments de notation. Lorsqu'un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est donné, nous noterons

$$(S, \mathcal{M}, \mu^*) \tag{16.169}$$

l'espace mesuré construit de la façon suivante. D'abord μ^* est la mesure extérieure associée à μ par la proposition 16.41. Ensuite $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables, qui est bien une tribu parce que μ^* est une mesure extérieure (16.73). La proposition (16.44) dit alors que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. De plus 16.73 nous explique que si $A \in \mathcal{F}$ alors $\mu(A) = \mu^*(A)$. Tout cela pour dire que

$$(S, \mathcal{F}, \mu) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*). \tag{16.170}$$

EqXDPooKwWAF

Et enfin, 16.73 nous dit que l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est complet.

ExOIXoosScTC

Exemple 16.75.
Montrons un cas dans lequel $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ n'est pas σ-fini. Soit S un ensemble non dénombrable et $\mathcal{F}$ la tribu des parties de S qui sont, soit finis ou dénombrables, soit de complémentaire fini ou dénombrable. Nous y mettons la mesure

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.171}$$

Cette mesure n'est pas σ-finie parce qu'aucune union de dénombrables est non dénombrable. De plus $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est complet parce que toute partie contenue dans un ensemble fini ou dénombrable est fini ou dénombrable (2.50).

(1) $\mathcal{F}$ **n'est pas** $\mathcal{P}(S)$ La tribu $\mathcal{F}$ est différente de $\mathcal{P}(S)$. En effet S étant infini, il existe par 2.56 une bijection $\varphi\colon \{1, 2\} \times S \to S$. Alors l'ensemble $\varphi\big(\{1\} \times S\big)$ est non dénombrable et son complémentaire

$$\varphi\big(\{1\} \times S\big)^c = \varphi\big(\{2\} \times S\big) \tag{16.172}$$

n'est pas dénombrable non plus. Cet ensemble n'est donc pas de $\mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{M}$ **est** $\mathcal{P}(S)$ En effet, soit $A \subset S$; il faut prouver que pour tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{16.173}$$

Nous prouvons cela en séparant les cas, suivant que X est dénombrable ou non.

Si X est fini ou dénombrable, alors $X \cap A$ et $X \cap A^c$ le sont également, et nous avons $\mu^*(X) = \mu(X) = 0$ ainsi que $\mu^*(X \cap A) = \mu^*(X \cap A^c) = 0$.

Si au contraire X n'est pas dénombrable,

$$\mu^*(X) = \inf_{\substack{A \in \mathcal{F} \\ X \subset A}} \mu(A) = \infty, \tag{16.174}$$

parce que X n'étant pas dénombrable, l'ensemble A ne l'est pas non plus et $\mu(A) = \infty$. Mais comme X n'est pas dénombrable, soit $X \cap A$, soit $X \cap A^c$ (soit les deux) n'est pas dénombrable non plus ; par conséquent

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) = \infty. \tag{16.175}$$

Par conséquent $(S,\mathcal{F},\mu)\neq(S,\mathcal{M},\mu^*)$. Mais puisque $(S,\mathcal{F},\mu)$ est complété nous devons avoir $(S,\mathcal{F},\mu)=(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})$. Tout cela pour dire que nous avons un exemple avec

$$(S,\mathcal{M},\mu^*)\neq(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu}).\tag{16.176}$$

△

Nous avons deux façons de créer un espace complet à partir de $(S,\mathcal{F},\mu)$.

(1) Partir de la mesure extérieure μ^* et construire $(S,\mathcal{M},\mu^*)$.

(2) Partir des ensembles μ-négligeables, construire $\hat{\mathcal{F}}$ et ensuite $(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})$.

Ces deux façons ne sont pas équivalentes en général comme le montre l'exemple 16.75. Mais il sera montré par la proposition 16.79 que si $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini alors les deux sont équivalents.

LemAESoofkMpi

Lemme 16.76.
Soit $(S,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Alors pour tout $X\subset S$ tel que $\mu^*(X)<\infty$ il existe $A\in\mathcal{F}$ tel que $X\subset A$ et $\mu^*(X)=\mu(A)$.

C'est-à-dire que μ^* a beau être défini sur toutes les parties de S, ce qu'il faut rajouter pour être μ-mesurable, c'est pas grand chose.

Démonstration. Par définition de la mesure extérieure associée à μ en tant qu'infimum, pour tout $n\geqslant 1$, il existe $A_n\in\mathcal{F}$ tel que $X\subset A_n$ et $\mu(A_n)\leqslant\mu^*(X)+\frac{1}{2^n}$. Nous posons $A=\bigcap_{n\geqslant 1}A_n$ et nous vérifions que ce A fait l'affaire.

D'abord $A\in\mathcal{F}$ parce qu'une tribu est stable par union dénombrable. Ensuite pour tout $n\geqslant 1$ nous avons

$$\mu(A)\leqslant\mu(A_n)\leqslant\mu^*(X)+\frac{1}{2^n},\tag{16.177}$$

et à la limite $\mu(A)\leqslant\mu^*(X)$. Mais $X\subset A$ implique $\mu^*(X)\leqslant\mu(A)$ parce que $\mu^*(X)$ l'infimum d'un ensemble contenant $\mu(A)$. □

LemXOUNooUbtpxm

Corolaire 16.77.
Soit une mesure μ et la mesure extérieure μ^* associée[19]. Une partie N de X est négligeable si et seulement si $\mu^*(N)=0$.

Démonstration. Si μ^* est la mesure extérieure associée à μ et si N est μ-négligeable alors $\mu^*(N)=0$ parce que

$$\mu^*(N)\leqslant\mu^*(Y)=\mu(Y)=0\tag{16.178}$$

pour un certain Y mesurable de mesure nulle contenant N.

D'autre part si $\mu^*(N)=0$ alors le lemme 16.76 donne une partie mesurable A telle que $N\subset A$ et $\mu(A)=0$, c'est-à-dire que N est négligeable. □

LemOAEoocBDaO

Lemme 16.78.
Si l'espace mesuré $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini alors l'espace mesuré $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est également σ-fini.

Démonstration. Puisque $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-fini, nous avons une suite croissante A_n d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que $\bigcup_n A_n=S$ et telle que $\mu(A_n)<\infty$ pour tout n. Étant donné que $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$, cette suite convient également pour montrer que $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est σ-fini parce que $\mu^*(A_n)=\mu(A_n)<\infty$. □

La proposition suivante montre que si $(S,\mathcal{F},\mu)$ est σ-finie alors nous avons l'égalité.

PropIIHooAIbfj

Proposition 16.79.
Soit $(S,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré σ-fini, μ^* la mesure extérieure associée et $\mathcal{M}$ la tribu des ensembles μ^*-mesurables[20]. Alors

$$(S,\mathcal{M},\mu^*)=(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu}).\tag{16.179}$$

Démonstration. La proposition 16.44 indique que tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables, c'est-à-dire que $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$. Mais l'espace $(S,\mathcal{M},\mu^*)$ est complet par le théorème de Carathéodory 16.73, donc par minimalité du complété (16.71(7)),

$$(S,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mu})\subset(S,\mathcal{M},\mu^*)\tag{16.180}$$

[19] Par la proposition 16.41.
[20] C'est bien une tribu par 16.73(1).

au sens où $\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}$ et si $A \in \hat{\mathcal{F}}$ alors $\hat{\mu}(A) = \mu^*(A)$. Notons que cette inclusion est vraie même si la mesure n'est pas σ-finie.

Nous passons à l'inclusion inverse. Soit $A \in \mathcal{M}$, c'est-à-dire que pour tout $Y \subset S$ nous avons

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c). \tag{16.181}$$

Nous allons montrer que $A \in \hat{\mathcal{F}}$ en séparant les cas suivant que $\mu^*(A) = \infty$, ou non.

(1) **Si $\mu^*(A) < \infty$**

Par le lemme 16.76, il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset X$ et $\mu^*(A) = \mu(X)$. Comme $(S, \mathcal{F}, \mu) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*)$ nous avons alors

$$\mu^*(A) = \mu(X) = \mu^*(X). \tag{16.182}$$

Nous écrivons la relation (16.181) avec ce X en guise de Y, et en nous souvenant que $X \cap A = A$ et $X \cap A^c = X \setminus A$:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A). \tag{16.183}$$

En tenant compte de (16.182) et du fait que $\mu^*(A) < \infty$, nous pouvons simplifier et trouver $\mu^*(X \setminus A) = 0$. Le lemme 16.76 nous donne alors $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \setminus A \subset B$ et $\mu(B) = \mu^*(X \setminus A) = 0$, c'est-à-dire que $X \setminus A$ est μ-négligeable. Par conséquent $X \setminus A \in \hat{\mathcal{F}}$. En écrivant

$$A = X \setminus (X \setminus A), \tag{16.184}$$

nous avons écrit A comme différence de deux éléments de $\hat{\mathcal{F}}$ et nous concluons que $A \in \hat{\mathcal{F}}$.

(2) **Si $\mu^*(A) = \infty$**

Le lemme 16.78 nous indique que $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est σ-fini et il existe donc une suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ telle que $\bigcup_n S_n = S$ et $\mu^*(S_n) < \infty$. L'ensemble $A \cap S_n$ est un élément de $\mathcal{M}$ vérifiant

$$\mu^*(A \cap S_n) \leqslant \mu^*(S_n) < \infty, \tag{16.185}$$

ce qui implique que $A \cap S_n \in \hat{\mathcal{F}}$ par la première partie. Maintenant $A = \bigcup_n (A \cap S_n) \in \hat{\mathcal{F}}$ par union dénombrable d'éléments de la tribu $\hat{\mathcal{F}}$.

□

Proposition 16.80 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Nous considérons un mesurable $M \in \mathcal{F}$ ainsi que

- *la tribu induite $\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}$,*
- *la tribu complétée $\hat{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans Ω,*
- *la tribu complétée $\widehat{\mathcal{F}_M}$ de $\mathcal{F}_M$ dans M (où nous avons considéré la mesure restreinte[21] de μ).*
- *la tribu induite $(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ sur M.*

Alors

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}. \tag{16.186}$$

Démonstration. L'utilisation de la proposition 16.9 nous donne déjà les expressions alternatives

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} \tag{16.187}$$

et

$$\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}. \tag{16.188}$$

Pour prouver $(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}$ il faudra faire deux inclusions, et nous avons l'embarras du choix.

(1) **Première : $\widehat{\mathcal{F}_M} \subset \{M \cap A \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\}$** Un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$ est de la forme $B \cup N$ où $B \in \mathcal{F}_M$ et où N est négligeable[22] dans M. Vu que $B \in \mathcal{F}_M$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $B = A \cap M$. Vu que B et N sont dans M nous pouvons « factoriser » l'intersection :

$$B \cup N = M \cap (A \cup N) \tag{16.189}$$

avec N négligeable dans M et donc également négligeable dans Ω. Donc $A \cup N \in \hat{\mathcal{F}}$.

[21] Ce n'est pas ce qu'il se passe dans le cas de S^1 par rapport à $\mathbb{C}$, voir la proposition 20.77(3) bien que S^1 soit un borélien de $\mathbb{C}$.

[22] Pour rappel, une partie est négligeable quand elle est incluse à une partie de mesure nulle.

(2) **Deuxième : $\{M \cap A$ tel que $A \in \hat{\mathcal{F}}\} \subset \widehat{\mathcal{F}_M}$**

Soit $A \in \hat{\mathcal{F}}$. Nous avons une partie négligeable N de Ω et un élément $B \in \mathcal{F}$ tels que $A = B \cup N$. Nous avons la décomposition

$$M \cap (B \cup N) = (M \cap B) \cup (M \cap N). \tag{16.190}$$

EQooWWQEqoDRlnLN

Il s'agit maintenant de nous assurer que cette décomposition implique que $M \cap (B \cup N) \in \widehat{\mathcal{F}_M}$.

Soit $N_1 \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(N_1) = 0$ et $N \subset N_1$. Puisque $M \cap N_1 \in \mathcal{F}$ (intersections dans une tribu), nous pouvons écrire

$$M \cap N \subset M \cap N_1 \tag{16.191}$$

avec $\mu(M \cap N_1) = 0$. Cela pour dire que $M \cap N$ est négligeable dans M. La décomposition (16.190) est donc bien une union d'un élément de $\mathcal{F}_M$ avec un négligeable de M, et donc bien un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$.

□

16.81.
La principale application de la proposition 16.80 est le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)$ et M est un borélien B de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, la proposition explique que la tribu de Lebesgue sur B (complétée depuis les boréliens de la topologie induite) est donnée directement par l'intersection entre B et la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Donc sans devoir passer par la topologie induite, les boréliens et la completion :

$$\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R}^n)_M = \widehat{\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)}_M. \tag{16.192}$$

Exemple dans la proposition 20.75 qui donne une structure d'espace mesuré dans S^1 à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

16.5.2 Prolongement

Le théorème suivant est parfois nommé théorème d'extension de Carathéodory, par exemple sur Wikipédia. Le théorème de Carathéodory en étant un des ingrédients principaux, on comprend.

ThoLCQoojiFfZ

Théorème 16.82 (Prolongement de Hahn[508])**.**
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble S et μ une mesure sur $(S, \mathcal{A})$. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Alors

(1) La mesure μ se prolonge en une mesure m sur $\mathcal{F}$.

(2) Si μ est σ-finie alors le prolongement est unique et m est σ-finie.

(3) Si μ est finie, alors m l'est aussi.

Démonstration. La proposition 16.17 nous donne une mesure extérieure μ^* sur S dont la restriction à $\mathcal{A}$ est μ. Si $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables de S alors le théorème de Carathéodory 16.73 nous dit que $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est un espace mesuré.

(1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ Cette partie est une adaptation de ce qui a déjà été fait dans la preuve de la proposition 16.44. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $X \in S$; nous devons prouver la relation de la définition 16.42. Comme μ^* est une mesure extérieure nous avons automatiquement

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{16.193}$$

Il reste à prouver l'inégalité inverse. Soit une suite B_k d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X \subset \bigcup_k B_k$; nous avons alors

$$\mu^*(X \cap A) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \cap A\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k \cap A) = \sum_k \mu(B_k \cap A) \tag{16.194}$$

où nous avons utilisé la définition 16.10(3) ainsi que le lemme 16.15. De la même façon,

$$\mu^*(X \cap A^c) \leqslant \sum_k \mu(B_k \cap A^c). \tag{16.195}$$

Mettant les deux bouts ensemble, en remarquant que $B_k\cap A\in\mathcal{A}$ et donc que $\mu^*(B_k\cap A)=\mu(B_k\cap A)$,

$$\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)\leqslant\sum_k\mu(B_k\cap A)+\mu(B_k\cap A^c)=\sum_k\mu(B_k).\tag{16.196}$$

La somme $\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)$ est donc inférieure à chacun des éléments de l'ensemble sur lequel on prend l'infimum pour définir[23] $\mu^*(X)$, donc

$$\mu^*(X\cap A)+\mu^*(X\cap A^c)\leqslant\mu^*(X).\tag{16.197}$$

A fortiori nous avons $\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$ et donc $(S,\sigma(\mathcal{A}),\mu^*)$ est un espace mesuré. Cela prouve l'existence d'une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})$.

(1) **Unicité**

Nous supposons à présent que μ est σ-finie. Soient m_1 et m_2 deux mesures prolongeant μ et définies sur une tribu contenant $\mathcal{A}$. Nous posons

$$\mathcal{C}=\{A\in\mathcal{A}\text{ tel que }\mu(A)<\infty\}.\tag{16.198}$$

Dans l'optique d'utiliser le théorème d'unicité des mesures 16.36, nous prouvons que $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{C})$. Vu que μ est σ-finie, il existe une suite croissante (S_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $S=\bigcup_n S_n$ et $\mu(S_n)<\infty$. Alors si $A\in\mathcal{A}$ nous avons $A=\bigcup_n(A\cap S_n)$, et donc $A\in\sigma(\mathcal{C})$. Donc $\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{C})$. Mais étant donné que $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ nous avons aussi $\sigma(\mathcal{C})\subset\sigma(\mathcal{A})$. Au final $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{C})$.

Les mesures m_1 et m_2 sont des mesures sur $\sigma(\mathcal{C})$ coïncidant sur $\mathcal{C}$ (parce que $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$). De plus la classe $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et contient une suite croissante dont l'union est S (parce que μ est σ-finie).

Le théorème 16.36 nous dit alors que m_1 et m_2 coïncident sur $\sigma(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{A})$.

(2) **Extension finie et σ-finie**

Enfin si μ est σ-finie il existe $S_n\in\mathcal{A}$ avec $\mu(S_n)<\infty$ et $\bigcup_n S_n=S$. Ces ensembles vérifient tout autant $m(S_n)=\mu(S_n)<\infty$ pour tout prolongement m de μ.

Idem si μ est finie, tout prolongement est fini.

□

ExKCEoolsZrL

Exemple 16.83 ([508])**.**
Soit $\mathcal{A}$, l'algèbre de parties de $\mathbb{R}$ formée par les réunions finies d'intervalles de la forme $]-\infty,a[$, $[a,b[$ et $[b,+\infty[$ avec $-\infty<a\leqslant b<+\infty$. Notons que les singletons ne font pas partie de $\mathcal{A}$ parce que $[a,a[=\varnothing$. Nous posons

$$\mu(A)=\begin{cases}0&\text{si }A=\varnothing\\\infty&\text{sinon.}\end{cases}\tag{16.199}$$

Cela donne une mesure (non σ-finie) sur $(\mathbb{R},\mathcal{A})$.

Nous allons prouver que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens et que μ accepte (au moins) deux prolongements distincts à $\sigma(\mathcal{A})$.

D'abord nous avons

$$]a,b[=\big(]-\infty,a[\cup[b,+\infty[\big)\cap[a,b[,\tag{16.200}$$

donc toutes les boules ouvertes appartiennent à $\sigma(\mathcal{A})$. Ces dernières comprenant une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (par la proposition 9.207), tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{A})$. Par conséquent $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\subset(\mathbb{R}^d)$. Mais en même temps tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont des boréliens, donc $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})=\sigma(\mathcal{A})$ parce que la fermeture en tant qu'algèbre de parties est plus petite que la fermeture en tant que tribu.

La mesure de comptage prolonge μ parce qu'à part l'ensemble vide, tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont infinis. Notons que les singletons sont dans $\sigma(\mathcal{A})$, donc la mesure de comptage prend d'autres valeurs que 0 et $+\infty$.

Par ailleurs la mesure

$$\mu'(A)=\begin{cases}0&\text{si }A=\varnothing\\+\infty&\text{sinon}\end{cases}\tag{16.201}$$

est également une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$.

La mesure de comptage et μ' sont deux prolongements distincts de μ. △

[23] Définition 16.20.

Exemple 16.84 ([508]).
Nous montrons maintenant une mesure non σ-finie qui se prolonge en deux mesures distinctes, toutes deux σ-finies.

Nous considérons la même algèbre $\mathcal{A}$ de parties que celle donnée dans l'exemple 16.83, mais cette fois vue sur $\mathbb{Q}$ uniquement. La mesure de comptage m sur $(\mathbb{Q},\mathcal{A})$ n'est pas σ-finie.

Puisque les singletons sont des boréliens, nous avons $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, ce qui fait que $(\mathbb{Q},\sigma(\mathcal{A}),m)$ est un prolongement σ-fini de m. L'espace mesuré $(\mathbb{Q},\sigma(\mathcal{A}),2m)$ est également σ-fini et est un prolongement distinct de $(\mathbb{Q},\mathcal{A},m)$. △

PROPooORDCooJEsjzR

Proposition 16.85.
Soient des espaces mesurés $(S_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ et $(S_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$ ainsi qu'une application $\varphi\colon S_1\to S_2$ avec les hypothèses suivantes :

(1) φ est une bijection,

(2) φ est mesurable d'inverse mesurable,

(3) si $\mu_1(A)=0$ alors $\mu_2\big(\varphi(A)\big)=0$,

(4) si $\mu_2(A)=0$ alors $\mu_1\big(\varphi^{-1}(A)\big)=0$.

Alors

$$\hat{\mathcal{F}}_2=\varphi(\hat{\mathcal{F}}_1). \tag{16.202}$$

Démonstration. Nous prouvons que $\hat{\mathcal{F}}_2\subset\varphi(\hat{\mathcal{F}}_1)$. Vu la symétrie des hypothèses, l'inclusion inverse se fera de même.

Soit $A\in\hat{\mathcal{F}}_2$. Nous avons $A=B\cup N$ avec $B\in\mathcal{F}_2$ et N, une partie μ_2-négligeable. Nous considérons $N_1\in\mathcal{F}_2$ tel que $\mu_2(N_1)=0$ et $N\subset N_1$. Notre but est maintenant de prouver que $\varphi^{-1}(B\cup N)\in\hat{\mathcal{F}}_1$.

Comme φ est une bijection, nous avons

$$\varphi^{-1}(B\cup N)=\varphi^{-1}(B)\cup\varphi^{-1}(N). \tag{16.203}$$

Là-dedans, $\varphi^{-1}(B)\in\mathcal{F}_1$ parce que φ est borélienne. Il nous reste à voir que $\varphi^{-1}(N)$ est μ_1-négligeable. Puisque $N\subset N_1$, nous avons $\varphi^{-1}(N)\subset\varphi^{-1}(N_1)$ où $\varphi^{-1}(N_1)\in\mathcal{F}_1$.

Par construction, $\mu_2(N_1)=0$ et par hypothèse, $\mu_1\big(\varphi^{-1}(N_1)\big)=0$.

Au total,

$$\varphi^{-1}(B\cup N)=\underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\in\mathcal{F}_1}\cup\underbrace{\varphi^{-1}(N)}_{\mu_1\text{-négligeable}}\in\hat{\mathcal{F}}_1. \tag{16.204}$$

□

16.5.3 Mesure image

Le produit d'une mesure par une fonction est défini par la propriété 16.214.

PropJCJQooAdqrGA

Proposition-Définition 16.86 (Mesure image[505]).
Soient $(S_1,\mathcal{F}_1)$ et $(S_2,\mathcal{F}_2)$ des espaces mesurables. Soit $\varphi\colon S_1\to S_2$ une application mesurable. Si m_1 est une mesure positive sur S_1 alors l'application définie par

$$m_2(A_2)=m_1\big(\varphi^{-1}(A_2)\big) \tag{16.205}$$

est une mesure positive sur $(S_2,\mathcal{F}_2)$.

*La mesure m_2 ainsi définie est la **mesure image** de m_1 par l'application φ. Elle est notée $\varphi(m_1)$.*

Démonstration. Il y a deux choses à vérifier pour avoir une mesure positive[24]. D'abord pour l'ensemble vide :

$$m_2(\varnothing)=m_1\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big)=m_1(\varnothing)=0. \tag{16.206}$$

[24] Définition 16.18

Ensuite pour l'additivité. Soient A_n dans $\mathcal{F}_2$ des parties deux à deux disjointes et telles que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_2$. Alors nous avons

$$m_2\big(\bigcup_n A_n\big) = m_1\Big(\varphi^{-1}\big(\bigcup_n A_n\big)\Big) \tag{16.207a}$$
$$= m_1\big(\bigcup_n \varphi^{-1}(A_n)\big) \tag{16.207b}$$
$$= \sum_n m_1\big(\varphi(A_n)\big) \tag{16.207c}$$
$$= \sum_n m_2(A_n). \tag{16.207d}$$

□

Lemme 16.87.
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi que deux mesures μ et ν sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$. Si $\varphi\colon S_1 \to S_2$ est mesurable et si $\mu \leqslant \nu$ alors $\varphi(\mu) \leqslant \varphi(\nu)$.

Démonstration. Soit B mesurable dans $(S_2, \mathcal{F}_2)$ (c'est-à-dire $B \in \mathcal{F}_2$). Alors

$$\varphi(\mu)(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \leqslant \nu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \varphi(\nu)(B). \tag{16.208}$$

□

Il est naturel de se demander comment il faut intégrer par rapport à une mesure image. La réponse sera dans le théorème 16.221.

16.5.4 Régularité d'une mesure

Certaines mesures ont de la compatibilité avec la topologie. Nous allons étudier ça.

LEMooCGKXooYWjRwk

Lemme 16.88 ([519]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens[25] $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure finie μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soit un borélien A de Ω et $\epsilon > 0$.

Il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que

(1) $F \subset A \subset V$

(2) $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.

Démonstration. Soit la famille $\mathcal{D}$ des parties D de Ω qui vérifient la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que $F \subset D \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.

Nous allons prouver que $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient tous les ouverts.

(1) **$\mathcal{D}$ contient les ouverts** Soit un ouvert D. Nous posons

$$F_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } d(x, D^c) \geqslant 2^{-n}\}. \tag{16.209}$$

(1a) **F_n est fermé**
Le lemme 9.220 montre que le complémentaire F_n^c est ouvert. Donc F_n est fermé.

(1b) $D \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ Si $x \in D$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset D$ (parce que D est ouvert). Donc $d(x, V^c) \geqslant \delta$. Donc $x \in F_n$ pour $2^{-n} < \delta$.

(1c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset D$ Si $x \in F_n$, nous avons $d(x, D^c) > 0$, c'est-à-dire que x n'est pas dans D^c. Autrement dit, $x \in D$.

(1d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = D$ Nous avons donc l'égalité

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n. \tag{16.210}$$

[25] Définition 16.52.

Vu que $F_n \subset F_{n+1}$, le lemme 16.24(1) nous indique que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\Big) = \mu(D). \tag{16.211}$$

Étant donné que la mesure est finie, nous pouvons écrire cela sous la forme

$$\mu(D) - \mu(F_n) \to 0. \tag{16.212}$$

Pour chaque n nous avons l'encadrement

$$F_n \subset D \subset D \tag{16.213}$$

où F_n et D sont ouverts. Lorsque ϵ est donné, il suffit de prendre n assez grand pour avoir $\mu(D\backslash F_n) < \epsilon$ pour avoir un encadrement de D par un fermé et un ouvert (D lui-même) dont la différence des mesures est plus petite que ϵ.

Tout cela pour dire que $D \in \mathcal{D}$.

(2) **$\mathcal{D}$ est une tribu** Il faut vérifier les trois points de la définition 16.1.

(2a) $\Omega \in \mathcal{D}$ Nous venons de voir que les ouverts sont dans $\mathcal{D}$. Or Ω est un ouvert.

(2b) $D \in \mathcal{D}$ **implique** $D^c \in \mathcal{D}$ Soit F fermé et V ouvert tels que $F \subset D \subset V$. Nous avons aussi

$$V^c \subset D^c \subset F^c \tag{16.214}$$

où V^c est fermé et F^c est ouvert. De plus $F^c \setminus V^c = V \setminus F$ et donc

$$\mu(F^c \setminus V^c) = \mu(V \setminus F). \tag{16.215}$$

Nous pouvons donc choisir F et V pour avoir $\mu(F^c \setminus V^c) < \epsilon$.

(2c) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \in \mathcal{D}$ Soient $D_i \in \mathcal{D}$. Pour chaque n nous posons

$$F_n \subset D_n \subset V_n \tag{16.216}$$

en choisissant V_n et F_n de telle sorte que $\mu(V_n \setminus F_n) < 2^{-n}\epsilon$.

Nous posons

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n, \tag{16.217}$$

et

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{16.218}$$

Chacun des Y_N est fermé en tant qu'union finie de fermés (lemme 9.6(2)). Mais Y ne l'est pas spécialement[26]. Le lemme 16.24 nous dit cependant que $\mu(Y) = \lim_{N\to\infty} \mu(Y_N)$.

Nous posons

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \tag{16.219}$$

ainsi que

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n. \tag{16.220}$$

La partie V est ouverte dans Ω comme union d'ouverts (c'est dans le définition d'une topologie). Nous avons, pour tout N, l'encadrement

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n \subset Y \subset D \subset V. \tag{16.221}$$

EQooOALEqoLAHpVi

Nous prouvons à présent que $\lim_{N\to\infty} \mu(V \setminus Y_N) = 0$, de telle sorte que l'encadrement (16.221) dise que $D \in \mathcal{D}$.

[26] Par exemple $A_n = [1/n, 2]$ sont des fermés dont l'union est $]0, 2]$ qui n'est pas fermé.

D'abord nous avons

$$V \setminus Y \subset \bigcup_n (V_n \setminus F_n) \tag{16.222}$$

parce que si $x \in V \setminus Y$, alors $x \in V_i$ pour un certain i, mais vu que x n'est pas dans Y, il n'est dans aucun des F_n donc en particulier pas dans F_i et $x \in V_n \setminus F_i$.
Un peu de calcul :

$$\begin{aligned}
\mu(V) - \mu(Y) &= \mu(V \setminus Y) && \text{(16.223a)}\\
&\leqslant \mu\Big(\bigcup_n (V_n \setminus F_n)\Big) && \text{(16.223b)}\\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n \setminus F_n) && \text{(16.223c)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\epsilon && \text{(16.223d)}\\
&= 2\epsilon. && \text{(16.223e)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (16.223a), c'est le lemme 16.23.
- Pour (16.223b), c'est (16.222).
- Pour (16.223c), c'est le lemme 16.23(4).
- Pour (16.223e), c'est la série géométrique (12.517).

Nous choisissons maintenant N assez grand pour que $\mu(Y) - \mu(Y_N) < \epsilon$. Nous avons alors l'encadrement

$$Y_N \subset Y \subset D \subset V \tag{16.224}$$

avec

$$\mu(V \setminus Y_N) = \mu(V) - \mu(Y_N) = \underbrace{\mu(V) - \mu(Y)}_{\leqslant 2\epsilon} + \mu(Y) - \mu(Y_N) \leqslant 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon. \tag{16.225}$$

Nous avons donc montré que $\mathcal{D}$ était une tribu contenant les ouverts. Donc $\mathcal{D}$ contient tous les boréliens. □

Lemme 16.89 ([519]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soient un ouvert $W \subset \Omega$ tel que $\mu(W) < \infty$ et un borélien A tel que $A \subset W$. Soit aussi $\epsilon > 0$.

Il existe un fermé F et un ouvert V tels que

(1) $\mu(V) < \infty$,

(2) $\mu(V \setminus F) < \epsilon$,

(3) et $F \subset A \subset V$.

Démonstration. Vu que la mesure de W est finie, nous considérons la mesure finie

$$\begin{aligned}
\nu\colon \mathcal{B}\text{or}(\Omega) &\to [0, \mu(W)]\\
B &\mapsto \mu(B \cap W).
\end{aligned} \tag{16.226}$$

La partie A étant borélienne ; par le lemme 16.88, nous avons un fermé F et un ouvert V_1 ouvert tels que

$$F \subset A \subset V_1 \tag{16.227}$$

et $\nu(V_1 \setminus F) < \epsilon$. Nous posons $V = V_1 \cap W$; vu que $A \subset W$ et $A \subset V_1$ nous avons aussi $A \subset V_1 \cap W$ et donc l'encadrement

$$F \subset A \subset V \subset W. \tag{16.228}$$

En ce qui concerne la mesure :

$$\mu(V \setminus F) = \mu(V) - \mu(F) = \mu(V \cap W) - \mu(F \cap W) = \nu(B) - \nu(F) < \epsilon. \tag{16.229}$$

□

ThoPKGEooVrpsGU

Théorème 16.90 ([505]).
Soit X un espace métrique et m une mesure positive bornée sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$. Alors si B est un borélien,

(1) Régularité extérieure : $m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{où } \Omega \text{ est un ouvert contenant } B\}$

(2) Régularité intérieure : $m(B) = \sup\{m(F) \text{où } F \text{ est un fermé, } F \subset B\}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des $B \in \mathcal{B}or(X)$ tels que pour tout $\epsilon > 0$, il existe Ω_ϵ ouvert et F_ϵ fermé tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Nous allons montrer que $\mathcal{F}$

- est une tribu
- contient les ouverts
- est inclus dans la tribu borélienne (ça c'est dans la définition de $\mathcal{F}$).

De ces trois points nous déduirons que $\mathcal{F} = \mathcal{B}or(X)$.

(1) **$\mathcal{F}$ contient les ouverts** Soit Ω un ouvert de X. Alors Ω^c est fermé et $d(x, \Omega^c) = 0$ si et seulement si $x \in \Omega^c$ par la proposition 9.373. Nous pouvons donc écrire

$$\Omega^c = \bigcap_{n \geqslant 1} \{x \in X \text{ tel que } d(x, \Omega^c) < \frac{1}{n}\}. \tag{16.230}$$

En passant au complémentaire et en posant $F_n = \{x \in X \text{ tel que } d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{n}\}$ nous avons

$$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} F_n. \tag{16.231}$$

Chacun des F_n est fermé parce que F_n est l'image réciproque du fermé $[\frac{1}{n}, \infty[$ par l'application $x \mapsto d(x, \Omega^c)$ qui est continue. De plus les F_n forment une suite croissante, donc le lemme 16.24 nous assure que $m(\Omega) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)$. Et le lemme 16.23 que $m(\Omega \setminus F_n) = m(\Omega) - m(F_n)$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $n_\epsilon \geqslant 1$ tel que

$$m(\Omega \setminus F_n) = m(\Omega) - m(F_n) \leqslant \epsilon. \tag{16.232}$$

Bref si Ω est ouvert nous considérons $\Omega_\epsilon = \Omega$ et $F_\epsilon = F_{n_\epsilon}$ et nous avons

$$F_\epsilon \subset \Omega \subset \Omega_\epsilon \tag{16.233}$$

avec $m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ contient les ouverts.

(2) **$\mathcal{F}$ est une tribu** Il y a à vérifier les trois conditions de la définition 16.1.

(2a) **Les ensembles faciles** Les ensembles X et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$ parce qu'ils sont ouverts et fermés.

(2b) **Complémentaire** Soit $B \in \mathcal{F}$, soit $\epsilon > 0$ et les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ qui vont avec. Alors en passant au complémentaire nous avons

$$\Omega_\epsilon^c \subset B^c \subset F_\epsilon^c \tag{16.234}$$

De plus

$$F_\epsilon^c \setminus \Omega_\epsilon^c = F_\epsilon^c \cap (\Omega_\epsilon^c)^c = F_\epsilon^c \cap \Omega_\epsilon = \Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon. \tag{16.235}$$

Par conséquent

$$m(F_\epsilon^c \setminus \Omega_\epsilon^c) = m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon. \tag{16.236}$$

Cela montre que $B^c \in \mathcal{F}$.

(2c) **Union dénombrable** Soient (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ et $\epsilon > 0$. Pour chaque n, le lemme 16.88 nous permet de choisir un ouvert Ω_n et un fermé F_n tels que $F_n \subset B_n \subset \Omega_n$ et

$$m(\Omega_n \setminus F_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{16.237}$$

Puisque $\Omega_n \setminus B_n \subset \Omega_n \setminus F_n$ nous avons aussi

$$m(\Omega_n \setminus B_n) \leqslant m(\Omega_n \setminus F_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{16.238}$$

Nous posons $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1}\Omega_n$ (un ouvert) et $B = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ ainsi que $A = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ (qui n'est pas spécialement fermé).

Le but est de majorer $m(\Omega \setminus F)$ où F est un fermé qui est encore à déterminer. Calculons déjà ceci :

$$\begin{aligned}
\Omega \setminus B &= \bigcup_n \Omega_n \cap \big(\bigcup_k B_k\big)^c && (16.239a)\\
&= \Big(\bigcup_n \Omega_n\Big) \cap \Big(\bigcap_k B_k^c\Big) && (16.239b)\\
&= \bigcup_n \Big(\Omega_n \cap \big(\bigcap_k B_k^c\big)\Big) && (16.239c)\\
&\subset \bigcup_n \big(\Omega_n \cap B_n^c\big) && (16.239d)\\
&= \bigcup_n (\Omega_n \setminus B_n). && (16.239e)
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (16.239c). Pour toute suite d'ensembles on a $(\bigcup_k A_k)^x = \bigcap_k A_k^c$.
- Pour (16.239d). Si $x \in \Omega_n \cap (\bigcap_k B_k^c)$ pour un certain n, alors en particulier $x \in \bigcap_k B_k^c$ et $x \in B_n^c$. Donc $x \in \Omega_n \cap B_n^c$.
- Pour (16.239e), notez que l'union n'est pas spécialement disjointe.

Par conséquent,

$$m(\Omega \setminus B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n \setminus B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} = \frac{\epsilon}{4}. \tag{16.240}$$

De la même façon nous avons

$$B \setminus A = \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_n\big)^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus F_n. \tag{16.241}$$

Nous avons alors le inégalités de mesures

$$\begin{aligned}
m(B \setminus A) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n \setminus F_n) && (16.242a)\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n \setminus F_n) && (16.242b)\\
&\leqslant \frac{\epsilon}{4}. && (16.242c)
\end{aligned}$$

C'est vraiment dommage que A ne soit pas en général un fermé, sinon il répondrait à la question. Nous posons $F_1' = F_1$ et $F_n' = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. En tant qu'unions finies de fermés, les F_n' sont des fermés (lemme 9.6(2)). De plus la suite (F_n') est croissante et l'union est A. Par le lemme 16.24(1) nous avons

$$m(A) = m\big(\bigcup_n F_n'\big) = \lim_{n\to\infty} m(F_n'). \tag{16.243}$$

Il existe donc n_ϵ tel que

$$m(A) - m(F_{n_\epsilon}') \leqslant \epsilon \tag{16.244}$$

Nous posons $F = F_{n_\epsilon}'$. Comme $F \subset A$ nous avons aussi $m(A \setminus F) = m(A) - m(F) \leqslant \epsilon$. Et en plus $F \subset A \subset B \subset \Omega$, ce qui donne bien la propriété voulue $F \subset B \subset \Omega$. Il reste à nous assurer de $m(\Omega \setminus F)$. Nous avons d'abord

$$m(B \setminus F) = m\big((B \setminus A) \cup (A \setminus F)\big) = m(B \setminus A) + m(A \setminus F) \leqslant \frac{5\epsilon}{4}. \tag{16.245}$$

Et enfin :

$$m(\Omega \setminus F) = m\big((\Omega \setminus B) \cup (B \setminus F)\big) = m(\Omega \setminus B) + m(B \setminus F) \leqslant \frac{6\epsilon}{4}. \tag{16.246}$$

Et donc à redéfinition près de ϵ, c'est d'accord.

Il est donc établi que $\mathcal{F}$ est une tribu. Qui plus est, l'ensemble $\mathcal{F}$ est une tribu incluse aux boréliens et contenant les ouverts. Ergo $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(X)$.

(3) **Régularité extérieure** Soit B un borélien et $\epsilon > 0$. Alors il existe F_ϵ fermé et Ω_ϵ ouvert tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Vu que $B \subset \Omega_\epsilon$ pour tout ϵ, nous avons aussi

$$m(B) \leqslant \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon). \tag{16.247}$$

Mais comme $m(\Omega_\epsilon) \geqslant m(B)$ pour tout ϵ, nous avons en réalité $m(B) = \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon)$.

Soit maintenant un ouvert Ω tel que $B \subset \Omega$. Nous devons prouver l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que $m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(\Omega)$. Cela permettra de conclure que l'infimum sur tous les ouverts contenant B est égal à l'infimum sur les ouverts de la forme Ω_ϵ.

Nous posons $m(\Omega) = m(B) + \delta$ et avec $\epsilon \leqslant \delta$ nous avons

$$m(\Omega_\epsilon \setminus B) \leqslant m(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon \tag{16.248}$$

et donc aussi

$$m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(B) + \epsilon \leqslant m(B) + \delta = m(\Omega). \tag{16.249}$$

(4) **Régularité intérieure** Elle se fait de même.

□

DefFMTEooMjbWKK

Définition 16.91.
Soit X un espace topologique et m une mesure positive sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$.

ItemTTPTooStDcpw

*(1) m est une **mesure de Borel** si elle est finie sur tout compact.*

*(2) m est **régulière extérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ est ouvert et } B \subset \Omega\} \tag{16.250}$$

*(3) m est **régulière intérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \sup\{m(K) \text{ tel que } K \text{ est compact et } K \subset B\} \tag{16.251}$$

*(4) m est une mesure **régulière** si elle est régulière dans les deux sens.*

*(5) m est une **mesure de Radon** si elle est de Borel et régulière.*

PropNCASooBnbFrc

Proposition 16.92.
Soit X un espace localement compact[27] et σ-compact[28] Alors toute mesure de Borel sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$ est de Radon.

Démonstration. Nous avons une suite exhaustive[29] de compacts X_k tels que

$$X = \bigcup_{k\geqslant 1} X_k = \bigcup_{k\geqslant 1} \text{Int}(X_k). \tag{16.252}$$

(1) **Régularité intérieure** Soit B, un borélien de X ; nous avons $B = \bigcup_{k\geqslant 1}(B \cap X_k)$ et comme cette union est croissante,

$$m(B) = \lim_{k\to\infty} m(B \cap X_k) \tag{16.253}$$

par le lemme 16.24(1). Dans la suite, il va y avoir beaucoup de considérations sur les topologies induites. Nous nommons τ_k la topologie de X_k induite depuis celle de X. Il ne faudra pas confondre les expressions « un compact *de* X_k » et « un compact *dans* X_k ». La première parle d'un compact pour la topologie τ_k. La seconde parle d'un compact pour la topologie de X, inclus dans X_k.

Si $a < m(B)$ alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $a < m(B \cap X_k)$, c'est-à-dire

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(B). \tag{16.254}$$

[27] Définition 9.198.
[28] Définition 9.131.
[29] Définition 9.379.

Mais (X_k, m) est un espace mesuré borné parce que m est de Borel et X_k est compact. Par conséquent la (restriction de la) mesure m est régulière sur l'espace mesuré $\big(X_k, \mathcal{B}\text{or}(X_k)\big)$ par le théorème 16.90. De plus l'ensemble $B \cap X_k$ est un borélien de (X_k, τ_k) parce que

$$B \cap X_k \in \mathcal{B}\text{or}(X)_{X_k} = \mathcal{B}\text{or}(X_k) \tag{16.255}$$

où nous avons utilisé la propriété de compatibilité entre topologie induite et tribu des boréliens du théorème 16.59. Il existe donc un fermé F_ϵ de (X_k, τ_k) tel que

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \cap X_k & \text{(16.256a)} \\ m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon. & \text{(16.256b)} \end{cases}$$

En mettant bout à bout les inégalités nous avons trouvé

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon. \tag{16.257}$$ EQooXRESooGsGIEQ

L'ensemble F_ϵ est un compact de (X, τ_X). En effet X_k étant fermé de (X, τ_X), le lemme 9.31 nous dit que F_ϵ est un fermé de (X, τ_X). Mais X_k étant compact, F_ϵ est un fermé inclus dans un compact, il est donc compact (lemme 9.137).

Enfin nous prouvons la régularité intérieure de la mesure m, c'est-à-dire que

$$m(B) = \sup\{m(K) \text{ tel que } K \text{ est compact dans } B\} \tag{16.258}$$

en vérifiant les deux conditions de la définition 4.85. D'abord $m(B) \geqslant \{m(K) \text{ tel que } \ldots\}$ parce que $m(B) \geqslant m(K)$ pour tout $K \subset B$. Ensuite prenons $\epsilon > 0$, et considérons l'inégalité (16.257) avec $a = m(B) - \epsilon$. Alors nous avons

$$m(B) - 2\epsilon < m(F_\epsilon). \tag{16.259}$$

Cela prouve que $m(B) - 2\epsilon$ n'est pas un majorant de $\{m(K) \text{ tel que } \ldots\}$.

(2) **Régularité extérieure**

Soit un borélien B de X. Si $m(B) = \infty$ alors tous les ouverts contenant B ont mesure infinie et $m(B)$ en est évidemment l'infimum. Nous supposons donc que $m(B) < \infty$.

Nous notons τ_k la topologie induite de X sur $\text{Int}(X_k)$. Nous posons $B_k = B \cap \text{Int}(X_k)$. L'espace $\big(\text{Int}(X_k), m\big)$ est un espace mesuré borné et $B_k \in \mathcal{B}\text{or}\Big(\text{Int}(X_k)\Big)$. Il existe donc un ouvert Ω_k de $\big(\text{Int}(X_k), \tau_k\big)$ tel que $B_k \subset \Omega_k$ et

$$m(\Omega_k \setminus B_k) \leqslant \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{16.260}$$

De plus $\text{Int}(X_k)$ est un ouvert de (X, τ_X), donc en réalité Ω_k est un ouvert de X. Nous posons

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \tag{16.261}$$

qui est encore un ouvert de (X, τ_X).

Il est temps de voir que Ω vérifie $m(\Omega \setminus B) \leqslant \epsilon$. Pour cela,

$$\begin{aligned} \Omega \setminus B &= \big(\bigcup_k \Omega_k\big) \cap \big(\bigcup_l B_l\big)^c & \text{(16.262a)} \\ &= \big(\bigcup_k \Omega_k\big) \cap \big(\bigcap B_l^c\big) & \text{(16.262b)} \\ &= \subset \bigcup_k (\Omega_k \cap B_k^c) & \text{(16.262c)} \\ &= \bigcup_k (\Omega_k \setminus B_k), & \text{(16.262d)} \end{aligned}$$

ce qui donne au niveau des mesures :

$$m(\Omega \setminus B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Omega_k \setminus B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon. \tag{16.263}$$

□ RemooOAGCooRHpjxd

Remarque 16.93.
Exprimé sur $\mathbb{R}^N$, la proposition 16.92 s'exprime en disant que toute mesure de Borel sur $\mathbb{R}^N$ est régulière. Typiquement, l'espace X dont il est question est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

16.5.5 Théorème de récurrence

Soient X un espace mesurable, μ une mesure finie sur X et $\phi\colon X \to X$ une application mesurable[30] préservant la mesure, c'est-à-dire que pour tout ensemble mesurable $A \subset X$,

$$\mu\big(\phi^{-1}(A)\big) = \mu(A). \tag{16.264}$$

Si $A \subset X$ est un ensemble mesurable, un point $x \in A$ est dit **récurrent** par rapport à A si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant p$ tel que $\phi^k(x) \in A$.

ThoYnLNEL

Théorème 16.94 (Théorème de récurrence de Poincaré.)**.**
Si A est mesurable dans X, alors presque tous les points de A sont récurrents par rapport à A.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$ et l'ensemble

$$U_p = \bigcup_{k=p}^{\infty} \phi^{-k}(A) \tag{16.265}$$

des points qui repasseront encore dans A après p itérations de ϕ. C'est un ensemble mesurable en tant que union d'ensembles mesurables (pour rappel, les tribus sont stables par union dénombrable, comme demandé à la définition 16.1), et nous avons donc

$$\mu(U_p) \leqslant \mu(X) < \infty. \tag{16.266}$$

De plus $U_p = \phi^{-p}(U_0)$, donc $\mu(U_p) = \mu(U_0)$. Vu que $U_p \subset U_0$, nous avons

$$\mu(U_0 \setminus U_p) = 0. \tag{16.267}$$

Étant donné que $A \subset U_0$ nous avons a fortiori que

$$\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} \subset U_0 \setminus U_p, \tag{16.268}$$

et donc

$$\mu\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} = 0. \tag{16.269}$$

Cela signifie exactement que l'ensemble des points x de A tels que aucun des $\phi^k(x)$ avec $k \geqslant p$ n'est dans A est de mesure nulle. □

16.6 Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles

Nous allons parler de la mesurabilité de fonctions

$$f\colon (S, \mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{16.270}$$

où $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

normooGAAJooUPCbzG

16.95.
Nous convenons que $0 \times \pm\infty = 0$ parce que nous voulons qu'une droite (qui est un rectangle dont une mesure est 0 et l'autre ∞) soit de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.

Les produits et sommes $\pm\infty \pm \pm\infty$ et $\pm\infty \times \pm\infty$ sont ceux que l'on croit. Sauf bien entendu $+\infty - \infty$ et $1/0$ qui ne sont toujours pas définis.

LEMooBLOLooAdNViv

Lemme 16.96.
L'ensemble B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe un borélien B_0 de $\mathbb{R}$ tel que B soit B_0 ou $B_0 \cup \{+\infty\}$ ou $B_0 \cup \{-\infty\}$ ou $B_0 \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Démonstration. Comme la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$, la tribu induite l'est aussi par le théorème 16.58. Donc si B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble $B \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. □

LemooCRVJooQosHPq

Lemme 16.97 ([505])**.**
Si $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des intervalles du type

$$]\alpha, \beta[, \quad [-\infty, \beta[, \quad]\alpha, +\infty] \tag{16.271}$$

avec $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ alors $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})$.

[30] Définition 16.46.

Démonstration. Les intervalles $]\alpha,\beta[$ engendrent la topologie de $\mathbb{R}$[31], donc $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$. De plus le lemme 16.3 nous autorise à dire que

$$\bigcap_{n\geqslant 1} [n,+\infty] = \{+\infty\} \in \sigma(\mathcal{S}_0). \tag{16.272}$$

Par conséquent tous les ensembles énumérés dans le lemme 16.96 font partie de $\sigma(\mathcal{S}_0)$. Cela implique que $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$.

Pour l'inclusion inverse, $\sigma(\mathcal{S}_0)$ est engendré par des parties qui font partie de $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$, donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$. □

16.6.1 Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable

THOooWHFLooKYGsOm

Théorème 16.98.
Soient un espace mesurable $(S,\mathcal{F})$ et une fonction $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooHAMHooYLqUhVi

(1) La fonction f est mesurable.

ITEMooHAMHooYLqUhVii

(2) L'ensemble $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

ITEMooHAMHooYLqUhViii

(3) L'ensemble $\{f \leqslant a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

Démonstration. Plusieurs implications à prouver.

(1) **(1)⇒(2)** Puisque f est mesurable et que $[-\infty,a[\in \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$, nous avons $f^{-1}\big([-\infty,a[\big) \in \mathcal{F}$.

(2) **(2)⇒(1)** Nous posons $\mathcal{A} = \{[-\infty,a[\text{ tel que } a \in \mathbb{R}\}$.
Nous avons $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_0$ (le $\mathcal{S}_0$ du lemme 16.97). Et de plus,

$$]\alpha,\beta[= [-\infty,\beta[\setminus [-\infty,\alpha] = [-\infty,\beta[\setminus \bigcap_{n\geqslant 1} [-\infty,\alpha+\frac{1}{n}[. \tag{16.273}$$

Donc $]\alpha,\beta[\in \sigma(\mathcal{A})$.
Et aussi :

$$]\alpha,+\infty] = \bar{\mathbb{R}} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\infty,\alpha+\frac{1}{n}[, \tag{16.274}$$

ce qui donne $]\alpha,+\infty] \in \sigma(\mathcal{A})$.
Au final, $\mathcal{S}_0 \subset \sigma(\mathcal{A})$ et donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Le lemme 16.97 nous dit que $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$. Nous avons donc bien $\sigma(\mathcal{S}_0) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$.
Par ailleurs, nous savons que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$ parce que les éléments de $\mathcal{A}$ sont de la forme $\{f < a\}$. Cela donne $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}$. Mais $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big)$ peut aussi s'exprimer par le lemme de transport 16.50 : $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big)$. En combinant les deux,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}, \tag{16.275}$$

et en remplaçant $\sigma(\mathcal{A})$ par $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$ nous avons ce que nous voulions :

$$f^{-1}\big(\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \in \mathcal{F}, \tag{16.276}$$

ce qui signifie que f est mesurable.

(3) **(3)⇒(2)** Nous avons

$$\{f < a\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{f \leqslant a - \frac{1}{n}\}. \tag{16.277}$$

donc ceci est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Et $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$.

(4) **(1)⇒(3)** Nous avons

$$\{f \leqslant a\} = \{f < a\} \cup f^{-1}\big([-\infty,a]\big). \tag{16.278}$$

Le premier ensemble est dans $\mathcal{F}$ par (2). Ensuite $[-\infty,a]$ est un fermé de $\bar{\mathbb{R}}$ et donc un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$. Son image réciproque est donc un élément de $\mathcal{F}$ parce que f est mesurable. Au final nous avons bien $\{f \leqslant a\} \in \mathcal{F}$.

[31] Parce toutes les boules sont des intervalles de ce type et que les boules forment une base de topologie, proposition 9.207.

□

LemFOlheqw

Lemme 16.99 ([520]).
Une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(I)$ est mesurable pour tout I de la forme $]a,\infty[$.

Démonstration. Nous devons prouver que $f^{-1}(A)$ est mesurable dans X pour tout borélien A de $\mathbb{R}$. Nous posons

$$S = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tel que } f^{-1}(A) \text{ est mesurable dans } X\} \tag{16.279}$$

et nous prouvons que c'est une tribu. D'abord $f^{-1}(\mathbb{R}) = X$, et X est mesurable, donc $\mathbb{R} \in S$. Ensuite si $A \in S$ alors $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$. En tant que complémentaire d'un mesurable de X, l'ensemble $f^{-1}(A)^c$ est mesurable dans X. Et enfin si $A_n \in S$ alors $f^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f^{-1}(A_n)$ qui est encore mesurable dans X en tant qu'union de mesurables.

Donc S est une tribu qui contient tous les ensembles de la forme $]a,\infty]$. Le lemme 16.54 conclut que S contient tous les boréliens de $\mathbb{R}$. □

LEMooMYUFooKqdDNc

Lemme 16.100.
Soit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$. Les parties $\{x \geqslant \lambda\}$, $\{x > \lambda\}$, $\{x \leqslant \lambda\}$ et $\{x < \lambda\}$ sont des boréliens de $\bar{\mathbb{R}}$.

LEMooAITEooMjHxvh

Lemme 16.101.
Soit une application mesurable $f\colon (\Omega,\mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \mathcal{B}or\big)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; nous définissons

$$\begin{aligned} f_\lambda\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \min\big(f(\omega),\lambda\big). \end{aligned} \tag{16.280}$$

Alors f_λ est mesurable

Démonstration. Soit A mesurable (i.e. borélien) dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous devons montrer que $f_\lambda^{-1}(A)$ est mesurable. Pour cela nous écrivons

$$A = \Big(A \cap \{x > \lambda\}\Big) \cup \Big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\Big). \tag{16.281}$$

Par définition f_λ ne prend jamais de valeurs plus grandes que λ, donc $f_\lambda^{-1}\big(A \cap \{x > \lambda\}\big) = \varnothing$. D'autre part, $f_\lambda^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big) = f^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big)$.

Étant donné que A et $\{x \leqslant \lambda\}$ sont boréliens[32], l'intersection $A \cap \{x \leqslant \lambda\}$ est borélienne, et donc

$$f_\lambda^{-1}(A) = f^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big) \in \mathcal{A}. \tag{16.282}$$

□

LemIGKvbNR

Lemme 16.102 ([520]).
Soit $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables[33]. Alors $\sup_n f_n$ est mesurable.

Démonstration. Nous avons

$$(\sup f_n)^{-1}\big(]a,\infty]\big) = \{x \in X \text{ tel que } (\sup f_n)(x) > a\} \tag{16.283a}$$

$$= \bigcup_n \{x \in X \text{ tel que } f_n(x) > a\} \tag{16.283b}$$

$$= \bigcup_n f_n^{-1}\big(]a,\infty]\big). \tag{16.283c}$$

Étant donné que f_n est mesurable et que $]a,\infty]$ est mesurable, chacun des $f_n^{-1}\big(]a,\infty]\big)$ est mesurable dans X. L'ensemble $(\sup f_n)^{-1}\big(]a,\infty]\big)$ est donc une union dénombrable de parties mesurables. Il est donc mesurable.

Le lemme 16.99 conclut que $\sup f_n$ est mesurable. □

PropFYPEOIJ

Proposition 16.103.
Si $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions mesurables et positives, alors la fonction[34] $\sum_n f_n$ est mesurable.

[32] Lemme 16.100.
[33] Ici X est un espace mesuré et $\mathbb{R}$ est muni des boréliens.
[34] Définition 14.404 pour la série de fonctions.

Démonstration. Nous considérons les fonctions $s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$ qui valent éventuellement ∞ en certains points. Nous avons

$$\sum_n f_n(x) = \sup_k s_k(x), \tag{16.284}$$

donc le lemme 16.102 nous donne la mesurabilité de la somme de f_n. □

ooUDHFooJjKscR

Définition 16.104.
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une ***partition mesurable dénombrable*** *de S est une suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de parties de S telles que*

(1) $S_n \in \mathcal{F}$ *pour tout* n,

(2) $S_n \cap S_k = \varnothing$ *si* $n \neq k$,

(3) $S = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n$.

LEMooXAPQooPpZUmP

Lemme 16.105 (Lemme de recollement)**.**
Soit (S_n) une partition mesurable dénombrable de l'espace mesurable $(S, \mathcal{F})$. Soit $(S', \mathcal{F}')$ un autre espace mesurable et des fonctions mesurables

$$f_n : (S_n, \mathcal{F}_{S_n}) \to (S', \mathcal{F}') \tag{16.285}$$

où $\mathcal{F}_{S_n}$ est la tribu induite[35]*. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} f : (S, \mathcal{F}) &\to (S', \mathcal{F}') \\ x &\mapsto f_n(x) \text{ si } x \in S_n \end{aligned} \tag{16.286}$$

est mesurable.

Démonstration. Soit $A' \in \mathcal{F}'$; nous devons prouver que $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$. Nous savons que

$$f^{-1}(A') = \bigcup_{n\geqslant 1} f_n^{-1}(A'), \tag{16.287}$$

EqooGKFFooEwTdtg

qui est une union dénombrable d'éléments $f_n^{-1}(A') \in \mathcal{F}_{S_n}$.

Puisque $S_n \in \mathcal{F}$ nous avons $\mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}$ parce qu'un élément de $\mathcal{F}_{S_n}$ est de la forme $S_n \cap B$ avec $B \in \mathcal{F}$. Ainsi, pour chaque n nous avons

$$f_n^{-1}(A') \in \mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}. \tag{16.288}$$

Au final l'égalité (16.287) écrit $f^{-1}(A')$ comme une union d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. □

PROPooODDVooEEmmTX

Proposition 16.106.
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable et des applications mesurables $f, g : S \to \bar{\mathbb{R}}$. Alors les fonctions suivantes sont mesurables :

(1) λf *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $f + g$ *si elle existe.*

(3) $1/f$ *si elle existe.*

(4) fg.

Démonstration. Commençons par clarifier « si elle existe ». La fonction $f + g$ n'existe pas au point $x \in S$ si $f(x) = +\infty$ et $g(x) = -\infty$. La fonction $1/f$ n'existe pas au point $x \in S$ si $f(x) = 0$. Voir le point 16.95.

(1) **La partie où $f + g$ existe est mesurable** La partie de S sur laquelle $f + g$ existe est

$$\{x \in S \text{ tel que } \big(f(x), g(x)\big) \neq (+\infty, -\infty), \big(f(x), g(x)\big) \neq (-\infty, +\infty)\}. \tag{16.289}$$

Nous avons

$$\{(f, g) = (+\infty, -\infty)\} = \{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\} \tag{16.290}$$

qui est un ensemble mesurable parce que, par exemple,

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n\geqslant 1} [n, +\infty]. \tag{16.291}$$

Le cas $(-\infty, +\infty)$ est identique, et au final la partie de S sur laquelle $f + g$ n'existe pas est mesurable. Par complémentarité la partie sur laquelle $f + g$ existe est également mesurable[36].

[35] Définition 16.8.

[36] Parfois on a envie de dire que l'affirmation « A est mesurable » ne passe pas le test de Popper.

(2) **Idem pour la partie sur laquelle $1/f$ existe** Idem.

(3) **Mesurabilité de λf** Si $\lambda = 0$, nous avons une fonction constante dont la mesurabilité est évidente[37]. Nous supposons $\lambda > 0$. Alors

$$\{\lambda f < a\} = \{f < a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{16.292}$$

Pour $\lambda < 0$ nous avons de la même manière

$$\{\lambda f < a\} = \{f > a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{16.293}$$

Ce dernier point est suffisant pour que λf soit mesurable par le théorème 16.98(3) et par complémentarité.

(4) **Mesurabilité de $f + g$** Soit $a \in \mathbb{R}$; le théorème 16.98 nous demande d'avoir envie de prouver que $\{f + g < a\} \in \mathcal{F}$. Nous avons

$$f(x) + g(x) < a \tag{16.294}$$

si et seulement si

$$f(x) < a - g(x) \tag{16.295}$$

si et seulement si

$$\exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } f(x) < q < a - g(x). \tag{16.296}$$

Donc

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < q\} \cap \{g < a - q\} \Big), \tag{16.297}$$

qui est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Donc $\{f + g < a\} \in \mathcal{F}$ et $f + g$ est mesurable.

Note qu'en toute rigueur il faudrait « $\cap$là où $f + g$ est définie » un peu partout, mais cela ne change rien parce que l'intersection de deux parties mesurables est mesurable.

(5) **Mesurabilité de $1/f$** Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a > 0$ alors

$$\{1/f < a\} = \{f < 0\} \cup \{f > \frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{16.298}$$

et si $a < 0$ alors

$$\{1/f < a\} = \{f < 0\} \cap \{f > \frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{16.299}$$

(6) **Mesurabilité de fg** Nous allons la prouver en plusieurs fois.

(6a) **Si f est mesurable alors f^2 est mesurable** Si $a \leqslant 0$ alors $\{f^2 < a\} = \varnothing$. Si $a > 0$ nous avons

$$\{f^2 < a\} = \{-\sqrt{a} < f < \sqrt{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{16.300}$$

(6b) **$f\mathbb{1}_A$ est mesurable** Soit $A \in \mathcal{F}$, et prouvons que $f\mathbb{1}_A$ est mesurable. Par définition,

$$(f\mathbb{1}_A)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{16.301}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} f_1 \colon A^c &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{16.302}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 \colon A &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{16.303}$$

Alors nous avons

$$(\mathbb{1}_A f)(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A^c \\ f_2(x) & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{16.304}$$

Les ensembles A et A^c forment une partition mesurable dénombrable de S. La fonction f_1 est mesurable ; pour prouver que f_2 est mesurable, nous l'écrivons $f_2 = f \circ j_A$ où $j_A \colon A \to S$ est l'injection canonique. L'application

$$j_A \colon (A, \mathcal{F}_A) \to (S, \mathcal{F}) \tag{16.305}$$

[37] Prenez quand même le temps d'y penser.

est mesurable parce que si $B \in \mathcal{F}$ alors $j_A^{-1}(B) = A \cap B \in \mathcal{F}_A$. D'autre part l'application

$$f\colon (S,\mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{16.306}$$

est mesurable par hypothèse. La composée $f_2 = f \circ j_A$ est alors mesurable par la proposition 16.47. Le lemme de recollement 16.105 nous donne alors la mesurabilité de $f\mathbb{1}_A$.

(6c) **Le produit fg est mesurable** Nous posons

$$F = \{x \in S \text{ tel que } |f(x)| < +\infty, |g(x)| < \infty\}. \tag{16.307}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, F est mesurable. Par la partie précédente, les applications $f_1 = f\mathbb{1}_F$ et $g_1 = g\mathbb{1}_F$ sont mesurables. L'application $f_1 + g_1\colon S \to \mathbb{R}$ est encore mesurable. Par conséquent l'application

$$f_1 g_1 = \frac{1}{2}\big((f_1 + g_1)^2 - f_1^2 - g_1^2\big) \tag{16.308}$$

est mesurable.

Voyons maintenant ce qui se passe en dehors de F. Nous allons utiliser le lemme de recollement sur la fonction

$$(fg)(x) = \begin{cases} (f_1g_1)(x) & \text{si } x \in F \\ -\infty & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{V} \\ +\infty & \text{si } x \in \mathcal{W} \end{cases} \tag{16.309}$$

où $F, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ forment une partition mesurable dénombrable[38] de S. Pour le sport nous montrons que $\mathcal{U}$ est mesurable :

$$\mathcal{U} = \big(\{f = -\infty\} \cap \{g > 0\}\big) \tag{16.310a}$$
$$\cup \big(\{f = +\infty\} \cap \{g < 0\}\big) \tag{16.310b}$$
$$\cup \big(\{g = -\infty\} \cap \{f > 0\}\big) \tag{16.310c}$$
$$\cup \big(\{g = +\infty\} \cap \{f < 0\}\big). \tag{16.310d}$$

□

ooABKWooPbfSOZ

Proposition 16.107.
Si $f_n\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables, alors les fonctions $\inf_n f_n$ et $\sup_n f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Nous avons les découpages

$$\{\inf_n f_n < a\} = \bigcup_n \{f_n < a\} \in \mathcal{F} \tag{16.311}$$

et

$$\{\sup_n f_n \leqslant a\} = \bigcap_n \{f_n \leqslant a\} \in \mathcal{F}. \tag{16.312}$$

EQooNYKVooDOiQXM

Le théorème 16.98 permet de conclure. □

Note : pour (16.312) nous ne pouvions pas utiliser les inégalités strictes parce que $\{\sup_n f_n < a\}$ n'est pas spécialement égal à $\bigcap_n \{f_n < a\}$.

LEMooMGUOooMGwknZ

Lemme 16.108.
Soient des fonctions mesurables $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \end{aligned} \tag{16.313}$$

est mesurable.

16.109.
La proposition 16.107 nous permet de définir les parties positives et négatives de f par $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. Ce sont des applications mesurables. Nous avons les décompositions

$$f = f^+ - f^- \tag{16.314a}$$
$$|f| = f^+ + f^-. \tag{16.314b}$$

[38] Définition 16.104.

CORooNXYUooEcvDlP

Corolaire 16.110.
Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable alors les applications f^+, f^- et $|f|$ sont mesurables en tant qu'applications $S \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour f^+. Nous savons que $f^+\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable par la proposition 16.107. Nous considérons l'injection canonique $j\colon \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}$ et

$$\begin{aligned} f_1^+\colon S &\to \bar{\mathbb{R}}^+ \\ x &\mapsto f^+(x). \end{aligned} \tag{16.315}$$

Alors $f_1^+ = j \circ f^+$ est mesurable. Et c'est bien cela que nous voulions. □

Note : f^+ et f_1^+ sont exactement les mêmes fonctions. Elles ne diffèrent que par la tribu que nous considérons sur l'espace d'arrivée. Nous allons à partir de maintenant les noter toutes deux f^+.

Remarque 16.111.
L'application $|f|$ peut être mesurable sans que f le soit. Soit en effet une partie $A \notin \mathcal{F}$, et posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in A^c. \end{cases} \tag{16.316}$$

Alors $f^{-1}(\{1\}) = A$ n'est pas mesurable alors que $|f|(x) = 1$ pour tout x.

Il est temps d'aller relire les définitions 11.43.

PropooMFIBooJzaleK

Proposition 16.112.
Si les fonctions $f_n\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ sont mesurables alors les fonctions $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Par le lemme 11.45 nous écrivons $\limsup_n f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} f_k(x)$. Pour chaque k nous considérons la fonction $g_k = \sup_{n\geqslant k} f_n$. Par la proposition 16.107, les fonctions g_k sont mesurables. En utilisant encore la même proposition, $\inf_{n\geqslant 1} g_k$ est encore mesurable. □

PropooDXBGooSFqrai

Proposition 16.113 ([521]).
Si $f_n\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables dont la limite ponctuelle existe, alors la limite est mesurable.

Démonstration. Si la limite existe, elle est égale à la limite supérieure par le lemme 11.46. Or la limite supérieure est mesurable par la proposition 16.112. □

16.6.2 Fonction étagée

DefBPCxdel

Définition 16.114 ([522]).
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable et une fonction $f\colon S \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})\big)$. Il serait dommage de confondre les trois concepts suivants.

- *Une **fonction simple** est une fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs.*
- *Une **fonction étagée** est une fonction simple qui est elle-même une fonction mesurable.*
- *Une **fonction en escalier** est une fonction étagée dont les valeurs sont constantes sur des intervalles : ce sont donc des fonctions constantes par morceaux.*

Dans les trois cas, la fonction f peut être écrite comme somme de fonctions caractéristiques :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x) \tag{16.317}$$

où $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$. Ce qui change est la nature des A_j.

- Si f est simple, les A_j sont quelconques.
- Si f est étagée, les A_i peuvent être choisis mesurables parce que $\{\alpha_i\}$ est un borélien, ce qui fait de $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$ un choix mesurable.

- Si f est en escalier, les A_i sont des intervalles.

DEFooKWQLooBRGore

Définition 16.115.
*La **forme canonique** d'une fonction simple f est la suivante. Soit $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,l}$ les valeurs distinctes prises par f et $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$. La forme canonique de f est alors*

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}. \tag{16.318}$$

LEMooNWLTooCDuRQI

Lemme 16.116.
Si f est une fonction simple dont la représentation canonique est

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{16.319}$$

alors

(1) *les A_i sont disjoints,*

(2) *l'union est égale à tout l'ensemble : $S = \bigcup_i A_i$.*

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 16.117
Le lemme 16.118 et le théorème 16.120 disent la même chose alors que la preuve du théorème 16.120 est beaucoup plus compliquée. La démonstration du lemme serait fausse ?

M'est avis que ce que le théorème donne en plus est la convergence uniforme en cas de fonction bornée. La suite (16.320) ne va pas converger uniformément.

Si vous avez une idée, écrivez-moi.

LemYFoWqmS

Lemme 16.118 (Limite croissante de fonctions étagées[1])**.**
Soit $f : (S, \mathcal{F}) \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction positive mesurable. Il existe une suite $f_n : S \to \mathbb{R}$ de fonctions étagées positives telles que $f_n \to f$ ponctuellement et $f_n \leqslant f$.

Démonstration. Nous considérons (q_n) une suite parcourant tous les rationnels positifs[39] avec $q_0 = 0$ pour être sûr. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons la fonction

$$f_n(x) = \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \leqslant f(x)\}. \tag{16.320}$$

EqooXQYJooSSJwtM

L'ensemble sur lequel le maximum est pris n'est pas vide parce que $q_0 = 0$. La fonction f_n est simple parce qu'elle ne prend que n valeurs différentes. Nous avons aussi, par construction, $f_n(x) \leqslant f(x)$. Et aussi pour tout $x \in S$, $f_n(x) \to f(x)$, parce que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

En ce qui concerne le fait que f_n soit mesurable, nous notons $\{r_0, \dots, r_n\}$ l'ensemble des $\{q_0, \dots, q_n\}$ classés dans l'ordre croissant. Nous posons en plus $r_{n+1} = +\infty$. Nous avons alors

$$f_n^{-1}(r_k) = \{x \in S \text{ tel que } f(x) \geqslant r_k, f(x) < r_{k+1}\} = \{f \geqslant r_k\} \cap \{f < r_{k+1}\}. \tag{16.321}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, le théorème 16.98 dit que $f_n^{-1}(r_k)$ est mesurable. □

Remarque 16.119.
Pour avoir $f_n < |f|$ nous pouvons poser

$$f_n(x) = \begin{cases} \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \leqslant f(x)\} & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ \min\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\ q_i \geqslant f(x)\} & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \tag{16.322}$$

THOooXHIVooKUddLi

Théorème 16.120 (Théorème fondamental d'approximation, thème 24[519, 523])**.**
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{A})$.

(1) *Soit une fonction mesurable $f : S \to [0, +\infty]$. Alors il existe une suite croissante de fonctions $\varphi_n : S \to [0, +\infty[$ étagées[40] positives dont la limite ponctuelle est f.*

(2) *Si de plus f est bornée, la convergence est uniforme.*

(3) *Idem pour f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.*

[39] Nous rappelons que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ par la proposition 11.15.
[40] Définition 16.114.

Démonstration. Nous découpons l'intervalle $[0,n]$ en plusieurs morceaux.

$$I_{n,k}=\begin{cases}[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[& \text{si } 0\leqslant k\leqslant n2^n-1\\ [n,\infty] & \text{si } k=n2^n.\end{cases}\tag{16.323}$$

Nous posons $S_{n,k}=f^{-1}(I_{n,k})$. Ce sont des ensembles mesurables parce que f est mesurable. Et de plus, pour chaque n, la suite $(S_{n,k})_{k\geqslant 0}$ est une partition mesurable finie de S. Nous posons

$$\varphi_n=\sum_{k=0}^{n2^n}\frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{S_{n,k}}.\tag{16.324}$$

C'est-à-dire que sur chaque $S_{n,k}$ nous approximons f par le bas. La fonction φ_n est étagée et positive : $0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant f(x)$ par construction.

(1) **Croissance** Nous allons voir que $\varphi_n\leqslant\varphi_{n+1}$. Soit $k\neq n2^n$. Si $x\in S_{n,k}$ alors $\varphi_n(x)=\frac{k}{2^n}$ et nous avons aussi la décomposition

$$S_{n,k}=S_{n+1,2k}\cup S_{n+1,2k+1}.\tag{16.325}$$

Si $x\in S_{n+1,2k}$ alors $\varphi_{n+1}(x)=\frac{2k}{2^{n+1}}=\frac{k}{2^n}=\varphi_n(x)$. Et si $x\in S_{n+1,2k+1}$ alors

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{2k+1}{2^{n+1}}=\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}>\varphi_n(x).\tag{16.326}$$

Il reste à traiter le cas $x\in\{f\geqslant n\}$. Dans ce cas nous avons $\varphi_n(x)=n$. Il y a encore deux cas à traiter :

$$\{f\geqslant n\}=\{f\in[n,n+1[\}\cup\{f\in[n+1,\infty]\}.\tag{16.327}$$

Pour plus de simplicité dans les notations, nous notons $\bar{n}=n2^n$, c'est-à-dire que $I_{n,\bar{n}}$ est le $I_{n,k}$ avec le k le plus grand possible. Nous avons

$$I_{n,\bar{n}}=[n,n+1[\cup[n+1,\infty].\tag{16.328}$$

Le premier élément se décompose en $I_{n+1,k}$ avec $k<\bar{n}+1$ (nous préciserons plus tard exactement les valeurs de k) tandis que le second est $[n+1,\infty]=I_{n+1,\overline{n+1}}$.

Pour $x\in S_{n+1,\overline{n+1}}$ nous avons

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{(n+1)2^{n+1}}{2^{n+1}}=n+1>\varphi_n(x).\tag{16.329}$$

Si au contraire $f(x)\in[n,n+1[$ nous devons précisément voir quels sont les k qui font en sorte que $I_{n+1,k}$ recouvre $[n,n+1[$. Le plus petit k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}}=n$, c'est-à-dire $k=n2^{n+1}$ et le plus grand k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}}<n+1$, c'est-à-dire $k=2^{n+1}(n+1)-1$. Donc si $f(x)\in[n,n+1[$ alors $x\in S_{n+1,k}$ avec

$$n2^{n+1}\leqslant k\leqslant(n+1)2^{n+1}-1\tag{16.330}$$

Dans ce cas

$$\varphi_{n+1}(x)=\frac{k}{2^{n+1}}\geqslant\frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}}=n=\varphi_n(x).\tag{16.331}$$

(2) **Convergence ponctuelle** Si $f(x)<\infty$ alors il existe[41] $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $f(x)<n_0$. Pour $n\geqslant n_0$ nous avons $f(x)<n$ et donc $\varphi_n(x)$ se calcule à partir d'un des intervalles de taille $1/2^n$:

$$\varphi_n(x)=\frac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{2^n}.\tag{16.332}$$

Donc

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2^n},\tag{16.333}$$

ce qui signifie que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$.

Si $f(x)=+\infty$ alors $f(x)>n$ pour tout n. Et alors $\varphi_n(x)=n$ pour tout n, ce qui donne bien $\varphi_n(x)\to\infty$.

[41] Le vrai snob citera ici le lemme 4.57.

(3) **Convergence uniforme** Soit f bornée : $0 \leqslant f(x) < M$ pour tout $x \in S$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous prenons $n_0 > M$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$ nous avons

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \epsilon. \tag{16.334}$$

Notez qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que nous savons déjà que la limite est croissante.

□

ThofrestemesurablesXYYX

Théorème 16.121 (Doob[504]).
Soit une application mesurable[42] $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$. *Une application* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *est* $\mathcal{A}_X$*-mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ *telle que* $Y = f(X)$.

Démonstration. En séparant Y par coordonnées, et en séparant, pour chacune, les parties positives et négatives, nous supposons que Y est à valeurs réelles positives. Le théorème 16.120 dit qu'il existe une suite croissante d'applications $\mathcal{A}_X$-mesurables et étagées $\varphi_n : \Omega \to [0, \infty[$ telles que $\varphi_n \to Y$ ponctuellement.

Vu que φ_n est étagée, il existe des $\mathcal{A}_X$-mesurables $A_{nk} \subset \Omega$ tels que $\varphi_n = \sum_{k=0}^{s_n} a_{ak} \mathbb{1}_{A_{nk}}$ avec $a_{nk} > 0$. Par la définition 16.6 de la tribu engendrée par une application, il existe un borélien $B_{nk} \subset \mathbb{R}$ tel que $A_{nk} = X^{-1}(B_{nk})$. Avec ça nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \sum_{k=0}^{s_n} a_{nk} \mathbb{1}_{A_{nk}} && \text{(16.335a)}\\
&= \sum_k a_{nk} \mathbb{1}_{X^{-1}(B_{nk})} && \text{(16.335b)}\\
&= \sum_k a_{nk} (\mathbb{1}_{B_{nk}} \circ X) && \text{(16.335c)}\\
&= \left(\sum_k a_{nk} \mathbb{1}_{B_{nk}} \right) \circ X. && \text{(16.335d)}
\end{aligned}$$

Nous posons

$$\begin{aligned}
f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\
f_n &= \sum_{k=0}^{s_n} a_{nk} \mathbb{1}_{B_{nk}}.
\end{aligned} \tag{16.336}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, il n'y a que deux possibilités. Soit $x \in X(\Omega)$, soit non. Si x n'est pas dans $X(\Omega)$, alors il n'est dans aucun des B_{nk} et nous avons $f_n(x) = 0$ pour tout n. Si $x \in X(\Omega)$, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $x = X(\omega)$. Dans ce cas

$$f_n(x) = f_n\big(X(\omega)\big) = \varphi_n(\omega), \tag{16.337}$$

qui est croissante en n. De plus si $x = X(\omega)$, nous avons

$$f_n(x) = \varphi_n(\omega) \to Y(\omega). \tag{16.338}$$

Nous avons donc montré que pour tout x, $n \mapsto f_n(x)$ est convergente :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin X(\Omega) \\ Y(\omega) & \text{si } x = X(\omega). \end{cases} \tag{16.339}$$

Nous notons $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, et nous avons

$$Y(\omega) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \Big((f_n \circ X)(\omega) \Big) = \lim_{n\to\infty} f_n\big(X(\omega)\big) = f\big(X(\omega)\big) = (f \circ X)(\omega). \tag{16.340}$$

Nous avons donc bien trouvé une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f \circ X$. □

16.6.3 Fonctions réelles à variables réelles

Nous nous focalisons à présent sur le cas des fonctions

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big). \tag{16.341}$$

[42] Elle est notée X parce que l'application usuelle de ce théorème est en théorie des variables aléatoires.

NORMooNFOMooYnaflN

16.122 ([1]).
Anticipons un peu pour expliquer pourquoi ce que nous allons faire maintenant est suffisant pour ce que nous avons en tête[43]. Toutes les fonctions mesurables

$$f\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{16.342}$$

seront a fortiori mesurables au sens de

$$f\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{16.343}$$

où $\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la tribu complétée de celle des boréliens (définition 16.145).

16.123.
Nous allons maintenant donner quelques conditions pour que des fonctions soient mesurables au sens de la tribu des boréliens sur l'espace d'arrivée et de départ. Ces résultats seront donc immédiatement applicables à la théorie de l'intégration où nous considérons la tribu de Lebesgue sur l'espace de départ.

Autrement dit, les résultats présentés ici sont un peu plus forts que ce dont nous avons réellement besoin … ou alors ce sont les hypothèses que nous allons poser en théorie de l'intégration, qui seront un peu plus fortes que nécessaires. C'est une question de point de vue.

CorooJYDVooCrXVun

Corolaire 16.124.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute application monotone $f\colon I \to \mathbb{R}$ est borélienne.

Démonstration. Puisque f est monotone, l'ensemble $\{f < a\}$ est un intervalle. Or tous les intervalles sont boréliens, donc f est mesurable par le théorème 16.98. □

Définition 16.125.
*Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est **monotone par morceaux** si il existe une suite strictement croissante de points $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans I telle que f ait la propriété sur chacun des ouverts $]x_j, x_{j+1}[$.*

Remarque 16.126.
Quelques remarques.

(1) Dans cette définition, les points sont numérotés par $\mathbb{Z}$ et non par $\mathbb{N}$ parce que nous nous laissons la liberté d'avoir une infinité de points de chacun des deux côtés.

(2) La notion de C^1 par morceaux sera la définition 22.37. Attention : ce ne sera pas la même.

PropooLNBHooBHAWiD

Proposition 16.127.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f est continue ou monotone par morceaux sur I alors elle y est borélienne.

Démonstration. L'ensemble $\{]x_j, x_{j+1}[\}_{j\in\mathbb{Z}} \cup \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ forme une partition mesurable dénombrable de I (les singletons sont des boréliens). À une belle redéfinition près de la numérotation (deux fois $\mathbb{Z}$ va dans $\mathbb{N}$), nous les appelons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et nous définissons les fonctions f_k comme étant les restrictions de f aux intervalles I_k.

Toute fonction sur un singleton est mesurable. Toute fonction continue sur un ouvert est mesurable (théorème 16.58). Toute fonction monotone sur un ouvert est mesurable (corolaire 16.124).

Le lemme de recollement 16.105 donne alors la mesurabilité de f. □

16.128.
Toutes les fonctions que nous pouvons écrire explicitement sont mesurables … en tout cas toutes celles que l'on trouve en pratique. En effet nous avons déjà toutes les fonctions continues par morceaux via la proposition 16.127 et ensuite toutes les limites par la proposition 16.113. Cela donne les séries, les dérivées, les primitives, etc.

16.7 Tribu produit

16.7.1 Produit d'espaces mesurables

DefTribProfGfYTuR

Définition 16.129 (Tribu produit).
*Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus sur deux ensembles Ω_1 et Ω_2, nous définissons la **tribu produit** $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$*

[43] Pour rappel, nous avons en tête de définir une théorie de la mesure afin d'y définir des intégrales. En particulier nous allons étudier l'intégrale de Lebesgue et en ce qui concerne $\mathbb{R}^n$, nous aurons la tribu de Lebesgue.

comme étant la tribu engendrée par

$$\{X \times Y \text{ tel que } X \in \mathcal{A}_1, Y \in \mathcal{A}_2\}. \tag{16.344}$$

Ces ensembles sont appelés ***rectangles*** *de* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

PropLJJWooKqWlTr

Proposition 16.130 ([524])**.**
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ *et* $(S_2, \mathcal{F}_2)$*. Si* $\mathcal{C}_i$ *est une classe de parties de* S_i *avec* $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ *et* $S_i \in \mathcal{C}_i$*. Alors*

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{16.345}$$

Démonstration. Nous notons p_1 et p_2 les projections de $S_1 \times S_2$ vers S_1 et S_2. Nous commençons par prouver que

eqSGPBooLpQHfq
$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big). \tag{16.346}$$

En effet cette union est dans $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ parce que ce sont tous des produits de la forme $A_1 \times S_2$ et $S_1 \times A_2$ où $A_i \in \mathcal{F}_i$. Inversement, tous les produits de la forme $A_1 \times A_2$ sont dans la tribu engendrée par l'union parce que

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times S_2) \cap (S_1 \times A_2). \tag{16.347}$$

Par conséquent, la partie $p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)$ engendre tous les produits qui engendrent la tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. L'égalité (16.346) est donc correcte.

Si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ alors

$$p_1^{-1}(C_1) = C_1 \times S_2 \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \tag{16.348}$$

et donc $p_1^{-1}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. En utilisant le lemme de transport 16.50 nous avons alors

EqDQLYooVOLqMZ
$$p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) = p_1^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}_1)\big) = \sigma\big(p_1^{-1}(\mathcal{C}_1)\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \tag{16.349}$$

et de la même façon,

EqMTRCooVHNTHJ
$$p_2^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{16.350}$$

Vu les relations (16.349), (16.350) et (16.346) nous avons

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{16.351}$$

Réciproquement, si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ et $C_2 \in \mathcal{C}_2$ alors

$$C_1 \times C_2 = (C_1 \times S_2) \cap (S_1 \times C_2) = p_1^{-1}(C_1) \cap p_2^{-1}(C_2) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2. \tag{16.352}$$

□

PROPooSKIEooCpLVQT

Proposition 16.131 ([1, 3])**.**
Soient des espaces mesurables[44] $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$*. Nous considérons des applications mesurables* $f_i \colon \Omega \to \Omega_i$*. Alors l'application* $(f_1, f_2) \colon \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$ *est mesurable pour la tribu produit*[45]*.*

Démonstration. Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{B \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ tel que } (f_1, f_2)^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}, \tag{16.353}$$

et nous allons prouver que $\mathcal{D}$ est une tribu contenant les parties de la forme $A_1 \times A_2$.

(1) **$\mathcal{D}$ est une tribu** Il faut vérifier la définition 16.1. D'abord $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{D}$ parce que

$$\{(f_1, f_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2\} = \Omega \in \mathcal{F}. \tag{16.354}$$

Ensuite si $B \in \mathcal{D}$, nous avons

$$\begin{aligned}
(f_1, f_2)^{-1}(B^c) &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } (f_1, f_2)(\omega) \in B^c\} && \text{(16.355a)}\\
&= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } (f_1, f_2)(\omega) \in B\}^c && \text{(16.355b)}\\
&\in \mathcal{F}^c && \text{(16.355c)}\\
&= \mathcal{F}. && \text{(16.355d)}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } (f_1, f_2)(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. Enfin si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathcal{D}$, nous avons

$$(f_1, f_2)^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (f_1, f_2)^{-1}(B_i) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F} = \mathcal{F}. \tag{16.356}$$

[44] Définition 16.1.
[45] Définition 16.129.

(2) $\underline{A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}}$ Soient $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Nous prouvons que $A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$. Pour cela,

$$\begin{aligned}(f_1, f_2)^{-1}(A_1 \times A_2) &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f_1(\omega) \in A_1, f_2(\omega) \in A_2\} && (16.357a)\\ &= \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f_1(\omega) \in A_1\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f_2(\omega) \in A_2\} && (16.357b)\\ &= f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) && (16.357c)\\ &\in \mathcal{F} \cap \mathcal{F} && (16.357d)\\ &\subset \mathcal{F}. && (16.357e)\end{aligned}$$

(3) **Conclusion** La partie $\mathcal{D}$ est une tribu contenant les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$. La définition 16.129 de la tribu produit dit alors que $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{D}$.

□

16.7.2 Le cas des boréliens

Si X_1 et X_2 sont des espaces topologiques et si nous notons $\mathcal{O}_i$ l'ensemble de leurs ouverts, par définition $\mathcal{B}\text{or}(X_i) = \sigma(\mathcal{O}_i)$. De plus par la proposition 16.130 nous savons que

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) = \mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2). \tag{16.358}$$

EqOHMSooRSIrDk

LemDEDQooJyzXgC

Lemme 16.132.
Si $(X_i, \mathcal{O}_i)$ sont des espaces topologiques, alors

$$\mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2) \subset \mathcal{B}or(X_1 \times X_2) \tag{16.359}$$

Démonstration. Si $A_i \in \mathcal{O}_i$ alors $A_1 \times A_2$ est un ouvert de $X_1 \times X_2$ (voir la définition 9.66). Par conséquent, $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ est contenu dans l'ensemble des ouverts de $X_1 \times X_2$ ou encore

$$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2), \tag{16.360}$$

et donc

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \sigma\big(\mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2)\big) \tag{16.361}$$

finalement, par (16.358)

$$\mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2) \subset \mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2). \tag{16.362}$$

□

Il n'y a en général pas égalité, mais nous allons immédiatement voir que dans (presque) tous les cas raisonnables, les boréliens sur un produit sont le produit des boréliens.

PropNAAJooBPbjkX

Proposition 16.133 ([524]).
Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques séparables. Alors

$$\mathcal{B}or(X_1 \times X_2) = \mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2). \tag{16.363}$$

Démonstration. Nous savons par le lemme 9.324 que tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. Donc tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est dans $\mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2)$. Par conséquent

$$\mathcal{B}\text{or}(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{B}\text{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\text{or}(X_2). \tag{16.364}$$

L'inclusion inverse étant déjà acquise par le lemme 16.132, nous avons l'égalité. □

CorWOOOooHcoEEF

Proposition 16.134.
Les boréliens sur $\mathbb{R}^N$ sont ceux qu'on croit.

(1) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$

(2) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$

Démonstration. Cela n'est rien d'autre que la proposition 16.133. □

Proposition 16.135.
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et des applications $f_k : S \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, N)$. Alors l'application

$$\begin{aligned}f : (S, \mathcal{F}) &\to (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N))\\ x &\mapsto \big(f_1(x), \dots, f_N(x)\big)\end{aligned} \tag{16.365}$$

est mesurable si et seulement si chacun des f_i est mesurable.

Démonstration. Division en deux.

(1) **Condition nécessaire** Nous supposons que les f_i sont mesurables. Nous avons

$$f^{-1}\Big(\prod_{k=1}^{N}]a_k,b_k[\Big) = \{x\in S \text{ tel que } f_1(x)\in]a_1,b_1[,\cdots f_N(x)\in]a_N,b_N[\} \tag{16.366a}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} f_k^{-1}\big(]a_k,b_k[\big). \tag{16.366b}$$

Cela est une intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. Mais les pavés ouverts engendrent $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^N)$ parce qu'ils sont une base dénombrable de la topologie (proposition 16.53). Le théorème 16.51 nous assure alors que f est mesurable parce que l'image inverse d'une base de la tribu est mesurable.

(2) **Condition suffisante** Si f est mesurable alors en particulier

$$f_k^{-1}\big(]a,b[\big) = f^{-1}\big(\mathbb{R}\times\ldots\times]a,b[\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}\big)\in\mathcal{F}. \tag{16.367}$$

Pour cela nous avons utilisé la proposition 16.134 qui nous indique que le produit dans la parenthèse est un borélien de $\mathbb{R}^N$ en tant que produit de boréliens de $\mathbb{R}$.

Encore une fois f_k^{-1} tombe dans $\mathcal{F}$ pour une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ et est donc mesurable.

□

16.8 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

SecZTFooXlkwk

Nous notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des intervalles[46] de $\mathbb{R}$.

Proposition 16.136.
L'ensemble des réunions finies d'éléments de $\mathcal{S}$ est une algèbre de parties de $\mathbb{R}$ que nous allons noter $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Démonstration. Nous devons vérifier la définition 16.13. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des intervalles et font donc partie de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Si $A\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se décompose en union d'intervalles de la forme (a_k,b_k) avec $k=1,\ldots,n$ (ici nous mettons des parenthèses au lieu de crochets parce qu'à priori nous ne savons pas). Alors

$$A^c = \bigcup_{k=0}^{n}(b_k,a_{k+1}) \tag{16.368}$$

où nous avons posé $b_0=-\infty$ et $a_{n+1}=+\infty$. Ici encore les parenthèses sont soit fermées soit ouvertes en fonction de ce qu'étaient celles dans la décomposition de A. Quoi qu'il en soit, cette décomposition de A^c montre que $A^c\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Enfin si $A,B\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ alors $A\cup B\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. □

Lemme 16.137.
Tout élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ admet une décomposition minimale unique en réunion finie d'intervalles. Cette décomposition est formée d'intervalles deux à deux disjoints.

Démonstration. Nous allons montrer que si $A\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, alors la décomposition minimale consiste en les composantes connexes[47] de A. Pour cela nous rappelons que la proposition 11.54 dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est un intervalle. D'abord cela nous dit immédiatement que les composantes connexes de A forment une décomposition de A en intervalles. Nous devons prouver qu'elle est minimale.

Soit $\{C_k\}_{k=1,\ldots,n}$ les composantes connexes de A. Aucun connexe de $\mathbb{R}$ contenu dans A ne peut intersecter plus d'un des C_k, et par conséquent nous ne pouvons pas décomposer A en moins de n intervalles.

Pour l'unicité, soit $\{I_k\}_{k=1,\ldots,n}$ un ensemble de n intervalles tels que $\bigcup_{k=1}^{n}I_k=A$. Chacun des I_k intersecte un et un seul des C_k. En effet si $x\in I_k\cap C_i$ et $y\in I_k\cap C_j$, alors $[x,y]\subset I_k$ parce que I_k est un intervalle. Mais C_i étant le plus grand connexe contenant x, $[x,y]\subset C_i$ et de la même façon, $[x,y]\subset C_j$.

[46] Définition 1.31.
[47] Définition 9.120.

Par conséquent C_i et C_j sont tous deux la composante connexe de x et y. Nous en déduisons que $C_i = C_j$, c'est-à-dire $i = j$.

Par ailleurs nous avons $I_k \cap I_l = \varnothing$ dès que $k \neq l$ parce que sinon l'ensemble $I_k \cup I_l$ serait connexe et la décomposition des $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ ne serait pas minimale : en remplaçant I_k et I_l par $I_k \cup I_l$ on aurait eu une décomposition contenant moins d'éléments. Donc à renumérotation près nous pouvons supposer que I_k intersecte C_l si et seulement si $k = l$.

Dans ce cas nous devons avoir $I_k = C_k$, sinon les éléments de $C_k \setminus I_k$ ne seraient pas dans $\bigcup_{i=1}^n I_i$. □

Définition 16.138 (longueur d'intervalle[508])**.**
Si I est un intervalle d'extrémités a et b avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ alors nous définissons la ***longueur*** *de I par*

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & si\ -\infty < a \leqslant b < +\infty \\ \infty & si\ a\ ou\ b\ est\ infini \end{cases} \tag{16.369}$$

Si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ et si sa décomposition minimale est $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$, alors on définit

$$\ell(A) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k). \tag{16.370}$$

Le lemme suivant nous indique que nous pouvons calculer la longueur d'un élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ sans savoir la décomposition minimale, pourvu que l'on connaisse une décomposition disjointe.

LemIUQooEzHun

Lemme 16.139 ([508])**.**
Si

$$B = \bigcup_{r=1}^{p} J_r \tag{16.371}$$

est une décomposition de $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ en intervalles deux à deux disjoints alors

$$\ell(B) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{16.372}$$

Démonstration. Nous prouvons dans un premier temps le résultat dans le cas où $B = I$ est un intervalle. Soit I un intervalle et une décomposition en intervalles disjoints $I = \bigcup_{r=1}^p J_r$. Nous montrons qu'alors $\ell(I) = \sum_{r=1}^p \ell(J_r)$. Nous verrons ensuite comment passer au cas où B est un élément générique de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

(1) **Si $B = I$ est un intervalle infini**

Si I est infini alors un des J_r soit l'être et donc $\sum_{r=1}^p \ell(J_r) = \infty = \ell(I)$.

(2) **Si $B = I$ est un intervalle ininfini**

Pour chaque $r = 1, \dots, p$ nous notons a_r et b_r les extrémités de J_r. Vu que les J_r sont connexes et disjoints, si $a_k \leqslant a_l$ alors $b_k \leqslant a_l$, sinon l'ensemble (non vide) $]a_l, b_k[$ serait dans l'intersection $I_k \cap I_l$ qui, elle, est vide. Plus généralement, si $x \in J_k$ et $y \in J_l$ avec $x < y$ alors pour tout $x' \in J_k$ et tout $y' \in J_l$ nous avons $x' < y'$. Vu qu'il y a un nombre fini d'ensembles J_r, nous pouvons les classer dans l'ordre croissant :

$$a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_{p-1} \leqslant a_p \leqslant b_p. \tag{16.373}$$

Vu que les J_r sont disjoints et que leur union est connexe nous avons en réalité

$$a = a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = a_3 \leqslant \dots \leqslant b_{p-1} = a_p \leqslant b_p, \tag{16.374}$$

donc une somme télescopique donne

$$\ell(I) = b - a = \sum_{r=1}^{p} (b_r - a_r) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{16.375}$$

(3) **Si B n'est pas un intervalle** Soit $\{I_k\}_{k=1,\dots,n}$ la décomposition minimale de B. Alors

$$\spadesuit = \ell(B) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \ell\Big(\bigcup_{r=1}^{p} (I_k \cap J_r) \Big). \tag{16.376}$$

Mais I_k est un intervalle et s'écrit comme union disjointe $I_k = \bigcup_{r=1}^{p}(I_k \cap J_r)$, donc par la première partie

$$\spadesuit = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{p}\ell(I_k \cap J_r) = \sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k \cap J_r). \tag{16.377}$$

Ici J_r est un intervalle qui se décompose en $J_r = \bigcup_{k=1}^{n}(I_k \cap J_r)$, donc nous pouvons encore utiliser la première partie :

$$\spadesuit = \sum_{r=1}^{p}\ell(J_r), \tag{16.378}$$

ce qu'il fallait.

□

LemPIOooRLkbo

Lemme 16.140.
Si $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ avec $A \subset B$ alors $\ell(A) \leqslant \ell(B)$.

Démonstration. Nous avons évidemment $B = A \cup B \setminus A$. Notons que $B \setminus A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ par le lemme 16.15. Si $\{I_k\}$ est une décomposition disjointe de A et $\{J_i\}$ une de $B \setminus A$ alors $\{I_k\} \cup \{J_i\}$ est une décomposition disjointe de $A \cup B \setminus A$ et le lemme 16.139 nous dit que

$$\ell(B) = \ell(A \cup B \setminus A) = \ell(A) + \ell(B \setminus A). \tag{16.379}$$

Par conséquent $\ell(B) \geqslant \ell(A)$. □

LemUMVooZJgMu

Lemme 16.141.
Si I est un intervalle et si il se décompose en

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \tag{16.380}$$

où les I_n sont des intervalles disjoints, alors

$$\ell(I) = \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n). \tag{16.381}$$

Démonstration. Nous allons encore diviser la preuve en deux parties suivant que I soit de longueur finie ou pas.

(1) **Si I est de longueur finie**

Soient a et b les extrémités de I : $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Pour tout $N \geqslant 1$ nous avons

$$\sum_{n=1}^{N}\ell(I_n) = \ell\Big(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) \leqslant \ell(I). \tag{16.382}$$

La première égalité est le lemme dans le cas d'une union finie 16.139. L'inégalité est le lemme 16.140. Cela étant vrai pour tout N, à la limite $N \to \infty$ nous conservons l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) \leqslant \ell(I). \tag{16.383}$$

Nous devons encore voir l'inégalité inverse. Pour cela nous supposons que $a < b$. Sinon $\ell(I) = 0$ et tous les I_n doivent être vide sauf un qui contiendra seulement $\{a\}$ (si I le contient).

Soit $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < b - a$ et l'intervalle

$$[a + \frac{\epsilon}{4}, b - \frac{\epsilon}{4}] = [a', b'] \subset I. \tag{16.384}$$

Si les a_n et le b_n sont le extrémités des I_n alors

$$[a', b'] \subset I = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \subset \bigcup_{n\geqslant 1}]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}[= \bigcup_{n\geqslant 1}]a'_n, b'_n[\tag{16.385}$$

où nous avons posé $a'_n = a_n - \epsilon/2^{n+2}$ et $b'_n = b_n + \epsilon/2^{n+2}$. Nous avons donc recouvert le compact[48] $[a', b']$ par des ouverts. Nous pouvons donc en extraire un sous-recouvrement fini (c'est la définition de la compacité), c'est-à-dire une partie finie F de $\mathbb{N}$ telle que

$$[a', b'] \subset \bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[. \tag{16.386}$$

Le lemme 16.140 nous dit alors que

$$\heartsuit = b' - a' \leqslant \ell\Big(\bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[\Big) \leqslant \sum_{n\in F} (b'_n - a'_n). \tag{16.387}$$

La seconde inégalité se prouve en recopiant[49] la preuve de 16.16. Nous continuons le calcul :

$$\heartsuit \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \sum_{n\in F} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{16.388}$$

Mais $b' - a' = (b - a) - \frac{\epsilon}{2}$, donc

$$b - a - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{16.389}$$

D'où nous déduisons que

$$\ell(I) = b - a \leqslant \sum_{n\in F} (b_n - a_n) + \epsilon \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) + \epsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \epsilon. \tag{16.390}$$

Cela étant valable pour tout ϵ nous déduisons que

$$\ell(I) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n). \tag{16.391}$$

(2) **Si I est de longueur infinie**

Étant donné que I est un intervalle de longueur infinie, il doit au moins contenir un ensemble du type $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$; donc pour tout $M > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que

$$\ell\big(I \cap [-N, N]\big) \geqslant M. \tag{16.392}$$

Mais $I \cap [-N, N]$ est un intervalle et

$$I \cap [-N, N] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap [-N, N] \tag{16.393}$$

qui est une union disjointe. Par conséquent,

$$M \leqslant \ell\big(I \cap [-N, N]\big) = \sum_n \ell\big(I_n \cap [-N, N]\big) \leqslant \sum_n \ell(I_n). \tag{16.394}$$

Cela étant vrai pour tout $M > 0$, nous concluons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = \infty. \tag{16.395}$$

□

Remarque 16.142.
Pour la preuve de 16.141 nous ne pouvons pas classer les I_n en ordre croissant comme nous l'avons fait dans la preuve de 16.139. En effet si $I = [0, 1]$ et que nous recouvrons $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1]$ par une infinité d'intervalles chacun, nous ne pouvons plus les classer par ordre croissant.

PropULFoodgXrR

Proposition 16.143 ([508]).
La fonction ℓ ainsi définie est une mesure σ-finie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

[48] Lemme 11.19.
[49] Nous ne pouvons pas invoquer directement le lemme 16.16 parce que nous n'avons pas encore prouvé que ℓ était une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathcal{S}})$.

Démonstration. Le fait que ℓ soit σ-finie provient par exemple du fait que $\ell\big(]-n,n[\big) = 2n$ tandis que $\bigcup_n]-n,n[= \mathbb{R}$.

Nous devons à présent prouver que ℓ est additive. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, avec leurs décomposition minimales

$$A_i = \bigcup_{k=1}^{n} I_k^{(i)}. \tag{16.396}$$

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le lemme 16.141 nous indique que

$$\ell(A_i) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k^{(i)}). \tag{16.397}$$

L'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable et nous pouvons considérer la décomposition

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} I_k^{(i)}. \tag{16.398}$$

Cette décomposition n'est pas spécialement minimale[50] mais elle est disjointe. Le lemme 16.141 donne

$$\ell\big(\bigcup_i A_i\big) = \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \ell(I_k^{(i)}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k^{(i)}) \right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \ell(A_i). \tag{16.399}$$

La décomposition de la somme sur $\mathbb{N}^2$ en deux sommes sur $\mathbb{N}$ est faite en vertu de la proposition 12.157. □

16.8.1 Mesure et tribu de Lebesgue

ThoDESooEyDOe

Théorème 16.144.
Il existe une unique mesure λ sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$ telle que

$$\lambda\big(]a,b[\big) = b - a \tag{16.400}$$

pour tout $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'existence provient du théorème de prolongement de Hahn 16.82 : la mesure ℓ sur $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ se prolonge à $\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$.

Nous ne pouvons pas prouver l'unicité en invoquant la partie unicité de Hahn (c'est tentant parce que ℓ est σ-finie) parce que dans ce théorème nous ne fixons la valeur de λ que sur une toute petite partie de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Nous allons cependant voir que cette petite partie suffit à garantir l'unicité.

La classe

$$\mathcal{D} = \{]a,b[\text{ tel que } -\infty < a \leqslant b < +\infty\} \tag{16.401}$$

est stable par intersection finie et engendre la tribu borélienne. En effet $\mathcal{D}$ contient toutes les boules et donc une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (proposition 9.207). Donc tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{D})$ et $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc dire grâce au théorème 16.36 qu'il y a unicité de la mesure sur $\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})$ lorsque les valeurs sur $\mathcal{D}$ sont fixées. □

DefooYZSQooSOcyYN

Définition 16.145.
*La mesure de l'espace mesuré $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda\big)$ donné par le théorème 16.144 est la **mesure de Lebesgue** sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$.*

*Nous définissons aussi la **tribu de Lebesgue** par la proposition 16.79 : $\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}eb(\mathbb{R}), \lambda\big)$ est l'espace mesuré complété de $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda\big)$.*

Remarque 16.146.
Il n'est pas évident que la tribu de Lebesgue soit plus grande que celle des boréliens, ni que la tribu des parties soit plus grande que celle de Lebesgue. Nous mentionnons cependant les faits suivants.

(1) Il existe des ensembles mesurables non-boréliens, et cela ne nécessite pas l'axiome du choix. Un argument classique de cardinalité est donné dans [506]. La construction la plus explicite que j'aie trouvée est dans [525], mais ça a l'air de demander des connaissances précises sur les ordinaux.

[50] A_1 pourrait contenir $[0,1]$ et A_2 contenir $]1,2]$.

(2) Vu que l'ensemble de Cantor C est mesurable de mesure nulle (proposition 16.165), tout sous-ensemble de Cantor est mesurable de mesure nulle parce que la tribu de Lebesgue est complète par définition. Le cardinal de $\mathcal{P}(C)$ est strictement supérieur à la puissance du continu, alors que le cardinal de l'ensemble des boréliens est au plus égal à la puissance du continu. Donc il existe des non boréliens contenus dans Cantor ; de tels non boréliens sont alors mesurables au sens de Lebesgue.

(3) Si nous admettons l'axiome du choix alors il existe des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue. Nous en verrons un dans l'exemple 16.159.

Exemple 16.147 (Un ouvert contenant tous les rationnels et de mesure arbitrairement petite)**.**
Il est possible de construire un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et de mesure de Lebesgue plus petite que ϵ. Pour cela si (q_i) est une énumération des rationnels, il suffit de prendre

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(q_n, \frac{\epsilon}{2^{n+1}}). \tag{16.402}$$

Cela est un ouvert comme union d'ouverts, ça contient tous les rationnels, et sa mesure se majore. En effet le théorème 16.144 donne $\lambda\big(B(q_n, \frac{\epsilon}{2^n})\big) = \frac{\epsilon}{2^n}$. Vu que ces boules ne sont à priori pas disjointes, le lemme 16.23 donne

$$\lambda(\mathcal{O}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \tag{16.403}$$

par (12.517) avec $q = \frac{1}{2}$.

Par complémentarité, nous pouvons construire un ensemble fermé de mesure non nulle et ne contenant aucun rationnel. Et même un fermé dans $[0, 1]$, de mesure $1 - \epsilon$ ne contenant aucun rationnel.

Cela peut surprendre parce qu'il existe des tonnes de suites d'irrationnels qui convergent vers des rationnels[51], et il semble difficile de créer un ensemble contenant beaucoup d'irrationnels tout en préservant la propriété de fermeture vis-à-vis des suites convergentes. △

Exemple 16.148 (Mesure finie, non borné)**.**
Il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui sont de mesure finie sans être bornés. Par exemple en posant

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(n, \frac{1}{2^n}). \tag{16.404}$$

La partie A n'est pas bornée parce que que $\mathbb{N} \subset A$. Mais en termes de mesure,

$$\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \tag{16.405}$$

en vertu de la somme de la série géométrique, proposition 12.186. △

16.8.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue

Proposition 16.149.
Tout ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.

Démonstration. Un point de $\mathbb{R}$ est un intervalle de mesure nulle. Si D est dénombrable, il est union disjointes et dénombrable de points. Le lemme 16.141 nous dit alors que sa mesure est $\lambda(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{a_i\}) = 0$. □

Remarque 16.150.
Il existe cependant des ensembles non dénombrables et tout de même de mesure nulle. Par exemple l'ensemble de Cantor (voir la proposition 16.165).

PropooOACLooLMIUuY
Proposition 16.151.
La mesure de Lebesgue est invariante par translation, c'est-à-dire que si A est mesurable alors $\lambda(A) = \lambda(A + \alpha)$ pour tout réel α.

Démonstration. Nous commençons par les intervalles ouverts :

$$\lambda\big(]a, b[+ \alpha\big) = \lambda\big(]a + \alpha, b + \alpha[\big) = (b + \alpha) - (a + \alpha) = b - a = \lambda\big(]a, b[\big). \tag{16.406}$$

[51] Si $q \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors la suite $(q + r/10^k)_k$ est une suite d'irrationnels convergente vers le rationnel q.

D'après ce qui est dit dans l'exemple 16.38, la mesure de Lebesgue sur les boréliens est invariante par translation.

Si A est mesurable alors il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $A = B \cup N$ par la caractérisation 16.132b de la complétion. Alors $A + \alpha = B + \alpha \cup N + \alpha$ et $N + \alpha$ est encore un ensemble négligeable. Donc $\lambda(A + \alpha) = \alpha(B + \alpha) = \lambda(B)$. □

La mesure ℓ définie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ (voir proposition 16.143). La proposition 16.17 nous donne donc une mesure extérieure par

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(A_n); A_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}, X \subset \bigcup_n A_n\}. \tag{16.407}$$

EqJGXoogdKqb

La proposition suivante montre que cette mesure extérieure peut être exprimée seulement avec des intervalles ouverts.

PropTNOooDcfwn

Proposition 16.152.
Nous avons

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_{n\geqslant 1} \ell(I_n); I_n \text{ sont des intervalles ouverts et } X \subset \bigcup_n I_n\}. \tag{16.408}$$

Démonstration. Nous savons que dans la définition (16.407), chacun des A_n est une réunion disjointe d'intervalles (pas spécialement ouverts) deux à deux disjoints ; donc

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n); I_n \in \mathcal{S}, X \subset \bigcup_n I_n\}. \tag{16.409}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si $A \subset \bigcup_n I_n$, pour chaque $n \geqslant 1$ nous considérons un intervalle ouvert J_n tel que $I_n \subset J_n$ et $\ell(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \leqslant \ell(J_n)$. Faisant cela pour chacun des découpages de X en intervalles nous trouvons

$$\lambda^*(X) \leqslant \inf\{\sum_n \ell(J_n) \ J_n \text{ est ouvert et } X \subset \bigcup_n J_n\} + \epsilon. \tag{16.410}$$

Étant donné que ϵ est arbitraire nous avons l'égalité. □

PropMXIoojpKvd

Proposition 16.153 ([508])**.**
Si $X \subset \mathbb{R}$ est tel que $\lambda^*(X) < \infty$ alors

ItemGJUoozrDILi

(1) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que

$$\begin{cases} X \subset \Omega_\epsilon & \text{(16.411a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(16.411b)} \end{cases}$$

ItemGJUoozrDILii

(2) Il existe une intersection dénombrable d'ouverts G telle que

$$\begin{cases} X \subset G & \text{(16.412a)} \\ \lambda(G) = \lambda^*(X). & \text{(16.412b)} \end{cases}$$

Démonstration. Pour (1), la proposition 16.152 nous a déjà dit que

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n) \ I_n \text{ est un intervalle ouvert}, X \subset \bigcup_n I_n\}, \tag{16.413}$$

donc si $\epsilon > 0$, il existe des intervalles ouverts I_n tels que

$$\begin{cases} X \subset \bigcup_n I_n & \text{(16.414a)} \\ \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(16.414b)} \end{cases}$$

Si nous posons $\Omega_\epsilon = \bigcup_n I_n$, alors nous avons bien

$$\begin{cases} X \subset \Omega_\epsilon & \text{(16.415a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & \text{(16.415b)} \end{cases}$$

En ce qui concerne (2), pour chaque $k \geqslant 1$ nous considérons l'ensemble $\Omega_{1/k}$ obtenu comme précédemment avec $\epsilon = 1/k$ et nous posons $G = \bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_{1/k}$. Cela est une intersection dénombrable d'ouverts vérifiant $X \subset G$ (parce que $X \subset \Omega_{1/k}$ pour tout k) et donc $\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(G) = \lambda(G)$. De plus pour tout k nous avons

$$\lambda(G) \leqslant (\Omega_{1/k}) \leqslant \lambda^*(X) + \frac{1}{k} \tag{16.416}$$

pour tout k. En faisant $k \to \infty$ nous avons

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X). \tag{16.417}$$

Au final

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X) \leqslant \lambda(G), \tag{16.418}$$

d'où l'égalité. □

Corolaire 16.154.
Une partie $N \subset \mathbb{R}$ est négligeable[52] *si et seulement si $\lambda^*(N) = 0$.*

Démonstration. Nous savons que si N est négligeable il existe un borélien Y tel que $N \subset Y$ avec $\lambda(Y) = 0$. Par conséquent[53]

$$\lambda^*(N) \leqslant \lambda^*(Y) = \lambda(Y) = 0. \tag{16.419}$$

Pour l'implication inverse nous supposons que $\lambda^*(N) = 0$ et nous prenons l'ensemble G défini par la proposition 16.153(2) : c'est un borélien contenant N et tel que $\lambda(G) = \lambda^*(N) = 0$. L'ensemble N est donc négligeable. □

ThoHFXooONFRN

Théorème 16.155 (Régularité extérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Pour tout mesurable $A \subset \mathbb{R}$ nous avons

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(\Omega); \Omega \text{ ouvert contenant } A\}. \tag{16.420}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où B est un borélien.

(1) **Si B borélien, $\lambda(B) < \infty$**

Soit $\epsilon > 0$; par la proposition 16.153(1) il existe un ouvert Ω_ϵ contenant B tel que $\lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda^*(B) + \epsilon$. Vu qu'ici B est borélien, $\lambda^*(B) = \lambda(B)$ et nous concluons que pour tout ϵ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que

$$\begin{cases} B \subset \Omega_\epsilon & \text{(16.421a)} \\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda(B) + \epsilon, & \text{(16.421b)} \end{cases}$$

et donc

$$\lambda(B) = \inf\{\lambda(\Omega);\ \Omega \text{ ouvert contenant } B\ \}. \tag{16.422}$$

(2) **Si B borélien, $\lambda(B) = +\infty$**

Dans ce cas l'infimum est pris uniquement sur des ouverts Ω tels que $\lambda(\Omega) = \infty$.

(3) **Si A est mesurable non borélien**

Nous passons maintenant au cas où A est mesurable sans être borélien. Il s'écrit donc $A = B \cup N$ avec B borélien et N négligeable par la proposition 16.71, et par définition $\lambda(A) = \lambda(B)$. Si Y est un borélien tel que $N \subset Y$ et $\lambda(Y) = 0$ alors

$$\begin{aligned}
\lambda(A) = \lambda(B) &= \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && \text{(16.423a)} \\
&\leqslant \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \cup N \subset \Omega\} && \text{(16.423b)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega', Y'}\{\lambda(\Omega' \cup Y') \text{ tel que } \Omega', Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && \text{(16.423c)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega', Y'}\{\lambda(\Omega') + \lambda(Y') \text{ tel que } \Omega', Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && \text{(16.423d)} \\
&\leqslant \inf_{\Omega'}\{\lambda(\Omega') \text{ tel que } \Omega' \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && \text{(16.423e)} \\
&= \lambda(B). && \text{(16.423f)}
\end{aligned}$$

subeqMTHoopkSKOi subeqMTHoopkSKOii subeqMTHoopkSKOiii subeqMTHoopkSKOiv subeqMTHoopkSKOv

Justifications :

[52] Définition 16.68.
[53] Au péril d'être lourd nous rappelons que λ^* est défini sur toutes les parties de $\mathbb{R}$.

- (16.423a) Le cas borélien déjà fait.
- (16.423b) Les ouverts Ω tels que $B\cup N\subset\Omega$ vérifient a fortiori $B\subset\Omega$; nous avons donc agrandit l'ensemble sur lequel l'infimum est pris.
- (16.423c) Parmi les ouverts Ω qui recouvrent $B\cup N$, il y a ceux de la forme $\Omega'\cup Y'$ où Ω' recouvre B et Y' est un ouvert contenant Y. Donc nous avons rétréci l'ensemble sur lequel l'infimum est pris et par conséquent agrandit l'infimum.
- (16.423d) Mesure d'une union majorée par la somme des mesures.
- (16.423e) Vu que Y est borélien, $\lambda(Y)=\inf_{Y'\text{ ouvert}}\{\lambda(Y')\text{ tel que }Y\subset Y'\}=0$. Donc pour tout Ω' et tout $\epsilon>0$, nous pouvons trouver un Y' vérifiant les conditions tel que $\lambda(\Omega')+\lambda(Y')\leqslant\lambda(\Omega')+\epsilon$.

Toutes les inégalités sont des égalités en en particulier (16.423b) donne

$$\lambda(A)=\inf\{\lambda(\Omega)\text{ tel que }\ \Omega\text{ ouvert}, B\cup N\subset\Omega\},\tag{16.424}$$

ce qu'il fallait.

□

PropEZNoofLkVb

Proposition 16.156 ([508]).
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ et si $\epsilon>0$ alors il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que subeqHNEooaNqDu

$$\begin{cases} F_\epsilon\subset A\subset\Omega_\epsilon & (16.425a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon\setminus F_\epsilon)\leqslant\epsilon. & (16.425b)\end{cases}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où A est un borélien, que nous noterons B.

(1) **Première étape**

Montrons qu'il existe un ouvert U_ϵ tel que

$$\begin{cases} B\subset U_\epsilon & (16.426a)\\ \lambda(U_\epsilon\setminus B)\leqslant\frac{\epsilon}{2}. & (16.426b)\end{cases}$$

Si $\lambda(B)<\infty$ alors le théorème 16.155 nous donne un ouvert U_ϵ tel que $B\subset U_\epsilon$ et $\lambda(U_\epsilon)\leqslant\lambda(B)+\frac{\epsilon}{2}$. Nous avons alors

$$\lambda(\Omega_\epsilon\setminus B)=\lambda(\Omega_\epsilon)-\lambda(B)\leqslant\frac{\epsilon}{2}.\tag{16.427}$$

Si par contre $\lambda(B)=\infty$, nous posons $B_n=B\cap[-n,n]$ et $\epsilon_n=\epsilon/2^{n+1}$. Pour chaque n nous avons un ouvert Ω_n tel que

$$\begin{cases} B_n\subset\Omega_n & (16.428a)\\ \lambda(\Omega_n\setminus B_n)\leqslant\frac{\epsilon}{2^{n+1}} & (16.428b)\end{cases}$$

Par conséquent en posant $\Omega=\bigcup_{n\geqslant1}\Omega_n$ nous avons[54]

$$\begin{cases} B\subset\Omega & (16.429a)\\ \lambda(\Omega\setminus B)\leqslant\lambda\big(\bigcup_n(\Omega_n\setminus B_n)\big)\leqslant\sum_{n\geqslant1}\lambda(\Omega_n\setminus B_n)=\frac{\epsilon}{2}. & (16.429b)\end{cases}$$

La première étape est terminée.

(2) **Deuxième étape**

Nous prouvons à présent qu'il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que

$$\begin{cases} F_\epsilon\subset B\subset\Omega_\epsilon & (16.430a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon\setminus B)\leqslant\frac{\epsilon}{2} & (16.430b)\\ \lambda(B\setminus F_\epsilon)\leqslant\frac{\epsilon}{2}. & (16.430c)\end{cases}$$

[54] Nous utilisons la petite relation ensembliste $\big(\bigcup_n A_n\big)\setminus\big(\bigcup_n B_n\big)\subset\bigcup_n(A_n\setminus B_n)$.

L'ouvert Ω_ϵ, nous l'avons déjà de l'étape précédente. Pour le fermé, nous appliquons la première étape au borélien B^c ; ce qui nous trouvons est un ouvert G_ϵ tel que

$$\begin{cases} B^c \subset G_\epsilon & (16.431a)\\ \lambda(G_\epsilon \setminus B^c) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. & (16.431b)\end{cases}$$

En posant $F_\epsilon = G_\epsilon^c$ nous avons un fermé tel que $F_\epsilon \subset B$ et

$$\lambda(B \setminus F_\epsilon) = \lambda(F_\epsilon^c \setminus B^c) = \lambda(G_\epsilon \setminus B^c) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. \tag{16.432}$$

(3) **Dernière étape**

Les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ trouvés à la deuxième étape donnent bien les relations (16.425). En effet $\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon = (\Omega_\epsilon \setminus B) \cup (B \setminus F_\epsilon)$, donc

$$\lambda(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \lambda(\Omega_\epsilon \setminus B) + \lambda(B \setminus F_\epsilon) = \epsilon. \tag{16.433}$$

Nous passons au cas où $A = B \cup N$ est mesurable. Nous commençons par prendre les Ω_ϵ et F_ϵ qui correspondent à B :

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon & (16.434a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon. & (16.434b)\end{cases}$$

Soit Y un borélien tel que $N \subset Y$ et $\lambda(Y) = 0$ puis un ouvert Y' tel que $\lambda(Y') \leqslant \epsilon$ et $Y \subset Y'$. L'existence d'un tel Y' est assurée par la proposition 16.155 appliquée à Y. Nous vérifions que les ensembles F_ϵ et $\Omega_\epsilon \cup Y'$ fonctionnent. En effet $\Omega_\epsilon \cup Y' \setminus F_\epsilon \subset (\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \cup Y'$, donc

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \cup N \subset \Omega_\epsilon \cup Y' & (16.435a)\\ \lambda\big((\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon)\big) \leqslant \lambda(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) + \lambda(Y') \leqslant 2\epsilon. & (16.435b)\end{cases}$$

Donc en réalité il faut choisir $\Omega_{\epsilon/2}$, $F_{\epsilon/2}$ et $\lambda(Y') \leqslant \epsilon/2$. □

THOooJNMCooPMvCDq

Théorème 16.157 (Régularité intérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ alors

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K); K \text{ compact contenu dans } A\}. \tag{16.436}$$

Démonstration. Par la proposition 16.156 nous avons

$$\lambda(A) = \sup_{F \text{ fermé dans } A} \lambda(F). \tag{16.437}$$

EqTPEooUHThH

Pour un tel F nous posons $K_n = F \cap [-n, n]$ qui est compact[55] et contenu dans B. De plus le lemme 16.24(2) nous dit que

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) \tag{16.438}$$

Donc tous les $\lambda(F)$ peuvent être arbitrairement approchés par un $\lambda(K)$ avec K compact dans A, et le supremum (16.437) n'est pas affecté en nous restreignant à prendre des compacts contenus dans B :

$$\lambda(A) = \sup_{F \text{ fermé dans } A} \lambda(F) = \sup_{K \text{ compact dans } A} \lambda(K). \tag{16.439}$$

□

16.8.3 Fonctions mesurables

Lemme 16.158.
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\lambda(f \neq 0) > 0$. Alors il existe une partie mesurable M et $m > 0$ tels que $\lambda(M) > 0$ et $f(x) > m$ pour tout $x \in M$.

[55] parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 11.23.

Démonstration. Nous notons

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > 0\}, \tag{16.440}$$

et nous supposons que $\lambda(D) > 0$ pour fixer les idées (si ce n'est pas le cas, nous prenons pour D la partie où f est strictement négative).

Nous posons

$$A_1 = [1, \infty[\tag{16.441a}$$

$$A_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[. \tag{16.441b}$$

Ces parties A_n sont disjointes ; donc les parties

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in A_n\} \tag{16.442}$$

sont également disjointes. Vu que $\bigcup_n A_n =]0, \infty[$, nous avons $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Vu que

$$\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n) > 0, \tag{16.443}$$

il existe au moins un N tel que $\lambda(D_N) > 0$. Pour $x \in D_N$ nous avons

$$f(x) \in A_N = [\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}[. \tag{16.444}$$

Donc pour $x \in D_N$ nous avons $f(x) > \frac{1}{N}$. □

16.8.4 Ensemble de Vitali (non mesurable)

EXooCZCFooRPgKjj

Exemple 16.159 (Un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue[526])**.**
Nous considérons l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; chaque classe intersecte l'intervalle $[0, 1]$. Grâce à l'axiome du choix (voir 1.14) nous pouvons construire un ensemble V contenant un représentant dans $[0, 1]$ de chaque classe. Un tel ensemble est un **ensemble de Vitali**. Nous allons prouver que V n'est pas mesurable.

Supposons que V soit mesurable. Alors tous les ensembles de la forme $V + q$ ($q \in \mathbb{Q}$) sont mesurables et ont même mesure par la proposition 16.151. Nous posons

$$A = \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} (V + q) \subset [-1, 2]. \tag{16.445}$$

Cela est une union disjointe d'ensembles mesurables. Donc

$$\lambda(A) = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} \lambda(V + q). \tag{16.446}$$

Vu que $A \subset [-1, 2]$ nous avons $\lambda(A) \leqslant 3$ et donc tous les termes de la somme doivent être nuls. Nous avons donc $\lambda(A) = 0$.

Prouvons toutefois que $[0, 1] \subset A$, ce qui serait une contradiction. Soit $x \in [0, 1]$; il est dans une des classes de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et donc il existe $v \in V$ tel que $x - v \in \mathbb{Q}$. De plus $x, v \in [0, 1]$, donc

$$-1 \leqslant x - v \leqslant 1. \tag{16.447}$$

Cela fait que $x \in V + (x - v) \subset A$. Nous avons donc $x \in A$ et donc $[0, 1] \subset A$. En conséquence de quoi nous aurions $\lambda(A) \geqslant 1$. △

16.8.5 Ensemble de Cantor

Nous considérons la fonction donnant l'écriture décimale des nombres définie en (12.541).

DefIYDooVIDJs

Définition 16.160 (Ensemble de Cantor)**.**
Soit $K_0 = [0, 1[$ et les ensembles K_n définis par la récurrence

$$K_{n+1} = (\frac{1}{3}K_n) \cup (\frac{1}{3}(K_n + 2)). \tag{16.448}$$

L'ensemble

$$K = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n \tag{16.449}$$

*est l'**ensemble triadique de Cantor**.*

Les principales propriétés de l'ensemble de Cantor sont qu'il est non dénombrable (proposition 16.164) et borélien de mesure nulle (proposition 16.165).

16.161.
L'idée de base pour prouver que l'ensemble K est non dénombrable est que ses éléments sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. En prenant un nombre sans 1 écrit en base 3, en changeant tous les 2 en 1 et en lisant le résultat en base 2, nous obtenons tous les nombres possibles en base 2 et donc une quantité non dénombrable. L'idée est donc simple et astucieuse. La mise en musique est un peu plus délicate parce qu'il faut faire attention aux queues de suites ; c'est pour cela que nous avons construit l'ensemble de Cantor en partant de $[0,1[$ et non de $[0,1]$.

Le lemme suivant dit précisément ce que nous entendons en disant que les éléments de l'ensemble de Cantor sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. Nous rappelons que $\mathbb{D}_3$ est l'ensemble des suites constituées de 0, 1 et 2, et qui ne se terminent pas par une suite infinie de 2, voir 12.193 pour une définition précise.

LemAZGoosKzEm

Lemme 16.162 ([1])**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{D}_3$ (définition 12.193) ; nous avons $\varphi_3(x) \in K_n$ si et seulement si $x_1, \dots, x_n \in \{0,2\}$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence en commençant avec $n = 1$. Si $x_1 = 1$ alors

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[. \tag{16.450}$$

Notons que $\varphi_3(x) = \frac{2}{3}$ est impossible parce que ça demanderait une queue de suite de 2. Par conséquent $\varphi_3(x) = [0,1[\backslash[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= K_1$.

Nous passons à la récurrence.

(1) **Sens direct**

Nous supposons que $x_1, \dots, x_{n+1} \in \{0,2\}$ et nous montrons que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$. Nous considérons deux cas suivant que x_1 vaut 0 ou 1. Pour comprendre pourquoi nous divisons les cas suivant la valeur de x_1 et non de x_n, faire un dessin de comment K_n se transforme en K_{n+1} et remarquer dans K_2, les deux premiers segments ne sont pas une division du premier segment de K_1, mais bien une copie des *deux* segments de K_1.

Écrivons encore $\varphi_3(x)$:

$$\varphi_3(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{3^k} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}. \tag{16.451}$$

(1a) **Si $x_1 = 0$** Alors nous avons

$$3\varphi_3(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi_3(x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \tag{16.452}$$

Vu que par hypothèse $x_2, \dots, x_{n+1}$ sont dans $\{0,2\}$ nous avons $3\varphi_3(x) \in K_n$ par hypothèse de récurrence. Cela implique que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

(1b) **Si $x_1 = 2$** Alors

$$\varphi_3(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \tag{16.453}$$

et

$$3\varphi_3(x) - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{16.454}$$

et donc là nous avons $3\varphi_3(x) - 2 \in K_n$, ce qui implique encore $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

(2) **Sens réciproque**

Nous devons maintenant prouver que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$ implique $x_1, \dots, x_{n+1} \in \{0,2\}$. Par le même calcul que précédemment nous avons soit

$$3\varphi_3(x) = \varphi_3(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{16.455}$$

si $x_1 = 0$, soit

$$3\varphi_3(x) - 2 = \varphi_3(x_2, \dots, x_{n+1}, \dots), \tag{16.456}$$

si $x_1 = 2$. Dans les deux cas, si $x_l = 1$ pour un certain $2 \leqslant l \leqslant n+1$, alors l'hypothèse de récurrence donne que ces éléments ne sont pas dans K_n et donc $\varphi_3(x)$ pas dans K_{n+1}.

□

CorSEDooJmeXt

Corolaire 16.163 ([1]).
En posant $\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{D}_3$ tel que $x_i \neq 1 \forall i\}$ nous avons $K = \varphi_3(\mathbb{E})$. Et plus précisément, $\varphi_3 : \mathbb{E} \to K$ est une bijection.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois étapes.

(1) **Image contenue dans K** Si $x \in \mathbb{E}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons $x_1, \dots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc $\varphi_3(x) \in K_n$ par la proposition 16.162. Donc

$$\varphi_3(x) \in \bigcap_{n \geqslant 1} K_n = K. \tag{16.457}$$

(2) **Injective** L'application $\varphi_3 : \mathbb{E} \to K$ est injective parce qu'elle est déjà injective depuis $\mathbb{D}_3$.

(3) **Surjective** Soit $p \in K \subset [0, 1[$. Vu que $\varphi_3 : \mathbb{D}_3 \to [0, 1[$ est surjective (théorème 12.196), il existe $x \in \mathbb{D}_3$ tel que $\varphi_3(x) = p$. Pour tout n nous avons $\varphi_3(x) \in K_n$ et donc $x_1, \dots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc au final $x \in \mathbb{E}$.

□

PropTPPooDySbm

Proposition 16.164 ([1]).
L'ensemble de Cantor est non dénombrable.

Démonstration. Nous avons prouvé à la proposition 12.197 que l'ensemble $\mathbb{D}_2$ n'était pas dénombrable. Nous allons à présent prouver que l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{D}_2 &\to K \\ c &\mapsto \varphi_3(c \text{ en remplaçant les 1 par des 2}) \end{aligned} \tag{16.458}$$

est une bijection. Le fait que ψ soit injective est une conséquence du fait que ce soit la composition de deux applications injectives (le remplacement et φ_3). Il faut par contre montrer que l'image est égale à K, en notant qu'il n'est pas évident à priori que l'image soit contenue dans K.

L'opération qui consiste à remplacer les 1 par des 2 est une bijection $\mathbb{D}_2 \to \mathbb{E}$. Le corolaire 16.163 nous dit aussi que $\varphi_3 : \mathbb{E} \to K$ est une bijection. En tant que composée de bijections, ψ est une bijection.

Étant en bijection avec $\mathbb{D}_2$ qui n'est pas dénombrable par la proposition 12.197, l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable. □

PropBEWooXZdKN

Proposition 16.165 (Ensemble de Cantor).
L'ensemble de Cantor[56] est borélien, non dénombrable et de mesure nulle.

Démonstration. Nous reprenons les notations de la définition 16.160. Le fait que l'ensemble de Cantor soit non dénombrable a été prouvé dans la proposition 16.164.

L'ensemble de Cantor étant une intersection dénombrable de boréliens, il est borélien par le lemme 16.3. Vu que $K_n \subset [0, 1[$ nous avons $\frac{1}{3}K_n \leqslant \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}(K_n + 2) \geqslant \frac{2}{3}$, donc K_n est une union disjointe de 2^n intervalles de mesure $2/3^n$. Nous avons donc

$$\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n. \tag{16.459}$$

L'ensemble de Cantor étant contenu dans chacun des K_n, sa mesure est plus petite que la mesure de chacun des K_n (lemme 16.23) et donc $\lambda(K) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n ; ergo $\lambda(K) = 0$. □

16.8.6 Mesure positive sans intervalle

Vu que la mesure de Lebesgue est basée sur la mesure des intervalles et quelques extensions, nous sommes en droit de croire qu'une partie de mesure strictement positive de $\mathbb{R}$ doit toujours contenir un intervalle, éventuellement à partie de mesure nulle près. Eh bien non.

[56] Définition 16.160

EXooVZVIooXZvDaE

Exemple 16.166 ([527]).
Soient une énumération (q_i) de $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ et une suite (r_i) telle que $\sum_{i=0}^{\infty} r_i < \frac{1}{2}$. Quitte à prendre r_i plus petit, supposons de plus que $B(q_i, r_i) \subset [0,1]$.

Nous posons $J_n = B(q_n, r_n/2)$, $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ et

$$B = [0,1] \setminus J. \tag{16.460}$$

Les parties J_i ne sont pas disjointes, donc, en notant λ la mesure de Lebesgue,

$$0 < \lambda(J) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(J_i) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{16.461}$$

Mais, par définition, l'union $[0,1] = B \cup J$ est disjointe, donc

$$1 = \lambda\big([0,1]\big) = \lambda(J) + \lambda(B). \tag{16.462}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda(B) \leqslant 1. \tag{16.463}$$

Je plaide que cette partie B ne contient non seulement aucun intervalle, mais qu'il est impossible de le compléter par une partie de mesure nulle pour obtenir un intervalle.

Soit un intervalle I dans $[0,1]$. Il existe $q_i \in I$ et donc[57]

$$J_i \subset B \setminus I. \tag{16.464}$$

Donc il n'existe pas de parties de mesure nulle qui, ajoutée à B, contiendrait I. △

Vous voulez un truc dingue à propos de la partie J de l'exemple 16.166 ? Le théorème 16.157 nous dit qu'il existe dans J des compacts de mesure arbitrairement proches de $\lambda(J)$. Il existe donc des compacts non seulement de mesure strictement positive mais même de mesure assez grande, tout en étant infiniment découpés.

16.9 Intégrale par rapport à une mesure

16.167.
Nous n'en avons pas encore terminé avec la théorie de la mesure, mais nous devons quand même définir les intégrales et voir quelques propriétés avant de continuer avec la mesure parce que la définition de la mesure sur un espace mesurable produit[58] passe par une intégrale.

NORMooFZEDooIxSgLe

16.168.
En théorie de l'intégration, la convention est la suivante : pour une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$, nous considérons sur X la tribu des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur X, *tout en gardant celle des boréliens sur l'ensemble d'arrivée*. C'est-à-dire qu'en théorie de l'intégration, c'est

$$f\colon \big(X, \mathcal{L}\mathrm{eb}(X)\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R})\big). \tag{16.465}$$

En particulier, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sera mesurable si pour tout borélien A de $\mathbb{R}^m$ l'ensemble $f^{-1}(A)$ est Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné qu'il est franchement difficile de créer des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue, il est franchement difficile de créer des fonctions non mesurables à valeurs réelles. L'hypothèse de mesurabilité est donc toujours satisfaite dans les cas pratiques.

Voir aussi le point 16.122, et les résultats qui suivent.

16.9.1 Définition pour les fonctions à valeurs positives

Voir le thème 30.

Une mesure μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ permet de définir une fonctionnelle linéaire sur l'ensemble des fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$. Cette fonctionnelle linéaire est l'intégrale que nous allons définir à présent.

[57] C'est ici que nous utilisons le fait que r_i est choisi pour que $B(q_i, r_i)$ ne déborde pas de $[0,1]$. Sinon il aurait fallu chipoter et prendre seulement une partie de la boule.

[58] Théorème 16.248.

DefTVOooleEst

Définition 16.169.
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Notre but est de définir

$$\int_Y f d\mu \tag{16.466}$$

*que nous nommons **intégrales de** f sur Y pour la mesure μ.*

(1) ITEMooQVEAooZhRtUG **Fonction étagée** *Si $f : \Omega \to [0, \infty[$ est une fonction étagée[59], et si sa forme canonique[60] est $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors nous définissons*

$$\int_Y f d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(Y \cap A_i). \tag{16.467}$$

EqooGAFMooZLziPs

(2) ITEMooQGKEooZVhHHq **Fonction mesurable à valeurs positives** *Pour une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f : \Omega \to [0, \infty]$ nous définissons l'intégrale de f sur Y par*

$$\int_Y f d\mu = \sup \Big\{ \int_Y \psi d\mu \text{ où } \psi \text{ est une fonction étagée finie telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant f \Big\}. \tag{16.468}$$

EqDefintYfdmu

CORooZPLOooXgbtDs

Corolaire 16.170 ([1]).
Si $f : Z \to [0, \infty]$ sur $Z \subset \Omega$ et si $\mu(Z) = 0$, alors

$$\int_Z f = 0. \tag{16.469}$$

Démonstration. Notons d'abord que si A est une partie mesurable de Z, alors $\mu(A) = 0$ par le lemme 16.19. Si f ne prend que des valeurs finies, tous les termes de (16.467) sont nuls.

Si une fonction prends des valeurs infinies, la partie (1) de la définition n'est pas applicable. La partie (2) demande alors de prendre un supremum sur des fonctions qui rentrent dans la partie (1).

Si ψ est une fonction étagée finie sur Z, alors $\int_Z \psi = 0$ parce que tous les termes de (16.467) sont nuls. □

Remarque 16.171 (Pourquoi se limiter aux fonctions positives)**.**
Toute fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ est intégrable (l'intégrale vaut éventuellement $+\infty$). Au moment où une fonction commence à prendre des valeurs positives et négatives, nous demandons à pouvoir intégrer séparément les parties positives et négatives. C'est pour cela que nous disons qu'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable si $|f|$ l'est.

16.172.
Le nombre $\int_0^\infty f$ est défini directement par (16.468) complètement indépendamment d'une éventuelle limite $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f$. Cette limite sera traitée dans le lemme 16.264.

NORMooXTGBooKDnAhZ

16.173.
Si la fonction n'est pas mesurable ? Alors nous n'avons pas défini son intégrale. Supposons la plus simple des fonctions non mesurables sur Ω : la fonction indicatrice d'une partie non mesurable :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.470}$$

où $A \subset \Omega$ n'est pas mesurable[61].

Nous supposons que l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est complet (définition 16.70). Vu que A n'est pas mesurable, il n'est pas contenu dans une partie négligeable (parce que l'espace est complet), et nous voulons que l'intégrale ne soit pas nulle ; sinon on se demande bien à quoi sert une intégrale.

Toute fonction étagée minorant f est forcément nulle en dehors de A. Dès que B est une partie mesurable de mesure non nulle dans A, le complémentaire de B dans A est encore non mesurable, et nous voulons encore que l'intégrale de f sur ce complémentaire soit non nulle.

Mais comme A n'est pas mesurable et que $\mathbb{1}_A$ n'est le supremum d'aucune suite de fonctions mesurables (lemme 16.102), bien que le supremum qui définirait l'intégrale de f existe (toute partie de $\mathbb{R}$ a un supremum), il est sans espoir que ce supremum ait un sens que l'on puisse interpréter en tant que mesure de f.

[59] Définition 16.114.
[60] Définition 16.115. C'est le fait d'utiliser la forme canonique qui nous épargne de devoir prouver que la formule (16.467) ne dépend pas de choix.
[61] Ça existe, par exemple 16.159.

LEMooHAUGooWITETb

Lemme 16.174.
L'intégrale d'une fonction positive nulle presque partout est nulle.

Démonstration. Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et une fonction mesurable $f\colon \Omega \to [0,\infty]$. Nous posons

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\}. \tag{16.471}$$

L'hypothèse est que $\mu(\Omega_+) = 0$. Nous devons prouver que $\int_\Omega f d\mu = 0$. Vu que f est positive, nous utilisons la définition 16.467. Soit une fonction étagée positive ψ minorant f. Nous la décomposons en

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mathbb{1}_{A_k} \tag{16.472}$$

où les A_k sont mesurables et $\psi_k \in [0,\infty[$. Nous allons prouver que $\psi_i \mu(A_k) = 0$ pour tout k, en séparant trois cas.

(1) **Si $A_k \cap \Omega_+ = \varnothing$** Soit $x \in A_k$. Nous avons

$$0 = \psi(x) = \sum_k \psi_k \mathbb{1}_{A_k}(x) = \psi_k. \tag{16.473}$$

Donc $\psi_k = 0$.

(2) **Si $A_k \subset \Omega_+$** Alors, par le lemme 16.23, $\mu(A_k) \leqslant \mu(\Omega_+) = 0$ et donc $\psi_k \mu(A_k) = 0$.

(3) **Si $A_k \cap \Omega_+ \neq A_k$** Soit $x \in A_k \setminus \Omega_+$. Nous avons

$$\psi_k = \psi(x) \leqslant f(x) = 0, \tag{16.474}$$

et donc encore $\psi_k = 0$.

Nous avons donc prouvé que pour toute fonction étagée positive minorant f,

$$\int_\Omega \psi d\mu = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu(A_k) = 0. \tag{16.475}$$

Le supremum est donc nul. □

16.9.2 Premières propriétés

16.175.
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable, et si Y est un élément de $\mathcal{A}$, nous avons l'espace mesurable $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ donné par

- $\mathcal{A}_y = \{B \cap Y \text{ tel que } B \in \mathcal{A}\}$,
- $\mu_Y = \mu$.

Et là, nous arrivons à un problème de notations parce que $\int_Y f d\mu$ peut désigner l'intégrale de f sur Y dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ou l'intégrale de f sur Y dans $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

Heureusement, nous allons tout de suite montrer que ces deux choses sont identiques.

Lemme 16.176.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Nous considérons une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable sur Y.

Alors, avec des notations que j'espère être claires,

(1) f est $\mathcal{A}_Y$-mesurable,

(2) f est $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$-intégrable,

(3) nous avons l'égalité

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} f|_Y = \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} f. \tag{16.476}$$

Démonstration. Nous considérons les deux ensembles suivants :

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } Y \text{ et majorées par } f|_Y\} \tag{16.477a}$$
$$S_2 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ et majorées par } f\}. \tag{16.477b}$$

Nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} s\colon S_1 &\to S_2 \\ s(\psi)(x) &= \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{16.478}$$

L'application s est une bijection.

Pour $\psi \in S_1$ nous avons

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mathbb{1}_{A_k}|_Y \tag{16.479}$$

avec $A_k \in \mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}$ et $\mathbb{1}_{A_k}|_Y \colon Y \to \{0,1\}$. Nous avons aussi

$$s(\psi) = \sum_{k} \psi_k \mathbb{1}_{A_k} \tag{16.480}$$

avec $\mathbb{1}_{A_k} \colon \Omega \to \{0,1\}$.

En ce qui concerne les intégrales de ces fonctions étagées, nous avons

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu_Y(A_k \cap Y) \tag{16.481a}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu(A_k) \tag{16.481b}$$
$$= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi). \tag{16.481c}$$

SUBEQooGWYGooOuucEo

Justifications. Pour passer à (16.481b) nous avons utilisé d'abord que $A_k \subset Y$ et ensuite que $\mu_Y(A_k) = \mu(A_k)$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver l'égalité du lemme. Nous avons ceci :

$$\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} f|_Y = \sup\{\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\} \tag{16.482a}$$
$$= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi) \text{ tel que } \psi \in S_1\} \tag{16.482b}$$
$$= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} \varphi \text{ tel que } \varphi \in S_2\} \tag{16.482c}$$
$$= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} f. \tag{16.482d}$$

□

LemooPJLNooVKrBhN

Lemme 16.177.
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et si $B \in \mathcal{A}$ alors

$$\mu(B) = \int_B 1 d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_B. \tag{16.483}$$

Démonstration. La fonction caractéristique d'une partie mesurable est une fonction étagée dont la forme canonique est $\mathbb{1}_B = 1 \cdot \mathbb{1}_B + 0 \times \mathbb{1}_{B^c}$. Son intégrale est donc

$$\int \mathbb{1}_B d\mu = 1 \times \mu(B) + 0 \times \mu(B^c) = \mu(B) \tag{16.484}$$

parce que $0 \times \mu(B^c) = 0$, même si $\mu(B^c) = \infty$, comme nous l'avons convenu en 16.95. □

PROPooGTMVooPHcrRl

Proposition 16.178 ([1]).
Soient une fonction $f\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ et une fonction g intégrable sur Ω telle que $f \leqslant g$. Alors f est intégrable.

Démonstration. Une fonction étagée qui minore f minore également g. Donc l'ensemble sur lequel il faut faire le supremum pour définir $\int_\Omega f$ est inclus dans celui pour $\int_\Omega g$. Le second supremum étant fini, le premier l'est également. □

LEMooSPOFooBxDEAV

Lemme 16.179.
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et $Y \in \mathcal{A}$. Nous avons :

$$\int_Y f d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_Y d\mu. \tag{16.485}$$

EQooSBDKooPTDEer

Démonstration. En plusieurs parties, selon la généralité.

(1) **Si f est étagée** Nous posons $f = \sum_{k=1}^n f_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $f_k \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas,

$$f\mathbb{1}_Y = \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k \cap Y} \tag{16.486}$$

est encore une fonction étagée. Donc nous avons d'une part

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k \cap Y} = \sum_k f_k \mu(A_k \cap Y), \tag{16.487}$$

et d'autre part,

$$\int_Y f d\mu = \sum_k f_k \mu(Y \cap A_k), \tag{16.488}$$

(2) **Si f est à valeurs positives** Nous posons

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y\} \tag{16.489}$$

et

$$S_2 = \{\psi\mathbb{1}_Y \text{ tel que } \psi \text{ étagée avec } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{16.490}$$

Nous prouvons que $S_1 = S_2$.

Si $\psi \in S_1$, alors

$$0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y \leqslant f. \tag{16.491}$$

De plus comme $\psi = 0$ hors de Y nous avons $\psi = \psi\mathbb{1}_Y$.

Pour l'autre inclusion, soit $0 \leqslant \psi \leqslant f$ pour une fonction étagée ψ et montrons que $\psi\mathbb{1}_Y \in S_1$. L'application $\psi\mathbb{1}_Y$ est étagée sur Ω et vérifie

$$0 \leqslant \psi\mathbb{1}_Y \leqslant f\mathbb{1}_Y \tag{16.492}$$

parce que $\psi \leqslant f$.

(3) **L'égalité à prouver** Dans l'égalité 16.485 à prouver, le membre de droite est, d'après la définition 16.468,

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \sup\{\int \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\}. \tag{16.493}$$

Il nous reste donc à prouver que $\int_Y f$ se calcule de la même façon avec les éléments de S_2. D'abord nous copions la définition :

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y \psi \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{16.494}$$

Ensuite nous réfléchissons un peu. Si $0 \leqslant \psi \leqslant f$ avec $\psi = \sum_k \psi_k \mathbb{1}_{A_k}$, alors

$$\int_Y \psi = \sum_k \mu(A_k \cap Y)\psi_k = \int_Y \psi\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \psi\mathbb{1}_Y. \tag{16.495}$$

La dernière égalité est la partie déjà faite, à propos des fonctions étagées. Nous avons donc bien

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y s \text{ tel que } s \in S_2\}. \tag{16.496}$$

□

16.9.3 Propriétés plus avancées

16.9.3.1 Convergence monotone

Le théorème suivant est très utile parce que le théorème fondamental d'approximation 16.120 donne les fonctions étagées qu'il faut.

ThoRRDooFUvEAN

Théorème 16.180 (Théorème de la convergence monotone ou de Beppo-Levi[528])**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors la limite ponctuelle $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, est mesurable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu, \tag{16.497}$$

EqFHqCmLV

cette intégrable valant éventuellement ∞.

Démonstration. La limite ponctuelle de la suite est la fonction à valeurs dans $[0, \infty]$ donnée par

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{16.498}$$

Ces limites existent parce que pour chaque x la suite $f_n(x)$ est une suite numérique croissante. Nous notons

$$I_0 = \int_\Omega f d\mu. \tag{16.499}$$

Nous posons par ailleurs

$$I_n = \int_\Omega f_n. \tag{16.500}$$

Cela est une suite numérique croissante qui a par conséquent une limite que nous notons $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Notre objectif est de montrer que $I = I_0$. D'abord par croissance de la suite, pour tous n nous avons $I_n \leqslant I_0$, par conséquent $I \leqslant I_0$.

Nous prouvons maintenant l'inégalité dans l'autre sens en nous servant de la définition (16.468). Soit une fonction étagée h telle que $h \leqslant f$, et une constante $0 < C < 1$. Nous considérons les ensembles

$$E_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } f_n(x) \geqslant Ch(x)\}. \tag{16.501}$$

Ces ensembles vérifient les propriétés $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Pour chaque n nous avons les inégalités

$$\int_\Omega f_n \geqslant \int_{E_n} f_n \geqslant C \int_{E_n} h. \tag{16.502}$$

Si nous prenons la limite $n \to \infty$ dans ces inégalités,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant C \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} h = C \int_\Omega h. \tag{16.503}$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant C \int_\Omega h$. Mais étant donné que cette inégalité est valable pour tout C entre 0 et 1, nous pouvons l'écrire sans le C :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega h. \tag{16.504}$$

EqzAKEaU

Par définition, l'intégrale de f est donné par le supremum des intégrales de h où h est une fonction simple dominée par f. En prenant le supremum sur h dans l'équation (16.504) nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega f, \tag{16.505}$$

ce qu'il nous fallait. □

Remarque 16.181.
La proposition 16.120 ainsi que le lemme 16.118 montrent qu'une fonction mesurable peut-être écrite comme limite croissante de fonctions simples. Cela permet de démontrer des théorèmes en commençant par prouver sur les fonctions simples et en utilisant Beppo-Levi pour généraliser.

Remarque 16.182.
Une des raisons de demander la positivité des fonctions f_n est de n'avoir pas d'ambiguïté à parler d'intégrales qui valent ∞. Si par exemple nous prenons $\Omega = [0,1]$ et que nous considérons

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.506}$$

Ce sont des fonctions intégrables, mais la limite étant la fonction $1/x$, l'égalité (16.497) est une égalité entre deux intégrales valant ∞.

CorNKXwhdz

Corolaire 16.183 (Inversion de somme et intégrales)**.**
Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables positives ou nulles, alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int u_i = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_i. \tag{16.507}$$

Démonstration. Nous considérons la suite des sommes partielles de (u_n) : $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)$. Le théorème de la convergence monotone (théorème 16.180) implique que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{16.508}$$

Nous remplaçons maintenant f_n par sa valeur en termes des u_i et dans le membre de gauche nous permutons l'intégrale avec la somme finie :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int u_i = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_n, \tag{16.509}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

16.9.3.2 Lemme de Fatou

LemFatouUOQqyk

Lemme 16.184 (Lemme de Fatou)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n \colon \Omega \to [0,\infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors la fonction $f(x) = \liminf f_n(x)$ est mesurable et

$$\int_\Omega \liminf f_n d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f_n d\mu. \tag{16.510}$$

Démonstration. Nous posons

$$g_n(x) = \inf_{i\geqslant n} f_i(x). \tag{16.511}$$

Cela est une suite croissance de fonctions positives mesurables telles que, par définition,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf f_n(x). \tag{16.512}$$

Nous pouvons y appliquer le théorème de la convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n(x) = \int \liminf f_n(x). \tag{16.513}$$

Par ailleurs, pour chaque $i \geqslant n$ nous avons

$$\int g_n \leqslant \int f_i, \tag{16.514}$$

en passant à l'infimum nous avons

$$\int g_n \leqslant \inf_{i\geqslant n} \int f_i, \tag{16.515}$$

et en passant à la limite nous avons

$$\int \liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geqslant n} \int f_i = \liminf_{i\to\infty} \inf f_i. \tag{16.516}$$

□

L'inégalité donnée dans ce lemme n'est en général pas une égalité, comme le montre l'exemple suivant :

$$f_i = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]} & \text{si } i \text{ est pair} \\ \mathbb{1}_{[1,2]} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases} \tag{16.517}$$

Nous avons évidemment $g_n(x) = 0$ tandis que $\int_{[0,2]} f_i = 1$ pour tout i.

ThoooCZCXooVvNcFD

Théorème 16.185 ([508]).
Soient f, g des fonctions étagées positives[62] *sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors si $\alpha \in [0, \infty]$ nous avons*

(1)

$$\int_\Omega (\alpha f) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{16.518}$$

ITEMooBLEVooDznQTY

(2)

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu. \tag{16.519}$$

ITEMooOJRAooQkoQyD

(3) Si $a_k \in \mathbb{R}^+$ et si les f_k sont étagées positives,

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\int_\Omega f_k d\mu \right). \tag{16.520}$$

Démonstration. En ce qui concerne le produit par un nombre, tout repose sur le fait que

$$(\alpha f)^{-1}(\alpha a_i) = f^{-1}(a_i), \tag{16.521}$$

ce qui fait que si la représentation canonique de f est $f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors la représentation canonique de αf est $\alpha f = \sum_i (\alpha a_i) \mathbb{1}_{A_i}$. Donc

$$\int_\Omega \alpha f d\mu = \sum_i \alpha a_i \mu(A_i) = \alpha \sum_i a_i \mu(A_i) = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{16.522}$$

Pour la somme c'est plus lourd. Soient les formes canoniques

$$f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} \tag{16.523a}$$

$$g = \sum_j b_j \mathbb{1}_{B_j}. \tag{16.523b}$$

Vu que l'union des B_j est Ω nous avons l'union disjointe $A_i = \bigcup_j A_i \cap B_j$ et donc $\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j)$. Nous avons donc pour les intégrales :

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) \tag{16.524a}$$

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_k b_k \sum_l \mu(B_k \cap A_l). \tag{16.524b}$$

Pour la somme :

$$\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \sum_{k,l} (a_k + b_l) \mu(A_k \cap B_l). \tag{16.525}$$

Nous devons maintenant évaluer $\int_\Omega (f+g) d\mu$. Pour cela nous remarquons que si $c \in (f+g)(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs atteintes pas $f + g$), alors nous notons

$$I_c = \{(k, l) \text{ tel que } a_k + b_l = c\} \tag{16.526}$$

et nous avons

$$\{f + g = c\} = \bigcup_{(k,l) \in I_c} (A_k \cap B_l), \tag{16.527}$$

[62] Pour le cas plus général, voir 16.195.

et comme cette union est disjointe, nous pouvons faire la somme des mesures :

$$\mu(f+g=c) = \sum_{(k,l)\in I_c} \mu(A_k \cap B_l). \tag{16.528}$$

Cela nous permet de faire le calcul suivant :

$$\int_\Omega (f+g)d\mu = \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c\mu(f+g=c) \tag{16.529a}$$

$$= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c \sum_{(k,l)\in I_c} \mu(A_k\cap B_l) \tag{16.529b}$$

$$= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} \sum_{(k,l)\in I_c} (a_k+b_l)\mu(A_k\cap B_l) \tag{16.529c}$$

Dans cette double somme, tous les couples (k,l) sont tirés une et une seule fois parce qu'ils sont tous dans un et un seul des I_c, donc

$$\int_\Omega (f+g)d\mu = \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} \sum_{(k,l)\in I_c} (a_k+b_l)\mu(A_k\cap B_l) \tag{16.530a}$$

$$= \sum_{(k,l)} (a_k+b_l)\mu(A_k\cap B_l) \tag{16.530b}$$

$$= \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu. \tag{16.530c}$$

□

Remarque 16.186.
Si $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ n'est pas une décomposition canonique, il n'en reste pas moins que chacun des $\mathbb{1}_{A_k}$ est la forme canonique de lui-même. Donc le théorème 16.185 s'applique et nous avons quand même

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k). \tag{16.531}$$

PROPooOVDEooDJvOau

Proposition 16.187.
Soient deux fonctions mesurables $f, g\colon \Omega \to [0,+\infty]$. Alors

$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g. \tag{16.532}$$

Démonstration. Soient des suites $f_n \to f$ et $g_n \to g$ fournies par le théorème fondamental d'approximation 16.120. Par le théorème de la convergence monotone 16.180 nous avons d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n+g_n) = \int_\Omega (f+g), \tag{16.533}$$

et par le théorème 16.185 nous avons d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n+g_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\int f_n + \int g_n\Big) = \int f + \int g \tag{16.534}$$

où nous avons encore utilisé la convergence monotone.

En égalant les deux, nous avons notre résultat. □

16.9.4 Fonctions à valeurs réelles

L'intégrale d'une fonction à valeurs dans $[0,+\infty]$ étant faite, nous passons aux fonctions à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$.

PROPooIPVBCXoFZEZCK

Proposition 16.188 ([1])**.**
Soit une fonction mesurable $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Nous considérons les deux fonctions suivantes à valeurs dans $[0,+\infty]$:

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & si\ f(x) < 0 \\ f(x) & si\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{16.535a}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & si\ f(x) > 0 \\ -f(x) & si\ f(x) \leqslant 0. \end{cases} \tag{16.535b}$$

Nous avons $\int_\Omega |f| < \infty$ si et seulement si $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$.

Démonstration. Vu que f est mesurable, les fonctions f^+ et f^- sont également mesurables et nous avons l'égalité

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{16.536}$$

La proposition 16.187 nous dit alors que

$$\int_\Omega |f| = \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-. \tag{16.537}$$

Dans cette égalité, tous les nombres sont dans $[0, \infty]$. Le membre de gauche vaut $+\infty$ si et seulement si au moins un des deux de droite vaut $+\infty$. □

NORMooRDHAooKRniYt

16.189 (Intégrable, qui existe, etc.[529])**.**
Plusieurs définitions à ne pas confondre.

(1) Si

$$\min\left(\int_\Omega f^+, \int_\Omega f^-\right) < \infty, \tag{16.538}$$

EQooCUTSooBRnRyt

alors nous disons que $\int_\Omega f$ **existe**, et nous posons

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \tag{16.539}$$

EQooOGFDooUSfCDg

où les intégrales de droite sont définies par 16.169. Une intégrale qui existe peut très bien valoir $+\infty$ ou $-\infty$.

(2) Si $\int_\Omega |f| < \infty$, alors nous disons que f est **intégrable**.

D'après ces définitions, en prenant fonction constante $f(x) = 1$, nous avons :

- $\int_{\mathbb{R}} 1dx$ existe parce que sa partie négative est identiquement nulle, de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}} f^- = 0 < \infty$.
- La fonction f n'est pas intégrable parce que $\int_{\mathbb{R}} |1|dx = \infty$.

Nous verrons comment donner un sens à $\int_\Omega f$ dans certains cas où f n'est pas intégrable sur Ω dans la section 16.16.3 sur les intégrales impropres.

Nous définissons aussi

$$\mu(f) = \int_\Omega f \tag{16.540}$$

si f est une fonction mesurable sur Ω.

LEMooMWKTooIKomSw

Lemme 16.190.
Pour $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nous avons $\int_\Omega |f| < \infty$ si et seulement si $\int_\Omega f$ existe et est finie.

Démonstration. Deux sens.

(1) $\Rightarrow$ La proposition 16.188 dit que si $\int_\Omega |f| < \infty$, alors $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$. La condition (16.538) est alors remplie et l'intégrale $\int_\Omega f$ existe. Et comme les deux bouts sont finis, la définition (16.539) dit que $\int_\Omega f < \infty$.

(2) $\Leftarrow$ Vu que $\int_\Omega f$ existe, au moins un des deux parmi $\int_\Omega f^+$ et $\int_\Omega f^-$ est finie. Comme la différence entre les deux est finie (définition (16.539)), nous déduisons que les deux sont finies. La proposition 16.188 dit alors que $\int_\Omega |f| < \infty$.

□

PROPooDOMBooIVNzlZ

Proposition 16.191.
Soit une fonction f sur l'espace mesuré Ω. Si $\int_\Omega |f| < \infty$, alors

$$\left|\int_\Omega f\right| \leqslant \int_\Omega |f| < \infty. \tag{16.541}$$

Démonstration. La proposition 16.188 dit immédiatement que $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$. Calcul :

$$\left|\int_\Omega f\right| = \left|\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-\right| \tag{16.542a}$$
$$\leqslant \left|\int_\Omega f^+\right| + \left|\int_\Omega f^-\right| \qquad \text{lem. 1.122(4)} \tag{16.542b}$$
$$= \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^- \tag{16.542c}$$
$$= \int_\Omega (f^+ + f^-) \tag{16.542d}$$
$$= \int_\Omega |f|. \tag{16.542e}$$

□

Remarque 16.192.
Dans $\mathbb{R}^d$, quasiment toutes les fonctions et ensembles sont mesurables. En effet la construction d'ensembles non mesurables demande obligatoirement l'utilisation de l'axiome du choix ; de tels ensembles doivent être construits « exprès pour ». Il y a très peu de chances pour que vous tombiez sur un ensemble non mesurable de $\mathbb{R}^d$ sans que vous ne vous en rendiez compte.

Il y en a un en l'exemple 16.159.

Remarque 16.193.
« Mesurable » ne signifie pas « intégrable ». Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \bar{\mathbb{R}} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{16.543}$$

est mesurable, mais non intégrable.

16.9.5 Additivité de l'intégrale

LemPfHgal

Lemme 16.194.
Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Si g est intégrable, alors f est intégrable.

Démonstration. La fonction g est manifestement à valeurs réelles positives. La proposition 16.178 nous dit alors que $|f|$ est intégrable. Ensuite c'est au tour de la proposition 16.188 de conclure à l'intégrabilité de f. □

PROPooFIYEooCpdmwZ

Proposition 16.195.
Soient deux fonctions intégrables sur $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors $f + g$ est intégrable et

$$\int_S (f+g)d\mu = \int_S f d\mu + \int_S g d\mu. \tag{16.544}$$

Démonstration. En plusieurs étapes suivant la généralité de f et g.

(1) **Si f et g sont étagées et positives** C'est le théorème 16.185(2) déjà prouvé.

(2) **Si f et g sont à valeurs positives** Le théorème fondamental d'approximation 16.120 nous permet de considérer des suites croissantes de fonctions étagées positives (f_k) et (g_k) qui vérifient $f_k \to f$ et $g_k \to g$.

Pour chaque k nous avons

$$\int_S (f_k + g_k)d\mu = \int_S f_k d\mu + \int_S g_k d\mu. \tag{16.545}$$

EQooXXYOooUhkOJL

De plus, la suite $k \mapsto f_k + g_k$ est une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers $f + g$. Le théorème de la convergence monotone 16.180 nous permet donc de passer à la limite dans (16.545) et de permuter toutes les limites avec toutes les intégrales, des deux côtés.

(3) **f et g à valeurs réelles** Il faut diviser le domaine en de nombreuses régions suivant les signes de f, g et $f + g$.

□

Nous prouvons à présent l'additivité de l'intégrale pour des unions finie. Une version pour les unions dénombrables sera donnée dans les propositions 16.212 et 16.213.

PropOPSCooVpzaBt

Proposition 16.196 (σ-additivité finie)**.**
Soient des parties $A, B \subset \Omega$ disjointes dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Alors les intégrales $\int_A f$ et $\int_B f$ existent si et seulement si l'intégrale $\int_{A\cup B} f$. Dans ce cas nous avons :

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{16.546}$$

Démonstration. Vu que A et B sont disjoints, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. En utilisant alors le lemme 16.179 et la proposition 16.195 nous avons le calcul

$$\int_{A\cup B} f = \int_\Omega f\mathbb{1}_{A\cup B} = \int_\Omega f\mathbb{1}_A + \int_\Omega f\mathbb{1}_B = \int_A f + \int_B f. \tag{16.547}$$

□

16.9.6 Fonctions à valeurs vectorielles (dimension finie)

Nous voulons intégrer des fonctions du type

$$f : \Omega \to V \tag{16.548}$$

où Ω et V sont des espaces vectoriels. Nous expliquons à présent plus précisément le cadre.

NORMooTQBIooBaScjt

16.197.
Nous considérons à présent un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ de dimension finie, et un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Attention à ne pas confondre espace de départ et espace d'arrivée. Vu que V est un espace topologique, nous avons bien entendu les boréliens de V, et pour peut que nous ayons une mesure sur V (qui qui n'est pas compliqué à créer à partir de celle canonique de $\mathbb{R}^n$ et un isomorphisme), nous avons déjà une définition de $\int_V f d\mu$ lorsque $f : V \to \mathbb{R}$.

Ici nous nous proposons non d'intégrer $f : V \to \mathbb{R}$ mais bien $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to V$ où V est un espace vectoriel normé.

Le lemme suivant est le point de départ pour définir les intégrales de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Pour les fonctions à valeurs dans un espace de dimension infinie (par exemple de Banach), il existe des choses, mais c'est un peu plus compliqué.

LEMooCVHDooLJASAs

Lemme 16.198 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V réel de dimension finie, muni de la norme N. Soient une base $\{e_i\}$ de V, et une fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to V$ telle que la norme $N(f) : \Omega \to \mathbb{R}^+$ soit intégrable. Nous notons f_i les composantes de f : $f(x) = \sum_i f_i(x)e_i$.

Alors pour chaque i,

(1) la fonction $|f_i| : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est intégrable,

(2) la fonction $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Démonstration. Si V était un espace muni d'un produit scalaire, et si la base $\{e_i\}$ était orthonormée, ce serait facile parce que la norme majore toutes les composantes. Hélas, ce n'est pas spécialement le cas. La base $\{e_i\}$ n'est pas spécialement orthonormée et même la norme N ne dérive pas spécialement d'un produit scalaire.

Nous allons utiliser l'équivalence de toutes les normes en dimension finie (théorème 12.70) pour nous ramener au cas d'une norme euclidienne.

Nous considérons sur V la norme « euclidienne » construite sur la base $\{e_i\}$: $\| \sum_i v_i e_i\| = \sum_i |v_i|^2$. Par équivalence des normes nous avons des nombres non nuls λ_1 et λ_2 tels que

$$N(v) \leqslant \lambda_1 \|v\|, \tag{16.549}$$

et

$$\|v\| \leqslant \lambda_2 N(v) \tag{16.550}$$

pour tout $v \in V$. Pour un i fixé nous avons alors les majorations

$$N\big(f_i(x)e_i\big) \leqslant \lambda_1 \|f_i(x)e_i\| \leqslant \lambda_1 \|f(x)\| \leqslant \lambda_1\lambda_2 N\big(f(x)\big). \tag{16.551}$$

En posant $N_i = N(e_i)$ nous avons la majoration[63]

$$|f_i(x)| \leqslant \frac{\lambda_1\lambda_2}{N(e_i)} N\big(f(x)\big). \tag{16.552}$$

L'application

$$\begin{aligned} |f_i| \colon \Omega &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto |f_i(x)| \end{aligned} \tag{16.553}$$

est donc une fonction à valeurs réelles positives, majorée par une fonction intégrable (la fonction $x \mapsto N\big(f(x)\big)$). Elle est donc intégrable par le lemme 16.194.

La fonction f_i elle-même est alors intégrable par la proposition 16.188. □

Notons que ce lemme est en réalité très simple si V est un espace vectoriel normé dont la norme découle d'un produit scalaire, comme c'est le cas pour $\mathbb{C}$. D'ailleurs, il ne faut pas se voiler la face : le cas d'intégrales de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera dans le Frido le cas de loin le plus courant. À ce propos, nous n'avons pas encore défini ce que nous voulons noter $\int_\Omega f d\mu$ lorsque f est une fonction à valeurs vectorielles. Comblons vite ce manque …

PROPooOFSMooLhqOsc

Proposition-Définition 16.199 ([1]).
Soit une fonction $f \colon \Omega \to V$ où V est un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit une base $\{e_i\}$ de V. Si la fonction $\|f\| \colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, alors

(1) toutes les composantes $f_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ sont intégrables,

(2) le vecteur

$$\sum_i \Big(\int_\Omega f_i\Big) e_i \tag{16.554}$$

EQooQCKMooZCbvbq

ne dépend pas de la base choisie.

*Dans ce cas, la fonction f est dite **intégrable** et nous définissons*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i \Big(\int_\Omega f_i\Big) e_i. \tag{16.555}$$

Démonstration. Le fait que les composantes soient intégrables est le lemme 16.198. Soient deux bases de V, $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$, liées conformément à (6.241) par la relation $s_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$ pour une certaine matrice inversible Q. Nous avons pour tout $x \in \Omega$:

$$f(x) = \sum_i f_i(x) e_i = \sum_\alpha f_\alpha(x) s_\alpha \tag{16.556}$$

avec $f_\alpha(x) = \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i}$ par la proposition 6.131.

Notons pour être pointilleux que les ensembles $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$ ne sont pas indexés par le même ensemble, de telle sorte que f_i ne peut pas être confondu avec f_α, même lorsqu'on attribue des valeurs à i et à α.

Comme combinaisons linéaires des fonctions f_i qui sont intégrables, les fonctions f_α sont intégrables (proposition 16.195). En écrivant $\int_\Omega f$ par rapport à la base $\{s_\alpha\}$ nous trouvons :

$$\sum_\alpha \Big(\int f_\alpha\Big) s_\alpha = \sum_\alpha \Big(\int \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} dx\Big) \sum_j Q_{j\alpha} e_j \tag{16.557a}$$

$$= \sum_j \int \sum_{\alpha i} f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} Q_{j\alpha} dx e_j \tag{16.557b}$$

$$= \sum_j \int f_j(x) dx e_j \tag{16.557c}$$

$$= \sum_j \Big(\int f_j\Big) e_j \tag{16.557d}$$

où nous avons permuté des sommes finies et des intégrales des fonctions f_i, à valeurs dans $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition 16.195 □

[63] Vous notez l'utilisation de la condition (3) de la définition 9.232 de la norme pour « convertir » la norme N en valeur absolue.

La proposition suivante est, pour les intégrales à valeurs vectorielles, analogue à la proposition 16.188.

PROPooNSCPooCMkrZl

Proposition 16.200.
Soit une fonction mesurable $f\colon \Omega \to (V, \|.\|)$. Soit une base $\{e_i\}$ de V et la décomposition $f = \sum_i f_i e_i$.

Nous avons équivalence entre

ITEMooYLADooCXKEds

(1) $\int_\Omega \|f\| < \infty$

ITEMooLEYEooQTGwmt

(2) $\int_\Omega |f_i| < \infty$

ITEMooYDDAooMKwDIR

(3) $\int_\Omega f_i^+ < \infty$ *et* $\int_\Omega f_i^- < \infty$.

Démonstration. L'équivalence entre les points (2) et (3) est la proposition 16.188. Nous démontrons l'équivalence entre (1) et (2).

Vu que toutes les normes sont équivalentes sur V, nous considérons en particulier la norme associée à la base $\{e_i\}$ donnée par

$$N(x) = \sum_i |x_i|. \tag{16.558}$$

Il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$\lambda_1\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \leqslant \|f(x)\| \leqslant \lambda_2\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \tag{16.559}$$

pour tout $x \in \Omega$.

La première inégalité dit que si $\int_\Omega \|f\| < \infty$, alors $\lambda_1\big(\sum_i \int_\Omega |f - i|\big) < \infty$. Et vu que chacun des termes est positif, ils sont tous finis.

La seconde inégalité donne l'implication réciproque. □

16.9.7 Quelques propriétés

Le lemme suivant nous aide à détecter des fonctions presque partout nulles.

Lemfobnwt

Lemme 16.201.
Soit f une fonction mesurable positive ou nulle telle que

$$\int_\Omega f d\mu = 0. \tag{16.560}$$

Alors $f = 0$ μ-presque partout.

Démonstration. L'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que $f(x) \neq 0$ peut s'écrire comme une union dénombrable disjointe :

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \tag{16.561}$$

avec

$$E_0 = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) > 1\} \tag{16.562a}$$

$$E_i = \{x \in \Omega \text{ tel que } \frac{1}{i+1} \leqslant f(x) < \frac{1}{i}\}. \tag{16.562b}$$

Si un des ensembles E_i est de mesure non nulle, alors nous pouvons considérer la fonction simple $h(x) = \frac{1}{i+1}\mathbb{1}_{E_i}$ dont l'intégrale sur Ω est strictement positive. Par conséquent le supremum de la définition (16.468) est strictement positif.

Nous savons donc que $\mu(E_i) = 0$ pour tout i. Étant donné que la mesure d'une union disjointe dénombrable est égale à la somme des mesures, nous avons

$$\mu\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = 0, \tag{16.563}$$

ce qui signifie que f est nulle μ-presque partout. □

CorjLYiSm

Corolaire 16.202.
Soit f une fonction mesurable sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que

$$\int_\Omega f \mathbb{1}_{f>0} d\mu = 0. \tag{16.564}$$

Alors $f \leqslant 0$ presque partout.

Démonstration. Nous avons l'égalité d'ensembles

$$\{f\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = \{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\}. \tag{16.565}$$

Mais lemme 16.201 implique que $f\mathbb{1}_{f>0}$ est nulle presque partout, c'est-à-dire que la mesure de l'ensemble du membre de gauche est nulle par conséquent

$$\mu\{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = 0. \tag{16.566}$$

Cela signifie que la fonction f est presque partout négative ou nulle. □

LEMooLXVGooUDuQzc

Lemme 16.203 ([1])**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi qu'une partie $X \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(X) > 0$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifie $f > 0$ sur X, alors

$$\int_X f > 0. \tag{16.567}$$

Démonstration. Nous posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{x \in x \text{ tel que } \frac{1}{n} \geqslant f(x) > \frac{1}{n+1}\}, \tag{16.568}$$

$$A_0 = \{x \in X \text{ tel que } f(x) > 1\}. \tag{16.569}$$

Nous avons l'union disjointe $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, et donc $\mu(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$. Nous en déduisons qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_i) > 0$. Nous posons alors

$$\begin{aligned} \psi : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A_i \\ 1/2i & \text{si } x \in A_i. \end{cases} \end{aligned} \tag{16.570}$$

Cette fonction ψ est étagée et vérifie $0 \leqslant \psi \leqslant f$. Comme l'intégrale de f sur X est le supremum des intégrales de ce type de fonctions, nous avons

$$\int_X f d\mu \geqslant \int_X \psi d\mu = \frac{1}{2i}\mu(A_i) > 0. \tag{16.571}$$

□

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 16.204
Je n'ai pas vérifié le lemme suivant. Écrivez-moi si vous avez une démonstration.

LEMooVZXFooZAQWKY

Lemme 16.205.
Si $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et si $\int_A f d\mu = 0$, alors $\mu(A) = 0$

16.9.8 Permuter limite et intégrale

16.9.8.1 Convergence uniforme

PropbhKnth

Proposition 16.206 (Permuter limite et intégrale)**.**
Soit $f_n \to f$ uniformément sur un ensemble mesuré A de mesure finie. Alors si les fonctions f_n et f sont intégrables sur A, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{16.572}$$

Démonstration. Notons f la limite de la suite (f_n). Pour tout n nous avons les majorations

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leqslant \int_A |f_n - f| d\mu \tag{16.573a}$$

$$\leqslant \int_A \|f_n - f\|_\infty d\mu \tag{16.573b}$$

$$= \mu(A)\|f_n - f\|_\infty \tag{16.573c}$$

où $\mu(A)$ est la mesure de A. Le résultat découle maintenant du fait que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

Il existe un résultat considérablement plus intéressant que cette proposition. En effet, l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire. Cette hypothèse peut être remplacée soit par l'uniforme convergence de la suite (théorème 16.207), soit par le fait que les normes des f_n sont uniformément bornées (théorème de la convergence dominée de Lebesgue 16.209).

ThoUnifCvIntRiem

Théorème 16.207 ([530])**.**
La limite uniforme d'une suite de fonctions intégrables sur un borné est intégrable, et on peut permuter la limite et l'intégrale.

Plus précisément, soit A un ensemble de μ-mesure finie et $f_n\colon A\to\mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur A. Si la limite $f_n\to f$ est uniforme, alors f est intégrable sur A et nous pouvons inverser la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n=\int_A\lim_{n\to\infty}f_n. \tag{16.574}$$

Démonstration. Soit $\epsilon>0$ et n tel que $\|f_n-f\|_\infty\leqslant\epsilon$ (ici la norme uniforme est prise sur A). Étant donné que f_n est intégrable sur A, il existe une fonction simple φ_n qui minore f_n telle que

$$\left|\int_A\varphi_n-\int_A f_n\right|<\epsilon. \tag{16.575}$$

La fonction $\varphi_n+\epsilon$ est une fonction simple qui majore la fonction f. Si ψ est une fonction simple qui minore f, alors

$$\int_A\psi\leqslant\int_A\varphi_n+\epsilon\leqslant\int_A f_n+\epsilon\mu(A). \tag{16.576}$$

Par conséquent le supremum qui définit $\int_A f$ existe, ce qui montre que f est intégrable. Le fait qu'on puisse inverser la limite et l'intégrale est maintenant une conséquence de la proposition 16.206. □

Remarque 16.208.
L'hypothèse sur le fait que A soit de mesure finie est importante. Il n'est pas vrai qu'une suite uniformément convergente de fonctions intégrables est intégrables. En effet nous avons par exemple la suite

$$f_n(x)=\begin{cases}1/x & \text{si } x<n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{16.577}$$

qui converge uniformément vers $f(x)=1/x$ sur $A=[1,\infty[$. Le limite n'est cependant guerre intégrable sur A.

16.9.8.2 Convergence dominée de Lebesgue

ThoConvDomLebVdhsTf

Théorème 16.209 (Convergence dominée de Lebesgue)**.**
Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Nous supposons que

(1) Pour chaque n nous avons $f_n\in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$,

(2) $f_n\to f$ simplement presque partout sur Ω,

(3) Il existe une fonction $g\in L^1(\Omega)$ telle que

$$|f_n(x)|\leqslant g(x) \tag{16.578}$$

pour presque[64] tout $x\in\Omega$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors

(1) f est intégrable[65],

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n=\int_\Omega f$,

(3) $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|f_n-f|=0$.

[64] Si il n'y avait pas le « presque » ici, ce théorème serait à peu près inutilisable en probabilité ou en théorie des espaces L^p, comme dans la démonstration du théorème de Fischer-Riesz 29.56 par exemple.

[65] C'est-à-dire que $\int_\Omega|f|<\infty$, voir le vocabulaire en 16.189.

Démonstration. La fonction limite f est intégrable parce que $|f| \leqslant g$ et g est intégrable[66]. Par hypothèse nous avons

$$-g(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x). \tag{16.579}$$

En particulier la fonction $g_n = f_n + g$ est positive et mesurable si bien que le lemme de Fatou 16.184 implique

$$\int_\Omega \liminf g_n \leqslant \liminf \int_\Omega g_n. \tag{16.580}$$

Évidemment nous avons $\liminf g_n = f + g$, de telle sorte que

$$\int f + \int g \leqslant \liminf \int g_n = \liminf \int f_n + \int g, \tag{16.581}$$

et le nombre $\int g$ étant fini, nous pouvons le retrancher des deux côtés de l'inégalité :

$$\int f \leqslant \liminf \int f_n. \tag{16.582}$$

EQooXGKRooDqUDlG

Afin d'obtenir une minoration de $\int f$ nous récrivons (16.582) pour la suite de fonctions $k_n = -f_n \to k = -f$:

$$\int k \leqslant \liminf \int k_n. \tag{16.583}$$

En utilisant le lemme 11.48, nous obtenons

$$-\int f \leqslant \liminf \int -f_n = -\limsup \int f_n, \tag{16.584}$$

et donc

$$\limsup \int f_n \leqslant \int f. \tag{16.585}$$

En combinant avec (16.582), nous avons la suite d'inégalités

$$\limsup \int f_n \leqslant \int f \leqslant \liminf \int f_n. \tag{16.586}$$

La limite supérieure étant plus grande ou égale à la limite inférieure, les trois quantités sont égales.

Nous prouvons maintenant le troisième point. Soit la suite de fonctions

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \tag{16.587}$$

qui tend ponctuellement vers zéro. De plus

$$h_n(x) \leqslant |f_n(x)| + |f(x)| \leqslant 2g(x), \tag{16.588}$$

ce qui prouve que les h_n majorés par une fonction intégrable. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{16.589}$$

□

Remarque 16.210.
Lorsque nous travaillons sur des problèmes de probabilités, la fonction g peut être une constante parce que les constantes sont intégrables sur un espace de probabilité.

CorCvAbsNormwEZdRc

Corolaire 16.211.
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite numérique absolument convergente. Alors elle est convergente. Il en est de même pour les séries de fonctions si on considère la convergence ponctuelle.

Démonstration. L'hypothèse est la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} |a_i| dm(i)$ où dm est la mesure de comptage. Étant donné que $|a_i| \leqslant |a_i|$, la fonction a_i (fonction de i) peut jouer le rôle de g dans le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 16.209). □

[66] Par le lemme 16.194

16.9.9 Additivité de l'intégrale de Lebesgue

Les propositions 16.212 et 16.213 démontrent la même chose. La différence est la méthode utilisée pour permuter une somme et une intégrale. Dans le premier cas, nous utilisons la convergence monotone (et sommes obligés de séparer le cas où f est positive), alors que dans le second cas, nous utilisons la convergence dominée de Lebesgue, et nous ne devons pas faire de séparation d'après la positivité de f.

PROPooTFOAooJBwmCV

Proposition 16.212 (σ-additivité dénombrable[1])**.**
Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des parties mesurables disjointes de $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et si $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ est intégrable sur $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ alors les intégrales $\int_{A_i}f d\mu$ existent et

$$\int_{\bigcup_i A_i} f d\mu = \sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i} f d\mu. \tag{16.590}$$

Démonstration. En deux cas d'après la positivité de f.

(1) **Si f est positive** Nous posons $f_N = f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{N}A_i}$. Cette suite de fonctions vérifie la limite

$$\lim_{N\to\infty} f_N = f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i}. \tag{16.591}$$

De plus, pour chaque N nous avons

$$\int_\Omega f_N = \int_\Omega f\mathbb{1}_{\bigcup_i A_i} = \int_{\bigcup_i A_i} f = \sum_{i=0}^{N}\int_{A_i} f \tag{16.592}$$

Justifications :

- La proposition 16.179 pour l'introduction de la fonction caractéristique de $\bigcup_i A_i$
- La proposition 16.196 qui traite le cas de la sous-additivité finie pour la dernière égalité.

La suite $(f_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables[67] et positives. Donc le théorème de la convergence monotone 16.180 s'applique et

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i} f = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N}\int_{A_i} f = \lim_{N\to\infty}\int_{\bigcup_{i=0}^{N}A_i} f = \lim_{N\to\infty}\int_\Omega f_N \tag{16.593a}$$

$$= \int_\Omega \lim_{N\to\infty} f_N = \int_\Omega f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i} = \int_{\bigcup_i A_i} f d\mu. \tag{16.593b}$$

(2) **Si f est à valeurs réelles** Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f = f_+ - f_-$ où f_+ et f_- sont intégrables. Nous avons alors

$$\int_{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i} f d\mu = \int_{\bigcup_i A_i} f_+ - \int_{\bigcup_i A_i} f_- \tag{16.594a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f_+ - \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f_- \tag{16.594b}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_{A_k} f_+ - \int_{A_k} f_-\Big) \tag{16.594c}$$

SUBEQooMTZPooLqMHKP

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f. \tag{16.594d}$$

SUBEQooVZNMooRmFoLq

Justifications :

- Pour (16.594c), c'est l'associativité de la somme, proposition 12.173.
- Pour (16.594d), c'est la proposition 16.195.

□

[67] La fonction f elle-même est mesurable ; c'est inclus dans la définition de « intégrable ».

PROPooDWYNooWKJmEV

Proposition 16.213 (σ-additivité[531]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous considérons des parties disjointes $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Ω telles que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \Omega$. Si $f \in L^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu. \tag{16.595}$$

Démonstration. Nous posons $\Omega_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ ainsi que $f_n = f\mathbb{1}_{\Omega_n}$. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ nous avons EQSooBREOooWzviSK

$$\sum_{k=0}^{N} \int_{A_k} f d\mu = \int_{\bigcup_{k=0}^{N} A_k} f \tag{16.596a}$$ EQooCVVVooTHNmz

$$= \int_{\Omega_N} f \tag{16.596b}$$

$$= \int_\Omega f_N. \tag{16.596c}$$ SUBEQooJZLOooKlOoes

Justifications :

- Pour (16.596a), c'est la proposition 16.196 qui traite du cas de sommes finies.
- Pour (16.596c) c'est la proposition 16.212.

L'idée est maintenant de passer à la limite des deux côtés de (16.596). Voici le raisonnement :

- Nous montrons qu'à droite, la limite existe et vaut $\int_\Omega f d\mu$.
- Le fait que la limite du membre de droite existe implique l'existence de la limite du membre de gauche.
- La limite du membre de gauche vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$.

La limite du membre de droite s'établi avec le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 16.207.

- Nous avons convergence simple $f_n \to f$ parce que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_i = \Omega$.
- La fonction $g = |f|$ est intégrable sur Ω parce que $f \in L^1(\Omega)$ par hypothèse.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \Omega$ nous avons $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ parce que $|f_n(x)|$ est soit égal à $g(x)$ soit égal à zéro suivant que $x \in \Omega_n$ ou non.

Donc le théorème de la convergence dominée est applicable. La limite du membre de droite de (16.596) existe et vaut :

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega f_N = \int_\Omega f. \tag{16.597}$$

Nous pouvons alors prendre aussi la limite du membre de gauche dans (16.596) et obtenir le résultat attendu. □

16.9.10 Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité)

PropooVXPMooGSkyBo

Proposition-Définition 16.214 (Produit d'une mesure par une fonction[1, 532]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et une fonction mesurable positive $w\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$. Alors la formule

$$(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu \tag{16.598}$$

*pour tout $A \in \mathcal{F}$ définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelée **produit** de la mesure μ par la fonction w. La fonction w est la **densité** de la mesure $w \cdot \mu$ par rapport à la mesure μ.*

Démonstration. D'abord $(w \cdot \mu)(\varnothing) = 0$ parce que le lemme 16.177 donne

$$(w \cdot \mu)(\varnothing) = \int_\Omega w\mathbb{1}_\varnothing d\mu = \int_\Omega 0 d\mu = 0 \times \mu(\Omega) = 0 \tag{16.599}$$

où nous avons (éventuellement) utilisé deux fois la convention $0 \times \infty = 0$.

Ensuite si les ensembles A_i sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$ alors nous avons $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i}$, et donc

$$(w \cdot \mu)(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \int_{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} w d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} w d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} (w \cdot \mu)(A_i). \tag{16.600}$$

où nous avons utilisé la σ-additivité dénombrable de l'intégrale de la proposition 16.212. □

En particulier nous parlons souvent de mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est alors la construction suivante.

DEFooJNQYooKUcezo

Définition 16.215.
*Si μ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une **densité** pour μ si pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ nous avons*

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx \tag{16.601}$$

où dx est la mesure de Lebesgue.

*Si la mesure μ admet une densité, nous disons que c'est une **mesure à densité** par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous disons aussi que μ est **absolument continue**.*

Exemple 16.216.
Toutes les mesures n'admettent pas de densité. Par exemple la mesure de Dirac donnée par

$$\nu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.602}$$

EQooDMFCooVEMapF

n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. △

La mesure ν de l'exemple 16.602 admet, au sens des distributions, la mesure de Dirac δ comme densité, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

PropooJMWAooDzfpmB

Proposition 16.217 ([532]).
Soit une fonction mesurable $w\colon (S, \mathcal{F}, \mu) \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

(1) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, alors $f \cdot (w \cdot \mu) = (fw) \cdot \mu$.

(2) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable, elle est $w \cdot \mu$-intégrable si et seulement si fw est μ-intégrable. Dans ce cas, nous avons encore $f \cdot (w \cdot \mu) = (fw) \cdot \mu$.

Attention : dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut que w soit à valeurs finies dans $\mathbb{R}$ parce que nous n'avons pas défini $\infty \times z$ lorsque $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le résultat pour la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable A. Nous avons : $\mathbb{1}_A \cdot (w \cdot \mu)(B) = \int_B \mathbb{1}_A d(w \cdot \mu)$. Mais par définition, l'intégrale d'une fonction indicatrice est la mesure de l'ensemble indiqué. En passant sur le fait que $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$,

$$\int_B \mathbb{1}_A d(w \cdot \mu) = (w \cdot \mu)(A \cap B) = \int_S \mathbb{1}_{A\cap B} w d\mu = \int_S \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B w d\mu = \int_B \mathbb{1}_A w d\mu = (\mathbb{1}_A w) \cdot \mu(B). \tag{16.603}$$

Supposons maintenant que f soit une fonction étagées qui s'écrit $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ où les A_k sont des ensembles mesurables disjoints. Alors le calcul est le suivant, en utilisant le fait que sur A_k, on a $a_k = f(x)$:

$$\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot \mu)B &= \int_B f d(g \cdot \mu) && \text{(16.604a)}\\
&= \sum_k a_k (g \cdot \mu)(A_k \cap B) && \text{(16.604b)}\\
&= \sum_k a_k \int_{A_k \cap B} g d\mu && \text{(16.604c)}\\
&= \int_{A_k \cap B} f(x) g(x) d\mu(x) && \text{(16.604d)}\\
&= \sum_k (fg \cdot \mu)(A_k \cap B) && \text{(16.604e)}\\
&= (fg \cdot \mu)(B) && \text{(16.604f)}
\end{aligned}$$

parce que les $A_k \cap B$ forment une partition de l'ensemble B (voir le point (2) de la définition 16.18).

Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, le théorème 16.120 donne une suite croissante f_n de fonctions étagées positives convergeant (ponctuellement) vers f. Vu que la fonction w est positive, nous avons aussi la limite positive et croissante $wf_n \to wf$. Ainsi l'utilisation du théorème de la convergence monotone est justifié dans le calcul suivant :

$$\int_S f d(w \cdot \mu) = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n d(w \cdot \mu) = \lim_{n\to\infty} \int_S (wf_n) d\mu = \int_S wf d\mu. \tag{16.605}$$

Nous passons maintenant au cas général où f est une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ (avec w finie dans ce dernier cas). Nous avons la chaine d'équivalences

$\Leftrightarrow$ f est $(w \cdot \mu)$ intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|$ est $(w \cdot \mu)$-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|w$ est μ-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|fw|$ est μ-intégrable.

Si cela est le cas, la formule se démontre en se ramenant au cas déjà prouvé des fonctions positives en utilisant les $(fw)^+ = f^+w$, $(fw)^- = f^-w$ etc. □

16.9.11 Mesure et topologie

EXooKQDRooVMWaEC

Exemple 16.218 (Un compact n'est pas toujours de mesure finie)**.**
Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}))$ réel avec ses boréliens et la fonction

$$\begin{aligned} w\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) &\to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{16.606}$$

Essayons d'étudier la mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue.

(1) **w est mesurable** Soit un borélien B de $\bar{\mathbb{R}}$. Si B ne contient pas ∞ alors $w^{-1}(B)$ est un borélien de $\mathbb{R}$ par continuité de l'application restreinte $w\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$. Ici nous avons par exemple appliqué la proposition 16.127 à chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. Si $+\infty \in B$ alors

$$w^{-1}(B) = w^{-1}\big(B \setminus \{\infty\}\big) \cup w^{-1}(\{\infty\}) = w^{-1}\big(B \setminus \{\infty\}\big) \cup \{0\}, \tag{16.607}$$

qui est borélien par union de boréliens.

(2) **Mesure produit** La proposition 16.214 nous assure alors qu'en posant[68]

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{|x|} d\lambda(x) \tag{16.608}$$

où λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une mesure.

(3) **Mesure du singleton**

Pour avoir les idées claires, nous pouvons nous demander la mesure $\mu\big(\{0\}\big)$. Nous cela nous devons calculer

$$\int_{\{0\}} \frac{1}{|x|} d\lambda(x) = \int_{\{0\}} w(x) d\lambda(x) \tag{16.609}$$

où là, l'abus de notation n'est plus possible. Mais quelle que soit la fonction étagée $h = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ considérée,

$$\int_{\{0\}} h(x) d\lambda(x) = \sum_i \alpha_i \lambda\big(A_i \cap \{0\}\big) = 0. \tag{16.610}$$

Attention : ceci n'a rien de particulier à la fonction $x \mapsto 1/|x|$. Lorsqu'une mesure a une densité par rapport à Lebesgue, la mesure d'un singleton sera toujours nulle.

[68] Avec un mini abus de notation : si $0 \in B$, cette notation n'est pas tout à fait correcte.

(4) **Mesure de la boule compacte**

Il n'en reste pas moins que $\mu\big([-1,1]\big)=\infty$.

△

16.219.
En réalité, il n'y a pas de liens forts entre mesure et topologie. Un espace topologique est une chose, et y mettre une mesure en est une autre. Bien entendu, une topologie étant donnée, nous pouvons considérer la tribu des boréliens et y mettre une mesure un peu quelconque. Il n'y a pas de choix canonique.

Notons que même dans l'exemple de compact de mesure infinie 16.218, la mesure introduite n'est pas sans lien avec la topologie de $\mathbb{R}$. En effet pour avoir une mesure à densité par rapport à Lebesgue, nous avons dû prendre une application mesurable par rapport à la tribu des boréliens, laquelle est éminemment liée à la topologie. Il y a donc parfaitement moyen de construire des espaces mesurés tenant compte de la topologie, et ayant des propriétés qui ne sont pas celle attendues.

Quand les choses sont faciles, ça se passe bien. La proposition suivante dit qu'une fonction continue sur un compact y est intégrable ; sauf que pour dire cela de façon précise, il faut un peu bosser parce qu'il y a de écueils à éviter, tels que l'exemple 16.218.

PROPooKFRSooANzglT

Proposition 16.220 ([1])**.**
Soit un espace mesuré $(K,\mathcal{A},\mu)$ et une fonction $f\colon K\to\mathbb{R}$. Nous supposons pas mal de trucs techniques :

(1) La mesure est finie : $\mu(K)<\infty$.

(2) L'ensemble K est par ailleurs un espace topologique compact[69]*.*

ITEMooBKYHooWnxUGL

(3) La fonction f est continue pour les topologies de K et de $\mathbb{R}$.

ITEMooJCNUooJzIlKI

(4) La fonction f est mesurable pour la tribu $\mathcal{A}$ de K et la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Alors f est intégrable sur K et $\int_K |f|<\infty$.

L'hypothèse (4) ne se déduit pas nécessairement de l'hypothèse (3). Dans les cas usuels, nous avons bien « continue implique mesurable », mais si $\mathcal{A}$ n'a aucun rapport avec la topologie … hum …

Démonstration. Si nous écrivons $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ avec f^+ et f^- prenant des valeurs positives ou nulles[533], en vertu de la proposition 16.188, si nous devons prouver séparément $\int_K f^+<\infty$ et $\int_K f^-<\infty$. Nous allons donc prouver cette proposition en plusieurs étapes.

(1) **Si f est positive** La fonction f est continue sur K qui est compact (même en tant qu'espace topologique en soi ; il n'est pas nécessaire d'être compact *dans* quelque chose), donc elle a un maximum par le théorème 9.215 nommons M ce maximum. Donc $f\colon K\to[0,M]$. De plus la mesure μ sur K est finie et vérifie disons $\mu(K)=m$.

Soit une fonction étagée $h\colon K\to\mathbb{R}^+$ majorée par f. Nous notons

$$h(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{16.611}$$

où les A_i sont des éléments de $\mathcal{A}$. Vu que $0\leqslant h(x)\leqslant f(x)\leqslant M$, nous avons[70]

$$\int_K h=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(K\cap A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}M\mu(K\cap A_i)\leqslant M\mu(K)=Mm \tag{16.612}$$

parce que les A_i sont disjoints et vérifient $\bigcup_i A_i=K$ (lemme 16.116).

Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (16.468) sont contenus dans $[0,Mm]$. Le supremum est donc dans $[0,Mm]$ et est alors strictement plus petit que l'infini.

(2) **Si f est positive ou négative** Nous appliquons la première partie séparément à f^+ et f^-. Et nous avons alors que f est intégrable et

$$\int_K|f|=\int_K f^+ +\int_K f^-<\infty. \tag{16.613}$$

[69] Nous ne prétendons pas que la tribu $\mathcal{A}$ soit liée à la topologie de K.
[70] Définition (16.467).

□

THOooVADUooLiRfGK

Théorème 16.221 ([532]).
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application mesurable $\varphi\colon S_1 \to S_2$. Soit encore μ, une mesure positive sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$.

Si $f\colon S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable alors,

ItemooKMBIooZpHJSS

(1) f est $\varphi(\mu)$-intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable.

ItemooLAPYooUreDEl

(2) dans le cas où f est $\varphi(\mu)$-intégrable, nous avons

EqooSOHXooXSbdqx

$$\int_{S_2} f d\big(\varphi(\mu)\big) = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{16.614}$$

Démonstration. L'intégrabilité est la définition 16.188, et demande que $|f|$ soit intégrable. L'égalité (16.614) a un sens si les deux membres sont infinis. Tant que les fonctions considérées sont positives, le point (1) est immédiat. Ce n'est qu'au moment où les fonctions considérées deviennent à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ que l'intégrabilité de $|f|$ commence à jouer parce qu'il faut que f^+ et f^- soient séparément intégrables.

Nous allons prouver la formule (16.614) pour des fonctions de plus en plus générales. Pour la suite nous notons $\mu' = \varphi(\mu)$.

(1) **Pour $f = \mathbb{1}_B$, B mesurable** Soit $B \in \mathcal{F}_2$. Nous avons $\mathbb{1}_B \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$. Donc en utilisant le lemme 16.177 nous avons

$$\int_{S_2} \mathbb{1}_B d\mu' = \mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \int_{S_1} \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \int_{S_1} (\mathbb{1}_B \circ \varphi) d\mu. \tag{16.615}$$

(2) **f est étagée positive**
La fonction f peut être écrite sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{16.616}$$

avec $B_k \in \mathcal{F}_2$ et $a_k \in \mathbb{R}^+$. Nous avons alors, en utilisant la sous-additivité de l'intégrale du théorème 16.185(3),

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} f d\mu' &= \sum_k a_k \int_{S_2} \mathbb{1}_{B_k} d\mu' && (16.617a)\\
&= \sum_k a_k \int_{S_1} (\mathbb{1}_{B_k} \circ \varphi) d\mu && (16.617b)\\
&= \int_{S_1} \Big(\sum_k a_k \mathbb{1}_{B_k} \Big) \circ \varphi d\mu && (16.617c)\\
&= \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. && (16.617d)
\end{aligned}$$

(3) **f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$**
Vu que f est mesurable, par le théorème 16.120 il existe une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers f. Soit donc cette suite, $f_n\colon S_2 \to \mathbb{R}^+$. Les fonctions $f_n \circ \varphi$ sont étagées et positives et nous avons aussi la limite ponctuelle et croissante $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ parce que φ est continue. Le théorème de la convergence monotone (théorème 16.180) permet d'écrire ceci :

$$\int_{S_2} f d\mu' = \lim \int_{S_2} f_n d\mu' = \lim \int_{S_1} (f_n \circ \varphi) d\mu = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{16.618}$$

(4) **Pour $f\colon S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$**
C'est maintenant que l'intégrabilité va jouer. Nous avons $|f| \circ \varphi = |f \circ \varphi|$, donc

$$\int_{S_2} |f| d\mu' = \int_{S_1} |f| \circ \varphi d\mu = \int_{S_1} |f \circ \varphi| d\mu, \tag{16.619}$$

ce qui montre que f est μ'-intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable.

De plus si $f = f^+ - f^-$ alors $f^+ \circ \varphi = (f \circ \varphi)^+$, $f^- \circ \varphi = (f \circ \varphi)^-$, et de façon similaire pour les parties imaginaires et réelles.

□

16.10 Mesure à densité

16.10.1 Théorème de Radon-Nikodym

Définition 16.222 ([534]).
*Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Nous disons que la mesure μ est **dominée** par ν si pour tout ensemble mesurable A, $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$.*

*Nous disons que la mesure signée[71] ν est **absolument continue** par rapport à la mesure positive μ si pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Dans ce cas nous notons*

$$\nu \ll \mu. \tag{16.620}$$

DEFooRZARooTbtJac

Définition 16.223 ([511]).
*Deux mesures signées μ et ν sur $(\Omega, \mathcal{A})$ sont **mutuellement singulières** si il existe $E, F \in \mathcal{A}$ tels que*

$$\begin{cases} E \cap F = \varnothing & \text{(16.621a)} \\ \mu(A) = \mu(A \cap E) & \text{(16.621b)} \\ \nu(A) = \nu(A \cap F). & \text{(16.621c)} \end{cases}$$

Nous notons ce fait par

$$\mu \perp \nu. \tag{16.622}$$

LEMooDIGPooJqEwGl

Lemme 16.224 ([1]).
Soient deux mesures positives λ et μ. Nous avons $\lambda \perp \mu$ si et seulement si il existe des parties mesurables E', F' telles que

(1) $E' \cup F' = \Omega$

(2) $E' \cap F' = \varnothing$

(3) $\mu(F') = \lambda(E') = 0$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $\mu \perp \lambda$, c'est-à-dire qu'il existe E, F tels que $E \cap F = \varnothing$, $\mu(A) = \mu(A \cap E)$ et $\lambda(A) = \lambda(A \cap F)$ pour tout mesurables A.

Nous posons $R = \Omega \setminus (E \cup F)$. C'est la partie de Ω sur laquelle ni μ ni λ n'agit. Il suffit de poser $F' = F \cup R$ et $E' = E$ pour avoir ce qu'il faut. Par exemple,

$$\mu(F') = \mu(F \cup R) = \mu\big((F \cup R) \cap E\big) = \mu(\varnothing) = 0. \tag{16.623}$$

, et de même pour les autres vérifications.

(2) $\Leftarrow$ Il suffit de poser $E = E'$ et $F = F'$ et de vérifier. Par exemple, vu que l'union $E \cup F = \Omega$ est disjointe,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap F) = \mu(A \cap E). \tag{16.624}$$

□

LEMooVOJDooFgbwSE

Lemme 16.225 ([535]).
Soit un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Nous considérons

(1) des mesures positives finies $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

(2) une mesure positive μ

telles que $\lambda_n \perp \mu$ pour tout n. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \perp \mu. \tag{16.625}$$

[71] Définition 16.18.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation du lemme 16.224 pour des mesures mutuellement singulières.

Pour chaque n nous avons des mesurables A_n et B_n tels que $A_n \cup B_n = \Omega$, $A_n \cap B_n = \varnothing$ et $\mu(A_n) = \lambda_n(B_n) = 0$.

Nous posons $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et $B = \Omega \setminus A$. Nous avons bien entendu $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$.

(1) $\lambda_k(B) = 0$ **pour tout** k Pour chaque k nous avons $B \subset B_k$ parce que si $x \in B$, alors en particulier $x \in \Omega \setminus A_k = B_k$. Nous avons donc

$$\Omega \setminus A = B \subset B_k = \Omega \setminus A_k. \tag{16.626}$$

Donc, par croissance de la mesure,

$$\lambda_k(B) = \lambda_k(\Omega \setminus A) \leqslant \lambda_k(\Omega \setminus A_k) = \lambda_k(B_k) = 0. \tag{16.627}$$

(2) $\lambda(B) = 0$ Il s'agit de sommer : $\lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(B) = 0$.

(3) $\mu(A) = 0$ Nous avons

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0. \tag{16.628}$$

□

LEMooYYIIooCUfGxA

Lemme 16.226 ([1]).
Soient λ et ν des mesures positives σ-finies ainsi qu'une mesure positive μ telle que $\lambda \perp \mu$ et $\nu \perp \mu$. Alors

$$(\lambda + \nu) \perp \mu. \tag{16.629}$$

Démonstration. Nous considérons des mesurables disjoints (X_n) comme dans le lemme 16.20. Pour chaque n nous avons les mesures finies λ_n et ν_n données par

$$\lambda_n(A) = \lambda(A \cap X_n) \tag{16.630a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap X_n). \tag{16.630b}$$

Ces mesures vérifient $\lambda_n \perp \mu$ et $\nu_n \perp \mu$. De plus les (X_n) étant disjoints, nous avons $\lambda(A) = \sum_n \lambda_n(A)$ et $\nu(A) = \sum_n \nu_n(A)$. Nous pouvons donc utiliser le lemme 16.225 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \nu_n) \perp \mu. \tag{16.631}$$

EQooWXCKooGrqShQ

Par associativité de la somme (tous les termes sont positifs), pour chaque mesurable A nous avons

$$\sum_n (\lambda_n + \nu_n)(A) = \sum_n \lambda_n(A) + \sum_n \nu_n(A) = \lambda(A) + \nu(A) = (\lambda + \nu)(A). \tag{16.632}$$

Cela pour dire que le membre de gauche de (16.631) est bien $\lambda + \nu$. □

Définition 16.227.
*La mesure μ est **portée** par la partie $E \in \mathcal{A}$ si pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$\mu(A) = \mu(A \cap E). \tag{16.633}$$

Définition 16.228.
Soit une mesure signée μ et une partie mesurable A.

*(1) La partie A est **négative** si $\mu(A') \leqslant 0$ pour tout A' mesurable dans A.*

*(2) La partie A est **nulle** si $\mu(A') = 0$ pour tout A' mesurable dans A.*

*(3) La partie A est **positive** si $\mu(A') \geqslant 0$ pour tout A' mesurable dans A.*

PROPooBLNXooRRxxVv

Proposition 16.229 ([511]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une mesure signée. Si une partie $D \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(D) \leqslant 0$, alors il existe une partie négative $A \subset D$ telle que $\mu(A) \leqslant \mu(D)$.

Démonstration. Nous définissons des parties A_i par récurrence en commençant par poser $A_0 = D$. Ensuite, si A_n est défini, nous posons

$$t_n = \sup\{\mu(B) \text{ tel que } B \subset A_n, B \in \mathcal{A}\}. \tag{16.634}$$

Nous avons $t_n \geqslant \mu(\varnothing) = 0$. Par définition du supremum, il existe B_n mesurable dans A_n vérifiant $\mu(B_n) \geqslant t_n/2 \geqslant 0$. Nous posons alors

$$A_{n+1} = A_n \setminus B_n. \tag{16.635}$$

Enfin nous posons

$$A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n. \tag{16.636}$$

Vérifions que A possède les propriétés demandées.

(1) $A \subset D$ Par définition.

(2) $\mu(A) \leqslant \mu(D)$

(2a) **Les B_i sont disjoints** Nous avons

$$B_n \subset A_n = A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n, \tag{16.637}$$

et donc $B_n \cap B_k = \varnothing$ pour tout $k < n$. Cela montre que les B_i sont disjoints.

(2b) $\mu(A) \leqslant \mu(D)$ Étant donné que $B_n \subset D$ pour tout n, l'égalité $A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n$ peut être écrite

$$D = A \cup \bigcup_{n\geqslant 0} B_n \tag{16.638}$$

où à droite nous avons une union disjointe. Bref, au niveau des mesures nous avons

$$\mu(A) = \mu(D) - \sum_{n\geqslant 0} \mu(B_n) \leqslant \mu(D) \tag{16.639}$$

parce que $\mu(B_n) \geqslant 0$ pour tout n.

(3) $A \subset A_n$ Par définition $A = D \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} B_n$ alors que $A_n = D \setminus \bigcup_{n=0}^{n-1} B_n$. Donc en partant de D, pour construire A, on enlève plus de choses que pour construire A_n. Donc $A \subset A_n$.

(4) **A est une partie négative** Supposons que A n'est pas une partie négative : il existe A' mesurable dans A tel que $\mu(A') > 0$. En particulier,

$$A' \subset A \subset A_n. \tag{16.640}$$

La partie A' est donc dans l'ensemble sur lequel on prend le supremum pour construire t_n. En d'autres termes, $t_n \geqslant \mu(A') > 0$, et donc

$$\mu(B_n) \geqslant \frac{t_n}{2} \geqslant \frac{\mu(A')}{2}. \tag{16.641}$$

Et avec tout ça,

$$\mu(A) = \mu(D) - \sum_{n\geqslant 0} \mu(B_n) \leqslant \mu(D) - \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mu(A)}{2} = -\infty. \tag{16.642}$$

EQooYNJEooKJCfET

(5) **Conclusion** Nous avons dit, dans la définition d'une mesure négative que μ ne prenait jamais la valeur $-\infty$. L'inégalité (16.642) est donc une contradiction et nous concluons que A est une partie négative pour μ.

□

LEMooVFEWooOyXcPS

Lemme 16.230 ([511]).
Soient une mesure positive μ et une mesure signée ν. Si $\nu \perp \mu$ et si $\nu \ll \mu$, alors $\nu = 0$

Démonstration. Vu que $\mu \perp \nu$, il existe $E \in \mathcal{A}$ tel que

$$\begin{cases} \mu(A) = \mu(A \cap E) & \text{(16.643a)} \\ \nu(A) = \nu(A \cap E^c) & \text{(16.643b)} \end{cases}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous avons $\mu(A \cap E^c) = 0$ parce que $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$ et $\mu(A \cap E) = \mu(A)$. Étant donné que $\nu \ll \mu$ nous avons aussi $\nu(A \cap E^c) = 0$. Donc

$$\nu(A) = \nu(A \cap E^c) = 0. \tag{16.644}$$

□

LEMooABVVooMvxlRo

Lemme 16.231.
Soient une mesure positive μ ainsi que deux mesures signées ν_1, ν_2 telles que $\nu_1 \perp \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$. Alors $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

Démonstration. Nous avons des parties $E_1, F_1, E_2, F_2 \in \mathcal{A}$ telles que

$$\begin{cases} \nu_1(A) = \nu_1(A \cap F_1) & \text{(16.645a)} \\ \mu(A) = \mu(A \cap E_1), & \text{(16.645b)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \nu_2(A) = \nu_2(A \cap F_2) & \text{(16.646a)} \\ \mu(A) = \mu(A \cap E_2), & \text{(16.646b)} \end{cases}$$

et $E_1 \cap F_1 = \varnothing$ et $E_2 \cap F_2 = \varnothing$. Nous posons $E_0 = E_1 \cap E_2$ et $F_0 = F_1 \cup F_2$, et nous allons prouver que $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$ vérifiant que le couple (E_0, F_0) vérifie les conditions de la définition 16.223.

(1) $E_0 \cap F_0 = \varnothing$ Nous avons :

$$E_0 \cap F_0 = (E_1 \cap E_2) \cap (F_1 \cup F_2) = (E_1 \cap E_2 \cap F_1) \cup (E_1 \cap E_2 \cap F_2) = \varnothing. \tag{16.647}$$

(2) $\mu(A) = \mu(A \cap E_0)$ Nous prouvons maintenant que $\mu(A) = \mu(A \cap E_0)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Nous écrivons d'abord

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) = \mu(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big), \tag{16.648}$$

EQooTMOKooEulFwx

et, de la même façon,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_2) = \mu(A \cap E_2 \cap E_1) + \mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big). \tag{16.649}$$

En faisant la différence entre les deux, $0 = \mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big) - \mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big)$, c'est-à-dire

$$\mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big) = \mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big). \tag{16.650}$$

En particulier pour $A = \Omega$ nous avons

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_2 \setminus E_1). \tag{16.651}$$

Nous savons, par définition de E_1 que $\mu(A) = \mu(A \cap E_1)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Nous écrivons cette égalité pour $A = (E_2 \setminus E_1)$:

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu\big((E_2 \setminus E_1) \cap E_1\big) = \mu(\varnothing) = 0. \tag{16.652}$$

Nous en déduisons que $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$ et donc que $\mu\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Et enfin nous repartons de (16.648) :

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) = \underbrace{\mu(A \cap E_1 \cap E_2)}_{=\mu(A \cap E_0)} + \underbrace{\mu\big(A \cap (E_1 \setminus E_2)\big)}_{=0}, \tag{16.653}$$

autrement dit, $\mu(A) = \mu(A \cap E_0)$, comme nous devions prouver.

(3) $\nu_i(A) = \nu_i(A \cap F_0)$ Nous allons prouver que pour $i = 1, 2$ nous avons $\nu_i(A) = \nu_i(A \cap F_0)$. Nous commençons par écrire $A \cap F_0$ comme union disjointe en partant de la proposition 1.48 :

$$\begin{aligned} A \cap F_0 &= (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) && \text{(16.654a)} \\ &= (A \cap F_1) \cup \big((A \cap F_2) \setminus (A \cap F_1)\big). && \text{cf. justif.} \quad \text{(16.654b)} \end{aligned}$$

Justification : pour tout ensembles X et Y nous avons $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$.

Ayant écrit $A \cap F_0$ comme une union disjointe, nous pouvons calculer ν_1 dessus. Nous posons $R = (A \cap F_2) \setminus (A \cap F_1)$, et nous calculons un peu :

$$\nu_1(A \cap F_0) = \nu_1(A \cap F_1) + \nu_1(R) = \nu_1(A) + \nu_1(R \cap F_1) = \nu_1(A) + \nu_1(\varnothing) = \nu_1(A). \tag{16.655}$$

Le même jeu en permutant les rôles de 1 et 2 donne $\nu_2(A \cap F_0) = \nu_2(A)$.

(4) **Conclusion** Nous avons $\nu_1(A) = \nu_1(A \cap F_0)$ et $\nu_2(A) = \nu_2(A \cap F_0)$. En faisant la somme, c'est bon.

□

PROPooIBLHooTMfEJW

Proposition-Définition 16.232 (Décomposition de Hahn[511])**.**
Soit une mesure signée μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Il existe des parties mesurables $N, P \subset \Omega$ telles que

(1) $N \cup P = \Omega$,

(2) $N \cap P = \varnothing$,

(3) N *est négatif pour* μ,

(4) P *est positive pour* μ.

Un tel couple (N, P) est une ***décomposition de Hahn*** *pour μ.*
De plus si (N, P) et (N', P') sont deux décompositions de Hahn pour μ, alors les parties[72] *$N \Delta N'$ et $P \Delta P'$ sont nulles pour μ.*

Démonstration. D'abord l'existence puis l'« unicité ».

Existence

Nous posons d'abord $N_0 = \varnothing$, et nous construisons des parties N_k par récurrence. Nous posons

$$s_n = \inf\{\mu(D) \text{ tel que } D \subset \Omega \setminus N_n, D \in \mathcal{A}\}. \tag{16.656}$$

Notes : il est possible d'avoir $s_n = -\infty$, et comme $D = \varnothing$ fonctionne dans l'infimum, nous avons $s_n \leqslant 0$. Vu que s_n est un infimum et qu'il est négatif, il existe une partie mesurable $D_n \subset \Omega \setminus N_n$ telle que $\mu(D_n) \leqslant \frac{s_n}{2}$. Pour cette partie nous avons

$$\mu(D_n) \leqslant \frac{s_n}{2} \leqslant 0. \tag{16.657}$$

La proposition 16.229 dit qu'il existe une partie mesurable $A_n \subset D_n$ qui est négative pour μ et qui vérifie $\mu(A_n) \leqslant \mu(D_n)$. Nous posons alors, pour notre récurrence :

$$N_{n+1} = N_n \cup A_n. \tag{16.658}$$

Nous posons ensuite

$$\begin{cases} N = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n & \text{(16.659a)} \\ P = \Omega \setminus N, & \text{(16.659b)} \end{cases}$$

et nous prouvons que (N, P) fonctionne. Nous avons immédiatement que $N \cup P = \Omega$ et que $N \cap P = \varnothing$.

(1) N **est négative pour** μ Nous avons, pour tout n que $N_n = \varnothing \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$. Donc $N_n \subset N$ pour tout $n \geqslant 1$.

Notons aussi que les A_n sont disjoints. En effet

$$A_n \subset D_n \subset \Omega \setminus N_n = \Omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}). \tag{16.660}$$

Donc A_n n'intersecte aucun des A_k avec $k < n$.

Nous pouvons maintenant que N est une partie négative. Soit $B \subset N$. Notons que chaque A_n est négatif, donc $\mu(A_n \cap B) \leqslant 0$ parce que, évidemment, $A_n \cap B \subset B$. Étant donné que l'union $N = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$ est disjointe, nous avons

$$\mu(B) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(B \cap A_n) \leqslant 0. \tag{16.661}$$

Donc $m(B) \leqslant 0$ et nous avons montré que N est une partie négative.

[72] La partie $A \Delta B$ est la différence symétrique (définition 1.52). Dire que $N \Delta N'$ est nulle pour μ signifie que pratiquement tout est dans l'intersection. Nous avons donc unicité de la décomposition à partie nulle près.

(2) P **est positive pour** μ Nous y allons par l'absurde. Supposons avoir $D \subset P$ avec $\mu(D) < 0$. Nous avons déjà vu que $N_n \subset N$, donc $\Omega \setminus N \subset \Omega \setminus N_n$. En ce qui concerne D,

$$D \subset P = \Omega \setminus N \subset \Omega \setminus N_n. \tag{16.662}$$

Donc $s_n \leqslant \mu(D) < 0$. Nous avons alors le calcul

$$\begin{aligned}
\mu(N) &= \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) && && (16.663a)\\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mu(D_n) && \text{cf. justif.} && (16.663b)\\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mu(D)}{2} && \text{cf.justif.} && (16.663c)\\
&= -\infty. && && (16.663d)
\end{aligned}$$

ITEMooMRFYooZjBiQM SUBEQooJRGSooDxMQhJ

Justifications.

- Pour (16.663b). Nous avons $\mu(A_n) \leqslant \mu(D_n)$ par choix de A_n.
- Pour (16.663c). Parce que[73] $\mu(D_n) \leqslant \frac{s_n}{2} \leqslant \frac{\mu(D)}{2}$.

Vu que μ ne prend pas la valeur $-\infty$, nous avons une contradiction. Nous en déduisons que P est positive pour μ.

« Unicité »

Supposons avoir des couples (N, P) et (N', P'). Nous avons d'abord

$$P \setminus P' = P \cap N' \tag{16.664}$$

parce que si $x \in P \setminus P'$, alors $x \in P$ (ça c'est facile), et $x \in P \setminus P' \subset \Omega \setminus P' = N'$. Dans l'autre sens si $x \in P \cap N'$, alors $x \in N' \subset \Omega \cap P'$. De même nous avons $P' \setminus P = P' \cap N$.

En utilisant la formule (1.26) de la différence symétrique,

$$P \Delta P' = (P \setminus P') \cup (P' \setminus P) = (P \cap N') \cup (P' \cap N). \tag{16.665}$$

EQooUZFVooDqAnPF

Nous trouvons de la même façon

$$N \Delta N' = (P \cap N') \cup (P' \cap N). \tag{16.666}$$

EQooLPBIooTExEkK

En ce qui concerne les mesures, $P \cap N' \subset P$ et P est positif, donc $\mu(P \cap N') \geqslant 0$. Mais $P \cap N' \subset N'$ et N' est négatif, donc $\mu(P \cap N')) \leqslant 0$.

Nous en déduisons que $\mu(P \cap N') = 0$. Pour la même raison, $\mu(P' \cap N) = 0$. Nous déduisons alors de (16.665) et (16.666) que $\mu(P \Delta P') = \mu(N \Delta N') = 0$. □

Lemme 16.233.
Soit une décomposition de Hahn (N, P) pour la mesure signée μ. Nous posons

$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \tag{16.667a}$$
$$\mu_+(A) = \mu(A \cap P). \tag{16.667b}$$

Alors

(1) μ_- et μ_+ sont des mesures positives.

(2) μ_- prend ses valeurs dans $[0, \infty[$

Démonstration. Vu que N est négative pour μ, pour toute partie mesurable A, nous avons $\mu(A \cap N) \leqslant 0$ et donc

$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \geqslant 0. \tag{16.668}$$

Par ailleurs μ prend ses valeurs dans $]-\infty, \infty]$. De cette façon $-\mu$ ne peut pas descendre jusqu'à $-\infty$. □

[73] Je n'ai vu ce passage correctement justifié nulle part. Voir ma question sur le Wikipédia anglophone[536], qui fait la même « faute » que [511]. Écrivez-moi si vous comprenez leur démarche.

DEFooGICVooKZWLrB

Définition 16.234 (Décomposition de Jordan)**.**
*Soit une mesure signée μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Un couple de mesures positives (μ_-, μ_+) est une **décomposition de Jordan** de μ si il existe une partie mesurable E telle que*

(1) $\mu_-(E) = 0$

(2) $\mu_+(\Omega \setminus E) = 0$

(3) $\mu = \mu_+ - \mu_-$.

LEMooTVFRooAPdbuP

Lemme 16.235 ([1])**.**
Soit une mesure signée μ et une décomposition de Jordan (μ_-, μ_+). Si E est un mesurable vérifiant les conditions de la définition 16.234, alors $(\Omega \setminus E, E)$ est une décomposition de Hahn.

Démonstration. Supposons que $A \subset E$. Alors $\mu_-(A) = 0$ parce que $\mu_-(E) = 0$ et μ_- est une mesure positive. Nous avons alors

$$\mu(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A) = \mu_+(A) \geqslant 0. \tag{16.669}$$

Cela prouve que E est une partie positive pour μ. Le même raisonnement montre que $\Omega \setminus E$ est une partie négative pour μ. □

DEFooDYFPooITNRlI

Proposition 16.236 (Décomposition de Jordan[511])**.**
Soit une mesure mesure signée μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

(1) Il existe une unique décomposition de Jordan (μ_-, μ_+) pour μ.

ITEMooDMVXooTXBFnM

(2) Si (N, P) est une décomposition de Hahn, alors la décomposition de Jordan de μ est donnée par

$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \tag{16.670a}$$
$$\mu_+(A) = \mu(A \cap P). \tag{16.670b}$$

Démonstration. Nous prouvons l'existence directement en prouvant le point (2). Vérifions les trois points de la définition 16.236. Nous posons $E = P$, et nous vérifions

$$\mu_-(E) = -\mu(E \cap N) = -\mu(E \cap N) = -\mu(\varnothing) = 0. \tag{16.671}$$

, et de même $\mu_+(\Omega \setminus E) = \mu_+(N) = \mu(A \cap N) = 0$. Enfin, vu que $\Omega = N \cup P$ est une union disjointe, nous avons $\mu(A) = \mu(A \cap N) + \mu(A \cap P) = -\mu_-(A) + \mu_+(A)$.

Il nous reste à prouver l'unicité de la décomposition de Jordan. Nous supposons que (μ_-, μ_+) et (ν_-, ν_+) sont des décompositions de Jordan de μ. Nous avons donc des mesurables E et F tels que $\mu = \nu_+ - \nu_- = \mu_+ - \mu_-$ et

$$\begin{cases} \mu_-(E) = 0 & \text{(16.672a)} \\ \mu_+(\Omega \setminus E) = 0 & \text{(16.672b)} \\ \nu_-(F) = 0 & \text{(16.672c)} \\ \nu_+(\Omega \setminus F) = 0. & \text{(16.672d)} \end{cases}$$

Le lemme 16.235 nous indique que $(\Omega \setminus E, E)$ et $(\Omega \setminus F, F)$ sont des décompositions de Hahn pour μ. Aussi, pour prendre des notations plus intuitives, nous posons

$$\begin{aligned} N &= \Omega \setminus E & P &= E \\ N' &= \Omega \setminus F & P' &= F \\ \mu'_- &= \nu_- & \mu'_+ &= \nu_+ \end{aligned} \tag{16.673}$$

La partie unicité de la décomposition de Hahn 16.232 implique que $N \Delta N'$ et $P \Delta P'$ sont des parties nulles pour μ. Étant donné que $N' \setminus N \subset N \Delta N'$, la partie $N' \setminus N$ est également nulle pour μ. Idem pour $N \setminus N'$. Enfin nous avons l'union disjointe

$$N' = (N' \cap N) \cup (N' \setminus N), \tag{16.674}$$

et nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}
\mu'_-(A) &= -\mu(A\cap N') && (16.675a)\\
&= -\mu\big((A\cap N')\cap(N'\cap N)\big)-\mu\big((A\cap N')\cap(N'\setminus N)\big) && (16.675b)\\
&= -\mu(A\cap N\cap N')-\mu\big(A\cap(N'\setminus N)\big) && (16.675c)\\
&= -\mu\big(A\cap N\cap N'\big)-\mu\big(A\cap(N\setminus N')\big) && \text{cf.justiif.}\quad (16.675d)\\
&= -\mu(A\cap N) && \text{cf. justif}\quad (16.675e)\\
&= \mu_-(A). && (16.675f)
\end{aligned}$$

SUBEQooFQVAooNNxDHX
SUBEQooKCMDooWeFCXy

Justifications.

- Pour (16.675d). Nous avons
$$\mu\big(A\cap(N\setminus N')\big)=\mu\big(A\cap(N'\setminus N)\big)=0 \tag{16.676}$$
parce que $N\setminus N'$ et $N'\setminus N$ sont des parties nulles pour μ. Bref le passage (16.675d) consiste à remplacer un truc nul par un autre.
- Pour (16.675e). Nous avons l'union disjointe $N=(N'\cap N)\cup(N\setminus N')$.

Nous avons prouvé que $\mu'_-(A)=\mu_-(A)$, et donc que $\mu'_-=\mu_-$. Nous faisons de même pour $\mu'_+=\mu_+$. □

THOooKSISooPAqZcp

Théorème 16.237 (Radon-Nikodym[511, 1])**.**
Soit un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$. Nous considérons

(1) μ, une mesure positive σ-finie.

(2) ν, une mesure signée[74] ou non telle que $|\nu|$ est σ-finie.

Alors

(1) Il existe un unique couple de mesures signées ν_a,ν_s tel que
$$\begin{cases}\nu=\nu_a+\nu_s & (16.677a)\\ \nu_a\ll\mu & (16.677b)\\ \nu_s\perp\mu. & (16.677c)\end{cases}$$

(2) Il existe une unique (à égalité presque partout près) fonction mesurable et intégrable[75] $f:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ telle que
$$\nu_a(A)=\int_A f\,d\mu \tag{16.678}$$
pour tout $A\in\mathcal{A}$.

(3) Si $\nu\geqslant 0$ alors $\nu_a\geqslant 0$, $\nu_s\geqslant 0$ et $f\geqslant 0$.

Démonstration. Nous commençons par l'unicité.

Unicité des mesures et de la fonction

Séparément.

(1) **Unicité des mesures** Nous supposons avoir deux tels couples (ν_a,ν_s) et (ν'_a,ν'_s). Nous avons donc $\nu_a+\nu_s=\nu$ et $\nu'_a+\nu'_s=\nu$. En faisant la différence,
$$\nu_a-\nu'_a=(\nu-\nu_s)-(\nu-\nu'_s)=\nu'_s-\nu_s. \tag{16.679}$$
D'autre part, vu que $\nu_s\perp\mu$ et $\nu'_s\perp\mu$, le lemme 16.231 donne $\nu'_s-\nu_s\perp\mu$. Enfin $\nu_a\ll\mu$ et $\nu'_a\ll\mu$, donc $\nu_a-\nu'_a\ll\mu$. Au final nous avons
$$\begin{cases}\nu_a-\nu'_a\ll\mu & (16.680a)\\ \nu'_s-\nu_s\perp\mu & (16.680b)\\ \nu_a-\nu'_a=\nu'_s-\nu_s. & (16.680c)\end{cases}$$
Tout cela avec le lemme 16.230 nous donne $\nu_a-\nu'_a=\nu_s-\nu'_s=0$.

[74] Mesure signée, définition 16.18.
[75] Intégrale ne signifie pas L^1. Nous demandons juste que l'intégrale existe, si elle vaut ∞, c'est bon pour nous.

(2) **Unicité de la fonction**

Soient deux fonctions $f,g\colon\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ vérifiant la contrainte. Pour toute partie $A\in\mathcal{A}$, nous avons

$$\nu(A)=\int_A f d\mu=\int_A g d\mu. \tag{16.681}$$

Nous écrivons cette égalité pour la partie $A=\{f>g\}$:

$$\int_{\{f>g\}}(f-g)d\mu=0. \tag{16.682}$$

Vu que sur la partie $\{f>g\}$ nous avons $f-g>0$, nous avons $\mu\big(\{f>g\}\big)=0$ par le lemme 16.203. Nous trouvons de même que $\mu\big(\{f<g\}\big)=0$. Au final, nous avons $f=g$ presque partout.

Existence, μ positive finie, ν positive et finie

Nous commençons par prouver la partie existence en supposant que μ est finie et que ν est positive et finie. Nous introduisons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{H}=\left\{f\colon\Omega\to\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}\text{ tel que }\begin{cases}f\text{est mesurable}\\ \int_A f d\mu\leqslant\nu(A)\text{ pour tout }A\in\mathcal{A}\end{cases}\right\} \tag{16.683}$$

L'ensemble $\mathcal{H}$ n'est pas vide parce que la fonction $f=0$ est dedans (ici nous utilisons l'hypothèse supplémentaire que $\nu\geqslant 0$). Nous notons

$$\alpha=\sup\{\int_\Omega f d\mu\text{ tel que }f\in\mathcal{H}\}. \tag{16.684}$$

Nous avons $0\leqslant\alpha\leqslant\mu(\Omega)<\infty$. En vertu du lemme 4.88 nous pouvons prendre une suite (f_n) dans $\mathcal{H}$ telle que

$$\alpha=\lim n\to\infty\int_\Omega f_n d\mu \tag{16.685}$$

et

$$\int_\Omega f_n d\mu\leqslant\int_\Omega f_{n+1}d\mu. \tag{16.686}$$

(1) **Les fonctions g_n**

Pour chaque $n\geqslant 1$ nous notons

$$\begin{aligned}g_n\colon\Omega&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\max\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}.\end{aligned} \tag{16.687}$$

Nous nous fixons provisoirement un n.

(2) $g_n\in\mathcal{H}$

Pour chaque $x\in\Omega$, il existe un $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $g_n(x)=f_i(x)$. Pour $A\in\mathcal{A}$ nous posons

$$A_1=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_1(x)\} \tag{16.688a}$$
$$A_2=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_2(x)\}\setminus A_1 \tag{16.688b}$$
$$\vdots \tag{16.688c}$$
$$A_{k+1}=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_{k+1}(x)\}\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_k) \tag{16.688d}$$
$$\vdots \tag{16.688e}$$
$$A_n=\{x\in\Omega\text{ tel que }g_n(x)=f_n(x)\}\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_{n-1}) \tag{16.688f}$$

Ces ensembles sont disjoints et $A=\bigcup_{i=1}^n A_n$, de telle sorte que

$$\int_A g_n d\mu=\sum_{i=1}^n\int_{A_i}g_n d\mu \tag{16.689a}$$
$$=\sum_{i=1}^n\int_{A_i}f_i d\mu \tag{16.689b}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n\nu(A_i)\text{cf. justif} \tag{16.689c}$$
$$=\nu(A). \tag{16.689d}$$

SUBEQooIULRooCXJmzd

Justification de (16.689c). Vu que $f_i \in \mathcal{H}$, nous avons $\int_{A_i} f_i \leqslant \nu(A_i)$. Bref, nous avons prouvé que $\int_A g_n d\mu \leqslant \nu(A)$, et donc que $g_n \in \mathcal{H}$.

(3) g_n **est mesurable** Les applications f_n sont mesurables, et g_n est définie comme un maximum sur les $f_i(x)$. Donc g_n est mesurable (lemme 16.108). Nous ne fixons plus le n. La suite (g_n) est croissante. Donc la limite $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ existe, et elle est mesurable par la proposition 16.112.

(4) $\int_\alpha f d\mu = \alpha$ SPITEMooGLPCooBjBAdm

Le théorème de la convergence monotone 16.180 va plus loin et nous dit que f est intégrable et

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu \leqslant \nu(A). \tag{16.690}$$ EQooBGAQooCdaIID

Nous avons donc encore $f \in \mathcal{H}$ et donc aussi

$$\int_\Omega f d\mu \leqslant \alpha. \tag{16.691}$$

Mais cette inégalité tient aussi dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu &= \lim \int_\Omega g_n d\mu && (16.692a)\\ &\geqslant \lim \int_\Omega f_n d\mu && (16.692b)\\ &= \alpha. && (16.692c)\end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que $\int_\Omega f d\mu = \alpha < \infty$, et donc que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(5) **Résumé pour l'instant** Nous avons construit une fonction $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A f d\mu \leqslant \nu(A). \tag{16.693}$$

(6) **Les mesures** Nous définissons à présent les applications ν_a et ν_s en espérant qu'elles fonctionneront. D'abord nous posons

$$\nu_a(A) = \int_A f d\mu. \tag{16.694}$$ EQooVKTXooCwZdba

Et ensuite nous posons $\nu_s = \nu - \nu_a$. Il nous reste à prouver que f, ν_a et ν_s satisfont à toutes les conditions.

(7) $\nu_a \ll \mu$

Si $\mu(A) = 0$ nous avons

$$\nu_a(A) = \int_A f d\mu = 0 \tag{16.695}$$

par le lemme 16.205.

(8) ν_s **est positive**

Nous avons

$$\nu_s(A) = \nu(A) - \nu_a(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu \geqslant 0, \tag{16.696}$$

par l'inégalité (16.690).

(9) ν_s **est finie**

Nous savons que ν_a et finie et que $\int_\Omega f d\mu = \alpha < \infty$. Donc ν_s est finie.

(10) $\nu_s \perp \mu$

Nous introduisons la mesure signée $\lambda_n = \nu_s - \frac{1}{n}\mu$, et nous considérons la décomposition de Hahn pour chacun des λ_n (proposition 16.232) : les couples (N_n, P_n). Nous considérons aussi les fonctions $h_n = f + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{P_n}$.

(10a) $h_n \in \mathcal{H}$ La fonction h_n est mesurables parce que f et P_n le sont. En termes d'intégrale nous avons

$$\begin{aligned}
\int_A h_n d\mu &= \int_A f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A \cap P_n) && (16.697a)\\
&= \nu_a(A) + \nu_s(A \cap P_n) - \lambda_n(A \cap P_n) && \text{cf. justif} \quad (16.697b)\\
&= \nu(A) - \nu_s(A) + \nu_s(A \cap P_n) - \lambda_n(A \cap P_n) && (16.697c)\\
&= \nu(A) - \big(\nu_s(A \cap P_n) + \nu_s(A \cap N_n)\big) + \nu_s(A \cap P_n) && (16.697d)\\
&\quad - \lambda_n(A \cap P_n) && \text{cf. justif.}\\
&= \nu(A) - \nu_s(A \cap N_n) - \lambda_n(A \cap P_n) && (16.697e)\\
&\leqslant \nu(A) && \text{cf. justif.} \quad (16.697f)
\end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (16.697b). La définition (16.694) de ν_a).
- Pour (16.697d). Parce que $P_n \cup N_n = \Omega$ est une union disjointe.
- Pour (16.697f). Parce que ν_s est une mesure positive. Donc $\nu_s(A \cap N_n) \geqslant 0$. Et aussi parce que, par construction, λ_n est positive sur P_n.

Bref, nous avons déjà prouvé que $\int_A h_n d\mu \leqslant \nu(A)$. Cela signifie que $h_n \in \mathcal{H}$.

(10b) $\mu(P_n) = 0$ Nous avons vu en (4) que $\int_\Omega f d\mu = \alpha$. Nous pouvons alors faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\alpha &\geqslant \int_\Omega h_n d\mu && \text{cf.justi.} \quad (16.698a)\\
&= \int_\Omega df\mu + \frac{1}{n}\int_\Omega \mathbb{1}_{P_n} d\mu && (16.698b)\\
&= \alpha + \frac{1}{n}\mu(P_n). && (16.698c)
\end{aligned}$$

Justification pour (16.698a) : parce que $h_n \in \mathcal{H}$ et que α est le supremum.
En soustrayant α des deux côtés, nous avons $0 \geqslant \frac{1}{n}\mu(P_n)$ pour tout n. Comme μ est une mesure positive, nous en déduisons que $\mu(P_n) = 0$.

(10c) **Définition de P** Nous posons $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$.

(10d) $\mu(P) = 0$ Vu que $\mu(P_n) = 0$ pour tout n, nous avons $\mu(P) \leqslant \sum_n \mu(P_n) = 0$.

(10e) $\nu_s(\Omega \setminus P) = 0$
Nous avons $\Omega \setminus P \subset \Omega \setminus P_n = N_n$. Donc pour tout n nous avons

$$\lambda_n(\Omega \setminus P) \leqslant \lambda_n(N_n) = 0. \tag{16.699}$$

En utilisant la définition de λ_n nous avons

$$0 \geqslant \lambda_n(\Omega \setminus P) = \nu_s(\Omega \setminus P) - \frac{1}{n}\mu(\Omega \setminus P), \tag{16.700}$$

et donc, pour tout n,

$$\nu_s(\Omega \setminus P) \leqslant \frac{1}{n}\mu(\Omega \setminus P). \tag{16.701}$$

En faisant $n \to \infty$ nous trouvons $\nu_s(\Omega \setminus P) \leqslant 0$. Et comme ν_s est une mesure positive, nous en déduisons que $\nu_s(\Omega \setminus P) = 0$.

Nous avons fini de prouver que $\nu_s \perp \mu$.

Nous avons donc terminé la première partie de la preuve, c'est-à-dire la partie où nous supposions que μ est finie et ν est positive et finie. Nous passons à présent à un cas un peu plus général.

Existence, μ positive σ-finie, ν positive et σ-finie

Vu que μ et ν sont σ-finie, le lemme 16.20 dit qu'il existe des X_n mesurables tels que $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} X_n$, $\mu(X_n) < \infty$ et$\nu(X_n) < \infty$. Nous supposons de plus que ce X_n sont disjoints[76]

[76] Si ce n'est pas le cas, poser $Y_{n+1} = X_{n+1} \setminus Y_n$.

Nous considérons à présent les mesures finies μ_n et ν_n définies par

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n) \tag{16.702a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap X_n) \tag{16.702b}$$
$$\tag{16.702c}$$

Par la partie déjà faite, nous pouvons faire une décomposition pour chaque n : il existe des mesures $\nu_{n,a}$, $\nu_{n,s}$ et une fonction $f_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telles que [SUBEQSooLONIooAksRgK]

$$\begin{cases} \nu_{n,a}(A) = \int_A f_n d\mu_n & \text{(16.703a)} \\ \nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s} & \text{(16.703b)} \\ \nu_{n,a} \ll \mu_n & \text{(16.703c)} \\ \nu_{n,s} \perp \mu_n. & \text{(16.703d)} \end{cases}$$

Nous allons directement changer les f_n pour qu'ils soient plus faciles à traiter. Nous posons[77]

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in X_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.704}$$

Pour ces fonctions nous avons, parce que μ_n est nulle en dehors de X_n,

$$\int_A g_n d\mu_n = \int_{A \cap X_n} g_n d\mu_n = \int_{A \cap X_n} f_n d\mu_n = \int_A f_n d\mu_n = \nu_{n,a}(A). \tag{16.705}$$

Autrement dit, les fonctions g_n fonctionnent aussi bien que les fonctions f_n. Pour ne pas alourdir les notations, nous gardons (16.703), mais nous supposons que f_n est nulle en dehors de X_n.

Notez aussi que pour tout $A \in \mathcal{A}$ nous avons l'union disjointe $A = \bigcup A \cap X_n$, de telle sorte que

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A \cap X_n) = \sum_n \mu_n(A), \tag{16.706}$$

et nous pouvons écrire

$$\mu = \sum_{n \geqslant 0} \mu_n. \tag{16.707}$$

Nous posons

$$\begin{cases} f = \sum_{n \geqslant 1} f_n & \text{(16.708a)} \\ \nu_a = \sum_{n \geqslant 1} \nu_{n,a} & \text{(16.708b)} \\ \nu_s = \sum_{n \geqslant 1} \nu_{s,a}, & \text{(16.708c)} \end{cases}$$

et nous prouvons que cela fait l'affaire. Notons que les fonctions f_n sont L^1 ; cela ne signifie pas que f soit L^1, mais nous ne le demandons pas. La fonction f est certainement intégrable parce qu'elle est positive. Au pire $\int_A f d\mu = \infty$ pour certains A. C'est la vie.

Nous devons vérifier les points suivants :

- $\nu_a(A) = \int_A f d\mu$
- $\nu = \nu_a + \nu_s$
- $\nu_a \ll \mu$
- $\nu_s \perp \mu$.

[77] Cette partie est de l'invention personnelle. J'espère que c'est correct. Redoublez de vigilance.

(1) $\int_A df\mu = \nu(A)$ Voici un calcul :

$$\int_A f d\mu = \int_A \sum_n f_n d\mu \tag{16.709a}$$
$$= \sum_k \int_{A\cap X_k} (\sum_n f_n) d\mu_k \qquad \text{cf. justif.} \tag{16.709b}$$
$$= \sum_k \sum_n \int_{A\cap X_k} f_n d\mu_k \qquad \text{cf. justif.} \tag{16.709c}$$
$$= \sum_k \int_{A\cap X_k} f_k d\mu_k \qquad \text{cf. justif.} \tag{16.709d}$$
$$= \sum_k \nu_{k,a}(A) \tag{16.709e}$$
$$= \nu_a(A). \tag{16.709f}$$

Justifications.

- Pour (16.709b). Les X_k sont disjoints et leur union fait Ω. Nous pouvons donc tranquillement couper l'intégrale en morceaux[78].
- Pour (16.709c). Nous permutons la somme et l'intégrale avec le corolaire 16.183 :
- Pour (16.709d). Vu que $f_n = 0$ sur X_k tant que $k \neq n$, tous les termes de la somme sur n sont nuls sauf le terme $n = k$.

Voilà déjà une belle première vérification de faite.

(2) $\nu = \nu_a + \nu_s$
La proposition 12.175 nous permet de fusionner les sommes :

$$\begin{aligned}(\nu_a + \nu_s)(A) &= \sum_n \nu_{n,a}(A) + \sum_n \nu_{n,s}(A) \\ &= \sum_n \Big(\nu_{n,a}(A) + \nu_{n,s}(A)\Big) = \sum_n \nu_n(A) = \nu(A).\end{aligned} \tag{16.710}$$

(3) $\nu_a \ll \mu$
Supposons que $\mu(A) = 0$. Vu que l'union $\Omega = \bigcup_n X_n$ est disjointe, nous avons

$$0 = \mu(A) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A \cap X_n) = \sum_n \mu_n(A). \tag{16.711}$$

Nous en déduisons que $\mu_n(A) = 0$ pour tout n parce que μ_n est une mesure positive. Étant donné que $\mu_{n,a} \ll \mu_n$, nous avons $\nu_{n,a}(A) = 0$ pour chaque n. En faisant la somme,

$$\nu_a(A) = \sum_n \nu_{n,a}(A) = 0. \tag{16.712}$$

(4) $\nu_s \perp \mu$ Nous décomposons en petites parties.

(4a) $\nu_{n,s} \perp \mu_k$ **pour tout** n **et** k Nous vérifions la définition 16.223 avec $E = X_k$ et $F = X_n$, qui sont disjoints. Nous avons d'une part que $\mu_k(A) = \mu(A \cap X_k)$, et d'autre part que $\mu_k(A \cap X_k) = \mu(A \cap X_k \cap X_k) = \mu(A \cap X_k)$. Donc $\mu_k(A) = \mu_k(A \cap X_k)$.
Et d'autre part[79],

$$\nu_{n,s}(A) = \nu_n(A) - \nu_{n,a}(A) \tag{16.713a}$$
$$= \nu(A \cap X - n) - \int_A f_n d\mu_n \tag{16.713b}$$
$$= \nu(A \cap X - n) - \int_{A\cap X_n} f_n d\mu_n \qquad f_n = 0 \text{ sur } \Omega \setminus X_n. \tag{16.713c}$$
$$= \nu(A \cap X_n) - \nu_{n,a}(A \cap X_n). \tag{16.713d}$$

Le membre de droite ne change pas si nous prenons $A \cap X_n$ au lieu de A. Donc le membre de gauche non plus. Nous en déduisons que $\nu_{n,s}(A) = \nu_{n,s}(A \cap X_n)$.

[78] Ce découpage est également de l'invention personnelle. Quadruplez de vigilance.
[79] Invention personnelle, octuplez de vigilance.

(4b) $\nu_{n,s} \perp \mu$ Appliquer le lemme 16.225 à $\mu = \sum_n \mu_n$.

(4c) $\nu_s \perp \mu$ Appliquer le lemme 16.225 à $\nu_s = \sum_n \nu_{n,s}$.

Existence, μ positive σ-finie, ν signée, $|\nu|$ σ-finie

Nous sommes enfin dans le cas général. Vu que $|\nu|$ est σ-finie, les deux parties de la décomposition de Jordan[80] (ν_-, ν_+) de ν sont des mesures positives σ-finies. Nous pouvons donc appliquer tout ce que nous venons de voir aux mesures ν_- et ν_+ séparément : nous avons des mesures positives $\nu_{+,a}$, $\nu_{+,s}$, ν_-, a et ν_-, s telles que

$$\begin{cases} \nu_{+,a} + \nu_{+,s} = \nu_+ & (16.714a)\\ \nu_{+,a} \ll \mu & (16.714b)\\ \nu_{+,s} \perp \mu & (16.714c)\\ \nu_{-,a} + \nu_{-,s} = \nu_- & (16.714d)\\ \nu_{-,a} \ll \mu & (16.714e)\\ \nu_{-,s} \perp \mu. & (16.714f) \end{cases}$$

Nous posons alors

$$\nu_a = \nu_{+,a} - \nu_{-,a} \quad (16.715a)$$
$$\nu_s = \nu_{+,s} - \nu_{-,s}, \quad (16.715b)$$

et nous vérifions que toutes les conditions sont respectée. D'abord

$$\nu_a + \nu_s = \nu_{+,a} - \nu_{-,a} + \nu_{+,s} - \nu_{-,s} = \nu_+ - \nu_- = \nu. \quad (16.716)$$

Ensuite si $\nu_{+,a} \ll \mu$ et $\nu_{-,a} \ll \mu$, nous avons $\nu_a = \nu_{+,a} - \nu_{-,a} \ll \mu$ parce que le fait d'être dominée passe à la somme finie[81]. Et enfin, le lemme 16.226 assure que $\nu_a \perp \mu$. □

CorZDkhwS

Corolaire 16.238.
Si μ est une mesure σ-finie dominée par la mesure σ-finie m, alors μ possède une unique fonction de densité.

CorDomDens

Corolaire 16.239.
Soient μ et m, deux mesures positives σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors m domine μ si et seulement si μ possède une densité par rapport à m.

Démonstration. Si μ est dominée par m, alors la décomposition $\mu = \mu + 0$ satisfait le théorème de Radon-Nikodym. Par conséquent il existe une fonction f telle que

$$\mu(A) = \int_A f dm. \quad (16.717)$$

Cette fonction est alors une densité pour μ par rapport à m.

Pour la réciproque, nous supposons que μ a une densité f par rapport à m, et que A est un ensemble de m-mesure nulle :

$$m(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A dm = 0. \quad (16.718)$$

Cela signifie que la fonction $\mathbb{1}_A$ est m-presque partout nulle. La fonction produit $\mathbb{1}_A f$ est également nulle m-presque partout, et par conséquent

$$\mu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A f dm = 0. \quad (16.719)$$

□

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 16.240
Est-ce que la démonstration de cela ne demande pas la convergence monotone d'une façon ou d'une autre ?

[80] Proposition 16.236.

[81] Je n'ai pas dit que ça ne passait pas aux sommes dénombrables. Je suis prêt à parier que non, mais j'y ai pas vraiment réfléchi.

16.10.2 Mesure complexe

DefGKHLooYjocEt

Définition 16.241 (Mesure complexe[537]).
*Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, une **mesure complexe** est une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) La σ-additivité : si les éléments $A_i \in \mathcal{A}$ sont disjoints, alors $\sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i)$.

Notons que la série $\sum_i \mu(A_i)$ est alors nécessairement absolument convergente. En effet changer l'ordre de la somme ne change pas l'union, et donc ne change pas la valeur de la somme. Si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une permutation,

$$\sum_i \mu(A_{\sigma(i)}) = \mu\Big(\bigcup_i A_{\sigma(i)}\Big) = \mu\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i \mu(A_i). \tag{16.720}$$

Le théorème 12.137 dit alors que la somme doit être absolument convergente.

ThoZZMGooKhRYaO

Théorème 16.242 (Radon-Nikodym complexe[82]).
Soit μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et ν une mesure complexe. Alors

(1) Il existe un unique couple de mesures complexes ν_a, ν_s sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tel que

(1a) $\nu = \nu_a + \nu_s$
(1b) $\nu_a \ll \mu$
(1c) $\nu_s \perp \mu$.

(2) Ces mesures satisfont alors $\nu_a \perp \nu_s$.

(3) Il existe une fonction intégrable $h : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\nu_a = h\mu$.

(4) La fonction h est unique à μ-équivalence près.

ItemDIXOooFqOkgGv

(5) Si de plus $\nu \ll \mu$ alors $\nu = h\mu$.

Démonstration. No proof. □

RemSYRMooZPBhbQ

Remarque 16.243.
Le point (5) est souvent utilisé sous la forme

$$\nu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h(\omega) d\mu(\omega) = \int_A h(\omega) d\mu(\omega). \tag{16.721}$$

16.10.3 Théorème d'approximation

ThoAFXXcVa

Théorème 16.244 (Théorème d'approximation, thème 24[519]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.
Soient un ouvert $W \subset \Omega$ tel que $\mu(W) < \infty$ et un un borélien A tel que $A \subset W$. Soit aussi $\epsilon > 0$.
Il existe un fermé $F \subset W$ et une fonction $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant

(1) $F \subset A \subset W$,

ITEMooOZVJooSViuds

(2) $f|_F = 1$,

ITEMooIEFSooHXYZrK

(3) $f|_{W^c} = 0$

ITEMooSOQVooBbvfgy

(4) $\|f - \mathbb{1}_A\|_{L^1} < \epsilon$

Démonstration. Par le lemme 16.89, il existe un fermé F et un ouvert V tels que

$$F \subset A \subset V \subset W \tag{16.722}$$

et $\mu(V \setminus F) < \epsilon$. Nous posons alors

$$f(x) = \frac{d(x, V^c)}{d(x, V^c) + d(x, F)}. \tag{16.723}$$

[82] L'histoire du nom de ce théorème est intéressante. Lorsque monsieur et madame Rèmederdonnukodym apprirent que leurs amis, les Rèmedelaboulechevelue avaient appelé leur fils Théo, ils décidèrent d'en faire autant. C'est en souvenir de ces circonstances que monsieur Nikodym (prénommé Radon) décida de faire des math.

Le dénominateur de cette expression ne s'annule jamais parce que si $d(x,V^c)=0$, c'est que $x\in V^c$. Mais alors x n'est pas dans V et donc pas dans F non plus. La partie F étant fermée, $d(x,F)>0$ par lemme 9.218. De plus la fonction f est continue par le lemme 9.222.

(1) **Pour (2)** Si $x\in F$, alors $d(x,F)=0$, et f devient

$$f(x)=\frac{d(x,V^c)}{d(x,V^c)}=1 \tag{16.724}$$

(2) **Pour (3)** Si $x\in W^c$, alors $x\in V^c$ et $d(x,V^c)=0$ si bien que $f(x)=0$.

(3) **Pour (4)** Les premiers points montrent que

$$\mathbb{1}_F\leqslant f\leqslant\mathbb{1}_V. \tag{16.725}$$

Mais nous avons aussi, par ailleurs,

$$\mathbb{1}_F\leqslant\mathbb{1}_A\leqslant\mathbb{1}_V. \tag{16.726}$$

Ces deux encadrements, par le lemme 4.66 donnent l'encadrement

$$|f-\mathbb{1}_A|\leqslant\mathbb{1}_V-\mathbb{1}_F. \tag{16.727}$$

En ce qui concernent les intégrales nous avons alors

$$\int_\Omega|\mathbb{1}_A-f|\leqslant\int_\Omega(\mathbb{1}_V-\mathbb{1}_F)d\mu \tag{16.728a}$$
$$=\mu(V)-\mu(F) \tag{16.728b}$$
$$<\epsilon. \tag{16.728c}$$

SUBEQooVJDXooFtCslQ

Pour (16.728b), c'est le lemme 16.177.

□

16.11 Produit de mesures

Si vous cherchez le produit d'une mesure par une fonction, c'est la définition 16.214.

LemAQmWEmN

Lemme 16.245 (Propriété des sections[520])**.**
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des tribus sur les ensembles Ω_1 et Ω_2. Si $A\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ alors pour tout $x\in\Omega_1$ et $y\in\Omega_2$, les ensembles

subEqCTtPccK

$$A_1(y)=\{x\in\Omega_1\text{ tel que }(x,y)\in A\} \tag{16.729a}$$
$$A_2(x)=\{y\in\Omega_2\text{ tel que }(x,y)\in A\} \tag{16.729b}$$

sont mesurables.

Démonstration. Soit $y\in\Omega_2$; nous allons prouver le résultat pour $A_1(y)$. Pour cela nous notons

$$S=\{A\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\text{ tel que }\forall y\in\Omega_2,A_1(y)\in\mathcal{A}_1\}, \tag{16.730}$$

et nous allons noter que S est une tribu contenant les rectangles. Par conséquent, S sera égal à $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$.

(1) **Les rectangles**
Considérons le rectangle $A=X\times Y$ et si $y\in\Omega_2$ alors

$$A_1(y)=\{x\in\Omega_1\text{ tel que }(x,y)\in X\times Y\}. \tag{16.731}$$

Donc soit $y\in Y$ alors $A_1(y)=X\in\mathcal{A}_1$, soit $y\notin Y$ et alors $A_1(y)=\varnothing\in\mathcal{A}_1$.

(2) **Tribu : ensemble complet**
Nous avons $\Omega_1\times\Omega_2\in S$ parce que c'est un rectangle.

(3) **Tribu : complémentaire** Soit $A \in S$. Montrons que $A^c \in S$. Nous avons d'abord

$$(A^c)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A^c\}. \tag{16.732}$$

D'autre part

$$A_1(y)^c = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \notin A\} = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A^c\} = (A^c)_1(y). \tag{16.733}$$

Vu que $\mathcal{A}_1$ est une tribu et que par hypothèse $A_1(y) \in \mathcal{A}_1$, nous avons aussi $A_1(y)^c \in S$, et donc $(A^c)_1(y) \in \mathcal{A}_1$, ce qui prouve que $A^c \in S$.

(4) **Tribu : union dénombrable** Soit une suite $A_n \in S$. Nous avons

$$\begin{aligned}(\bigcup_n A_n)_1(y) &= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_n A_n\} && (16.734a)\\ &= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A_n\} && (16.734b)\\ &= \bigcup_n (A_n)_1(y), && (16.734c)\end{aligned}$$

et ce dernier ensemble est dans $\mathcal{A}_1$ parce que c'est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}_1$.

Nous avons donc prouvé que S est une tribu contenant les rectangles, donc S contient au moins $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. □

Corolaire 16.246.
Si $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable[83] *sur $X \times Y$ alors pour chaque y dans Ω_2, la fonction*

$$\begin{aligned}f_y\colon X &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x,y)\end{aligned} \tag{16.735}$$

est mesurable.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (i.e. un borélien), et $y \in \Omega_2$. Nous avons

$$f_y^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in X \text{ tel que } f(x,y) \in \mathcal{O}\} = A_1(y) \tag{16.736}$$

où

$$A = \{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ tel que } f(x,y) \in \mathcal{O}\} = f^{-1}(\mathcal{O}). \tag{16.737}$$

Ce dernier est mesurable parce que f l'est. □

ThoCCIsLhO

Théorème 16.247 ([520][84])**.**
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Alors les fonctions[85]

$$\begin{aligned}x &\mapsto \mu_2\big(A_2(x)\big) && (16.738a)\\ y &\mapsto \mu_1\big(A_1(y)\big) && (16.738b)\end{aligned}$$

sont mesurables et

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y). \tag{16.739}$$

EqRKXwsQJ

Démonstration. Nous supposons d'abord que μ_1 et μ_2 sont finies et nous notons $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur lequel le théorème est correct. Nous allons commencer par prouver que $\mathcal{D}$ est un λ-système.

(1) **λ-système : différence ensembliste** Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Nous avons

$$\begin{aligned}(B \setminus A)_1(y) &= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B \setminus A\} && (16.740a)\\ &= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B\} \setminus \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A\} && (16.740b)\\ &= B_1(y) \setminus A_1(y). && (16.740c)\end{aligned}$$

Vu que $A_1(y) \subset B_1(y)$ et que les mesures sont finies le lemme 16.23 nous donne

$$\mu_1\big((B \setminus A)_1(y)\big) = \mu_1\big(B_1(y)\big) - \mu_1\big(A_1(y)\big), \tag{16.741}$$

[83] Définition 16.46.
[84] Modèle non contractuel : des notations et la définition de λ-système peuvent varier entre la référence et le présent texte.
[85] Voir la notation du lemme 16.729.

et similairement pour $1 \leftrightarrow 2$. Les deux fonctions (de y) à droite étant mesurables, nous avons la mesurabilité de la fonction $y \mapsto \mu_1\big((B \setminus A)_1(y)\big)$.

Prouvons la formule intégrale en nous rappelant que la formule (16.739) est supposée correcte pour A et B séparément :

$$\int_{\Omega_2} \mu_1\big((B \setminus A)_1(y)\big) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(B_1(y)\big) d\mu_2(y) - \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{16.742a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big(B_2(x)\big) d\mu_1(x) - \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{16.742b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big((B \setminus A)_2(x)\big) d\mu_1(x). \tag{16.742c}$$

(2) **λ-système : limite de suite croissante**

Soit (A_n) une suite croissante dans $\mathcal{D}$; nous posons $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ et $A_0 = \varnothing$ de telle sorte à travailler avec une suite d'ensembles disjoints qui satisfait $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$. Vu que la suite est croissante nous avons $A_{n-1} \subset A_n$ et donc $B_n \in \mathcal{D}$ par le point déjà fait sur la différence ensembliste. Nous avons :

$$(\bigcup_n B_n)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_n B_n\} \tag{16.743a}$$

$$= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B_n\} \tag{16.743b}$$

$$= \bigcup_n (B_n)_1(y). \tag{16.743c}$$

Par conséquent, par la propriété (2) d'une mesure nous avons

$$\mu_1\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) = \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big). \tag{16.744}$$

En tant que somme de fonctions positives et mesurables, la fonction

$$y \mapsto \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) \tag{16.745}$$

est mesurable par la proposition 16.103. Il faut encore vérifier la formule intégrale. Le gros du boulot est de permuter une somme et une intégrale par le corolaire 16.183 :

$$\int_{\Omega_2} \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) d\mu_2(y) = \sum_n \int_{\Omega_2} \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{16.746a}$$

$$= \sum_n \int_{\Omega_1} \mu_2\big((B_n)_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{16.746b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_n \mu_2\big((B_n)_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{16.746c}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) d\mu_1(x). \tag{16.746d}$$

Maintenant que $\mathcal{D}$ est un λ-système contenant les rectangles, le lemme 16.33 dit que la tribu engendrée par $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$) est le λ-système $\mathcal{D}$ lui-même.

La preuve est finie dans le cas de mesures finies. Nous commençons maintenant à prouver dans le cas où les mesures μ_1 et μ_2 sont seulement σ-finies. Nous considérons des suites croissantes $\Omega_{i,n} \to \Omega_i$ d'ensembles mesurables et de mesure finie : $\mu_i(\Omega_{i,n}) < \infty$. D'abord remarquons que

$$\mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x)\Big) = \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big) \mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}. \tag{16.747}$$

En effet,

$$\heartsuit = (A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x) \tag{16.748a}$$

$$= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j}\} \tag{16.748b}$$

$$= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\}. \tag{16.748c}$$

Si $y \in \Omega_{1,j}$ alors $\{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\} = \Omega_{2,j}$ et dans ce cas

$$\heartsuit = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \Omega_{2,j} = A_2(x) \cap E_{2,j}. \tag{16.749}$$

Et inversement, si $x \notin \Omega_{1,j}$ alors $\heartsuit = \varnothing$. Dans les deux cas nous avons (16.747).

Les ensembles $A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}$ étant de mesure finie, nous pouvons leur appliquer la première partie :

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_2(x)\Big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_1(y)\Big) d\mu_2(u), \tag{16.750}$$

ou encore

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big) \mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}(x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big(A_1(y) \cap \Omega_{1,j}\Big) \mathbb{1}_{\Omega_{2,j}}(y) d\mu_2(y). \tag{16.751}$$

Ce que nous avons dans ces intégrales sont (par rapport à j) des suites croissantes de fonction positives ; nous pouvons donc permuter une limite et une intégrale. En sachant que si $k \to \infty$, alors

$$\mathbb{1}_{1,j}(x) \to 1 \tag{16.752a}$$

$$\mu_2\big(A_2(x) \cap \Omega_2, j\big) \to \mu_2\big(A_2(x)\big), \tag{16.752b}$$

nous trouvons le résultat demandé. □

ThoWWAjXzi

Théorème-Définition 16.248 ([538, 539]).
Soient μ_i des mesures σ-finies sur[86] $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ *$(i = 1, 2)$.*

ITEMooMMAAooVnHmzc

(1) Il existe une et une seule mesure, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ telle que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \tag{16.753}$$

EqOIuWLQU

pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

(2) Cette mesure est donnée par la formule[87]

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{16.754}$$

EqDFxuCtH

où $A_1(y)$ et $A_2(x)$ sont définis en (16.729).

*Cette mesure est la **mesure produit** de μ_1 par μ_2.*

(3) La mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ ainsi définie est σ-finie.

ITEMooUOATooQpdcND

(4) Le produit de mesures est associatif : si μ_1, μ_2 et μ_3 sont des mesures, alors σ-finies, alors

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3). \tag{16.755}$$

Démonstration. La partie « existence » sera divisée en deux parties : l'une pour prouver que les formules (16.754) donnent une mesure et une pour montrer que cette mesure vérifie la condition (16.753).

(1) **Unicité**

L'ensemble des rectangles de $\Omega_1 \times \Omega_2$ engendre la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, est fermé par intersection et contient une suite croissante d'ensembles $P_n \times R_n$ de mesure finie ($\mu(P_n \times R_n) < \infty$) telle que $P_n \times R_n \to \Omega_1 \times \Omega_2$. Cette suite est donnée par le fait que μ_1 et μ_2 sont σ-finies. En effet si (X_n) et (Y_n) sont des recouvrements dénombrables de Ω_1 et Ω_2 par des ensembles de mesure finie, en posant $P_n = \bigcup_{k=1}^n X_k$ et $R_n = \bigcup_{k=1}^n Y_k$ nous avons bien une suite croissante de rectangles qui tendent vers $\Omega_1 \times \Omega_2$. Avec ces rectangles en main, le théorème 16.36 donne l'unicité.

(2) **Les formules définissent une mesure** Le théorème 16.247 dit que ces formules ont un sens et que l'égalité entre les deux intégrales est correcte. Nous prouvons à présent qu'elles déterminent effectivement une mesure sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

Pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mu(A) \geqslant 0$ parce que μ est donnée par l'intégrale d'une fonction positive.

[86] La tribu produit est la définition 16.129.
[87] Voir les notations du lemme 16.245.

En ce qui concerne la condition d'unions dénombrable disjointe, soient $A^{(i)}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$; nous commençons par remarquer que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right)_2 (x) = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\} \tag{16.756a}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A^{(i)}\} \tag{16.756b}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_2^{(i)}(x). \tag{16.756c}$$

Par conséquent,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right) = \int_{\Omega_1} \mu_2\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right)_2(x)\right) d\mu_1(x) \tag{16.757a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x) \tag{16.757b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x). \tag{16.757c}$$

où nous avons utilisé l'additivité de la mesure μ_2. À ce niveau, il serait commode de permuter la somme et l'intégrale. Pour ce faire nous considérons la suite (croissante) de fonctions

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big). \tag{16.758}$$

Nous pouvons permuter la limite et l'intégrale grâce au théorème de la convergence monotone 16.180 ; ensuite la somme se permute avec l'intégrale en tant que somme finie :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} \big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x) \tag{16.759a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A^{(i)}) \tag{16.759b}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A^{(i)}). \tag{16.759c}$$

(3) **Elles vérifient la condition** Prouvons que les formules (16.754) se réduisent à (16.753) dans le cas des rectangles. Soit donc $A = X_1 \times X_2$ avec $X_i \in \mathcal{A}_i$. Alors

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in X_1 \times X_2\} \tag{16.760}$$

et

$$\mu_1\big(A_1(y)\big) = \mathbb{1}_{X_2}(y)\mu_1(X_1), \tag{16.761}$$

donc

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) \tag{16.762a}$$

$$= \int_{\Omega_2} \mu_1(X_1)\mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) \tag{16.762b}$$

$$= \mu_1(X_1) \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) \tag{16.762c}$$

$$= \mu_1(X_1)\mu_2(X_2). \tag{16.762d}$$

Pour cela nous avons utilisé le fait que l'intégrale de la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable est la mesure de cet ensemble.

□

DefUMIBCAO

Définition 16.249 (Produit d'espaces mesurés)**.**
*Si $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ sont deux espaces mesurés, l'**espace produit** est l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2$ muni de la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de la définition 16.129 et de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ définie par le théorème 16.248.*

Remarque 16.250.
Il n'est pas garanti que la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ soit la tribu la plus adaptée à l'ensemble $S_1 \times S_2$. Dans le cas de $\mathbb{R}^N$, il se fait que c'est le cas : en prenant des produits des boréliens sur $\mathbb{R}$ on obtient bien les boréliens sur $\mathbb{R}^N$, voir proposition 16.134.

16.12 Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

DEFooSWJNooCSFeTF

Définition 16.251 (Mesure de Lebesgue)**.**
En plusieurs étapes.

(1) *D'abord nous avons la mesure λ_N sur $\mathbb{R}^N$ définie sur*

$$\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big) \tag{16.763}$$

comme le produit $\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$ via la définition 16.249 (et grâce au fait que le produit est associatif, théorème 16.248(4)).

(2) *Ensuite nous nous souvenons du corolaire 16.134 qui donne λ_N comme une mesure sur*

$$\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N)\big). \tag{16.764}$$

(3) *Et enfin nous considérons la complétion de la mesure λ_N (théorème 16.71), que nous notons encore λ_N.*

PropSKXGooRFHQst

Proposition 16.252 ([523])**.**
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable et disjointe de cubes semi-ouverts.

Démonstration. Nous allons même montrer que ces cubes peuvent être choisis sur un quadrillage.

Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{Q_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ un découpage de $\mathbb{R}^n$ en cubes semi-ouverts de côté 1 et dont les sommets sont en les coordonnées entières. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} [n_i, n_i + 1[\tag{16.765}$$

où les n_i sont des entiers. Ce sont des cubes disjoints. Nous considérons ensuite pour chaque $k > 1$ le découpage $\{Q_i^{(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ en cubes de côtés 2^{-k} qui consiste à découper en 2 les côtés des cubes du découpage $Q^{(k-1)}$. Ces cubes forment encore un découpage dénombrable de $\mathbb{R}^n$ en des cubes disjoints. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} [\frac{n_i}{2^k}, \frac{n_i + 1}{2^k}[\tag{16.766}$$

où les n_i sont encore entiers. Ensuite nous considérons $\mathcal{E}$ l'union de tous les $Q_i^{(k)}$ contenus dans G.

Montrons que $\mathcal{E} = G$. D'abord $\mathcal{E} \subset G$ parce que $\mathcal{E}$ est une union d'ensembles contenus dans G. Ensuite si $x \in G$, il existe une boule de rayon r autour de x contenue dans G ; alors un des ensembles $Q_i^{(k)}$ avec $2^{-j} < \frac{r}{2}$ est contenue dans $B(x, r)$ et donc dans $\mathcal{E}$.

Bien entendu l'union qui donne $\mathcal{E}$ n'est pas satisfaisante par ce que les $Q_i^{(k+1)}$ sont contenus dans les $Q_i^{(k)}$; les intersections sont donc loin d'être vides.

Nous faisons ceci :

$$R^{(0)} = \{Q_i^{(1)} \text{contenu dans } G\} \tag{16.767a}$$

$$R^{(k+1)} = \{Q_i^{(k+1)} \text{contenus dans } G \text{ et pas dans } R^{(k)}\}. \tag{16.767b}$$

En fin de compte l'union de tous les ensembles contenus dans les $R^{(k)}$ forment encore $\mathbb{R}^n$, mais sont d'intersection vide. □

Les cubes dont il est question dans cette preuve, de côtés 2^{-k} sont souvent appelés des cubes **dyadiques**.

16.12.1 Propriétés d'unicité

CorMPDAooDJRrom

Corolaire 16.253.
La mesure λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N))$ à satisfaire

$$\mu\Big(\prod_{i=1}^{N}[a_i,b_i]\Big)=\prod_{i=1}^{N}|a_i-b_i| \tag{16.768}$$

Démonstration. Par définition de la mesure produit, λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\otimes\ldots\otimes\mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ à satisfaire la condition. La proposition 16.134 conclut. □

Vu que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (théorème 11.23), et que tout borné est dans un tel produit d'intervalle, la mesure de Lebesgue est une mesure de Borel (définition 16.91(1)).

THOooTMWHooThsDHj

Théorème 16.254 ([540])**.**
La mesure de Lebesgue est invariante par translation. Autrement dit si A est mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et si $a\in\mathbb{R}^n$ alors $A+a$ est mesurable et

$$\lambda_N(A+a)=\lambda_N(A). \tag{16.769}$$

Démonstration. Nous supposons que A est borélien ; sinon il l'est à ensemble négligeable près. Nous nommons μ la mesure donnée par

$$\mu(A)=\lambda_N(A+a). \tag{16.770}$$

Vu que

$$\mu\Big(\prod_{n=1}^{N}[r_n,s_n[\Big)=\lambda_N\Big(\prod_i[r_n+a_n,s_n+a_n[\Big)=\prod_i|s_n-r_n|. \tag{16.771}$$

Vu qu'il y a unicité de la mesure vérifiant cette propriété (corolaire 16.253), nous avons $\mu=\lambda_N$. □

Pour la suite nous notons Q_0 le cube unité de $\mathbb{R}^N$: $Q_0=\big([0,1[\big)^N$.

ThoCABFooHbUzWc

Théorème 16.255 ([540])**.**
Nous notons $Q_0=\big([0,1[\big)^N$. Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que

(1) μ soit invariante par translation (des boréliens),

(2) $\mu(Q_0)=1$.

Alors $\mu=\lambda_N$.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture nous faisons $N=2$. Notre but est de prouver que $\mu([0,r[\times[0,r'[)=rr'$ pour tout $r,r'\in\mathbb{R}$.

(1) **Longueur $=1/J$ et $1/K$:** Soient J,K des entiers. Nous pouvons diviser le cube Q_0 en rectangles de côtés

$$Q_0=\bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\1\leqslant k\leqslant K}}[\frac{j-1}{J},\frac{j}{J}[\times[\frac{k-1}{K},\frac{k}{K}[\tag{16.772}$$

où l'union est disjointe. En ce qui concerne la mesure nous commençons par utiliser la sous-additivité :

$$\mu(Q_0)=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\1\leqslant k\leqslant K}}\mu\left([\frac{j-1}{J},\frac{j}{J}[\times[\frac{k-1}{K},\frac{k}{K}[\right). \tag{16.773}$$

Nous utilisons ensuite, sur chacun des termes séparément l'invariance par translation selon les vecteurs $(\frac{j-1}{J},0)$ et $(0,\frac{k-1}{K})$:

$$1=\mu(Q_0)=\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\1\leqslant k\leqslant K}}\mu\left([0,\frac{1}{J}[\times[0,\frac{1}{K}[\right)=JK\mu\left([0,\frac{1}{J}[\times[0,\frac{1}{K}[\right), \tag{16.774}$$

et donc

$$\mu\left([0,\frac{1}{J}[\times[0,\frac{1}{K}[\right)=\frac{1}{J}\times\frac{1}{K}. \tag{16.775}$$

(2) **Longueur L/K**

Soient L, M des entiers et calculons :

$$\mu\left([\frac{0}{J},\frac{L}{J}[\times[\frac{0}{K},\frac{M}{K}[\right)=\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant L-1\\0\leqslant m\leqslant M-1}}\mu\left([\frac{l}{J},\frac{l+1}{J}[\times[\frac{m}{K},\frac{m+1}{K}[\right)\tag{16.776a}$$

$$=LM\mu\left([\frac{0}{J},\frac{1}{J}[\times[\frac{0}{K},\frac{1}{K}[\right)\tag{16.776b}$$

$$=LM\times\frac{1}{J}\times\frac{1}{K}.\tag{16.776c}$$

Nous avons donc, pour tout J, K, L, M :

$$\mu\left([0,\frac{L}{J}[\times[0,\frac{M}{K}[\right)=\frac{L}{J}\times\frac{M}{K},\tag{16.777}$$

c'est-à-dire que pour tout $r, s\in\mathbb{Q}^+$ nous avons

$$\mu\big([0,r[\times[0,s[\big)=rs.\tag{16.778}$$

(3) **Longueur réelle** Nous passons au cas de longueur réelle. Soit $a>0$ et une suite croissante de rationnels $r_n\to a$. Une telle suite existe par la proposition 11.16. L'intervalle $[0,a[$ s'écrit sous la forme d'une union croissante $[0,a[=\bigcup_{n\geqslant 1}[0,r_n[$; le lemme 16.24(1) peut être utilisé et nous avons

$$\mu\big([0,a[\big)=\mu\left(\bigcup_{n\geqslant1}[0,r_n[\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\big([0,r_n[\big)=\lim_{n\to\infty}r_n=a.\tag{16.779}$$

Enfin, si $a, a'\in\mathbb{R}$, l'invariance par translation donne

$$\mu\big([a,a'[\big)=\mu\big([0,a'-a[\big)=a'-a.\tag{16.780}$$

Par unicité de la mesure ayant cette propriété, nous avons $\mu=\lambda_N$. □

CorKGMRooHWOQGP

Corolaire 16.256.
Si μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ invariante par translation et telle que $\mu(Q_0)=C<\infty$ alors $\mu=C\lambda_N$.

Démonstration. Si $C>0$ nous considérons la mesure $\frac{1}{C}\mu$ qui vérifie $(\frac{1}{C}\mu)(Q_0)=1$. En conséquence du théorème 16.255, $\frac{1}{C}\mu=\lambda_N$ et $\mu=C\lambda_N$.

Si au contraire $C=0$ alors nous pouvons paver $\mathbb{R}^N$ avec des cubes Q_i de côté 1 qui ont tous mesure 0. Par conséquent, $\mathbb{R}^N=\bigcup_{i=1}^{\infty}Q_i$, donc $\mu(\mathbb{R}^N)=\sum_i\mu(Q_i)=0$. Par conséquent $\mu=0$ parce que toute partie de $\mathbb{R}^N$ a une mesure au maximum égale à celle de $\mathbb{R}^N$. □

16.12.2 Régularité

Les différentes notions de régularité pour une mesure sont données dans la définition 16.91. Ce sont essentiellement des questions de compatibilité entre la mesure et la topologie.

Proposition 16.257.
La mesure de Lebesgue est une mesure de Radon sur tout ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Démonstration. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^N$. C'est localement compact et σ-compact[88]. Il suffit de prouver que λ_N est de Borel sur V pour que le théorème 16.92 conclue à la régularité de la mesure de Lebesgue.

Soit K un compact de V. Par la proposition 9.143 c'est également un compact de $\mathbb{R}^N$. Par conséquent K est dans un pavé fermé de $\mathbb{R}^N$ du type

$$K\subset\prod_{n=1}^{N}[a_n,b_n]\tag{16.781}$$

et donc en passant par le corolaire 16.253,

$$\lambda_N(K)\leqslant\prod_{i=1}^{N}(b_n-a_n)<\infty.\tag{16.782}$$

Nous avons démontré que λ_N reste fini sur tout compact de V. □

[88] Définition 9.131.

16.13 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Un lemme qui a l'air de rien, mais qui au final est souvent utilisé ; tellement qu'on l'oublie un peu.

LEMooWKSWooPptdEm

Lemme 16.258 ([1]).
Soit un compact K de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors l'intégrale

$$\int_K f \tag{16.783}$$

existe et est finie.

Démonstration. Vu que f est continue sur le compact K, elle y atteint une borne supérieure[89] que nous nommons M.

Soit R tel que $B(0,R)$ contienne K. La fonction $(M+1)\mathbb{1}_{B(0,R)}$ majore strictement f sur le mesurable $B(0,R)$. L'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (16.468) de l'intégrale de f est majoré par le nombre fini $(M+1)\mu(K)$. Le supremum existe et est fini (proposition 4.85). □

Le lemme suivant est la contrepartie du côté des intégrales de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue démontrée dans le théorème 16.254.

LEMooGKOGooPLYaUO

Lemme 16.259 (Invariance par translation).
Soient f intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors en posant

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x+a) \end{aligned} \tag{16.784}$$

nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda. \tag{16.785}$$

Nous pouvons aussi écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+a) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda(x). \tag{16.786}$$

Démonstration. En plusieurs parties, en suivant les niveaux de généralité de la définition 16.169 et 16.189.

(1) **Si f est étagée et positive** Nous supposons que $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\omega[$ est étagée. Nous notons $\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ sa forme canonique. La fonction g est également étagée et sa forme canonique est $g = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$ où $B_i = A_i - a$. Nous avons alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} g = \sum_i \alpha_i \lambda(B_i) = \sum_i \alpha_i \lambda(A_i) = \int_{\mathbb{R}^n} f \tag{16.787}$$

parce que le théorème 16.254 dit que $\lambda(A_i) = \lambda(B_i)$.

(2) **Si f est mesurable à valeurs positives** Nous posons

$$E = \{\psi \text{ étagée finie telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\} \tag{16.788}$$

et

$$F = \{\psi \text{ étagée finie telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant g\} \tag{16.789}$$

L'application

$$\begin{aligned} s\colon E &\to F \\ \psi &\mapsto \big[x \mapsto \psi(x-a)\big] \end{aligned} \tag{16.790}$$

est une bijection et par la première partie nous avons $\int_{\mathbb{R}^n} s(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup\{\int \psi \text{ tel que } \psi \in E\} \tag{16.791a}$$

$$= \sup\{\int_{\mathbb{R}^n} \psi \text{ tel que } \psi \in F\} \tag{16.791b}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g. \tag{16.791c}$$

(3) **Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$** Alors en posant $f = f^+ + f^-$ et $g = g^+ + g^-$, nous avons $\int_{\mathbb{R}^n} f^+ = \int_{\mathbb{R}^n} g^+$ et $\int_{\mathbb{R}^n} f^- = \int_{\mathbb{R}^n} g^-$.

□

[89] Nous ne nous lasserons jamais de citer le théorème de Weierstrass 9.215.

16.13.1 Quelques limites dans les bornes

16.260.
Si vous voulez savoir que $\lim_{h\to 0}\int_a^{a+h} f = 0$, c'est le corolaire 29.61. La proposition 29.60 est plus générale et dit que dans L^p, il existe δ tel que si $\mu(A) < \delta$, alors $\int_A |f|^p < \epsilon$.

Dans le cas de l'intégrale de Lebesgue définie par 16.169, si f est une fonction sur $\mathbb{R}$ et si λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une définition directe de

$$\int_0^\infty f d\lambda. \tag{16.792}$$

Nous sommes cependant en droit de nous demander si nous n'aurions pas également ceci :

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f\lambda = \int_0^\infty f d\lambda. \tag{16.793}$$

EQooDVKKooCiEzmA

Lorsque l'intégrale considérée est celle de Riemann, l'égalité (16.793) est une définition. Ici, ça va être une propriété, voir le lemme 16.264.

16.261.
Tant que nous sommes à parler de limites dans les bornes, nous aurions pu vouloir, pour les séries, suivre le chemin suivant :

- Définir l'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré.
- Prendre au passage le cas particulier $\sum_{k=0}^\infty a_k = \int_{\mathbb{N}} a$ où $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ est une fonction mesurable pour la mesure de comptage.
- Démontrer qu'avec ces définitions, $\sum_{k=0}^\infty a_k = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^N a_k$.

Or le dernier point est pris comme définition et son égalité avec l'intégrale pour la mesure de comptage est une propriété[90]. Pourquoi ? Parce que la définition 16.18 de mesure positive demande déjà d'avoir défini les sommes sur $\mathbb{N}$.

LEMooOPKLooGucWjb

Lemme 16.262.
Soit une partie mesurable $A\subset\mathbb{R}^+$ de mesure finie. Alors

$$\lim_{M\to\infty}\lambda\big(A\cap[M,\infty[\big) = 0. \tag{16.794}$$

Démonstration. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \lambda\big(A\cap[x,\infty[\big) \end{aligned} \tag{16.795}$$

est décroissante et bornée vers le bas par 0. Elle possède dont une limite $\ell\geqslant 0$ (corolaire 11.60). Nous allons prouver que $\ell = 0$ en calculant la limite sur les entiers.

Nous posons $J_k = [k, k+1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$ nous avons :

$$f(n) = \lambda\big(A\cap[n,\infty[\big) \tag{16.796a}$$
$$= \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^\infty (A\cap J_k)\Big) \tag{16.796b}$$
$$= \sum_{k=n}^\infty \lambda(A\cap J_k). \tag{16.796c}$$

Mais nous savons par hypothèse sur la mesure de A que

$$\lambda(A) = \sum_{k=0}^\infty \lambda(A\cap J_k) < \infty. \tag{16.797}$$

Donc $f(n)$ est une queue de série convergente. Elle tend donc vers zéro par le lemme 12.134. C'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0. \tag{16.798}$$

Et comme $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe et vaut ℓ, la seule possibilité est $\ell = 0$. □

[90] Proposition 16.268.

LEMooMUHWooZPbMDb

Lemme 16.263.
Soit une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty f d\lambda = 0. \tag{16.799}$$

Démonstration. Nous posons

$$F(x) = \int_x^\infty f d\lambda. \tag{16.800}$$

Nous commençons par prouver que c'est une fonction décroissante. En effet,

$$F(x) - F(x+a) = \int_x^\infty f - \int_{x+a}^\infty f = \int_x^{x+a} f + \int_{x+a}^\infty f - \int_{x+a}^\infty = \int_x^{x+a} f \geqslant 0. \tag{16.801}$$

Nous avons utilisé 16.196.

Vu que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, nous avons $F(x) \geqslant 0$ pour tout x. La fonction F est décroissante et bornée vers le bas. Donc elle a une limite :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \ell \geqslant 0. \tag{16.802}$$

Supposons $\ell > 0$ et posons $0 < \epsilon < \ell$. Soit M tel que pour tout $x > M$ nous ayons

$$\int_x^\infty f > m. \tag{16.803}$$

EQooZVKQooQDxHXp

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$|\int_a^\infty f(t) - \ell\, dt| < \epsilon. \tag{16.804}$$

En vertu de (16.803) nous considérons $a_0 > a$ tel que

$$\int_{a_0}^\infty f = I_0 > m. \tag{16.805}$$

Nous construisons la suite strictement croissante (a_k) de la façon suivante :

$$\int_{a_k}^\infty f = I_k > m \tag{16.806}$$

et

$$|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f - I_k| < \epsilon. \tag{16.807}$$

Donc pour k nous avons

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant I_k - \epsilon \geqslant m - \epsilon. \tag{16.808}$$

Mais

$$\int_{a_0}^\infty = \sum_{k=0}^\infty \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant \sum_k (m - \epsilon) = \infty. \tag{16.809}$$

Nous avons une contradiction. □

LEMooKGZDooWiKiHR

Lemme 16.264 ([1])**.**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $[a, \infty]$ pour la mesure de Lebesgue. Alors la limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f \tag{16.810}$$

existe et vaut

$$\lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f = \int_{[a,\infty]} f. \tag{16.811}$$

De même nous avons

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{[a,b]} f = \int_{]-\infty,b]} f \tag{16.812}$$

EQooNRHDooVzAEED

Démonstration. Vu qu'on a le droit de découper les domaines d'intégration en domaines disjoints, et que l'ajout d'un point ne change rien à la mesure de Lebesgue, nous avons pour tout $b \in [a,\infty[$ que

$$\int_{[a,\infty]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,\infty]} f. \tag{16.813}$$

Nous avons l'intention de prendre la limite $b \to \infty$. Le lemme 16.263 nous assure que la limite de la dernière intégrale existe et vaut zéro. Donc la limite de l'intégrale du milieu existe et vaut celle à gauche.

En ce qui concerne la formule (16.812), nous posons $g(x) = f(-x)$, et nous considérons $-a < b$. Et nous avons, en utilisant la première partie sur la fonction g :

$$\lim_{a\to\infty} \int_{[-a,b]} f = \lim_{a\to\infty} \int_{[-b,a]g} \tag{16.814a}$$

$$= \int_{[-b,\infty[} g \tag{16.814b}$$

$$= \int_{]-\infty,b]} f. \tag{16.814c}$$

□

PROPooSBKEooOlxqRk

Proposition 16.265 ([1])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f = \int_{\mathbb{R}} f \tag{16.815}$$

au sens où la limite de gauche existe et vaut celle de droite.

16.13.2 Mesure de comptage et série

DEFooILJRooByDzhs

Définition 16.266 (mesure de comptage)**.**
*Soit $(S,\mathcal{F})$ un ensemble mesurable. La **mesure de comptage** sur $(S,\mathcal{F})$ est la mesure définie par*

$$m(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.816}$$

Cette mesure est utilisée pour voir des séries comme des intégrales sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m)$.

LEMooDTFHooLVsvAw

Lemme 16.267.
Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, alors le triple $\big(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m\big)$ est un espace mesuré[91] *σ-fini.*

Démonstration. Bien entendu l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$. Nous devons donc seulement vérifier les conditions de la définition 16.18.

Si A est une partie de $\mathbb{N}$, alors $m(A) \in [0,\infty]$ parce que c'est soit le cardinal de A soit ∞.

Le cardinal de l'ensemble vide est zéro (ça fait partie de la définition du cardinal 2.24).

Soient des parties deux à deux disjointes $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{N}$. Posons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Si I est infini dénombrable, alors l'union est infinie : prendre par exemple la partie $S = \{\min(A_i)\}_{i\in I}$ qui est en bijection avec I. Nous avons alors d'une part

$$m\big(\bigcup_i A_i\big) \geqslant m(S) = \infty, \tag{16.817}$$

et d'autre part

$$\sum_{i\in I} m(A_i) \geqslant \sum_{i\in I} 1 = \infty. \tag{16.818}$$

Si par contre I est fini, alors le lemme 2.29(5) dit que

$$m\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \text{Card}\,\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \sum_{i\in I} m(A_i). \tag{16.819}$$

Le fait que notre espace soi σ-fini se voit par exemple en posant $E_n = \{0,\dots,n\}$. Chaque E_n est de mesure finie, et leur union est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{N}$. □

[91] Définition 16.18.

PROPooPNQAooDRLcCm

Proposition 16.268 ([1]).
Soit l'espace mesuré $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m\big)$[92]. Nous considérons une application $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire une suite de nombres réels positifs).

(1) L'intégrale $\int_{\mathbb{N}} a\,dm < \infty$ si et seulement si la série aussi : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

(2) Si $\int_{\mathbb{N}} a\,dm$ existe, alors

$$\int_{\mathbb{N}} a\,dm = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{16.820}$$

EQooFIRMooKQEsAn

Démonstration. Nous allons travailler avec la définition 16.169 de l'intégrale et 16.114 pour les fonctions étagées.

(1) **Si l'intégrale est $< \infty$** Nous supposons que $\int_{\mathbb{N}} adm < \infty$. La proposition 16.212 nous permet de découper $\mathbb{N}$ en parties disjointes. Nous choisissons de voir $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{i\}$ et donc de considérer l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} adm = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\{i\}} adm. \tag{16.821}$$

Vu que $m\big(\{i\}\big) = 1$ et que a est constante sur $\{i\}$, nous avons $\int_{\{i\}} adm = a_i$, et donc

$$\int_{\mathbb{N}} adm = \sum_{i=0}^{\infty} a_i. \tag{16.822}$$

(2) **Si la somme est $< \infty$** Le terme général a_n tend vers zéro[93]. En particulier, pour chaque $r \in \mathbb{R}$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de la suite a plus grands que r.

Soit une fonction étagée $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ minorant a. Vu qu'elle est étagée, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes que nous nommons $\{\alpha_i\}$, et les parties $A_i = \psi^{-1}(\alpha_i)$ sont finies parce que ψ minore a.

Avant de faire un petit calcul, posons quelque notations. D'abord $Z = \psi^{-1}(0)$. Nous avons $\mathbb{N} = \bigcup_i A_i \cup Z$. Nous posons aussi $A = \bigcup_i A_i$; c'est le support de ψ.

Nous pouvons maintenant faire un calcul pour l'intégrale de ψ sur $\mathbb{N}$:

SUBEQSooPMCHooIdtHqG

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \psi dm &= \sum_i \alpha_i \operatorname{Card}(A_i) && \text{def. (16.467)} && (16.823a)\\
&= \sum_i \Big(\sum_{k\in A_i} \psi(k) \Big) && && (16.823b)\\
&= \sum_{k\in\bigcup_i A_i} \psi(k) && && (16.823c)\\
&= \sum_{k\in A} \psi(k) + \sum_{k\in Z} \psi(k) && && (16.823d)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi(k). && && (16.823e)
\end{aligned}$$

SUBEQooIJMMooPKLHVk

SUBEQooGOBRooYhAufP

Justifications.

- Pour (16.823b). Pour tout k dans A_i nous avons $\psi(k) = \alpha_i$.
- Pour (16.823c). Les A_i sont disjoints et chacun est fini. La proposition 12.151 fait le boulot.

Étant donné que ψ minore a, nous avons donc montré que

$$\int_{\mathbb{N}} \psi dm = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi(k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} a_n. \tag{16.824}$$

Donc l'intégrale de toutes les fonctions étagées minorant a est majorée par la série de a. Donc l'intégrale de a existe et est majorée par cette somme.

[92] La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est donnée en la définition 16.266.
[93] Proposition 12.133.

(3) **Valeur de l'intégrale** Nous supposons encore que la série est finie. Nous avons déjà prouvé que

$$\int_{\mathbb{N}} a dm \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n. \tag{16.825}$$

EQooNCMCooYMaASZ

Nous allons prouver l'inégalité inverse en trouvant une bonne suite de fonctions étagées. Soit, pour chaque $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\psi_N\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^+\\ k &\mapsto \begin{cases} a_k & \text{si } k \leqslant N\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{16.826}$$

Cela est une fonction étagée qui minore a. Nous pouvons donc reprendre le calcul (16.823) :

$$\int_{\mathbb{N}} \psi dm = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_N(k) = \sum_{k=0}^{N} a_k. \tag{16.827}$$

Par définition de la série, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{N}} \psi_N dm = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{16.828}$$

Donc le supremum des intégrales de fonctions étagées est au moins égal à $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Nous avons prouvé l'inégalité inverse de (16.825), et donc l'égalité (16.820).

□

EXooDMAUooWWVZbq

Exemple 16.269.
L'intervalle $I = [0, 1]$ muni de la tribu de toutes ses parties et de la mesure de comptage est un espace mesuré non σ-fini. △

16.13.3 Théorème de la moyenne

LEMooOXNPooXpTxtx

Lemme 16.270 ([1]).
Soit A connexe par arcs[94]*, soit $f\colon A \to \mathbb{R}$ continue ainsi que $\alpha, \beta \in f(A)$ avec $\alpha < \beta$. Pour tout $y \in [\alpha, \beta]$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.*

Démonstration. Soient $a, b \in A$ avec $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Vu que A est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma\colon [0, 1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la composée $f \circ \gamma$ dit qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $(f \circ \gamma)(t_0) = y$. Nous avons donc le résultat avec $x = \gamma(t_0)$. □

ThoooEZLGooMChwLT

Théorème 16.271 ([1, 194]).
Soit Q un compact connexe par arcs et une fonction continue $f\colon Q \to \mathbb{R}$. Si λ est la mesure de Lebesgue, alors il existe $a \in Q$ tel que

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda \tag{16.829}$$

Démonstration. En posant $I = \int_Q f d\lambda$ nous avons immédiatement

$$\min(f)\lambda(Q) \leqslant I \leqslant \max(f)\lambda(Q) \tag{16.830}$$

EqooTYQCooVxdazW

où le minimum et le maximum existent parce que f est continue sur un compact. Si une des deux inégalités est une égalité alors la fonction est constante. En effet supposons que la première inégalité soit une égalité ; si la fonction n'était pas constante, il existerait une boule sur laquelle f serait strictement supérieure à $\min(f)$. En intégrant d'abord sur cette boule et ensuite sur le complémentaire nous obtenons une intégrale plus grande que $\min(f)\lambda(Q)$.

Vu que f est continue sur le compact Q, il existe $\alpha, \beta \in Q$ tels que $f(\alpha) = \min(f)$ et $f(\beta) = \max(f)$. Vu que $\min(f) \leqslant I/\lambda(Q) \leqslant \max(f)$, le lemme 16.270 montre qu'il existe $a \in Q$ tel que $f(a) = I/\lambda(Q)$. Autrement dit,

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda. \tag{16.831}$$

□

[94] Définition 11.66.

16.14 Changement de variables dans une intégrale multiple

Dans ce qui suit, U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U\to V$ est un C^1-difféomorphisme. Nous notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des cubes fermés dans U dont les côtés sont parallèles aux axes.

16.14.1 Des lemmes

LemooJYCGooIkkDVn

Lemme 16.272 ([540]).
Soient μ et ν deux mesures de Borel sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^N$. Si $\mu(Q)\leqslant\nu(Q)$ pour tout $Q\in\mathcal{Q}$ alors $\mu(B)\leqslant\nu(B)$ pour tout borélien B.

Démonstration. Si Q est un cube semi-ouvert, c'est-à-dire de la forme

$$Q=\prod_{n=1}^{N}[a_n,a_n+h[\subset U \tag{16.832}$$

alors Q est une réunion croissante de cubes fermés du type $[a_n+\epsilon,a_n+h-\epsilon]$, et donc $\mu(Q)\leqslant\nu(Q)$ par le lemme 16.24(1). La propriété est donc vraie pour les cubes semi-ouverts.

Si Ω est un ouvert, alors il est réunion disjointe dénombrable de cubes semi-ouverts par la proposition 16.252. Donc pour tout ouvert $\Omega\subset U$ nous avons $\mu(\Omega)\leqslant\nu(\Omega)$. En vertu de la proposition 16.92 et de la remarque 16.93, les mesures μ et ν sont régulières, et l'inégalité au niveau des ouverts se répercute en inégalité pour tout boréliens de U :

$$\mu(B)\leqslant\nu(B) \tag{16.833}$$

pour tout $B\in\mathcal{B}\text{or}(U)$. Notons que U étant ouvert dans $\mathbb{R}^N$, les boréliens de U sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}^N$ inclus dans U par le corolaire 16.60. □

LemooJCEDooBRyjRg

Lemme 16.273 ([540]).
Soit une application $\theta\colon U\to\mathbb{R}^N$ de classe C^1 où U est ouvert dans $\mathbb{R}^N$. Pour tout $Q\in\mathcal{Q}$ nous avons

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big)\leqslant\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|^N\lambda_N(Q). \tag{16.834}$$

Démonstration. Nous notons h la longueur du côté du cube. Le théorème des accroissements finis 14.351, pour la composante θ_i donne, pour $u,v\in Q$:

$$\big|\theta_i(u)-\theta_i(v)\big|\leqslant\sup_{s\in Q}\|(d\theta_i)_s\|\|u-v\|\leqslant\sup_{s\in Q}\|(d\theta_i)_s\|h. \tag{16.835}$$

EqooFZMAooKWdzrJ

D'autre part nous avons (nous écrivons pour $N=2$ pour être plus court) :

$$d\theta_s(u)=\frac{d}{dt}\Big[\theta_1(s+tu)e_1+\theta_2(s+tu)e_2\Big]_{t=0}=(d\theta_1)_s(u)e_1+(d\theta_2)_s(u)e_2. \tag{16.836}$$

Donc pour chaque i : $\|d\theta_s\|\geqslant\|(d\theta_i)_s\|$, et nous continuons la majoration (16.835) :

$$\big|\theta_i(u)-\theta_i(v)\big|\leqslant\sup_{s\in Q}\|(d\theta_i)_s\|h\leqslant\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|h. \tag{16.837}$$

Les points $\theta(u)$ et $\theta(v)$ sont donc dans un cube de côté $\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|h$, ce qui permet de majorer $\lambda_N\big(\theta(Q)\big)$ par

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big)\leqslant\Big(\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|h\Big)^N=\Big(\sup_{s\in Q}\|d\theta_s\|\Big)^N\lambda_N(Q) \tag{16.838}$$

où le dernier facteur provient de l'égalité $h^N=\lambda_N(Q)$. □

16.14.2 Déterminant et mesure de Lebesgue

Dans la suite, Q_0 désigne le cube unité : $Q_0=\big([0,1[\big)^N$.

ThoBVIJooMkifod

Théorème 16.274 (Interprétation géométrique du déterminant[540]).
Soit une application linéaire $T\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$. Alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$,

$$\lambda_N\big(T(B)\big)=|\det(T)|\lambda_N(B). \tag{16.839}$$

Démonstration. Nous considérons la mesure positive μ donnée par $\mu(B) = \lambda_N\big(T(B)\big)$, qui est bien une mesure par la proposition 16.86. Cette mesure est invariante par translation parce que λ_N l'est :

$$\mu(B+a) = \lambda_N\big(T(B)+a\big) = \lambda_N\big(T(B)\big) = \mu(B). \tag{16.840}$$

De plus, $T(Q_0)$ est borné et nous notons $\mu(Q_0) = C$. Nous avons $\mu = C\lambda_N$ par le corolaire 16.256.

(1) $C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2)$ Par définition,

$$C(T_1T_2)\lambda_N(B) = \lambda_N\big((T_1T_2)(B)\big) \tag{16.841a}$$
$$= \lambda_N\big(T_1(T_2B)\big) = C(T_1)\lambda_N\big(T_2(B)\big) = C(T_1)C(T_2)\lambda_N(B). \tag{16.841b}$$

Par conséquent la fonction C est multiplicative :

$$C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2). \tag{16.842}$$

Et en plus, $C(\mathrm{Id}) = 1$.

(2) **Matrice diagonale** En guise de T, nous considérons l'application linéaire diagonale donnée par $De_i = d_ie_i$, ou, sous forme matricielle, $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_N)$ qui fait

$$T(Q_0) = [0, d_1[\times \dots \times [0, d_N[\tag{16.843}$$

La mesure de cela est $|d_1 \cdots d_N|$, ce qui nous donne

$$C(D) = |d_1 \dots d_N| = |\det(D)|. \tag{16.844}$$

(3) **Matrice orthogonale** Nous considérons maintenant $T = U$ où U est une matrice orthogonale ($UU^t = 1$). Une matrice orthogonale est une isométrie[95] qui conserve donc la boule unité : $UB(0,1) = B(0,1)$. Nous avons

$$\lambda_N\big(B(0,1)\big) = \lambda_N\big(UB(0,1)\big) = C(U)\lambda_N\big(B(0,1)\big) \tag{16.845}$$

par conséquent $C(U) = 1$, et 1 est justement le déterminant de U.

(4) **Matrice quelconque** Nous savons par le corolaire 15.41 de la décomposition polaire que toute matrice peut être écrite sous la forme $T = U_1DU_2$ où U_i sont orthogonales et D est diagonale. Donc $C(T) = C(U_1)C(D)C(U_2) = \det(U_1)\det(D)\det(U_2) = \det(U_2DU_2) = \det(T)$ parce que le déterminant est multiplicatif (proposition 10.15(1)).

□

Ce théorème donne une interprétation géométrique du déterminant en tant que facteur de dilatation des volumes lors de l'utilisation d'une application linéaire. Si T est une application linéaire quelconque,

$$\lambda_N\big(T(Q_0)\big) = |\det(T)|\lambda_N(Q_0) = |\det(T)|. \tag{16.846}$$

Le déterminant de T est le volume de l'image du cube unité par l'application T.

De la même façon, en utilisant l'application linéaire $T(x) = ax$ nous avons pour tout borélien B :

$$\lambda_N(aB) = a^N\lambda_N(B). \tag{16.847}$$

Une dilatation d'un facteur a des longueurs provoque une multiplication par a^N des volumes.

LEMooOLSMooCimcIT

Lemme 16.275.
Tout hyperplan[96] *de $\mathbb{R}^n$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Dans le cas d'un hyperplan vectoriel, il s'agit de prendre le théorème 16.274. En posant $B = \mathbb{R}^n$, et en considérant l'application linéaire de projection de $\mathbb{R}^n$ vers l'hyperplan, on a le résultat parce que le déterminant d'une telle application est nul.

Si l'hyperplan n'est pas vectoriel, alors nous utilisons l'invariance par translation[97] et nous nous ramenons au cas vectoriel. □

[95] Proposition 10.44.
[96] Définition 10.307.
[97] Théorème 16.254.

CorTHDQooWMSbJe

Corolaire 16.276 ([523]).
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable de cubes presque disjoints[98].

Démonstration. Il suffit de prendre les cubes de la proposition 16.252 et de les fermer. Ce que l'on ajoute est de mesure nulle[99]. □

Remarque 16.277.
La proposition 16.252 est une propriété seulement de la topologie de $\mathbb{R}^n$ alors que le corolaire 16.276 fait intervenir la mesure de Lebesgue parce qu'il faut bien dire que les intersections sont de mesure (de Lebesgue) nulle.

16.14.3 Ensembles négligeables

LemWHKJooGPuxEN

Lemme 16.278 ([541]).
L'image d'une partie négligeable de $\mathbb{R}^d$ par une application lipschitzienne est négligeable.

Démonstration. Soit N une partie négligeable de $\mathbb{R}^d$ et une application lipschitzienne $f\colon N \to \mathbb{R}^d$. Soit $Q \subset \mathbb{R}^d$ un cube borné de côté r. Pour tout $x, x' \in N \cap Q$ nous avons

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant C\|x - x'\| \leqslant Cr. \tag{16.848}$$

Donc $f(N \cap Q)$ est dans une boule de rayon Cr. Mais comme toutes les normes sont équivalentes[100] sur $\mathbb{R}^d$ nous pouvons tout aussi bien prendre la norme $\|.\|_1$ au lieu de la norme $\|.\|_2$ (qui est toujours la norme prise implicitement lorsqu'on parle de $\mathbb{R}^n$), de telle sorte que les boules soient des cubes. Quoi qu'il en soit, $f(N \cap Q)$ est contenu dans un cube de côté $2Cr$ et au niveau de la mesure extérieure,

$$m^*\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2Cr)^d = (2C)^d r^d, \tag{16.849}$$

ou encore

$$m\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2C)^d m(Q) \tag{16.850}$$

parce que r^d est la mesure du cube Q.

Soit maintenant $\epsilon > 0$; vu que N est négligeable, il existe un ouvert U contenant N et tel que $m(U) < \epsilon$. Ce U est une union presque disjointe de cubes dyadiques (Q_n) par le corolaire 16.276. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
m^*\big(f(N)\big) &= m^*\big(f(\bigcup_n N \cap Q_n)\big) && \text{(16.851a)}\\
&= m^*\big(\bigcup_n f(N \cap Q_n)\big) && \text{(16.851b)}\\
&\leqslant \sum_n m^*(f(N \cap Q_n)) && \text{(16.851c)}\\
&\leqslant \sum_n (2C)^d m(Q_n) && \text{(16.851d)}\\
&= (2C)^d m(U) && \text{(16.851e)}\\
&< (2C)^d \epsilon. && \text{(16.851f)}
\end{aligned}$$

Au final, $m^*\big(f(N)\big) \leqslant (2C)^d\epsilon$. L'ensemble N est donc négligeable parce que le lemme 16.77 le dit : $m^*(N) = 0$. □

Corolaire 16.279.
Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ est négligeable.

Démonstration. Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k < N$ est l'image de

$$A = \{t_1 e_1 + \cdots + t_k e_k \text{ tel que } t_i \in \mathbb{R}\} \tag{16.852}$$

par une application linéaire. Ce A est un pavé de mesure de Lebesgue nulle. Donc l'image est négligeable par le lemme 16.278. □

[98] « presque » au sens où les intersections éventuelles sont de mesure de Lebesgue nulle.
[99] Voir le lemme 16.275.
[100] Proposition 12.68

16.14.4 Parties et fonctions mesurables

Pour rappel, la notion d'application de classe C^1 est donnée par la définition 12.317.

PropRDRNooFnZSKt

Proposition 16.280.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\phi: U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $E \subset U$ est mesurable, alors $\phi(E)$ est mesurable[101].

Démonstration. Si E est mesurable, il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $E = B \cup N$. Vu que ϕ est un homéomorphisme, l'application ϕ^{-1} est borélienne parce que continue (théorème 16.58). Nous avons

$$\phi(B) = (\phi^{-1})^{-1}(B), \tag{16.853}$$

c'est-à-dire que $\phi(B)$ est l'image inverse de B par ϕ^{-1}. L'ensemble $\phi(B)$ est donc borélien.

Il reste à voir que $\phi(N)$ est négligeable. Soit $Q \subset U$ un cube compact. L'application $d\phi: Q \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est continue et donc bornée (par la remarque 12.324) sur le compact Q. Par les accroissements finis (théorème 12.357), l'application ϕ est donc lipschitzienne sur Q. La partie $\phi(N \cap Q)$ est alors négligeable par le lemme 16.278. Pour conclure,

$$\phi(N) = \bigcup_i \phi(N \cap Q_i) \tag{16.854}$$

où les Q_i sont tous des cubes compacts. Donc $\phi(N)$ est une union dénombrable d'ensembles négligeables ; ergo négligeable lui-même par le lemme 16.69. □

Proposition 16.281.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi: U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $f: V \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors $f \circ \phi: U \to \mathbb{C}$ l'est.

Démonstration. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{C}$. Il nous faut prouver que

$$(f \circ \phi)^{-1}(A) = \phi^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \tag{16.855}$$

soit mesurable. Par hypothèse , $f^{-1}(A)$ est mesurable. Vu que ϕ est un C^1-difféomorphisme, elle et son inverse sont mesurables par la proposition 16.280. Donc l'image du mesurable $f^{-1}(A)$ par ϕ^{-1} est encore mesurable. □

PROPooSEJJooIfGUkW

Proposition 16.282.
Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^∞ et si N est une partie de mesure (de Lebesgue) nulle dans $\mathbb{R}^n$, alors $f(N)$ est également de mesure nulle.

PROPooIESAooBsThho

Proposition 16.283.
Soit une application $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui s'annule une quantité dénombrable de fois. Soit N de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\delta\| < \epsilon$ et tel que la fonction $x \mapsto f(x + \delta)$ ne s'annule pas sur N.

Démonstration. Soient $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ les racines de f. Pour chaque i, nous notons

$$F_i = \{\delta \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i + \delta \in N\}. \tag{16.856}$$

Chacun de F_i est de mesure nulle, et donc $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ est de mesure nulle. Il suffit de prendre $\delta \in B(0, \epsilon) \setminus \bigcup_i F_i$, et nous avons $x_i + \delta$ hors de N pour tout i. □

16.14.5 Le théorème et sa démonstration

THOooUMIWooZUtUSg

Théorème 16.284 (Changement de variable[541, 540])**.**
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ ainsi qu'un C^1-difféomorphisme $\phi: U \to V$. Nous notons J_ϕ la fonction

$$\begin{aligned} J_\phi: \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \det(d\phi_a). \end{aligned} \tag{16.857}$$

Alors :

[101] Ici « mesurable » parle de mesurabilité au sens de la tribu de Lebesgue, c'est-à-dire pas seulement les boréliens.

ItemVWYDooOzwnyfi

(1) *Si $E \subset U$ est borélien, alors $\phi(E)$ est borélien et*

$$\lambda_N\big(\phi(E)\big) = \int_E |J_\phi| d\lambda_N, \tag{16.858}$$

c'est-à-dire $\phi^{-1}(\lambda_N) = |J_\phi| \cdot \lambda_N$.

ITEMooEZUBooGBuDOS

(2) *Si $f\colon V \to [0,+\infty]$ est mesurable alors la fonction*

$$\begin{aligned}(f\circ\phi)\times|J_\phi|\colon U &\to [0,\infty]\\ x &\mapsto (f\circ\phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x)\end{aligned} \tag{16.859}$$

l'est également et[102]

EqRANEqooQsFhbC

$$\int_{\phi(U)} f d\lambda_N = \int_U (f\circ\phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x). \tag{16.860}$$

ITEMooAJGDooGHKnvj

(3) *Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ est mesurable alors elle est intégrable si et seulement si $(f\circ\phi)\times|J_\phi|\colon U\to\mathbb{C}$ est intégrable. Si c'est le cas, alors nous avons encore la formule de changement de variables :*

EQooLYAWooTArAZR

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\phi^{-1}(V)} (f\circ\phi)|J_\phi|d\lambda_N. \tag{16.861}$$

Démonstration. Attention : la preuve va être longue.

(1) Le fait que $\phi(E)$ soit borélien lorsque E l'est est la proposition 16.280. En ce qui concerne la formule annoncée, il faut travailler.

(1a) **Inégalité dans un sens (cubes)** Nous commençons par prouver l'inégalité

EqooQCXXooSjGzks

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi(x)|dx \tag{16.862}$$

pour tout $Q \in \mathcal{Q}$. On peut diviser le côté du cube Q en k éléments de longueurs égales. Le cube est alors divisé en k^N petits cubes d'intérieurs disjoints. Nous les nommons Q_i $(i = 1,\dots,k^N)$ Nous avons alors

$$\sum_i \lambda_N(Q_i) = \sum_i \lambda_N\big(\operatorname{Int}(Q_i)\big) = \lambda_N\big(\bigcup_i \operatorname{Int}(Q_i)\big) \leqslant \lambda_N(Q) \leqslant \sum_i \lambda_N(Q_i). \tag{16.863}$$

La dernière inégalité est le fait que les intersections ne sont pas disjointes. Toutes ces inégalités sont en réalité des égalités et en particulier : $\lambda_N(Q) = \sum_i \lambda_N(Q_i)$.
Soit $a \in Q_i$. Posons

$$\begin{aligned}&\theta\colon U \to U\\ &\theta = (d\phi_a)^{-1}\circ\phi\end{aligned} \tag{16.864}$$

Cela appelle deux commentaires. D'abord l'application $d\phi_a\colon U\to V$ est inversible parce que ϕ est un difféomorphisme (lemme 12.343). Ensuite, l'application θ est la composée de $(d\phi_a)$ (qui est linéaire) et de ϕ qui est de classe C^1 ; donc θ est de classe C^1. Donc le lemme 16.273 s'applique. La différentielle de θ n'est pas trop compliquée à écrire parce que nous avons la formule de différentielle d'une composée (théorème 12.336) et le fait que $(d\phi_a)^{-1}$ qui est linéaire et donc sa propre différentielle (lemme 12.332). Nous avons donc $d\theta = (d\phi_a)^{-1}\circ d\phi$, et le lemme donne

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i) \tag{16.865}$$

Étant donné que $(d\phi_a)^{-1}$ est une application linéaire, la proposition 16.274 s'applique, et donc

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) = |\det(d\phi_a)^{-1}|\lambda_N\big(\phi(a)\big). \tag{16.866}$$

Le déterminant d'une application réciproque est donné par la proposition 10.15(4) :

$$\det\left((d\phi_a)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(d\phi_a\right)} = \frac{1}{J_\phi(a)}. \tag{16.867}$$

[102] L'intégrabilité d'une fonction est la définition 16.188 qui stipule que l'intégrale de $|f(x)|$ est finie. L'égalité proposée a un sens si les deux membres sont infinis. Il n'y a donc pas d'hypothèses d'intégrabilité obligatoire pour écrire une intégrale lorsque la fonction a des valeurs positives.

Recollant les morceaux,

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big)\frac{1}{J_\phi(a)} \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i), \tag{16.868}$$

ou encore :

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant |J_\phi(a)| \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i). \tag{16.869}$$

Vu que a et s sont proches l'un de l'autre (on peut choisir encore la taille du cube), nous pouvons espérer que $(d\phi_a)^{-1}$ ne soit pas loin d'être l'inverse de $d\phi_s$. Et c'est en effet le cas. Pour s'en assurer, remarquons que l'application

$$d\phi\colon Q_i \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \tag{16.870}$$

est continue et même uniformément continue parce que Q_i est compact. De plus la composition de différentielles étant un produit de matrices nous pouvons permuter la limite dans le calcul suivant :

$$\lim_{s\to a}(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s = (d\phi_a)^{-1}\circ \lim_{s\to a} d\phi_s = \mathbb{1}. \tag{16.871}$$

Donc si $\epsilon>0$ est donné, il existe δ tel que pour tout $s\in B(a,\delta)$, $\|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s-\mathbb{1}\|\leqslant\epsilon$. En ce qui concerne les normes, si $\|A-\mathbb{1}\|\leqslant\epsilon$ alors $\|A\|\leqslant\|A-\mathbb{1}\|+\|\mathbb{1}\|\leqslant\epsilon+1$.

Cela étant dit, nous nous souvenons que nous avions découpé U en un nombre fini de cubes Q_i d'égales dimensions ; il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la diagonale des cubes sot plus petite que le minimum des δ_i. Avec un tel découpage,

$$\sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1}\circ d\phi_s\| \leqslant 1+\epsilon \tag{16.872}$$

et par conséquent

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant (1+\epsilon)^N |J_\phi(a_i)|\lambda_N(Q_i) \tag{16.873}$$

EqooQRMNooZduAkX

où nous avons ajouté un indice i au point a pour nous rappeler que nous avons choisi $a\in Q_i$.

Le théorème de la moyenne 16.271 appliqué à l'intégrale $\int_{Q_i}|J_\phi(t)|d\lambda_N(t)$ donne l'existence d'un $a_i\in Q_i$ tel que

$$|J_\phi(a_i)| = \frac{1}{\lambda_N(Q_i)}\int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N. \tag{16.874}$$

Ce point a_i vérifie l'inégalité (16.873) comme tout point de Q_i. Nous sommons ces inégalités sur tous les i :

$$\begin{aligned}
\lambda_N\big(\phi(Q)\big) &\leqslant \sum_i \lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) && \text{(16.875a)}\\
&\leqslant (1+\epsilon)^N \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_N(Q_i)\int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N}\right)\lambda_N(Q_i) && \text{(16.875b)}\\
&= (1+\epsilon)^N \sum_i \int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N && \text{(16.875c)}\\
&= (1+\epsilon)^N \int_Q |J_\phi|d\lambda_N && \text{(16.875d)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathbb{1}_Q=\sum_i\mathbb{1}_{Q_i}$ presque partout. En prenant le limite $\epsilon\to0$ nous trouvons

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi|d\lambda_N. \tag{16.876}$$

L'inégalité (16.862) est prouvée.

(1b) **Inégalité pour les boréliens**

Soit B un borélien de U. Vu que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$, les mesures de Lebesgue sur U et sur V sont les mêmes que celles sur $\mathbb{R}^N$ par le corolaire 16.60.

Par les définitions 16.214 et 16.86, les applications μ et ν définies par $\mu=\phi^{-1}(\lambda_N)$ et $\nu=|J_\phi|\lambda_N$ sont des mesures positives sur U (de Borel, qui plus est). L'inégalité (16.862) à peine prouvée s'écrit $\mu(Q)\leqslant\nu(Q)$ pour tout cube Q. Le lemme 16.272 nous dit alors que l'inégalité tient pour tout borélien.

(1c) **Inégalité dans l'autre sens**

En utilisant la notation de la mesure image et du produit d'une mesure par une fonction[103], nous pouvons écrire l'inégalité prouvée sous la forme $\phi^{-1}(\lambda_N) \leqslant |J_\phi|\lambda_N$. En inversant les rôles de U et V (et donc de ϕ et ϕ^{-1}) nous avons aussi

$$\phi(\lambda_N) \leqslant |J_{\phi^{-1}}|\lambda_N. \tag{16.877}$$

En y appliquant ϕ^{-1} et le lemme 16.86,

$$\lambda_N \leqslant \phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}|\lambda_N\big). \tag{16.878}$$

Nous prouvons à présent que $\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big) = \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)$ en appliquant à un borélien B de U. D'une part

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)(B) &= \big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)\phi(B) &(16.879a)\\ &= \int_{\phi(B)} |J_{\phi^{-1}}|d\lambda_N, &(16.879b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)B &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)(x)d\big(\phi^{-1}(\lambda_N)\big)(x) &(16.880a)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B\big(\phi^{-1}(x)\big)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)\big(\phi^{-1}(x)\big)d\lambda_N(x) &(16.880b)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}|J_{\phi^{-1}}| &(16.880c)\\ &= \int_B |J_{\phi^{-1}}|d\lambda_N. &(16.880d)\end{aligned}$$

Justification :

- Pour (16.880b), le théorème 16.221(2).

L'équation (16.878) devient alors

$$\lambda_N \leqslant \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{16.881}$$

Nous allons faire le produit de cette mesure par $|J_\phi|$ en nous souvenant que $J_\phi(x) = \det\big(d\phi_x\big)$. Par le lemme 12.343 nous avons aussi $(d\phi_x)^{-1} = d\phi^{-1}_{\phi(x)}$ et donc, par la propriété 10.15(3) du déterminant,

$$J_\phi(x) = \frac{1}{\det\big(d\phi^{-1}_{\phi(x)}\big)} = \frac{1}{J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)}. \tag{16.882}$$

Nous avons

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant |J_\phi| \cdot \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{16.883}$$

En utilisant la proposition 16.217, il s'agit de multiplier la mesure $\phi^{-1}(\lambda_N)$ par la fonction

$$x \mapsto |J_\phi(x)J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)| = 1. \tag{16.884}$$

Nous avons donc bien

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{16.885}$$

et donc l'égalité

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N = \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{16.886}$$

c'est-à-dire le point (1).

(2) Le fait que la fonction proposée soit mesurable est le fait que la mesurabilité n'est pas affectée par produit et composition (propositions 16.106 et 16.47), et le fait que pour les mêmes raisons, l'application $J_\phi\colon U \to \mathbb{R}$ est également mesurable. En ce qui concerne la formule nous allons la démontrer dans le cas de fonctions de plus en plus générales.

[103] Définition 16.86 et 16.214

(2a) **Pour les fonctions indicatrices** Soit B un borélien de U. Considérons la fonction $f = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. Alors

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}(y)\mathbb{1}_V(y)d\lambda_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}d\lambda_N = \lambda_N\big(\phi(B)\big). \tag{16.887}$$

parce que $V = \phi(U)$ et $B \subset U$, donc $\mathbb{1}_{\phi(B)}\mathbb{1}_{\phi(U)} = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. D'autre part, pour calculer l'autre membre de (16.860) nous remarquons que $f = \mathbb{1}_{\phi(B)} = \mathbb{1}_B \circ \phi^{-1}$, ce qui donne

$$\int_U f\big(\phi(x)\big)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x) = \int_U \mathbb{1}_B|J_\phi|d\lambda_N = \int_B |J_\phi|d\lambda_N. \tag{16.888}$$

L'ensemble B étant borélien, il est extrêmement mesurable, ce qui fait que le point (1) s'applique : les expressions (16.887) et (16.888) sont égales.

(2b) **Pour les fonctions étagées**
Soit $f\colon V \to \mathbb{R}^+$ une fonction étagée :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{16.889}$$

Nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_V f d\lambda_N &= \int_V \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N && (16.890a)\\
&= \sum_i a_i \int_V \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N && (16.890b)\\
&= \sum_i \int_U (\mathbb{1}_{A_i} \circ \phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x) && (16.890c)\\
&= \sum_i a_i \int_U \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)}|J_\phi(x)|d\lambda_N(x) && (16.890d)\\
&= \int_V \underbrace{\sum_i a_i \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)}(x)}_{=(f\circ\phi)(x)} |J_\phi(x)|d\lambda_N(x) && (16.890e)\\
&= \int_V (f \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N. && (16.890f)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (16.890b) : linéarité de l'intégrale, théorème 16.185(2)[104]
- Pour (16.890c) : le cas des fonctions indicatrices est utilisé pour chaque i entre 1 et n.

(2c) **Fonction mesurable positive** Soit $f\colon V \to [0,\infty]$. Par le théorème fondamental d'approximation 16.120, il existe une suite croissante de fonctions étagées et mesurables $\varphi_n\colon V \to [0,\infty[$ dont la limite ponctuelle est f. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_V f d\lambda_N &= \lim_{n\to\infty} \int_V \varphi_n d\lambda_N && (16.891a)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_U (\varphi_n \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N && (16.891b)\\
&= \int_U \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N && (16.891c)\\
&= \int_U (f \circ \phi)|J_\phi|d\lambda_N. && (16.891d)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (16.891a), c'est le théorème de la convergence monotone 16.180.
- Pour (16.891b), c'est le présent théorème pour la fonction étagée φ_n.
- Pour (16.891c), c'est encore la convergence dominée, justifiée par le fait que $\varphi_n \circ \phi$ est également une suite croissante : si $x \in U$ alors $\varphi_{n+1}\big(\phi(x)\big) \geqslant \varphi_n\big(\phi(x)\big)$.

[104] Il est remarquable que nous n'utilisons cette linéarité que pour les fonctions étagées.

- Pour (16.891d), c'est la limite ponctuelle $\varphi_n\big(\phi(x)\big) \to f\big(\phi(x)\big)$.

(3) La partie sur l'intégrabilité repose sur le fait que $|f|\circ\phi = |f\circ\phi|$. Ici $|.|$ est le module et non une valeur absolue. Les faits suivants sont équivalents :

- la fonction $f\colon V \to \mathbb{C}$ est intégrable
- la fonction $|f|\colon V \to \mathbb{R}$ est intégrable.
- la fonction $(|f|\circ\phi)|J_\phi|\colon U \to \mathbb{R}$ est intégrable (par le point (2)).
- la fonction $(f\circ\phi)|J_\phi|\colon U \to \mathbb{R}$ est intégrable.

En ce qui concerne la formule, il s'agit seulement d'appliquer le point (2) aux parties positives, négatives, imaginaires et réelles de f.

□

Notons que la formule peut être écrite sous la forme

$$\langle f, g\rangle_V = \langle f\circ\phi, (g\circ\phi)|J|\rangle_U, \tag{16.892}$$

EQooQKARooELPCFO

qui est plus pratique lorsqu'on parle de produits scalaires. Pour rappel, $\phi\colon U \to C$ est un C^1-difféomorphisme.

16.285.
La formule de changement de variables peut être comprise de la façon suivante. Si ϕ est linéaire alors le facteur $|J_\phi|$ est la mesure de l'image par ϕ d'une portion de $\mathbb{R}^p$ de mesure 1, sinon $|J_\phi|$ est le rapport entre la mesure de l'image d'un élément infinitésimal de volume de $\mathbb{R}^p$ et sa mesure originale.

Soit $\phi(u,v) = g(u,v)e_1 + h(u,v)e_2$ un difféomorphisme dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0,y_0) l'image par ϕ de (u_0,v_0). On considère le petit rectangle R de sommets (u_0,v_0), $(u_0+\Delta u, v_0)$, $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ et $(u_0, v_0+\Delta v)$. L'image de R n'est pas un rectangle en général, mais peut être bien approximée par le rectangle de sommets (x_0,y_0), $(x_0,y_0)+\phi_u\Delta u$, $(x_0,y_0)+\phi_u\Delta u+\phi_v\Delta v$ et $(x_0,y_0)+\phi_v\Delta v$ et son aire est $\|\phi_u\times\phi_v\|\Delta u\Delta v$. La valeur $|\phi_u\times\phi_v|$ est exactement $|J_\phi|$

16.14.6 Exemples

Énormément d'exemples sont disponibles avec les coordonnées polaires et toutes leurs variations. Cependant les fonctions trigonométriques ne seront vues que plus tard ; les coordonnées polaires, cylindrique et sphériques seront vues en section 20.14 et les exemples d'utilisation pour les intégrales seront dans la section 20.16.

Un exemple avec une exponentielle sera donnée dans l'exemple 17.118.

16.15 Changement d'espace mesuré

PROPooILOEooBiumKD

Proposition 16.286 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Soit un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon\Omega\to\Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ *pour tout* $B\in\mathcal{A}'$.

Soit enfin une fonction mesurable $f\colon\Omega\to X$.
Alors

(1) Le triple $(\Omega',\mathcal{A}',\mu')$ est un espace mesuré.

(2) L'application $f\circ\varphi^{-1}\colon\Omega'\to X$ est mesurable.

(3) Nous avons l'égalité

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega'} (f\circ\varphi^{-1}) d\mu'. \tag{16.893}$$

Démonstration. La proposition 16.61 montre déjà que $(\Omega',\mathcal{A}',\mu')$ est un espace mesuré.

Soit une partie S mesurable dans X. Alors $f^{-1}(S)$ est mesurable dans Ω par hypothèse sur f, c'est-à-dire que $f^{-1}(S)\in\mathcal{A}$. Ensuite $(\varphi\circ f^{-1})(S)$ est mesurable dans Ω' par hypothèse sur φ. Cela prouve que $f\circ\varphi^{-1}$ est une application mesurable.

Nous avons encore à prouver l'égalité d'intégrale. Par la définition 16.169 nous avons

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i)\} \tag{16.894}$$

où le supremum est sur tous les n et tous les choix de $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ tels que $f|_{A_i} > a_i$. Vu que $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$, si $A_i \in \mathcal{A}$ et a_i sont choisis, nous avons aussi

$$f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A_i)} \geqslant a_i \tag{16.895}$$

avec $\varphi(A_i) \in \mathcal{A}'$. Donc pour un choix de $\{(A_i, a_i)\}$ donné,

$$\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i\mu'\big(\varphi(A_i)\big). \tag{16.896}$$

Au final,

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i)\} = \sup\{\sum_i a_i\mu'\big(\varphi(A_i)\big)\} = \int_{\varphi(\Omega)} f \circ \varphi^{-1} d\mu'. \tag{16.897}$$

□

REMooOMYYooNFiKOs

Remarque 16.287 (Ce n'est pas la mesure que nous voulons)**.**
La mesure donnée par la proposition 16.286 n'est pas celle que nous voulons d'habitude sur Ω'. Anticipons un peu pour comprendre. Prenons l'exemple de la partie C^2 de $\mathbb{R}$ donnée par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x^2, x \in]0, 3[\}. \tag{16.898}$$

(1) La façon correcte de définir la longueur de C est de prendre une limite d'approximations par des morceaux de droites, comme fait à la définition 23.3.

(2) Cette définition de la longueur peut être exprimée sous forme intégrale par le théorème 23.9 qui nous assure que

$$l(C) = \int_0^3 \|\varphi'(t)\|dt = \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2}dt \neq \mu'(C). \tag{16.899}$$

En effet, $\mu'(C) = \mu\big(\varphi^{-1}(C)\big) = \mu\big(]0, 3[\big) = 3$, alors que pour tout t nous avons $\sqrt{1 + 4t^2} > 1$ et donc $l(C) > 3$.

(3) Donc μ' n'est pas exactement ce que nous aurions pu vouloir appeler la « mesure » de C.

(4) La mesure à considérer sur C doit donc plutôt être quelque chose comme le produit de la mesure μ' par la fonction $\|\varphi'\|$. Mais cela est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

ITEMooJTKCooYQknqo

(5) Dans le cas de S^1, nous avons $\varphi(x) = e^{ix}$, et $\|\varphi'(x)\| = 1$. Donc la mesure donné ici est probablement bien celle que nous voulons. Peut-être à coefficient $\frac{1}{2\pi}$ près pour avoir une normalisation $\mu'(S^1) = 1$. Cela est également une autre histoire qui vous sera contée une autre fois ; par exemple dans la proposition 20.75.

16.16 Primitives et intégrales

DEFooGLJDooFeZBBC

Définition 16.288.
Si $a < b$ nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f. \tag{16.900}$$

Si par contre $a > b$ nous posons $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Un petit cas particulier :

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \int_{]-\infty,b]} f. \tag{16.901}$$

PropEZFRsMj

Proposition 16.289 (Primitive et intégrale[388]).
Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et continue sur $]a,b[$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{[a,x]} f(t)dt. \end{aligned} \tag{16.902}$$

est l'unique primitive de f sur $]a,b[$ s'annulant en $x=a$.

Démonstration. Nous devons prouver que F est dérivable et que pour tout $x_0 \in]a,b[$ nous avons $F'(x_0) = f(x_0)$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha(h) \tag{16.903}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Cette dernière limite signifie qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $|\alpha(h)| < \epsilon$ pour tout h tel que $|h| < \delta$, c'est-à-dire pour tout $h \in B(0,\delta)$. À partir de maintenant nous ne considérons plus que de tels h.

Notre travail maintenant est de prouver que F est dérivable en x_0, et de montrer que la dérivée est $f(x_0)$. Pour cela,

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \tag{16.904a}$$

$$= \int_0^h f(x_0+t)dt \tag{16.904b}$$

$$= \int_0^h \big[f(x_0)+\alpha(t)\big]dt \tag{16.904c}$$

$$= hf(x_0) + \int_0^h \alpha(t)dt. \tag{16.904d}$$

Nous avons donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ (défini via la fonction α) tel que $|h| < \delta$ implique

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon. \tag{16.905}$$

Cela signifie que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0), \tag{16.906}$$

qui n'est rien d'autre que le fait que F est dérivable en x_0 et que sa dérivée est $f(x_0)$.

Le fait que F s'annule en $x=a$ est par sa définition. L'unicité provient du corolaire 14.225. □

16.16.1 Théorème fondamental du calcul intégral

ThoRWXooTqHGbC

Théorème 16.290 (Théorème fondamental du calcul intégral).
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I contenant strictement l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{16.907}$$

Démonstration. Nous avons vu par la proposition 16.289 que la fonction

$$\begin{aligned} G\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \tag{16.908}$$

était l'unique primitive de f sur $]a,b[$ à s'annuler pour $x=a$. Nous avons évidemment

$$\int_a^b f(t)dt = G(b). \tag{16.909}$$

Si F est une primitive quelconque, il suffit de soustraire sa valeur en $x = a$: $G(x) = F(x) - F(a)$ et donc

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - F(a), \tag{16.910}$$

comme il fallait le prouver. □

Le théorème fondamental s'écrit souvent sous la forme[105]

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt. \tag{16.911}$$ EqooBBCYooNweVrF

Sous cette forme, il faut penser que nous calculons $f(x)$ en un point pas trop éloigné de a, en sachant $f(a)$ et en intégrant la dérivée entre les deux.

Remarque 16.291.
Le lien entre primitive et intégrale est fondamentalement lié à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, et non à la construction précise de cette mesure. Mais en même temps, la mesure de Lebesgue est l'unique à être invariante par translation.

Quelque remarques.

(1) Le théorème fondamental du calcul intégral est à utiliser pour calculer des intégrales des fonctions réelles lorsqu'on a des primitives sur un domaine strictement plus large que le domaine sur lequel nous voulons intégrer.

(2) Une version pour les intégrales impropres sera donnée au corolaire 16.302.

(3) Une primitive est forcément une fonction continue parce qu'une primitive est dérivable.

(4) Le théorème fondamental du calcul intégral ne sert pas qu'à calculer des intégrales à partir de primitives. Il sert aussi à démontrer des résultats plus théoriques, comme le théorème 14.413.

(5) En vertu du corolaire 14.225, une fonction ne possède qu'une seule primitive à constante près.

16.16.2 Exemples et applications

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et y admettant des primitives, nous notons

$$\int f(x)dx \tag{16.912}$$

l'ensemble des primitives de f sur I :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\} \tag{16.913}$$

où F est une quelconque primitive de f.

Exemple 16.292.
Une primitive bien connue de $f : x \mapsto x^2$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Nous écrivons donc

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \tag{16.914}$$

Cela est un abus de notation terrible pour dire en réalité

$$\{x \mapsto \frac{x^3}{3} + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\}. \tag{16.915}$$

△

En termes de notations, nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \tag{16.916}$$ Thfondcalc

[105] Par exemple dans les théorèmes du reste des polynômes de Taylor 17.63 et de Cauchy-Lipschitz 19.65.

Remarque 16.293.
La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive qu'on choisi pour le calculer, car si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 = F_2 + C$ et $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

Remarque 16.294.
Si l'intervalle d'intégration est réduit à un seul point alors la valeur de l'intégrale est zéro. Nous le savions déjà, et cela est cohérent avec le théorème fondamental car $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$.

Remarque 16.295.
Toute intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle.

PROPooJYIAooXLkbMx

Proposition 16.296 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés E et F où F est de dimension finie[106]*. Nous considérons une fonction $f\colon E \to F$ de classe C^1 ainsi qu'un chemin $\gamma\colon [0,1] \to E$ de classe C^1 également.*

Alors nous avons l'égalité

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big). \tag{16.917}$$

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\to F \\ t &\mapsto (f \circ \gamma)(t). \end{aligned} \tag{16.918}$$

Cette fonction vérifie $g'(t) = (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)$ par le lemme 14.300. Le théorème fondamental du calcul intégral[107] nous permet donc d'écrire

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \int_0^1 g'(t)df = g(1) - g(0). \tag{16.919}$$

Notons que g est continue grâce aux hypothèses de classe C^1 pour γ et f. □

La proposition suivante est la généralisation à $\mathbb{R}$ de la proposition 14.476.

PROPooKIASooGngEDh

Proposition 16.297.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{16.920}$$

Au niveau du domaine, c'est $\mathbb{R}$ auquel il faut enlever $\{0\}$ si $\alpha - 1 < 0$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et une suite de rationnels α_i qui converge vers α. Les plus amateurs d'abstraction diront $(\alpha_i) \in \alpha$ en référence à la proposition 4.38.

Nous notons $f_\alpha(x) = x^\alpha$ et $f_i(x) = x^{\alpha_i}$. Par définition nous avons

$$f_i \to f_\alpha \tag{16.921}$$

ponctuellement. De plus en utilisant la proposition 14.476 nous savons que $f'_i(x) = \alpha_i x^{\alpha_i - 1}$. En posant $g(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ nous avons donc

$$f'_i \to g. \tag{16.922}$$

ponctuellement. Mais f'_i est continue pour tout i et g également. Donc la convergence $f_i \to f_\alpha$ est uniforme sur tout compact[108]. Le théorème 14.413 nous permet de permuter limite et dérivée pour avoir $g = f'_\alpha$. □

16.16.3 Intégrales impropres

SecGAVooBOQddU

Définition 16.298 ([388]).
*Une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur un intervalle I si f est intégrable sur tout intervalle compact contenu dans I.*

PropCJAooQhNYkp

Proposition 16.299.
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f. \tag{16.923}$$

EqPPMooBQDTYl

[106] Sinon l'intégrale dont nous allons parler n'est pas définie au sens où nous n'en avons pas donné de définition. Voir 16.197.
[107] Théorème 16.290.
[108] Proposition 14.403.

Démonstration. Notons que la valeur de f en b n'a strictement aucune importance parce que l'intégrale de Lebesgue ne dépend pas du choix de la valeur de la fonction en un ensemble de mesure nulle ; et en même temps la limite à gauche de (16.923) ne dépend pas non plus de la valeur de f en b. Bref si f n'est pas définie en b, nous pouvons poser $f(b) = 42$.

Notons de plus que du point de vue de l'intégrale de Lebesgue, $\int_{[a,b]}$ et $\int_{[a,b[}$ sont identiques et valent toutes les deux $\int_a^b$ (lorsque ça existe).

(1) **Si f est positive** Supposons d'abord que f est positive. Alors nous posons $f_n = f\mathbb{1}_{[a,b-\frac{1}{n}]}$. Ponctuellement nous avons la limite croissante $f_n \to f$ et de plus

$$\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n. \tag{16.924}$$

Chacun des f_n est intégrable sur $[a,b]$. Le théorème de Beppo-Levi 16.180 implique que f est intégrable sur $[a,b]$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{16.925}$$

Cela montre que dans le cas d'une fonction f positive nous avons bien (16.923).

(2) **Si f n'est pas positive** Si f n'est pas positif, alors nous la décomposons en partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ et par définition de l'intégrale d'une fonction non positive,

$$\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x[} f = \lim \int f^+ - \lim \int f^-. \tag{16.926}$$

□

Il peut cependant arriver que la limite $\lim_{x\to b} \int_a^b f$ existe alors que f n'est pas intégrable sur $[a,b]$. C'est l'ennui des fonctions non positives. Un exemple classique est

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \tag{16.927}$$

EqMMVooDSnefx

La définition suivante est motivée par le lemme 16.264.

DEFooINPOooWWObEz

Définition 16.300 ([542]).
Si

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f \tag{16.928}$$

existe alors nous disons que l'intégrale est ***convergente*** *en b. Ce procédé de limite est l'intégrale* ***impropre*** *de f sur $[a,b]$.*

Exemple 16.301 (Intégale impropre).
Nous considérons la fonction $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-2, 2n-1[\\ -\frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-1, 2n[. \end{cases} \tag{16.929}$$

Par la divergence de la série harmonique, $\int_0^\infty |f|$ n'existe pas. La fonction f n'est donc pas intégrable au sens de Lebesgue (définition 16.188).

Cependant pour tout n pair nous avons

$$\int_0^n f = 0. \tag{16.930}$$

Du coup pour tout $x \geqslant 0$ nous avons

$$\int_0^x f = \int_{2n}^x f \tag{16.931}$$

où $2n$ est le plus grand nombre pair inférieur à x. Nous avons $|x - 2n| \leqslant 2$ et $|f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ pour $x \in [2n, x]$. Donc

$$\int_{2n}^x f \leqslant \frac{2}{n}. \tag{16.932}$$

Nous avons par conséquent

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f = 0, \tag{16.933}$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur $[0,\infty[$ converge au sens des intégrales impropres. △

L'intégrale (16.927) est une intégrale convergente mais la fonction n'est pas intégrable (parce que pour être intégrale il faut que $|f|$ soit intégrable). Nous pouvons ainsi dire que cette intégrale converge mais n'existe pas.

Le corolaire suivant nous autorise à utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 16.290 même dans les cas limites.

CorMUIooXREleR

Corolaire 16.302.
Si f est localement intégrable sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f sur tout ouvert de $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a). \tag{16.934}$$

Démonstration. Pour chaque x dans $[a,b[$ nous avons

$$\int_a^x f = F(x) - F(a). \tag{16.935}$$

La proposition 16.299 nous explique que la limite $x \to b^-$ du membre de gauche existe et vaut $\int_a^b f$. Donc également le membre de droite :

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a). \tag{16.936}$$

□

La convergence des intégrales de fonctions $\frac{1}{x^\alpha}$ en 0 et ∞ est une question classique de l'intégration. De plus ces fonctions servent souvent à utiliser une théorème de comparaison (type intégrale dominée de Lebesgue).

PropBKNooPDIPUc

Proposition 16.303.
Deux intégrales remarquables.

(1) Nous avons

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \infty \tag{16.937}$$

si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

ITEMooJFSXooHmgmEj

(2) Nous avons

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = \infty \tag{16.938}$$

si et seulement si $\alpha \leqslant 1$.

Démonstration. La fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ admet la primitive $F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur tout compact de $]0,\infty[$. Le corolaire 16.302 nous permet[109] de dire que $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ vaudra

$$\lim_{x\to 0-^+} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}. \tag{16.939}$$

Cela est strictement plus petit que ∞ si et seulement si $\alpha < 1$. □

16.17 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini

Nous rappelons que $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue est un espace mesuré σ-fini, conformément à la définition 16.18.

Le théorème de Fubini-Tonelli parle de fonctions à valeurs réelles positives et non de fonctions à valeurs complexes. Le truc est que ce théorème va servir de base pour construire les autres. Si nous avons une fonction à valeurs complexes, elle se décompose en parties réelles et imaginaires qui elles-mêmes se décomposent en parties positives et négatives. Au final, les preuves pour $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ se ramènent à appliquer quatre fois le théorème pour $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

[109] Tout ce que nous avons fait avec la borne b de l'intégrale $\int_a^b$ reste valable avec la borne a.

ThoWTMSthY

Théorème 16.304 (Fubini-Tonelli[520]).
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit une fonction $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive (valant éventuellement ∞ à certains endroits) Alors :

ITEMooUTMNooVIBdpP

(1) Les fonction

EQooWLADooQwNhEx

$$F_1 : x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \tag{16.940}$$

et

$$F_2 : y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \tag{16.941}$$

sont mesurables.

ITEMooFKQUooCoCOLV

(2) Toutes les intégrales imaginables existent et sont égales : EqJRVtOGx

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \tag{16.942a}$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y) \tag{16.942b}$$

où tous les membres de l'égalité valent éventuellement $+\infty$.

Démonstration. Commençons par prouver le théorème dans le cas d'une fonction caractéristique d'un ensemble mesurable : $f(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y)$ pour un certain ensemble $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dans ce cas,

$$F_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_1(y)}(x) d\mu_2(y) = \mu_2\big(A_1(x)\big), \tag{16.943}$$

et nous avons déjà vu au théorème 16.247 que cette fonction F_1 était alors mesurable. En utilisant maintenant les égalités (16.754) ainsi que le fait que $\mathbb{1}_A(x,y) = \mathbb{1}_{A_2(x)}(y)$ nous avons

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \tag{16.944a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) \tag{16.944b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_2(x)}(y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \tag{16.944c}$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x). \tag{16.944d}$$

Le théorème étant valable pour les fonctions caractéristiques, il est valable pour les fonctions simples (définition 16.114) par linéarité de l'intégrale.

Si f n'est pas une fonction simple, alors la proposition 16.120 nous donne une suite croissante de fonctions simples et positives convergeant ponctuellement vers f. La partie du théorème sur les fonctions simples dit que pour chaque n l'intégrale

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) \tag{16.945}$$

peut être décomposée comme il faut en suivant la formule (16.942). Il faut pouvoir permuter la limite et l'intégrale dans chacun des cas. D'abord le théorème de la convergence monotone 16.180 appliqué à l'espace $\Omega_1 \times \Omega_2$ dit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y). \tag{16.946}$$

Ensuite, pour chaque $x \in \Omega_1$, les fonctions

$$\sigma_n(y) = \int_{\Omega_1} f_n(x,y) d\mu_1(x) \tag{16.947}$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables ; nous leur appliquons encore le théorème de la convergence monotone :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y)=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\sigma_n(y)d\mu_2(y) \tag{16.948a}$$

$$=\int_{\Omega_2}\left[\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1}f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{16.948b}$$

$$=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}f(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{16.948c}$$

où nous avons utilisé une seconde fois Beppo-Levi. □

Remarque 16.305.
Les formules (16.942) sont bien, mais ne garantissent en aucun cas que $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$: il faut encore que ces intégrales soient finies.

CorTKZKwP

Corolaire 16.306 ([539])**.**
Soient $(\Omega_i,\mathcal{A}_i,\mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ l'espace produit[110]*. Soit une fonction mesurable $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

ITEMooZRAXooTRDIlZ

(1) $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$,

ITEMooJMPLooZKwxQC

(2)

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f|d\mu_2\right]d\mu_1<\infty, \tag{16.949}$$

ITEMooLLBCooTRycwG

(3)

$$\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|f|d\mu_1\right]d\mu_2<\infty. \tag{16.950}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La notation $|f|$, pour l'instant, dénote donc bien la valeur absolue et non le module.

La fonction $|f|$ est mesurable et positive par hypothèse et par le fait que si f est mesurable, alors $|f|$ l'est également par le corolaire 16.110. Le théorème 16.304(2) nous dit alors que les intégrales suivantes existent et sont égales :

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}|f|d(\mu_1\otimes\mu_2)=\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f(x,y)|d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x)=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|f(x,y)|d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y). \tag{16.951}$$

EQooAIQGooNtBQuC

Attention : rien ne dit encore que ces intégrales sont finies.

(1) **(1) implique (2) et (3)** Si $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$ alors $|f|$ y est également. Cela implique que le membre de gauche de (16.951) est fini. Les deux autres sont alors également finis.

(2) **(2) ou (3) implique (1)** Les expressions à droite de (16.951) sont finies. Donc celle de gauche également. Cele signifie que $|f|\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$. Par conséquent f est également dans $L^1(\Omega_2\times\Omega_2)$.

Nous passons maintenant au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous décomposons

$$f=f_R+if_I \tag{16.952}$$

où f_R et f_I sont des fonctions réelles. Nous avons

$$\int_\Omega|f|\leqslant\int_\Omega|f_R|+\int_\Omega|f_I|. \tag{16.953}$$

EQooZEOAooIMwKwk

Donc si f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega)$, la fonction f le sera aussi. De même,

$$\int_\Omega|f_R|\leqslant\int_\Omega|f|, \tag{16.954}$$

qui donne l'inverse : si $f\in L^1(\Omega)$ alors $f_R,f_I\in L^1(\Omega)$. Bref, f est intégrable sur Ω si et seulement si f_R et f_I le sont.

[110] Définition 16.249.

Supposons que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| d\mu_2 \right] d\mu_1 \leqslant \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f_R| \right] + \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f_I| \right] < \infty \tag{16.955a}$$

où nous avons appliqué (1) implique (2) aux fonctions f_R et f_I qui sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ parce que f y est.

Dans l'autre sens, si

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| \right] < \infty, \tag{16.956}$$

alors en remplaçant $|f|$ par $|f_R|$ ou par $|f_I|$ nous restons fini. En appliquant alors « (2) implique (1) » nous trouvons que f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Et cela implique que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. □

ThoFubinioYLtPI

Théorème 16.307 (Fubini[539])**.**
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit

$$f \in L^1\big((\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{C}\big), \tag{16.957}$$

c'est-à-dire une fonction à valeurs mesurable et intégrable sur Ω. Alors :

ITEMooVFGWooZTePQS

(1) Pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est $L^1(\Omega_2)$.

ITEMooCYMKooUdizni

(2) Si nous posons

$$\varphi_f(x) = \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y); \tag{16.958}$$

alors $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$.

ItemQMWiolgiii

(3) Nous avons la formule d'inversion d'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 && (16.959a)\\ &= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) && (16.959b)\\ &= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). && (16.959c) \end{aligned}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs réelles : $f \in L^1\big((\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2), \mathbb{R}\big)$. Nous décomposons la fonction f en parties positives et négatives : $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives ou nulles. Nous avons évidemment

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f^+| \leqslant \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| < \infty. \tag{16.960}$$

Donc f^+ et f^- sont des éléments de $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(1) **Pour (1)**

Nous posons

$$\varphi_{f^+}(x) = \int_{\Omega_2} f^+(x,y) d\mu_2(y) \tag{16.961}$$

pour tous les $x \in \Omega_1$ pour lesquels cette intégrale est bien définie. Vu que f^+ est positive et mesurable, le théorème de Fubini-Tonelli 16.304(1) s'applique donc pour nous dire que φ_{f^+} est mesurable.

De plus le résultat (16.942) appliqué à f^+ donne

$$\int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty. \tag{16.962}$$

EQooSETWooRwkCnW

Le fait que le tout soit fini est une conséquence du fait déjà mentionné que $f^+ \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Vu que φ_{f^+} est une fonction positive, l'inégalité (16.962) signifie que $\varphi_{f^+} \in L^1(\Omega_1, \mu_1)$.

En particulier, $\varphi_{f^+}(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega_1$. C'est-à-dire pour presque tout $x \in \Omega_1$:

$$\int_{\Omega_2} f^+(x,y) d\mu_2(y) < \infty, \tag{16.963}$$

et sachant que $f^+ \geqslant 0$ nous avons $f^+(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ pour presque tout x.

(2) **Pour (2)**

Partout où φ_{f^+} et φ_{f^-} sont finies nous avons

$$\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}, \tag{16.964}$$

et comme cela a lieu presque partout, nous pouvons considérer une partie mesurable $A \subset \Omega_1$ telle que $\mu_1(A) = 0$ et $\varphi_f(x) = \varphi_{f^+}(x) - \varphi_{f^-}(x)$ pour tout x hors de A. Bref, nous posons

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}(x) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{16.965}$$

Cette fonction g est mesurable et $g = \varphi_f$ presque partout. De plus

$$\int_{\Omega_1} |g| d\mu_1 = \int_{A^c} |g| \leqslant \int_{A^c} \varphi_{f^+} + \int_{A^c} \varphi_{f^-} < \infty. \tag{16.966}$$

La dernière inégalité est le fait que $\varphi_{f^\pm}$ sont dans $L^1(\Omega_1)$. Et notons au passage que nous aurions pu laisser toutes les intégrales sur Ω_1 sans faire de précisions sur la distinction entre Ω_1 et A^c parce que la partie de Ω_1 sur laquelle $\varphi_{f^\pm}$ sont infinies est trop petite pour changer la valeur de l'intégrale.

Nous avons donc $g \in L^1(\Omega_1)$, et par conséquent également $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$ parce que ces deux fonctions sont égales presque partout (les classes sont égales).

(3) **Pour (3)**

En utilisant l'équation (16.962) nous avons

$$\int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 = \int g d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} - \int_{\Omega_1} \varphi_{f^-} \tag{16.967a}$$

$$= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ d\mu - \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- d\mu \tag{16.967b}$$

$$= \int_{\Omega_1 \times \Omega 2} f d\mu. \tag{16.967c}$$

Et toutes ces intégrales sont finies.

Et c'est maintenant que nous considérons le cas complexe. Nous décomposons $f = f_R + if_I$ avec des fonctions réelles f_R et f_I. Comme déjà mentionné autour de (16.953), les fonctions f_R et f_I sont intégrables. Nous leur appliquons le théorème.

Les valeurs de x pour lesquelles $f_R(x, \cdot\,)$ et $f_I(x, \cdot\,)$ ne sont pas dans $L^1(\Omega_2)$ forment un ensemble de mesure nulle, nommons le A. En posant

$$g(x,y) = \begin{cases} f_R(x,y) + if_I(x,y) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A, \end{cases} \tag{16.968}$$

nous avons que $g(x, \cdot\,)$ est intégrable pour tout $x \in A^c$. Vu que pour ces valeurs de x nous avons $g(x,y) = f(x,y)$ nous en déduisons que pour $x \in A^c$ nous avons aussi $f(x, \cdot\,) \in L^1(\Omega_2)$.

Les autres points se traitent de la même façon[111]. □

NORMooKIRJooPvyPWQ

16.308.

En pratique, il n'est pas toujours évident qu'une fonction soit intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Pour permuter des intégrales sur une fonction à deux paramètres nous faisons comme suit.

(1) Nous testons l'intégrabilité en chaine de $|f|$, et si c'est bon, le corolaire 16.306 nous donne $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(2) Nous utilisons le théorème de Fubini 16.307 pour séparer et permuter les intégrales comme des ingénieurs.

Si la fonction $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Fubini alors

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)g(y) dx \otimes dy = \left(\int_{\Omega_1} f(x) dx \right) \left(\int_{\Omega_2} g(y) dy \right). \tag{16.969}$$

EqTJEEsJW

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous cette forme.

[111] Attention : je n'ai pas vérifié explicitement. C'est juste une intuition. Vérifiez et écrivez-moi pour dire si c'est bon ou non.

Exemple 16.309 (Nécessité d'avoir des mesures σ-finies)**.**
Nous montrons que le théorème ne tient pas si une des deux mesures n'est pas σ-finie. Soit $I = [0, 1]$. Nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{B}\text{or}(I), \lambda) \tag{16.970}$$

où $\mathcal{B}\text{or}(I)$ est la tribu des boréliens sur I et λ est la mesure de Lebesgue (qui est σ-finie). D'autre part nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{P}(I), m) \tag{16.971}$$

où $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble des parties de I et m est la mesure de comptage. Cette dernière n'est pas σ-finie parce que les seuls ensembles de mesure finie pour la mesure de comptage sont des ensembles finis, or une union dénombrable d'ensemble finis ne peut pas recouvrir l'intervalle I.

Nous allons montrer que dans ce cadre, l'intégrale de la fonction indicatrice de la diagonale sur I^2 ne vérifie pas le théorème de Fubini. Étant donné que $\mathcal{B}\text{or}(I) \subset \mathcal{P}(I)$ nous avons

$$\mathcal{B}\text{or}(I^2) \subset \mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I). \tag{16.972}$$

Soit $\Delta = \{(x, x) \text{ tel que } x \in I\}$. La fonction

$$\begin{aligned} g\colon I^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x - y \end{aligned} \tag{16.973}$$

est continue et $\Delta = g^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans I^2. L'ensemble Δ est donc un borélien de I^2 et par conséquent un élément de la tribu $\mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I)$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_\Delta$ est alors mesurable pour l'espace mesuré

$$(I \times I, \mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I), \lambda \otimes m). \tag{16.974}$$

Pour x fixé nous avons

$$\mathbb{1}_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases} = \mathbb{1}_{\{x\}}(y), \tag{16.975}$$

et donc

$$A_1 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) dm(y) \right) d\lambda(x) \tag{16.976a}$$

$$= \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_{\{x\}}(y) dm(y) \right) d\lambda(x) \tag{16.976b}$$

$$= \int_I \Big(m(\{x\}) \Big) d\lambda(x) \tag{16.976c}$$

$$= \int_I 1 d\lambda(x) \tag{16.976d}$$

$$= 1. \tag{16.976e}$$

Par contre le support de $\mathbb{1}_\Delta$ étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, nous avons

$$\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) d\lambda(x) = 0 \tag{16.977}$$

et par conséquent

$$A_2 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) d\lambda(x) \right) dm(y) = 0. \tag{16.978}$$

Nous voyons donc que le théorème de Fubini ne s'applique pas. △

EXooLUFAooGcxFUW

Exemple 16.310.
Nous nous proposons de calculer l'intégrale suivante en utilisant le théorème de Fubini :

$$G = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{16.979}$$

alors que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ n'a pas de primitives parmi les fonctions élémentaires.

Nous allons le faire de deux façons. Une première directe en utilisant le théorème de Fubini sur un domaine non borné, et une seconde en utilisant Fubini sur un domaine borné, et en passant à la limite ensuite.

(1) **Fubini, domaine non borné**

Par symétrie nous pouvons nous contenter de calculer

$$G_+ = \int_0^\infty e^{-x^2} dx. \tag{16.980}$$

L'astuce est de passer par l'intermédiaire

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)} dxdy && \text{(16.981a)}\\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy && \text{(16.981b)}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx \right)^2 && \text{(16.981c)}\\ &= G_+^2 && \text{(16.981d)} \end{aligned}$$

L'intégrale (16.981a) se calcule en passant aux coordonnées polaires et le résultat est $H = \frac{\pi}{4}$. Nous avons alors $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{16.982}$$

(2) **Fubini, domaine borné, puis limite** Une variante, qui n'applique pas Fubini sur un domaine non borné. Nous commençons par écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \tag{16.983}$$

et puis nous faisons le calcul

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{R\to+\infty} \left((\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx)(\int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy) \right)\\ &= \lim_{R\to+\infty} \left(\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right) && \text{(16.984)}\\ &= \lim_{R\to+\infty} \left(\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \right) \end{aligned}$$

où K est le carré de demi-côté R centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes et C_R est le cercle de rayon R centré à l'origine.

La première étape à justifier est simplement l'application de Fubini. Pour le passage de l'intégrale du carré vers le cercle, définissons

$$I_K(r) = \int_{K_r} f, \quad I_C(r) = \int_{C_r} f \tag{16.985}$$

où K_r est la carré de demi-côté r et C_r est le cercle de rayon r. Le demi-côté du carré inscrit à C_r est $\sqrt{2}$, donc pour tout r nous avons

$$I_K(\sqrt{2}r) \geqslant I_C(r) > I_K(r), \tag{16.986}$$

et en prenant la limite, nous avons évidemment

$$\lim_{r\to\infty} I_K(\sqrt{2}r) = \lim_{r\to\infty} I_K(r), \tag{16.987}$$

et donc cette limite est également égale à $\lim_{r\to\infty} I_C(t)$.

Il ne reste qu'à calculer la dernière intégrale sur le cercle en passant aux coordonnées polaires :

$$\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R re^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-R^2}). \tag{16.988}$$

La limite donne π, nous en déduisons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{16.989}$$

△

Le théorème de Fubini-Tonelli nous permet également d'inverser des sommes et des séries. En effet une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale pour la mesure de comptage :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_{\mathbb{N}} a_n dm(n). \tag{16.990}$$

La proposition suivante montre comment il faut faire.

PropInversSumIntFub

Proposition 16.311.
Soient les espaces mesurés $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue ainsi qu'une suite de fonctions positives $f_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Nous supposons de plus que la fonction f_n soit intégrable pour tout n et que les résultats forment une suite sommable. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{16.991}$$

Démonstration. Nous pouvons la récrire le membre de gauche sous la forme

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(n,x)dx \right) dm(n) \tag{16.992}$$

avec la notation évidente $f(n,x) = f_n(x)$. Prouvons que la fonction $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une fonction mesurable pour l'espace mesuré

$$\big(\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^d), m \otimes \lambda\big). \tag{16.993}$$

Si $A \subset \mathbb{R}$, nous avons

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times f_n^{-1}(A). \tag{16.994}$$

Chacun des ensembles dans l'union appartient à la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^d)$ tandis que les tribus sont stables sous les unions dénombrables. La fonction f est donc mesurable. Comme nous avons supposé que f était positive, le théorème de Fubini-Tonelli s'applique et nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n,x)dm(n) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{16.995}$$

□

ThoFubini

Théorème 16.312 (Fubini)**.**
Soit $(x,y) \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable sur $B_n \times B_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ où B_n et B_m sont des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Alors :

(1) pour tout $x \in B_n$, sauf éventuellement en les points d'un ensemble $G \subset B_n$ de mesure nulle, la fonction $y \in B_m \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ est intégrable sur B_m

(2) la fonction

$$\begin{aligned} B_n \setminus G &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{B_m} f(x,y)dy \end{aligned} \tag{16.996}$$

est intégrable sur $B_n \setminus G$.

(3) On a

$$\int_{B_n\times B_m} f(x,y)dxdy = \int_{B_n} \left(\int_{B_m} f(x,y)dy \right) dx. \tag{16.997}$$

Notons en particulier que si $f(x,y) = \varphi(x)\phi(y)$, alors $\int_{B_m} \varphi(y)dy$ est une constante qui peut sortir de l'intégrale sur B_n, et donc

$$\int_{B_n\times B_m} \varphi(x)\phi(y)dxdy = \int_{B_n} \varphi(x)dx \int_{B_m} \phi(y)dy. \tag{16.998}$$

EqFubiniFactori

16.17.1 Utiliser Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Nous montrons à présent une série de théorème qui disent que sur $\mathbb{R}^n$, nous pouvons intégrer dans l'ordre qu'on veut.

PROPooODWYooWSlH1U

Proposition 16.313 ([1]).
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_{(x_1,\dots,x_{n-1})}(t)t \right] dx_1, \dots, dx_{n-1} \tag{16.999}$$

où, pour $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, nous définissons

$$\begin{aligned} f_{(x_1,\dots,x_{n-1})} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \end{aligned} \tag{16.1000}$$

Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème de Fubini 16.307(3) avec $\Omega_1 = \mathbb{R}^{n-1}$ et $\Omega_2 = \mathbb{R}$. □

LEMooEDQUooZudeex

Lemme 16.314 ([1]).
Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction C^∞ à support compact $f \colon U \to \mathbb{R}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & si\ x \notin U \\ f(x) & si\ x \in U \end{cases} \end{aligned} \tag{16.1001}$$

est de classe C^∞.

PROPooCQEIooENbfux

Proposition 16.315 ([1]).
Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction C^∞ à support compact $f \colon U \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_U \partial_i f = 0. \tag{16.1002}$$

Démonstration. En deux parties très inégales.

(1) **Si $i = n$** Nous considérons l'application du lemme 16.314 :

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin U \\ f(x) & \text{si } x \in U \end{cases} \end{aligned} \tag{16.1003}$$

Elle est de classe C^∞ et vérifie

$$\int_U \partial_n f = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_n g. \tag{16.1004}$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Nous posons

$$\begin{aligned} h \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(a + te_n). \end{aligned} \tag{16.1005}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (\partial_n g)(a + ue_n) &= \frac{d}{dt} \left[g(a + ue_n + te_n) \right]_{t=0} && (16.1006a) \\ &= \frac{d}{dt} \left[g\big(a + (t+u)e_n\big) \right]_{t=0} && (16.1006b) \\ &= \frac{d}{dt} \left[h(t+u) \right]_{t=0} && (16.1006c) \\ &= h'(u). && (16.1006d) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc déjà calculer une intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\partial_n g)(a + te_n) dt &= \int_{\mathbb{R}} h'(t) dt && (16.1007a) \\ &= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} h'(t) dt && \text{prop. 16.265} && (16.1007b) \\ &= \lim_{R \to \infty} \Big(h(R) - h(-R) \Big) && \text{tho. 16.290} && (16.1007c) \\ &= 0. && (16.1007d) \end{aligned}$$

La dernière égalité est parce que $h(R) = g(a + Re_t)$ et que g est à support compact.

Nous utilisons la proposition 16.313 pour isoler l'intégrale sur x_n dans $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i g$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_n g = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} (\partial g)(a + te_n) dt \right] da_1 \dots da_{n-1} = 0. \tag{16.1008}$$

(2) **Si** $i \neq n$

Nous considérons l'application $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui permute e_i et e_n. Nous avons $\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \sigma = \int_{\mathbb{R}^n} f$ par le changement de variables, théorème 16.284. Cela nous ramène au cas $i = n$.

□

16.17.2 Absolue continuité et variation bornée

DEFooLZWPooSSRaMv

Définition 16.316 ([543, 544])**.**
*Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **absolument continue** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout suite finie $\{[a_n, b_n]\}_{n \leqslant N}$ de sous-intervalles de I d'intérieurs disjoints,*

$$\sum_{n \geqslant 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geqslant 0} |f(a_n) - f(b_n)| < \epsilon. \tag{16.1009}$$

PROPooNZYKooSlwFYK

Proposition 16.317 ([543])**.**
Soient des applications absolument continues f et g sur $[a, b]$. Alors

(1) $f + g$, $f - g$ et fg sont absolument continues.

(2) Si il existe $C > 0$ tel que $|g(x)| \geqslant C$ pour tout $x \in [a, b]$, alors f/g est absolument continue.

PROPooHCCWooHaYitq

Proposition 16.318 ([543])**.**
Si $f \in L^1\big([a, b]\big)$, alors la fonction

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned} \tag{16.1010}$$

est absolument continue.

PROPooUMXIooUhbZvl

Proposition 16.319 ([543])**.**
Une application F sur $[a, b]$ est absolument continue[112] si et seulement si il existe une application f intégrable sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt. \tag{16.1011}$$

DEFooLANWooGnVGPV

Définition 16.320 (Variation totale, variation bornée[544, 545])**.**
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$\mathcal{P}_n = \{(x_0, \dots, x_n) \text{ tel que } a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n = b\}. \tag{16.1012}$$

et

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n. \tag{16.1013}$$

*Si $P \in \mathcal{P}$, nous notons $l(P)$ le $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathcal{P}_n$. La **variation totale** d'une application application $f : I \to \mathbb{C}$ est le nombre*

$$V_a^b(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{l(P)-1} |f(P_{i+1}) - f(P_i)|. \tag{16.1014}$$

*Nous disons que f est à **variation bornée** sur $[a, b]$ si $V_a^b(f) < \infty$. L'ensemble des fonctions à variation bornée de $[a, b]$ est noté $BV\big([a, b]\big)$.*

PROPooDJTDooMMWMcS

Proposition 16.321 ([544])**.**
Si f est à variation bornée sur $[a, b]$ et si $c \in [a, b]$, alors

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f). \tag{16.1015}$$

[112] Définition 16.316.

PROPooMONZooWVkYWb

Proposition 16.322 ([543]).
Soit f absolument continue sur $[a,b]$. Alors f est à variation bornées sur $[a,b]$.

PROPooVHGNooSDlrrq

Proposition 16.323 ([544]).
À propos de fonctions à variation bornées.

(1) *Une fonction $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si elle est la différence entre deux fonctions monotones sur $[a,b]$.*

(2) *Si $f\in BV\big([a,b]\big)$, alors $f'(x)$ existe pour presque tout $x\in[a,b]$.*

16.17.3 Nouveau titre

PROPooDOTQooWaMBrO

Proposition 16.324 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Soient des fonctions réelles et mesurables f_n et g sur Ω. Si

(1) *$f_n(x)\leqslant g(x)$ pour presque tout $x\in\Omega$,*

(2) *$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ pour tout $x\in\Omega$,*

alors $f(x)\leqslant g(x)$ pour presque tout $x\in\Omega$.

Démonstration. Notons $Z_n=\{x\in\Omega \text{ tel que } f_n(x)>g(x)\}$. La partie $Z=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ est de mesure nulle par le lemme 16.28. Pour chaque $x\in\Omega\setminus Z$, nous avons $f_n(x)\leqslant g(x)$ et nous pouvons passer à la limite pour obtenir $f(x)\leqslant g(x)$. Cette dernière égalité étant valable sur $\Omega\setminus Z$, elle est valable presque partout. □

PROPooRUSEooFYGLLU

Proposition 16.325 ([1]).
Si f est une fonction intégrable et continue sur un voisinage de a, alors

$$\lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+1/n} f = f(a). \tag{16.1016}$$

LEMooLRPJooUuwZRW

Lemme 16.326.
Soit une application mesurable $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. Nous posons

$$E=\{x\in[a,b] \text{ tel que } f(x)\neq 0\}, \tag{16.1017}$$

et nous supposons que[113] *$\lambda(E)>0$. Alors il existe $\epsilon>0$ et $E_\epsilon\subset E$ tel que*

(1) *$\lambda(E_\epsilon)>0$,*

(2) *$|f(x)|>\epsilon$ sur E_ϵ.*

Démonstration. Nous démontrons la contraposée. Pour chaque $\epsilon>0$, nous posons $A_\epsilon=\{x\in[a,b] \text{ tel que } |f(x)|>\epsilon\}$, et nous supposons que $\lambda(A_\epsilon)=0$ pour tout ϵ.

Nous en déduisons que $\lambda(E)=0$. En effet nous avons $E=\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq 0}} A_{1/n}$. Nous avons $\lambda(E)=0$ comme union dénombrable d'ensemble de mesure nulle. □

16.17.4 Permuter limite et dérivée

NORMALooGYUEooKrYjyz

16.327 ([388]).
Voici une preuve alternative du théorème 14.413. Elle utilise des intégrales ; elle demande donc plus de dépendances.

Énoncé Soient une suite de fonctions $f_i\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et une fonction $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

(1) f_i est de classe C^1 pour tout i,

(2) $f_i\to f$ simplement,

(3) $f_i'\to g$ uniformément sur tout compact.

Alors

(1) f est de classe C^1,

(2) $f'=g$,

(3) $f_i\to f$ uniformément sur tout compact.

[113] Mesure de Lebesgue.

Preuve Nous commençons par considérer $x_0 \in \mathbb{R}$ et un intervalle compact K contenant x_0. Nous montrons que $f'(x_0) = g(x_0)$ en plusieurs étapes.

(1) **Une formule intégrale** Par hypothèse, les fonctions f_i sont continues (en particulier sur un ouvert contenant K), et le théorème fondamental de l'analyse 16.290 donne

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_i'(t)dt \tag{16.1018}$$

pour tout $x \in K$. Nous avons envie de prendre la limite $i \to \infty$ en permutant la limite avec l'intégrale. Pour cela nous allons utiliser la convergence dominée de Lebesgue.

(2) **Convergence dominée** La convergence uniforme sur tout compact des fonctions continues f_i' vers g donne la continuité de g, théorème 14.396. En particulier g est bornée et donc intégrable sur le compact $[x_0, x]$. Mais il en faut plus pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 16.209). Soit $a > 0$; il existe N tel que pour tout $i > n$ nous ayons $\|f_i' - g\| < a$. Avec cela nous avons

$$|f_i'(x)| < |g(x)| + a \tag{16.1019}$$

pour tout $x \in K$. En particulier, la fonction $x \mapsto g(x) + a$ fonctionne pour la convergence dominée et nous pouvons permuter la limite et l'intégrale dans (16.1018).

(3) **Passage à la limite**

En passant à la limite $i \to \infty$ dans (16.1018) nous trouvons

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt. \tag{16.1020}$$

(4) **Premières conclusions**

Il suffit maintenant de prendre la dérivée de (16.1020) au point $x = x_0$ grâce à la proposition 16.289 :

$$f'(x_0) = g(x_0). \tag{16.1021}$$

Cela nous donne l'égalité $f' = g$ parce que x_0 était arbitraire.

De plus g est continue comme limite uniforme des fonctions continues f_i'. Plus précisément, pour voir la continuité de g en x_0, prendre un ouvert borné $B(x_0, r)$ autour de x_0, et ensuite un compact K contenant cet ouvert. La convergence uniforme $f_i' \to g$ sur K implique la convergence uniforme sur $B(x_0, r)$ et donc la continuité sur $B(x_0, r)$ (théorème 14.396).

(5) **$f_i \to f$ uniforme sur tout compact**

Un compact n'étant pas spécialement connexe, nous ne pouvons pas reprendre le travail fait jusqu'ici sans prendre une petite précaution. Soit un compact L. Cette partie de $\mathbb{R}$ étant bornée[114], nous pouvons prendre r assez grand pour que $L \subset \overline{B(0,r)}$. Nous posons $K = \overline{B(0,r)}$ et nous prouvons la convergence uniforme $f_i \to f$ sur K. A fortiori, cela donnera la convergence uniforme sur L.

Prenons la différence entre (16.1020) et (16.1018) :

$$|f(x) - f_i(x)| = \Big|f(x_0) - f_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t) - f_i'(t)dt\Big| \tag{16.1022a}$$

$$\leqslant |f(x_0) - f_i(x_0)| + \Big|\int_{x_0}^{x} |g(t) - f_i'(t)|dt\Big| \tag{16.1022b}$$

$$\leqslant |(f - f_i)(x_0)| + |x - x_0|\|g - f_i'\|_K. \tag{16.1022c}$$

Notez les valeurs absolues autour de l'intégrale dans (16.1022b). Elles sont nécessaires parce que x est dans un voisinage de x_0, sans que nous sachions si $x \geqslant x_0$ ou $x \leqslant x_0$ (ça change le signe de l'intégrale).

Nous avons donc

$$\|f - f_i\| \leqslant |(f - f_i)(x_0)| + \operatorname{diam}(K)\|g - f_i'\| \tag{16.1023}$$

où $\operatorname{diam}(K)$ est le diamètre de K, c'est-à-dire la plus grande distance entre deux éléments de K c'est un nombre fini parce que K est borné. Il majore évidemment $|x - x_0|$. Le membre de droite tend vers zéro si $i \to \infty$ parce que nous avons convergence simple $f_i \to f$ et donc $(f - f_i)(x_0) \to 0$, et parce que nous avons convergence uniforme sur tout compact, donc $\|g - f_i'\| \to 0$.

Nous avons donc bien $\lim_{i\to\infty} \|f - f_i\| = 0$, c'est-à-dire convergence uniforme de (f_i) vers f sur K.

[114] Par le théorème de Borel-Lebesgue 11.23

Chapitre 17

Suites et séries de fonctions

Les généralités sur les suites et séries de fonctions, c'est dans la section 14.36.

17.1 Séries de fonctions

17.1.1 Intégration de séries de fonctions

ThoCciOlZ

Théorème 17.1.
La somme uniforme de fonctions intégrables sur un ensemble de mesure fine est intégrable et on peut permuter la somme et l'intégrale.

En d'autres termes, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers F sur A avec $\mu(A) < \infty$. Si F et f_n sont des fonctions intégrables sur A alors

$$\int_A F(x)d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n(x)d\mu(x). \tag{17.1}$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du théorème 16.207. En effet nous définissons la suite des sommes partielles

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n. \tag{17.2}$$

La limite $\lim_{N\to\infty} F_N = F$ est uniforme. Par conséquent la fonction F est intégrable et

$$\int_A F = \lim_{N\to\infty} \int_A F_N = \lim_{N\to\infty} \int_A \sum_{n=0}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_A f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n. \tag{17.3}$$

La première égalité est le théorème 16.207, les autres sont de simples manipulations rhétoriques. □

Le théorème suivant est une paraphrase du théorème de la convergence dominée de Lebesgue 16.209.

ThoockMHn

Théorème 17.2.
Soient des fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} f_n$ soit intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour chaque N. Nous supposons que la somme converge simplement vers

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{17.4}$$

et qu'il existe une fonction g telle que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} f_n \right| < g \tag{17.5}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Alors

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable,

(2) on peut permuter somme et intégrale :

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=0}^{N} f_n d\mu = \int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \tag{17.6}$$

(3) *Nous avons la formule*

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Omega\left|\sum_{n=0}^{N}f_n-\sum_{n=0}^{\infty}f_n\right|=\lim_{N\to\infty}\int_\Omega\left|\sum_{n=N}^{\infty}f_n\right|=0. \tag{17.7}$$

Démonstration. Nous posons $s_n=\sum_{k=0}^{n}f_n$. Par hypothèse nous avons $s_n\in L^1(\Omega)$, et $s_n\to f$ par définition du symbole $\sum_{n=0}^{\infty}$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue 16.209 s'applique. Point par point en remplaçant f_n par s_n on est bon. □

ThoCSGaPY

Théorème 17.3 ([1])**.**
Soit f_n des fonctions $C^1[a,b]$ telles que

(1) *la série $\sum_n f_n(x_0)$ converge pour un certain $x_0\in[a,b]$,*

(2) *la série des dérivées $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction G.*

Alors

ITEMooNBHUooMvbJoP

(1) *La série $\sum_n f_n$ converge vers une fonction F et*

(2) *La fonction F est dérivable*

ITEMooTYLMooQdSdoK

(3) *La convergence est uniforme sur $[a,b]$.*

(4) *$F'(x)=\sum_n f_n'(x)$.*

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Théorème fondamental** Posons $s_n=\sum_{k=0}^{n}f_k$ et $d_n=\sum_{k=0}^{n}f_k'$. Pour chaque n nous avons $d_n=s_n'$ et donc, en vertu du théorème fondamental de l'analyse 16.290 nous avons, pour tout $x\in[a,b]$:

$$s_n(x)=\int_{x_0}^{x}s_n'(t)dt+s_n(x_0)=\int_{x_0}^{x}\sum_{k=0}^{n}f_n'(t)dt+s_n(x_0). \tag{17.8}$$

EQooXKRPooMcdCQx

Nous voulons prendre la limite en permutant avec l'intégrale à droite.

(2) **Permuter limite et intégrale**

Nous utilisons le théorème 17.2. Par hypothèse nous avons la convergence uniforme $\sum_n f_n'\xrightarrow{unif}G$. En tant que limite uniforme de fonctions continues (les sommes partielles), la fonction G est continue par 14.397.

La fonction G est continue sur le compact $[a,b]$. Elle est donc majorée, et nous considérons un majorant a.

Soit $\epsilon>0$ et N_ϵ tel que $\|\sum_{k=0}^{n}f_n'-G\|_\infty<\epsilon$ pour tout $n\geqslant N_\epsilon$. Avec ça, les nombres $\|\sum_{k=0}^{n}f_k')\|_\infty$ sont majorés par $a+\epsilon$. Pour chacun des $n<N_\epsilon$, en tant que somme finie de fonctions continues sur un compact, $\|\sum_{k=0}^{n}f_k\|<a_n$ pour certaines bornes a_n.

En posant $M=\max\{a_0,\dots,a_{N_\epsilon},a+\epsilon\}$, nous avons

$$|\sum_{k=0}^{n}f_k'(x)|<M \tag{17.9}$$

pour tout n et pour tout x dans $[a,b]$.

Tout cela pour dire que nous pouvons prendre la limite des deux côtés de (17.8) et la permuter avec l'intégrale.

(3) **La limite** La fonction G étant une limite uniforme de fonctions continues sur le compact $[a,b]$, elle est continue et donc bornée. Donc elle est intégrable sur tout intervalle de $[a,b]$. Nous avons le calcul suivant : [EQooZXHUooXgSDFo]

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\int_{x_0}^{x}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}f_k'(t)}_{=G(t)}dt+\lim_{n\to\infty}s_n(x_0) \tag{17.10a}$$

$$=\int_{x_0}^{x}G(t)dt+\sum_{k=0}^{\infty}f_n(x_0)<\infty. \tag{17.10b}$$

Voilà qui prouve le point (1).

(4) **Question de dérivées** Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} H\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{x_0}^{x} G(t)dt. \end{aligned} \tag{17.11}$$

L'application G est continue en tant que limite uniforme de fonctions continues (les sommes partielles des f_k'). Donc la proposition 16.289 dit que H est dérivable (donc continue) et que $H' = G$. Mais ce que dit (17.10), c'est que $F = H + cst$. Donc $F' = H' = G$.

(5) **Pour (3)** Vu que F est continue, la proposition 14.403 dit que la convergence est uniforme sur tout compact ; en particulier sur $[a,b]$.

□

17.1.2 Différentiabilité

LEMooPIWYooZEofkW

Lemme 17.4.
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si la suite (T_n) converge vers T dans $\mathcal{L}(E,F)$, alors pour tout $v \in E$ nous avons

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n\right)(v) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(v). \tag{17.12}$$

LEMooEYARooNExmiw

Lemme 17.5 ([546])**.**
Soit un espace métrique V. Soient un compact K et un ouvert U contenant K. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\{x \in V \text{ tel que } d(x,K) < \delta\} \subset U. \tag{17.13}$$

Démonstration. Pour chaque $x \in K$, nous posons

$$A_x = \{\alpha \geqslant 0 \text{ tel que } B(x,\alpha) \subset U\}. \tag{17.14}$$

Le théorème 9.8 indique que A_x contient toujours des éléments strictement positifs (parce que K est dans U qui est ouvert). Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup\{\alpha \geqslant 0 \text{ tel que } B(x,\alpha) \subset U\}. \end{aligned} \tag{17.15}$$

Nous prouvons que f est continue. Soit $\epsilon > 0$. Soit $y \in B(x,\epsilon)$.

(1) $f(x) - \epsilon \leqslant f(y)$ Nous prouvons que pour tout $\alpha \in A_x$, le nombre $\alpha - \epsilon$ est dans A_y, c'est-à-dire que $B(y, \alpha - \epsilon) \subset U$. Soit $a \in B(y, \alpha - \epsilon)$. Nous avons

$$d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a) \leqslant \epsilon + (\alpha - \epsilon) = \alpha. \tag{17.16}$$

Donc $a \in U$.

Cela signifie que pour tout $\alpha \in A_x$, nous avons $\alpha - \epsilon \in A_y$, ou encore que $A_x - \epsilon \subset A_y$. En passant au supremum, $\sup(A_x) - \epsilon \leqslant \sup(A_y)$. Nous avons donc bien $f(x) - \epsilon \leqslant f(y)$.

(2) $f(y) \leqslant \epsilon + f(x)$ Soit $\epsilon' > 0$. Il existe un élément u hors de U tel que $d(x,y) < f(x) + \epsilon'$. Cet élément vérifie donc

$$f(y) \leqslant d(y,u) \leqslant d(y,x) + d(x,u) \leqslant \epsilon + f(x) + \epsilon'. \tag{17.17}$$

Pour tout $\epsilon' > 0$ nous avons $f(y) \leqslant \epsilon + f(x) + \epsilon'$. En prenant la limite $\epsilon' \to 0$ nous trouvons $f(y) \leqslant f(x) + \epsilon$.

(3) **f est continue** Nous avons montré que si $y \in B(x,\epsilon)$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$. Cela signifie que f est continue en $x \in K$.

(4) **Conclusion** La fonction f est continue sur le compact K. Elle est donc bornée et atteint ses bornes[1]. Soit $\delta = \min\{f(x) \text{ tel que } x \in K\}$. Comme dit plus haut, $f(x) > 0$ pour tout x. Donc $\delta > 0$.

Si $x \in V$ vérifie $d(x,K) < \delta$, alors il existe $y \in K$ tel que $d(x,y) < \delta$. Par minimalité de δ, nous avons $f(y) \geqslant \delta$ et donc $B(y,\delta) \subset U$. En particulier $x \in B(y,\delta) \subset U$.

[1] Théorème de Weierstrass 9.215.

□

PROPooGRXXooWcZyJG

Proposition 17.6 ([546]).
Tout ouvert connexe par arcs d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs de classe C^1.

Démonstration. Soient un espace vectoriel normé V, et un ouvert connexe par arcs U. Nous considérons $x, y \in U$ et un chemin continu $\gamma\colon [0,1] \to U$ joignant x à y.

(1) **Utilisation du lemme** La partie $\gamma\big([0,1]\big)$ est compacte parce qu'elle est l'image par une application continue d'un compact (théorème 9.298). Par le lemme 17.5, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $B\big(\gamma(t), \delta\big) \subset U$.

(2) **Uniforme continuité** L'application γ est continue sur le compact $[0,1]$. Le théorème de Heine 14.80 nous dit que γ est alors uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t, t' \in [0,1]$ tels que $|t - t'| < \eta$, nous ayons $d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) < \delta$.

(3) **La courbe** Nous considérons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ telle que $|t_i - t_{i-1}| < \eta$[2]. Nous notons $P_i = \gamma(t_i)$ et $Q_i = \gamma(t_{i+1})$. Soient les applications[3]

$$\begin{aligned} \varphi_i\colon \mathbb{R} &\to V \\ t &\mapsto t^3 Q_i + 3t^2(1-t)Q_i + 3t(1-t)^2 P_i + (1-t)^3 P_i. \end{aligned} \tag{17.18}$$

Nous considérons ensuite les reparamétrisations des φ_i de $[0,1]$ vers $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} \sigma_i\colon \mathbb{R} &\to V \\ t &\mapsto \varphi_i\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right). \end{aligned} \tag{17.19}$$

Ces applications sont de classe C^1. Enfin nous posons

$$\begin{aligned} \psi\colon [0,1] &\to V \\ t &\mapsto \sigma_i(t) \quad \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned} \tag{17.20}$$

EQooIQHHooGspmQJ

(4) **Ce qu'il faut voir** Petite pause pour lister les choses que nous devons vérifier.

- $\psi(0) = \gamma(0)$, $\psi(1) = \gamma(1)$
- ψ est continue.
- ψ est à valeurs dans U.
- ψ est de classe C^1.

On y va…

(5) **$\psi(0)$ et $\psi(1)$** Nous avons

$$\psi(0) = \sigma_0(0) = \varphi_0(0) = P_0 = \gamma(0), \tag{17.21}$$

et, utilisant le fait que $t_n = 1$,

$$\psi(1) = \sigma_{n-1}(1) = \varphi_{n-1}\left(\frac{1 - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right) = \varphi_{n-1}(1) = Q_{n-1} = \gamma(t_n) = \gamma(1). \tag{17.22}$$

(6) **ψ est continue** Nous devons vérifier la continuité aux raccords, c'est-à-dire que nous devons prouver $\sigma_i(t_{i+1}) = \sigma_{i+1}(t_i)$. D'une part $\sigma_i(t_{i+1}) = \phi_i(1) = Q_i = \gamma(t_{i+1})$, et d'autre part $\sigma_{i+1}(t_i) = \varphi_{i+1}(0) = P_{i+1} = \gamma(t_{i+1})$. C'est bon.

(7) **À valeurs dans U** Nous devons vérifier que $\varphi_i\big([0,1]\big) \subset U$. Nous avons bien sûr $P_i \in B(P_i, \delta)$, mais nous avons aussi $Q_i \in B(P_i, \delta)$. En effet, $|t_{i+1} - t_i| < \eta$ de telle sorte que $Q_i = \gamma(t_{i+1}) \in B\big(\gamma(t_i), \delta\big) = B(P_i, \delta)$. Le nombre η a été choisi pour ça.

Le nombre δ a été choisi pour avoir également $B(P_i, \delta) \subset U$. Bref, P_i et Q_i sont dans $B(P_i, \delta)$ qui est convexe[4] et contenue dans U. Pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$, le point $\varphi_i(t)$ est une combinaison convexe de P_i et Q_i :

$$t^3 + 3t^2(1-t) + 3t(1-t)^2 + (1-t)^3 = 1. \tag{17.23}$$

Donc $\varphi_i(t) \in B(P_i, \delta) \subset U$.

[2] Êtes-vous capable d'en prouver l'existence ? Prenez un entier $z > \eta$ et $t_k = k/z$. Notez l'utilisation du lemme 4.57 que je me lasserai jamais de citer.

[3] Ce sont des courbes de Bézier d'ordre 3 de points de contrôle P_i, P_i, Q_i et Q_i.

[4] Une boule est convexe, proposition 9.276.

(8) ψ **est de classe C^1** Nous avons $\varphi_i'(t) = 6t(1-t)(Q_i - P_i)$. Donc pour tout i nous avons $\varphi_i'(1) = \varphi'(0) = 0$. En ce qui concerne ψ' nous avons

$$\lim_{t\to t_i^+} \psi'(t) = \psi'(t_i) = 0 \tag{17.24}$$

et

$$\lim_{t\to t_i^-} \psi'(t) = \lim_{t\to 1} \varphi_{i-1}(t) = 0, \tag{17.25}$$

d'où la continuité de ψ'.

Nous en déduisons que ψ est de classe C^1 par le théorème 14.367.

□

Remarque 17.7.
Quelle est la forme de l'image de la courbe C^1 définie en (17.20) ? L'image est une ligne brisée : une suite de segments de droites. Elle fait un angle à chaque raccord. Il est contre-intuitif qu'une ligne faisant des angles puisse être de classe C^1, mais c'est pourtant le cas. Le fait est que ψ' s'annule à chacun de ces raccords, de telle sorte que ψ' est quand même continu.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 17.8
Le théorème 17.9 se démontre ici avec des intégrales. Je suis presque certain qu'on doit pouvoir adapter la démonstration du théorème 14.416 pour ne pas avoir à utiliser d'intégrales.

ThoLDpRmXQ

Théorème 17.9 ([547]).
Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert connexe par arcs. Soit (u_n) une suite de fonctions $u_n : \Omega \to F$ telle que

(1) pour tout n, la fonction u_n est de classe C^1 sur Ω,

(2) la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur Ω,

(3) la série des différentielles $\sum_n (du_n)$ converge normalement sur tout compact de Ω.

Alors la somme $u = \sum_n u_n$ est de classe C^1 sur Ω et sa différentielle est donnée par

$$du = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{17.26}$$

Démonstration. Pour chaque n, la fonction $du_n : \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$ est une fonction continue parce que u_n est de classe C^1. La série convergeant normalement, la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} du_n$ est également continue par la proposition 14.408. La difficulté de ce théorème est donc de prouver que cela est bien la différentielle de la fonction $\sum_n u_n$, c'est-à-dire que

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{17.27}$$

Soient $a, x \in \Omega$. Nous considérerions bien le segment $[a,x]$, mais vu que Ω n'est supposé que connexe par arcs de classe C^1 (la proposition 17.6 pour que l'arc puisse être choisi C^1), nous ne pouvons pas faire mieux pour joindre a à x que choisir un chemin de classe C^1

$$\gamma : [0,1] \to \Omega \tag{17.28}$$

tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x$.

L'astuce est de poser

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big), \end{aligned} \tag{17.29}$$

et d'en étudier l'intégrale[5].

[5] Cela revient à étudier l'intégrale de la forme différentielle du_n sur le chemin γ. Voir la définition 22.47 et tout ce qui s'en suit.

(1) **Permuter somme et intégrale** Nous voudrions permuter la somme et l'intégrale dans l'expression $\int_0^1 \sum_i f_i(t)dt$. Pour cela nous commençons par regarder quelques majorations de normes.

D'abord γ est de classe C^1, ce qui fait que γ' est continue. Vu que la norme est une application continue, la fonction $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ est également continue sur le compact $[0,1]$. Elle est donc majorée par une constante que nous nommons M. C'est le théorème de Weierstrass 9.215.

Ensuite nous avons le calcul

$$\|f_i(t)\| = \|(du_i)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\| \leqslant \|(du_i)_{\gamma(t)}\|\|\gamma'(t)\| \leqslant M\|du_i\|_\infty < \infty. \tag{17.30}$$

Justifications :

- Pour la première inégalité. C'est le lemme 12.90.
- Pour la seconde inégalité. Il s'agit de l'inégalité évidente

$$\|du_i\|_\infty = \sup_{x\in\gamma\left([0,1]\right)} \|(du_i)_x\| \tag{17.31}$$

  Notons que la norme $\|.\|_\infty$ ne réfère pas à un supremum sur E, mais seulement sur l'image de γ. Nous aurions pu faire preuve d'un peu de créativité dans les notations.
- L'application du_i est continue sur le compact $\gamma\big([0,1]\big)$. Donc le supremum est fini et atteint.

Maintenant nous posons

$$g_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t). \tag{17.32}$$

Nous avons la majoration

$$\|g_n(t)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|f_i(t)\| \leqslant M \sum_{i=0}^{n} \|du_i\|_\infty < \infty. \tag{17.33}$$

Le fait que le tout soit fini est l'hypothèse de convergence normale sur tout compact. Le compact en question est $\gamma\big([0,1]\big)$.

C'est le moment d'utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 16.209. Attention aux notations un peu décalées. Nous avons $g_n \to \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (convergence simple) et $\|g_n(t)\| \leqslant A$ où A est une constante que nous voyons comme une fonction constante intégrable sur le compact $[0,1]$. Nous permutons la limite et l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t)dt = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} g_n)(t)dt \tag{17.34a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)dt \tag{17.34b}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} f_i(t)dt \tag{17.34c}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 f_i(t)dt \tag{17.34d}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 f_i(t)dt. \tag{17.34e}$$

(2) **Accroissements**

Nous pouvons maintenant faire le petit calcul suivant :

$$\sum_n \int_0^1 (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \sum_n \Big(u_n\big(\gamma(1)\big) - u_n\big(\gamma(0)\big)\Big) = \sum_n \big(u_n(x) - u_n(a)\big) = u(x) - u(a) \tag{17.35}$$

où nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul intégral sous la forme de la proposition 16.296.

Nous retenons l'égalité

$$u(x) = u(a) + \int_0^1 \sum_n (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt. \tag{17.36}$$

EQooTXYWooIDxVri

(3) **Remarque** La formule (17.36) n'est pas une forme de formule des accroissements finis qui parlerait d'évaluer une fonction u en x en partant de a et en intégrant du le long d'un chemin joignant a et x.

Ce serait le cas si nous pouvions permuter la somme et la différentielle qui se trouvent dans l'intégrale. Or permuter somme et différentielle est précisément l'objet du théorème que nous sommes en train de prouver.

(4) **Différentielle**

Forts de la formule (17.36), nous calculons $du_a(v)$, c'est-à-dire la différentielle de u au point a appliquée au vecteur $v \in E$. Pour cela, nous savons que Ω est ouvert, donc Ω contient une boule de rayon r autour de a, ce qui nous permet de dire que pour un a donné, le point $a+sv$ est dans Ω pour tout $s \in B(0,\epsilon)$ lorsque ϵ n'est pas trop grand. Pour chacun de ces s, nous considérons un chemin de classe C^1 joignant a à $a+sv$. Ce chemin sera noté

$$\gamma_s : [0,1] \to \Omega \tag{17.37}$$

et $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=a+sv$. Nous avons le calcul

$$\begin{aligned}
du_a(v) &= \frac{d}{ds}\Big[u(a+sv)\Big]_{s=0} && (17.38a)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (17.38b)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (17.38c)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_n \big(u_n(a+sv)-u_n(a)\big)\Big]_{s=0} && (17.38d)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[(\sum_n u_n)(a+sv)\Big]_{s=0} && (17.38e)\\
&= \sum_n \frac{d}{ds}\Big[u_n(a+sv)\Big]_{s=0} && (17.38f)\\
&= \sum_n (du_n)_a(v) && (17.38g)\\
&= \Big(\sum_n (du_n)_a\Big)(v) && (17.38h)\\
&= \Big(\sum_n du_n\Big)_a(v). && (17.38i)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour 17.38c. Permuter la somme et l'intégrale comme plus haut.
- Pour 17.38f. Permuter une somme et une dérivée classique des fonctions $\mathbb{R} \to F$ données par $s \mapsto u_n(a+sv)$. Il s'agit d'utiliser le théorème 14.413 sur chaque composantes dans F.
- Pour 17.38i. Chaque du_n est une application $du_n : E \to \mathcal{L}(E,F)$. Au fait près que la notation est plus lourde, il s'agit simplement d'une définition de la somme ponctuelle d'une suite de fonctions : $\sum_n f_n(a) = (\sum_n f_n)(a)$. Dans ce cas-ci, le tout est encore un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ que nous appliquons à v.

□

17.2 Séries entières

Dans cette section nous allons parler de séries complexes autant que de séries réelles. L'étude des propriétés à proprement parler complexes des séries entières (holomorphie) sera effectuée dans le chapitre dédié, voir le théorème 28.62 et ses conséquences.

L'unicité du développement (quand il existe) sera la proposition 17.49.

17.2.1 Disque de convergence

DEFooYTYJooFzvKDu

Définition 17.10.
*Une **série de puissance** est une série de la forme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{17.39}$$

eqseriepuissance

où $z_0 \in \mathbb{C}$ est fixé, (c_k) est une suite complexe fixée, et z est un paramètre complexe. Nous disons que cette série est centrée *en z_0.*

DEFooLGGNooGapMIK

Définition 17.11.
*Une **série entière** est une somme de la forme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{17.40}$$

avec $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Une série entière peut définir une fonction

$$f(z) = \sum_n a_n z^n. \tag{17.41}$$

Le but de cette section est d'étudier des conditions sur la suite (a_n) qui assurent la continuité de f ou la possibilité de dériver ou intégrer la série terme à terme.

DefZWKOZOl

Définition 17.12 (rayon de convergence)**.**
*Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$. Nous disons que le **rayon de convergence** de (a_n) est le nombre*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, \infty]. \tag{17.42}$$

EQooIBQJooWRfGKX

*Lorsque nous avons une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x(z - z_0)^n$, nous disons que la boule $B(z_0, R)$ est le **disque de convergence** de la série.*

Notez bien que la définition (17.42) est plutôt une propriété de la suite (a_n) que de la série $\sum_n a_n z^n$.

17.13.
Notez que le disque de convergence proprement dit est ouvert. Donc, pour être correct, on devrait parler de la *frontière* pour parler de la partie $|z| = R$. Toutefois, nous désignerons souvent cette partie en parlant du *bord* du disque.

17.14.
En réalité, il serait plus correct de parler du rayon de convergence de la suite (a_n) parce qu'au moment où on l'étudie, nous ne savons pas encore si la somme existera. Il ne devrait donc pas être autorisé d'écrire « étudions le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ ».

Le rayon de convergence d'une série ne dépend que des réels $|a_n|$, même si à la base $a_n \in \mathbb{C}$.

17.15.
Sur Wikipédia[548], le rayon de convergence est défini par le supremum des $|z|$ tels que la série $\sum_n a_n z^n$ converge. Je vous invite à vous étonner que cela est équivalent à la définition donnée ici.

Il est dingue que demander que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée soit suffisant pour que la série converge. En réalité ce n'est pas tout à fait le cas ; les séries qui convergent sont celles pour $|z|$ strictement plus petit que le rayon de convergence. Et là ça marche. En effet, si $x < R$, il existe un r tel que $x < r < R$. Nous considérons ϵ donné par $x = \epsilon r$, qui vérifie $\epsilon < 1$ et nous avons

$$a_n x^n = a_n(\epsilon r)^n = (a_n r^n)\epsilon^n \to 0. \tag{17.43}$$

Le critère d'Abel 17.18 va formaliser ça.

REMooYOTEooKvxHSf

Remarque 17.16.
Si pour tout n nous avons $|b_n| \geqslant |a_n|$ alors le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^n$ est au moins aussi grand que celui de la série $\sum_n b_n z^n$. Cela y compris lorsque l'un ou l'autre des rayons de convergences est infini.

LEMooVCTNooCQHkzs

Lemme 17.17 ([1])**.**
Le rayon de convergence pour la suite $b_n = a_{n+k}$ est le même que celui pour a_n.

Démonstration. Soit $r > 0$. Nous avons $r^k b_n r^n = a_{n+k} r^{n+k}$. Vu que les k premiers termes d'une suite ne changement pas le fait que la suite soit bornée, la suite $(a_n r^n)_{n \geqslant k}$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. □

LemmbWnFI

Lemme 17.18 (Critère d'Abel)**.**
Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la somme $\sum_n a_n z^n$ et $z \in \mathbb{C}$.

(1) Si $|z| < R$ alors la série converge absolument[6]*.*

(2) Si $|z| > R$ alors la série diverge.

Démonstration. Démonstration en deux parties.

(1) Nous supposons que $|z| < R$. Nous choisissons alors un r tel que $|z| < r < R$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée ; il existe un $M > 0$ tel que $|a_n r^n| < M$ pour tout M. Nous pouvons calculer :

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \big(\frac{|z|}{r}\big)^n \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \tag{17.44}$$

Vu que $|z| < r$ nous tombons sur la série géométrique (12.515) qui converge. Par le critère de comparaison[7] la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.

(2) Par définition du rayon de convergence, la suite $(a_n z^n)$ n'est donc pas bornée et la série ne peut pas converger à cause de la proposition 12.133.

□

CORooCUDSooTfMvAB

Corolaire 17.19.
Soit une série entière $\sum_n a_n z^n$. Soit un nombre ρ tel que

(1) La série converge pour $|z| < \rho$.

(2) La série diverge pour $|z| > \rho$.

Alors le rayon de convergence est ρ.

Démonstration. Nous notons R le rayon de convergence de la série.

(1) $\underline{R \geqslant \rho}$ Si $R < \rho$, nous prenons r strictement entre R et ρ. Le critère d'Abel 17.18 nous dit, pour $|z| = r$, que la série diverge. Par hypothèse, elle converge ; contradiction.

(2) $\underline{R \leqslant \rho}$ De même si $R > \rho$, alors nous prenons $\rho < r < R$. Le critère d'Abel nous dit que la série diverge pour $|z| = r$. L'hypothèse nous dit le contraire. Nouvelle contradiction.

□

17.20.
Le critère d'Abel parle bien de convergence absolue, et non de convergence normale. Pour chaque t, la série $\sum_k |a_n t^k|$ converge. Si par contre nous posons $u_k(t) = a_k t^k$, nous n'avons à priori pas la convergence normale $\sum_k \|u_k\|_\infty$, même pas si la norme est la norme supremum sur $B(0, R)$[8]. Prenons comme exemple simplement $a_k = 1$ pour tout k. Pour tout $|t| < 1$, la série $\sum_k t^k$ converge absolument (série géométrique), mais nous aurions $\|u_k\|_\infty = 1$ et donc divergence évidente de $\sum_k \|u_k\|_\infty$.

PROPooLNJSooWdieDi

Proposition 17.21 ([1])**.**
Si R est la rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ et si R_a est celui de $\sum_n |a_n| z^n$, alors

$$R \geqslant R_a. \tag{17.45}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R_a$. Alors la série $\sum_n |a_n| z^n$ converge absolument[9], c'est-à-dire que la série $\sum_n |a_n z^n|$ converge. La proposition 12.165 dit alors que la série $\sum_n a_n z^n$ converge. Vu que cela est vrai pour tout $z \in B(0, R_a)$, nous en déduisons que $R_a \geqslant R$. □

[6] Définition 12.130.
[7] Lemme 12.179.
[8] Il y aurait par contre bien convergence sur tout compact ? Cher lecteur, dites-moi ce que vous en pensez
[9] Critère d'Abel, lemme 17.18.

17.2.2 Somme et produit de séries

THOooSDQQooIawBOk

Théorème 17.22 (Somme de séries entières[549]).
Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b.

ITEMooJSIJooUSxIVk

(1) Nous notons R_s le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n)z^n$. Nous avons

ITEMooOHZIooAODsVI

(1a) Si $R_a = R_b$, alors $R_s \geqslant R_a$.

ITEMooBHUHooDAVNWJ

(1b) Si $R_a \neq R_b$ alors $R_s = \min\{R_a, R_b\}$.

ITEMooFJCKooZfYzXx

(2) Si $|z| < R_s$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \tag{17.46}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1a)** Si $R_a = R_b$, alors nous fixons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R_a$. Dans ce cas les séries $\sum_k a_k z^k$ et $\sum_k b_k z^k$ (que nous voyons comme bête séries dans $\mathbb{C}$, pas comme fonctions de z) convergent, et la proposition 12.173 nous dit qu'alors la somme converge vers $\sum_k (a_k + b_k)z^k$. Donc z est dans la boule de convergence de $\sum_k (a_k + b_k)z^k$ et donc $R_s \geqslant |z|$. Vu que cela est valable pour tout $|z| < R_a = R_b$, nous avons $R_s \geqslant R_a$.

(2) **Pour (1b)** Nous supposons, pour fixer les idées, que $R_a < R_b$. De la même façon que pour le point (1a), nous trouvons que $R_s \geqslant R_a$. Nous prenons maintenant $z \in \mathbb{C}$ avec $R_a < |z| < R_b$. Alors la série $\sum_k a_k z^k$ converge et la série $\sum_k b_k z^k$ diverge. La proposition 12.173(2) indique alors que $\sum_k (a_k + b_k)z^k$ diverge. Donc $R_s < |z|$. Vu que cela est vrai pour tout $|z| > R_a$, nous avons $R_s \leqslant R_a$ et donc $R_s = R_a$.

Le cas $R_b > R_a$ donne alors un résultat identique : $R_s = R_b$.

(3) **Pour (2)** Lorsque $|z| < R_s = \min R_a, R_b$, les deux séries convergent et la proposition 12.173 indique que la somme converge vers ce qu'il faut.

□

THOooINHDooZxErnp

Théorème 17.23.
Soit une série $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence R.

(1) Si $\lambda \neq 0$ la série $\sum_n (\lambda a_n)z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum_n a_n z^n$

(2) Si $|z| < R$ nous avons

EQooSLBVooVltMid

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{17.47}$$

Démonstration. Fixons $|z| < R$, et appliquons la proposition 12.177(1). Cela prouve que le rayon de convergence de $\sum_k (\lambda a_k)z^k$ est au moins aussi grand que R. La partie 12.177(2) montre que si $|z| > R$, alors la série $\sum_k (\lambda a_k)z^k$ ne converge par.

La formule (17.47) est seulement la formule (12.495). □

LEMooNYAXooKUuQFe

Lemme 17.24 ([1]).
Soient deux suites de nombres complexes (a_n) et (b_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l} b_j\big)a_l. \tag{17.48}$$

Démonstration. Le problème est qu'à gauche la borne de la somme sur l dépend de k ; cela nous empêche de permuter les sommes[10]. Qu'à cela ne tienne : nous complétons la somme en introduisant

$$\sigma_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{si } l \leqslant k \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \tag{17.49}$$

[10] Vu que toutes les sommes sont finies, ce ne sont certainement pas les questions de convergence qui nous retiennent.

Nous avons alors

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\sigma_{lk}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sigma_{lk}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\big(a_l\sum_{k=l}^{n}b_{k-l}\big) \tag{17.50a}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\big(a_l\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)=\sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)a_l. \tag{17.50b}$$

□

LEMooLPBCooRWuvJB

Lemme 17.25 ([1]).
Si la série $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ a un rayon de convergence R, alors nous avons

$$\big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\big)z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+1} \tag{17.51}$$

EQooYGEUooUYSLFi

et les rayons de convergence sont égaux à R.

Démonstration. En posant $b_0=0$ et $b_k=a_{k-1}$ (pour $k\geqslant 1$), la somme de droite est la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ qui a le même rayon de convergence que la série des (a_n) par le lemme 17.17. En ce qui concerne l'égalité (17.51), elle se vérifie du fait que toutes les sommes partielles à gauche et à droite sont égales. □

PROPooPKGEooZKyxwo

Proposition 17.26 (Produit de Cauchy[550]).
Soient (a_n) et (b_n) des suites dans $\mathbb{C}$. Nous supposons que $\sum_n a_n$ est absolument convergente[11] *et que $\sum_n b_n$ est convergente.*

Alors en posant

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}, \tag{17.52}$$

la série $\sum_n c_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\big(\sum_i a_i\big)\big(\sum_j b_j\big). \tag{17.53}$$

Démonstration. Nous commençons par quelques notations sur les sommes partielles et leurs limites. Nous posons $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_n$, $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_n$ et nous avons, par hypothèse, les convergences $A_n\xrightarrow{\mathbb{C}}A$ et $B_n\xrightarrow{\mathbb{C}}B$.

En ce qui concerne la somme partielle pour les (c_n), en appliquant le lemme 17.24,

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)a_l=\sum_{l=0}^{n}a_lB_{n-l}. \tag{17.54}$$

Soit $\epsilon>0$.

(1) **Des indices assez grands** Nous définissons $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ de la façon suivante :

- Vu que $B_j\to B$, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $j\geqslant N_1$, $|B_j-B|\leqslant\epsilon$.
- Vu que $\sum_n a_n$ converge, la proposition 12.133 nous dit que $|a_i|\to 0$ (ce n'est pas ici que nous utilisons la convergence absolue). Il existe donc $N_2\in\mathbb{N}$ tel que $|a_i|\leqslant\epsilon/N_1$ pour tout $i\geqslant N_2$.
- Nous considérons $N\geqslant N_1+N_2$.

(2) **Un majorant** Vu que la série $\sum_n a_n$ converge absolument, la somme $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ est bornée. De même, la suite $j\mapsto|B_j-B|$ est bornée et nous choisissons M assez grand pour majorer les deux en même temps :

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<M \tag{17.55a}$$

SUBEQooBKCVooXnampA

$$|B_j-B|<M\quad\forall j. \tag{17.55b}$$

[11] Définition 12.130.

(3) **Et on calcule un peu** Nous avons assez préparé de notations et de majorations. C'est le moment de prouver que $C_n - A_nB \to 0$. Nous avons

$$|C_n - A_nB| = |\sum_{l=0}^{n} a_k(B_{n-l} - B)| \tag{17.56a}$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{n} |a_l||B_{n-l} - B| \tag{17.56b}$$
$$= \sum_{l=0}^{n-N_1} |a_l||B_{n-l}| + \sum_{l=n-N_1+1}^{n} |a_l||B_{n-l} - B| \tag{17.56c}$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{n-N_1} |a_l|\epsilon + M \sum_{l=n-N_1+1}^{n} |a_l| \tag{17.56d}$$
$$\leqslant \epsilon M + M \sum_{l=n-N_1+1}^{n} \frac{\epsilon}{N_1} \tag{17.56e}$$
$$= 2\epsilon M. \tag{17.56f}$$

Justifications :

- Pour (17.56d). Dans la première somme, $n - l \geqslant n - (n - N_1) = N_1$, donc $|B_{n-l} - B| \leqslant \epsilon$. Dans la seconde somme nous avons seulement majoré $|N_{n-l} - B| \leqslant M$.
- Pour (17.56e). Dans la première somme, il s'agit de la majoration (17.55a). Dans le seconde somme, $l \geqslant n - N_1 + 1 \geqslant N_1 + N_2 - N_1 + 1 \geqslant N_2 + 1$, ce qui implique $|a_l| \leqslant \epsilon/N_1$.
- Pour (17.56f). La somme contient $n - (n - N_1 + 1) + 1 = N_1$ termes. Chaque terme valant ϵ/N_1.

(4) **Conclusion** Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $|C_n - A_nB| \leqslant \epsilon$. Nous écrivons maintenant

$$C_n = (C_n - A_nB) + A_nB \tag{17.57}$$

Vu que $C_n - A_nB \to 0$ et que $A_nB \to AB$, la somme des deux suites converge vers[12] $0 + AB = A$ et donc

$$C_n \to AB. \tag{17.58}$$

□

Le théorème suivant donne une formule (dit « produit de Cauchy ») pour le produit de deux séries entières. Nous en donnons une adaptation dans le cas de séries de puissances dans une algèbre normée dans la proposition 12.178.

ThokPTXYC

Théorème-Définition 17.27 (Produit de Cauchy dans $\mathbb{C}$[551])**.**
Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b. La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n. \tag{17.59}$$

*est le **produit de Cauchy** des séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$.*

Nous notons R_p le rayon de convergence de la série.

ITEMooFOVPooBaVknN

(1) Nous avons l'inégalité $R_p \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

ITEMooHRNZooWviigD

(2) Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right). \tag{17.60}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

[12] C'est la proposition 11.28.

(1) **Préambule** Nous allons fixer z, et utiliser la proposition 17.26. Ce que nous appelons a_n là-bas est $a_n z^n$ ici. Idem pour les b_n qui sont $b_n z^n$ et c_n qui devient $c_n z^n$. Vu que z sera fixé, tout cela n'est pas très profond.

Ces substitutions sont très courantes lorsque nous prouvons des résultats sur les séries entières comme corolaires de résultats généraux sur les séries.

(2) **Pour (1)** Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ sont absolument convergentes par lemme d'Abel 17.18. La proposition 17.26 pour les suites $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ fait alors le boulot : en posant

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}, \tag{17.61}$$

la série $\sum_n c_n z^n$ converge et vaut le produit des deux.

La série $\sum_n c_n z^n$ converge sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \min\{R_a, R_b\}\}$. Donc en posant $r < \min\{R_a, R_b\}$, la suite $(c_n r^n)$ est bornée (dans $\mathbb{C}$) et nous avons que $R_p \geqslant r$ (utilisation très littérale de la définition du rayon de convergence). Donc $R_p \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

(3) **Pour (2)** Le travail est déjà fait.

□

Exemple 17.28.
Montrons un produit de Cauchy dont le rayon de convergence est strictement plus grand que le minimum. D'abord nous considérons

$$A = 1 - z, \tag{17.62}$$

c'est-à-dire $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n\geqslant 2} = 0$ avec $R_a = \infty$. Ensuite nous considérons

$$B = \sum_n z^n, \tag{17.63}$$

c'est-à-dire $B = (1-z)^{-1}$ et $R_b = 1$. Le produit de Cauchy de ces deux séries valant 1, le rayon de convergence est infini.

Notons qu'alors l'égalité (17.60) a lieu dans $B(0,1)$, mais pas au-delà.

Donc le « produit de Cauchy » de deux séries peut ne pas être égal au produit des deux séries, au sens où il est possible que le produit existe là où une des deux séries n'existe plus. △

Exemple 17.29.
Nous montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{17.64}$$

pour $x \in]-1,1[$.

Étant donné que pour tout r dans $]-1,1[$ la suite $(n+1)r^n$ est bornée, le rayon de convergence est correct. Pour les x dans ce domaine nous avons

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right). \tag{17.65}$$ EqIwbuTk

Nous devons expliciter ce produit de Cauchy en utilisant le théorème 17.27. Pour tout i nous avons $a_i = b_i = 1$. Par conséquent le produit (17.65) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \tag{17.66}$$

△

Nous voulons maintenant faire le produit de Cauchy à plus que deux facteurs. Pour cela nous prouvons d'abord un certain nombre de lemmes traitant de la combinatoire du problème.

Nous posons, pour $n, N \in \mathbb{N}$:

$$V_n(N) = \{x \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N} x_i = n\}. \tag{17.67}$$ EQooJCBSooMSbaCd

LEMooRKEVooDdpuHt

Lemme 17.30.
Nous avons

$$V_n(N+1)=\bigcup_{y=0}^{n}\bigcup_{x\in V_y(N)}(x,n-y). \tag{17.68}$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Première inclusion** Un élément de $\bigcup_{y=0}^{n}\bigcup_{x\in V_u(N)}(x,n-y)$ est un élément $z\in\mathbb{N}^{N+1}$ de la forme $z=(x,n-y)$ tel que $x\in V_y(N)$. Donc

$$\sum_{i=1}^{N+1}z_i=\sum_{i=1}^{N}x_i+(n-y)=y+n-y=n. \tag{17.69}$$

Donc $z\in V_n(N+1)$.

(1a) **L'autre inclusion** Un élément de $V_n(N+1)$ est de la forme $z=(x,y)$ avec $x\in\mathbb{N}^N$ et $y\in\mathbb{N}$. Posons $t=\sum_{i=1}^{N}x_i$, de telle sorte que $x\in V_t(N)$.
Vu que $z\in V_n(N+1)$ nous avons d'autre part $y=n-\sum_{i=1}^{N}x_i=n-t$.

□

La proposition suivante généralise le produit de Cauchy du théorème 17.27 au cas de plus de deux facteurs. Nous ne pouvons cependant pas considérer 17.27 comme un cas particulier de 17.31, parce que la démonstration va utiliser le cas à deux facteurs.

PROPooJPVVooLqSdSn

Proposition 17.31 (Produit de Cauchy[1])**.**
Soient des nombres complexes a_{ik} tels que les séries entières

$$s_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}z^k \tag{17.70}$$

soient convergentes avec un rayon de convergence R_i. Nous posons

$$c_n=\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i}, \tag{17.71}$$

et nous appelons R_p le rayon de convergence de la série $\sum_n c_nz^n$.

(1) Nous avons l'inégalité $R_p\geqslant\min\{R_i\}$.

ITEMooUVNXooLxlawx

(2) Pour $|z|\leqslant\min\{R_i\}$ nous avons l'égalité

$$\prod_{i=1}^{N}s_i(z)=\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i}\right)z^n. \tag{17.72}$$

EQooHCUGooDRbxzt

Démonstration. Nous prouvons cela par récurrence sur N. D'abord pour $N=1$ nous avons $V_n(1)=\{n\}$. Donc $c_n=\prod_{i=1}^{1}a_{ix_i}=a_{1n}$ et donc la série à droite dans (17.72) est seulement $\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}z^n=s_1(z)$.

Nous supposons le théorème prouvé pour toutes valeurs jusqu'à N et nous prouvons pour $N+1$. Si $|z|<\min\{R_i\}$ alors toutes les séries convergent et en utilisant l'associativité du produit dans $\mathbb{C}$ nous avons :

$$\prod_{i=1}^{N+1}s_i(z)=\left(\prod_{i=1}^{N}s_i(z)\right)s_{N+1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i}\right)z^ns_{N+1}(z). \tag{17.73}$$

Nous allons maintenant utilliser le produit de Cauchy à deux termes du théorème 17.26. Notez que c'est bien l'utilisation de ce théorème qui nous permet d'obtenir la convegence dans notre pas de récurrence, et non l'hypothèse de réccurence actuelle. Bref, nous posons

$$b_{1k}=\sum_{x\in V_k(N)}\prod_{i=1}^{N}a_{ix_i} \tag{17.74a}$$

$$b_{2k}=a_{N+1,k}. \tag{17.74b}$$

L'utilisation du produit de Cauchy à deux facteurs donne le coefficient de z^n sous la forme suivante (justifications plus bas) :

$$c_n = \sum_{y\in V_n(2)} b_{1y_1}b_{2y_2} \tag{17.75a}$$

$$= \sum_{y\in V_n(2)} \sum_{x\in V_{y_1}(N)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,y_2} \tag{17.75b}$$

$$= \sum_{y=0}^{n} \sum_{x\in V_y(N)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,n-y} \tag{17.75c}$$

SUBEQooFPEMooKpLQBd

$$= \sum_{(x,y)\in V_n(N+1)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,y} \tag{17.75d}$$

SUBEQooHXZRooSdxFTf

$$= \sum_{x\in V_n(N+1)} \prod_{i=1}^{N+1} a_{ix_i}. \tag{17.75e}$$

Justifications :

- Pour (17.75c). L'ensemble $V_n(2)$ n'est pas très compliqué à expliciter :
$$V_n(2) = \{(y, n-y) \text{ tel que } y = 0, \dots, n\}. \tag{17.76}$$
- Pour (17.75d). La somme porte sur les (x,t) avec $x \in \mathbb{N}^N$ et $y \in \mathbb{N}$ tels que (x,y) est dans $V_n(N+1)$, et la justification de l'égalité est le lemme 17.30.

□

17.2.3 Séries entières et polynômes

PROPooEFCNooCAcSIx

Proposition 17.32 ([552]).
Le rayon de convergence de $\sum_n z^n$ est strictement positif si et seulement si il existe $q > 0$ tel que $|a_n| \leqslant q^n$.

Démonstration. Nous notons R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $R > 0$, et nous fixons $s \in]0, R[$. Vu que la série $\sum_a ns^n$ est convergente, la proposition 12.133 dit que $|a_n z^n| \to 0$. En particulier la suite $(a_n z^n)$ est bornée, et il existe $M > 1$ qui majore tous les $a_n z^n$. En posant $q = M/s$, nous avons $|a_n| \leqslant M|s^{-n}| \leqslant q^n$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons maintenant que $|a_n| \leqslant q^n$ pour un certain $q > 0$. Nous savons que si $|z| < 1/q$ la série $\sum_n q^n|z^n|$ converge[13]. Donc le lemme 12.179 dit que $\sum_n |a_n||z|^n$ converge.

□

La proposition suivante sera surtout utile lorsqu'on parlera de dérivée.

PropHDIUooKTbVSX

Proposition 17.33 ([553]).
Quel que soit le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Nous posons

$$E = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (a_n r^n) \text{ est borné }\} \tag{17.77a}$$

$$E' = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (n^\alpha a_n r^n) \text{ est borné }\} \tag{17.77b}$$

Nous allons prouver que $E = E'$ (et donc leurs supremum seront égaux).

(1) **Si $\alpha > 0$**

Dans ce cas $E' \subset E$ est facile. Nous prouvons l'inclusion dans l'autre sens. Si E est vide, c'est évident. Nous supposons que E n'est pas vide, et nous considérons $r \in E$, et nous montrons que $r \in E'$. Pour cela nous prenons un nombre s tel que $r < s < \sup(E)$. Nous avons

$$n^\alpha a_n r^n = n^\alpha a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n s^n = n^\alpha \left(\frac{r}{s}\right)^n a_n s^n. \tag{17.78}$$

[13] Proposition 12.186(1).

Mais $r/s<1$, donc le lemme 14.451 dit que $n^\alpha(r/s)^n\to 0$. Cela est donc borné par une constante M. Donc

$$n^\alpha a_n r^n\leqslant Ma_n s^n. \tag{17.79}$$

Mais la suite $(a_n s^n)$ est bornée. Donc la suite $n^\alpha a_n r^n$ est également bornée, ce qui prouve que $r\in E'$.

(2) **Si $\alpha<0$** Même raisonnement, mais en inversant les rôles de E et E', et en adaptant un peu[14].

□

Remarque 17.34.
Au fond, cette proposition n'est rien d'autre que dire que dans $n^\alpha r^n$, l'effet « convergent » est r^n qui est une décroissance exponentielle tandis que l'effet « divergent » est n^α qui a une croissance seulement polynomiale.

PROPooGQAIooFDTtrc

Proposition 17.35 ([1]).
Si P est un polynôme, alors les séries

$$\sum_n a_n z^n, \tag{17.80a}$$

$$\sum_n P(n)a_n z^n \tag{17.80b}$$

$$\sum_n \frac{a_n}{P(n)}z^n \tag{17.80c}$$

SUBEQooWNLCooBdNnX

ont même rayon de convergence (pourvu que P ne s'annule pas pour 17.80c).

Démonstration. Soient des polynômes P et Q (en supposant que Q ne s'annule pas sur les entiers positifs). Nous notons R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$, nous notons R_P celui de $\sum_n P(n)a_n z^n$, et R_Q celui de $\sum_n a_n/Q(n)z^n$.

(1) **$R=R_P$ / $R_P\leqslant R$.** ITEMooHZAIooAtbmum Vu que $|P(n)|\to\infty$, à partir d'un certain n nous avons $|P(n)a_n|>|a_n|$. Donc nous avons

L'inégalité dans l'autre sens découle principalement de la proposition 17.33. Les théorèmes 17.23 et 17.22(1a) servent à coller les bouts de polynômes ensemble.

(2) **$R_Q=R$ / $R_Q=R$.** Nous avons $\sum_n a_n z^= \sum_n Q(n)\frac{a_n}{Q(n)}z^n$. Donc en utilisant le point (1) avec Q nous trouvons

□

LemFVMaSD

Lemme 17.36.
Les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{17.81a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}z^{n+1} \tag{17.81b}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{17.81c}$$

ont même rayon de convergence.

Démonstration. Cas particulier de la proposition 17.35. □

Notons toutefois que nonobstant ce lemme, les séries dont il est question peuvent se comporter différemment sur le bord du disque de convergence. En effet la série

$$\sum\frac{1}{n}z^n \tag{17.82}$$

diverge pour $z=1$ alors que

$$\sum\frac{1}{n(n+1)}z^{n+1} \tag{17.83}$$

converge pour $z=1$.

[14] Je n'ai pas vérifié ; écrivez-moi si ça pose un problème.

LEMooNAWTooHWqKBK

Lemme 17.37 ([554]).
Soit une suite (u_n) de réels strictement positifs. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \tag{17.84}$$

alors la suite $(u_n^{1/n})$ a une limite et elle vaut ℓ également.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $\ell > 0$; nous ferons le cas $\ell = 0$ après. Soit $\epsilon < \ell$. L'existence de la limite dans l'hypothèse dit qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous ayons

EQooDFKNooMQLVvW

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \in B(\ell, \epsilon). \tag{17.85}$$

Écrivons un produit télescopique :

$$\frac{u_n}{u_N} = \prod_{p=N}^{n-1} \frac{u_{p+1}}{u_p}. \tag{17.86}$$

Mais chacun des facteurs du produit est soumis à l'encadrement (17.85), donc

$$(\ell - \epsilon)^{n-N} \leqslant \frac{u_n}{u_N} \leqslant (\ell + \epsilon)^{n-N}, \tag{17.87}$$

et donc, en multipliant par $u_N > 0$ nous avons

$$u_N(\ell - \epsilon)^{n-N} \leqslant u_n \leqslant u_N(\ell + \epsilon)^{n-M}. \tag{17.88}$$

La fonction $t \mapsto t^{1/n}$ est croissante[15] ; nous pouvons l'appliquer aux inégalités sans changer le sens :

$$u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant u_n^{1/n} \leqslant u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}}. \tag{17.89}$$

Pour rappel, à ce point le N est fixé pour correspondre au $\epsilon < \ell$ que nous avons choisi.

Vu que $1/n \in \mathbb{Q}$ nous invoquons la proposition 14.432 pour dire que $\lim_{n\to\infty} u_N^{1/n} = 1$. De plus $(n - N)/n \to 1$ de telle sorte que

$$(\ell \pm \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \to \ell \pm \epsilon. \tag{17.90}$$

Nous considérons donc un N' tel que pour tout $n \geqslant N'$ nous ayons

$$\left| u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell - \epsilon) \right| < \epsilon \tag{17.91a}$$

$$\left| u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell + \epsilon) \right| < \epsilon. \tag{17.91b}$$

Pour tout $n \geqslant \max(N, N')$ nous avons

$$(\ell - \epsilon) - \epsilon < u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant u_n^{1/n} \leqslant u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} < (\ell + \epsilon) + \epsilon. \tag{17.92}$$

Donc,

$$\ell - 2\epsilon \leqslant u_n^{1/n} \leqslant \ell + 2\epsilon. \tag{17.93}$$

Cela prouve que la limite $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n}$ existe et vaut ℓ.

Et si $\ell = 0$? Dans ce cas, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous avons

$$0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} < \epsilon. \tag{17.94}$$

Ensuite il faut recommencer tous les calculs, avec pour seule différence que tous les membres de gauche sont 0. □

LEMooDWNZooXwejrF

Lemme 17.38 (Règle de Cauchy[555, 554]).
Soit une suite (x_n) dans un espace vectoriel normé. Nous posons

$$p = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n}. \tag{17.95}$$

Alors :

[15] Proposition 14.442, en notant que les arguments sont tous bien positifs.

ITEMooZZBIooUYrtYL

(1) *Si $p<1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente.*

ITEMooQGKNooOFeFRd

(2) *Si $p>1$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est ne converge pas.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit $\epsilon>0$ tel que $p+\epsilon<1$. Le lemme 11.47 nous dit que l'ensemble

$$S_\epsilon=\{n\in\mathbb{N} \text{ tel que } \|x_n\|^{1/n}\geqslant p+\epsilon\} \tag{17.96}$$

est fini. Quitte à prendre une queue de suite, nous supposons que S_ϵ est vide, c'est-à-dire que $\|x_n\|<(p+\epsilon)^n$ pour tout n. En posant $q=p+\epsilon$, nous voyons que $\|x_n\|<q^n$ avec $q<1$. La comparaison avec la série géométrique 12.186(1) conclut.

(2) **Pour (2)** Alors en prenant ϵ tel que $p-\epsilon>1$, nous avons une infinité de termes vérifiant $\|x_n\|>(p-\epsilon)^n>1$.

□

ThoSerPuissRap

Théorème 17.39 (Formule de Hadamard[556])**.**
Le rayon de convergence[16] *de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est donné par une des deux formules*

$$\frac{1}{R}=\limsup \sqrt[k]{|a_k|} \tag{17.97}$$

EqRayCQmySer

ou

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \tag{17.98}$$

EqAlphaSerPuissAtern

lorsque a_k est non nul à partir d'un certain k.

Si une de ces formules donne $1/R=0$, alors le rayon de convergence est infini.

Démonstration. En deux, voire quatre parties. Nous allons utiliser le corolaire 17.19, en commençant par supposer que la limite supérieure n'est ni 0 ni ∞.

(1) **Première formule, si $|z|<R$** Posons $L=\limsup_{n\to\infty}\left(|a_n|^{1/n}\right)$. Si $|z|<\frac{1}{L}$, alors

$$\limsup|a_nz^n|^{1/n}=\limsup|a_n|^{1/n}|z|<L\frac{1}{L}=1 \tag{17.99}$$

donc la règle de Cauchy du lemme 17.38 conclut à la convergence de la série.

(2) **Première formule, si $|z|>R$** C'est exactement le même calcul, mais l'inégalité arrive dans l'autre sens :

$$\limsup|a_nz^n|^{1/n}=\limsup|a_n|^{1/n}|z|>L\frac{1}{L}=1 \tag{17.100}$$

donc la règle de Cauchy du lemme 17.38 conclut à la divergence de la série.

(3) **Première formule, si la limite est 0** Si $\limsup\sqrt{|a_k|}^{1/k}=0$, alors toujours le même calcul donne :

$$\limsup|a_nz^n|^{1/n}=0 \tag{17.101}$$

et donc la série converge pour tout z. D'où le rayon de convergence infini.

(4) **Première formule, si la limite est ∞** Soit $z\in\mathbb{C}$. La partie

$$S=\{n\in\mathbb{N} \text{ tel que } |a_n|^{1/n}>1/|z|\} \tag{17.102}$$

est infinie. Pour chaque $n\in S$, nous avons $|a_nz^n|>1$. La suite des a_nz^n ne convergeant pas vers zéro (il y a même une infinité de termes plus grands que 1), la série ne peut pas converger (proposition 12.133).

(5) **Seconde formule** Le lemme 17.37 nous ramène au cas de la première formule.

□

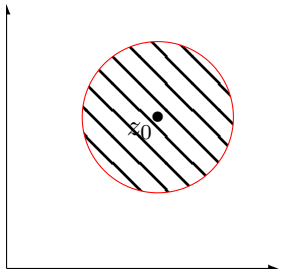


FIGURE 17.1 : À l'intérieur du disque de convergence, la convergence est absolue. En dehors, la série diverge. Sur le cercle proprement dit, tout peut arriver. LabelFigDisqueConv

Notons que le critère d'Abel ne dit rien pour les points tels que $|z-z_0|=R$. Il faut traiter ces points au cas par cas. Et le pire, c'est qu'une série donnée peut converger pour certain des points sur le bord du disque, et diverger en d'autres. Le théorème d'Abel radial (théorème 17.46) nous donnera quelques informations sur le sujet.

Il y a un dessin à la figure 17.1.

Si les suites a_n et b_n sont équivalentes, alors les séries correspondantes auront le même rayon de convergence. Cela ne signifie pas que sur le bord du disque de convergence, elles aient même comportement. Par exemple nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}. \tag{17.103}$$

En même temps, en $z=-1$ la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{\sqrt{n}} \tag{17.104}$$

converge par le critère des séries alternées[17]. Par contre la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)z^n \tag{17.105}$$

ne converge pas pour $z=-1$.

Exemple 17.40.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et considérons la série $\sum_{n\geqslant 1}a_nz^n$ où a_n est la n-ième décimale de α. Si α est un nombre décimal limité, la suite (a_n) est finie et le rayon de convergence est infini. Sinon, pour tout N il existe un $n>N$ tel que $a_n\neq 0$ et la suite (a_n) ne tend pas vers zéro. Par conséquent la série

$$\sum_n a_nz^n \tag{17.106}$$

diverge pour $z=1$ et le rayon de convergence satisfait $R\leqslant 1$. Nous avons aussi $|a_n|\leqslant 9$, de telle manière à ce que la série soit bornée et par conséquent majorée en module par $9z^n$, ce qui signifie que $R\geqslant 1$.

Nous déduisons alors $R=1$. △ LEMooRIQTooLomsqD

Lemme 17.41.
Nous considérons la série

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n \tag{17.107}$$

sur $[\frac{1}{2},1]$.

(1) Pour tout $x\in[\frac{1}{2},1]$, *nous avons*

$$f(x)=\ln(x). \tag{17.108}$$

(2) Nous avons la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2). \tag{17.109}$$

[16] Définition 17.12.
[17] Théorème 12.190.

Démonstration. Nous regardons la série

$$\tilde{f}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n. \tag{17.110}$$

Cette série de puissance converge absolument pour $|y| < 1$ par la proposition 17.35. Nous sommes donc dans le cas d'une série de puissance dont le disque de convergence est centré en 0, et dont le rayon est au moins 1[18].

Par le critère des séries alternées (théorème 12.190), la série $\tilde{f}(y)$ converge pour $y = -1$. Nous sommes donc dans le cadre du théorème 14.407 qui nous permet de dire que pour tout $\epsilon > 0$, la série (17.110) converge uniformément sur $[-1, 1-\epsilon]$.

La fonction $\tilde{f}(y)$ est donc continue sur $[-1, 1-\epsilon]$, et donc en particulier sur $[-1, 0]$. Par ailleurs, la fonction $y(x)$ est continue en $x \neq 0$. En tant que composée de fonctions continues, la fonction $f(x) = \tilde{f}\big(y(x)\big)$ est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Nous la mettons la série des dérivées sous la forme d'une série de puissances :

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{n-1}. \tag{17.111}$$

Afin d'éviter tout malentendu, nous insistons sur le fait que g est la série des dérivées de la série f. Nous ne savons pas encore si g existe (c'est-à-dire si elle converge), ni si sa somme est la dérivée de f. C'est cela que nous allons tenter d'établir maintenant.

Nous posons à nouveau $y(x) = \frac{x-1}{x}$, et nous savons que la série de puissances $\sum_n y^n$ converge uniformément pour $y \in [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ pour tout $\epsilon > 0$. En repassant aux variables x, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n, \tag{17.112}$$

sur le compact $x \in [\frac{1}{2-\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}]$, ou, pour parler plus simplement, sur $x \in [\frac{1}{2} + \epsilon, a]$ pour tout ϵ (petit) et a (grand). Nous avons donc également convergence uniforme de la série des dérivées (17.111) sur le même intervalle. Maintenant, le théorème 17.9 montre que la série des dérivées est bien la dérivée de la série, c'est-à-dire que

$$g(x) = f'(x) \tag{17.113}$$

sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Notez que la convergence uniforme *sur tout compact* de la série des dérivées est suffisante.

Une bonne nouvelle est qu'il est possible de sommer explicitement la série $\sum_k y^k$. C'est la proposition 12.186 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-y^{n+1}}{1-y} = \frac{1}{1-y}, \tag{17.114}$$

lorsque $|y| < 1$. Du coup, nous avons simplement

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{n-1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{n} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)} \right) = \frac{1}{x}, \tag{17.115}$$

donc la fonction f a la forme simple $f(x) = \ln(x) + C$. Notez bien le petit jeu de variables de sommation. Au départ $g(x)$ est une somme qui part de 1 avec un exposant $n-1$, et nous la transformons en une somme qui part de 0 avec un exposant n. C'est cela qui nous permet d'appliquer la formule (17.114).

Étant donné que $f(1) = 0$, nous avons

$$f(x) = \ln(x) \tag{17.116}$$

pour tout $x \in [\frac{1}{2} + \epsilon, 1]$. Mais nous avons vu que la fonction f était continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Étant donné que $\ln(x)$ et $f(x)$ sont deux fonctions continues sur $[\frac{1}{2}, 1]$ qui sont égales sur tout compact $[\frac{1}{2} + \epsilon, 1]$, nous déduisons que ces deux fonctions sont en réalité égales sur tout l'entièreté du compact $[\frac{1}{2}, 1]$.

En particulier, en $x = \frac{1}{2}$, nous avons

$$f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n = \ln(1/2) = -\ln(2). \tag{17.117}$$

□

[18] Vu que la série des $(1+\epsilon)^n$ diverge, en fait le rayon de convergence de $\tilde{f}$ est exactement égal à 1, mais ce n'est pas indispensable ici.

17.2.4 Critère de comparaison

Voici un critère de comparaison pour les séries entières.

PROPooJCQTooBlinDm

Proposition 17.42 ([1])**.**
Soit R_a le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Si $|b_n| \leqslant |a_n|$ pour tout n, alors le rayon de convergence R_b de $\sum_n b_n z^n$ vérifie $R_b \geqslant R_a$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_a$. Alors la série $\sum_n |a_n z^n|$ converge par le critère d'Abel 17.18. Vu que $|b_n z^n| \leqslant |a_n z^n$, le critère de comparaison 12.179 dit que $\sum_n |b_n z^n|$ converge. La proposition 17.19 dit alors que $R_b \geqslant |z|$. Comme cela est valable pour tout $|z| < R_a$, nous concluons que $R_b \geqslant R_a$. □

17.2.5 Convergence normale

Théorème 17.43.
Une série entière converge normalement sur tout disque fermé inclus au disque de convergence.

Démonstration. Toute boule fermée incluse à $B(0,R)$ est incluse à la boule $\overline{B(0,r)}$ pour un certain $r < R$. Nous nous concentrons donc sur une telle boule fermée.

Pour chaque n nous posons $u_n(z) = a_n z^n$ que nous voyons comme une fonction sur $\overline{B(0,r)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \overline{B(0,r)}$ nous avons

$$\|u_n\|_\infty \leqslant |a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n. \tag{17.118}$$

Étant donné que $r < R$ la série $\sum_n |a_n| r^n$ converge et la série $\sum_n \|u_n\|$ est convergente. La série $\sum_n a_n z^n$ est alors normalement convergente. □

Exemple 17.44.
Encore une fois nous n'avons pas d'informations sur le comportement au bord. Par exemple la série $\sum_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, mais $\sup_{z \in B(0,1)} |z^n| = 1$ et nous n'avons pas de convergence normale sur la boule fermée. △

La convergence normale n'est donc pas de mise sur tout l'intérieur du disque de convergence. La continuité, par contre est effective sur la boule. En effet si $z_0 \in B(0,R)$ alors il existe un rayon $0 < r < R$ tel que $B(z_0, r) \subset B(0,R)$. Sur $B(z_0,r)$ nous avons convergence normale et donc continuité en z_0.

La différence est que la continuité est une propriété locale tandis que la convergence normale est une propriété globale.

Proposition 17.45.
Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ avec un rayon de convergence R. Si $\sum |a_n| R^n$ converge alors

(1) la série $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B(0,R)}$,

(2) f est continue sur $\overline{B(0,R)}$.

Démonstration. La conclusion est claire dans l'intérieur du disque de convergence. En ce qui concerne le bord, chacune des sommes partielles est une fonction continue. De plus nous avons $\|u_n\| \leqslant |a_n| R^n$, dont la série converge. Par conséquent nous avons convergence normale sur le disque fermé. □

Le théorème suivant permet de donner, dans le cas de fonctions réelle, des informations sur la convergence en une des deux extrémités de l'intervalle de convergence.

ThoLUXVjs

Théorème 17.46 (Convergence radiale de Abel)**.**
Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série réelle de rayon de convergence $0 < R < \infty$.

(1) Si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue sur $[0,R]$.

(2) Si $\sum_n a_n (-R)^n$ converge, alors f est continue sur $[-R,0]$.

La proposition 17.114 donnera un exemple d'utilisation pour la série de $\ln(1-x)$ (qui n'est pas encore définie à ce moment).

Le résultat suivant permet d'identifier deux séries complexes lorsque leurs valeurs sur $\mathbb{R}$ sont identiques.

PROPooQLWTooCJYcP1

Proposition 17.47.
Soient les séries $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ convergentes dans $B(0,R)$. Si $f(x) = g(x)$ pour $x \in [0,R[$ alors $a_n = b_n$.

Démonstration. Soit n_0 le plus petit entier tel que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Pour tout $z \in B(0,R)$ nous avons

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n = z^{n_0} \varphi(z) \tag{17.119}$$

où

$$\varphi(z) = \sum_{n \geqslant 0} (a_{n+n_0} - b_{n+n_0}) z^n. \tag{17.120}$$

Par le théorème 17.22 le rayon de convergence de φ est plus grand que R et la fonction φ est continue en 0. Étant donné que $\varphi(0) = a_{n_0} - b_{n_0} \neq 0$ et que φ est continue nous avons un ρ tel que $\varphi \neq 0$ sur $B(0,\rho)$. Or cela n'est pas possible parce que au moins sur la partie réelle de cette dernière boule, φ doit être nulle. □

PropSNMEooVgNqBP

Proposition 17.48 ([557, 1]).
Si la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R alors

(1) La somme est une fonction holomorphe[19] *dans le disque de convergence.*

ItemUULDooEGRNiA

(2) La somme est différentiable et

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} z. \tag{17.121}$$

ITEMooHENIooRQCZwA

(3) De plus pour tout $z_0 \in B(0,R)$, on pose[20]

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \tag{17.122a}$$

$$T(z) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \tag{17.122b}$$

Alors nous avons

$$\lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = T(z_0). \tag{17.123}$$

EqVQDPooQPICwN

Démonstration. Nous allons prouver, en utilisant le théorème 17.9, que la somme est une fonction différentiable et que la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. La proposition 14.346 nous dira alors que la somme est $\mathbb{C}$-dérivable.

Nous posons $u_n(z) = a_n z^n$, qui est une fonction de classe C^1. En ce qui concerne sa différentielle nous considérons $z_0 \in B(0,R)$ et nous avons (si $n = 0$ alors la différentielle est nulle)

$$(du_n)_{z_0}(z) = \frac{d}{dt}\Big[u_n(z_0 + tz)\Big]_{t=0} \tag{17.124a}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[a_n (z_0 + tz)^n\Big]_{t=0} \tag{17.124b}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[n a_n (z_0^{n-1} tz)\Big]_{t=0} \tag{17.124c}$$

$$= n a_n z_0^{n-1} z. \tag{17.124d}$$

En cours de calcul nous avons développé $(z_0 + tz)^n$ et gardé seulement les termes de degré 1 en t. Il y en a n et ils sont tous égaux à $z_0^{n-1} tz$.

La convergence simple $\sum_n u_n$ est dans les hypothèses. Il reste à prouver que la somme des différentielles converge uniformément sur tout compact autour de z_0 ne débordant pas du disque ouvert de convergence. Soit K un compact autour de z_0. Dans le calcul suivant nous utilisons une première fois la norme uniforme de du_n vu comme fonction de K vers $\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et une fois la norme opérateur[21] de $(du_n)_{z_0}$ comme application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\|du_n\|_k = \sup_{z_0 \in K} \|(du_n)_{z_0}\| \tag{17.125a}$$

$$= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} |(du_n)_{z_0}(z)| \tag{17.125b}$$

$$= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} |n a_n z_0^{n-1} z| \tag{17.125c}$$

$$= \sup_{z_0 \in K} n|a_n||z_0|^{n-1}. \tag{17.125d}$$

[19] Définition 14.339.
[20] Pour rappel, dans tout ce texte, $B(a,r)$ est une boule *ouverte*.
[21] Définition 12.76.

Vu que $z \mapsto |z|^{n-1}$ est une application continue sur le compact K, elle atteint son maximum (théorème 9.215). Nous considérons z_K, un point qui réalise le supremum. Ce nombre est dans le disque de convergence parce que K est un compact autour de z_0.

Nous devons prouver que $\sum_n n|a_n||z_K|^{n-1}$ converge. Vu que $|z_K|$ est une constante (par rapport à n) nous pouvons étudier la convergence en écrivant $|z_K|^n$ au lieu de $|z_K|^{n-1}$.

La suite $(a_n|z_K|^n)$ est une suite bornée. En considérant un majorant M de $\{|a_n|r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons en particulier $|a_n||z_K|^n < M$ pour tout n. Nous considérons de plus r de telle sorte que $K \subset B(0,r) \subset B(0,R)$. En particulier $|z_K| < r$ et nous avons

$$n|a_n||z_K|^n \leqslant n|a_n|r^n \left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n \leqslant nM \left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n. \tag{17.126}$$

Nous savons que ce qui est dans la parenthèse est plus petit que 1, mais que $\sum_n nx^n$ converge dès que $|x| < 1$. Par conséquent

$$\sum_n \|du_n\|_K \tag{17.127}$$

converge et le théorème 17.9 fonctionne : $du = \sum_{n=1}^{\infty} du_n$ et la somme $\sum_n u_n$ est de classe C^1.

La différentielle de $\sum_n u_n$ s'exprime explicitement par

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1} z. \tag{17.128}$$ EqJBFMooMiSABz

Cette forme montre que du_{z_0} est une application $\mathbb{C}$-linéaire et donc la somme est $\mathbb{C}$-dérivable par la proposition 14.346. Ergo holomorphe sur le disque de convergence par définition 14.339.

En ce qui concerne la formule (17.123), elle provient de la formule (14.949) : $f'(z_0)$ est donné par la facteur multiplicatif de du_{z_0}. En l'occurrence la formule (17.128) nous donne

$$f'(z_0) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z_0^{n-1}. \tag{17.129}$$

□

17.2.6 Unicité

PROPooVUEYooYemzhe

Proposition 17.49 ([1]).
Soit un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{C}$ de 0. Soit une application $f\colon U \to \mathbb{C}$ pouvant être écrite sous les formes

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \tag{17.130}$$

pour tout $z \in U$. Alors $a_k = b_k$ pour tout k.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour $k = 0$**

Nous avons tout de suite $f(0) = a_0$ et $f(0) = b_0$ et donc $a_0 = b_0$. Celle-là, elle était facile.

(2) **Pour $k = 1$**

D'après la proposition 17.48(3), en posant $T(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$, nous avons

$$T(z_0) = \lim_{\xi\to z_0} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0}. \tag{17.131}$$

Prenons $z_0 = 0$ et posons

$$T_a(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1} \tag{17.132a}$$

$$T_b(z) = \sum_{n\geqslant 1} nb_n z^{n-1}. \tag{17.132b}$$

En réalité $T_a = T_b$ parce que $T_a(z)$ et $T_b(z)$ sont tous les deux données par $\lim_{\xi\to z} \big(f(\xi)-f(z)\big)/(\xi-z)$. En particulier $T_a(0) = T_b(0)$, et donc $a_1 = b_1$.

(3) **La récurrence** Nous posons

$$T_{a,k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}, \tag{17.133}$$

et nous allons prouver que si $T_{a,k}$ converge sur U, alors $T_{a,k+1}$ converge sur U et $T_{a,k+1}(z) = \lim_{\xi \to z} \big(T_{a,k}(\xi) - T_{a,k}(z)\big)/(\xi - z)$. Supposons donc que $T_{a,k}$ converge sur U. D'abord nous avons

$$T_{a,k}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k} \tag{17.134a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n. \tag{17.134b}$$ SUBEQooCKZXooDhdQrs

La proposition 17.48(3) appliqué à la série entière (17.134b) nous indique que

$$\lim_{\xi \to z} \frac{T_{a,k}(\xi) - T_{a,k}(z)}{\xi - z} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^{n-1} \tag{17.135a}$$ SUBEQooPVMNooHEppZ

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!} a_{n+k+1} z^n \tag{17.135b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!} a_{n+k+1} z^n \tag{17.135c}$$

$$= T_{a,k+1}(z). \tag{17.135d}$$

Tout cela est également valable pour $T_{b,k}$. Et par récurrence nous prouvons que $T_{a,k}(z) = T_{b,k}(z)$ parce qu'à chaque étape, c'est égal au membre de gauche de (17.135a). Nous avons $T_{a,k}(0) = k! a_k$ et $T_{b,k}(0) = k! b_k$, et donc $a_k = b_k$.

□

17.2.7 Dérivation

Les théorèmes de dérivation et d'intégration de séries de fonctions (théorèmes 17.1 et 17.3) fonctionnent bien dans le cas des séries entières. Ils donnent la proposition 17.50 pour la dérivation et 17.55 pour l'intégration.

ProptzOIuG

Proposition 17.50.
Soit la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{17.136}$$

de rayon de convergence R. Alors la fonction f est C^1 sur $]-R, R[$ et se dérive terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{17.137}$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

Démonstration. Nous savons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergente que celui de la série f. En particulier cette série des dérivées converge normalement sur tout compact dans $]-R, R[$ et la somme est continue. Le théorème 17.3 conclut. □

Remarque 17.51.
À part lorsqu'on parle de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notion de classe C^k s'entend au sens de la différentielle, et non de la dérivée, voir les définitions 12.317. C'est cela qui explique la structure de la démonstration de la proposition 17.48.

CorCBYHooQhgara

Corolaire 17.52 ([557, 1]).
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration. La proposition 17.48 a démontré en réalité nettement plus : sur le disque ouvert de convergence, la somme est une fonction holomorphe. Il n'est cependant pas possible de conclure ainsi parce que le fait qu'une fonction holomorphe est C^∞ ne sera démontré qu'au coût de nombreux efforts dans le théorème 28.62(3).

(1) **Cas réel** Nous considérons la série entière $\sum_n a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ de rayon de convergence R. Une simple récurrence sur la proposition 17.50 donne le résultat.

(2) **Cas complexe** Attention : le fait d'être de classe C^k est le fait d'être k fois *différentiable*. Rien à voir avec la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

En ce qui concerne la différentiabilité nous avons la proposition 17.48 qui dit que dans le disque de convergence, la fonction $u(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour différentielle l'application $du\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} du\colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ du_{z_0}(z) &= \big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n\big)z. \end{aligned} \tag{17.138}$$

Nous allons éviter de considérer la différentielle seconde comme une application

$$d^2u\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}\big(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})\big) \tag{17.139}$$

parce que ça nous mènerait trop loin pour parler de la différentielle k^{e}. Au lieu de cela nous allons considérer l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ z_0 &\mapsto \psi(z_0)z = z_0 z. \end{aligned} \tag{17.140}$$

Dans cette optique nous écrivons :

$$du_{z_0} = \psi\big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n\big) \tag{17.141}$$

ou encore :

$$(\psi^{-1} \circ d)u(z_0) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}z_0^n. \tag{17.142}$$

Nous allons prouver par récurrence que l'égalité suivante est vraie (y compris le fait que la somme converge) :

$$(\psi^{-1} \circ d)^k u(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}z_0^n. \tag{17.143}$$

Prouvons d'abord que cette somme converge pour tout k. Nous avons $(n+k)!/n! < (n+k)^k$ et donc il suffit de prouver que la série de coefficients $n^k a_n$ converge. C'est le cas par la proposition 17.33.

Nous pouvons calculer la différentielle de $(\psi^{-1} \circ d)^k u$ en dérivant terme à terme en utilisant (encore) la proposition 17.48(2) :

$$d\big((\psi^{-1} \circ d)^k u\big)_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}na_0^{n-1}z \tag{17.144a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n z. \tag{17.144b}$$

Nous appliquons ψ^{-1} à cela :

$$(\psi^{-1} \circ d)^{k+1}u(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n. \tag{17.145}$$

(3) **Dérouler à l'envers**

Nous allons maintenant utiliser la proposition 14.293 pour montrer que u est de classe C^k pour tout k. Nous avons démontré que $(\psi^{-1} \circ d)^k u$ était différentiable. Par conséquent, $d\big((\psi^{-1} \circ d)^{k-1}u\big)$ est différentiable et donc $(\psi^{-1} \circ d)^{k-1}$ est de classe C^1. En continuant ainsi, $(\psi^{-1} \circ d)^{k-l}u$ est de classe C^l et u est de classe C^k.

□

Le lemme suivant est encore essentiellement valable dans un espace de Banach (proposition 12.364).

LemPQFDooGUPBvF

Lemme 17.53.
Plusieurs choses sur des séries entières.

(1) *La série entière* $\sum_{n\geqslant 0} z^{nk}$ *a un rayon de convergence* 1 *et converge vers la fonction*

$$\sum_{n\geqslant 0} z^{nk} = \frac{1}{1-z^k}. \tag{17.146}$$

(2) *Lorsque* $|\omega| = 1$, *la série*

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{z^k}{\omega^{k+1}}. \tag{17.147}$$

EqSSHZooLwCBAZ

a un rayon de convergence égal à 1.

ITEMooHFVHooPCgzZV

(3) *Si* $|\omega| = 1$, *la série*

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+k-1)!}{s!} \frac{z^s}{\omega^{s+k+1}} \tag{17.148}$$

a un rayon de convergence égal à 1.

Démonstration. Les coefficients de la série sont $a_n = 1$ lorsque n est multiple de k et $a_n = 0$ autrement. Donc pour $r = 1$ la suite $r^n a_n$ reste bornée[22]. Cela prouve que le rayon de convergence est au moins 1. Par ailleurs si $r > 1$ alors clairement la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Cela prouve le rayon de convergence égal à 1.

Soit donc $z \in B(0,1)$. Nous avons, par le lemme 17.25,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{nk}\right)(1-z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{nk} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{17.149a}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{nk} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{17.149b}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{17.149c}$$

$$= 1 \tag{17.149d}$$

En ce qui concerne la série (17.147), elle s'obtient facilement :

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega}\right)^s = \sum_s \omega^{-s-1} z^s. \tag{17.150}$$

La troisième série s'obtient en dérivant la seconde, ce qui est permis dans le disque de convergence par la proposition 17.50. □

Remarque 17.54.
Sur le bord du disque de convergence, la série $\sum_n z^{nk}$ ne converge pas. En effet le rayon étant 1, sur le bord nous avons la série $\sum_n e^{ink\theta}$ dont la norme du terme général ne tend pas vers zéro.

17.2.8 Intégration

PropfeFQWr

Proposition 17.55.
Soit la série entière $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R.

(1) *Pour tout segment* $[a,b] \subset]-R,R[$ *nous pouvons intégrer terme à terme :*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx. \tag{17.151}$$

[22] Utilisation directe de la définition 17.12.

(2) *La série entière obtenue en intégrant terme à terme a le même rayon de convergence que celui de la série de départ.*

Démonstration. La première assertion est un cas particulier du théorème général 17.1. Pour le rayon de convergence, le lemme 17.36 fait le travail. □

Vu que le rayon de convergence ne varie pas par la dérivation ou par l'intégration et qu'une série entière est de classe C^∞ sur son disque de convergence, nous pouvons dériver terme à terme autant de fois que nous le voulons sans faire de fautes dans le disque de convergence.

17.3 Séries de Taylor

SECooDWRMooUKSuPh

17.56.
Avant de commencer, une petite formule de dérivation toute simple que nous allons utiliser souvent :

$$(z^k)^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \frac{k!}{(k-l)!} z^{k-l} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.152}$$

EqSQFdwhw

Dans les cas où il est permis de dériver terme à terme, nous avons la formule

$$f^{(p)}(x) = \sum_k a_k (x^k)^{(p)} = \sum_{k=p}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-p)!} x^{k-p} \tag{17.153}$$

EQooTNOMooIZClyE

17.3.1 Série de puissance

DEFooIXGBooPgJTzB

Définition 17.57 ([558]).
Soient des espaces de Banach[23] *E et F. Une **série de puissance** sur E à valeurs dans F est une application de la forme*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \tag{17.154}$$

où les α_n sont des applications

(1) *n-multilinéaire, c'est-à-dire $\alpha_n \in \mathcal{L}_n(E, F)$ (définition 10.1),*

(2) *symétrique,*

(3) *continue.*

En termes de notations, nous posons

$$\alpha_n(x) = \alpha(x, \dots, x) = \alpha_n x^n. \tag{17.155}$$

Notons toutefois que la dernière notation est particulièrement vicieuse parce que, si E est un espace de Banach, il n'y a pas de sens à multiplier des éléments de E entre eux.

Notons aussi que α_0 est une application 0-multilinéaire, c'est-à-dire juste un élément de F.

DEFooZUYHooDwwRfp

Définition 17.58 ([558]).
*Une série de puissance qui est une somme finie est un **polynôme**.*

17.59.
Nous avons deux définitions de polynômes. Une sur les espaces de Banach qui ne s'applique pas aux anneaux, et une sur les anneaux (3.228) qui ne s'applique pas aux espaces de Banach.

Entre les deux, je vous propose d'espérer que les deux définitions coïncident sur les espaces de Banach qui sont en même temps des anneaux. Typiquement $\mathbb{R}$.

DEFooCAWCooWHLpwl

Définition 17.60 ([1]).
*Soit une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k(x)$. Le **rayon de convergence** de $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est le nombre*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que la suite } (\alpha_k r^k)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } \mathcal{L}_k(E, F)\}. \tag{17.156}$$

[23] Définition 9.339.

17.3.2 Polynôme de Taylor d'une série entière

Le polynôme de Taylor d'une fonction définie par une série entière s'obtient en tronquant la série. Cela est une assez bonne nouvelle que nous allons démontrer maintenant.

PROPooQLHNooRsBYbe

Proposition 17.61 ([1]).
Soit une série entière[24]

$$f(x) = \sum_k a_k x^k \tag{17.157}$$

de rayon de convergence $R > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction α telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x)x^n \tag{17.158}$$

EQooSXUJooFjsVek

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0. \tag{17.159}$$

Tout ceci étant convenu que

- *l'égalité (17.158) est uniquement valable sur le disque de convergence,*
- *La fonction α dépend de n.*

Démonstration. Le corolaire 17.52 nous indique que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et que nous pouvons dériver terme à terme.

En utilisant la formule (17.153) et en l'évaluant en $x = x_0$, tous les termes s'annulent sauf $k = p$:

$$f^{(p)}(0) = p!a_p. \tag{17.160}$$

Le théorème de Taylor 14.486 nous indique alors qu'il existe $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x)x^n. \tag{17.161}$$

□

17.3.3 Une majoration pour le reste

LEMooOVPIooAPWFOm

Lemme 17.62.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois sur $B(a, R)$. Alors pour tout $x \in B(a, r)$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \cdots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n)du_n \dots du_1. \tag{17.162}$$

Démonstration. Nous allons intensivement utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 16.290 sous la forme de la formule (16.911). Nous avons d'abord

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u_1)du_1 = \int_a^x \big[f'(a) + \int_a^{u_1} f''(u_2)du_2\big]du_1. \tag{17.163}$$

Toute l'astuce de ce théorème est de continuer à substituer $f^{(k)}(t)$ par $f^{(k)}(a)$ plus une intégrale de a à t de $f^{(k+1)}(u)$. Nous démontrons ainsi par récurrence que

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \cdots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n)du_n \dots du_1. \tag{17.164}$$

EQooOWJMooHATpMV

La preuve de cela se fait en substituant

$$f^{(n)}(u_n) = f^{(n)}(a) + \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1})du_{n+1} \tag{17.165}$$

et en remarquant (encore par récurrence par exemple) que

$$\int_a^x \cdots \int_a^{u_{n-1}} du_n \dots du_1 = \frac{(x-a)^n}{n!}. \tag{17.166}$$

□

[24] Définition 17.57.

Le théorème suivant donne majoration du reste du polynôme de Taylor. Il est un premier pas dans la démonstration de formules comme

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{17.167}$$

lorsque P_n est un polynôme de Taylor autour d'un point $a \neq x$. Nous ne saurions trop insister sur le fait que de telles formules ne seraient valables que pour une classe relativement restreintes de fonctions.

THOooEUVEooXZJTRL

Théorème 17.63 (Inégalité de Taylor[559])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois et telle que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_n$ sur $B(a,d)$. Alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{17.168}$$

où $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ et où P_n sont les polynômes de Taylor autour de $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous pouvons écrire la formule du lemme 17.62 pour $n+1$ au lieu de n ; cela donne

$$f(x) = P_n(x) + \int \cdots, \tag{17.169}$$

et donc

$$|R_n(x)| = |P_n(x) - f(x)| = \int_a^x \ldots \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1}) du_{n+1} \cdots du_1 \tag{17.170}$$

En effectuant toutes les intégrales nous trouvons[25]

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}. \tag{17.171}$$

□

Cette formule pour le reste est très bien, mais pour l'exploiter au maximum de ses possibilités, il faudra la notion de convergence de suite de fonctions, et en particulier la notion de série de fonctions, pour pouvoir écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k \tag{17.172}$$

lorsque cela est possible. Nous renvoyons donc aux séries de Taylor, section 17.3, et en particulier aux fonctions analytiques de la sous-section 17.3.4.

17.3.4 Fonctions analytiques

SUBSECooXKHWooEzqGRJ

Fonction analytique : définition 14.479.

Nous avons vu les polynômes de Taylor et déjà noté qu'il n'est pas en général vrai que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ pour des x même proches du point autour duquel les polynômes de Taylor P_n sont calculés.

Nous allons maintenant étudier la classe des fonctions pour lesquelles la série de Taylor est égale à la fonction de départ. D'abord une proposition montrant que les coefficients de Taylor sont les seuls pour lesquels il est possible d'espérer avoir une telle propriété.

PROPooTRWVooETTtbP

Proposition 17.64 ([560])**.**
Soit une fonction donnée par la série entière

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \tag{17.173}$$

sur la boule de convergence $B(a,R)$ avec $R > 0$ (hypothèse : le rayon de convergence est strictement positif). Alors

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{17.174}$$

[25] Je me demande si je n'ai pas une faute entre n et $n+1$ quelque part. Relisez attentivement et écrivez-moi si vous trouvez une faute.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons un rayon de convergence $R > 0$, et le corolaire 17.52 nous indique que f y est de classe C^∞. Et nous pouvons dériver terme à terme par la proposition 17.50. Cela pour dire qu'il nous est autorisé d'utiliser la formule (17.153) pour calculer les dérivées de f au point a. Nous avons d'abord

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-p)!}(x-a)^{n-p}, \tag{17.175}$$

et donc

$$f^{(p)}(a) = c_p p! \tag{17.176}$$

qui donne immédiatement le résultat. □

Proposition 17.65.
Soit l'intervalle $I = B(a,r)$. Si il existe M tel que

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \tag{17.177}$$

pour tout $x \in B(a,r)$. Alors nous avons la convergence simple

$$P_n \to f \tag{17.178}$$

sur $B(a,r)$. Ici, P_n est le polynôme de Taylor d'ordre n pour la fonction f autour du point a.

Démonstration. Vu que nous avons $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n!$ pour tout x, nous pouvons poser

$$M_n = \frac{M}{r^n} n! \tag{17.179}$$

dans le théorème 17.63 pour le faire fonctionner. Nous avons alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = \frac{M}{n+1}|x-a|\left|\frac{x-a}{r}\right|^n. \tag{17.180}$$

Vu que $x \in B(a,r)$ nous avons $|x-a| < r$ et donc $|(x-a)/r|^n < 1$. Nous pouvons aussi majorer $|x-a|$ par r et écrire

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{rM}{n+1}. \tag{17.181}$$

Nous avons donc bien $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \to 0$. □

THOooEAYXooTvVYXN

Théorème 17.66 ([561]).
Soit une fonction analytique[26] *$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle. La partie*

$$X = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \neq 0\} \tag{17.182}$$

est discrète[27].

Démonstration. Nous supposons que X n'est pas discret et nous prouvons que $f = 0$. Soit une suite convergente $a_i \to a$ avec $a_i \in X$. Étant donné que f est analytique en a, nous avons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{17.183}$$

et nous prouvons par induction que $f^{(n)}(a) = 0$.

D'abord $f(a) = 0$ parce que f est continue, et $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_i)$.

Ensuite nous supposons que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k < n$. Nous avons

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \tag{17.184a}$$

$$= \dots \tag{17.184b}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \tag{17.184c}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}, \tag{17.184d}$$

[26] Définition 14.479.
[27] Définition 9.29.

parce que chaque étape est une indétermination du type 0/0 sur laquelle nous pouvons utiliser la règle de L'Hôpital[28]. Par continuité de $f^{(n)}$, nous avons prouvé que $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^n$ existe et vaut

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{17.185}$$

En particulier, nous pouvons calculer cette limite sur la suite de a_i :

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\lim_{i\to\infty}\frac{f(a_i)}{(a_i-a)^n}=0. \tag{17.186}$$

Nous avons donc bien prouvé que $f^{(n)}(a)=0$. □

17.4 Algèbre engendrée par une matrice

Nous allons en dire le strict minimum indispensable pour notre propos. Pour plus de détails, voir [562], et pour nettement plus de détails, [563].

DEFooXPFVooZzPXEK

Définition 17.67.
*Si $A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, alors l'**algèbre engendrée** par A est l'intersection de toutes les sous-algèbres de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ contenant A.*

LEMooZGFYooOHvxLy

Lemme 17.68 ([562, 1])**.**
Si le polynôme minimal[29] de A est de degré p, alors la partie $\{\mathbb{1},A,A^2,\dots,A^{p-1}\}$ est une base de Alg(A).

Démonstration. La partie proposée est libre parce qu'une combinaison linéaire de ses éléments est un polynôme de degré $p-1$ en A. Une annulation d'un tel polynôme serait contraire au fait que le polynôme minimal est de degré p.

Cette partie est génératrice parce que, étant elle-même une sous-algèbre de $\mathbb{M}(n)$ contenant A, elle contient Alg(A). □

CORooQTUQooDtjljc

Corolaire 17.69 ([1])**.**
L'algèbre Alg(A) *est commutative.*

Démonstration. Écrire deux combinaisons linéaires d'éléments de la base donnée par le lemme 17.68, et notez que les produits ne font intervenir que des produits de A. □

Une bonne question est de savoir si e^{tA} est dans Alg(A). Pour le savoir il va falloir d'abord définir l'exponentielle ; rendez-vous donc au lemme 17.72.

17.5 Exponentielle sur une algèbre normée

17.5.1 Définition

Dans ce qui suit, nous considérons une algèbre commutative.

DEFooSFDUooMNsgZY

Proposition-Définition 17.70 (Exponentielle[1])**.**
Soit $(A,\|.\|)$ une algèbre[30] commutative de dimension finie sur $\mathbb{C}$ munie d'une norme d'algèbre. Pour $x\in A$ nous définissons

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \tag{17.187}$$

EQooCUVTooGNQrFj

Cette définition a les propriétés suivantes :

(1) C'est bien défini pour tout $x\in A$. C'est-à-dire que pour chaque x, la série (17.187) converge.

(2) Cela donne une application continue $\exp\colon A\to A$.

ITEMooGGVAooVfhGuu

(3) La fonction exp *est différentiable et*

$$(d\exp)_x(y)=\exp(x)y, \tag{17.188}$$

EQooKWBUooLUdBAw

le dernier produit étant la structure d'algèbre sur A.

[28] Proposition 14.220.
[29] Toute matrice a un polynôme minimal par le lemme 10.94.
[30] Définition 3.111.

Démonstration. Pour la différentiabilité de exp, nous voulons utiliser le théorème 17.9. Pour cela nous posons

$$u_k(x) = \frac{x^k}{k!} \tag{17.189}$$

(1) **Convergence simple** Nous prouvons la convergence simple, c'est-à-dire pour chaque x séparément, de la série (17.187) dans deux buts. D'abord de nous assurer que la définition posée de exp a un sens, et ensuite pour commencer à vérifier les hypothèses du théorème 17.9.

Nous montrons que les sommes partielles forment une suite de Cauchy. Nous fixons $x \in A$ et nous posons

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \tag{17.190}$$

Soient $p > q$, deux entiers. Nous avons :

$$\|s_p - s_q\| = \| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{x^k}{k!} \| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x\|^k}{k!} \tag{17.191}$$

où nous avons utilisé le fait que la norme sur A soit une norme d'algèbre.

C'est le moment d'utiliser la série exponentielle donnée dans le lemme 12.187 que nous appliquons avec $t = \|x\|$. La série donnée par les coefficients $a_k = \|x\|^k/k!$ converge et ses sommes partielles forment en particulier une suite de Cauchy. Donc ce que nous avons à droite dans (17.191) peut être rendu arbitrairement petit lorsque p et q sont grands.

(2) **u_k est continue** Il s'agit de remarquer que $(x+h)^k = x^k + hC(x,h)$ où C est une fonction bornée de h (lorsque h est dans un voisinage de $0 \in A$). Donc

$$\|(x+h)^k - x^k\| \leqslant \|h\|\|C(x,h)\| \to 0. \tag{17.192}$$

(3) **Candidat différentielle de u_k** Nous trouvons à présent un candidat à être différentielle de u_k. Pour cela nous faisons le calcul suivant, sans trop nous soucier de la rigueur :

$$(du_k)_x(y) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(x+ty)\Big]_{t=0} = k\frac{1}{k!}x^{k-1}y = u_{k-1}(x)y. \tag{17.193}$$

(4) **u_k est différentiable** Nous fixons $x \in A$ et nous posons $T(y) = u_{k-1}(x)y$. Ensuite nous vérifions que cela vérifie la définition de la différentielle : nous devons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_k(x+h) - u_k(x) - T(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k - kx^{k-1}h}{k!\|h\|} = \clubsuit. \tag{17.194}$$

Vous vous souvenez de la formule pour $(x+h)^k$? Essayez de vous en souvenir. Le premier terme est x^k, et le second est $kx^{k-1}h$. Pour le reste c'est un polynôme dont tous les termes contiennent au moins h^2. Nous avons donc

$$\clubsuit = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 P(x,h)}{k!\|h\|} = 0. \tag{17.195}$$

Nous en concluons que u_k est différentiable et que

$$(du_k)_x(y) = u_{k-1}(x)y. \tag{17.196}$$

(5) **u_k est de classe C^1** Nous devons démontrer que la différentielle est continue ; cela est la continuité de l'application

$$\begin{aligned} du_k \colon A &\to \mathcal{L}(A,A) \\ x &\mapsto (du_k)_x. \end{aligned} \tag{17.197}$$

La topologie sur A est celle de la norme, et celle sur $\mathcal{L}(A,A)$ est celle de la norme opérateur associée à la norme sur A. Nous avons[31] :

$$\lim_{h\to 0} \|(du_k)_{x+h} - (du_k)_x\| = \lim_{h\to 0} \sup_{\|y\|=1} \|u_{k-1}(x+h)y - u_{k-1}(x)y\| \tag{17.198a}$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0} \sup_{\|y\|=1} \|u_{k+1}(x+h) - u_{k-1}(x)\|\|y\| \tag{17.198b}$$

$$= \lim_{h\to 0} \|u_{k+1}(x+h) - u_{k-1}(x)\|. \tag{17.198c}$$

Le fait que cette limite vaille zéro est maintenant la continuité de u_{k-1}.

[31] N'oubliez pas de faire à part le cas $k = 0$ parce que ce qui suit n'est correct que pour $k \geqslant 1$.

(6) **Convergence normale sur tout compact**

Soit un compact K de A. Par le théorème de Borel-Lebesgue 11.23, K est fermé et borné. C'est pour ceci que nous avons supposé que A était de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit donc $R > 0$ tel que $\|y\| < R$ pour tout $y \in K$. Nous avons

$$\|du_k\|_K = \sup_{x\in K} \|(du_k)_x\| = \sup_{x\in K} \frac{\|x^{k-1}\|}{(k-1)!} \leqslant \sup_{x\in K} \frac{\|x\|^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{17.199}$$

Mais la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ converge. Nous avons donc la convergence normale demandée.

(7) **Conclusion**

Le théorème 17.9 conclut que l'exponentielle est de classe C^1 et que sa différentielle est donnée par la formule

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (du_k)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)y = \exp(x)y. \tag{17.200}$$

Notez le jeu d'indices : $du_k = 0$ lorsque $k = 0$ (ce qui permet de faire commencer la somme à 1) et ensuite du_k fait intervenir u_{k-1} (ce qui fait revenir le départ de la somme à $k = 0$).

□

17.71.
Lorsque nous disons que la différentielle de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même, nous référons au point 17.70(3) : la différentielle de exp en x est l'opérateur de multiplication par $\exp(x)$.

Nous pouvons comprendre maintenant que exp est même de classe C^∞ parce qu'à chaque différentiation nous tombons sur la même fonction, laquelle est de classe au moins C^1.

Cependant, pour formaliser ça, il faut un peut travailler. Le cauchemar des différentielles successives d'une application $A \to A$ est que les espaces en jeu sont des emboîtements terribles de $\mathcal{L}(A, \mathcal{L}(A, \mathcal{L}(A, A)))$.

Ce qui nous sauve est que l'espace $\mathcal{L}(A, V)$ est un A-module, quel que soit V. En particulier lorsque V est lui-même déjà un emboîtement. Faisons un lemme pour voir comment ça fonctionne.

LEMooCEVGooFVXndZ

Lemme 17.72 ([1]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous considérons l'algèbre $\mathrm{Alg}(A)$ engendrée par A[32]. Alors

$$e^{\mathrm{Alg}(A)} \subset \mathrm{Alg}(A). \tag{17.201}$$

Démonstration. Le lemme 17.68 nous dit que $\mathrm{Alg}(A)$ est une algèbre de dimension finie. Elle est commutative par le corolaire 17.69. Donc la proposition 17.70 s'applique. □

17.5.2 Différentielles

LEMooHKQVooQTrHHW

Lemme 17.73 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés E et V tels que V soit un E-module[33]*. Nous supposons les normes soient telles que $\|xv\|_V \leqslant \|x\|_E\|v\|_V$.*

Soit une fonction différentiable $f : E \to V$ telle que la différentielle $df : E \to \mathcal{L}(E, V)$ soit de la forme

$$df_x(y) = yg(x) \tag{17.202}$$

pour une certaine fonction différentiable $g : E \to V$.

Alors f est C^1, et deux fois différentiable telle que

$$\begin{aligned} d^2f &: E \to \mathcal{L}\big(E, \mathcal{L}(E, V)\big) \\ (d^2f)_x(y)z &= z(dg_x)(y) \end{aligned} \tag{17.203}$$

pour tout $x, y, z \in E$.

Démonstration. En plusieurs étapes.

[32] Définition 17.67.
[33] Définition 3.94.

(1) *f est C^1* Nous savons, par hypothèse, que f est différentiable. Il faut montrer que sa différentielle est continue, en remarquant déjà que g est continue parce que différentiable.

Soit $x_k \xrightarrow{E} x$, et calculons $\|df_{x_k} - df_x\|$:

$$\begin{aligned}\|df_{x_k} - df_x\| &= \sup_{\|y\|=1} \|df_{x_k}(y) - df_x(y)\| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \|\big(g(x_k) - g(x)\big)y\| \\ &\leqslant \sup_{\|y\|=1} \|g(x_k) - g(x)\|\|y\| \\ &= \|g(x_k) - g(x)\|.\end{aligned} \tag{17.204}$$

Donc nous avons bien $df_{x_k} \xrightarrow{\mathcal{L}(E,V)} df_x$, ce qui signifie la continuité de df. Donc f est de classe C^1.

(2) *f est deux fois différentiable*

Pour montrer que df est différentiable, nous mettons directement dans la définition (12.296) le candidat

$$\begin{aligned}T_x(h)\colon R &\to V \\ T_x(h)z &= z dg_x(y).\end{aligned} \tag{17.205}$$

Nous devons vérifier la limite suivante :

$$\lim_{h \xrightarrow{E} 0} \frac{df_{x+h} - df_x - T_x(h)}{\|h\|} = 0. \tag{17.206}$$

EQooTBCKooBxBCum

Étudions la norme du numérateur :

$$\|df_{x+h} - df_x - T_x(h)\| = \sup_{\|y\|=1} \|df_{x+h}(y) - df_x(y) - T_x(h)y\| \tag{17.207a}$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \|yg(x+h) - yg(x) - y dg_x(h)\| \tag{17.207b}$$

$$\leqslant \sup_{\|y\|=1} \|y\|\|g(x+h) - g(x) - dg_x(h)\|. \tag{17.207c}$$

La limite (17.206) se déduit donc de la différentiabilité de g.

Note : la partie démontrant que f est C^1 n'est pas strictement obligatoire parce qu'en vérifiant que f est deux fois différentiable, nous vérifions de facto que df est en particulier continue. □

LEMooTUWQooMCCDcm

Lemme 17.74 ([1])**.**
Soient des algèbres normées A et V telles que V soit un A-module vérifiant $\|xv\| \leqslant \|x\|\|v\|$ pour tout $x \in A$ et $v \in V$. Alors $\mathcal{L}(A,V)$ est un A-module vérifiant $\|x\alpha\| \leqslant \|x\|\|\alpha\|$ pour tout $x \in A$ et $\alpha \in \mathcal{L}(A,V)$.

Démonstration. C'est un simple calcul utilisant la norme opérateur :

$$\|x\alpha\| = \sup_{\|y\|=1} \|(x\alpha)y\| = \sup_{\|y\|=1} \|x\alpha(y)\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|\alpha(y)\| = \|x\| \sup_{\|y\|=1} \|\alpha(y)\| = \|x\|\|\alpha\|. \tag{17.208}$$

□

PROPooTBDAooQouzSk

Proposition 17.75 ([1])**.**
La fonction $\exp\colon A \to A$ *est de classe C^∞ et vérifie, pour tout $k \geqslant 1$ la récurrence*

$$(d^k \exp)_x(y) = y(d^{k-1}\exp)_x. \tag{17.209}$$

Démonstration. La formule proposée fonctionne avec $k = 1$:

$$(d\exp)_x(y) = y\exp(x). \tag{17.210}$$

C'est la relation 17.188.

Nous considérons $k > 1$, nous supposons que exp est de classe C^{k-1} et k fois différentiable. Nous allons prouver que exp est alors de classe C^k et $k+1$ fois différentiable, et que la différentielle de $d^k \exp$ est donné par la formule

$$(d^{k+1}\exp)_x(y) = y(d^k \exp)_x. \tag{17.211}$$

Pour nous mettre au clair avec les espaces en présence, nous supposons que

$$d^{k-1}\exp\colon A\to\mathcal{L}(A,V) \tag{17.212a}$$
$$d^{k}\exp\colon A\to\mathcal{L}\big(A,\mathcal{L}(A,V)\big) \tag{17.212b}$$

pour un certain espace vectoriel normé V, lequel est un de ces terrifiants emboîtement de type $\mathcal{L}\Big(A,\mathcal{L}\big(A,\mathcal{L}(A,A)\big)\Big)$. Il est bien un espace vectoriel normé, et également un A-module parce qu'on peut toujours définir la multiplication d'un élément $v\in V$ par un élément $x\in A$ comme étant la multiplication par x du résultat final de l'évaluation emboîtée, laquelle se termine par un élément de A. Donc tout se met bien.

Quoi qu'il en soit, nous posons

$$T_x(y)=y(d^k\exp)_x \tag{17.213}$$

et nous vérifions ce que cela donne dans la définition de la différentielle. Si nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{(d^k\exp)_{x+h}-(d^k\exp)_x-T_x(h)}{\|h\|}=0 \tag{17.214}$$

alors nous aurons prouvé tout ce qu'il nous faut.

Le numérateur est une application $A\to\mathcal{L}(A,V)$; nous en écrivons la norme comme il se doit :

$$\|(d^k\exp)_{x+h}-(d^k\exp)_x-T_x(h)\|=\sup_{\|y\|=1}\|(d^k\exp)_{x+h}(y)-(d^k\exp)_x(y)-h(d^k\exp)_xy\| \tag{17.215a}$$
$$=\sup_{\|y\|=1}\|y(d^{k-1}\exp)_{x+h}-y(d^{k-1}\exp)_x-h(d^k\exp)_xy\| \tag{17.215b}$$
$$=\sup_{\|y\|=1}\|y(d^{k-1}\exp)_{x+h}-y(d^{k-1}\exp)_x-hy(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{17.215c}$$
$$\leqslant\|(d^{k-1}\exp)_{x+h}-(d^{k-1}\exp)_x-h(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{17.215d}$$
$$=\|(d^{k-1}\exp)_{x+h}-(d^{k-1}\exp)_x-(d^k\exp)_x(h)\|. \tag{17.215e}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé le lemme 17.74 et $T_x(h)y=h(d^k\exp)_xy$. Maintenant, la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|(d^{k-1}\exp)_{x+h}-(d^{k-1}\exp)_x-(d^k\exp)_x(h)\|.}{\|h\|} \tag{17.216}$$

n'est rien d'autre que la limite arrivant dans la définition du fait que $d^k\exp$ est la différentielle de $d^{k-1}\exp$. Cette limite est donc zéro comme nous voulions le prouver. □

Le théorème suivant est très important parce qu'il permet de définir l'exponentielle d'une matrice. Et les exponentielles de matrices sont utiles, entre très nombreuses autres choses pour résoudre certaines équations différentielles.

THOooFGTQooZPiVLO

Théorème-Définition 17.76 ([1]).
Soit une algèbre normée A (pas spécialement commutative). La formule

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{17.217}$$

définit une fonction différentiable dont la différentielle est donnée par[34]

$$(d\exp)_x(y)=\sum_{i,j\in\mathbb{N}}\frac{x^iyx^j}{(i+j+1)!} \tag{17.218}$$

EQooFGPPooZKHoXU

17.77.
Nous ne démontrons pas cela ici.

Il s'agit d'une adaptation de la proposition 17.70. Là où il faut faire attention, c'est dans l'équation (17.194) : il n'y a pas k termes $x^{k-1}h$ dans $(x+h)^k$, mais k termes de la forme x^ihx. C'est pour cela que la différentielle n'est pas donnée par $T(y)=u_{k-1}(x)y$, mais bien par la somme (17.218).

M'est avis en réalité que toute la démonstration du théorème 17.170 passe facilement au cas présent.

[34] La fonction exponentielle est, j'en suis quasiment certain, de classe C^∞. Si vous connaissez un moyen pas trop douloureux de prouver cela, faites-le moi savoir.

17.5.3 Exponentielle de matrice

SECooBYQBooZifJsg

Proposition 17.78 ([564]).
Soient des matrices $A, P \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telle que P soit inversible. Alors[35]

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P. \tag{17.219}$$

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ nous avons $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$. Ensuite,

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_k \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_k \frac{P^{-1}A^kP}{k!} = P^{-1}\sum_k \frac{A^k}{k!}P. \tag{17.220}$$

Nous avons utilisé la proposition 12.177 pour sortir P^{-1} à gauche et P à droite de la somme. □

PROPooFLHPooRhLiZE

Proposition 17.79 ([564]).
L'exponentielle de matrice vérifie

ITEMooCVALooEfLQCyI

(1) $e^0 = \mathrm{Id}$

ITEMooNGPWooIyPEQt

(2) $A^m e^A = e^A A^m$

ITEMooEOSMooQWjcjA

(3) $\exp(A)^t = \exp(A^t)$

ITEMooROPJooMarenu

(4) Si $AB = BA$ alors $Ae^B = e^BA$ et $e^Ae^B = e^Be^A$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Juste substituer $A = 0$ dans la définition. Tous les termes tombent sauf le premier. Il faut utiliser le fait que $A^0 = \mathrm{Id}$.

(2) **Pour (2)** Il faut utiliser la proposition 12.177 pour écrire

$$A^m\sum_k \frac{A^k}{k!} = \sum_k \frac{A^mA^k}{k!} = \sum_k \frac{A^kA^m}{k!} = \sum_k \frac{A^k}{k!}A^m. \tag{17.221}$$

EQooLUUVooCtUtIC

(3) **Pour (3)** Pour chaque k nous avons l'égalité $(A^k)^t = (A^t)^k$. En utilisant encore le coup de la queue de suite qui converge vers zéro,

$$\| \sum_{k=0}^{N} \frac{(A^t)^k}{k!} - (e^A)^t \| = \| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(A^t)^k}{k!} \| \to 0. \tag{17.222}$$

(4) **Pour (4)** Pour prouver $Ae^B = e^BA$, c'est le même genre de manipulations que (17.221).
Maintenant, vu que A et e^B commutent, l'égalité à peine prouvée montre que e^A et e^B commutent.

□

PROPooKDKDooCUpGzE

Proposition 17.80 ([564]).
Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ ainsi que $s, t \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}. \tag{17.223}$$

Démonstration. Nous calculons le produit $e^{sA}e^{tA}$ par le produit de Cauchy de la proposition 12.178 :

$$\clubsuit = \left(\sum_k \frac{t^k}{k!}A^k\right)\left(\sum_l \frac{s^l}{l!}A^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!}\frac{s^{n-m}}{(n-m)!}A^n. \tag{17.224}$$

À ce point, nous multiplions et divisons par $n!$ et nous réarrangeons la somme de la façon suivante :

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}t^ms^{n-m}. \tag{17.225}$$

Nous reconnaissons la somme sur m comme étant un binôme de Newton[36] pour $(t+s)^n$. Nous avons donc finalement

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big((t+s)A\big)^n}{n!} = e^{(t+s)A}. \tag{17.226}$$

□

[35] La définition de l'exponentielle de matrice est 17.70 où la convergence de la somme est celle de la norme opérateur 12.76.
[36] Proposition 3.75.

La proposition suivante dit que les exponentielles de matrices sont inversibles. Elle ne dit pas que toutes les matrices inversibles sont des exponentielles. Ce sera la proposition 17.150.

PROPooRERRooMutKcg

Proposition 17.81 ([564]).
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$, alors e^A est inversible et

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{17.227}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $s = 1$ et $t = -1$ dans la proposition 17.80 et nous avons

$$e^A e^{-A} = e^0 = \mathbb{1}. \tag{17.228}$$

Cela prouve que e^A est inversible et que son inverse est e^{-A}. □

PROPooSDNNooQtHkhA

Proposition 17.82 ([564, 1]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{C})\\ t &\mapsto e^{tA}.\end{aligned} \tag{17.229}$$

Nous avons la formule de dérivation

$$\varphi'(t) = Ae^{tA}. \tag{17.230}$$

Démonstration. L'application φ est une fonction composée de

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ t &\mapsto tA\end{aligned} \tag{17.231}$$

et

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A &\mapsto e^A.\end{aligned} \tag{17.232}$$

Et nous avons $\varphi = \exp \circ f$. Il y a un choix difficile à faire. Soit nous travaillons dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et nous allons devoir invoquer le théorème 17.76, soit nous travaillons dans l'algèbre $\mathrm{Alg}(A)$ engendrée par A (définition 17.67) qui est une algèbre commutative[37] qui nous permet de n'utiliser que 17.188, qui est quand même plus basique.

Coup de théâtre, nous prenons la seconde solution et nous réécrivons les fonctions f et exp de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{Alg}(A)\\ t &\mapsto e^{tA}\end{aligned} \tag{17.233}$$

se décompose en

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{Alg}(A)\\ t &\mapsto tA\end{aligned} \tag{17.234}$$

et

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathrm{Alg}(A) &\to \mathrm{Alg}(A)\\ A &\mapsto \exp(A).\end{aligned} \tag{17.235}$$

Le fait que ces applications soient bien définies est le lemme 17.72 qui assure que les espaces d'arrivée sont bien dans $\mathrm{Alg}(A)$. Et c'est parti pour le calcul :

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= d\varphi_u(1) && \text{SUBEQooFDPQooBzTDXF (17.236a)}\\ &= d\exp_{f(u)}\big(df_u(1)\big) && \text{SUBEQooVOFWooDoTQGy (17.236b)}\\ &= \exp\big(f(u)\big)df_u(1) && \text{SUBEQooCILIooHsEDOE (17.236c)}\\ &= e^{uA}A && \text{SUBEQooBMAQooNtbzBI (17.236d)}\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour 17.236a. Pour la dérivée, nous utilisons le corolaire 14.271.
- Pour 17.236b. La règle de la différentielle en chaine du théorème 12.335.
- Pour 17.236c. La formule (17.188).

[37] Corolaire 17.69.

- Pour 17.236d. Parce que $f(u) = uA$ et que $df_u(1) = A$.

□

Le théorème suivant montre que le produit d'exponentielle de matrices suit la règle usuelle tant que les matrices commutent. Cela est cependant plutôt l'exception que la règle. À priori nous avons $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

THOooXCPEooYGyLOp

Théorème 17.83 ([564]).
Soient $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Alors

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{17.237}$$

Démonstration. Vu que A et B commutent nous avons $Ae^{tB} = e^{tB}A$ (proposition 17.79(4)). Ensuite nous posons

$$g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}. \tag{17.238}$$

Nous calculons la dérivée de g en utilisant la règle de Leibniz et la proposition 17.82 :

$$\begin{aligned} g'(t) = &(A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)}(-B)e^{-tB}e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)}e^{-tB}(-A)e^{-tA}. \end{aligned} \tag{17.239}$$

Vu que A, B et $A+B$ commutent, nous pouvons réarranger les facteurs en

$$\begin{aligned} g'(t) = &(A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Be^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Ae^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}. \end{aligned} \tag{17.240}$$

Enfin, cela fait

$$g'(t) = (A + B - B - A)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = 0. \tag{17.241}$$

Donc g est constante et nous avons

$$e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = g(0) = \mathbb{1}. \tag{17.242}$$

En multipliant à droite par $e^{tA}e^{tB}$ nous trouvons

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \tag{17.243}$$

comme annoncé. □

NORMooMYHYooEKbUlP

17.84.
Pour tout anneau normé A où cela a un sens, nous définissons

$$\begin{aligned} \phi\colon A &\to A \\ a &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}a^k \end{aligned} \tag{17.244}$$

PROPooCVIAooTovqVg

Proposition 17.85 ([1]).
À propos de la fonction ϕ[38].

ITEMooKNRIooJxHXDq

(1) Si $r \in \mathbb{R}^+$, alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}r^k \tag{17.245}$$

converge.

ITEMooUYJVooMYnesX

(2) Dans le cas de $A = \mathbb{C}$, nous avons

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}z^k = \frac{1 - e^{-z}}{z}. \tag{17.246}$$

Démonstration. Pour (1), c'est le critère des séries alternées 12.190 qui marche parce que $r^k/k! \to 0$.
Pour (2) … Si vous avez une idée, écrivez-moi. □

[38] De 17.84.

17.6 Exponentielle et logarithme dans les réels

Pour avoir une vue synthétique du plan, voir le thème 50.

17.6.1 L'équation différentielle

Pour la suite nous notons y une solution de l'équation $y' = y$, $y(0) = 1$, et nous allons en donner des propriétés indépendamment de l'existence, donnée par le théorème 17.88.

PropTLECooEiLbPP

Proposition 17.86.
Quelques propriétés de y (si elle existe) :

(1) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $y(x)y(-x) = 1$.*

(2) *$y(x) > 0$ pour tout x.*

(3) *y est strictement croissante.*

Démonstration. Nous posons $\varphi(x) = y(x)y(-x)$ et nous dérivons :

$$\varphi'(x) = y'(x)y(-x) - y(x)y'(-x) = 0. \tag{17.247}$$

Donc φ est constante[39]. Vu que $\varphi(0) = 1$ nous avons automatiquement $y(x)y(-x) = 1$ pour tout x.

Les deux autres allégations sont simples : si $y(x_0) < 0$ alors il existe $t \in]0, x_0[$ tel que $y(t) = 0$, ce qui est impossible parce que $y(t)y(-t) = 1$. La stricte croissance de y s'ensuit. □

PROPooGGUIooExVHPM

Proposition 17.87.
Quelques formules pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

ITEMooMPSUooWQpVQJ

(1) $y(a + b) = y(a)y(b)$

(2) $y(na) = y(a)^n$

(3) $y\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Démonstration. Nous posons $h(x) = y(a + b - x)y(x)$ et nous avons encore $h'(x) = 0$ dont nous déduisons que h est constante. De plus

$$h(0) = y(a + b)y(0) = y(a + b) \tag{17.248}$$

et

$$h(b) = y(a)y(b). \tag{17.249}$$

Vu que h est constante, ces deux expressions sont égales : $y(a + b) = y(a)y(b)$.

Forts de cette relation, une récurrence donne $y(na) = y(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus

$$y(a) = y\left(\frac{a}{n} \times n\right) = y\left(\frac{a}{n}\right)^n, \tag{17.250}$$

ce qui donne $y(a) = y(a/n)^n$ ou encore $y(a/n) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Enfin pour les négatifs, si $n \in \mathbb{N}$,

$$y(-na) = \frac{1}{y(na)} = \frac{1}{y(a)^n} = y(a)^{-n}. \tag{17.251}$$

Et de la même façon,

$$y\left(-\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{y\left(\frac{a}{n}\right)} = \sqrt[n]{\frac{1}{y(a)}} = \sqrt[-n]{y(a)}. \tag{17.252}$$

□

[39] Proposition 14.213.

17.6.2 Existence

Jusqu'ici nous avons donné des propriétés d'une éventuelle fonction y qui vérifierait l'équation différentielle. Il est temps de montrer qu'une telle fonction existe.

ThoKRYAooAcnTut

Théorème 17.88.
La série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{17.253}$$

EqEIGZooKWSvPS

définit une fonction dérivable solution de

$$\begin{cases} y' = y & \text{(17.254a)} \\ y(0) = 1. & \text{(17.254b)} \end{cases}$$

EQooSEIHooNmQKiC

Démonstration. La formule de Hadamard (théorème 17.39) donne le rayon de convergence de la série (17.253) par

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0. \tag{17.255}$$

Donc nous avons un rayon de convergence infini. La fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ et la proposition 17.50 nous dit que y est dérivable. Nous pouvons aussi dériver terme à terme :

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = y(x). \tag{17.256}$$

Notez le petit jeu d'indice de départ de k. Dans un premier temps, nous remarquons que $k = 0$ donne un terme nul et nous le supprimons, et dans un second temps nous effectuons la simplification des factorielles (qui ne fonctionne pas avec $k = 0$). □

17.89.
Nous savons que la fonction y existe parce qu'une solution de l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$ est donnée par la fameuse série (théorème 17.88). À part cela, ce qui a été fait avec cette équation différentielle ne permet pas de prouver l'existence de y. Donc, du point de vue de « définir l'exponentielle par son équation différentielle », c'est pas encore gagné. Notons au passage que le nombre e n'est pas encore bien défini via l'équation différentielle.

17.6.3 Le nombre de Neper e

Nous savons par le théorème 17.88 que $x \mapsto \exp(x)$ est une solution de l'équation différentielle exponentielle (avec la bonne condition initiale). Or une telle solution est unique par la proposition 14.471.

Définition 17.90 (Le nombre de Neper)**.**
Nous notons e le nombre $\exp(1)$.

PropCELWooLBSYmS

Proposition 17.91.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\exp(x) = e^x. \tag{17.257}$$

EQooBFIHooKopcmf

Démonstration. Soit y vérifiant la fameuse équation différentielle. Nous savons que $y = \exp$ parce que c'est l'unique solution (proposition 14.471). Nous avons :

$$y(x) = y(1)^x. \tag{17.258}$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $q = a/b$ et

$$y(q) = y\left(\frac{a}{b}\right) = y\left(a \times \frac{1}{b}\right) = y\left(\frac{1}{b}\right)^a = \left(\sqrt[b]{y(1)}\right)^a = y(1)^{a/b} = y(1)^q. \tag{17.259}$$

Le résultat est prouvé pour les rationnels.

En ce qui concerne un élément général $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto y(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto e^x$ également (proposition 14.436). Ces deux fonctions étant égales sur $\mathbb{Q}$, elles sont égales sur $\mathbb{R}$ par la proposition 9.174). □

PROPooIKJBooLOipUM

Proposition 17.92.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = \lambda y & (17.260a) \\ y(0) = 1 & (17.260b) \end{cases}$$

a une unique solution donnée par

$$y(t) = \exp(\lambda t) = e^{\lambda t} \tag{17.261}$$

Une conséquence des propositions 17.91 et 14.431 est que

EqLOIUooHxnEDn

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \tag{17.262a}$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \tag{17.262b}$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to]0, \infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \tag{17.263}$$

est une bijection.

LEMooXFAXooLVbebl

Lemme 17.93.
Nous avons l'encadrement $2.5 < e < 2.8$.

Démonstration. Vu que tous les termes de la série exponentielle sont strictement positifs, nous avons

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 2.5. \tag{17.264}$$

Pour la majoration, nous notons que $k! > 2^k$ à partir de $k = 4$. Donc nous gardons les termes $k = 0, 1, 2, 3$ sous la forme $1/k!$ et nous remplaçons les autres par $1/2^n$:

$$e < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{17.265}$$

Nous pouvons calculer explicitement la somme en utilisant la série géométrique de la proposition 12.186(3) :

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}. \tag{17.266}$$

En remettant tout ensemble,

$$e < 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} < 2.8. \tag{17.267}$$

□

PROPooFRKUooZyhHIC

Proposition 17.94 ([565])**.**
Le nombre e est irrationnel.

Démonstration. En vertu de la proposition 17.91, nous avons $e^x = \exp(x)$ pour tout réel x. En particulier pour $x = 1$,

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{17.268}$$

Supposons que $e = p/q$ pour certains $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$ (notez que ça signifie $q \geqslant 1$).

Nous avons

$$q!e = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}. \tag{17.269}$$

Dans le membre de gauche,

$$q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p \in \mathbb{N}. \tag{17.270}$$

Dans la première somme du membre de droite, vu que $q \geqslant k$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}. \tag{17.271}$$

Nous devons donc avoir $\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. Nous allons maintenant prouver que ce n'est pas le cas. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+k)!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{l=q+1}^{q+k} l} && \text{(17.272a)}\\
&= \frac{1}{q+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{l=q+1}^{q+k} l} && \text{(17.272b)}\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{l=q+2}^{q+k} l}\right] && \text{(17.272c)}\\
&< \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{(q+k)-(q+2)+1}}\right] && \text{(17.272d)}\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{k-1}}\right] && \text{(17.272e)}\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{k}}\right] && \text{(17.272f)}\\
&= \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{k}}. && \text{(17.272g)}
\end{aligned}$$

C'est le moment d'utiliser la série géométrique de la proposition 12.186(2). Vu que $q \geqslant 1$ nous avons $1/(q+1) < 1$ et la somme fonctionne :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+k)!} < \frac{1}{q+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}\right) = \frac{1}{q}. \tag{17.273}$$

Nous avons donc

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q!}{(q+k)!} < \frac{1}{q} < 1. \tag{17.274}$$

Donc ce terme n'est pas un nombre entier, ce que nous avions énoncé. □

17.6.4 Application réciproque : logarithme

DEFooELGOooGiZQjt

Proposition-Définition 17.95.
L'application $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ *est une bijection. L'application réciproque*

$$\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R} \tag{17.275}$$

est le ***logarithme****.*

Démonstration. Le fonction exponentielle est dérivable, toujours strictement positive, donc strictement croissante. Les limites en $\pm\infty$ sont 0 et $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous dit que c'est une bijection. En effet, l'injectivité est la stricte croissance. En ce qui concerne la surjection, soit $y \in]0,\infty[$. Vu que la limite en $-\infty$ est zéro, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) < y$ pour tout $x < A$, et de la même façon, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) > y$ pour tout $x > B$. Si $a < A$ et $b > B$ alors $\exp(a) < y$ et $\exp(b) > y$, donc y est dans l'image de $[a,b]$ par l'exponentielle. □

LEMooCYGTooEjXEUu

Lemme 17.96 ([1])**.**
Le logarithme est une fonction continue.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de la bijection 14.52(4), et de la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, qui est une partie du théorème 17.88. □

PROPooPDJLooXphpEM

Proposition 17.97 (Dérivée du logarithme)**.**
Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ nous avons

$$\ln'(s) = \frac{1}{s}. \tag{17.276}$$

Démonstration. L'application $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ est une bijection continue dérivable[40]. La proposition 14.203 s'applique donc et pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp'(x)}. \tag{17.277}$$

Le théorème 17.88 nous indique que $\exp'(x) = \exp(x)$. Donc pour tout x nous avons $\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp(x)}$. Vu que x est arbitraire et que exp est surjective sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $s \in]0,\infty[$ nous avons

$$\ln'(s) = \frac{1}{s}. \tag{17.278}$$

□

PROPooLAOWooEYvXmI

Proposition 17.98 ([1])**.**
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour $a > 0$ nous avons

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x), \tag{17.279}$$

et

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \tag{17.280}$$

EQooJVMUooVpUKyo

et

$$\ln(a^x) = x\ln(a) \tag{17.281}$$

EQooEJQSooWCzzXy

et

$$a^x = e^{x\ln(a)}. \tag{17.282}$$

Démonstration. Nous avons, par la proposition 14.437,

$$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}. \tag{17.283}$$

En prenant le logarithme des deux côtés nous trouvons

$$-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right). \tag{17.284}$$

Nous pouvons continuer avec la suivante.

Par définition, $\ln(xy)$ est donné par $\exp\big(\ln(xy)\big) = xy$. Mais nous avons aussi, par la proposition 14.437 :

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy. \tag{17.285}$$

Nous avons donc démontré (17.280).

La relation (17.281) de démontre d'abord pour $x \in \mathbb{N}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$ et enfin pour $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ alors la relation (17.280) donne immédiatement

$$\ln(a^n) = n\ln(a). \tag{17.286}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Si $m, n \in \mathbb{N}$, le nombre $a^{n/m}$ est par définition le $x > 0$ tel que

$$x^m = a^n. \tag{17.287}$$

En prenant le logarithme des deux côtés : $\ln(x^m) = \ln(a^n)$ et en utilisant la relation déjà démontrée pour $\mathbb{N}$ nous trouvons $m\ln(x) = n\ln(a)$ et donc

$$\ln(a^{m/n}) = \ln(x) = \frac{m}{n}\ln(a). \tag{17.288}$$

[40] Dérivable (et donc continue) par le théorème 17.88. Bijection par la proposition 17.95.

La relation est donc démontré pour $\ln(a^q)$ avec $q \in \mathbb{Q}^+$.

Nous passons à $q = -m/n \in \mathbb{Q}^-$, c'est-à-dire toujours $m, n \in \mathbb{N}$. Nous avons, en utilisant la proposition 17.98,

$$\ln(a^{-q}) = \ln(\frac{1}{a^q}) = -\ln(a^q) = -q\ln(a). \tag{17.289}$$

Enfin si $x \in \mathbb{R}$ nous considérons une suite de rationnels $x_k \to x$. Pour chaque k nous avons

$$\ln(a^{x_k}) = x_k \ln(a). \tag{17.290}$$

Nous prenons la limite des deux côtés. À droite nous avons tout de suite $x\ln(a)$, et à gauche, par continuité de la fonction ln (lemme 17.96) et de la fonction puissance (définition 14.436) nous trouvons $\ln(a^x)$. □

LemPEYJooEZlueU

Lemme 17.99.
Si $a, b \in]0, \infty[$ alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \tag{17.291}$$

et

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b). \tag{17.292}$$

EqOOZGooQWkGlA

Démonstration. Nous posons $f(x) = \ln(ax)$ qui est une fonction dérivable[41]. Alors $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Cette fonction f est donc une primitive de $\frac{1}{x}$ et il existe une constante K telle que

$$f(x) = \ln(x) + K. \tag{17.293}$$

Vu que $\ln(1) = 0$ nous avons $K = f(1) = \ln(a)$. Donc

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a). \tag{17.294}$$

En ce qui concerne la seconde formule à démontrer, nous avons

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{1}{b}b\right) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b). \tag{17.295}$$

Étant donné que $\ln(1) = 0$ nous en déduisons la formule (17.292). □

17.100.
La formule (17.281) en particulier est pratique pour réexprimer des fonctions puissances compliquées en écrivant

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}. \tag{17.296}$$

EQooYEWCouKxrayP

Cela aide à calculer la dérivée de $x \mapsto a^x$.

Notons que certains prennent (17.296) comme définition de la fonction puissance.

17.6.5 Approximations numériques de e

Nous donnons maintenant quelques approximations numériques de e, particulièrement inefficaces.

Lemme 17.101.
Nous avons

$$2 < e < 3. \tag{17.297}$$

Démonstration. Nous savons que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. La fonction y est strictement croissante (et donc sa dérivée aussi). Nous avons donc $y'(x) > 1$ pour tout $x \in]0, 1]$, et donc

$$y(1) > 1 + 1 \times 1 = 2. \tag{17.298}$$

Sachant que $2 > y'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ nous pouvons refaire le coup de l'approximation affine, cette fois en majorant :

$$y(1) < 1 + 2 \times 1 = 3. \tag{17.299}$$

□

[41] Dérivée du logarithme, proposition 17.97.

De la même façon nous savons que

$$y(\frac{1}{n}) > 1 + \frac{1}{n} \tag{17.300}$$

parce que y' est minoré par 1 sur $]0, \frac{1}{n}[$. Avec cela nous avons aussi la majoration

$$y(\frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}. \tag{17.301}$$

Et enfin nous pouvons donner l'encadrement, valable pour tout n :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y(1) < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n. \tag{17.302}$$

Pour $n = 10$ nous trouvons

$$2.50 < e < 2.83. \tag{17.303}$$

Bien que ce soit à mon avis humainement pas possible à faire à la main nous avons, pour $n = 100$:

$$2.70 < e < 2.7317 \tag{17.304}$$

Cela reste un encadrement très modeste.

Une méthode plus efficace consiste à calculer directement le développement de définition

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{17.305}$$

```
def u(k):
    """
    return the kth term in the expansion of 'e'
    """
    return 1/factorial(k)

def sum_u(n):
    """
    return the sum of the 'n' first terms, that is with
    k froim 0 to n-1.
    """
    L=[  u(k) for k in range(0,n)  ]
    return sum(L)

s = sum_u(5)        # This is a fraction
print(s)
print( numerical_approx(s)  )
```

tex/sage/sageSnip013.sage

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 17.102
Comment trouver, avec cette méthode, un encadrement pour e ?

Ce petit programme, avec 5 termes donne $e \simeq 65/24 \simeq 2.708$. Avouez que c'est déjà bien mieux.

17.6.6 Résumé des propriétés de l'exponentielle

ThoRWOZooYJOGgR

Théorème 17.103.
Les choses que nous savons sur l'exponentielle :

ITEMooEIKKooLNoaRD

(1) Il y a unicité de la solution à l'équation différentielle [subeqBKJNooJQtbBD]

$$\begin{cases} y' = y & \text{(17.306a)} \\ y(0) = 1. & \text{(17.306b)} \end{cases}$$

(2) *L'équation différentielle* (17.306) *possède une solution donnée par la série entière*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{17.307}$$

EqUARSooKXnQxv

(3) *Cette solution est une bijection* $y\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$.

ItemYTLTooSnfhOu

(4) *La fonction* y *ainsi définie est de classe* C^∞.

(5) *Elle est également donnée par la formule*

$$\exp(x) = e^x \tag{17.308}$$

où e *est défini par* $e = \exp(1)$.

(6) *Elle vérifie*

$$e^{a+b} = e^a e^b \tag{17.309}$$

EQooVFXUooBfwjJY

Nous nommons **exponentielle** cette fonction.

Démonstration. Point par point.

(1) C'est la proposition 14.471.

(2) C'est le théorème 17.88.

(3) Le rayon de convergence de la série (17.307) est infini (théorème 17.88) ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. Le fait que ce soit une bijection est dû au fait qu'elle est strictement croissante (proposition 17.86) ainsi qu'aux limites (17.262).

(4) Vu que $y = y'$, y est dérivable. Mais comme y' est alors égale à une fonction dérivable, y' est dérivable. En dérivant l'égalité $y' = y$ nous obtenons $y'' = y'$ et le jeu continue.

(5) C'est la proposition 17.91.

(6) C'est la proposition 17.87(1).

□

ExooLRHCooMYLQTU

Exemple 17.104 (Un endomorphisme sans polynôme annulateur[338])**.**
l'exponentielle permet de donner un exemple d'un endomorphisme n'ayant pas de polynôme annulateur[42] : l'endomorphisme de dérivation

$$\begin{aligned} D\colon C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned} \tag{17.310}$$

n'a pas de polynôme annulateur. En effet supposons que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ en soit un, et considérons les fonctions $f_\lambda\colon t \mapsto e^{\lambda t}$. Nous avons

$$0 = P(D)f_\lambda = \sum_k a_k D^k(f_\lambda) = \sum_k a_k \lambda^k f_\lambda = P(\lambda) f_\lambda. \tag{17.311}$$

Par conséquent λ est une racine de P pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela implique que $P = 0$.

D'ailleurs si on y pense bien, cet exemple n'est qu'un habillage de l'exemple 10.97. △

ExZLMooMzYqfK

Proposition 17.105.
Quelques propriétés du logarithme.

(1) *Le logarithme est une application dérivable et strictement croissante.*

(2) *Le logarithme est la primitive de* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *qui s'annule en* $x = 1$.

[42] En dimension finie, le lemme 10.94 dit qu'il y en a toujours un.

Démonstration. Elle est donc bijective, d'inverse continue et dérivable par le théorème 14.52 et la proposition 14.203.

La dérivée de la fonction logarithme peut être calculée en utilisant la formule (14.543), mais aussi de façon plus piettone en écrivant l'expression suivante, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\big(\exp(x)\big) = x, \tag{17.312}$$

que nous pouvons dériver en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\ln'\big(\exp(x)\big)\exp'(x) = 1. \tag{17.313}$$

Mais $\exp'(x) = \exp(x)$, donc

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \tag{17.314}$$

pour tout y dans l'image de exp, c'est-à-dire pour tout y dans l'ensemble de définition de ln.

Par ailleurs, $\exp(0) = 1$ donc

$$\ln(1) = \ln\big(\exp(0)\big) = 0. \tag{17.315}$$

En ce qui concerne l'unicité d'une primitive s'annulant en $x = 1$, c'est le corolaire 14.225. □

17.6.7 Dérivée de la fonction puissance

EXooGMRIooUucRez

Exemple 17.106.
Soit la fonction $f(x, y) = x^y$, définie en 14.436. Nous allons en calculer les dérivées partielles au point $(1, 2)$. Notons que f n'est pas définie pour $x < 0$, mais que cela n'a pas d'importance parce que nous pouvons nous restreindre à un voisinage du point $(1, 2)$. La première dérivée partielle est facile :

$$\partial_x f(1, 2) = (yx^{y-1})_{(x,y)=(1,2)} = 2.$$

Pour la seconde, il faut utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. D'abord le logarithme est par définition l'application réciproque de l'exponentielle (définition 17.95), donc

$$x^y = \exp\big(\ln(x^y)\big). \tag{17.316}$$

Ensuite nous calculons en utilisant la proposition 17.98 :

$$\partial_y f(1, 2) = \partial_y \left(e^{y \ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)} = \left(\ln x e^{y \ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)} = \ln(1)e^{2\ln(1)}. \tag{17.317}$$

△

Cet exemple est facilement généralisable aux fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$. Voici une proposition qui dit comment faire.

PROPooKUULooKSEULJ

Proposition 17.107 ([1]).
Soit une fonction dérivable $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a > 0$. Nous avons

$$(a^u)' = u' \ln(a) a^u. \tag{17.318}$$

Si de plus $u(x) > 0$ pour tout x, nous avons

$$(u^a)' = au'u^{a-1}. \tag{17.319}$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $f(x) = a^{u(x)}$. Vu que $f(x) > 0$ pour tout x, nous pouvons en prendre le logarithme et écrire l'égalité, valable pour tout x :

$$f(x) = e^{\ln(a^{u(x)})} = \exp\big(u(x)\ln(a)\big). \tag{17.320}$$

Sachant la dérivée de l'exponentielle, cela n'est rien d'autre que la dérivée d'une fonction composée :

$$f'(x) = \ln(a)u'(x)e^{u(x)\ln(a)}. \tag{17.321}$$

Pour l'autre, nous posons

$$g(x) = u(x)^a, \tag{17.322}$$

qui peut encore s'écrire sous la forme

$$g(x) = e^{a \ln\left(u(x)\right)}. \tag{17.323}$$

Ici encore, c'est la dérivée de fonctions composées qui donne le résultat. □

17.6.8 Dérivée du logarithme

LEMooTGCBooJdkLpg

Lemme 17.108.
Si $u\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ est dérivable alors $\ln(u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration. Cela est une conséquence du théorème de dérivation des fonctions composées : si $g(x) = \ln(u(x))$ alors

$$g'(x) = \ln'\big(u(x)\big)u'(x) = \frac{1}{u(x)}u'(x). \tag{17.324}$$

□

17.6.9 Taylor pour l'exponentielle

PROPooQBRGooAhGrvP

Proposition 17.109 (Développement de l'exponentielle)**.**
Pour tout entier n, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0$ et

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + x^n\alpha(x). \tag{17.325}$$

Démonstration. Il s'agit de la proposition 17.61 appliquée à la série entière (17.70). □

17.6.10 Analycité

Vu que $\exp(x)$ est défini par une série entière (définition 17.70) et vu la proposition 17.64, il n'est pas étonnant que exp soit analytique. Traitons ce cas.

Exemple 17.110 (Analycité de l'exponentielle)**.**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Nous démontrons que exp est analytique sur $B(a,R)$. Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n)}(x) = e^x$ pour tout n (équation (17.254a)). Nous avons donc

$$|f^{(n)}(x)| < e^{a+R} \tag{17.326}$$

pour tout $x \in B(a,R)$. Nous partons de l'expression (17.63) du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant \frac{e^{a+R}}{(n+1)!}R^{n+1}. \tag{17.327}$$

Mais nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{17.328}$$

pour tout R.

Donc avec les polynômes de Taylor P_n calculés en a, nous avons $P_n \to \exp$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons donc développer la fonction exponentielle autour de n'importe quel point, et avoir convergence des polynômes vers l'exponentielle sur tout $\mathbb{R}$. Vous accepterez cependant que si a et x sont éloignés, la convergence $P_n(x) \to \exp(x)$ peut être extrêmement lente. △

17.6.11 Autres propriétés et petits calculs

Lemme 17.111.
Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes[43] *et si (v_n) admet une limite l différente de 1, alors les suites $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$ sont équivalentes.*

Démonstration. En effet si $u_n = v_n\alpha(n)$ alors en utilisant la formule du lemme 17.99,

$$\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln\big(\alpha(n)\big) = \ln(v_n)\left(1 + \frac{\ln\big(\alpha(n)\big)}{\ln(v_n)}\right), \tag{17.329}$$

et comme $\alpha(n) \to 1$, la parenthèse tend vers 1. □

[43] Définition 11.33.

17.6.12 Taylor pour le logarithme

Vu que $\ln(0)$ n'existe pas, il n'est pas question de développer ln autour de $x = 0$. À la place, nous allons le développer autour de $x = 1$ et plus précisément nous allons étudier Taylor pour la fonction $f(x) = \ln(1+x)$. Les résultats seront résumés dans la proposition 17.114.

PROPooWCUEooJudkCV

Proposition 17.112 ([1]).
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]-1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned} \tag{17.330}$$

Pour tout n, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n \tag{17.331}$$

pour tout x dans le domaine de f.

Notez la somme qui part de $k = 1$ et non $k = 0$.

Démonstration. Nous utilisons la formule de Taylor-Young (proposition 14.501). La première dérivée de f se calcule en utilisant le lemme 17.108 :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}. \tag{17.332}$$

Pour les dérivées suivantes, c'est juste du calcul et nous pouvons prouver par récurrence que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k}. \tag{17.333}$$

EQooKEAOooGmTLJE

En ce qui concerne l'évaluation en zéro :

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (k-1)!(-1)^{k+1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.334}$$

Du fait que $f^{(0)}(0) = \ln(1) = 0$, la somme commence à $k = 1$ et non $k = 0$. Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \alpha(x)x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n. \tag{17.335}$$

□

Nous étudions les polynômes de la série de Taylor pour

$$\begin{aligned} f\colon]-1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned} \tag{17.336}$$

Les dérivées successives de f ont déjà été calculées en (17.333). Nous développons autour de $x = 0$. Donc $f(0) = \ln(1) = 0$ et pour les autres,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!. \tag{17.337}$$

Pour les polynômes de Taylor, nous avons

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{17.338}$$

où vous noterez la somme qui part de $k = 1$ et non de $k = 0$. Nous avons aussi la série de Taylor de f donnée par

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \tag{17.339}$$

EQooTAREooKfpTPo

La somme est une limite ponctuelle, là où elle existe.

Jusqu'à présent, la seule certitude à props de T est que $T(0) = f(0) = 0$. Pour le reste :

- Rien ne dit que $T(x)$ existe pour d'autres x que $x = 1$.

- Et même si $T(x)$ existait pour d'autres x (c'est-à-dire si le rayon de convergence de (17.339) était strictement plus grand que zéro), rien n'assurerait que la valeur serait celle de f.
- Et même si $T(x)$ convergeait vers f sur son disque de convergence, ce ne serait pas encore assez pour dire que f est analytique, parce que l'analycité demande que les séries de Taylor autour de *chaque* point converge vers f. Or ici nous ne parlons encore que de T qui est la série autour de $x = 0$.

LEMooWMGGooRpAxBa

Lemme 17.113.
La série de Taylor de $x \mapsto \ln(1+x)$ autour de $x = 0$ converge sur $]-1, 1]$. Elle ne converge pas pour $x = -1$.

Démonstration. En ce qui concerne le rayon de convergence de T, nous utilisons la formule de Hadamard[44] avec

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{17.340}$$

Ce que nous trouvons est

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1. \tag{17.341}$$

Le rayon de convergence de T est donc 1. Nous avons donc que $P_n \to T$ sur $]-1, 1[$, et peut-être que $P_n \to T$ en $x = \pm 1$.

Pour $x = -1$. L'intuition nous dit que ce serait $\ln(0)$ qui n'est pas défini. C'est le cas parce que

$$P_n(-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{17.342}$$

La limite $n \to \infty$ diverge. Donc T n'est pas définie en $x = -1$.

Pour $x = 1$ par contre,

$$P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{17.343}$$

Le critère des séries alternées[45] nous donne la convergence de cette série. □

Nous savons maintenant que la série de Taylor T converge sur $]-1, 1]$, et que $T(0) = f(0) = \ln(1) = 0$. Le premier gros morceau intéressant vient maintenant : nous allons prouver que $T(x)$ converge vers ce que nous croyons, c'est-à-dire $\ln(1 + x)$ en personne.

PROPooKPBIooJdNsqX

Proposition 17.114.
Pour tout $x \in]-1, 1]$ nous avons

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{17.344}$$

EqweFZnV

De plus nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{17.345}$$

EqKUQmQZ

Démonstration. Il s'agit d'utiliser l'expression du reste fourni par le théorème 14.489. Pour tout $x \in]-1, \infty[$, il existe un $c \in]0, x[$ (le c dépend de x) tel que

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{17.346}$$

Cela est parce que f est de classe C^∞. Calculons un peu :

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{17.347a}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{17.347b}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}. \tag{17.347c}$$

[44] Théorème 17.39.
[45] Théorème 12.190.

Lorsque $x > 1$, il n'y a aucune garantie sur la convergence de cela pour $n \to \infty$. Pour rappel, $c \in]0, x[$. Si par contre $x \in]-1, 1[$, alors nous savons que

$$\left| \frac{x}{1+c} \right| < 1, \tag{17.348}$$

et donc convergence $P_n(x) - f(x) \to 0$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que pour la série de Taylor converge vers $\ln(1+x)$ pour $x \in]-1, 1[$. Nous avons également vu que la série converge pour $x = 1$. Donc la fonction

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{17.349}$$

est continue sur $]-1, 1]$ et égale à $\ln(x+1)$ sur $]-1, 1[$. Vu que $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est continue sur $]-1, \infty[$, nous avons également $g(1) = f(1) = \ln(2)$.

Ceci nous mène au dernier point de notre proposition : $g(1) = \ln(2)$ s'écrit précisément

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{17.350}$$

□

17.115.
La formule (17.345) peut sembler très chouette pour trouver des approximations de $\ln(2)$. Le problème est qu'elle ne donne aucune idée de l'erreur commise en tronquant la série.

Vous pouvez, certes, écrire ceci :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \simeq 0.78. \tag{17.351}$$

Hélas, ce calcul n'a aucune valeur pour affirmer que $\ln(2)$ doit être proche de 0.78. Ni même pour affirmer que $\ln(2) < 1$.

Avoir des valeurs numériques de $\ln(2)$ (c'est-à-dire que « chiffres corrects devant ou derrière la virgule ») demande d'avoir un encadrement. Cela doit donc se faire avec des formules de séries avec reste ; les formules exactes qui demandent de sommer jusqu'à l'inifini sont inutiles pour avoir des approximations numériques.

Dans le cas de $\ln(2)$, une approximation numérique sera donnée à l'aide de Taylor avec reste intégrale dans la proposition 22.131.

Lemme 17.116.
Soit la fonction[46]

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{17.352}$$

(1) Elle admet un prolongement de classe C^∞ sur $]-1, \infty[$.

(2) $f(0) = 1$.

La seconde condition étant évidemment avec un abus de notation entre f et son prolongement, parce que f n'est pas définie en zéro.

Démonstration. La difficulté étant de voir que f a un prolongement en zéro et qu'elle y est de classe C^∞.

La proposition 17.114 nous donne l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{17.353}$$

pour tout $x \in]-1, 1]$; en particulier pour $x = 0$. Nous faisons le petit calcul suivant : [SUBEQooRLQOooEzNFDp]

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \tag{17.354a}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \tag{17.354b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} x^{n}. \tag{17.354c}$$

[46] Pour la définition du logarithme, c'est la définition 17.95.

Ce calcul n'est pas valable pour $x = 0$, mais ça ne nous empêche pas de poser

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \tag{17.355}$$

qui, lui, est bien définie en zéro. Le rayon de convergence de la série T est égal à 1, de telle sorte que

$$T :]-1, 1[\to \mathbb{R} \tag{17.356}$$

de classe C^∞, et est égale à f sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$.

La série T est donc le prolongement demandé. En ce qui concerne $f(0)$, c'est un abus pour écrire $T(0)$ qui vaut immédiatement 1. □

Notons qu'un calcul de limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{17.357}$$

donnait la valeur $f(0) = 1$. Donc prolonger avec $f(0) = 1$ était la seule possibilité pour avoir une fonction continue. De là à dire que le prolongement ainsi créé est de classe C^∞, c'est une autre histoire, qui est résolue par les séries entières.

17.6.13 Développements et calcul de limites

Lors d'un calcul de limite, développer une partie d'une expression peut être utile.

Exemple 17.117.
À calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. \tag{17.358}$$

Cela est une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Le développement limité du numérateur[47] nous donne une fonction $\alpha(x)$ telle que $\lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0$ et

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2 \alpha(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x). \tag{17.359}$$

Sur le membre de droite la limite est facile à calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \Big(1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x)\Big) = 1. \tag{17.360}$$

△

17.6.14 Une petite intégrale

EXooNIOZooWxciAC

Exemple 17.118.
Soit V la région trapézoïdale de sommets $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$, comme à la figure 17.2(a). Calculons ensemble l'intégrale double

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}} \, dV,$$

avec le changement de variable[48] $\psi(x, y) = (x + y, x - y)$. C'est-à-dire que nous considérons les nouvelles variables

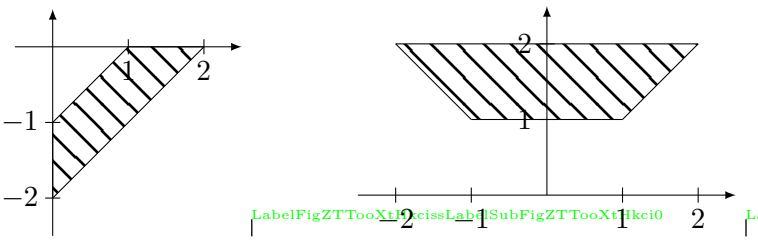
$$\begin{cases} u = x + y & \text{(17.361a)} \\ v = x - y. & \text{(17.361b)} \end{cases}$$

Il faut remarquer d'abord que le changement de variable proposé est dans le mauvais sens. On écrit alors $\phi(u, v) = \psi^{-1}(u, v) = \big((u + v)/2, (u - v)/2\big)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} & \text{(17.362a)} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. & \text{(17.362b)} \end{cases}$$

La région qui correspond à V est U, le trapèze de sommets $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(-2, 2)$, qu'on voit sur la figure 17.2(b) et qu'on décrit par

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leqslant v \leqslant 2, -v \leqslant u \leqslant v\}.$$



(a) La région V (b) La région $U = \phi^{-1}(V)$

FIGURE 17.2 : Avant et après le changement de variables LabelFigZTTooXtHkci

Le déterminant de la matrice jacobienne de ψ^{-1} est $J_{\psi^{-1}}$,

$$J_{\psi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \tag{17.363}$$

On a alors, en utilisant le fait que $F(x) = ae^{x/a}$ est une primitive de $f(x) = e^{x/a}$ (proposition 17.88) ainsi que le théorème fondamental de l'analyse (théorème 16.290),

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dV = \int_U e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,dV = \int_1^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{3}{4}(e-e^{-1}).$$

△

17.7 Vitesses des puissances, de l'exponentielle et du logarithme

17.7.1 Un peu de théorie

Voici une série de résultats qui lient les vitesses des polynômes, du logarithme et de l'exponentielle. LEMooNYFVooXjFShk

Lemme 17.119.
Si P est un polynôme et si $a > 0$, alors

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax}P(x) = 0 \tag{17.364}$$

Démonstration. Nous prouvons par récurrence que pour tout n, nous avons $e^{-ax}x^n \to 0$. D'abord nous écrivons[49]

$$f(x) = e^{-ax}x = \frac{x}{e^{ax}}, \tag{17.365}$$

et ensuite la règle de L'Hôpital 14.221 nous donne

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{ae^{ax}} = 0. \tag{17.366}$$

En ce qui concerne la récurrence, c'est encore la règle de L'Hôpital :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}} = \frac{n}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{ax}} = 0. \tag{17.367}$$

□ PROPooKVIFooGdKpfP

Proposition 17.120.
Nous avons : ITEMooCDSQooSIctbz

(1) Pour tout $\alpha > 0$, il existe N tel que $\ln(n) \leqslant n^\alpha$ pour tout $n \geqslant N$. ITEMooZMAWooTbDNAd

(2) Pour tout $p > 0$ et tout $\alpha > 0$, il existe N tel que

$$\ln(n)^p < n^\alpha \tag{17.368}$$

pour tout $n \geqslant N$.

[47] Proposition 17.112.
[48] Théorème 16.284.
[49] En utilisant 14.437(3).

ITEMooBLNOooZQNTfd

(3) *Pour tout $n \geqslant 1$ nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0. \tag{17.369}$$

ITEMooMLNMooAyJTox

(4) *Nous avons*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1. \tag{17.370}$$

ITEMooIQEKooBionsK

(5) *L'exponentielle croit plus vite que tout polynôme, et plus vite que logarithme :*

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(\ln x)^n x^\alpha = 0 \tag{17.371}$$

EqExpDecrtPlusVite

pour tout n et pour tout α.

ITEMooDUQWooNvAvmR

(6) *Pour tout $n > 0$, nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = \infty. \tag{17.372}$$

Le point (1) et sa généralisation (2) nous font dire que le logarithme croît moins vite que n'importe quel polynôme.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** En effet, nous avons, par la règle de l'Hospital (proposition 14.220),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \alpha x^\alpha = \infty \tag{17.373}$$

quand $\alpha > 0$. La dérivée du logarithme est dans la proposition 17.105.

(2) **Pour (2)** Il faut prendre le N qui convient à l'item (1) pour $n^{\alpha/p}$. Ainsi nous avons $\ln(n) < n^{\alpha/p}$ et donc $\ln(n)^p \leqslant n^\alpha$.

(3) **Pour (3)** Lorsque $x \neq 0$ nous avons

$$x^n \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x^n}, \tag{17.374}$$

qui est un cas $\frac{\infty}{\infty}$. Nous nous en remettons à la règle de l'Hospital 14.221. D'abord nous nous assurons de la limite des dérivées :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{n}\frac{x^{n+1}}{x} = 0. \tag{17.375}$$

La règle de l'Hospital conclut à l'existence de la limite demandée et à son égalité à 0.

(4) **Pour (4)** En effet, par la règle de l'Hospital 14.220,

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \tag{17.376}$$

EqGICpOX

(5) **Pour (5)** Notons $f_1(x) = e^{-x/2}(\ln x)^n$ et $f_2(x) = e^{-x/2}x^\alpha$. Le lemme 17.119 donne tout de suite $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

En ce qui concerne f_1, l'item (2) nous indique que nous avons

$$f_1(x) = e^{-x/2}(\ln x)^n \leqslant e^{-x/2}x \tag{17.377}$$

dès que x est assez grand. Le lemme 17.119 nous dit alors que $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

Enfin, nous avons

$$e^{-x}(\ln x)^n x^\alpha = f_1(x)f_2(x) \tag{17.378}$$

et donc la limite demandée.

(6) **Pour (6)** Nous passons au logarithme :

$$\ln(x^n e^{1/x}) = \ln(x^n) + \ln(e^{1/x}) = n\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{nx\ln(x)+1}{x}. \tag{17.379}$$

Grâce à la limite déjà prouvée en (3), le numérateur tend vers 1 lorsque $x \to 0^+$. Donc le tout tend vers $+\infty$. Au final,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^n e^{1/x})} = \infty. \tag{17.380}$$

□

EXooQNCJooFpnvnf

Exemple 17.121.
Le lemme 14.451 a déjà prouvé la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n \tag{17.381}$$

pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$.

L'utilisation de propriétés de l'exponentielle nous permet de donner une nouvelle preuve, plus courte[50].

Le théorème 17.103 et la proposition 17.98 nous permettent de passer à l'exponentielle. Pour chaque n nous avons :

$$n^\alpha a^n = e^{\alpha\ln(n)+n\ln(a)}. \tag{17.382}$$

EqLKLQooLJlWgn

Ce qui est dans l'exponentielle est

$$\alpha\ln(n) + n\ln(a) = n\big(\alpha\frac{\ln(n)}{n} + \ln(a)\big). \tag{17.383}$$

Dans la parenthèse, $\ln(a) < 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$. Donc ce qui est dans l'exponentielle (17.382) tend vers $-\infty$ et au final l'expression demandée tend vers zéro. △

Remarque 17.122.
Vous ne pouvez pas à priori considérer l'exemple 17.121 comme une preuve alternative au lemme 14.451, parce que vous n'êtes pas sûr que dans toute la théorie permettant de définir l'exponentielle (en particulier la convergence de $\sum_k x^k/k!$), le lemme n'est pas utilisé[51].

PROPooXIROooAprBJh

Proposition 17.123 ([1]).
Soient $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n r^n \to 0$. Alors pour tout polynôme P nous avons

$$P(n)a_n r^n \to 0. \tag{17.384}$$

De même si $a_n r^n \to \infty$, alors pour tout polynôme nous avons[52]

$$\frac{a_n}{P(n)} r^n \to \infty. \tag{17.385}$$

PROPooQJHCooDdpgMv

Proposition 17.124 ([1]).
Si $0 < q < 1$ et si $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k)q^k < \infty. \tag{17.386}$$

17.7.2 Fonction de Riemann

LEMooVBQVooDXeDqA

Lemme 17.125.
*La **fonction de Riemann***

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{17.387}$$

est de classe C^∞ sur $]1,\infty[$.

[50] C'est toujours facile de prétendre qu'une preuve est plus courte qu'une autre lorsqu'on utilise en une ligne des très gros théorèmes qui ont mis dix pages à être démontrés.

[51] Faites la vérification et dites-moi si c'est bon.

[52] En ne considérant que la queue de suite assez lointaine pour avoir dépassé toutes les racines de P. D'ailleurs c'est le moment de se rappeler que P a seulement un nombre fini de racines par la proposition 8.110.

Démonstration. Afin de faire le coup du compact, nous étudions la convergence uniforme de la série sur tout compact de $]1,\infty[$. Soit $\epsilon > 0$, et regardons ce qu'il se passe sur un compact dont le minimum[53] est $1+\epsilon$. Dans ce cas, $n^x \geqslant n^{1+\epsilon}$, et donc $f_n(x) = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$. Étant donné que la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge, la fonction de Riemann converge uniformément par le critère de Weierstrass (théorème 14.411). Nous avons donc convergence uniforme de la série sur tout compact de $]1,\infty[$, ce qui fait que ζ est une fonction continue pour $x > 1$ par le théorème 14.409.

Nous allons à présent utiliser le théorème 14.413 pour prouver que la fonction de Riemann est C^1. Il faut donc prouver que la série des dérivées $(n^{-x})' = -\ln(n)n^{-x}$ converge uniformément sur tout compact de $]1,\infty[$.

Nous prenons encore une fois un compact K dont le minimum est $1+\epsilon$. D'abord, nous majorons le logarithme par un x^α : lorsque n est assez grand, nous avons

$$\ln(n)n^{-x} \leqslant n^\alpha n^{-x}; \tag{17.388}$$

la proposition 17.120(1) nous dit que pour tout $\alpha > 0$, il existe un n à partir duquel cette inégalité est valide. Étant donné que $1+\epsilon$ est le minimum du compact, nous pouvons encore majorer en remplaçant x par $1+\epsilon$:

$$\ln(n)n^{-x} \leqslant \frac{1}{n^{1+\epsilon-\alpha}}. \tag{17.389}$$

Afin de pouvoir utiliser le critère de Weierstrass, nous devons nous assurer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon-\alpha}}$ converge. Cela n'est vrai que si $1+\epsilon-\alpha > 1$, mais le choix de α étant encore arbitraire, nous choisissons $0 < \alpha < \epsilon$.

Ainsi, la série des dérivées converge uniformément sur tout compact et nous en déduisons que cette série est bien la dérivée de la fonction de Riemann qui est C^1.

Afin de traiter les dérivées d'ordre supérieur, il faut calculer

$$(n^{-x})^p = (-1)^p\big(\ln(n)\big)^p n^{-x}, \tag{17.390}$$

et remarquer que $\lim_{x\to\infty} x^\alpha/(\ln(x))^p = \infty$. Par conséquent y a encore moyen de remplacer le logarithme par un x^α. Le reste de la preuve est la même. □

Ici se termine la preuve de ce lemme. Nous restons cependant sur notre faim en ce qui concerne la convergence uniforme de la série sur l'ouvert $]1,\infty[$. En effet, nous avons prouvé la convergence uniforme sur tout compact (et cela nous a suffit pour prouver le lemme), mais nous n'avons pas prouvé que la série n'était pas uniformément convergente sur $]1,\infty[$ pour autant.

Nous allons montrer qu'il n'y a pas uniforme convergence en prouvant que si x est assez proche de 1, alors la suite des sommes partielles de $\zeta(x)$ est aussi proche que l'on veut de la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui, elle, diverge.

Lemme 17.126.
Nous avons

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = \infty \tag{17.391}$$

où la limite est une limite à droite : la limite à gauche n'existe pas.

Démonstration. Soit $M > 0$. Prouvons que $\exists\epsilon$ tel que $\zeta(1+\epsilon) \geqslant M$. D'abord, choisissons un k tel que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > M, \tag{17.392}$$

et choisissons un ϵ tel que

$$\max_{n\in\{1,\ldots,k\}} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right| < \alpha. \tag{17.393}$$

Un tel choix de ϵ est possible pour tout α. Maintenant, nous choisissons α de façon à avoir $k\alpha < \sigma$. Avec ça, nous avons

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right) < k\alpha < \sigma. \tag{17.394}$$

En prenant σ tel que $M - \sum_{n=1}^{k}(1/n) < \sigma$, nous trouvons ainsi un ϵ tel que $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} > M$. Cela prouve le lemme. □

[53] Pour rappel, un compact dans $\mathbb{R}$ a *toujours* un minimum.

Armé de ce lemme, il est maintenant aisé de prouver que la série définissant la fonction de Riemann n'est pas uniformément convergente sur $]1,\infty[$. Prenons la $k$ième somme partielle $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k}(1/n^x)$. Pour chaque k, cela est une fonction bornée de x (y compris en $x=1$), donc $\sup_{x\in]1,\infty[} s_k(x) = M_k$. Armé de cette majoration, nous faisons

$$\|s_k - \zeta\|_\infty = \sup_{x\in]1,\infty[}\big(\zeta(x) - s_k(x)\big) > \sup\big(\zeta(x) - M_k\big) = \infty, \tag{17.395}$$

il n'y a donc pas moyen que la limite de $\|\zeta - s_k\|_\infty$ quand $k \to \infty$ soit nulle. Il n'y a donc pas uniforme convergence de ζ sur l'intervalle $]1,\infty[$.

PropBQGBooHxNrrf

Proposition 17.127.
Pour tout polynôme P et pour tout $a > 0$ la fonction $f(x) = P(x)e^{-ax}$ est intégrable[54] *sur $[0,\infty[$.*

Démonstration. Nous avons $f(x) = P(x)e^{-ax/2}e^{-ax/2}$, et par la vitesse comparée des exponentielles et polynômes[55], pour un certain $M > 0$ nous pouvons affirmer que $P(x)e^{-ax/2} < 1$ sur $[M,\infty[$. Dès lors

$$|f(x)| < e^{-ax/2}, \tag{17.396}$$

qui est intégrable. □

EXooAGEOooQdQkrS

Exemple 17.128.
La fonction logarithme (définition 17.95) n'est pas définie pour $x \leqslant 0$. Par conséquent la fonction $f(x) = x\ln(|x|)$ n'est pas définie en $x = 0$. Elle est bien définie pour $x < 0$ et vérifie

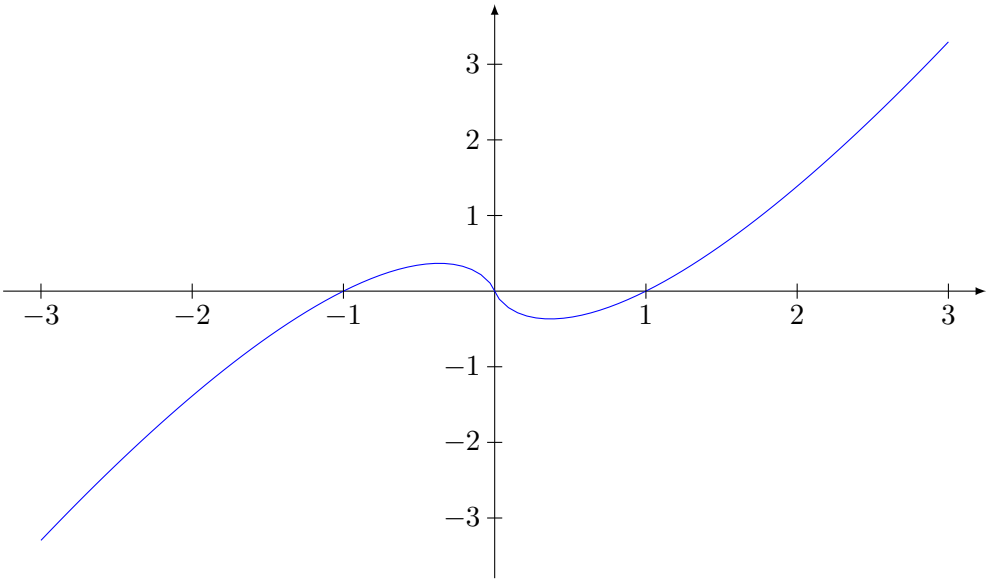
$$\lim_{x\to 0} x\ln(|x|) = 0. \tag{17.397}$$

Nous pouvons donc définir la fonction

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{17.398}$$

Contrairement à la fonction initiale f, cette fonction $\tilde{f}$ est définie et continue en 0.

Notez que sur le graphe de la fonction $\tilde{f}$, la courbe est bien régulière en $x = 0$.



△

DEFooFJZXooIVrzvk

Définition 17.129.
Soient deux suites (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}$. Nous disons que

*(1) $a_n \to \infty$ **plus vite** que (b_n) si $\lim n \to \infty (a_n/b_n) = \infty$.*

[54] Définition 16.188.
[55] Voir 17.120 et 17.119.

(2) $a_n \to \infty$ ***aussi vite*** *que* (b_n) *si* $\lim n \to \infty a_n/b_n$ *existe et est finie.*

(3) $a_n \to 0$ ***plus vite*** *que* (b_n) *si* $\lim n \to \infty a_n/b_n = 0$.

(4) $a_n \to 0$ ***moins vite*** *que* (b_n) *si* $\lim n \to \infty a_n/b_n = \infty$.

Exemple 17.130.
Deux petits exemples.

(1) Les suites $a_n = n^2$ et $b_n = n$ tendent toutes deux vers ∞, mais (a_n) va plus vite parce que $a_n/b_n = n \to \infty$.

(2) Les suites $a_n = 1/n$ et $b_n = 1/n^2$ tendent toutes deux vers 0, mais (a_n) va moins vite parce que $a_n/b_n = n \to \infty$.

△

17.131.
Je vous laisse cogiter sur l'énoncé suivant : si A est un ensemble de suites tendant toutes vers ∞, alors il existe une suite qui converge vers ∞ plus vite que tous les éléments de A.

Lorsque A est dénombrable, à mon avis, il suffit de prendre $x_n = \left(\max_{i=1,\dots,n}\{a_n^{(i)}, 2\}\right)^2$.

Lorsque A n'est pas dénombrable, je ne suis pas sûr. Écrivez-moi si vous avez une idée.

Lemme 17.132.
Si $a_n \to \infty$*, il existe une suite tendant vers* ∞ *plus vite.*

Démonstration. Il suffit de prendre $b_n = a_n^2$. □

Lemme 17.133.
La suite $a_n = n!$ *tend vers* ∞ *vite que l'exponentielle* $b_n = e^n$.

Démonstration. Nous devons étudier le comportement de $n!/e^n$ lorsque n est grand. Étant donné que $e < 3$ (lemme 17.93), nous avons

$$\frac{n!}{e^n} \geqslant \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4^{n-3}}{3^n} = \frac{5}{3^3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}. \tag{17.399}$$

Et comme $4/3 > 1$ nous avons bien $n!/e^n \to \infty$. □

17.7.3 Nombres premiers

Le théorème suivant dit que la somme des inverses des nombres premiers diverge. Cela est à comparer avec la proposition 17.141 qui dit que la somme des inverses des carrés converge.

ThonfVruT

Théorème 17.134.
Soit P*, l'ensemble des nombres premiers. Alors la somme* $\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$ *diverge et plus précisément,*

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in P}} \frac{1}{p} \geqslant \ln(\ln(x)) - \ln(2). \tag{17.400}$$

Démonstration. Nous posons

$$S_x = \{q \leqslant x \text{ avec } q \text{ sans facteurs carrés}\} \tag{17.401}$$

et

$$P_x = \{p \in P \text{ tel que } p \leqslant x\}. \tag{17.402}$$

Si

$$K_x = \{(q, m) \text{ tels que } q \text{ n'a pas de facteurs carrés et } qm^2 \leqslant x\}, \tag{17.403}$$

alors nous avons

$$K_x = \bigcup_{q\in S_x} \bigcup_{m\leqslant\sqrt{x/q}} (q, m). \tag{17.404}$$

Par définition et par le lemme 3.162 nous avons aussi

$$\{n \leqslant x\} = \{qm^2 \text{ tel que } (q, m) \in K_x\}. \tag{17.405}$$

Tout cela pour décomposer la somme

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\sum_{q\in S_x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x/q}}\frac{1}{qm^2}\leqslant\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}\underbrace{\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^2}}_{=C}. \tag{17.406}$$

Nous avons aussi

$$\prod_{p\in P_x}\left(1+\frac{1}{p}\right)=1+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}+\sum_{\substack{p,q\in P_x\\p<q}}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\p<q<r}}\frac{1}{pqr}+\dots \tag{17.407a}$$

$$\geqslant 1+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}+\sum_{\substack{p,q\in P_x\\pq\leqslant x}}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\pqr\leqslant x}}\frac{1}{pqr}+\dots \tag{17.407b}$$

Les sommes sont finies. Les sommes s'étendent sur toutes les façons de prendre des produits de nombres premiers distincts de telle sorte de conserver un produit plus petit que x ; c'est-à-dire que les sommes se résument en une somme sur les éléments de S_x :

$$\exp\left(\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}\right)\geqslant\prod_{p\in P_x}\left(1+\frac{1}{p}\right)\geqslant\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}. \tag{17.408}$$

La première inégalité est simplement le fait que $1+u\leqslant e^u$ si $u\geqslant 0$ (directe de la définition 17.103). Les inégalités suivantes proviennent du fait que le logarithme est une primitive de la fonction inverse (proposition 17.105) :

$$\ln(x)\leqslant\sum_{n\geqslant x}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{n\geqslant x}\frac{1}{n}. \tag{17.409}$$

Nous prolongeons ces inégalités avec les inégalités (17.406) et (17.408) :

$$\ln(x)\leqslant\sum_{n\geqslant x}\frac{1}{n}\leqslant C\sum_{q\in S_x}\frac{1}{q}\leqslant C\exp\left(\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}\right). \tag{17.410}$$

En passant au logarithme,

$$\ln\big(\ln(x)\big)\leqslant\ln(C)+\sum_{p\in P_x}\frac{1}{p}. \tag{17.411}$$

Ceci montre la divergence de la série de droite. Nous cherchons maintenant une borne pour C. Pour cela nous écrivons

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)} \tag{17.412a}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \tag{17.412b}$$

$$=1+1-\frac{1}{N} \tag{17.412c}$$

$$\leqslant 2. \tag{17.412d}$$

Donc $C\leqslant 2$. □

Ce théorème prend une nouvelle force en considérant le théorème de Müntz 19.7 qui dit qu'alors l'ensemble $\mathrm{Span}\{x^p \text{ tel que } p \text{ est premier}\}$ est dense dans les fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme ou $\|.\|_2$.

17.7.4 Quelques limites

Nous voyons à présent quelques calculs de limite et de développements mettant en scène des logarithmes et exponentielles.

compose1

Exemple 17.135.
Pour trouver le développement de la fonction $f(x) = e^{-2x}$, il suffit d'écrire celui de e^t et de remplacer ensuite t par $-2x$. Le développement à l'ordre 3 de la fonction exponentielle est :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\alpha(t). \tag{17.413}$$

Le développement de $f(x) = e^{-2x}$ sera donc

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} - 8x^3\alpha(-2x). \tag{17.414}$$

Donc le polynôme de degré 3 partie régulière de g est :

$$1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3, \tag{17.415}$$

et la fonction reste correspondante est :

$$\alpha_g(x) = -8\alpha(-2x). \tag{17.416}$$

△

Exemple 17.136.
Nous savons les développements

$$f(x) = \ln(1 + x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{17.417}$$

et

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{6}. \tag{17.418}$$

Nous obtenons le développement d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln\big(1 + \sin(x)\big)$ en écrivant

$$\ln\big(1 + \sin(x)\big) \sim \big(x - \frac{x^3}{6}\big) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3. \tag{17.419}$$

EqGXMpoWKQkIL

Il s'agit maintenant de trouver les termes qui sont de degré inférieur ou égal à 3.

D'abord

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \sim x^2 \tag{17.420}$$

Nous avons alors aussi

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^6 \sim x^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \sim x^3. \tag{17.421}$$

En replaçant tout ça dans (17.419) nous trouvons

$$\ln\big(1 + \sin(x)\big) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \tag{17.422}$$

△

ExBCDookjljhjk

Exemple 17.137.
Calculer

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1 + 4x^2} - 2x. \tag{17.423}$$

EqABCoolkjh

Nous allons effectuer un développement asymptotique de la partie « difficile » de l'expression posant d'abord $x = 1/h$. Si $f(x) = e^{1/x}\sqrt{1 - 4x^2}$ alors

$$g(h) = \frac{1}{|h|}e^h\sqrt{h^2 + 4} = \frac{1}{h}\big(1 + h + h\alpha(h)\big)\big(2 + h\beta(h)\big). \tag{17.424}$$

La première parenthèse est le développement de e^h et la seconde celui de $\sqrt{h^2 + 4}$. Nous nous apprêtons à faire la limite $x \to \infty$ qui correspond à $h \to 0^+$, nous pouvons donc supposer que $h > 0$ et omettre la valeur absolue. En effectuant le produit et en regroupant tous les termes contenant h^2, $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ dans un seul terme $h\gamma(h)$,

$$f(h) = \frac{1}{h}\big(2 + 2h + h\gamma(h)\big) = \frac{2}{h} + 2 + \gamma(h) = 2x + 2 + \gamma(1/x) \tag{17.425}$$

où γ est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0}\gamma(t)=0$.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la limite (17.423) :

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+x^2}-2x=\lim_{x\to\infty}\big(2x+2+\gamma(1/x)-2x\big)=2. \tag{17.426}$$

△

DEFooYDZMooXPnGZf

Définition 17.138 ([]).
*Soit $\alpha\in\mathbb{C}$, la **série de Riemann** est*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}. \tag{17.427}$$

17.139.
Quelques trucs à propos de la série de Riemann.

(1) La série de Riemann est très liée aux intégrales impropres de la proposition 16.303.

(2) Nous avons un théorème de (non)-convergence lorsque $\alpha\in\mathbb{R}$: proposition 17.140.

(3) Et un théorème qui traite le cas $\alpha\in\mathbb{C}$: 17.141.

PROPooRACTooLOGyjF

Proposition 17.140 (Série de Riemann[566]).
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1) Si $\alpha\leqslant 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\infty, \tag{17.428}$$

et

$$S_n\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{17.429}$$

EQooUAXMooNLxxLh

(2) Si $\alpha=1$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\infty, \tag{17.430}$$

et

$$S_n\sim\ln(n). \tag{17.431}$$

(3) Si $\alpha>0$, alors la série des $1/k^\alpha$ converge et nous avons l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant 1+\frac{1}{\alpha-1}. \tag{17.432}$$

Démonstration. Nous posons $f(t)=1/t^\alpha$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$. Et maintenant nous faisons plusieurs sous-cas.

(1) $\underline{\alpha\leqslant 0}$ Nous posons $f(t)=t^{-\alpha}$ et $g(t)=t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, de telle sorte que $f(t)=g'(t)$. Vu que f est croissante, nous avons $f(k)\leqslant f(t)\leqslant f(k+1)$ pour tout $t\in[k,k+1]$. Cela donne l'encadrement suivant pour g' :

$$f(k)\leqslant g'(t)\leqslant f(k+1). \tag{17.433}$$

Nous appliquons donc l'inégalité des accroissements finis 14.218 à la fonction g entre k et $k+1$ de la façon suivante :

$$f(k)\leqslant g(k+1)-g(k)\leqslant f(k+1). \tag{17.434}$$

Nous sommons cela pour k entre 1 et n en utilisant la somme téléscopique de la proposition 12.176 :

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant g(n+1)-g(1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k+1). \tag{17.435}$$

Nous gardons la première inégalité $S_n\leqslant g(n+1)-g(1)$. Pour la seconde, nous remarquons qu'elle est valable pour tout $n\geqslant 1$; nous l'écrivons pour $n-1$:

$$g(n)-g(1)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1)=\sum_{k=2}^{n}f(k)=S_n-f(1). \tag{17.436}$$

D'où l'inégalité $S_n \geqslant g(n+1) - g(1) + f(1)$. Écrivons les deux :

$$g(n) - g(1) + f(1) \leqslant S_n \leqslant g(n+1) - g(1). \tag{17.437}$$

EQooSHNRooQsznHR

Vu que $g(n) \to \infty$, la première inégalité prouve que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha} = \infty$.

En ce qui concerne l'équivalence de suites, nous divisons tous les membres de 17.437 par $g(n)$:

$$\frac{g(n) - g(1) + f(1)}{g(n)} \leqslant \frac{S_n}{g(n)} \leqslant \frac{g(n+1) - g(1)}{g(n)}. \tag{17.438}$$

Vu que $g(n) \to \infty$ nous avons

$$\frac{g(n) - g(1) + f(1)}{g(n)} \to 1. \tag{17.439}$$

En remplaçant les différentes fonctions par leurs valeurs, nous avons aussi

$$\frac{g(n+1) - g(1)}{g(n)} = \underbrace{\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}}}_{=(\frac{n+1}{n})^{1-\alpha}\to 1} - \underbrace{\frac{1}{n^{1-\alpha}(1-\alpha)}}_{\to 0} \to 1. \tag{17.440}$$

Nous avons donc bien $S_n/g(n) \to 1$, comme demandé en (17.429).

(2) $\underline{0 < \alpha < 1}$ Nous posons encore $f(t) = t^{-\alpha}$ et $g(t) = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, et nous avons encore $g'(t) = f(t)$. Cette fois, f est décroissante, et nous avons donc cet encadrement pour $g'(t)$:

$$f(k+1) \leqslant g'(t) \leqslant f(k). \tag{17.441}$$

L'inégalité des accroissements finis donne

$$f(k+1) \leqslant g(k+1) - g(k) \leqslant f(k). \tag{17.442}$$

Nous refaisons la somme téléscopique :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant g(n+1) - g(1) \leqslant S_n. \tag{17.443}$$

Nous gardons la seconde inégalité et écrivons la première avec $n-1$, et nous trouvons l'encadrement

$$g(n+1) - g(1) \leqslant S_n \leqslant g(n) - g(1) + f(1). \tag{17.444}$$

La première inégalité dit que $S_n \to \infty$. En ce qui concerne l'équivalence de suites, nous divisons encore par $g(n)$ et tout va bien.

(3) $\underline{\alpha = 1}$ Cette fois, nous faisons un tout petit peu attention aux domaines. Vu qu'à la fin nous ne sommes intéressés à f que pour les valeurs $k \geq 1$, nous prenons

$$\begin{aligned} f\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} \end{aligned} \tag{17.445}$$

et

$$\begin{aligned} g\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ln(t). \end{aligned} \tag{17.446}$$

Nous avons encore $g' = f$ par la proposition 17.97. Ensuite nous faisons comme les autres cas. Nous avons d'abord l'encadrement $f(k+1) \leqslant g'(t) \leqslant f(k)$ pour tout $t \in [k, k+1]$, puis nous utilisons l'inégalité des accroissements finis : $f(k+1) \leqslant g(k+1) - g(k) \leqslant f(k)$. En sommant,

$$\sum_{k+1}^{n} f(k+1) \leqslant g(n+1) - g(1) \leqslant S_n. \tag{17.447}$$

Nous écrivons la première inégalité avec n_1 pour trouver $S_n \leqslant g(n) - g(1) + f(1)$. Et au final,

$$g(n+1) - g(1) \leqslant S_n \leqslant g(n) - g(1) + f(1). \tag{17.448}$$

La première inégalité donne $S_n \to \infty$. Pour l'équivalence de suites, nous disons par $g(n)$ et nous faisons un peu de limites, en tenant compte que[56]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(x+1)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1. \tag{17.449}$$

[56] En utilisant la règle de l'Hospital 14.221.

(4) **Si $\alpha > 1$** Encore $f(t) = t^{-\alpha}$ et $g(t) = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. Nous avons l'encadrement $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$. Nous sommes dans le même cas qu'avec $0 < \alpha < 1$ et nous arrivons aux mêmes conclusions :

$$g(n+1) - g(1) \leqslant S_n \leqslant S(n) - g(1) + f(1). \tag{17.450}$$

Cette fois nous avons $g(n) \to 0$, et donc

$$-g(1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \leqslant f(1) - g(1). \tag{17.451}$$

Vu que S_n est une suite croissante et bornée, elle converge. Nous ne donnons par une valeur précise à la limite, mais l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}. \tag{17.452}$$

□

PROPooFPVZooGnsqrs

Proposition 17.141 (Série de Riemann[567])**.**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous considérons a série de Riemann[57]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}. \tag{17.453}$$

EqSerRiem

En termes de convergence :

(1) Si $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$, alors S converge absolument.

(2) Si $\mathrm{Re}(\alpha) < 1$ alors S diverge.

PROPooKXGWooRmSxou

Proposition 17.142 ([1])**.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} z^m = \frac{1 - e^z}{z}. \tag{17.454}$$

17.8 Trigonométrie hyperbolique

Définition 17.143.
*Les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{17.455a}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{17.455b}$$

Si vous ne vous rappelez plus la définition de e^x, c'est 17.70.

PROPooUNHHooIksdoJ

Proposition 17.144.
Quelques propriétés algébriques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh(-x) = \cosh(x)$

(2) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

(3) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

ITEMooSJBDooAiRgjj

(4) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$

(5) $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x+y)$

ITEMooOJRFooUCUaDl

(6) $\cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x-y)$

(7) $\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) = \sinh(x+y)$

[57] Voir la proposition 17.138.

(8) $\cosh(x)\sinh(y)-\sinh(x)\cosh(y)=-\sinh(x-y)$.

Démonstration. Si s'agit simplement de remplacer les définitions et d'utiliser les formules concernant les puissances, dont la formule (14.1211). □

PROPooAOOHooXvLfrZ

Proposition 17.145.
Quelques propriétés analytiques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh'(x)=\sinh(x)$

(2) $\sinh'(x)=\cosh(x)$.

ITEMooZNZLooNMQFWr

(3) $\cosh(x)\geqslant 1$.

Démonstration. Pour les dérivées, il s'agit d'utiliser la dérivation de l'exponentielle, laquelle est facile par le théorème 17.103(1).

Pour (3), nous commençons par les $x\geqslant 0$. D'abord $\cosh(0)=1$. Ensuite $\cosh'(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Vu que $x>0$ nous avons $e^x>e^{-x}>0$. Donc la dérivée de cosh est strictement positive sur $]0,\infty[$. La fonction y est donc partout plus grande que $\cosh(0)=1$.

Pour les $x<0$, nous avons la fait que cosh est paire. □

PROPooQLNYooIIOdvm

Proposition 17.146.
La fonction $\sinh\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est bijective.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Injective** Si $\sinh(a)=\sinh(b)$, alors le théorème de Rolle 14.210 affirme qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\sinh'(c)=0$. Mais la proposition 17.145 nous dit que $\sinh'(x)=\cosh(c)\geqslant 1$. Donc impossible.

(2) **Surjective** Nous avons

$$\lim_{x\to-\infty}\sinh(x)=-\infty \tag{17.456}$$

et

$$\lim_{x\to\infty}\sinh(x)=\infty. \tag{17.457}$$

Soit $y\in\mathbb{R}$. Il existe $m<0$ tel que $\sinh(m)<y$ et $M>0$ tel que $\sinh(M)>y$. Le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 nous enseigne qu'il existe $x\in[m,M]$ tel que $\sinh(x)=y$.

□

PROPooWEHGooOBqSHY

Proposition 17.147 ([1])**.**
Soient $a,b\in\mathbb{R}$ *tels que* $a^2-b^2=1$. *Il existe un unique* $(x,\sigma)\in\mathbb{R}\times\{\pm1\}$ *tel que*

SUBEQSooBIYDooIBuduV

$$\begin{cases} a=\sigma\cosh(x) & (17.458a)\\ b=\sinh(x). & (17.458b)\end{cases}$$

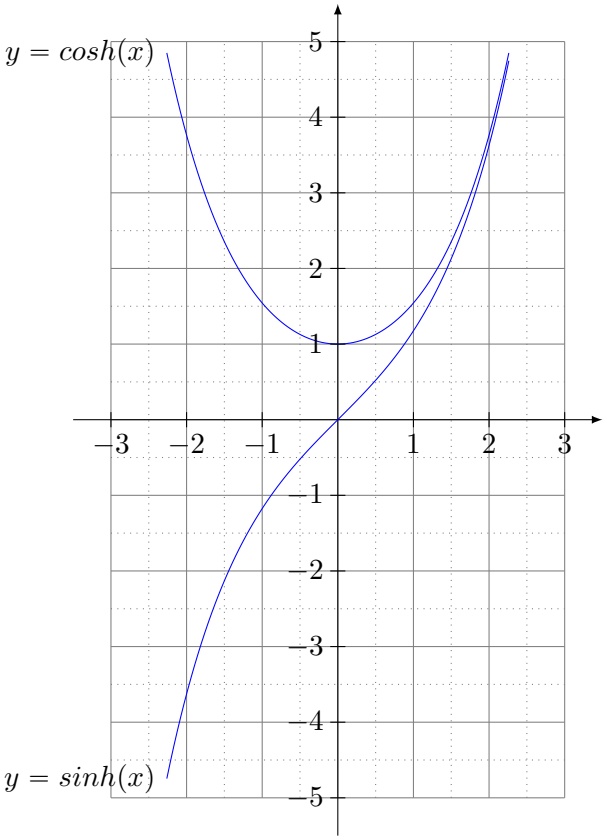
Démonstration. Vu que le sinus hyperbolique est une bijection[58], il existe un unique $x\in\mathbb{R}$ tel que $\sinh(x)=b$. Maintenant un petit calcul :

$$a^2=1+\sinh(x)^2=1+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}=\cosh(x)^2. \tag{17.459}$$

Vu que $\cosh(x)^2=a^2$, il existe un unique $\sigma\in\{\pm1\}$ tel que $\sigma\cosh(x)=a$. □

Les représentations graphiques sont ceci :

[58] Proposition 17.146.



La **tangente hyperbolique** est donnée par le quotient

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{17.460}$$

17.9 Séries entières de matrices

17.9.1 Différentiabilité

PropAMBXKgV

Proposition 17.148.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{C}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{C}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \end{aligned} \tag{17.461}$$

Alors

(1) La différentielle de f sur $B(0,R)$ est

$$df_A(U) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{k-1} A^l U A^{k-1-l}, \tag{17.462}$$

EqRDVodDa

c'est-à-dire que l'on peut différentier terme à terme. (Ici c'est A qui est dans $B(0,R)$)

(2) La convergence de la somme 17.462 est absolue.

(3) La convergence de la somme 17.462 est normale sur tout compact.

(4) La fonction f est de classe C^1 sur $B(0,R)$, c'est-à-dire que la fonction $A \mapsto df_A$ est continue.

Notons que df_A n'est pas tout à fait une série entière. Cependant, en ce qui concerne les normes, c'est tout comme si ça l'était.

Démonstration. Nous posons $u_k(A) = a_k A^k$, qui est une fonction de classe C^∞ et dont la différentielle est donnée par

$$(du_k)_A(U) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(A+tU)\Big]_{t=0} = a_k \frac{d}{dt}\Big[(A+tU)^k\Big]_{t=0}; \tag{17.463}$$

en distribuant le produit nous trouvons tout un tas de termes dont seuls ceux contenant exactement une fois tU ne vont pas s'annuler. Étant donné que U et A ne commutent pas nous avons l'expression un peu moche

$$(du_k)_A(U) = \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}. \tag{17.464}$$

En ce qui concerne la norme, nous regardons celle de $(du_k)_A$ pour un A fixé ; c'est-à-dire que nous en regardons la norme opérateur :

$$\|(du_k)_A\| = \sup_{\|U\|=1} \| \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}\| \leqslant \sum_{l=0}^{k-1} |a_k| \|A\|^l \|A\|^{k-1-l} \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1}. \tag{17.465}$$

Pour donner la convergence nous considérons un nombre r tel que $\|A\| < r < R$, de telle sorte que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée par un nombre M et que nous puissions écrire

$$\|(du_k)_A\| \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1} = \frac{k|a_k|\|A\|^k}{\|A\|} = \frac{k|a_k|}{\|A\|} r^k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k \leqslant \frac{M}{\|A\|} k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k, \tag{17.466}$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence absolue de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A. \tag{17.467}$$

Passons à la convergence normale sur tout compact. Nous nous fixons $r < R$ et nous nous intéressons à la norme de du_k sur $\overline{B(0,r)}$, c'est-à-dire

$$\|du_k\|_\infty = \sup_{x \in \overline{B(0,r)}} \|(du_k)_A\|. \tag{17.468}$$

Vu que $\overline{B(0,r)}$ est compact, ce supremum est un maximum et nous pouvons noter A_k la matrice qui le réalise. Nous réalisons alors les mêmes manipulations que pour (17.466) :

$$\|du_k\|_\infty = \|(du_k)_{A_k}\| \leqslant k|a_k|\|A_k\|^{k-1} \leqslant k|a_k|r^{k-1} = \frac{1}{r}k|a_k|r^k. \tag{17.469}$$

Nous prenons maintenant $r < r_0 < R$ et M, un majorant de $(a_n r_0^n)$, de telle sorte qu'en multipliant et divisant par r_0^k,

$$\|du_k\|_\infty \leqslant \frac{k|a_k|r_0^k}{r}\frac{r^k}{r_0^k} \leqslant \frac{kM}{r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \tag{17.470}$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence normale sur tout compact. Par voie de ~~fait~~ conséquences nous avons continuité de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A \tag{17.471}$$

et convergence vers df_A par le théorème 17.9. □

Proposition 17.149.
Si le rayon de convergence de la série $u(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ est R, alors

(1) elle converge normalement sur tout compact de $B(0,R)$;

(2) la fonction u y est de classe C^∞.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} u_k \colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto a_k A^k \end{aligned} \tag{17.472}$$

qui est évidemment une fonction de classe C^∞. Nous étudions la j^{e} différentielle en m, pour $k > j$ (dans une série, nous ne nous intéressons pas aux premiers termes). La j^{e} différentielle appliquée à v_1 appliquée à v_2, etc. s'exprime de la façon suivante :

$$(d^j u_k)_m(v_1, \dots, v_j) = \frac{d}{dt_1} \cdots \frac{d}{dt_j} \Big(u_k(m + t_1 v_1 + \cdots + t_j v_j) \Big)_{t_i=0}. \tag{17.473}$$

Dans le produit $(m + t_1 v_1 + \cdots + t_j v_j)^k$, seuls les termes contenant exactement une fois chacun des t_i ne s'annulera pas après avoir fait la dérivée et évalué en $t_i = 0$. Combien de termes cela fait ? Parmi les k facteurs, il faut en placer j qui ne sont pas m (cela fait $\binom{k}{j}$ possibilités), et puis il faut ordonner ces j termes, cela fait encore $j!$ possibilités. Au final,

$$\|(d^j u_k)_m\| \leqslant |a_k| \binom{k}{j} j! \|m\|^{k-j} = |a_k| P(k) \|m\|^{k-j} \tag{17.474}$$

où $P(k) = \frac{k!}{(k-j)!}$ est un polynôme de degré j.

Afin d'étudier la convergence normale sur tout compact de la série des $d^j u_k$, nous considérons $r < r_0 < R$ et nous allons prouver la convergence normale sur $\overline{B(0,r)}$. Vu que c'est un compact, il existe une matrice $m_k \in \overline{B(0,r)}$ telle que

$$\begin{aligned}
\|d^j u_k\|_\infty &= \|(d^j u_k)_{m_k}\| && \text{(17.475a)}\\
&\leqslant |a_k| P(k) \|m_k\|^{k-j} && \text{(17.475b)}\\
&\leqslant |a_k| P(k) r^{k-j} && \text{(17.475c)}\\
&= \frac{|a_k| P(k)}{r^j} r^k && \text{(17.475d)}\\
&= \frac{|a_k| r_0^k P(k)}{r^j} \left(\frac{r}{r_0} \right)^k && \text{(17.475e)}\\
&\leqslant \frac{M}{r^j} P(k) \left(\frac{r}{r_0} \right)^k && \text{(17.475f)}
\end{aligned}$$

où M est un majorant de $a_n r_0^n$. Vu que $r/r_0 < 1$, la somme sur k converge et nous avons convergence normale sur tout compact de

$$d^j \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} d^j (a_k A^k) \tag{17.476}$$

avec un peu d'abus de notation. □

17.10 Exponentielle de matrices

PropKKdmnkD

Proposition 17.150.
Une matrice complexe est inversible si et seulement si elle est une exponentielle.

Autrement dit :

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})}. \tag{17.477}$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé dans la proposition 17.81 que toutes les exponentielles étaient inversibles. Ici nous nous concentrons sur la réciproque.

Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; nous allons donner une matrice $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ telle que $A = \exp(B)$. D'abord remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour une matrice par classe de similitude. En effet si $A = \exp(B)$ et si M est inversible alors [EqqACuGK]

$$\begin{aligned}
\exp(MBM^{-1}) &= \sum_k \frac{1}{k!} (MBM^{-1})^k && \text{(17.478a)}\\
&= \sum_k \frac{1}{k!} M B^k M^{-1} && \text{(17.478b)}\\
&= M \exp(B) M^{-1}. && \text{(17.478c)}
\end{aligned}$$

Donc $MAM^{-1} = \exp(MBM^{-1})$. Nous pouvons donc nous contenter de trouver un logarithme pour les blocs de Jordan. Nous supposons donc que $A = (\mathbb{1} + N)$ avec $N^m = 0$. En nous inspirant de (17.344), nous

posons[59]

$$D(t) = tN - \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + (-1)^m \frac{t^{m-1}}{m-1}N^{m-1} \tag{17.479}$$

et nous allons prouver que $e^{D(1)} = \mathbb{1} + N$. Notons que N étant nilpotente, cette somme ainsi que toutes celles qui viennent sont finies. Il n'y a donc pas de problèmes de convergences dans cette preuve (si ce n'est les passages des équations (17.478)).

Nous posons $S(t) = e^{D(t)}$ (la somme est finie), et nous avons

$$S'(t) = D'(t)e^{D(t)} \tag{17.480}$$

Afin d'obtenir une expression qui donne S' en termes de S, nous multiplions par $(\mathbb{1} + tN)$ en remarquant que $(\mathbb{1} + tN)D'(t) = N$ nous avons

$$(\mathbb{1} + tN)S'(t) = NS(t). \tag{17.481}$$

En dérivant à nouveau,

$$(\mathbb{1} + tN)S''(t) = 0. \tag{17.482}$$ EqKjrqqP

La matrice $(\mathbb{1} + tN)$ est inversible parce que son noyau est réduit à $\{0\}$. En effet si $(\mathbb{1} + tN)x = 0$, alors $Nx = -\frac{1}{t}x$, ce qui est impossible parce que N est nilpotente. Ce que dit l'équation (17.482) est alors que $S''(t) = 0$. Si nous développons $S(t)$ en puissances de t nous nous arrêtons au terme d'ordre 1 et nous avons

$$S(t) = S(0) + tS'(0) = \mathbb{1} + tD'(0) = 1 + tN. \tag{17.483}$$

En $t = 1$ nous trouvons $S(1) = \mathbb{1} + N$. La matrice $D(1)$ donnée est donc bien un logarithme de $\mathbb{1} + N$. □

17.10.1 Diagonalisabilité d'exponentielle

PropCOMNooIErskN

Proposition 17.151 ([121]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Démonstration. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible M telle que $D = M^{-1}AM$ soit diagonale (c'est la définition 10.215). Dans ce cas nous avons aussi $(M^{-1}AM)^k = M^{-1}A^kM$ et donc $M^{-1}e^AM = e^{M^{-1}AM} = e^D$ qui est diagonale.

La partie difficile est donc le contraire.

(1) **Qui est diagonalisable et comment ?** Nous supposons que e^A est diagonalisable et nous écrivons la décomposition de Dunford (théorème 10.265) :

$$A = S + N \tag{17.484}$$

où S est diagonalisable, N est nilpotente, $[S, N] = 0$. Nous avons besoin de prouver que $N = 0$.

Les matrices A est S commutent ; en passant au développement nous en déduisons que A et e^S commutent, puis encore en passant au développement que e^A et e^S commutent. Vu que S est diagonalisable, e^S l'est et par hypothèse e^A est également diagonalisable. Donc e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables par la proposition 10.223.

Étant donné que A et S commutent, nous avons $e^N = e^{A-S} = e^Ae^{-S}$, et nous en déduisons que e^N est diagonalisable vu que les deux facteurs e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables.

(2) **Unipotence**

Si r est le degré de nilpotence de N, nous avons

$$e^N - \mathbb{1} = N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}. \tag{17.485}$$ EqQHjvLZO

Donc

$$(e^N - \mathbb{1})^k = \left(N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}\right)^k \tag{17.486}$$

où le membre de droite est un polynôme en N dont le terme de plus bas degré est de degré k. Donc $(e^N - \mathbb{1})$ est nilpotente et e^N est unipotente.

[59] Le logarithme d'un nombre n'est pas encore défini à ce moment, mais cela ne nous empêche pas de poser une définition ici pour une application des réels vers les matrices.

Si M est la matrice qui diagonalise e^N, alors la matrice diagonale $M^{-1}e^NM$ est tout autant unipotente que e^N elle-même. En effet,

$$(M^{-1}e^NM-\mathbb{1})^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}M^{-1}(e^N)^kM \tag{17.487a}$$
$$=M^{-1}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}(e^N)^k\right)M \tag{17.487b}$$
$$=M^{-1}(e^N-\mathbb{1})^rM \tag{17.487c}$$
$$=0. \tag{17.487d}$$

La matrice $M^{-1}e^NM$ est donc une matrice diagonale et unipotente ; donc $M^{-1}e^NM=\mathbb{1}$, ce qui donne immédiatement que $e^N=\mathbb{1}$.

(3) **Polynômes annulateurs**

En reprenant le développement (17.485) sachant que $e^N=\mathbb{1}$, nous savons que

$$N+\frac{N^2}{2}+\cdots+\frac{N^{r-1}}{(r-1)!}=0. \tag{17.488}$$

Dit en termes pompeux (mais non moins porteurs de sens), le polynôme

$$Q(X)=X+\frac{X^2}{2}+\cdots+\frac{X^{r-1}}{(r-1)!} \tag{17.489}$$

est un polynôme annulateur de N.

La proposition 10.98 stipule que le polynôme minimal d'un endomorphisme divise tous les polynômes annulateurs. Dans notre cas, X^r est un polynôme annulateur et donc le polynôme minimal de N est de la forme X^k. Donc il est X^r lui-même.

Nous avons donc $X^r\mid Q$. Mais Q est un polynôme contenant le monôme X donc X^r ne peut diviser Q que si $r=1$. Nous en concluons que X est un polynôme annulateur de N. C'est-à-dire que $N=0$.

(4) **Conclusion**

Vu que Dunford[60] dit que $A=S+N$ et que nous venons de prouver que $N=0$, nous concluons que $A=S$ avec S diagonalisable.

□

17.11 Étude d'asymptote

Lorsqu'une fonction tend vers l'infini pour $x\to\infty$, une question qui peut venir est : à quelle vitesse tend-elle vers l'infini ?

Il est « visible » que la fonction logarithme ne tend pas très vite vers l'infini : certes

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty, \tag{17.490}$$

mais par exemple $\ln(100000)\simeq 11.5$ tandis que $e^{100000}\simeq 10^{43429}$. Sans contestations possibles, l'exponentielle croit plus vite que le logarithme.

Soient f et g deux fonctions dont la limite $x\to\infty$ est ∞. Si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \tag{17.491}$$

nous disons que g tend vers ∞ plus vite que f ; si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \tag{17.492}$$

nous disons que f tend vers ∞ plus vite que g, et si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=a\in\mathbb{R} \tag{17.493}$$

avec $a\neq 0$ alors nous disons que f tend vers l'infini à la même vitesse que $ag(x)$.

[60] Théorème 10.265.

Exemple 17.152.
La fonction $x \mapsto x^2$ tend vers l'infini plus vite que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. △

Dans cette section nous allons nous contenter de déterminer les fonctions qui tendent vers l'infini aussi vite qu'une droite oblique, que nous appellons asymptote et que nous voulons déterminer.

Exemple 17.153.
Déterminer les asymptotes obliques (s'ils existent) de la fonction

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}. \tag{17.494}$$

Tout d'abord nous remarquons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Nous sommes donc en présence d'une branche du graphe qui tend vers l'infini. Ensuite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+4} = 2. \tag{17.495}$$

Donc le graphe de f tend vers l'infini à la même vitesse que le graphe de la fonction $y = 2x$. Nous aurons donc une asymptote oblique de coefficient directeur 2. De façon imagée, nous pouvons penser que le graphe de f et celui de $y = 2x$ sont presque parallèles si x est assez grand. Afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il nous reste à voir quelle est la « distance » entre le graphe de f et celui de $y = 2x$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+4x^2} - 2x. \tag{17.496}$$

Cette limite a été calculée dans l'exemple 17.137 et vaut 2.

Nous concluons que le graphe de la fonction f admet l'asymptote

$$y = 2x + 2. \tag{17.497}$$

△

17.12 Développement en série

17.12.1 Série génératrice d'une suite

Soit u_n une suite telle que le rayon de convergence de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \tag{17.498}$$

soit strictement positif. Alors la série f est la **série génératrice** de la suite (u_n).

Grâce au théorème 17.50 nous pouvons la dériver terme à terme autour de $z = 0$. En utilisant la petite formule (17.152) nous trouvons

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} u_n \frac{n!}{(n-l)!} z^{n-l}, \tag{17.499}$$

EqNGhYCpR

et donc

$$u_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!}. \tag{17.500}$$

D'où le nom de série génératrice. Cela est évidemment intéressant seulement si nous connaissons une autre forme pour f par ailleurs.

Nous en utiliserons une pour déterminer les partitions d'un nombre en parts fixes, proposition 28.105.

17.12.2 Développement en série et Taylor

DefwmRzKh

Définition 17.154.
*Soit une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous disons que f est **développable en série entière** dans un voisinage de z_0 si il existe une série $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \leqslant R$ tel que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{17.501}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Proposition 17.155.
Si V est un ouvert dans $\mathbb{C}$ alors l'ensemble des fonctions $V \to \mathbb{C}$ développables en série entière forme une $\mathbb{C}$-algèbre.

Démonstration. Les séries entières passent aux sommes et aux produits en gardant des rayons de convergence non nuls. □
ThoTGPtDj

Proposition 17.156.
*Si f est développable en série entière à l'origine alors elle est C^∞ sur un voisinage de l'origine et le développement est celui de **Taylor** :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{17.502}$$

pour tout x dans un voisinage de 0.

Démonstration. Si $f(x) = \sum a_n x^n$, nous savons que f est C^1 et que nous pouvons dériver terme à terme (au moins dans un voisinage). De plus le fait de dériver ne change pas le domaine. Par récurrence, la fonction est C^∞ sur le voisinage. En dérivant k fois la série $\sum a_n x^n$ nous trouvons

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}. \tag{17.503}$$

En calculant en $x = 0$ nous trouvons

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \tag{17.504}$$

d'où le terme général

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{17.505}$$

□

Si f est une fonction et si la série

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{17.506}$$

converge, alors cette série est la **série de Taylor** de f.

Remarque 17.157.
La série de Taylor d'une fonction n'est pas liée à sa fonction de façon aussi raide qu'on pourrait le croire. Même dans le cas d'une fonction C^∞ il peut arriver que $T_f(x) \neq f(x)$.

Il peut aussi arriver que f ne soit pas développable en série entière.

Exemple 17.158.
Nous considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{17.507}$$

Nous avons

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{17.508}$$

Note : pour la seconde ligne nous devons faire explicitement le calcul

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} e^{-1/t^2} = 0. \tag{17.509}$$

Plus généralement nous avons $f^{(k)}(0) = 0$, et par conséquent la série de Taylor converge (trivialement) vers la fonction identiquement nulle.

Cette fonction n'est donc pas développable en série entière vu qu'il n'existe aucun voisinage de zéro sur lequel la série de f coïncide avec f. △
ExwobBAW

Exemple 17.159.
Développement de $f(x) = \arctan(x)$. Nous savons que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{17.510}$$

alors que nous connaissons le développement

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \tag{17.511}$$

pour tout $x\in B(0,1)$. Nous avons donc successivement

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}(-x)^n \tag{17.512a}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}(-1)^n x^{2n} \tag{17.512b}$$

$$\arctan(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C. \tag{17.512c}$$

Notons que dans la dernière nous avons évité d'écrire la somme depuis $n=0$ (qui serait un terme constant) et nous avons écris explicitement « $+C$ ». Étant donné que $\arctan(0)=0$, nous devons poser $C=0$ et donc

$$\arctan(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{17.513}$$

△

17.12.3 Resommer une série

Nous avons vu comment trouver la série correspondant à une fonction donnée. Un exercice difficile consiste à trouver la fonction qui correspond à une somme donnée.

17.12.3.1 Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$

Pour calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n \tag{17.514}$$

où P est un polynôme de degré m nous commençons par écrire

$$P(n)=\alpha_0+\alpha_1(n+1)+\alpha_2(n+1)(n+2)+\cdots+\alpha_m(n+1)\dots(n+m). \tag{17.515}$$

Nous décomposons alors la somme en m sommes de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_k\frac{(n+k)!}{n!}x^n=\alpha_k\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+k}\right)^{(k)}. \tag{17.516}$$

Effectuons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}=\frac{1}{1-x}-1-x-x^2 \tag{17.517}$$

Notons que dans un usage pratique, ce terme devra être ensuite dérivé trois fois, de telle manière que les termes « correctifs » n'interviennent pas. Cette méthode ne demande donc que de calculer les dérivées successives de $1/(1-x)$.

Exemple 17.160.
Calculons la fonction

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^3x^n. \tag{17.518}$$

D'abord nous écrivons

$$n^3=-1+7(n+1)-6(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)(n+3). \tag{17.519}$$

Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}. \tag{17.520}$$

De la même façon,

$$\sum_n (n+1)(n+2)x^n = \Big(\sum x^{n+2}\Big)'' = \frac{-2}{(x-1)^3} \tag{17.521a}$$

$$\sum_n (n+1)(n+2)(n+3)x^n = \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{17.521b}$$

En remettant tout ensemble nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n = -\frac{1}{1-x} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{12}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{17.522}$$

Nous pouvons vérifier ce résultat en traçant les deux courbes et en remarquant qu'elles coïncident.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: n=var('n')
sage: S(x)=sum(  [ n**3*x**n for n in range(0,30)  ]   )
sage: f(x)=-1/(1-x)+7/((x-1)**2)+12/((x-1)**3)+6/( (x-1)**4  )
sage: S(0.1)
0.214906264288980
sage: f(0.1)
0.214906264288981
sage: f.plot(-0.5,0.5)+S.plot(-0.5,0.5)
```

△

17.12.3.2 Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$

Si $P(n)$ a des racines entières, nous pouvons le décomposer en fractions simples et utiliser la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \tag{17.523}$$

Nous avons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{17.524a}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}. \tag{17.524b}$$

Notez le changement de point de départ de la somme au passage.

Autre exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right) \tag{17.525a}$$

$$= -\frac{\ln(x-1)}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}. \tag{17.525b}$$

Si le polynôme possède des racines non entières, les choses se compliquent.

Exemple 17.161.
Calculons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}. \tag{17.526}$$

Si $x \geqslant 0$, en posant $t = \sqrt{x}$ nous trouvons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{17.527}$$

Étudions

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{17.528}$$

Nous avons

$$H'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0} (t^2)^n = \frac{1}{1-t^2}. \tag{17.529}$$

Une primitive de cette fonction est

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \tag{17.530}$$

En $t = 0$, cette fonction vaut 0 qui est la bonne valeur. Donc nous avons bien

$$H(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \tag{17.531}$$

Notons que ce que l'équation (17.529) nous dit est que $H(t)$ est une primitive de $1/(1-t^2)$. Il faut choisir la bonne primitive en fixant une valeur.

Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| \tag{17.532}$$

pour $x > 0$. Nous devons encore trouver ce que cela vaut pour $x < 0$.

Nous posons successivement $X = -x$ puis $g(X) = f(-X)$. Ce que nous devons calculer est

$$g(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{17.533}$$

Si nous posons

$$h(t) = \sum \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}, \tag{17.534}$$

alors

$$h'(t) = \sum (-1)^n t^{2n} = \sum (-t^2)^n = \frac{1}{1+t^2}, \tag{17.535}$$

par conséquent $h(t) = \arctan(t)$ (cela avait déjà été déduit à l'envers dans l'exemple 17.159).

Au final

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| & \text{si } x > 0 \\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{17.536}$$

Notons qu'elle est continue en zéro à gauche et à droite.

△

Exemple 17.162.
Nous considérons l'exemple suivant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}. \tag{17.537}$$

Nous posons $t = \sqrt[3]{x}$, et nous substituons :

$$\frac{x^n}{3n+2} = \frac{t^{3n}}{3n+2} = \frac{1}{t^2} \frac{t^{3n+2}}{3n+2}. \tag{17.538}$$

Nous devons étudier la fonction

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+2}}{3n+2} \tag{17.539}$$

Nous avons

$$g'(t) = \sum_{n=0} t^{3n+1} = t \sum_{n=0} t^{3n} = \frac{t}{1-t^3}. \tag{17.540}$$

Notons que $g(0) = 0$. △

Exemple 17.163.
Calculer le nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{17.541}$$ EqgUyKYe

Nous aurions envie de dire que cela est $f(-1)$ pour la fonction f donnée en (17.536). Le problème est que le rayon de convergence de f étant 1, rien n'est garanti quand au fait que la fonction y soit continue en $x = -1$. En particulier nous devons justifier le fait que

$$\lim_{x\to -1} \sum_n \frac{x^n}{2n+1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{-x}} \arctan(\sqrt{-x}). \tag{17.542}$$

Ce qui nous sauve est le critère d'Abel radial (théorème 17.46). En effet la série

$$\sum \frac{r^n}{2n+1} \tag{17.543}$$ EqAFrXRB

étant convergente avec $r = -1$, la série correspondante est continue sur $[-1, 0]$. Nous pouvons donc calculer la série (17.541) en posant $x = -1$ dans (17.536) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{17.544}$$

Note : la série (17.543) ne converge pas avec $r = 1$. La fonction f n'est pas continue en $x = 1$. △
ExGxzLlP

Exemple 17.164.
Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{17.545}$$

En effet si nous désignons par f la somme à gauche, nous trouvons que $f = g'$ avec

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n. \tag{17.546}$$

Nous savons par ailleurs que $g(x) = 1/(1-x)$. Par conséquent

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{17.547}$$

△

17.12.3.3 Sage, primitives et logarithme complexe

ooOPWYooDDSZWx

17.165.
Attention : Sage pourrait nous induire en erreur si nous n'y prenions pas garde. En effet ce que vous ne savez pas mais que Sage sait, c'est que

$$\ln(-1) = i\pi. \tag{17.548}$$

Par conséquent Sage se permet de donner des primitives sans valeurs absolues dans le logarithme :

```
sage: f(x)=1/x
sage: f.integrate(x)
x |--> log(x)
```

La primitive à laquelle on s'attend d'habitude est $\ln(|x|)$. Ici la réponse est correcte parce que si x est négatif nous avons

$$\ln(x) = \ln\big((-1)|x|\big) = \ln(-1) + \ln(|x|). \tag{17.549}$$

Cette fonction est donc décalée de la primitive usuelle seulement de la constante $\ln(-1)$.

Un exemple plus élaboré :

```
sage: h(x)=1/(1-x**2)
sage: H=h.integrate(x)
sage: H
x |--> -1/2*log(x - 1) + 1/2*log(x + 1)
sage: H(0)
-1/2*I*pi
```

Exemple 17.166.
Encore une fois il faut faire attention en demandant la primitive à Sage :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=x/(1-x**3)
sage: F=f.integrate(x)
sage: F(0)
-1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3))
```

Cette fois la primitive proposée diffère de celle qu'on cherche de la constante complexe

$$-\frac{\pi}{3}i. \tag{17.550}$$

Mais il y a pire si nous voulons tracer. Nous voudrions définir la fonction $F_2(x) = F(x) - F(0)$. Mathématiquement c'est bien de cette fonction que nous parlons, mais :

```
sage: F2(x)=F(x)-F(0)
sage: F2(x)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*(2*x + 1)*sqrt(3)) +
    +1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 1/3*log(x - 1) + 1/6*log(x^2 + x + 1)
sage: F2.plot(x,-0.1,0.1)
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        WARNING: When plotting, failed to evaluate function at 200 points.
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        Last error message: 'unable to simplify to float approximation'
```

Il refuse de tracer. Pourquoi ? La partie complexe de l'expression de F_2 est mathématiquement nulle, mais elle est en deux parties :

$$\frac{\pi}{3} + \text{la partie imaginaire de} - \frac{1}{3}\ln(x-1). \tag{17.551}$$

Lorsque Sage tente de tracer, il donne à x un certain nombre de valeurs et calcule une *valeur approchée* de $\ln(x-1)$. Cette dernière ne se simplifie pas avec le nombre *exact* $\pi/3$. Sage reste donc avec une partie imaginaire qu'il ne peut pas tracer.

Notez la nuance :

```
sage: ln(-0.1)
-2.30258509299405 + 3.14159265358979*I
sage: ln(-1/10)
I*pi + log(1/10)
```

Du coup nous avons aussi

```
sage: F2(-0.1)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(0.266666666666667*sqrt(3))
    + 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 0.0474885065133152 - 1.04719755119660*I
```

△

17.12.3.4 Nombres de Bell

Ici nous montrerions bien le théorème 17.189 sur les nombres de Bell parce que c'est essentiellement un résultat sur les séries entières et leurs manipulations. Hélas, il demande un tout petit peu d'équation différentielle (presque rien). Donc il est postposé jusqu'en page 1474.

17.13 Séries entières de matrices

secEVnZXgf

Nous nous proposons d'étudier des séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{17.552}$$

où A est une matrice. L'essentiel de la théorie va rester. Nous considérons une norme algébrique (définition 12.87), c'est-à-dire $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

17.13.1 Rayon de convergence

La notion de rayon de convergence de cette série reste la même : c'est la définition 17.12 qui ne dépend que des coefficients a_k et pas du tout de ce qu'on met à côté dans la somme. Évidemment il faudra montrer que dans le cas des matrices, le nom « rayon de convergence » n'est pas usurpé.

PropFIPooSSmJDQ

Proposition 17.167.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\|A\| < R$. Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{17.553}$$

converge absolument, c'est-à-dire que $\sum_k \|a_k A^k\| < \infty$.

Démonstration. Nous avons les majorations

$$\|a_n A^n\| \leqslant |a_n| \|A^n\| \leqslant |a_n| \|A\|^n. \tag{17.554}$$

Par hypothèse $\|A\| < R$ et R est un supremum, donc il existe r tel que $\|A\| < r < R$ avec $(a_n r^n)$ borné. Nommons M un majorant de la suite $(a_n r^n)$. Alors nous avons

$$\|a_n A^n\| \leqslant |a_n| r^n \frac{\|A\|^n}{r^n} \leqslant M \left(\frac{\|A\|}{r} \right)^n. \tag{17.555}$$

La série du membre de droite converge parce que c'est une série géométrique de raison plus petite que 1, proposition 12.186. □

17.13.2 Convergence et rayon spectral

Le concept de rayon spectral permet aussi de donner des informations sur la convergence de séries de matrices. Pour rappel le rayon spectral d'une matrice est le maximum du module de ses valeurs propres (définition 12.88). Le rayon spectral de la matrice A est noté $\rho(A)$.

La proposition suivante sera redémontrée indépendamment dans le théorème 17.169.

PROPooDJFLooBqqEPT

Proposition 17.168 ([121]).
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) < 1$, alors $A^n \to 0$.

Démonstration. Nous nous plaçons dans une base des espaces caractéristiques[61] de A, c'est-à-dire que nous supposons que la matrice A a la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \mathbb{1} + N_s \end{pmatrix} \tag{17.556}$$

EqWMykgLo

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les N_i sont nilpotentes. En effet nous savons que l'espace caractéristique F_{λ_i} est l'espace de nilpolence de $A - \lambda_i \mathbb{1}$. Si nous notons A_i la restriction de A à cet espace, la matrice $N_i = A_i - \lambda_i \mathbb{1}$ est nilpotente. Du coup $A_i = \lambda_I \mathbb{1} + N_i$ et nous avons bien la décomposition (17.556).

Nous avons donc $A^n \to 0$ si et seulement si $(N_i + \lambda_i \mathbb{1})^n \to 0$ pour tout i. Soit donc N nilpotente et $\lambda < 1$ (parce que nous savons que toutes les valeurs propres de A sont inférieures à un). Nous avons

$$(\lambda \mathbb{1} + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k. \tag{17.557}$$

Nous voyons que le nombre de termes dans la somme ne dépend pas de n. De plus pour chacun de termes, la puissance de N ne dépend pas non plus de n. Le terme

$$\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \leqslant P(n) \lambda^{n-k} \tag{17.558}$$

où P est un polynôme tend vers zéro lorsque n devient grand parce que c'est un cas polynôme fois exponentielle. □

[61] Voir le théorème 10.264

THOooMNLGooKETwhh

Théorème 17.169 (Série de Von Neumann, thème 41[462]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les affirmations suivantes sont équivalentes.

ITEMooCGLSooZsMXSt

(1) $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$

ITEMooYBGEooXAzVbD

(2) $\rho(A) < 1$

ITEMooEJSQooTqkBbo

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ *converge.*

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, nous avons aussi

- $\mathbb{1} - A$ *est inversible,*
- $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (\mathbb{1} - A)^{-1}$

Démonstration. Nous supposons qu'une norme est donnée sur $\mathbb{K}^n$ et nous considérons sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ la topologie associée à la norme subordonnée[62]. Nous subdivisons la preuves en différentes implications.

(1) **(1) implique (2)** Si $\rho(A) \geqslant 1$, en combinant la proposition 14.116 avec la proposition 14.118, nous avons

$$\|A^m\| \geqslant \big(\rho(A)\big)^m \geqslant 1 \tag{17.559}$$

Mais la limite $A^k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})} 0$ signifie la limite $\|A^k\| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. Le fait que tous les éléments de la suite soient plus grand que 1 empêche cette limite.

(2) **(2) implique (1)**
Vu que $\rho(A) < 1$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. Par le lemme 14.117 il existe une norme N sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon < 1$. Notons que cette norme N dépend de A et de ϵ.

Avec cette norme nous avons

$$N(A^k) \leqslant N(A)^k \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{17.560}$$

Cela signifie que $A^k \xrightarrow{N} 0$. L'équivalence entre toutes les normes sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ donne alors la convergence $A^k \xrightarrow{\|.\|} 0$.

Pour une preuve alternative de cette implication, voir la proposition 17.168.

(3) **(3) implique (1)**
La convergence d'une série implique que la norme du terme général converge vers zéro par la proposition 12.133. Nous avons donc $\|A^k\| \to 0$, ce qui signifie $A^k \to 0$, et donc $\rho(A) < 1$ parce que (1) implique (2).

(4) $\rho(A) < 1$ **implique** $\mathbb{1} - A$ **est inversible**
Si μ est une valeur propre de $\mathbb{1} - A$ alors

$$\det\big((\mathbb{1} - A) - \mu\mathbb{1}\big) = \det\big(A - (1-\mu)\mathbb{1}\big), \tag{17.561}$$

donc $1 - \mu$ est une valeur propre de A. Donc les valeurs propres de $\mathbb{1} - A$ sont les nombres $1 - \lambda_i$ où les λ sont les valeurs propres de A. Par hypothèse, nous avons $\lambda_i < 1$ pour tout i, donc les valeurs propres de $\mathbb{1} - A$ sont toutes non nulles. Donc $\mathbb{1} - A$ est inversible (pas de noyau).

(5) **Le reste** Nous montrons à présent que si $\rho(A) < 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge vers $\mathbb{1} - A$. Pour cela nous savons déjà que $\mathbb{1} - A$ est inversible. Nous posons

$$B_m = \mathbb{1} + A + \ldots + A^m, \tag{17.562}$$

ce qui donne immédiatement $AB_m = A + A^2 + \ldots + A^{m+1}$. Nous avons donc

$$(\mathbb{1} - A)B_m = \mathbb{1} - A^{m+1}. \tag{17.563}$$

Nous savons que $\lim_{m\to 0} A^m = 0$, donc

$$(\mathbb{1} - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{k\to\infty}(\mathbb{1} - A)B_k = \lim_{k\to\infty}(\mathbb{1} - A^{k+1}) = \mathbb{1}. \tag{17.564}$$

Notez au passage que nous avons permuté la somme avec le produit matriciel (voir 12.7.3).

□

[62] Si on parle de convergence d'une suite, c'est qu'il y a une topologie quelque part.

17.13.3 Exponentielle et logarithme de matrice

subsecXNcaQfZ

La définition de l'exponentielle dans le cas des matrices est celle sur les algèbres normées non commutatives, 17.76.

PropXFfOiOb

Proposition 17.170.
L'application

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\end{aligned} \tag{17.565}$$

est une application de classe C^∞. Sa différentielle en zéro est l'identité : $(d\exp)_0 = \mathrm{Id}$.

Démonstration. En ce qui concerne la continuité, nous savons que le rayon de convergence de la suite $\frac{1}{k!}$ est infini ; la proposition 17.149 conclut.

Pour la différentielle, c'est la proposition 17.148 qui nous permet d'écrire

$$d\exp_0(U) = \frac{d}{dt}\Big[\exp(tU)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kU^k}{k!}\Big]_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kt^{k-1}U^k}{k!}\Big|_{t=0} = U \tag{17.566}$$

parce que seul le terme $k=1$ n'est pas nul. □

Nous avons vu par la proposition 17.150 que toute matrice complexe inversible a un logarithme. Nous allons maintenant parler de logarithme de matrices réelles avec une condition sur la norme. La formule ci-dessous montre explicitement que le logarithme est réel.

$$\begin{aligned}\ln\colon \{A\in\mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } \|A-\mathbb{1}\|<1\} &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(A-\mathbb{1})^{k+1}}{k+1}.\end{aligned} \tag{17.567}$$

LemQZIQxaB

Lemme 17.171.
Si $\|m\|<1$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, alors nous posons

$$\ln(\mathbb{1}+m) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{k+1}}{k+1}. \tag{17.568}$$

EqIKsMabb

Cette fonction a les propriétés suivantes.

(1) Elle est de classe C^∞.

(2) Elle est un bon logarithme au sens où

$$e^{\ln(\mathbb{1}+m)} = \mathbb{1}+m. \tag{17.569}$$

(3) Elle vérifie l'approximation

$$\ln(1+m) = m+\sigma(m) \tag{17.570}$$

où σ a la propriété que

$$\lim_{k\to\infty} k\sigma\left(\frac{m}{k}\right) = 0. \tag{17.571}$$

Démonstration. Le rayon de convergence de la suite $a_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ est 1. Donc l'application donnée est C^∞ sur $B(0,1)$ par le théorème 17.149.

D'après la formule (17.568) nous avons

$$\sigma(m) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{m^{l+1}}{l+1}. \tag{17.572}$$

Nous avons alors

$$k\sigma(\frac{m}{k}) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{m^{l+1}}{k^l(l+1)}, \tag{17.573}$$

et donc

$$\|k\sigma(\frac{m}{k})\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|m\|^{l+1}}{k^l(l+1)} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|m\|^{l+1}}{l+1} \overset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{17.574}$$

Cela prouve la dernière assertion. □

Proposition 17.172.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \in \mathrm{End}(V)$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathrm{End}(V) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned} \tag{17.575}$$

Cette fonction vérifie

$$f'(t) = \big(e^{tA}\big)' = Ae^{tA}. \tag{17.576}$$

Démonstration. Si nous posons $f_k(t) = \frac{t^k A^k}{k!}$ alors la fonction f est la somme : $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Nous allons permuter la somme et la dérivation à l'aide du théorème 17.9. Vu que

$$f_k'(t) = \frac{kt^{k-1}A^k}{k!}, \tag{17.577}$$

la suite des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$, nous pouvons dériver terme à terme pour obtenir

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}. \tag{17.578}$$

Notez le jeu au niveau du point départ de la somme : elle passe de 0 à 1 parce que le terme zéro est nul, mais la simplification $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ n'a pas de sens pour $k = 0$. □

LemQEARooLRXEef

Lemme 17.173 ([568]).
Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Si nous notons λ_i $(i = 1, \dots, r)$ les valeurs propres distinctes de A alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big)\sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}. \tag{17.579}$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A se note, d'après le corolaire 14.112 de la façon suivante :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i} \tag{17.580}$$

où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i. Le lemme des noyaux 10.90 nous dit qu'en posant

$$V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} \tag{17.581}$$

nous avons $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$. Nous nommons $p_i\colon V \to V$ la projection canonique de E sur V_i ainsi que x_i la composante de $x \in V$ dans l'espace caractéristique V_i et nous posons $A_i = p_i \circ A$. Les espaces caractéristiques sont stables par A (lemme 10.261), donc $(Ax_i)_i = Ax_i$. Par conséquent $\sum_i A_i p_i = A$ parce que

$$\big(\sum_i p_i A p_i\big)(x) = \sum_i (Ax_i)_i = \sum_i Ax_i = A\sum_i x_i = Ax. \tag{17.582}$$

En ce qui concerne les puissances de A nous avons de même

$$A_i^n x_i = A_i \underbrace{A_i^{n-1}x_i}_{\in V_i} = AA_i^{n-1}x_i = A^n x_i, \tag{17.583}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{r} A_i^n p_i = A^n. \tag{17.584}$$

En particulier,

$$e^{tA} = \sum_i e^{tA_i}p_i. \tag{17.585}$$

EqPVIooGxwFBH

C'est de cette exponentielle de matrice que nous devons étudier la norme.

La décomposition de Dunford du théorème 10.265 est toujours un bon plan pour traiter avec les exponentielles : nous avons $A = s + n$ avec

$$s = \sum_k \lambda_k p_k, \quad n = \sum_k (A - \lambda_k \mathbb{1})p_k. \tag{17.586}$$

Nous montrons que la décomposition de Dunford de p_iA est $p_iA = p_is + p_in$. Nous avons

$$p_is = \sum_k \lambda_k p_i p_k = \lambda_i p_i \tag{17.587}$$

qui est bien diagonalisable. De plus les espaces caractéristiques sont stables par n, donc p_in est nilpotent. Enfin ils commutent :

$$[p_is, p_in] = \lambda_i(p_in - p_inp_i). \tag{17.588}$$ EqNJIooDxKlxn

Vu que n préserve les espaces caractéristiques, lorsque $v \in V_k$ avec $k \neq i$ nous avons $p_inp_iv = 0$ et $p_inv = 0$. Mais si $v \in V_i$ alors

$$p_inp_iv = p_inv = nv \tag{17.589}$$

et $p_inv = nv$, donc les opérateurs p_in et p_inp_i sont égaux et (17.588) donne bien zéro. En ce qui concerne l'exponentielle de A_i nous avons

$$e^{p_iA} = e^{p_is}e^{p_in} = e^{\lambda_ip_i}\exp\big((A - \lambda_i\mathbb{1})p_i\big). \tag{17.590}$$

Nous pouvons maintenant sérieusement nous attaquer à la norme de e^{tA} de l'équation (17.585). D'abord nous avons $\|p_i\| = 1$ parce que l'opérateur p_i est l'identité sur au moins un vecteur (en fait tout ceux de l'espace caractéristique V_i). En utilisant les propriétés de la norme opérateur[63], nous trouvons dans un premier temps[64] :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r}\|e^{tA_i}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r}|e^{t\lambda_i}|\underbrace{\sum_{k=0}^{m_i}\frac{|t|^k}{k!}\|A - \lambda_i\mathbb{1}_i\|^k}_{=P_i(|t|}} \tag{17.591}$$

où $\mathbb{1}_i$ est l'opérateur identité sur V_i. Petit détail dans le calcul :

$$\|e^{\lambda_ip_i}\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^l}{k!}\|p_i\|^l = e^{\lambda_i}. \tag{17.592}$$

Notons que tous les termes de $P_i(|t|)$ et $P_i\big(|t|\big)$ sont positifs, de telle sorte que nous pouvons majorer en ajoutant des termes partout. À la place d'avoir $P_i(|t|)$ comme coefficient de $|e^{t\lambda_i}|$ nous majorons en mettant $\sum_{j=1}^{r}P_j(|t|)$ comme coefficient :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r}|e^{t\lambda_i}|P_i\big(|t|\big) = \sum_{i=1}^{r}|e^{t\lambda_i}|\sum_{j=1}^{r}P_j\big(|t|\big) = P\big(|t|\big)\sum_{i=1}^{r}e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}. \tag{17.593}$$

L'arrivée de la partie réelle est une égalité usuelle pour les nombres complexes : $|e^{a+bi}| = e^a|e^{bi}| = e^a$. □

17.13.4 Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice

SUBSECooGAHVooBRUFub

Nous reprenons l'exemple de [569]. Soit A une matrice dont le polynôme minimum s'écrit

$$P(X) = (X-1)^2(X-2). \tag{17.594}$$

Par le théorème 10.90 de décomposition des noyaux nous avons

$$E = \ker(A-1)^2 \oplus \ker(A-2). \tag{17.595}$$

En suivant les notations de ce théorème nous avons $P_1(X) = (X-1)^2$, $P_2(X) = X - 2$ et

$$Q_1(X) = X - 2 \tag{17.596a}$$
$$Q_2(X) = (X-1)^2. \tag{17.596b}$$

En posant

$$\begin{aligned} R_1(X) &= -X \\ R_2(X) &= 1, \end{aligned} \tag{17.597}$$

nous avons une solution de Bezout :

$$R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1. \tag{17.598}$$

[63] Surtout le fait que ce soit une norme d'algèbre, lemme 12.97.
[64] Si les valeurs propres de A sont λ_i, celles de tA sont $t\lambda_i$.

Conformément au théorème 10.90(3), le projecteur p_i sur $\ker\big(P_i(A)\big)$ est $(R_iQ_i)(A)$:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathtt{proj}_{\ker(A-1)^2} = -A(A-2) \\ p_2 &= \mathtt{proj}_{\ker(A-2)} = (A-1)^2 \end{aligned} \tag{17.599}$$

Passons maintenant au calcul de l'exponentielle[65]. Nous avons évidemment

$$e^A = e^Ap_1 + e^Ap_2. \tag{17.600}$$ EQooVIOWopACVAoZ

Afin de nous adapter au projecteurs que nous avons en main, nous écrivons $A = \mathbb{1}+(A-\mathbb{1})$ et nous utilisons la proposition 17.79(4) :

$$e^A = e^{\mathbb{1}+(A-\mathbb{1})} = e^{\mathbb{1}}e^{A-\mathbb{1}} = ee^{A-1}. \tag{17.601}$$

Pour tout x, nous avons $(A-\mathbb{1})^kp_1(x) = 0$ dès que $k \geqslant 2$. Donc nous avons

$$e^Ap_1(x) = ee^{A-1}p_1(x) = e\sum_k \frac{(A-\mathbb{1})^k}{k!}p_1(x) = ep_1(x) + e(A-\mathbb{1})p_1(x) = eAp_1(x). \tag{17.602}$$

En ce qui concerne p_2 nous faisons de même en partant de $e^A = e^{2\mathbb{1}}e^{A-2\mathbb{1}}$:

$$e^Ap_2(x) = e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A-\mathbb{1})^k}{k!}p_2(x) = e^2p_2(x). \tag{17.603}$$

En recollant les morceaux avec (17.600),

$$e^A(x) = eAp_1(x) + e^2p_2(x) = -eA^2(A-2)x + e^2(A-1)^2x. \tag{17.604}$$

Au final nous avons prouvé que

$$e^A = -eA^2(A-2) + e^2(A-1)^2. \tag{17.605}$$

PROPooFXPZooKUEarD

Proposition 17.174 ([1]).
Soit un espace de Banach réel E. Nous considérons l'espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$ muni de la norme opérateur.

(1) La partie $\mathrm{GL}(E)$ des opérateurs inversibles est ouverte.

(2) L'opérateur d'inversion

$$\begin{aligned} i\colon \mathrm{GL}(E) &\to \mathrm{GL}(E) \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned} \tag{17.606}$$

est analytique.

Démonstration. La partie $\mathrm{GL}(E)$ est formée des opérateurs inversibles qui sont continus et dont l'inverse est continu. Or un opérateur est continu si et seulement si il est borné (proposition 12.98).

Donc $\mathrm{GL}(E)$ est une intersection de deux ouverts de $\mathrm{End}(E)$: les opérateurs linéaires continus et les opérateurs linéaires inversibles. Donc $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert.

Vu que $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert et contenu dans Ω, une application analytique sur Ω est analytique sur $\mathrm{GL}(E)$. □

17.14 Lemme de Borel

17.14.1 Fonctions plateaux, Urysohn, partition de l'unité

subsecOSYAooXXCVjv

Une fonction plateau sur $\mathbb{R}$ est donnée dans le lemme d'Urysohn 17.183. Sur $\mathbb{R}^n$, il y a le lemme d'Urysohn 29.87.

Vous voulez une fonction de classe C^∞ nulle sur un ouvert, mais qui n'est pas nulle partout ? En voici une.

LEMooFLUSooKaZRRY

Lemme 17.175.
La fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.607}$$

est de classe C^∞.

[65] Définition 17.76. Thème 50

Démonstration. Pour tout polynôme P nous avons la limite[66]

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{P(x)} = 0. \tag{17.608}$$

De là, en écrivant les dérivées successives de φ, il est facile de voir qu'elles sont continues en $x = 0$. □

Une variation sur le même thème est l'existence de fonctions infiniment dérivables à support compact, c'est-à-dire des fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

LEMooLHIFooWpbauN

Lemme 17.176 ([1])**.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^n} = 0. \tag{17.609}$$

Démonstration. D'abord le lemme 17.119 nous indique que

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0. \tag{17.610}$$

Nous prouvons ensuite que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0. \tag{17.611}$$

Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$. Soit $M > 0$ tel que $x^n e^{-x} < \epsilon$ pour tout $x > M$. Nous considérons δ tel que $0 < x < \delta$ implique $1/x > M$.

Pour de tels x, nous avons $e^{-1/x}/x^n < \epsilon$.

Nous montrons enfin que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)} = 0. \tag{17.612}$$

Pour cela, soit $\epsilon > 0$. Soit δ tel que $0 < x < \delta$ implique $e^{-1/x}/x^n < \epsilon$. Soit δ' tel que $1 < x < 1+\delta'$ implique $1 - x^2 < \delta$. Avec ça, nous avons

$$1 < x < 1 + \delta' \Rightarrow \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^n} < \epsilon. \tag{17.613}$$

□

PROPooAHLKooMFMgFq

Proposition 17.177.
La fonction $\xi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-\|x\|^2)} & \text{si } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.614}$$

EqQBYNEMu

est de classe C^∞ et à support compact.

Démonstration. Le fait que le support soit compact est le fait qu'un support est toujours fermé (c'est dans la définition) et que le support de ξ est borné, contenu dans $B(0,1)$. Le vrai travail est de montrer que cette fonction est de classe C^∞.

Nous commençons par voir en dimension 1. C'est-à-dire la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{17.615}$$

Le lemme 17.176 dit que f est continue. En ce qui concerne les dérivées de f, vous pouvez montrer par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P_n(x)}{(x^2-1)} f(x) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{17.616}$$

où P_n est un polynôme. Le lemme 17.176 (encore lui) nous indique que $f^{(n)}$ est continue.

Pour que ξ soit de classe C^∞, il suffit maintenant d'invoquer la proposition 9.312 qui dit que la norme est une application de classe C^∞. □

[66] Voir la proposition 17.120(3).

COROOHHZXooXmwGmC

Corolaire 17.178.
Il existe une fonction $\xi \in \mathscr{D}\big(B(0,R)\big)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \xi(x)dx = 1$.

Démonstration. Prenez la fonction de la proposition 17.177. Si $R < 1$, faites une redéfinition $\xi_2 = \xi(\lambda x)$ pour que le support soit dans $B(0,R)$. Ensuite, si l'intégrale n'est pas 1, encore une redéfinition $\xi_3 = \mu\xi_2$. □

LEMooRVSIooKcpWoK

Lemme 17.179 ([194]).
Soit $m > 0$. Il existe une application $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\psi_m(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x > m \\ positive & si\ x \in [0,m]. \end{cases} \tag{17.617}$$

Démonstration. La proposition 17.177 dit que l'application

$$\begin{aligned} \xi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{17.618}$$

est de classe C^∞ à support compact. Nous posons $M = \int_{\mathbb{R}} \xi$ et

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{x} \xi(t)dt. \end{aligned} \tag{17.619}$$

Notez que l'intégrale n'est en réalité qu'entre -1 et x parce que ξ est nulle en-dehors de $|x| < 1$. Nous avons donc $f(x) = 0$ pour tout $x < -1$. Vu que $\int_1^a \xi$ est nulle pour tout $a > 1$, nous avons aussi $f(x) = f(1) = 1$ pour tout $x > 1$.

L'application f est non nulle entre -1 et 1, vaut 0 à gauche et 1 à droite. Il reste à adapter pour construire ψ_m. On pose

$$\psi_m(x) = 1 - (f \circ \mu)(x) \tag{17.620}$$

où $\mu(x) = ax + b$. Les paramètres a et b sont fixés pour avoir $\mu(0) = -1$ et $\mu(m) = 1$. Ce n'est pas très compliqué à résoudre, et le résultat est que l'application recherchée est

$$\psi_m(x) = 1 - f\big(\frac{2}{m}x - 1\big). \tag{17.621}$$

□

LEMooFFPVooDKGUAp

Lemme 17.180 ([302]).
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

(1) $0 \leqslant f \leqslant 1$,

(2) $f = 0$ *sur* $]-\infty, a]$,

(3) $f = 1$ *sur* $[b, \infty[$.

Démonstration. C'est une variation sur le thème de la fonction du lemme 17.179 ; il s'agit de la retourner, dilater et décaler. Posez successivement $f_1(x) = \psi_m(-x)$, $f_2(x) = f_1\big(mx/(b-a)\big)$ et $f_3(x) = f_2(x-a)$ et je crois que le compte est bon. La fonction f_3 est celle que nous cherchons. □

PROPooAZJZooTYWjzb

Proposition 17.181.
Soient $a < b < c < d$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs positives telle que

(1) $f(x) = 1$ *si* $x \in [b,c]$

(2) $\text{supp}(f) \subset [a,d]$.

Démonstration. Nous considérons la fonction ψ_m du lemme 17.179, et nous considérons les fonctions

$$f_1(x) = \psi_{d-c}(x-c) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c \\ 0 & \text{si } x > d \\ \text{positive} & \text{si } x \in [c,d]. \end{cases} \tag{17.622a}$$

$$f_2(x) = \psi(b-a)(b-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \\ \text{positive} & \text{si } x \in [a,b]. \end{cases}, \tag{17.622b}$$

et finalement la fonction suivante répond à la question des fonctions plateaux sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x). \tag{17.623}$$

EqIHAEooXjfcll

□

Il ne faudrait pas croire pour autant que tout est toujours rose au pays des fonctions C^∞ à support compact.

Proposition 17.182.
Si ϕ est une fonction C^∞ non nulle à support compact sur $\mathbb{R}$, alors ϕ'/ϕ n'est pas bornée.

Plus présisément, nous posons $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \phi(x) \neq 0\}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi'(x)/\phi(x) \end{aligned} \tag{17.624}$$

n'est pas bornée.

Démonstration. Quitte à décaller et à multiplier, nous supposons que $\phi(0) = 1$. Sinon vous considérez x_0 tel que $\phi(x_0) = y_0 \neq 0$ et vous adaptez tout le reste de la démonstration à vos frais.

Vu que ϕ est continue, la partie $Z = \{x \geqslant 0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \phi(x) = 0\}$ est fermée. Elle est également bornée vers le bas par 0. Donc elle possède un minimum que nous nommons a :

$$a = \min\{x \geqslant 0 \text{ tel que } \phi(x) = 0\}. \tag{17.625}$$

Les valeurs de ϕ qui vons nous intéresser sont :

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in [0,a[\\ = 0 & \text{si } x = a. \end{cases} \tag{17.626}$$

Enfin, nous posons

$$M = \sup\{\phi'(x)/\phi(x)\}_{x\in[0,a[}. \tag{17.627}$$

Nous supposons que $M < \infty$[67].

Nous posons

$$\begin{aligned} F\colon [0,a[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}dt. \end{aligned} \tag{17.628}$$

Vu que ϕ est de classe C^∞ et que x est dans $[0,a[$ sur lequel ϕ ne s'annule pas, cette intégrale n'a rien d'exceptionnel.

Nous pouvons majorer F de la façon suivantes :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}dt \leqslant \int_0^x M dt = Mx < Ma. \tag{17.629}$$

La proposition 16.289 lie primitive et intégrale ; celle de $\phi'(x)/\phi(x)$ est $\ln\big(\phi(x)\big)$ nous avons donc

$$F(x) = \ln(\phi(x)) - \ln(\phi(0)) = \ln\big(\phi(x)\big). \tag{17.630}$$

EQooCEVKooLgXiaj

Mais vu que $\lim_{x\to a}\phi(x) = 0$, nous avons $\lim_{x\to a} F(x) = \infty$, d'où la contradiction. □

Notez que l'expression 17.630 montre que $\phi'(x)/\phi(x)$ tend vers $-\infty$, ce qui est logique : la dérivée est négative alors que ϕ reste positive. Ce que dit la proposition est qu'une fonction C^∞ à support compact tend plus vite vers zéro que sa dérivée.

[67] Vous pouvez ne pas supposer cela et voir le reste de la preuve comme une démonstration que $M = \infty$. Ici nous allons faire par l'absurde et montrer une contradiction en supposant que $M < \infty$.

17.14.2 Lemme de Urysohn

Le lemme d'Urysohn comprend de nombreuses variantes plus ou moins générales[68]. En voici une parmi les plus simples.

LEMooECTNooKagaRU

Lemme 17.183 (Lemme d'Urysohn)**.**
Soient un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ et un compact K inclus dans $\mathcal{U}$. Il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^∞ telle que

(1) $f(x) = 1$ *pour* $x \in K$,

(2) $\text{supp}(f) \subset \mathcal{U}$.

Démonstration. Vu que K est compact, il est borné (théorème 11.23). Nous posons $b = \min(K)$ et $c = \max(K)$. En particulier b et c sont des éléments de K et donc de $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe des boules centrées en b et c contenues dans $\mathcal{U}$. Soit r le rayon de telles boules :

$$B(b,r) \subset \mathcal{U} \tag{17.631a}$$
$$B(c,r) \subset \mathcal{U}. \tag{17.631b}$$

Nous posons $a = b - r \in \mathcal{U}$ et $d = c + r \in \mathcal{U}$. Nous considérons à présent la fonction plateau f de la proposition 17.181. Elle est de classe C^∞ et vérifie $f(x) = 1$ pour $x \in [b,c] = K$ ainsi que $f(x) = 0$ hors de $[a,d] \subset \mathcal{U}$. □

17.184.
Notons que la fonction du lemme d'Urysohn 17.183 n'épouse pas spécialement très bien la forme de K. Si par exemple $K = [0,1] \cup [10,11]$, la fonction f sera égale à 1 au moins sur $[0,11]$.

LEMooKMZPooUOwlpt

Lemme 17.185 (Lemme de Urysohn[570])**.**
Si X est un espace topologique normal et si A et B sont des fermés disjoints dans X, alors il existe une fonction $f\colon X \to [0,1]$ telle que

(1) f *est continue,*

(2) $f(A) = \{1\}$,

(3) $f(B) = \{0\}$

LEMooGZXYooZqFzyc

Lemme 17.186 ([1])**.**
Si une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est intégrable, et si $s \in \mathbb{R}$ alors l'application

$$\begin{aligned} f_s\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{s^n} f(x/s) \end{aligned} \tag{17.632}$$

est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s = \int_{\mathbb{R}^n} f. \tag{17.633}$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le théorème 16.284(2) au changement de variable $\phi(x) = x/s$. Nous avons $f_s = \frac{1}{s^n} f \circ \phi$, et

$$(d\phi)_a v = \frac{1}{s} v, \tag{17.634}$$

de telle sorte que le déterminant de $d\phi$ soit une constante et vaille $\det(d\phi) = 1/s^n$. Enfin ϕ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Nous avons tous les ingrédients pour faire le changement de variables :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \phi)(x) \frac{1}{s^n} dx = \int_{\phi(\mathbb{R}^n)} f(xdx). \tag{17.635}$$

□

Pour une fonction plateau sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, voir le lemme d'Urysohn, proposition 29.87.

[68] Pour une version sur $\mathbb{R}^n$, voir la proposition 29.87.

17.14.3 Le lemme de Borel

LemRENIIEL

Lemme 17.187 (Lemme de Borel[112]).
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et telle que $\text{supp}(\varphi) \subset]-1,1[$.

Nous commençons par considérer une suite de réels strictement positifs (λ_k) dont nous fixerons une valeur précise plus tard, et nous posons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x)\frac{a_k}{k!}x^k. \tag{17.636}$$

Nous allons étudier la convergence et les propriétés de $u(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$.

Calculons (formellement) la m^{e} dérivée de f_k :

$$f_k^{(m)}(x) = \frac{a_k}{k!}\sum_{l=0}^m \binom{m}{l}\lambda_k^{m-l}\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)(x^k)^{(l)} \tag{17.637a}$$

$$= a_k \sum_{l=0}^m \binom{m}{l}\lambda_k^{m-l}\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)\frac{x^{k-l}}{(k-l)!}. \tag{17.637b}$$

Notons que nous travaillons à m fixé et que nous ne nous intéressons qu'aux termes avec k assez grand ; nous pouvons donc supposer $k \geqslant m$. De toutes façons pour $\sum_{k=0}^m f_k$, on a la classe C^∞, et la permutation de la somme avec tout ce qu'on veut. Vu que φ est continue à support compact nous pouvons poser

$$M_m = \max_{0\leqslant j\leqslant m}\|\varphi^j\|_\infty = \max_{0\leqslant j\leqslant m}\max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi^{(j)}(x)|. \tag{17.638}$$

Nous continuons en nous fixant un $x \in \mathbb{R}$ et un $k \geqslant m$.

Si $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$, alors $\varphi^{(m)}(\lambda_k x) = 0$ parce que $\lambda_k x$ est strictement hors du support de φ qui est $]-1,1[$. Donc pour $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$.

Si par contre $|x| \leqslant \frac{1}{\lambda_k}$, nous avons les majorations

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant |a_k|\sum_{l=0}^m \binom{m}{l}|\lambda_k|^{m-l}\underbrace{\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)}_{\leqslant M_m}\frac{1}{(k-l)!}\underbrace{|x|^{k-l}}_{\leqslant(1/\lambda_k)^{k-l}} \tag{17.639a}$$

$$\leqslant |a_k|M_m|\lambda_k|^{m-k}\frac{1}{(k-m)!}\sum_{l=0}^m\binom{m}{l} \tag{17.639b}$$

$$\leqslant \frac{|a_k|M_m|\lambda_k|^{m-k}2^m}{(k-m)!} \tag{17.639c}$$

$$= \frac{|a_k|M_m 2^m}{(k-m)!|\lambda_k|^{k-m}} \tag{17.639d}$$

EqQSPUaun

où pour faire disparaitre la somme de coefficients binomiaux, nous avons remarqué que $\sum_{l=0}^m\binom{m}{l}$ est le nombre total de termes dans le développement de $(a+b)^m$, c'est-à-dire 2^m. Nous voulons, pour m fixé, étudier la convergence de la somme de cela. Notons que le 2^m n'a en particulier strictement aucune importance parce qu'on travaille à m fixé.

Nous fixons maintenant la valeur des λ_k :

$$\lambda_k = \max\{|a_k|, 1\}. \tag{17.640}$$

Avec cela, en nous souvenant que nous n'étudions que les termes $k > m$, le dénominateur de (17.639d) est réellement croissant en k, donc nous avons la majoration

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M_m 2^m}{(k-m)!}. \tag{17.641}$$

Au final nous avons

$$\|f_k^{(m)}\|_\infty \leqslant \frac{2^m M_m}{(k-m)!}. \tag{17.642}$$

Et la somme de cela converge sans difficultés. Donc la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k^{(m)}(x) \tag{17.643}$$

converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors permuter la somme et la dérivation par le théorème 17.3. Donc

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)} \tag{17.644}$$

est continue. En particulier, pour évaluer en zéro, on peut faire

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0). \tag{17.645}$$

Nous avons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x)\frac{a_k}{k!}x^k. \tag{17.646}$$

Pour calculer la dérivée en zéro, il suffit de la calculer sur un voisinage sur lequel $\varphi(\lambda_k x)$ est la constante 1 ; un tel voisinage existe pour tout k. À ce moment le calcul est classique :

$$f_k^{(m)}(x) = \begin{cases} a_k & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.647}$$

Finalement nous avons bien

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0) = a_k. \tag{17.648}$$

□

Remarque 17.188.
Pour prouver le lemme de Borel, la première chose qui passe par la tête est la fonction toute simple

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}x^k. \tag{17.649}$$

Évidemment si on calcule les dérivées successives de cette fonction, nous trouvons les bons résultats. Le problème est la convergence. Rien qu'en prenant $a_k = k!k^k$, la série ne converge pour aucun x positif. L'idée de multiplier chacun de f_k par une fonction plateau sur un petit intervalle autour de zéro a plusieurs avantages. D'abord on conserve les dérivées correctes parce qu'on ne touche pas à la valeur des f_k sur un petit voisinage. Ensuite cela ne modifie pas la continuité ; et enfin en multipliant par $\varphi(\lambda_k x)$, ça calme méchamment les divergences parce que $\lambda_k x$ passe vite au dessus de 1 (et donc en dehors du support de φ) si λ_k est grand. D'où le fait qu'il soit normal que les λ_k soient de l'ordre des a_k.

17.15 Nombres de Bell

ThoYFAzwSg

Théorème 17.189 (Nombres de Bell[112])**.**
Soient $n \geqslant 1$ et B_n le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ avec la convention que $B_0 = 0$. Alors

(1) La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n \tag{17.650}$$

EqYCMGBmP

a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme est donnée par

$$f(x) = e^{e^x - 1} \tag{17.651}$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \tag{17.652}$$

(3) Le rayon de convergence de la série (17.650) est en réalité infini : $R = \infty$.

Démonstration. (1) Soient $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Nous notons E_k l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n+1\}$ pour lesquelles le « paquet » contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Calculons le cardinal de E_k.

Pour construire un élément de E_k, il faut d'abord prendre le nombre $n+1$ et lui adjoindre k éléments choisis dans $\{1, \dots, n\}$, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite il faut trouver une partition des $(n+1)-(k+1) = n-k$ éléments restants, ce qui fait B_{n-k} possibilités. Donc

$$\operatorname{Card}(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}. \tag{17.653}$$

L'intérêt des ensembles E_k est que $\{E_0, \dots, E_n\}$ est une partition de l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n+1\}$, c'est-à-dire que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(E_k)$, ce qui va nous donner une relation de récurrence pour les B_n :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{n-l} B_l = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l. \tag{17.654}$$

où nous avons utilisé un petit changement de variables $l = n-k$. Afin d'étudier la convergence de la série (17.650), nous allons montrer par récurrence que pour tout n, $B_n < n!$. D'abord pour $n = 0$ c'est bon : $B_1 = 1$ parce que la seule partition de $\{1\}$ est $\{1\}$. Supposons que l'inégalité soit vraie pour une certaine valeur k, et montrons qu'elle est vraie pour la valeur $k+1$.

$$B_{k+1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l \leqslant \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} l! = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!(n-l)!} l! = n! \sum_{l=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(n-l)!}}_{\leqslant 1} \leqslant n!(n+1) = (n+1)! \tag{17.655}$$

où nous avons utilisé le coefficient binomial : $\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leqslant \frac{B_n}{n!} |x^n| \leqslant |x|^n, \tag{17.656}$$

et donc la série a un rayon de convergence au moins aussi grand que celui de la série géométrique, c'est-à-dire que 1. Donc $R \geqslant 1$. Nous nommons R ce rayon de convergence.

(2) Soit $x \in]-R, R[$. Pour une telle valeur de x à l'intérieur du disque de convergence, la proposition 17.50 nous permet de dériver terme à terme la série[69]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}, \tag{17.657}$$

pour obtenir

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^k \tag{17.658a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} B_l \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(l-k)!} \right) x^k. \tag{17.658b}$$

En cette expression, nous reconnaissons un produit de Cauchy (proposition 17.27) avec $a_l = \frac{B_l}{l!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$. Vu que ce sont deux séries ayant un rayon de convergence plus grand que zéro, le produit a encore un rayon de convergence plus grand que zéro et nous pouvons prendre le produit des séries :

$$f'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) = f(x) e^x. \tag{17.659}$$

Étudions l'équation différentielle $y' = ye^x$. D'abord par un argument en lacet de chaussure[70], une solution est de classe C^∞. Ensuite si une solution est non nulle, elle est de signe constant. En effet si $y(x_0) < 0$ et $y(x_1) = 0$ (on choisit x_1 minimum pour cette propriété parmi les nombres plus grands que x_0) alors il existe[71] un $t \in]x_0, x_1[$ tel que $y'(t) > 0$, ce qui donnerait $y(t) > 0$, ce qui contredirait la minimalité de x_1.

[69] C'est ici qu'on utilise la convention $B_0 = 0$ et ça aura une influence sur le choix de la constante K plus bas.
[70] Genre ce qui est fait pour prouver 17.103(4).
[71] Théorème de Rolle 14.210.

Nous prétendons[72] que cette équation différentielle a un espace de solutions de dimension 1. En effet, si $y' = ye^x$ et $g' = ge^x$ alors en posant $\varphi = y/g$ nous obtenons tout de suite $\varphi' = 0$, ce qui signifie que φ est constante, ou encore que y et g sont multiples l'un de l'autre.

Si nous en trouvons une non nulle par n'importe quel moyen, c'est bon. Une solution étant dérivable est continue, donc l'équation $f' = fe^x$ nous indique que f' est continue. Une solution non nulle va automatiquement accepter un petit voisinage sur lequel la manipulation suivante a un sens :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x, \tag{17.660}$$

donc $\ln\big(|f(x)|\big) = e^x + C$ et $f(x) = Ke^{e^x}$ pour une certaine constante. Il est vite vérifié que cette fonction est une solution de l'équation différentielle $y'(x) = y(x)e^x$ et par unicité, toutes les solutions sont de cette forme. Autrement dit, l'espace des solutions est l'espace vectoriel $\mathrm{Span}\{x \mapsto e^{e^x}\}$. Étant donné que $f(0) = 0$, nous devons choisir $K = \frac{1}{e}$ et donc

$$f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x} = e^{e^x - 1}. \tag{17.661}$$

(3) Nous commençons par écrire la fonction f comme une série de puissance. La partie simple du calcul : pour $x \in]-R, R[$, nous avons

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(kx)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!} \frac{x^l}{l!}. \tag{17.662}$$ EqQDigiDN

Notons que cela n'est pas une série de puissance en x parce qu'il y a la double somme. Nous allons inverser les sommes au moyen du théorème de Fubini sous la forme du corolaire 16.306. Pour cela nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ (k, l) &\mapsto \frac{(kx)^l}{k!l!} \end{aligned} \tag{17.663}$$

et nous mettons la mesure de comptage[73] sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Nous commençons donc à vérifier l'intégrabilité variable par variable de $|a|$: SubEqsFHsBfhk

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} |a(k,l)| dm(l) \right) dm(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(k|x|)^l}{l!} \tag{17.664a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{k|x|}. \tag{17.664b}$$

Nous devons montrer que cette dernière somme va bien. Pour cela nous posons $u_k = \frac{e^{k|x|}}{k!}$ et nous remarquons que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \to 0$. Donc la double intégrale (17.664) converge, ergo $a \in L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini 16.307 pour inverser les ~~sommes~~ ~~intégrales~~ sommes dans l'équation (17.662) :

$$\frac{1}{e}e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} (kx)^l = \sum_{l=0} \frac{1}{e} \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!} \right) x^l. \tag{17.665}$$

Cela est un développement en série entière pour la fonction $\frac{1}{e}e^{e^x}$, dont nous savions déjà le développement (17.650) ; par unicité du développement[74] nous pouvons identifier les coefficients :

$$B_l = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!}. \tag{17.666}$$

(4) Le développement (17.662) étant en réalité valable pour tout x et tous les calculs subséquents l'étant aussi, le développement

$$e^{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \tag{17.667}$$

est en fait valable pour tout x, ce qui donne à la série entière un rayon de convergence infini.

□

[72] Ou alors on utilise le théorème 34.19 avec $M(x) = e^x$ dans les cas $n = 1$ et $I =]-R, R[$.
[73] Nous passons outre les avertissements et menaces de Arnaud Girand.
[74] Proposition 17.49.

17.16 Applications analytique entre espaces de Banach

17.16.1 Applications analytiques

DEFooAIHMooKbWsBt

Définition 17.190 (Fonction analytique entre espaces de Banach[558]).
*Soient deux espaces de Banach E et F. Une application $f\colon E \to F$ définie sur un voisinage de $x_0 \in E$ est **analytique** en x_0 si il existe un voisinage U de x_0 sur lequel nous avons*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k \tag{17.668}$$

EQooWATIooCCmlbT

avec les conditions

(1) *Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, l'application α_k est une forme k-multilinéaire, continue et symétrique*

(2) *La notation $\alpha_k x^k = \alpha_k(x, \dots, x)$.*

(3) *Pour chaque $x \in U$, nous avons*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k\| \|x - x_0\|^k < \infty \tag{17.669}$$

EQooQYBGooKyoNHA

où $\|\alpha_k\|$ est la norme de α_k en tant qu'application k-multilinéaire, définition 12.118.

17.191.
Notez que la condition (17.669) n'est pas la convergence absolue de $\sum_n \alpha_n(x)$ qui aurait été la condition $\sum_n \|\alpha_n(x)\|_F < \infty$ ni la convergence normale qui aurait été $\sum_n \|\alpha_n\| < \infty$.

LEMooWAUZooRHfGCl

Lemme 17.192 ([1]).
Soit $\lambda > 0$. Si

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \|x\|^k < \infty \tag{17.670}$$

pour tout $x \in B(0, R)$ alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \|x\|^k < \infty \tag{17.671}$$

pour tout $x \in B(0, R/\lambda)$.

Démonstration. Simple calcul. Si $x \in B(0, R/\lambda)$ alors $\lambda x \in B(0, R)$ et donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \|x\|^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \|\lambda x\|^k < \infty. \tag{17.672}$$

□

PROPooKQXDooSGexpm

Proposition 17.193 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels de dimension finie E et F. Sur E nous posons les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et sur F nous considérons les normes N_1 et N_2. Si

$$f\colon (E, \|.\|_1) \to (F, N_1) \tag{17.673}$$

est analytique sur $B(x_0, R)$ alors il existe un $r > 0$ tel que

$$f\colon (E, \|.\|_2) \to (F, N_2) \tag{17.674}$$

soit analytique sur $B(x_0, r)$.

Démonstration. Il suffit de suivre la définition 17.190. Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k \tag{17.675}$$

avec

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k\|_1 \|x - x_0\|_1^k < \infty \tag{17.676}$$

pour tout $x \in B(x_0, R)$.

Nous nous souvenons du théorème 12.70 qui dit que toutes les normes sont équivalente : il existe des λ_i et μ_i tels que

$$\begin{cases} \lambda_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \lambda_2\|x_1\| & (17.677a) \\ \mu_1 N_1(y) \leqslant N_2(y) \leqslant \mu_2 N_1(y) & (17.677b) \end{cases}$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\alpha_k\|_2 &= \sup_{\|x_i\|_2 \leqslant 1} N_2\big(\alpha_k(x_1, \dots, x_k)\big) && (17.678a) \\ &\leqslant \sup_{\|x_i\| \leqslant 1/\lambda_1} \mu_2 N_1\big(\alpha_k(x_1, \dots, x_k)\big) && (17.678b) \\ &= \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \mu_2 N_1\Big(\alpha_l\big(\frac{x_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{x_k}{\lambda_1}\big)\Big) && (17.678c) \\ &= \frac{\mu_2}{\lambda_1^k} \sup_{\|x_i\|_1 = 1} N_1\big(\alpha_k(x_1, \dots, x_k)\big) && (17.678d) \\ &= \frac{\mu_2}{\lambda_1^k}\|\alpha_k\|_1. && (17.678e) \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k\|_2 \|x - x_0\|_2^k &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_2}{\lambda_1^k}\|\alpha_k\|_1 \lambda_2^k \|x - x_0\|_1^k && (17.679a) \\ &= \mu_2 \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^k \|\alpha_k\|_1 \|x - x_0\|_1^k. && (17.679b) \end{aligned}$$

Le lemme 17.192 dit que la dernière somme est $< \infty$ dès que $x \in B(x_0, r)$ avec $r = \lambda_1/\lambda_2$. □

PROPooADXXooXAPCBL

Proposition 17.194 ([1]).
Soient des espaces de Banach E_i et F. Si l'application $f\colon E_1 \times \dots \times E_n \to F$ est analytique et si $a_i \in E_i$, alors l'application partielle

$$\begin{aligned} g\colon E_n &\to F \\ x &\mapsto f(a_1, \dots, a_{n-1}, x) \end{aligned} \tag{17.680}$$

est analytique.

Démonstration. Soient une application $f\colon A \times B \to V$ ainsi que $(a, b) \in A \times B$. Nous supposons que f est analytique en (a, b) et nous posons Nous posons

$$\begin{aligned} g\colon B &\to V \\ y &\mapsto f(a, y) \end{aligned} \tag{17.681}$$

et nous montrons que g est analytique en b.

Il existe un $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B\big((a, b), r\big)$ nous ayons

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\big((x, y) - (a, b)\big) \tag{17.682}$$

EQooFUIEooBSnNus

où

$$\alpha_k\colon (A \times B)^k \to V \tag{17.683}$$

est k-multilinéaire. Et d'ailleurs nous devrions écrire $\alpha_k\big((x, y)\big)$ au lieu de $\alpha_k(x, y)$. Par exemple quand nous écrivons $\alpha_2(x, y)$, ce que nous voulons réellement écrire est

$$\alpha_2\big((x, y), (x, y)\big). \tag{17.684}$$

Bref, nous écrivons (17.682) sous la forme

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x - a, y - b). \tag{17.685}$$

En ce qui concerne la fonction g, si y est dans un voisinage de b nous avons

$$g(y) = f(a,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(0, y-b). \tag{17.686}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} \beta_k \colon B &\to V \\ y &\mapsto \alpha_k\big((0,y)\big), \end{aligned} \tag{17.687}$$

de telle sorte à écrire

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y-b). \tag{17.688}$$

Nous devons montrer que β_k est k-multilinéaire et qu'elle vérifie les conditions de la définition 17.190. En ce qui concerne la linéarité,

$$\beta_k(\lambda y) = \alpha_k\big((0,\lambda y)\big) = \lambda_k\big(\lambda(0,y)\big) = \lambda^k \alpha_k\big((0,y)\big) = \lambda^k \beta_k(y). \tag{17.689}$$

En ce qui concerne la série (17.669), commençons par étudier $\|\beta_k\|$:

$$\|\beta_k\| = \sum_{\|y\|=1} \|\beta_k(y)\| \tag{17.690a}$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \|\alpha_k\big((0,y)\big)\|. \tag{17.690b}$$

Notez que

$$\{(0,y) \text{ tel que } \|y\| = 1\} \subset \{(x,y) \text{ tel que } \|(x,y)\| = 1\}, \tag{17.691}$$

donc

$$\sup_{\|y\|=1} \|\alpha_k\big((0,y)\big)\| \leqslant \sup_{\|(x,y)\|=1} \|\alpha_k(x,y)\| = \|\alpha_k\|. \tag{17.692}$$

Tout cela pour dire que $\|\beta_k\| \leqslant \|\alpha_k\|$. Nous pouvons donc faire la majoration

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\beta_k\| \|y-b\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\alpha_k\| \|y-b\|^k \tag{17.693a}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|(x-a, y-b)\|^k \tag{17.693b}$$

$$< \infty. \tag{17.693c}$$

□

PROPooHCYXooHlUEuV

Proposition 17.195 (Critère d'Abel[1])**.**
Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k(x)$ de rayon de convergence R.

ITEMooVAOTooELMOlK

(1) Si $\|x\| < R$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| \|x\|^n < \infty. \tag{17.694}$$

Autrement dit : une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence.

ITEMooEEVMooVeiHyY

(2) Si $\|x\| > R$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| \|x\|^n = \infty. \tag{17.695}$$

Autrement dit : une série entière n'est pas analytique à l'extérieur de son disque de convergence.

Démonstration. Nous considérons un $r \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\|x\| < r < R$, et nous considérons un majorant M pour $\|\alpha_n\| r^n$. Nous avons alors

$$\|\alpha_n\| \|x\|^n = \|\alpha_n\| r^n \left(\frac{\|x\|}{r}\right)^n \leqslant M \left(\frac{\|x\|}{r}\right)^r. \tag{17.696}$$

Donc la suite $\|\alpha_n\|\|x\|$ est majorée par la suite $M(\|x\|/r)^r$ dont la série est convergente en tant que série géométrique (proposition 12.186(3)).

Si $\|x\| > R$ alors la suite $\|\alpha_k\|\|x\|^r$ n'est pas bornée. En tant que série de termes positifs non bornés nous avons $\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| \|x\|^n = \infty$. □

LEMooZDPSooXxPkYs

Lemme 17.196 ([1]).
Soit une application $f\colon E \to F$ analytique sur $\overline{B(x_0, R)}$ s'écrivant sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0) \tag{17.697}$$

avec $a_k(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha$.

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$ nous ayons

$$|a_\alpha| < \frac{\epsilon}{C} R^{-k}. \tag{17.698}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $x \in B(x_0, R)$, en choisissant de telle sorte à avoir $\|x - x_0\| = R$. Nous avons donc, par définition d'une application analytique :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \|x - x_0\|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| R^k < \infty. \tag{17.699}$$

Par la proposition 12.133, il existe alors N tel que si $k \geqslant N$ alors $\|a_k\| R^k < \epsilon$. Vu que $\max_{\alpha\in\Lambda_k} |a_\alpha|$ est une norme (lemme 12.119) et que toutes les normes sont équivalentes, il existe $C' > 0$ tel que $C|a_\alpha| R^k < \epsilon$ et donc en posant $C = 1/C'$ nous avons bien

$$|a_\alpha| < C\epsilon R^{-k}. \tag{17.700}$$

□

LEMooZRNAooUrDJOI

Lemme 17.197 ([1]).
Toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies est analytique.

Démonstration. Si $f\colon E \to F$ est linéaire, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)$ avec $\alpha_k(x) = 0$ pour $k \neq 1$ et $\alpha_1(x) = f(x)$. □

THOooNBNFooMsAorH

Théorème 17.198 ([558]).
Soient des espaces de Banach E et F sur $\mathbb{C}$. Soient des applications $\alpha_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Nous supposons que $\{\alpha_n(x)\}$ est borné. Nous posons $z = tx$ avec $|t| < 1$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \tag{17.701}$$

converge absolument.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\|\alpha_n(x)\| < K$ pour tout n. Alors nous avons

$$\|\alpha_n(z)\| = \|\alpha_n(tz, \dots, tz)\| = \|t^n \alpha_n(z, \dots, z)\| \leqslant |t|^n K. \tag{17.702}$$

Vu que $|t| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} K|t|^n$ converge (proposition 12.186(1)). Donc la série $\sum_k \|\alpha_n(z)\|$ converge par le critère de comparaison[75] □

NORMooQDCKooXHtrHQ

17.199.
Dans la suite, nous devons faire appel à quelques astuces de notations. Si $\alpha \in \mathcal{L}_n$, nous notons $\alpha(x)$ pour $\alpha(x, \dots, x)$.

Si $\alpha \in \mathcal{L}_{k+n}(E, F)$ est symétrique, alors nous notons αx^n l'élément de $\mathcal{L}_k(E, F)$ donné par

$$(y_1, \dots, y_k) \mapsto \alpha(x, \dots, x, y_1, \dots, y_n). \tag{17.703}$$

Notons au passage que l'ordre n'est pas important parce que α est symétrique.

THOooHSXLooMCzTTD

Théorème 17.200 ([558, 3]).
Soient des espaces de Banach E et F. Nous supposons que la série de puissance

$$\begin{aligned} f\colon E &\to F \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \end{aligned} \tag{17.704}$$

[75] Lemme 12.179(2).

ait un rayon de convergence $r_0 > 0$.

Nous posons[76]

$$b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k}(x_1 - x_0)^n \in \mathcal{L}_k(E, F), \tag{17.705}$$

EQooXVAIooQXCaQz

Alors :

ITEMooWBTAooGrKzpo

(1) *f est analytique*[77] *en tout point de $B(x_0, r)$,*

ITEMooOPLBooTZZOOx

(2) *Pour tout $x \in B(x_1, r_1)$ nous avons*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_1)^k. \tag{17.706}$$

ITEMooNTPIooXpKePf

(3) *La série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_1)^k \tag{17.707}$$

a un rayon de convergence $r_1 \geqslant r_0 - \|x_1 - x_0\|$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** C'est le critère d'Abel 17.195(1).

(2) **Pour (2)** Soit $x_1 \in B(x_0, r)$. Notons $h = x_1 - x_0$, de telle sorte que $x - x_0 = (x - x_1) + h$. En appliquant la multilinéarité de α_n, nous voyons que le binôme de Newton 3.75 fonctionne aussi bien :

$$\alpha_n\big((x - x_1) + h\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_n\big(h^{n-k}, (x - x_1)^k\big). \tag{17.708}$$

Nous pouvons permuter les deux sommes avec le lemme 12.172 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\big((x - x_1) + h\big) && \text{(17.709a)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_n\big(h^{n-k}, (x - x_1)^k\big) && \text{(17.709b)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_n\big(h^{n-k}, (x - x_1)^k\big) && \text{(17.709c)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_n(h^{n-k}) \right) (x - x_1)^k. && \text{(17.709d)}
\end{aligned}$$

Donc en posant $\beta_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_n(h^{n-k})$ nous avons bien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - x_1). \tag{17.710}$$

La formule (17.705) est maintenant juste un décalage de la somme.

(3) **Pour (3)** Vu que $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$, la fonction f est analytique sur $B(x_1, r_1)$. Vu que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x - x_1), \tag{17.711}$$

la partie $B(x_1, r_1)$ soit être dans le rayon de convergence des β_k par le lemme d'Abel 17.195(2).

□

[76] Voir la notation expliquée en 17.199.
[77] Définition 17.190.

PROPooQGGHooXPBhLT

Proposition 17.201 (Composition d'applications analytiques[1]).
Si E, F, G sont des espaces de Banach et si $f\colon F \to G$ et $g\colon E \to F$ sont analytiques, alors $f \circ g\colon E \to G$ est analytique.

PROPooFEMWooDwAYyO

Proposition 17.202 ([1]).
Soient un espace de Banach E ainsi que $a \in E$. L'application

$$x \mapsto x + a \tag{17.712}$$

est analytique.

Démonstration. Nous avons $f(x) = x + a = a_0 + a_1(x)$ en posant $a_0 = a$ et $a_1(x) = x$. L'application a_1 est 1-multilinéaire. □

LEMooVGUFooSmJHhl

Lemme 17.203 ([1]).
Si $f\colon E \to F$ est analytique sur $B(a, r)$, alors

$$\begin{aligned} g\colon B(a + h, r) &\to F \\ x &\mapsto f(x + h) \end{aligned} \tag{17.713}$$

est analytique sur $B(a + h)$

Démonstration. C'est la composition de l'application analytique f avec l'application analytique $x \mapsto x + h$. Il suffit alors d'appliquer les propositions 17.202 et 17.201. □

LEMooLYIIooNDLRrH

Lemme 17.204 ([1]).
Soit $m \geqslant n$. Nous considérons la projection $\texttt{proj}_n\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Soit une application $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ telle que $h \circ \texttt{proj}_n$ est analytique. Alors h est analytique.

Démonstration. Nous introduisons l'inclusion

$$\begin{aligned} j\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto (x, 0). \end{aligned} \tag{17.714}$$

C'est une application analytique parce que linéaire (lemme 17.197). Alors nous avons $h = (h \circ \texttt{proj}_n) \circ j$. En tant que composée d'applications analytiques, h est analytique[78]. □

17.16.2 Opérateur d'inversion

PROPooSGVWooQupJxn

Proposition 17.205 ([571]).
Soit un espace de Banach réel E. Nous considérons l'espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$ muni de la norme opérateur.

(1) La partie Ω des opérateurs inversibles[79] est ouverte.

(2) L'opérateur d'inversion

$$\begin{aligned} i\colon \Omega &\to \Omega \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned} \tag{17.715}$$

est analytique[80]

Note : pour prouver ça, il faudra surement considérer une adaptation aux opérateurs du théorème 17.169.

17.16.3 Famille sommable

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 17.206
Je suis presque certain que dans la proposition 17.207, la famille $(a_\alpha x^\alpha)$ est même absolument sommable. Mais je ne suis pas capable de le prouver. C'est peut-être prouvé au passage dans la preuve de la proposition 17.209.

[78] Proposition 17.201.
[79] En dimension finie, Ω est $\mathrm{GL}(E)$, mais en dimension infinie, la partie $\mathrm{GL}(E)$ contient seulement les opérateurs inversibles continue d'inverse continu. Voir la définition 12.331.
[80] Application analytique entre espaces de Banach : définition 17.190.

PROPooFXVEooCeiwMB

Proposition 17.207 ([1, 494]).
Soit un espace de Banach F et une une application $f\colon \mathbb{R}^n \to F$ analytique en x que nous décomposons en

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{17.716}$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous posons

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_i \alpha_i = k\}, \tag{17.717}$$

et $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$. En écrivant a_k sous la forme[81]

$$a_k(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} a_\alpha x^\alpha, \tag{17.718}$$

l'ensemble $(a_\alpha x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est une famille sommable[82] *dont la somme vaut*

$$S = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{17.719}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons un $N > 0$ tel que

EQooOVPIooKdvgJQ
$$\| \sum_{k=p}^{\infty} a_k(x) \| < \epsilon \tag{17.720}$$

pour tout $p \geqslant N$. Nous supposons que N est également assez grand pour que

EQooZTKGooFeKFXQ
$$\sum_{k=p}^{\infty} \|a_k\| \|x\|^k < \epsilon \tag{17.721}$$

pour tout $p \geqslant N$. Nous posons $I_0 = \bigcup_{k\leqslant N} \Lambda_k$ et nous considérons une partie finie K telle que $I_0 \subset K \subset \Lambda$. Nous posons

$$M = \max\{|\alpha| \text{ tel que } \alpha \in K\}. \tag{17.722}$$

Notez que $M \geqslant N$. Nous décomposons la somme sur $\alpha \in K$ en

$$\sum_{\alpha\in K} a_\alpha x^\alpha = \sum_{k\leqslant N} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha + \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha. \tag{17.723}$$

Notez que pour $k \leqslant N$ nous avons $K \cap \Lambda_k = \Lambda_k$, donc

$$\sum_{k\leqslant N} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha = \sum_{k=0}^{N} a_k(x). \tag{17.724}$$

C'est le moment d'un peu calculer : [SUBEQSooUJGQooXuWdDr]

$$\| \sum_{\alpha\in K} a_\alpha x^\alpha - S\| = \| \sum_{k=0}^{N} a_k(x) + \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - S\| \tag{17.725a}$$

$$= \| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(x)\| \tag{17.725b}$$

$$= \| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - \sum_{k=N+1}^{M} a_k(x) - \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k(x)\| \tag{17.725c}$$

$$\leqslant \| \sum_{k=N+1}^{M} \Big(\sum_{\alpha\in K\cap\Lambda_k} a_\alpha x^\alpha - a_k(x) \Big)\| + \| \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k(x)\| \tag{17.725d}$$

$$\leqslant \| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha\in\Lambda_k\setminus K} a_\alpha x^\alpha\| + \epsilon. \tag{17.725e}$$

[81] Voir le lemme 12.114.
[82] Définition 12.140.

Notez que pour majorer le second terme nous avons utilisé $M \geqslant N$ et (17.720).

Encore un calcul :

$$\| \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha \in \Lambda_k \setminus K} a_\alpha x^\alpha \| \leqslant \sum_{k=N+1}^{M} \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \| a_\alpha x^\alpha \| \tag{17.726a}$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{M} \|a_k\| \big(|x_1| + \ldots + |x_n| \big)^k \qquad \text{lem. 12.114(2)} \tag{17.726b}$$

$$\leqslant \sqrt{n} \sum_{k=N+1}^{M} \|a_k\| \|x\|^k \qquad \text{prop. 12.68(1).} \tag{17.726c}$$

$$\leqslant \sqrt{n}\epsilon \qquad \text{par (17.721).} \tag{17.726d}$$

Avec ça nous continuons (17.725) :

$$\| \sum_{\alpha \in K} a_\alpha x^\alpha - S \| \leqslant \epsilon(\sqrt{n} + 1). \tag{17.727}$$

Donc la famille $(a_\alpha x^\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est sommable. □

LEMooYSDEooOEiXvl

Lemme 17.208 ([1, 572])**.**
Soit un espace de Banach F et une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ analytique sur $B(0, R)$ que nous décomposons en

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{17.728}$$

pour chaque $x \in B(0, R)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous posons

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_i \alpha_i = k\}, \tag{17.729}$$

et $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$. Nous écrivons a_k sous la forme[83]

$$a_k(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} a_{k,\alpha} x^\alpha. \tag{17.730}$$

Pour ρ assez petit, l'application

$$\begin{aligned} v : \mathbb{N} \times \Lambda \times B(0, r) &\to \mathbb{R} \\ (k, \alpha, x) &\mapsto a_{k,\alpha} x^\alpha \end{aligned} \tag{17.731}$$

est dans $L^1\big(\mathbb{N} \times \Lambda \times B(0, \rho)\big)$.

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **La fonction u**

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} \times \Lambda &\to \mathbb{R} \\ k, \alpha &\mapsto a_{k,\alpha} x^\alpha. \end{aligned} \tag{17.732}$$

Notez que si $|\alpha| \neq k$ alors $a_{k,\alpha} = 0$. En utilisant la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et Λ, nous avons

$$f(x) = \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\Lambda} u(k, \alpha) d\alpha \right) dk. \tag{17.733}$$

(2) $u \in L^1(\mathbb{N} \times \Lambda)$ Nous utilisons le bon vieux truc de 16.308 pour montrer que $u \in L^1(\mathbb{N} \times \Lambda)$. D'abord nous avons

$$\int_{\Lambda} |u(k, \alpha)| d\alpha = \sum_{\alpha \in \Lambda} \|a_{k,\alpha} x^\alpha\| \tag{17.734a}$$

$$= \sum_{\alpha \in \Lambda} \|a_{k,\alpha} x^\alpha\| \qquad \text{pcq. } a_{k,\alpha} = 0 \text{ si } \alpha \notin \Lambda_k \tag{17.734b}$$

$$\leqslant \sum_{\alpha \in \Lambda_k} \|a_{k,\alpha}\| |x|^\alpha \tag{17.734c}$$

$$\leqslant C^k \|a_k\| \|x\|^k \qquad \text{lem. 12.114(2).} \tag{17.734d}$$

[83] Voir le lemme 12.114.

À partir de maintenant nous nous restreignons à $x \in B(0, R/C)$ de telle sorte à avoir $C\|x\| < R$ et donc de pouvoir profiter de la borne 17.669.

Nous avons

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\Lambda} |u(k,\alpha)| d\alpha \right) dk \leqslant \int_{\mathbb{N}} \|a_k\| \big(C\|x\|\big)^k dk = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| r^k < \infty. \tag{17.735}$$

Le corolaire 16.306 implique maintenant que $u \in L^1(\mathbb{N} \times \Lambda)$.

(3) **La fonction v** Nous considérons $\rho = R/C$ et nous continuons. Nous avons

$$\int_{\mathbb{N}\times\Lambda} |v(x,k,\alpha)| dk d\alpha \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| r^k. \tag{17.736}$$

Cette majoration tient pour tout $x \in B(0,\rho)$. Nous avons donc

$$\int_{B(0,\rho)} \left(\int_{\mathbb{N}\times\Lambda} |v(x,k,\alpha)| d(k \times \alpha) \right) dx < 0. \tag{17.737}$$

Et voilà que $v \in L^1\big(B(0,\rho) \times (\mathbb{N} \times \Lambda)\big)$.

□

La proposition suivante est dédiée à la petite fugue BWV 578.

PROPooZMXDooHLRvCd

Proposition 17.209 ([1, 572])**.**
Soit un espace de Banach F et une une application $f : \mathbb{R}^n \to F$ analytique sur $B(0,R)$ que nous décomposons en

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{17.738}$$

pour chaque $x \in B(0,R)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous posons

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_i \alpha_i = k\}, \tag{17.739}$$

et $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$. Nous écrivons a_k sous la forme[84]

$$a_k(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} a_{k,\alpha} x^{\alpha}, \tag{17.740}$$

Nous posons

$$\Gamma_l = \{\alpha \in \Lambda \text{ tel que } \alpha_1 = l\}. \tag{17.741}$$

Alors il existe une boule $B(0,r)$ sur laquelle

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Gamma_l} a_{\alpha} x^{\alpha}. \tag{17.742}$$

Si $R = \infty$ alors $r = \infty$ aussi.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **La fonction u** Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} \times \Lambda &\to \mathbb{R} \\ k, \alpha &\mapsto a_{k,\alpha} x^{\alpha}. \end{aligned} \tag{17.743}$$

Nous avons vu dans le lemme 17.208 que si on se restreint à $x \in B(0,\rho)$ nous avons $u \in L^1(\mathbb{N} \times \Lambda)$.

[84] Voir le lemme 12.114.

(2) **Une partition de $\mathbb{N}\times\Lambda$** Nous avons l'ensemble $\Gamma_l=\{\alpha\in\Lambda \text{ tel que } \alpha_1=l\}$ et l'union disjointe $\Lambda=\bigcup_{l=0}^{\infty}\Gamma_l$. Donc

$$\mathbb{N}\times\Lambda=\bigcup_{l=0}^{\infty}\mathbb{N}\times\Gamma_l. \tag{17.744}$$

Par σ-additivité de l'intégrale, $\int_{\mathbb{N}\times\Lambda}u=\sum_l\int_{\mathbb{N}\times\Gamma_l}u$. De plus la fonction u étant dans L^1 nous pouvons faire l'intégrale sur $\mathbb{N}\times\Gamma_l$ en intégrant d'abord sur Γ_l et ensuite sur $\mathbb{N}$. Tout cela pour justifier ce calcul :

$$f(x)=\int_{\mathbb{N}\times\Lambda}u(k,\alpha)dkd\alpha=\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\mathbb{N}\times\Gamma_l}u(k,\alpha)d(k\otimes\alpha) \tag{17.745a}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\Gamma_l}\left(\int_{\mathbb{N}}u(k,\alpha)dk\right)d\alpha \tag{17.745b}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Gamma_l}\sum_{k=0}^{\infty}u(k,\alpha). \tag{17.745c}$$

Vu que $u(k,\alpha)\neq0$ uniquement lorsque $k=|\alpha|$, la somme sur k se restreint au seul terme $k=|\alpha|$. Nous continuons donc le calcul

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Gamma_l}u(|\alpha|,\alpha) \tag{17.746a}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l\in\Gamma_l}a_\alpha x^\alpha. \tag{17.746b}$$

□

17.16.4 Intégrale par rapport à une des variables

PROPooBHKJooUZUKnc

Proposition 17.210 ([1, 4]).
Soit une application analytique[85]

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m&\to\mathbb{R}\\(t,\lambda)&\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Lambda_k^{(m+1)}}a_{k,\alpha}(t,\lambda)^\alpha\end{aligned} \tag{17.747}$$

que nous supposons être analytique sur un voisinage de $(0,0)$. Nous avons :

ITEMooMWMSooRoXLgL

(1) *L'application*

$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m&\to\mathbb{R}\\(t,\lambda)&\mapsto\int_0^t f(s,\lambda)ds\end{aligned} \tag{17.748}$$

est analytique sur un voisinage de $(0,0)$.

ITEMooSRHFooAjKHFg

(2) *En posant*

$$\begin{aligned}\theta\colon\Lambda&\to\{0,1\}\\\alpha&\mapsto\begin{cases}0 & si\ \alpha_1=0\\1 & sinon\ ,\end{cases}\end{aligned} \tag{17.749}$$

nous avons

$$g(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\theta(\alpha)\frac{a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}}{\alpha_1+1}(t,\lambda)^\alpha. \tag{17.750}$$

ITEMooACJMooQHkdPY

(3) *Il existe $0<q<1$ et un polynôme P de degré $m-1$ tel que*

$$|b_k(t,\lambda)|\leqslant P(k)q^{-k}. \tag{17.751}$$

[85] Définition 17.190.

Le point (3) n'est pas très utile, mais il introduit des techniques qui pourraient servir plus tard.

Démonstration. Nous supposons que f est analytique sur $\overline{B(0,R_t)}\times\overline{B(0,R_\lambda)}$, et qu'elle se présente sous la forme[86]

$$f(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Lambda_k}a_{k,\alpha}(t,\lambda)^\alpha. \tag{17.752}$$

(1) **Permuter somme et intégrale** Notre premier objectif est de permuter la somme et l'intégrale dans

$$g(t,\lambda)=\int_0^t\sum_{k=0}^{\infty}a_k(s,\lambda)ds. \tag{17.753}$$

Pour cela nous utilisons la convergence dominée de Lebesgue (théorème 16.209) en fixant $\lambda\in B(0,\rho)$ et en posant

$$f_k(t)=a_k(t,\lambda) \tag{17.754}$$

et

$$h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}|f_k(t)|. \tag{17.755}$$

(1a) $h(t)<\infty$ Nous avons $f_k(t)=a_k(t,\lambda)$ et donc $|f_k(t)|\leqslant\|a_k\|\|(t,\lambda)\|^k$. En sommant,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f_k(t)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|\|(t,\lambda)\|^k<\infty. \tag{17.756}$$

(1b) $|f_k(t)|\leqslant|h(t)|$ Parce que $|h(t)|$ est la somme de plein de termes positifs, dont $|f_k(t)|$.

(1c) $h\in L^1\big([0,t]\big)$ Nous allons prouver que h est continue comme somme uniformément convergente de fonctions continues (théorème 14.409). Pour tout $t\in B(0,R_t)$ nous avons

$$|f_k(t)|\leqslant\|a_k\|\|(R_t,R_\lambda)\|^k. \tag{17.757}$$

Donc en posant $M_k=\|a_k\|\|(R_t,R_\lambda)\|^k$, nous avons $\sum_{k=0}^{\infty}M_k<\infty$ et $|f_k(t)|\leqslant M_k$ pour tout t et tout k. Le critère de Weierstrass 14.411 nous dit que la série converge uniformément. Donc h est continue. Donc elle est dans $L^1\big([0,t]\big)$ en tant que fonction continue sur un compact.

Nous utilisons le théorème de la convergence dominée :

$$g(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t a_k(s)ds \tag{17.758}$$

(2) **Intégration et un peu de calcul** L'intégration n'est pas très compliquée à effectuer. En termes de notations, si $\alpha\in\Lambda$ est un multiindice, nous notons $\alpha'=(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Voici un peu de calcul :

$$\int_0^t a_k(s)ds=\int_0^t\sum_{\alpha\in\Lambda_k}a_{k,\alpha}(s,\lambda)^\alpha \tag{17.759a}$$

$$=\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\frac{a_{k,\alpha}}{\alpha_1+1}(t,\lambda)^{(\alpha_1+1,\alpha')}. \tag{17.759b}$$

En posant

$$\begin{aligned}\theta\colon\Lambda&\to\{0,1\}\\ \alpha&\mapsto\begin{cases}1&\text{si }\alpha_1>0\\0&\text{si }\alpha_1=0,\end{cases}\end{aligned} \tag{17.760}$$

nous avons

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\frac{a_{k,\alpha}}{\alpha_1+1}(t,\lambda)^{(\alpha_1+1,\alpha')}=\sum_{\beta\in\Lambda_{k+1}}\theta(\beta)\frac{a_{k,(\beta_1-1,\beta')}}{\beta_1}(t,\lambda)^\beta. \tag{17.761}$$

Nous posons donc, pour $k\geqslant1$:

$$b_k(t,\lambda)=\sum_{\beta\in\Lambda_k}\theta(\beta)\frac{a_{k-1,(\beta_1-1,\beta')}}{\beta_1}(t,\lambda)^\beta, \tag{17.762}$$

[86] Lemme 12.114.

et pour $k=0$ nous posons $b_0(t,\lambda)=0$ (ce qui est cohérent avec $\theta(\beta)=0$ dans ce cas). Au final voici une belle forme pour $g(t,\lambda)$:

$$g(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(t,\lambda). \tag{17.763}$$

Cela prouve déjà le point (2), mais nous n'avons pas encore prouvé que g est analytique.

(3) **Pour (1) : g est analytique**

Nous devons prouver que $\sum_{k=0}^{\infty}\|b_k\|\|(t,\lambda)\|^k<\infty$. Pour cela, nous allons nous souvenir que l'ensemble des applications k-multilinéaires a les normes de la définition 12.118 et du lemme 12.119. Nous utilisons deux fois l'équivalence entre ces deux normes[87] :

$$\|b_k\|\leqslant C_1\max_{\alpha\in\Lambda_k}\left|\theta(\alpha)\frac{a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}}{\alpha_1+1}\right| \tag{17.764a}$$

$$\leqslant C_1\max_{\alpha\in\Lambda_k}|a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}| \tag{17.764b}$$

$$\leqslant C_1C_2\|a_{k-1}\|. \tag{17.764c}$$

Nous avons alors

$$\|b_k\|\|(t,\lambda)\|^k\leqslant C_1C_2\|a_{k-1}\|\|(t,\lambda)\|^k=C\|(t,\lambda)\|\|a_{k-1}\|\|(t,\lambda)\|^k, \tag{17.765}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|b_k\|\|(t,\lambda)\|^k\leqslant C_1C_2\sum_{k=1}^{\infty}\|a_{k-1}\|\|(t,\lambda)\|^k \qquad b_0=0 \tag{17.766a}$$

$$=\|(t,\lambda)\|C_1C_2\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|\|(t,\lambda)\|^k \tag{17.766b}$$

$$<\infty. \tag{17.766c}$$

Prouver (3) Pour rappel, R_t et R_λ définissent un voisinage de $(0,0)$ sur lequel f est analytique. Voir tout en-haut de la preuve. Nous choisissons (t,λ) de telle sorte que $|t|<R_t$ et $|\lambda|<R_\lambda$. Et nous considérons r_t,r_λ tels que $|t|<r_t<R_t$ et $|\lambda|<r_\lambda<R_\lambda$.

Nous devons majorer la norme de

$$b_k(t,\lambda)=\sum_{\alpha\in\Lambda_k}\theta(\alpha)\frac{a_{k-1,(\alpha_1+1,\alpha')}}{\alpha_1+1}t^{\alpha_1}\lambda^{\alpha'}. \tag{17.767}$$

Étant donnée le lemme 17.196,

$$|a_{k-1,(\alpha_1-1,\alpha')}|\leqslant CR_t^{-(\alpha_1-1)}R_\lambda^{|\alpha'|}. \tag{17.768}$$

De plus étant donné notre choix de t et λ nous avons $|t|^{\alpha_1}\leqslant r_t^{\alpha_1}$ et $|\lambda|^{\alpha'}\leqslant|r_\lambda|^{|\alpha'|}$ parce que $|\lambda|^{\alpha'}=\prod|\lambda_i^{\alpha_i'}|$ et que pour chaque i nous avons $|\lambda_i|\leqslant r_\lambda$.

En prenant la valeur absolue de (17.767), en majorant $\theta(\alpha)\leqslant1$ et $1/(\alpha_1+1)\leqslant1$ nous avons

$$|b_k(t,\lambda)|\leqslant C\sum_{\alpha\in\Lambda_k}R_t\left(\frac{r_t}{R_t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{r_\lambda}{R_\lambda}\right)^{|\alpha'|}. \tag{17.769}$$

Nous posons $q=\max(r_t/R_t,r_\lambda/R_\lambda)$, nous avons $0<q<1$ et la majoration

$$|b_k(t,\lambda)|\leqslant CR_t\sum_{\alpha\in\Lambda_k}q^{|\alpha|}=R_tCq^k\operatorname{Card}(\Lambda_k). \tag{17.770}$$

Ici nous travaillons avec $m+1$ variables, donc quand nous écrivons Λ_k, nous voulons dire $\Lambda_k^{(m+1)}$ et la proposition 3.71 nous donne

$$\operatorname{Card}(\Lambda_k)=\binom{n+1+k-1}{m+1-1}=\binom{m+k}{m}=\frac{(m+k)!}{m!k!}=\frac{1}{m!}\prod_{l=1}^{m}(l+l)=P(k) \tag{17.771}$$

où P est n polynôme de degré $m-1$. En absorbant le facteur R_tC dans une redéfinition de P, la relation (17.770) donne

$$|b_k(t,\lambda)|\leqslant P(kq^k) \tag{17.772}$$

comme demandé. □

[87] Théorème 12.70.

17.16.5 Différentielle

LEMooVIINooOUwAUQ

Lemme 17.211 ([558, 486]).
Soient des espaces de Banach E et F ainsi qu'une application analytique

$$\begin{aligned} f\colon F &\to F \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-x_0). \end{aligned} \tag{17.773}$$

Alors f est différentiable en x_0 et

$$df_{x_0} = \alpha_1. \tag{17.774}$$

Démonstration. Le candidat différentielle est $T(h) = \alpha_1(h)$. Nous testons la définition de la différentielle. D'abord

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha_1(h) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(h). \tag{17.775}$$

Ensuite

$$\frac{\| \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(h) \|}{\|h\|} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|\alpha_n\| \|h\|^{n-1} \tag{17.776}$$

Nous savons, de la définition d'une application analytique que si t est assez petit, $\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| t^n$. Le lemme conclu que $\lim_{h\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} \|\alpha_n\| \|h\|^{n-1} = 0$. □

THOooCESLooZxAzOg

Théorème 17.212 ([558]).
Soient deux espaces de Banach E et F ainsi que des formes $\alpha_n \in \mathcal{L}_n(E,F)$ et $x_0 \in E$. Nous supposons que l'application

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \tag{17.777}$$

est analytique sur $B(x_0, r)$.

Alors f est différentiable sur $B(x_0,r)$ et pour tout $x \in B(x_0,r)$ nous avons

$$df_x = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n (x-x_0)^{n-1}. \tag{17.778}$$

Démonstration. Nous savons déjà que f est différentiable en x_0 par le lemme 17.211 que f est différentiable et $df_{x_0} = \alpha_1$.

Si $x_1 \in B(x_0,r)$, nous pouvons aller voir le théorème 17.200 pour développer en

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-x_1) \tag{17.779}$$

avec les β_k donné par (17.705). Comme précédemment nous avons $df_{x_1} = \beta_1$. Mais

$$\beta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+1}{n}}_{=n+1} \alpha_{n+1}(x_1-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}(x_1-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n(x_1-x_0)^{n-1}. \tag{17.780}$$

□

PROPooGMWRooPIzwus

Proposition 17.213 ([1]).
Toute application analytique entre espaces de Banach est de classe C^∞.

PROPooXKHBooQvvNmN

Proposition 17.214 (Composition d'applications analytiques[1]).
Soient des espaces de Banach E_1, E_2 et E_3. Soient des applications analytiques $f\colon E_1 \to E_2$ et $g\colon E_2 \to E_3$. Alors la composée $g \circ f\colon E_1 \to E_2$ est analytique.

PROPooKHAYooCxMgep

Proposition 17.215 ([1]).
Soit une application analytique $f\colon V \times W \to E$. Si $v_0 \in V$ est fixé, alors l'application partielle

$$\begin{aligned} f_0\colon W &\to E \\ w &\mapsto f(v_0,w) \end{aligned} \tag{17.781}$$

est analytique.

Démonstration. Par hypothèse il existe $\alpha_k \in \mathcal{L}_k(V \times W, E)$ telles que

$$f(v,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(v,w). \tag{17.782}$$

En posant

$$\begin{aligned} \beta_k \colon W &\to E \\ w &\mapsto \alpha_k(v_0, w), \end{aligned} \tag{17.783}$$

nous avons bien que $\beta_k \in \mathcal{L}_k(W,E)$ est positif et symétrique. Et bien entendu $f_0(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(w)$. □

THOooSZHVooKSEmuI

Théorème 17.216 (Inversion locale, version analytique[558, 573]).
Soient des espaces de Banach X et Y ainsi qu'une application $f \colon X \to Y$ satisfaisant

(1) f est de classe C^1,

(2) f est analytique en x_0,

(3) df_{x_0} est continue[88] et d'inverse continue.

Alors f est localement inversible en x_0 et son inverse est analytique en $f(x_0)$.

17.16.6 Polynômes

DEFooCJGHooXFTsNf

Proposition-Définition 17.217 (Polynômes[1]).
Soient des espaces de Banach E et F. Nous considérons une boule $B(0,r)$ et l'espace $\mathcal{P}_N$ des applications de la forme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x) \tag{17.784}$$

*avec $a_k \in \mathcal{L}_k(E,F)$[89]. De telles applications sont des **polynômes** entre espaces de Banach.*

Plusieurs choses à propos de $\mathcal{P}_N$.

(1) Si $\sum_{k=0}^{N} a_k(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k(x)$ alors $a_k = b_k$ pour tout k.

(2) L'application

$$\begin{aligned} N_1 \colon \mathcal{P}_N &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \sup_{x \in B(0,r)} \end{aligned} \tag{17.785}$$

est une norme sur $\mathcal{P}_N$.

(3) L'application

$$\begin{aligned} N_2 \colon \mathcal{P}_N &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \max_k \|a_k\| \end{aligned} \tag{17.786}$$

est une norme sur $\mathcal{P}_N$.

(4) L'application

$$\begin{aligned} N_3 \colon \mathcal{P}_N &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|a_i\|^2} \end{aligned} \tag{17.787}$$

est une norme sur $\mathcal{P}_N$

ITEMooVVDSooFzRfrT

(5) Toute suite de Cauchy dans $\mathcal{P}_N$ pour une des normes N_i est une suite de Cauchy pour les deux autres normes.

ITEMooUZQDooNqfNNQ

(6) Toute suite de Cauchy dans $\mathcal{P}_N$ pour une des normes N_i est convergente pour n'importe laquelle de ces trois normes.

[88] J'ai un doute sur l'hypothèse. À mon avis c'est df qui est continue en x_0.
[89] Applications k-multilinéaires, définition 10.1.

17.16.7 Weierstrass et Cauchy-Lipschitz analytique

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 17.218
Tous les résultats de cette section (en particulier le lemme 17.221 et le théorème 17.220) sont de ceux qui demanderaient une bonne relecture. Soyez attentif en lisant la preuve ; il peut encore y avoir pas mal de pièges que je n'aurais pas vus. Si ça peut vous motiver à relire avec un œil critique, sachez que la preuve est entièrement due à ChatGPT.

LEMooVXTLooHYvAWO

Lemme 17.219 ([1]).
Soient des nombres $a_{n,k} \in \mathbb{C}$ tels que pour chaque n nous ayons $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_{n,k}|. \tag{17.788}$$

À mon avis c'est Fubini avec la mesure de comptage. À vous de vérifier et de m'écrire quand vous avez une preuve.

THOooZHXMooICpUZx

Théorème 17.220 ([3]).
Soient des espaces de Banach E et F ainsi qu'un ouvert $U \subset E$. Soient :

(1) *des fonctions analytiques $f_n : U \to F$,*

(2) *$x_0 \in U$, $r > 0$ et $M > 0$*

tels que

(1) *Pour tout n et pour tout $x \in B(x_0, r)$, nous avons*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}(x - x_0). \tag{17.789}$$

ITEMooISLSooIfUEXH

(2) *Pour tout n nous avons la majoration*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n,k}\| r^k < M < \infty. \tag{17.790}$$

(3) *$f_n \to f$ uniformément sur $B(x_0, r)$.*

Alors :

ITEMooIKWBooXwNBoU

(1) *Pour chaque k, il existe une application k-multilinéaire a_k telle que $a_{n,k} \to a_k$.*

ITEMooIDSZooUjZgRl

(2) *La série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{17.791}$$

converge normalement sur $B(x_0, r)$.

(3) *La fonction f vaut*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{17.792}$$

(4) *f est analytique en x_0.*

Démonstration. Nous commençons par supposer que $x_0 = 0$. Pour chaque n et N nous posons

$$\begin{aligned} P_{n,N} : B(0, r) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}(x). \end{aligned} \tag{17.793}$$

et le reste

$$R_{n,N}(x) = f_n(x) - P_{n,N}(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x). \tag{17.794}$$

(1) **Une majoration pour le reste** Soit $0 < \rho < r$. Nous avons :

$$\sup_n \sup_{\|x\|\leqslant\rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \sup_n \sup_{\|x\|\leqslant\rho} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\|\|x\|^k \tag{17.795a}$$

$$\leqslant \sup_n \sup_{\|x\|\leqslant\rho} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\|\rho^k \tag{17.795b}$$

$$= \sup_n \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\|r^k \left(\frac{\rho}{r}\right)^k. \tag{17.795c}$$

Dans la somme, $k \geqslant N+1$. Vu que $\rho/r < 1$ nous avons la majoration $(\rho/r)^k \leqslant (\rho/r)^{N+1}$. Nous continuons le calcul

$$\sup_n \sup_{\|x\|\leqslant\rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \sup_n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_{n,k}\|r^k \tag{17.796a}$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n,k}\|r^k \tag{17.796b}$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} M. \tag{17.796c}$$

Au final, pour tout N et pour tout $0 < \rho < r$ nous avons :

$$\sup_n \sup_{\|x\|\leqslant\rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} M. \tag{17.797}$$

EQooNBYDooQRWbaF

(2) **Suites de Cauchy** Soit $\epsilon > 0$. La majoration (17.797) nous permet de choisir N assez grand pour avoir

$$\sup_n \sup_{\|x\|\leqslant\rho} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant \epsilon. \tag{17.798}$$

Par ailleurs, nous avons la convergence $f_n \to f$ uniforme sur $\overline{B(0,r)}$; donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme uniforme $\|.\|_{\overline{B(0,r)}}$. Donc il existe N_0 tel que si $p, q \geqslant N_0$ alors

$$\sup_{\|x\|\leqslant\rho} \|f_p(x) - f_q(x)\| < \epsilon. \tag{17.799}$$

Nous avons aussi

$$\|P_{p,N}(x) - P_{q,N}(x)\| \leqslant \|f_p(x) - f_q(x)\| + \|R_{p,N}(x)\| + \|R_{q,N}(x)\| \leqslant 3\epsilon. \tag{17.800}$$

Cela prouve que si N est assez grand, alors la suite $(P_{n,N})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|.\|_{\overline{B(0,\rho)}}$.

Relisez l'énoncé de la définition-proposition 17.217, et en particulier les points (5) et (6). Vu que $P_{n,N} \in \mathcal{P}_N$ pour chaque N et que c'est une suite de Cauchy pour ce qui est appelé N_1 dans 17.217, nous savons que c'est une suite de Cauchy pour n'importe laquelle de ces normes.

Nous avons donc des $a_k \in \mathcal{L}_k$ tels que $a_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}_k} a_k$ et en posant $P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x)$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{n,N} - P_N\|_{\overline{B(0,\rho)}} = 0. \tag{17.801}$$

(3) **Convergence normale** Nous vérifions à présent que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ converge normalement. Nous avons

$$\|a_k\|\|x\|^k = \lim_{n\to\infty} \|a_{n,k}\|\|x\|^k \tag{17.802a}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \|a_{n,k}\|\rho^k \tag{17.802b}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|\|x\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \|a_{n,k}\|\rho^k \tag{17.803a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \|a_{n,k}\|\rho^k \qquad \text{lem. 17.219} \tag{17.803b}$$

$$< M \qquad \text{hyp. (2)} \tag{17.803c}$$

$$< \infty. \tag{17.803d}$$

(4) **Point sur la situation** Nous avons déjà prouvé les points (1) et (2). De plus en posant

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \tag{17.804}$$

nous avons bien que g est analytique.

(5) $f = g$ Il nous reste à prouver que l'application g est en réalité la limite f dont on parle dans l'énoncé. Nous devons calculer $\lim_{N\to\infty} \|f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x)\|$. Nous avons le calcul suivant :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x) = \big(f(x) - f_n(x)\big) + \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x) \tag{17.805a}$$

$$= \big(f(x) - f_n(x)\big) + \sum_{k=0}^{N} (a_{n,k} - a_k)(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x) \tag{17.805b}$$

Cette égalité étant valable pour tout n, nous pouvons passer à la limite $n \to \infty$, et il reste

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x). \tag{17.806}$$

C'est le moment de ressortir (17.797), et de calculer (encore !) :

$$\|f(x) - \sum_{k=0}^{N} a_k(x)\| \leqslant \lim_{n\to 0} \| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{n,k}(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|R_{n,N}(x)\| \leqslant M \left(\frac{\rho}{r}\right)^{N+1} \tag{17.807}$$

Et voilà. Il suffit maintenant de faire $N \to \infty$ des deux côtés pour avoir

$$\|f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\| = 0. \tag{17.808}$$

(6) **Si $x_0 \neq 0$** Appliquer le tout à la limite $g_n \to g$ où $g(x) = f(x - x_0)$ et $g_n(x) = f_n(x - x_0)$. Ensuite appliquer le lemme 17.203.

□

LEMooRRUMooRqDwYr

Lemme 17.221 ([3]).
Soit une application $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ analytique sur un voisinage de $(0,0)$. Nous posons

$$g(t,\lambda) = \int_0^t f(s,\lambda)ds. \tag{17.809}$$

Alors g est analytique sur un voisinage de $(0,0)$.

Démonstration. Nous notons $\Lambda_k^{(n)}$ l'ensemble des multiindices de longueur n dont la somme des composantes vaut k. Si (t_0, λ_0) est un point où f est analytique. Pour un point (t,λ) dans un voisinage nous avons

$$f(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Lambda_k^{(m+1)}} a_{k,\alpha}\big((t-t_0),(\lambda-\lambda_0)\big)^{\alpha}. \tag{17.810}$$

Nous pouvons réarranger les termes comme montré dans 17.209 :

$$f(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Lambda_k^{(m+1)}} a_{k,\alpha}\big((t-t_0),(\lambda-\lambda_0)\big)^{\alpha} \tag{17.811a}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\Gamma_l} a_{|\alpha|,\alpha}\big((t-t_0),(\lambda-\lambda_0)\big)^{\alpha} \tag{17.811b}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\beta\in\Lambda^{(m)}} a_{|\beta|+1,(l\beta)}(t-t_0)^l(\lambda-\lambda_0)^{\beta}. \tag{17.811c}$$

□

17.16.8 Série de puissance sur $\mathbb{C}$

PROPooBFGJooYVvYaw

Proposition 17.222 ([1]).
Si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une série de puissances[90] sur $\mathbb{C}$, alors il existe des $c_k \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{17.812}$$

Démonstration. En effet soit une application $\alpha \in \mathcal{L}_k(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Nous avons $\alpha(z, \dots, z) = z\alpha(1, z, \dots, z)$ et donc par récurrence,

$$\alpha(z, \dots, z) = z^k \alpha(1, \dots, 1). \tag{17.813}$$

En posant $c_k = \alpha_k(1, \dots, 1)$, nous avons

$$f(z) = \sum_k \alpha_k(z, \dots, z) = \sum_k \alpha_k(1, \dots, 1) z^n = \sum_k c_k z^k. \tag{17.814}$$

□

17.16.9 L'opérateur d'inversion est analytique

La proposition suivante indique que si A est un opérateur sur un espace de Banach, alors ce que nous noterions naïvement

$$\sum_k a_k A^k \tag{17.815}$$

est effectivement une série de puissances au sens de la définition 17.57.

L'ensemble $\mathrm{End}^0(E)$ est l'ensemble des endomorphismes bornés de E. De façon équivalente[91], ce sont les endomorphismes continus de E. Je ne suis pas totalement certain que la proposition 17.223 ait besoin de se restreindre à $\mathrm{End}^0(E)$.

PROPooGCLEooBVPHcu

Proposition 17.223 ([1]).
Soit un espace de Banach E. Si $A \in \mathrm{End}^0(E)$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe

$$\alpha \in \mathcal{L}_n\big(\mathrm{End}^0(E), \mathrm{End}^0(E)\big) \tag{17.816}$$

qui est symétrique, continue et telle que

$$\alpha(A, \dots, A) = \lambda A^n \tag{17.817}$$

où $A^n = A \circ \dots \circ A$.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} \alpha\colon (\mathrm{End}(E)^0)^n &\to \mathrm{End}(E)^0 \\ A_1, \dots, A_n &\mapsto \frac{\lambda}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(1)} \circ \dots \circ A_{\sigma(n)}. \end{aligned} \tag{17.818}$$

Il est vite vu que α est n-linéaire. Et vu que $|S_n| = n!$, nous avons bien $\alpha(A, \dots, A) = A^n$.

Pour prouver que α est continue, nous utilisons la proposition 12.116. Nous avons

$$\|\alpha(A_1, \dots, A_n)\| \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \|A_{\sigma(1)} \circ \dots \circ A_{\sigma(n)}\| \tag{17.819a}$$

$$\leqslant \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)}\| \dots \|A_{\sigma(n)}\| \qquad \text{prop. 12.116} \tag{17.819b}$$

$$= \|A_1\| \dots \|A_n\|. \tag{17.819c}$$

Donc en posant $\lambda = 1$ avons l'inégalité (12.320). □

PROPooKZNWooLdjDTP

Proposition 17.224 ([1]).
Soit un espace de Banach E. Soient deux opérateurs $A, T \in \mathrm{End}^0(E)$. Nous avons

$$T \circ \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} (TA^k). \tag{17.820}$$

[90] Définition 17.57.
[91] Proposition 12.98.

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathrm{GL}^0(E) &\to \mathrm{GL}^0(E)\\ X &\mapsto T\circ X\end{aligned} \tag{17.821}$$

est continue. Donc

$$\varphi\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}A^k\Big)=\lim_{N\to\infty}\varphi\Big(\sum_{k=0}^{N}A^k\Big) \tag{17.822a}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\varphi(A^k) \tag{17.822b}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(TA^k). \tag{17.822c}$$

□

PROPooPVZBooESAiRv

Proposition 17.225 ([574]).
Soit un espace de Banach E.

(1) L'application

$$\begin{aligned}f\colon B(0,1) &\to \mathrm{End}(E)\\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}A^k\end{aligned} \tag{17.823}$$

où $B(0,1)$ est le boule de rayon 1 pour la norme opérateur est analytique.

(2) Soit $A\in\mathrm{End}(E)$ avec $\|A\|<1$. Alors A est inversible et

$$A^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k. \tag{17.824}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Analytique** Nous posons

$$\begin{aligned}f\colon B(0,1) &\to \mathrm{End}(E)\\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}A^k\end{aligned} \tag{17.825}$$

Vu que $\|A\|<1$, la série converge absolument[92]. Grâce à la proposition 17.223, l'application f est une série de puissances. Le théorème 17.200(1) nous dit alors que f est analytique sur $B(0,1)$.

(2) **Inverse** Nous calculons maintenant $(\mathbb{1}-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ en utilisant la proposition 12.186. Nous avons :

$$(\mathbb{1}-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbb{1}-A)A^k \tag{17.826a}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\big(A^k-A^{k+1}\big) \tag{17.826b}$$

$$=A^0 \qquad \text{prop. 12.176} \tag{17.826c}$$

$$=\mathbb{1} \tag{17.826d}$$

Cela prouve que $(\mathbb{1}-A)$ est inversible et que son inverse est $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$.

□

PROPooCHTEooWWzSqK

Proposition 17.226 ([574]).
Soit un espace de Banach E. Soit T inversible et continu dans $\mathrm{End}(E)$. *Nous posons*

$$\rho=\frac{1}{\|T^{-1}\|}. \tag{17.827}$$

Pour tout $S\in B\big(0,1/\|T^{-1}\|\big)$, nous avons :

[92] Proposition 12.186(1).

(1) $(T+S)$ *est inversible.*

(2) *La série* $\sum_{k=0}^{\infty}(T^{-1}S)^k$ *converge absolument.*

(3) *Nous avons la formule*

$$(T+S)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}S)^kT. \tag{17.828}$$

(4) *L'application*

$$\begin{aligned} i\colon B(T,\rho)&\to \mathrm{GL}(E)\\ A&\mapsto A^{-1}\end{aligned} \tag{17.829}$$

est analytique[93].

Démonstration. Nous commençons par considérer $T=\mathrm{Id}$. Nous passons maintenant au cas général. Soient un opérateur inversible T ainsi que $S\in B\big(T,1/\|T^{-1}\|\big)$. Nous considérons

$$\phi(S)=\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}S)^kT^{-1}. \tag{17.830}$$

(1) **Rayon de convergence** Nous prouvons que cette série a un rayon de convergence $\rho=1/\|T^{-1}\|$. En effet supposons que $S\in B(0,\rho)$. Vu que T est borné (la continuité est dans les hypothèses), nous pouvons utiliser le lemme 12.97 :

$$\|T^{-1}S\|\leqslant\|T^{-1}\|\cdot\|S\|<1. \tag{17.831}$$

Nous avons donc convergence absolue de ϕ sur $B(0,\rho)$. La fonction ϕ est donc analytique sur $B(0,\rho)$.

(2) **Inverse** Vu que $\|-T^{-1}S\|<1$, nous pouvons utiliser la proposition 17.225 : l'opérateur $\mathbb{1}-(-T^{-1}S)$ est inversible et son inverse est $\sum_k(-T^{-1}S)^k$.

(3) **Lien avec** $(T+S)^{-1}$ Petit calcul. Nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_k(-T^{-1}S)^kT^{-1}&=\Big[\sum_k(-T^{-1}S)^k\Big]T^{-1} &(17.832a)\\ &=\Big[\big(\mathbb{1}-(-T^{-1}S)\big)\Big]^{-1}T^{-1} &(17.832b)\\ &=\Big[T(\mathbb{1}+T^{-1}S)\Big]^{-1} &(17.832c)\\ &=(T+S)^{-1}. &(17.832d)\end{aligned}$$

Cela prouve que si $S\in B(0,\rho)$, alors $(T+S)^{-1}=\phi(S)$.

(4) **Analycité de** i Pour $A\in B(T,\rho)$, nous posons $S=A-T$, de telle sorte à avoir $\|S\|<\rho$ et $(T+S)^{-1}=\phi(S)$. Nous avons donc

$$i(A)=\phi(A-T) \tag{17.833}$$

Vu que ϕ est analytique et que $A\mapsto A-T$ est analytique (proposition 17.202), par composition, l'application i est analytique (proposition 17.214).

□

PROPooNRXBooTdEKsu

Proposition 17.227 ([1])**.**
Soit une isométrie $\varphi\colon E\to F$ *entre espaces de Banach. Les applications*

$$\begin{aligned} u\colon \mathrm{GL}(E)&\to \mathrm{GL}(F,E)\\ g&\mapsto g\circ\varphi\end{aligned} \tag{17.834}$$

et

$$\begin{aligned} s\colon \mathcal{L}(E,F)&\to \mathrm{End}(E)\\ f&\mapsto \varphi\circ f.\end{aligned} \tag{17.835}$$

sont analytiques.

[93] Définition 17.57.

PROPooHJETooZHzodH

Proposition 17.228.
Soient deux espaces de Banach isométrique E et F. La partie $\mathrm{GL}(E,F)$ est ouverte dans $\mathcal{L}(E,F)$.

PROPooYJWGooEbbLVw

Proposition 17.229 ([1]).
Soient deux espaces de Banach isométrique E et F. L'opérateur d'inversion

$$\begin{aligned} j\colon \mathrm{GL}(E,F) &\to \mathrm{GL}(F,E) \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned} \tag{17.836}$$

est analytique.

Démonstration. Nous considérons une isométrie $\varphi\colon F \to E$, et l'application

$$\begin{aligned} s\colon \mathcal{L}(E,F) &\to \mathrm{End}(E) \\ f &\mapsto \varphi \circ f. \end{aligned} \tag{17.837}$$

(1) **φ est linéaire** Vérification immédiate.

(2) **s est une injection** Suppose que $s(f) = s(g)$. Alors pour tout $x \in E$, nous avons $(\varphi \circ f)(x) = (\varphi \circ g)(x)$. Et comme φ est bijective, cela implique $f(x) = g(x)$ et donc que $f = g$.

(3) **φ est surjective** Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Nous avons $f = s(f \circ \varphi^{-1})$.

(4) **s est une isométrie** Nous avons

$$\begin{aligned} \|s(f)\| &= \sum_{\|x\|=1} \|s(f)(x)\| && && \text{(17.838a)} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|(\varphi \circ f)(x)\| && && \text{(17.838b)} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| && \varphi \text{ est isométrique} && \text{(17.838c)} \\ &= \|f\| && && \text{(17.838d)} \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que $s\colon \mathcal{L}(E,F) \to \mathrm{End}(E)$ est une bijection isométrique.

L'application s se restreint en $s\colon \mathrm{GL}(E,F) \to \mathrm{GL}(E)$. Pour $f \in \mathrm{GL}(E,F)$, nous avons $j(f) = i\big(s(f)\big)\circ\varphi$. En effet

$$i\big(s(f)\big) \circ \varphi = i\big(\varphi \circ f\big) \circ \varphi = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = f^{-1}. \tag{17.839}$$

En utilisant l'application u de la proposition 17.227, nous avons alors

$$j = u \circ i \circ s. \tag{17.840}$$

Vu que s, i et u sont analytiques[94], j est analytique. □

PROPooPESTooQmWGRJ

Proposition 17.230 ([1]).
Soient des espaces vectoriels normés X_1, X_2, Y_1, Y_2 ainsi que des applications $f\colon X_1 \to Y_1$ et $g\colon X_2 \to Y_2$ de classe $\mathcal{A}$ (différentiable, C^k ou analytique[95]). Alors l'application

$$\begin{aligned} f \times g\colon X_1 \times X_2 &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x,y) &\mapsto \big(f(x), f(y)\big). \end{aligned} \tag{17.841}$$

est dans la classe $\mathcal{A}$.

Démonstration. La proposition 12.353 donne déjà le résultat pour f et g différentiables et C^k. Nous nous concentrons sur l'analytique.

Nous supposons que f et g sont analytiques. Nous avons donc des k-formes symétriques $\alpha_k\colon X_1 \times \ldots \times X_1 \to Y_1$ telles que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x) \tag{17.842}$$

[94] Propositions 17.227 et 17.226.
[95] Définition 17.57.

et des k-formes symétriques $\beta_k\colon X_2\times\dots X_2\to Y_2$ telles que

$$g(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(y). \tag{17.843}$$

Nous considérons les k-formes symétriques

$$\begin{aligned}\gamma_k\colon (X_1\times X_2)^k&\to Y_1\times Y_2\\ (x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k)&\mapsto \big(\alpha_k(x_1,\dots,x_k),\beta_k(y_1,\dots,y_k)\big).\end{aligned} \tag{17.844}$$

Pour chaque $N\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{N}\gamma_k(x,y)=\big(\sum_{k=0}^{N}\alpha_k(x),\sum_{k=0}^{N}\beta_k(y)\big). \tag{17.845}$$

En prenant la limite $N\to\infty$, la proposition 9.313 donne

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(x,y)=\big(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x),\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(y)\big)=(f\times g)(x,y). \tag{17.846}$$

c'est-à-dire que nous avons bien écrit $f\times g$ comme série de formes symétriques. □

Chapitre 18

Représentations et caractères

18.1 Représentations et caractères

Définition 18.1.
Si G est un groupe, l'ensemble des homomorphismes[1] $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *est un groupe pour la multiplication. Un élément de* $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *est un* ***caractère abélien****. Le nom « abélien » vient du fait que le caractère prenne ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Nous notons $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.*

Théorème 18.2.
Soit G un groupe abélien fini. Alors G est isomorphe à $\hat{G}$.

L'isomorphisme n'est pas canonique.

Démonstration. Étant donné la structure des groupes abéliens finis donnée par le théorème 7.23, nous commençons par nous concentrer sur $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{U}_n = \{\xi \in \mathbb{C} \text{ tel que } \xi^n = 1\}. \tag{18.1}$$

Pour cela nous avons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \mathbb{C}^* \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{18.2}$$

Notons que si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, alors $f(k) = f(1)^k$, donc ψ est bien un isomorphisme. Cela nous amène à définir

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Hom}\Big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}^*, \cdot\ )\Big) &\to \mathrm{U}_n \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{18.3}$$

Remarquons que pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ on a bien $f(1)^n = 1$. En effet si $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $f\big([k]\big) = f(1)^k$ et en particulier

$$f(1)^n = f([n]) = f(0) = 1. \tag{18.4}$$

Donc $f(1) \in \mathrm{U}_n$. Le φ est injective parce que si $f(1) = g(1)$ alors $f = g$ du fait que $f(k) = f(1)^k = g(1)^k = g(k)$.

Nous en sommes à avoir prouvé que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{U}_n$ (introduit au lemme 21.2). Il faudrait encore montrer que $\mathrm{U}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour cela nous nous rappelons du lemme 21.7 nous ayant raconté que le groupe U_n des racines de l'unité était cyclique et d'ordre n. Il est donc bien isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Passons au cas où

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}. \tag{18.5}$$

Dans ce cas nous montrons que

$$\begin{aligned} \alpha\colon \bigtimes_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \\ \alpha(\chi_1, \ldots, \chi_k)(g_1, \ldots, g_k) &= \chi_1(g_1) \ldots \chi_k(g_k). \end{aligned} \tag{18.6}$$

Ce α est injectif parce qu'en appliquant l'égalité

$$\alpha(\chi_1, \ldots, \chi_k) = \alpha(\chi'_1, \ldots, \chi'_k) \tag{18.7}$$

[1] Voir -1.1.

à l'élément $g = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ alors nous trouvons $\chi_i(1) = \chi'_i(1)$ parce que $\chi_j(0) = 1$. Du coup $\chi_i = \chi'_i$.

L'application α est en plus surjective. En effet si $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, alors nous définissons

$$\chi_i(g_i) = \chi(0, \dots, g_i, \dots, 0), \tag{18.8}$$

et nous avons alors $\alpha(\chi_1, \dots, \chi_k) = \chi$.

Nous devons encore montrer que α est un homomorphisme[2]. Si $\chi, \chi' \in \bigtimes_{i=1}^{k} \text{Hom}(\mathbb{F}_{d_i}, \mathbb{C}^*)$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(\chi\chi')(g_1, \dots, g_k) &= (\chi_1\chi'_1)(g_1) \dots (\chi_k\chi'_k)(g_k) && (18.9a)\\
&= \chi_1(g_1) \dots \chi_k(g_k)\chi'_1(g_1) \dots \chi'_k(g_k) && (18.9b)\\
&= \alpha(\chi)(g_1, \dots, g_k)\alpha(\chi')(g_1, \dots, g_k) && (18.9c)\\
&= \big(\alpha(\chi)\alpha(\chi')\big)(g_1, \dots, g_k). && (18.9d)
\end{aligned}$$

Donc $\alpha(\chi\chi') = \alpha(\chi)\alpha(\chi')$. □

THOooLZAHooMerBZs

Théorème 18.3.
Soit G un groupe abélien fini. Les groupes G et $\hat{\hat{G}}$ sont isomorphes et un isomorphisme canonique est donné par $\alpha\colon g \mapsto f_g$ donné par

$$f_g(\chi) = \chi(g). \tag{18.10}$$

Démonstration. D'abord f_g est bien un caractère de $\hat{G}$ parce que

$$f_g(\chi\chi') = (\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g) = f_g(\chi)f_g(\chi'). \tag{18.11}$$

Le fait que α soit un homomorphisme de groupes est direct :

$$f_{gg'}(\chi) = \chi(gg') = \chi(g)\chi(g') = f_g(\chi)f_{g'}(\chi) = (f_g f_{g'})(\chi). \tag{18.12}$$

D'autre part nous savons que G et $\hat{\hat{G}}$ ont le même cardinal. Il suffit donc de prouver l'injectivité de α pour être sûr de la bijectivité. Pour cela nous devons prouver que si $g \neq e$ alors $f_g \neq f_e$. Nous savons que pour tout caractère $\chi \in \hat{G}$, $f_e(\chi) = \chi(e) = 1$. Donc pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, nous devons trouver $\chi \in \hat{G}$ tel que $\chi(g) \neq 1$.

En vertu de ce que nous connaissons sur la structure des groupes abéliens finis (théorème 7.23), nous commençons $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons le caractère donné par $\chi([1]) = e^{2i\pi/n}$. Ce χ est un isomorphisme entre G et $\text{U}(n)$; nous n'avons $\chi([k]) = 0$ que si $[k] = [n] = [0]$. Pour rappel dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le neutre est $e = 0$ et non $e = 1$.

Passons au cas général :

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \tag{18.13}$$

Si $g = (g_1, \dots, g_k)$ est non nul dans G, alors il existe k tel que $g_k \neq 0$ et on prend

$$\chi(g_1, \dots, g_k) = \chi_k(g_k) \tag{18.14}$$

où χ_k est le caractère $\chi_i([1]) = e^{2\pi i/n_k}$. Ce χ est alors un caractère non trivial de G.

□

18.1.1 Crochet de dualité et transformée de Fourier

Si G est un groupe abélien, nous définissons le crochet de dualité entre G et $\hat{G}$ par

$$\begin{aligned}
\langle ., . \rangle\colon G \times \hat{G} &\to \mathbb{C}^*\\
\langle g, \chi \rangle &= \chi(g).
\end{aligned} \tag{18.15}$$

Notons que l'image de ce crochet n'est pas $\mathbb{C}^*$ entier, mais seulement le groupe unitaire $\text{U}(n)$ où n est l'exposant[3] de G.

Si f, g sont des applications de G dans $\mathbb{C}$, alors on leur associe le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{18.16}$$

[2] Voir -1.1
[3] Définition 3.139.

LEMooCSTVooJfhzEU

Lemme 18.4.
Les caractères de G forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$ pour ce produit scalaire.

Démonstration. Étant donné que les $\chi(s)$ sont des nombres complexe de module 1, nous avons $\chi(s)\overline{\chi(s)} = 1$ et par conséquent $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Si par contre $\chi \neq \chi'$, alors il existe $s_\in G$ tel que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$. Dans ce cas en effectuant un changement de variable $s \to s_0 s$ dans la sommation,

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s\in G} \chi(s)\overline{\chi'(s)} \tag{18.17a}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{s\in G} \chi(s_0 s)\overline{\chi'(s_0 s)} \tag{18.17b}$$

$$= \frac{1}{|G|} \chi(s_0)\overline{\chi'(s_0)} \sum_{s\in G} \chi(s)\overline{\chi'(s)}. \tag{18.17c}$$

Donc nous avons trouvé

$$\langle \chi, \chi' \rangle \big(1 - \chi(s_0)\overline{\chi'(s_0)}\big) = 0. \tag{18.18}$$

Mais vu que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$, la parenthèse est non nulle (pour rappel $\chi(s_0)$ est un complexe de module 1) et par conséquent $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

Nous déduisons immédiatement que les caractères forment une famille libre parce que si $\sum_i a_i \chi_i = 0$ (la somme est sur tous les caractères), alors en prenant le produit scalaire avec χ_k,

$$\sum_i a_i \langle \chi_k, \chi_i \rangle = 0, \tag{18.19}$$

et donc $a_k = 0$.

Les caractères forment donc un système libre orthonormé. De plus l'espace engendré à la bonne dimension parce que le cardinal de l'ensemble des caractères est la dimension (complexe) de l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ parce que, en utilisant l'isomorphisme entre G et $\hat{G}$,

$$\operatorname{Card} \hat{G} = \operatorname{Card}(G) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^G. \tag{18.20}$$

□

Du fait que les caractères forment une base orthonormée, nous pouvons écrire, pour toute application $f : G \to \mathbb{C}$,

EqunsXWC

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \langle \chi, f \rangle \chi. \tag{18.21}$$

À une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ nous associons la **transformée de Fourier**

$$\begin{aligned} \hat{f} : \hat{G} &\to \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \langle \chi, f \rangle. \end{aligned} \tag{18.22}$$

Nous avons donc aussi une espèce de formule d'inversion

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi \tag{18.23}$$

qui n'est qu'une réécriture de 18.21.

18.1.2 Groupes non abéliens

Nous avons vu que le groupe des caractères $\hat{G}$ contenait toute l'information sur un groupe abélien. Malheureusement, pour les groupes non abéliens, ça ne va pas suffire, et nous allons introduire la notion de représentations, dont les caractères seront un cas particulier de dimension un.

Proposition 18.5.
Soit G un groupe (pas spécialement abélien). Nous avons

$$\hat{G} \simeq \operatorname{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big). \tag{18.24}$$

Démonstration. Ce qui fait fonctionner la preuve est le fait que si $f\colon G\to\mathbb{C}^*$ est un homomorphisme[4], alors f s'annule sur $D(G)$. L'isomorphisme est

$$\begin{aligned}\psi\colon \hat{G}&\to \text{Hom}\big(G/D(G),\mathbb{C}^*\big)\\ \psi(f)[g]&=f(g).\end{aligned}\tag{18.25}$$

Cette application est bien définie parce que si f est un homomorphisme,

$$f(gklk^{-1}l^{-1})=f(g).\tag{18.26}$$

D'autre part ψ est un homomorphisme de groupe parce que

$$\psi(f_1f_2)[g]=(f_1f_2)(g)=f_1(g)f_2(g)=\psi(f_1)[g]\psi(f_2)[g]=\big(\psi(f_1)\psi(f_2)\big)[g].\tag{18.27}$$

Pour l'injectivité de ψ, soit f_1 et f_2 telles que $\psi(f_1)=\psi(f_2)$. Alors pour tout $g\in G$ nous avons

$$\psi(f_1)[g]=\psi(f_2)[g]\tag{18.28}$$

et donc $f_1(g)=f_2(g)$.

Enfin ψ est surjective. En effet, soit $\bar{f}\in\text{Hom}\big(G/D(G),\mathbb{C}^*\big)$. Alors nous obtenons $\psi(f)=\bar{f}$ en posant

$$f(g)=\bar{f}[g].\tag{18.29}$$

Il faut juste vérifier que le f ainsi défini est dans $\hat{G}$, c'est-à-dire que $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$. □

Cette proposition nous montre que

$$\hat{G}=\widehat{G/D(G)},\tag{18.30}$$

alors que $G/D(G)$ est abélien ; il n'est donc pas tellement possible que $\hat{G}$ contienne beaucoup d'informations intéressantes sur G.

18.1.3 Représentations linéaires des groupes finis

Si $\dim V=1$, alors $\text{GL}(V)=\mathbb{C}^*$ et les représentation sont les caractères abéliens.

ExKUAyUD

Exemple 18.6.
Considérons le triangle équilatéral A,B,C donné par les points

$$\begin{cases}A=1 & (18.31a)\\ B=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) & (18.31b)\\ C=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}) & (18.31c)\\ & (18.31d)\end{cases}$$

Dans la base (pas orthonormée) $\{A,B\}$ de $\mathbb{R}^2$, ces trois points sont donnés par

$$A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.\tag{18.32}$$

Le groupe symétrique S_3 agit sur le triangle par permutation des sommets. Vues dans la base $\{A,B\}$, les transpositions correspondent aux matrices

$$\rho(AB)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\tag{18.33a}$$

$$\rho(AC)=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}\tag{18.33b}$$

$$\rho(BC)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}.\tag{18.33c}$$

[4] Voir -1.1.

Cherchons la matrice correspondante à la permutation (A, B, C). Vu que A est envoyé sur B, la première colonne sera[5] $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, et comme B est envoyé sur C, la deuxième colonne sera $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Nous avons donc

$$\rho(ABC) = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}. \tag{18.34}$$

Nous vérifions que $\rho(ABC)C = A$:

$$\rho(ABC)C = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \tag{18.35}$$

Par ailleurs, la permutation (A, B, C) se décompose en $(A, B, C) = (A, C)(A, B)$ et nous pouvons vérifier que

$$\rho(AC)\rho(AB) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix} = \rho(ABC). \tag{18.36}$$

△

Définition 18.7.
*Si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations du groupe G, alors nous définissons la **somme directe** par $\big(V \oplus V', \rho \oplus \rho'\big)$ donné par*

$$(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix}\rho(g) & 0\\0 & \rho'(g)\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(V \oplus V'). \tag{18.37}$$

Nous noterons souvent $2V$ pour la représentations $(V, \rho) \oplus (V, \rho)$ et plus généralement l'écriture

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{18.38}$$

signifiera la représentation somme de k_i termes de la représentation W_i. Ici encore un abus est commis entre la représentation (ρ_i, W_i) et l'espace W_i.

18.1.4 Module

Nous considérons la $\mathbb{C}$-algèbre $G[\mathbb{C}]$ des combinaisons (formelles) d'éléments de G à coefficients dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathbb{C}[G] = \{\sum_{s\in G} a_s s\} \tag{18.39}$$

avec le produit hérité de la bilinéarité :

$$\sum_{s\in G}\sum_{t\in G} a_s b_t st = \sum_s \sum_t a_s b_{s^{-1}t} t, \tag{18.40}$$

et la somme

$$(\sum_s a_s s) + \sum_t b_t t = \sum_{s\in G}(a_s + b_s)s. \tag{18.41}$$

Le tout est une $\mathbb{C}$-algèbre agissant sur V par

$$\left(\sum_s a_s s\right) v = \sum_{s\in G} a_s \rho(s) v \in V \tag{18.42}$$

Les sous-modules indécomposables seront les représentations irréductibles.

Définition 18.8.
*La représentation (V, ρ) du groupe G est **irréductible** si les seuls sous-espaces invariants de V sous $\rho(G)$ sont V et $\{0\}$.*

Exemple 18.9.
La représentation de S_3 sur $\mathbb{R}^2$ donnée par les permutations des sommets d'un triangle équilatéral donnée dans l'exemple 18.6 est irréductible. △

[5] Les colonnes sont les images des vecteurs de base.

La question qui vient est de savoir si une représentation possédant des sous-espaces invariants peut être écrite comme la somme de représentations irréductibles.

PropHeyoAN

Proposition 18.10.
Soit (V,ρ) une représentation linéaire de dimension finie d'un groupe fini[6]*. Si W_1 est un sous-espace stable*[7]*, alors il existe un sous-espace W_2 également stable et tel que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Toute représentation linéaire est décomposable en représentations irréductibles.

Démonstration. Soit $P\colon V \to V$ un projecteur sur W_1, c'est-à-dire que $P^2 = P$ et $P(V) = W_1$. Pour construire un tel projecteur, on peut par exemple prendre un supplémentaire de W_1 dans V puis utiliser la décomposition[8]. Nous considérons l'opérateur

$$P_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ P\circ\rho(g)^{-1}. \tag{18.43}$$

Prouvons que ce P_G est encore un projecteur. D'abord pour tout $g\in G$ nous avons

$$\rho(g)P_G\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\rho(gs)P\rho(gs)^{-1} = P_G. \tag{18.44}$$

La dernière égalité est un changement de variables dans la somme[9]. Cela signifie que $P_G\rho = \rho P_G$. Nous avons même $P_GP = P$ parce que si $v\in W_1$, alors

$$P_G(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\rho(s)P\underbrace{\rho(s)^{-1}v}_{\in W_1} \tag{18.45a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{s}\rho(s)\rho(s)^{-1}v \tag{18.45b}$$

$$= v. \tag{18.45c}$$

Avec cela nous pouvons conclure que $P_G^2 = P_G$ parce que

$$P_G\circ P_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g}P_G\rho(g)P\rho(g)^{-1} \tag{18.46a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho(g)P_GP\rho(g)^{-1} \tag{18.46b}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho(g)P\rho(g)^{-1} \tag{18.46c}$$

$$= P_G. \tag{18.46d}$$

Donc P_G est un projecteur, est stable sous les conjugaisons par $\rho(g)$ et commute avec $\rho(g)$. Nous décomposons Id de façon évidente en

$$\mathrm{Id} = P_G + (\mathrm{Id} - P_G). \tag{18.47}$$

Étant donné que l'opérateur P_G commute avec tous les $\rho(g)$, les noyaux de P_G et $\mathrm{Id}-P_G$ sont des sous-espaces invariants. Vu que P_G est un projecteur, nous avons $q(P_G) = 0$ avec $q(X) = X^2 - X$. Pour appliquer le lemme des noyaux (théorème 10.90), nous remarquons que $q(X) = X(X-1)$ et donc

$$V = \ker P_G \oplus \ker(P_G - \mathbb{1}). \tag{18.48}$$

Si nous posons $W_2 = \ker P_G$, il reste à voir que $\ker(P_G - \mathbb{1}) = W_1$. D'abord $W_1 \subset \ker(P_G - \mathrm{Id})$ parce que si $w\in W_1$, ce dernier étant stable,

$$P_Gw = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)P\underbrace{\rho(g)^{-1}w}_{\in W_1} \tag{18.49a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}w \tag{18.49b}$$

$$= w. \tag{18.49c}$$

[6] La démonstration marche aussi pour les groupes compacts, mais il faudrait des intégrales.
[7] c'est-à-dire si ρ n'est pas irréductible.
[8] Ou encore prendre une base de W_1, l'étendre en une base de V et définir P comme l'annulation des coefficients des vecteurs « complétant » la base.
[9] Et c'est ça qui demande un peu de technique pour écrire la preuve dans le cas d'un groupe compact : il faut une mesure de Haar.

Pour prouver l'inclusion inverse, nous savons que P_G et P sont des projecteurs tels que $P_G P = P$, ce qui signifie que l'image de P_G est incluse à celle de P, c'est-à-dire à W_1. Mais $\text{Image}(P_G) = \ker(\mathbb{1} - P_G)$, donc

$$\ker(\mathbb{1} - P_G) = \text{Image}(P_G) \subset \text{Image}(P) = W_1. \tag{18.50}$$

La représentation ρ se décompose donc en deux sous-représentations (ρ, W_1) et ρ, W_2. Si l'une des deux n'est pas irréductible, le processus peut recommencer. Vu que la dimension de V est finie, toute représentation se décompose en une somme finie de représentation irréductibles. □

18.1.5 Structure hermitienne

Soit (ρ, V) une représentation de G sur un espace vectoriel complexe V. Nous voulons munir V d'un produit scalaire hermitien (définition 10.174) tel que les opérateurs $\rho(g)$ soient tous des isométries. C'est-à-dire que nous voudrions définir $\langle u, v\rangle_G$ de telle sorte à avoir

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle_G = \langle u, v\rangle_G \tag{18.51}$$

pour tout $g \in G$. Nous commençons par considérer un produit hermitien $\langle ., .\rangle$ quelconque et puis nous définissons

$$\langle u, v\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle. \tag{18.52}$$

Nous devons vérifier que c'est un produit. La seule des conditions dont la vérification n'est pas immédiate est celle de positivité. Pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$, nous avons $\langle \rho(g)v, \rho(g)v\rangle$ est positif et nul si et seulement si $\rho(g)v = 0$. Étant donné que $\rho(e)v = v$, parmi les termes de la somme

$$\langle u, u\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)v, \rho(g)v\rangle, \tag{18.53}$$

au moins un est strictement positif (pourvu que $v \neq 0$) ; les autres sont positifs ou nuls. Par conséquent $\langle v, v\rangle_G = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Donc les groupes finis peuvent être vus comme des parties de groupes d'isométrie. De la même façon, en utilisant une mesure de Haar pour faire la moyenne, nous pouvons plonger les groupes compacts dans des groupes unitaires.

18.1.6 Caractères

Définition 18.11.
Soit (V, ρ) une représentation linéaire du groupe G. Le ***caractère*** *de ρ est la fonction*

$$\begin{aligned}\chi_\rho\colon G &\to \mathbb{C}\\ s &\mapsto \text{Tr}\big(\rho(s)\big).\end{aligned} \tag{18.54}$$

Par invariance cyclique de la trace, nous avons

$$\chi_\rho(sts^{-1}) = \chi_\rho(t), \tag{18.55}$$

ce qui fait que le caractère est une fonction constante sur les classes de conjugaison.

D'après sa fiche Wikipédia, le marquis de Sade, passionné de théâtre, faisait des représentations qui avaient du caractère.

Un **caractère irréductible** est un caractère d'une représentation irréductible.

Définition 18.12.
Une application $f\colon G \to \mathbb{C}$ est ***centrale*** *si elle est constante sur les classes de conjugaison.*

Les traces sont des applications centrales.

L'ensemble des fonctions centrales sur un groupe fini (ou tout au moins ayant un nombre fini de classes de conjugaison) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension égale au nombre de classes, et nous pouvons mettre le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{18.56}$$

EqIrEpVI

C'est une forme hermitienne sur l'espace des fonctions centrales.

18.2 Équivalence de représentations et caractères

Cette section prend des éléments des articles lemme de Schur, caractère d'une représentation, fonction centrale et trace de Wikipédia.

Définition 18.13.
*Nous disons que les deux représentations (V,ρ) et (V',ρ') sont **équivalentes** si il existe une bijection linéaire $f: V\to V'$ telle que*

$$f\circ\rho=\rho'\circ f. \tag{18.57}$$

*Nous disons alors que f **entrelace** ρ et ρ'.*

ThoyftobH

Théorème 18.14 (Théorème de Schur)**.**
Si (V,ρ) et (V',ρ') sont des représentations irréductibles non équivalentes alors la seule application linéaire $f: V\to V'$ entrelaçant ρ et ρ' est la fonction nulle.

En d'autres termes, soit les représentations sont équivalentes (et il y a un isomorphisme), soit il n'y a même pas un homomorphisme.

Démonstration. Soit $f\in\mathcal{L}(V,V')$ telle que $f\circ\rho=\rho'\circ f$. Alors $\ker f$ est un sous-espace stable sous $\rho(G)$, et $\text{Image}(f)$ est un sous-espace de V' stable par $\rho'(G)$. Par irréductibilité, nous avons que $\ker(f)=\{0\}$ ou V. Même chose pour $\text{Image}(f)$. Il y a deux possibilités.

(1) Si $\ker(f)=\{0\}$, alors $\text{Image}(f)\neq\{0\}$ et alors $\text{Image}(f)=V'$. Du coup f est injective et surjective, c'est-à-dire est un isomorphisme.

(2) Si $\ker(f)=V$, alors $f=0$.

□

Corolaire 18.15 (Schur pour les représentations sur $\mathbb{C}$)**.**
Soit (V,ρ) une représentation irréductible, alors l'ensemble

$$\text{End}_G(V,\rho)=\{f\in\text{End}(V)\text{ tel que }\rho\circ f=f\circ\rho\} \tag{18.58}$$

est l'ensemble des homothéties.

Démonstration. Soit $f\in\text{End}_G(V,\rho)$. Vu que l'espace est sur $\mathbb{C}$, l'endomorphisme f a une valeur propre λ. L'opérateur $g=f-\lambda\mathbb{1}$ est aussi un opérateur d'entrelacement de ρ alors que $\ker(g)\neq\{0\}$ par définition de valeur propre. Du coup $\ker(g)=V$, ce qui signifie que f est l'isométrie de rapport λ : $f=\lambda\,\text{Id}$. □

LempUSOlo

Lemme 18.16.
Si (ρ,V) et (ρ',V') sont des représentations équivalentes de caractères χ et χ', alors $\chi=\chi'$.

Démonstration. Si $A: V\to V'$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entrelaçant ρ et ρ', c'est-à-dire si pour tout g, $\rho'(g)A=A\rho(g)$, alors $\rho'(g)=A\rho(g)A^{-1}$ et

$$\chi'(g)=\text{Tr}\big(\rho'(g)\big)=\text{Tr}\big(A\rho(g)A^{-1}\big)=\text{Tr}\big(\rho(g)\big) \tag{18.59}$$

parce que la trace est un invariant de similitude (lemme 10.209). □

LemJqIZns

Lemme 18.17.
Si χ est le caractère de la représentation complexe (V,ρ) du groupe fini G, alors pour tout $g\in G$ nous avons $\chi(g^{-1})=\overline{\chi(g)}$.

Démonstration. Par le corolaire 2.74 au théorème de Lagrange, nous avons $g^{|G|}=e$ et donc en tant qu'opérateur, $\rho(g)^{|G|}=\mathbb{1}$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont donc des racines de l'unité. Si nous notons λ_i ces valeurs propres, alors $\chi(g)=\sum_i\lambda_i$, et en considérant la matrice dans sa base de diagonalisation (lemme de Schur complexe, 14.102), nous voyons que

$$\chi(g^{-1})=\text{Tr}\big(\rho(g)^{-1}\big)=\sum_i\frac{1}{\lambda_i}. \tag{18.60}$$

Mais λ_i étant une racine de l'unité nous avons $\frac{1}{\lambda_i}=\bar{\lambda}_i$, ce qui fait que

$$\chi(g^{-1})=\sum_i\bar{\lambda}_i=\overline{\chi(g)}. \tag{18.61}$$

□

PropJzbfWi

Proposition 18.18.
Soient deux représentations irréductibles complexes (V,ρ) et (V',ρ') du même groupe fini G, et χ et χ' leurs caractères respectifs. Nous avons

(1) $\langle\chi,\chi'\rangle=0$ *si ρ et ρ' ne sont pas équivalentes.*

(2) $\langle\chi,\chi'\rangle=1$ *si les représentations sont équivalentes.*

Démonstration. Nous considérons les bases $\{e_1,\dots,e_n\}$ de V et $\{f_1,\dots,f_m\}$ de V'. Puis nous considérons la matrice $F(k,l)=E_{kl}\in\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ où pour rappel, E_{kl} est la matrice de composantes $(E_{kl})_{ij}=\delta_{ki}\delta_{lj}$. Nous posons

$$F_G(k,l)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ F(k,l)\circ\rho'(g)^{-1}. \tag{18.62}$$

En nous permettant de ne pas réécrire les indices k et l de F et F_G, nous montrons que F_G entrelace ρ et ρ' :

$$\begin{aligned}
F_G\circ\rho'(t)&=\frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\rho(s)\circ F\circ\rho'(s^{-1})\circ\rho'(t) && (18.63a)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{s}\rho(s)F\rho'(s^{-1}t) && (18.63b)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{k}\rho(tk)F\rho'(k^{-1}) && (18.63c)\\
&=\frac{1}{|G|}\rho(t)\sum_{k}\rho(k)F\rho'(k^{-1}) && (18.63d)\\
&=\rho(t)\circ F_G. && (18.63e)
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons effectué le changement de variables $k=(s^{-1}t)^{-1}$ qui donne $s=tk$.

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned}
\Big(\rho(g)F(k,l)\rho'(g^{-1})\Big)_{ij}&=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\rho(g)_{ir}F(k,l)_{rs}\rho'(g^{-1})_{sj} && (18.64a)\\
&=\sum_{rs}\rho(g)_{ir}\delta_{kr}\delta_{ls}\rho'(g^{-1})_{sj} && (18.64b)\\
&=\rho(g)_{ik}\rho'(g^{-1})_{lj}, && (18.64c)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$F_G(k,l)_{ij}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)_{ik}\rho'(g^{-1})_{lj}. \tag{18.65}$$
Eqgvpzfg

Si χ et χ' sont les caractères de ρ et ρ', alors nous avons le produit (18.56) qui donne

$$\begin{aligned}
\langle\chi,\chi'\rangle&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi'(g)} && (18.66a)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi(g)\chi'(g^{-1}) && \text{lemme 18.17} && (18.66b)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\rho(g)_{ii}\rho'(g^{-1})_{jj} && (18.66c)\\
&=\sum_{ij}F_G(i,j)_{ij} && \text{par (18.65).} && (18.66d)
\end{aligned}$$
sPqKYvwTM

Si les représentations ρ et ρ' ne sont pas équivalentes, le fait que F_G en soit un opérateur d'entrelacement implique par le théorème de Schur 18.14 que $F_G=0$ et donc $\langle\chi,\chi'\rangle=0$.

Si au contraire les représentation sont équivalentes, alors le lemme 18.16 nous dit que $\chi=\chi'$ et nous reprenons la définition :

$$\langle\chi,\chi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi(g)\overline{\chi(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}1=1 \tag{18.67}$$

parce que les nombres $\chi(g)$ sont des racines de l'unité. □

18.2.1 Représentation régulière

DEFooGGPTooExTxWj

Définition 18.19.
*Nous notons λ la **représentation régulière gauche**, agissant sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{K}$ par*

$$\big(\lambda(g)f\big)(h) = f(g^{-1}h). \tag{18.68}$$

D'autre part nous considérons les fonctions $\delta_g \colon G \to \mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou pire) définie par

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{18.69}$$

La représentation régulière agit sur les fonctions δ_s de la façon suivante :

$$\lambda(g)\delta_s = \delta_{gs} \tag{18.70}$$

parce que $\big(\lambda(g)\delta_s\big)(h) = \delta_s(g^{-1}h) = \delta_{gs}(h)$.

LEMooGYIKooRRUxHq

Lemme 18.20.
Le caractère de la représentation régulière gauche est donné par

$$\chi_\lambda = |G|\delta_e. \tag{18.71}$$

EqUucVNa

Démonstration. Appliquer l'équation (18.71) fonctionne parce que $\chi_\lambda(e)$ est la dimension de l'espace des fonctions sur G, c'est-à-dire $|G|$. Si par contre $g \neq e$, alors $\lambda(g)$ est une matrice de permutation (dans la base des δ_h) et a donc tous ses éléments diagonaux nuls. □

Si ρ est une représentation et si f est une fonction sur le groupe, alors nous considérons l'opérateur

$$\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g). \tag{18.72}$$

PropEAXkAY

Proposition 18.21 ([575]).
Si (ρ, V) est une représentation irréductible et si f est une fonction centrale sur G, alors l'opérateur ρ_f est une homothétie de V de rapport

$$\frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g) \tag{18.73}$$

où χ est le caractère de ρ.

Démonstration. Nous commençons par voir que ρ_f entrelace ρ. En effet,

$$\rho(t)^{-1}\circ\rho_f\circ\rho(t) = \sum_g f(g)\rho(t^{-1}gt) \tag{18.74a}$$
$$= \sum_h f(tht^{-1})\rho(h) \qquad \text{chm.var.} h = t^{-1}gt \tag{18.74b}$$
$$= \sum_h f(h)\rho(h) \tag{18.74c}$$
$$= \rho_f \tag{18.74d}$$

où en écrivant $f(tht^{-1}) = f(h)$, nous avons utilisé le fait que f était centrale. Étant donné que ρ_f entrelace une représentation irréductible, le lemme de Schur (18.14) nous indique que ρ_f est une homothétie. Soit k le facteur d'homothétie. Alors d'une part $\mathrm{Tr}(\rho_f) = nk$. D'autre part,

$$\mathrm{Tr}(\rho_f) = \mathrm{Tr}\big(\sum_g f(g)\rho(g)\big) \tag{18.75a}$$
$$= \sum_g f(g)\,\mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big) \tag{18.75b}$$
$$= \sum_g f(g)\chi(g). \tag{18.75c}$$

Du coup effectivement

$$k = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g). \tag{18.76}$$

□

18.2.2 Caractères et représentations : suite et fin

Lemme 18.22.
Un groupe fini n'a (à équivalence près) qu'un nombre fini de représentations irréductibles.

Démonstration. Les caractères irréductibles forment un système orthonormé (proposition 18.18) et donc libre parmi les fonctions centrales. Donc il y a au plus autant de caractères irréductibles que la dimension de l'espace des fonctions centrales ; et ce dernier est de dimension finie donnée par le nombre de classes de conjugaison de G. □

Nous savons que les caractères de deux représentations équivalentes sont égaux. Étant donné qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations irréductibles, il existe un nombre fini de caractères irréductibles. Nous pouvons donc fixer les notations suivantes. Les caractères irréductibles seront notés $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,h}$ et nous noterons (σ_i, W_i) une représentation ayant le caractère φ_i.

Théorème 18.23 ([575]).
Soit (ρ, V) une représentation de G de caractère χ. Alors sa décomposition en représentations irréductibles est donnée par

$$(V, \rho) = \bigoplus_{i=1}^{h} k_i (W_i, \sigma_i) \tag{18.77}$$

avec $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$. En particulier, à permutation près des facteurs, la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles est unique.

Démonstration. La décomposition de χ en caractères irréductibles est donnée par $\chi = \sum_i k_i \varphi_i$; en prenant le produit de cette égalité avec φ_j et en tenant compte de l'othonormalité des caractères irréductibles,

$$\langle \chi, \varphi_j \rangle = \sum_i k_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = k_j. \tag{18.78}$$

□

Le théorème suivant est ce qui nous permet de dire que l'étude des caractères et l'étude des représentations, c'est la même chose.

ThoWGkfADd

Théorème 18.24.
Soit G un groupe fini[10].

ItemZReOWoHi

(1) Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractères.

ItemZReOWoHii

(2) Si χ est le caractère d'une représentation, alors

(2a) $\langle \chi, \chi \rangle \in \mathbb{N}$

(2b) $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si la représentation est irréductible.

Démonstration. Nous démontrons chaque point séparément.

(1) Le fait que deux représentations équivalentes aient même caractère est le lemme 18.16. Nous montrons l'autre sens. Si (ρ, V) et (ρ', V') sont deux représentations irréductibles de décompositions

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{18.79a}$$

$$V' = \bigoplus_i k'_i W_i, \tag{18.79b}$$

alors si $\chi = \chi'$, nous avons $k_i = k'_i$ et les représentations sont identiques.

(2) Soit (ρ, V) une représentation ayant χ comme caractère. En posant $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$ nous avons la décomposition en représentations irréductibles

$$V = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{18.80}$$

et aussi

$$\langle \chi, \chi \rangle = \langle \sum_i k_i \varphi_i, \sum_j k_j \varphi_j \rangle = \sum_i k_i^2 \in \mathbb{N}. \tag{18.81}$$

[10] Nous sommes depuis longtemps dans l'étude des représentations des groupes finis.

Ce nombre est de plus égal à 1 si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls sauf un qui vaudrait 1. Ce cas donne une représentation irréductible.

□

PropYLnxIjk

Proposition 18.25.
Si (λ, R) est la représentation régulière gauche de décomposition en représentations irréductibles

$$R = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{18.82}$$

alors

ITEMooLXIJooDxkGJh

(1) $k_i = \dim W_i$,

ItemEXAjTIh

(2) $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$,

(3) *pour tout* $g \in G$, $\sum_i (\dim W_i)\varphi_i(g) = 0$[11].

(4) *Si $\{(n_i, \varphi_i)\}$ est la liste des couples dimension,caractère des représentations irréductibles non équivalentes, alors pour tout $s \in G \setminus \{e\}$ nous avons $\sum_{i=1}^{p} n_i \varphi_i(s) = 0$ où la somme porte sur les représentations irréductibles non équivalentes.*

Démonstration. Nous notons r le caractère de la représentation régulière gauche. Nous avons

$$k_i = \langle r, \varphi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r(s)\overline{\varphi_i(s)} = \overline{\varphi_i(e)}. \tag{18.83}$$

Mais $\varphi_i(e) = \dim(W_i) \in \mathbb{N}$, donc nous avons bien $k_i = \dim(W_i)$. Le caractère de la représentation régulière peut alors s'exprimer de deux façons :

$$|G|\delta_e = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i. \tag{18.84}$$

En évaluant cette égalité en e nous trouvons directement

$$|G| = \sum_i (\dim W_i)^2, \tag{18.85}$$

et en l'évaluant en $s \neq e$, nous trouvons

$$0 = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i(s). \tag{18.86}$$

□

fqsdf

Le théorème suivant est valable pour les groupes finis (comme toute cette section).

Thogocemg

Théorème 18.26 ([575]).
Les caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_h$ forment une base orthonormée des fonctions centrales sur G.

Démonstration. Nous savons déjà qu'ils forment un système orthonormé. Considérons le sous-espace $H = \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,h}$ de l'espace des fonctions centrales sur G. En vertu de la proposition 6.152, il nous suffit de prouver que $H^\perp = \{0\}$. Soit donc f, une fonction centrale appartenant à $H^\perp$. Pour tout i, nous avons $\langle f, \varphi_i \rangle = 0$ et donc aussi $\langle \bar{f}, \bar{\varphi}_i \rangle = 0$.

Considérant une représentation irréductible (σ, W) de caractère φ, nous savons par la proposition 18.21 que l'opérateur

$$\sigma_{\bar{f}} = \sum_g \bar{f}(g)\varphi(g) \tag{18.87}$$

est une homothétie de rapport $\langle \bar{f}, \bar{\varphi} \rangle / \dim W = 0$. Étant donné que toutes les représentations sont des sommes directes de représentations irréductibles, en réalité l'opérateur $\rho_{\bar{f}}$ est nul pour toute représentation ρ. En particulier pour la représentation régulière,

$$0 = \lambda_{\bar{f}}(\delta_t) = \sum_{g \in G} \bar{f}(g)\lambda(g)(\delta_t) = \sum_g \bar{f}(g)\delta_{ft}. \tag{18.88}$$

[11] Cette propriété est appelée « orthogonalité des colonnes » pour une raison qui apparaîtra au moment de compléter le tableau (18.111).

En écrivant cette égalité avec $t = e$ et puis en appliquant à $k \in G$ nous trouvons

$$0 = \sum_g \bar{f}(g)\delta_g(k) = \bar{f}(k). \tag{18.89}$$

Donc $\bar{f} = 0$ et f est nulle. □

CorbdcVNC

Corolaire 18.27.
Le nombre de représentations irréductibles non équivalentes d'un groupe fini est égal à son nombre de classes de conjugaison.

Démonstration. Le nombre de classes de conjugaison est la dimension de l'espace des fonctions centrales qui elle-même est égale au nombre de caractères irréductibles par le théorème 18.26. Enfin deux caractères irréductibles sont égaux si et seulement si les représentations sous-jacentes sont équivalentes. □

CORooWAGXooByrelO

Corolaire 18.28.
Toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1.

Démonstration. Le corolaire 18.27 nous dit qu'il y a autant de représentations unitaires qu'il n'y a de représentations irréductibles (non équivalentes). Mais les classes de conjugaisons sont des singletons (lemme 2.9). Nous avons donc exactement $|G|$ représentations irréductibles lorsque G est abélien.

Mais d'autre part la proposition 18.25(2) donne $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$ lorsque la somme parcours les représentations irréductibles. Il y a $|G|$ termes à la somme, donc tous les termes doivent être 1. □

18.3 Représentation produit tensoriel

Définition 18.29.
Soient ρ et ϕ, deux représentations d'un groupe G sur des espaces vectoriels V et W. La représentation ***produit tensoriel*** *est la représentation*

$$\begin{aligned} \rho \otimes \phi \colon G &\to \mathrm{GL}(V \otimes W) \\ (\rho \otimes \phi)(g)(v \otimes w) &= \rho(g)v \otimes \phi(g)w. \end{aligned} \tag{18.90}$$

L'espace $V \otimes W$ est le produit tensoriel de V et W, défini en 12.223.

Pour trouver son caractère, nous considérons une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{e_\alpha\}$ de W, et la base $\{e_i \otimes e_\alpha\}$ de $V \otimes W$. Donc

$$(\rho \otimes \phi)(g)(e_i \otimes e_\alpha) = \rho(g)e_i \otimes \phi(g)e_\alpha. \tag{18.91}$$

Nous devons savoir quelle est la composante « $e_i \otimes e_\alpha$ » de cette dernière expression, et c'est évidemment

$$\rho(g)_{ii}\rho_{\alpha\alpha}, \tag{18.92}$$

ce qui nous amène à dire que

$$\mathrm{Tr}(\rho \otimes \phi)(g) = \sum_i \sum_\alpha \rho(g)_{ii}\phi(g)_{\alpha\alpha} = \mathrm{Tr}\big(\rho(g)\big)\,\mathrm{Tr}\big(\phi(g)\big), \tag{18.93}$$

c'est-à-dire au final que

$$\chi_{\rho\otimes\phi} = \chi_\rho \chi_\phi. \tag{18.94}$$

EqOTmvfif

18.4 Exemple sur le groupe symétrique

Soit $G = S_3$, un des premiers groupes finis non abéliens. On en a une représentation de dimension deux en tant que permutation des sommets d'un triangle équilatéral, donnée dans l'exemple 18.6 ; nous notons ρ cette représentation.

Nous y avons aussi la représentation de signature donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon \colon S_3 &\to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto \epsilon(\sigma)\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned} \tag{18.95}$$

Et enfin il y a la représentation triviale. Ce sont les trois représentations irréductibles ; pour rappel il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison (corolaire 18.27).

Classe de conjugaison	taille	χ_1	χ_ϵ	χ_ρ
Id	1	1	1	2
(A,B)	3	1	-1	0
(A,B,C)	2	1	1	-1

Nous calculons par exemple le produit scalaire

$$\langle \chi_1, \chi_\epsilon \rangle = \frac{1}{6}\big(1 \cdot \chi_1(\mathrm{Id})\overline{\chi_\epsilon(\mathrm{Id})} + 3 \cdot \chi_1(A,B)\overline{\chi_\epsilon(A,B)} + 2 \cdot \chi_1(A,B,C)\overline{\chi_\epsilon(A,B,C)}\big) \tag{18.96a}$$

$$= 0. \tag{18.96b}$$

D'autre part nous avons aussi

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1. \tag{18.97}$$

18.5 Table des caractères du groupe symétrique S_4

SecUMIgTmO

Pour la table des caractères de S_4, voir [112]. Et si vous voulez la table des caractères du groupe diédral, vu que ce sont de isométries de $\mathbb{R}^n$, il faudra voir plus bas en la section 20.18.

18.5.1 Calculs à partir de rien ou presque

Nous savons que les classes de conjugaison dans S_4 sont caractérisées par la structure des décompositions en cycles (proposition 2.111). Elles sont données dans l'exemple 2.114.

Nous avons donc 5 classes de conjugaison, et il nous faut donc 5 représentations irréductibles non équivalentes (corolaire 18.27) dont nous allons chercher les caractères.

La première est la représentation triviale de dimension 1 ; nous notons χ_1 son caractère et nous avons la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1

(18.98)

Ensuite nous avons la signature qui est un morphisme non trivial $\epsilon\colon S_n \to \{-1,1\}$. Nous avons alors la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1

EqCNRaytl (18.99)

Une troisième représentation pas trop compliquée à trouver est celle

$$\begin{aligned} \rho_p\colon S_4 &\to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \\ \rho_p(\sigma)e_i &= e_{\sigma(i)}. \end{aligned} \tag{18.100}$$

Cela n'est pas une représentation irréductible parce que $\mathbb{C}^4$ se décompose en deux sous-espaces stables :

$$D = \mathrm{Span}(1,1,1,1) \tag{18.101a}$$

$$H = \{x \in \mathbb{C}^4 \text{ tel que } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}. \tag{18.101b}$$

La représentation induite sur D est la représentation triviale. Puis sur H, elle induit une autre représentation que nous allons noter ρ_s.

Nous allons à présent déduire le caractère de la représentation ρ_s et prouver qu'elle est irréductible. Il est cependant possible de sauter cette étape en échange d'un certain travail sur les isométries du tétraèdre. Voir la proposition 20.207 et ensuite

Nous avons la décomposition $\rho_p = \rho_1 \oplus \rho_s$ et donc

$$\chi_p = \chi_1 + \chi_s. \tag{18.102}$$

Nous savons déjà χ_1. Le caractère χ_p n'est pas très compliqué parce que $\chi_p(\sigma)$ est une matrice de permutations des vecteurs de base. Donc la matrice $\rho_p(\sigma)$ a un 1 sur la diagonale pour les i tels que $\sigma(i) = i$. Nous avons donc

$$\chi_p(\mathrm{Id}) = 4 \qquad \chi_p(12) = 2 \tag{18.103a}$$

$$\chi_p\big((12)(34)\big) = 0 \qquad \chi_p(123) = 1 \tag{18.103b}$$

$$\chi_p(1234) = 0. \tag{18.103c}$$

Le caractère χ_s peut être calculé par simple soustraction :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_s	3	3	1	0	-1	-1

EqILZsKfo (18.104)

Avant d'ajouter cette ligne au tableau des représentations irréductibles nous devons savoir si ρ_s en est une. Pour cela, tant que nous avons son caractère nous pouvons utiliser le critère du théorème 18.24 :

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma \in S_4} \chi_s(\sigma)^2. \tag{18.105}$$

Nous avons tout de suite $|S_4| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ et puis

$$24\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 24, \tag{18.106}$$

donc oui, le caractère est irréductible parce que $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$. Et nous pouvons donc ajouter la ligne (18.104) à notre tableau. Par ailleurs, nous notons qu'elle est de dimension 3.

Pour le reste nous savons qu'il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison, de telle sorte qu'il ne manque que deux représentations irréductibles. De plus la proposition 18.25 nous dit que si n_i est la dimension de la i^{e} représentation irréductible, alors

$$|S_4| = \sum_i n_i^2. \tag{18.107}$$

Dans notre situation, si nous nommons n_1 et n_2 les dimensions des deux représentations qui nous manquent, nous avons $24 = n_1^2 + n_2^2 + (1^2 + 1^2 + 3^2)$, c'est-à-dire $n_1^2 + n_2^2 = 13$. Il n'y a pas des tonnes de sommes de deux carrés qui font 13. Il y a $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$, et c'est tout.

Nous recherchons donc encore une représentation de dimension 2 et une de dimension 3. Pour cela nous allons un peu regarder les produits tensoriels qui s'offrent à nous. Pour faire une dimension 3, il faut faire le produit d'une de dimension 1 par une de dimension 3. Là encore le choix est très limité et nous demande d'essayer

$$\rho_W = \rho_s \otimes \rho_\epsilon \tag{18.108}$$

qui agit sur l'espace $V_2 \otimes V_\epsilon$ par

$$\rho_W(g)(v \otimes x) = \rho_s(g)v \otimes \rho_\epsilon(g)x. \tag{18.109}$$

Pour savoir son caractère nous utilisons la petite formule toute simple (18.94) : nous multiplions case par case les tableaux (18.104) et (18.99) :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_W	3	3	-1	0	1	-1

(18.110)

Avant de réellement ajouter cette ligne au tableau, nous devons nous assurer qu'elle est bien irréductible. Nous utilisons le même critère : $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$, donc c'est bon.

Pour trouver le dernier caractère, que nous nommerons χ_u, il ne faut pas beaucoup d'imagination. Il suffit d'utiliser les relations d'orthogonalité du théorème 18.26, en sachant que la dimension est 2 et qu'alors $\chi_u(\text{Id}) = 2$, c'est pas trop compliqué :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	b	c	d	e

EqOKtZYEQ (18.111)

Les relations d'orthogonalité des colonnes de la propriété 18.25 nous permettent de calculer les coefficients manquants. En pratique, il suffit de prendre le produit scalaire de chaque ligne avec la première et d'égaler avec zéro. Nous trouvons $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, et $e = 2$. Le tableau final est :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	0	-1	0	2

(18.112)

Notons que nous sommes parvenus à remplir la dernière ligne sans rien savoir de la représentation qui va avec. Nous allons cependant donner une interprétation géométrique et fixer cette représentation comme agissant sur le triangle équilatéral en 18.33.

18.5.2 À propos de la représentation ρ_s

Une des représentations trouvées (la représentation ρ_s) peut être vue comme le groupe $\mathrm{Iso}(T)$ des isométries affine du tétraèdre[12] grâce à la proposition 20.207 qui donne un isomorphisme de groupe $S_4 \simeq \mathrm{Iso}(T)$ lorsque T est un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$.

Nous verrons donc ça plus en détail dans la section 20.11.19.

18.5.3 À propos de la représentation ρ_u

Nous nous penchons à présent sur la représentations ρ_u dont nous ne savons rien à part qu'elle est de dimension 2 et son caractère.

Lemme 18.30.
Nous avons $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ pour tout $s \in V_4$.

Démonstration. Tous les éléments de V_4 sont conjugués (à part l'identité, mais pour elle le résultat est clair), donc il suffit de prouver le résultat pour un élément quelconque.

L'endomorphisme $\rho_u\big((12)(34)\big)$ est un endomorphisme d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ dont la trace est 2. Imposons donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18.113}$$

sous la contrainte $a + d = 2$. La résolution est assez rapide et donne $b = c = 0$, $a = d = 1$.

Vous voulez une démonstration plus technologique ? Oui ? Alors commencez par remarquer que l'opérateur $A = \rho_u\big((12)(34)\big)$ vérifie $A^2 = 1$, donc le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Il est peut-être minimal ou peut être pas, mais en tout cas le polynôme minimal divise celui-là et donc est soit $X - 1$ soit $X + 1$ soit $X^2 - 1$. Dans les trois cas il est scindé à racines simples, et l'endomorphisme A est diagonalisable par le théorème 10.220(3).

Mais comme $A^2 = 1$, les valeurs propres (ce qui est sur la diagonale) de A ne peuvent être que ± 1. La trace étant 2, les éléments diagonaux ne peuvent être que 1. Et $A = \mathrm{Id}$. □

Le groupe V_4 défini en 7.55 est normal dans S_4, donc le quotient S_4/V_4 est un groupe par le lemme 2.70.

Lemme 18.31.
L'application

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_u \colon S_4/V_4 &\to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \\ [g] &\mapsto \rho_u(g) \end{aligned} \tag{18.114}$$

est bien définie et donne une représentation irréductible de S_4/V_4.

Démonstration. Montrons que c'est bien défini. Si $s \in V_4$ nous devons prouver que $\rho_u(gs) = \rho_u(g)$. Vu que ρ_u est un homomorphisme (c'est une représentation), et que $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ nous avons directement

$$\rho_u(gs) = \rho_u(g)\rho_u(s) = \rho_u(g). \tag{18.115}$$

Nous devons prouver que la représentation $\tilde{\rho}_u$ est irréductible. Si un sous-espace non trivial $\mathrm{Span}(x)$ était stabilisé par $\tilde{\rho}_u$, il serait également stabilisé par ρ_u. Mais comme ρ_u est irréductible, elle ne stabilise personne. □

Lemme 18.32.
Le groupe S_4/V_4 est un groupe non-abélien, isomorphe à S_3.

Démonstration. Le groupe S_4/V_4 a une représentation irréductible de dimension 2, et n'est donc pas abélien par le corolaire 18.28.

Il contient $|S_4|/|V_4| = 24/4 = 6$ éléments (théorème de Lagrange 2.73). Or $6 = 3 \times 2$, donc le groupe S_4/V_4 est dans le cas non-abélien du théorème 7.25(2). Cette partie parle d'unicité du groupe non-abélien d'ordre 6. Or S_3 est un groupe non-abélien d'ordre 6, donc S_4/V_4 est isomorphe à S_3. □

Attention : il n'est pas correct de dire que S_4/V_4 est un sous-groupe de S_4 juste parce que c'est un quotient de S_4 ; ce n'est en général pas vrai (exemple 2.71).

[12] Définition 14.183.

NORMooQQCYooILyOxc

18.33.
Nous sommes maintenant aptes à identifier la représentation ρ_u. D'abord nous nous rappelons de la représentation $\rho_s : S_4 \to \mathrm{Iso}(T)$ de S_4 sur le tétraèdre. Ensuite si A est un sommet dudit tétraèdre et que $S_3 \subset S_4$ est la partie qui fixe A alors nous avons une représentation

$$\rho_s : S_3 \to \mathrm{Iso}(T) \tag{18.116}$$

qui agit en réalité sur le triangle équilatéral T' opposé au sommet A.

Nous avons finalement la chaine d'homomorphismes de groupes

$$S_4 \xrightarrow{\texttt{proj}} S_4/V_4 \xrightarrow{\simeq} S_3 \xrightarrow{\rho_s} \mathrm{Iso}(T') \tag{18.117}$$

Cela est donc une représentation $S_4 \to \mathrm{Iso}(T')$. Elle est de dimension 2 et est irréductible (elle contient les rotations d'angle $2\pi/3$ qui ne fixent aucune direction). Elle est donc la représentation ρ_u qui est la seule irréductible de dimension 2.

Nous avons donc montré que la représentation ρ_u dont nous ne savions rien est la représentation de S_3 sur un triangle équilatéral obtenue à partir de celle de S_4 sur le tétraèdre, en fixant un point.

Chapitre 19

Encore de l'analyse (et c'est pas fini)

19.1 Densité des polynômes

CorRSczQD

Corolaire 19.1.
Si $X \subset \mathbb{R}$ est compact et de mesure finie[1]*, alors l'ensemble des polynômes est dense dans $\big(C(X,\mathbb{R}), \|.\|_2\big)$.*

Démonstration. Si f est une fonction dans $C(X,\mathbb{R})$ et si $\epsilon \geqslant 0$ est donné alors nous pouvons considérer un polynôme P tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \epsilon$. Dans ce cas nous avons

$$\|f-P\|_2^2 = \int_X |f(x)-P(x)|^2 dx \leqslant \int_X \epsilon^2 dx = \epsilon^2 \mu(X) \tag{19.1}$$

où $\mu(X)$ est la mesure de X (finie par hypothèse). □

19.2 Primitive et intégrale

Nous avons déjà parlé de primitive de fonction continue en la proposition 14.465.

PropHFWNpRb

Proposition 19.2.
Soit I un intervalle borné ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$.

Démonstration. Si une primitive H de h est à support compact, alors

$$\int_I h = H(b) - H(a) = 0 - 0 = 0. \tag{19.2}$$

Pas de problèmes dans ce sens.

Supposons maintenant que $\int_I h = 0$. Le fait que h admette une primitive dans $C^\infty(I)$ est évident : toute fonction continue admet une primitive[2]. Soit H une telle primitive et $\tilde{H} = H - H(b)$. Alors $\tilde{H}(b) = 0$ et

$$\tilde{H}(a) = H(a) - H(b) = -\int_I h = 0. \tag{19.3}$$

Nous rappelons que le support d'une fonction est *la fermeture* de l'ensemble des points de non-annulation.

Supposons que le support de h soit inclus dans $[m,M] \subset]a,b[$. En prenant des nombres m' et M' tels que $a < m' < m$ et $M < M' < b$ (nous insistons sur le caractère strict de ces inégalités), la fonction h est nulle sur $[a,m']$ et sur $[M',b]$; la fonction $\tilde{H}$ doit donc y être constante. Mais nous avons déjà vu que $\tilde{H}(a) = \tilde{H}(b) = 0$. Donc l'ensemble des points sur lesquels $\tilde{H}$ n'est pas nul est inclus dans $]m',M'[$ et donc est strictement (des deux côtés) inclus dans I. □

19.2.1 Théorème taubérien de Hardy-Littlewood

Un théorème **taubérien** est un théorème qui compare les modes de convergence d'une série.

Lemme 19.3.
Si f et g sont des fonctions continues, alors $s(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ est également une fonction continue.

[1] Dans $\mathbb{R}$ cette hypothèse est évidemment superflue par rapport à l'hypothèse de compacité ; mais ça suggère des généralisations …

[2] Théorème 14.465.

Démonstration. Soit x_0 et prouvons que s est continue en x_0. Si $f(x_0) \neq g(x_0)$ (supposons $f(x_0) > g(x_0)$ pour fixer les idées), alors nous avons un voisinage de x_0 sur lequel $f > g$ et alors $s = f$ sur ce voisinage et la continuité provient de celle de f.

Si au contraire $f(x_0) = g(x_0) = s(x_0)$ alors si (a_n) est une suite tendant vers x_0, nous prenons N tel que $\big|f(a_n) - f(x_0)\big| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > N$ et M tel que $\big|g(a_n) - g(x_0)\big| \leqslant \epsilon$ pour tout $n > M$. Alors pour tout $n > \max\{N, M\}$ nous avons

$$\big|s(a_n) - s(x_0)\big| \leqslant \epsilon, \tag{19.4}$$

d'où la continuité de s en x_0. □

La proposition suivante dit que si une fonction connaît un saut, alors on peut la lisser par une fonction continue.

PropTIeYVw

Proposition 19.4.
Soit f continue sur $[a, x_0[$ et sur $[x_0, b]$ avec $f(x_0^-) < f(x_0)$. En particulier nous supposons que $f(x_0^-)$ existe et est finie. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue s telle que sur $[a, b]$ on ait $s \geqslant f$ et

$$\int_a^b (s - f)(x)\, dx \leqslant \epsilon. \tag{19.5}$$

Démonstration. Nous notons A la taille du saut :

$$A = f(x_0) - f(x_0^-). \tag{19.6}$$

Quitte à changer a et b, nous pouvons supposer que

$$f(x) < f(x_0) + \frac{A}{3} \tag{19.7}$$

pour $x \in [a, x_0[$ et

$$f > f(x_0) + \frac{2A}{3} \tag{19.8}$$

pour $x \in [x_0, b]$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de faire ce choix.

Soit $m(x)$ la droite qui joint le point $\big(x_0 - \epsilon, f(x_0 - \epsilon)\big)$ au point $\big(x_0, f(x_0^+)\big)$. Nous posons

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < x_0 - \epsilon \\ \max\{m(x), f(x)\} & \text{si } x_0 - \epsilon \leqslant x \leqslant x_0 \\ f(x) & \text{si } x > x_0. \end{cases} \tag{19.9}$$

En vertu des différents choix effectués, c'est une fonction continue. En effet

$$s(x_0 - \epsilon) = \max\{f(x_0 - \epsilon), f(x_0, \epsilon)\} = f(x_0 - \epsilon) \tag{19.10}$$

et

$$s(x_0) = \max\{m(x_0), f(x_0^+)\} = f(x_0^+) \tag{19.11}$$

parce que $m(x_0) = f(x_0^+)$. En ce qui concerne l'intégrale, si nous posons

$$M = \sup_{x,y \in [a,b]} |f(x) - f(y)|, \tag{19.12}$$

nous avons

$$\int_a^b s - f = \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0} s - f \leqslant \epsilon M. \tag{19.13}$$

□

LemauxrKN

Lemme 19.5.
Pour tout polynôme P, nous avons la formule

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(x) dx. \tag{19.14}$$

Démonstration. D'abord pour $P = 1$, la formule se réduit à la série géométrique connue (proposition 12.186). Ensuite nous prouvons la formule pour le polynôme $P = X^k$ et la linéarité fera le reste pour les autres polynômes. Nous avons

$$(1-x)\sum_n x^n x^{kn} = (1-x)\sum_n (x^{1+k})^n = \frac{1-x}{1-x^{1+k}} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k}. \tag{19.15}$$

Donc

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_n x^n P(x^n) = \frac{1}{1+k}. \tag{19.16}$$

Par ailleurs, c'est vite vu que

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}. \tag{19.17}$$

□

ThoPdDxgP

Théorème 19.6 (Hardy-Littlewood[576]).
Soit (a_n) une suite réelle telle que

(1) $\frac{a_n}{n}$ *tend vers une constante,*

(2) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a un rayon de convergence $\geqslant 1$,*

(3) $\lim_{x\to 1^-} F(x) = l$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.

Démonstration. Quitte à prendre la suite $b_0 = a_0 - l$ et $b_n = a_n$, on peut supposer $l = 0$.

Soit Γ l'ensemble des fonctions

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R} \tag{19.18}$$

telles que

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma(x^n)$ converge pour $0 \leqslant x < 1$,

(2) $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geqslant 0} a_n \gamma(x^n) = 0$.

Ce Γ est un espace vectoriel.

(1) **Les polynômes sont dans Γ** Soit $\gamma(t) = t^s$. Pour $0 \leqslant x < 1$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{ns} < \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{19.19}$$

Donc la condition de convergence est vérifiée. En ce qui concerne la limite,

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{ns} = \lim_{x\to 1^-} F(x^s) = 0 \tag{19.20}$$

parce que par hypothèse, $\lim_{x\to 1^-} F(x) = 0$.

(2) **Définition de la fonction qui va donner la réponse** Nous considérons la fonction

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{19.21}$$

c'est-à-dire $g = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. Nous montrons que si $g \in \Gamma$, alors le théorème est terminé. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant x^n < 1/2$ dès que

$$n > -\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \tag{19.22}$$

avec une note comme quoi $\ln(x) < 0$, donc la fraction est positive. Nous désignons par N_x la partie entière de ce n adapté à x. L'idée est que la fonction $g(x^n)$ est la fonction indicatrice de $0 \leqslant n \leqslant N_x$, et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n. \tag{19.23}$$

Mais si $x \to 1^-$, alors $N_x \to \infty$, donc

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N_x} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n), \tag{19.24}$$

et cela fait zéro si $g \in \Gamma$.

(3) **Approximation de g par des polynômes** Nous considérons la fonction

$$h(t) = \frac{g(t)-t}{t(1-t)} = \begin{cases} \frac{1}{t-1} & \text{si } t \in [0,1/2[\\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{19.25}$$

La seconde égalité est au sens du prolongement par continuité. La fonction h est une fonction non continue qui fait un saut de -2 à 2 en $x = 1/2$. En vertu de la proposition 19.4 (un peu adaptée), nous pouvons considérer deux fonctions continues s_1 et s_2 telles que

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \tag{19.26}$$

et

$$\int_0^1 s_2 - s_1 \leqslant \epsilon. \tag{19.27}$$

Notons que l'inégalité $s_1 \leqslant s_2$ doit être stricte sur au moins un petit intervalle autour de $x = 1/2$. Soient P_1 et P_2, deux polynômes tels que $\|P_1 - s_1\|_\infty \leqslant \epsilon$ et $\|P_2 - s_2\|_\infty \leqslant \epsilon$ (ici la norme supremum est prise sur $[0,1]$). C'est le théorème de Stone-Weierstrass (14.461) qui nous permet de le faire.

Nous posons aussi[3]

$$Q_1 = P_1 + \epsilon \tag{19.28a}$$
$$Q_2 = P_2 - \epsilon. \tag{19.28b}$$

Nous avons

$$\int_0^1 Q_1 - Q_2 \leqslant \int_0^1 Q_1 - P_1 + P_1 - P_2 + P_2 - Q_2. \tag{19.29}$$

Pour majorer cela, d'abord $Q_1 - P_1 = P_2 - Q_2 = \epsilon$, ensuite,

$$P_1 - P_2 = P_1 - s_1 + s_1 - s_2 + s_2 - P_2 \tag{19.30}$$

dans lequel nous avons $P_1 - s_1 \leqslant \epsilon$, $s_2 - P_2 \leqslant \epsilon$ et $\int_0^1 s_1 - s_2 \leqslant \epsilon$. Au final, nous posons $q = Q_2 - Q_1$ et nous avons

$$\int_0^1 q \leqslant 5\epsilon. \tag{19.31}$$

Enfin nous posons aussi

$$R_i(x) = x + x(1-x)Q_i. \tag{19.32}$$

Ces polynômes vérifient $R_i(0) = 0$, $R_i(1) = 1$ et

$$R_1 \leqslant g \leqslant R_2 \tag{19.33}$$

parce que

$$Q_1 \leqslant P_1 \leqslant h \leqslant P_2 \leqslant Q_2 \tag{19.34}$$

et

$$t + t(1-t)Q_1 \leqslant \underbrace{t + t(1-t)h(t)}_{g(t)} \leqslant t + t(1-t)Q_2. \tag{19.35}$$

(4) **Preuve que g est dans Γ** D'abord si $0 \leqslant x < 1$, $x^N < \frac{1}{2}$ pour un certain N, et alors $g(x^N) = 0$. Du coup la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N} a_n \tag{19.36}$$

est une somme finie qui converge donc.

[3] À ce niveau, je crois qu'il y a une faute de frappe dans [576].

D'autre part nous prenons M tel que $|a_n| < \frac{M}{n}$ pour tout n. Nous majorons $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n)$ en utilisant R_1. Mais vu que R_1 est un polynôme, nous pouvons dire que $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)| \leqslant \epsilon$ en prenant $x \in [\lambda, 1[$ et λ assez grand. Nous avons :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)\right| + \underbrace{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)\right|}_{\leqslant\epsilon} \tag{19.37a}$$

$$\leqslant \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(g - R_1)(x^n) \tag{19.37b}$$

$$\leqslant \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(R_2 - R_1)(x^n) \tag{19.37c}$$

$$\leqslant \epsilon + M\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}(Q_2 - Q_1)(x^n) \tag{19.37d}$$

SUBEQooAIQWooJADvKs

$$= \epsilon + M\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \tag{19.37e}$$

$$\leqslant \epsilon + M(1-x)\sum_{n} x^n q(x^n). \tag{19.37f}$$

subeqZXDvn

Justifications :

- La ligne (19.37d) vient du fait que $R_2 - R_1 = x(1-x)(Q_2 - Q_1)$.
- La ligne (19.37f) provient d'une majoration sauvage de $1/n$ par 1 et de $1 - x^n$ par $1 - x$.

Par le lemme 19.5, nous avons alors

$$\lim_{x\to 1^-} |\sum_n a_n g(x^n)| \leqslant \epsilon + M\int_0^1 q \leqslant 6\epsilon. \tag{19.38}$$

□

19.2.2 Théorème de Müntz

ThoAEYDdHp

Théorème 19.7 (Théorème de Müntz[577, 578, 579]).
Soit $C_0\big([0,1]\big)$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ ou $\|.\|_2$ et une suite (α_n) strictement croissante de nombres positifs. Nous notons ϕ_λ la fonction $x \mapsto x^\lambda$.

Alors

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_n}\}} \tag{19.39}$$

est dense dans $C_0\big([0,1]\big)$ si et seulement si

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty. \tag{19.40}$$

Nous prouvons le théorème pour la norme $\|.\|_2$.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{R}^+$; nous notons $\Delta_N(m)$ la distance entre ϕ_m et $\text{Span}\{\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\}$. Cette distance peut être évaluée avec le déterminant de Gram (proposition 10.19)

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N})}{G(\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N})}. \tag{19.41}$$

Pour calculer cela, nous avons besoin des produits scalaires[4]

$$\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}. \tag{19.42}$$

Pour avoir des notations plus compactes, nous notons $\alpha_0 = m$. Donc nous avons à calculer le déterminant

$$G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}) = \det\left(\frac{1}{\alpha_i + \alpha_j + 1}\right) \tag{19.43}$$

[4] C'est ici qu'on se particularise à la norme $\|.\|_2$.

où $i,j=0,\dots,N$. Nous reconnaissons un déterminant de Cauchy (proposition 10.20) en posant, dans $\frac{1}{\alpha_i+\alpha_j+1}$, $a_i=\alpha_i$ et $b_j=\alpha_j+1$. Étant donné que $b_j-b_i=a_j-a_i$, nous avons

$$G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant N}(\alpha_j-\alpha_i)^2}{\prod_{i=0}^{N}\prod_{j=0}^{N}(\alpha_i+\alpha_j+1).}\tag{19.44}$$

Nous séparons maintenant les termes où i ou j sont nuls. En ce qui concerne le dénominateur, il faut prendre tous les couples (i,j) avec i et j éventuellement égaux à zéro. Nous décomposons cela en trois paquets. Le premier est $(0,0)$; le second est $(0,i)$ (chaque couple arrive en fait deux fois parce qu'il y a aussi $(i,0)$) ; et le troisième sont les i,j tous deux différents de zéro :

$$(2m+1)\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)\prod_i(\alpha_i+m+1)^2.\tag{19.45}$$

Notons que dans le produit central, le carré est contenu dans le fait qu'on écrit $\prod_{ij}$ et non $\prod_{i<j}$. Nous avons donc

$$G(\phi_m,\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\prod_i(\alpha_i-m)^2}{(2m+1)\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)\prod_i(\alpha_i+m+1)^2}.\tag{19.46}$$

Le calcul de $G(\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})$ est plus simple[5] :

$$G(\phi_{\alpha_1},\dots,\phi_{\alpha_N})=\frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}{\prod_{ij}(\alpha_i+\alpha_j+1)}.\tag{19.47}$$

En divisant l'un par l'autre il ne reste que les facteurs comprenant m et en prenant la racine carrée,

$$\Delta_N(m)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=1}^{N}\left|\frac{\alpha_i-m}{\alpha_i+m+1}\right|.\tag{19.48}$$ EqANiuNR

Nous passons maintenant à la preuve proprement dite. Supposons que $V=\text{Span}\{\phi_{\alpha_i},i\in\mathbb{N}\}$ est dense. Si m est un des α_i, il peut évidemment être approché par les ϕ_{α_i}. Mais vue la densité de V, un ϕ_m avec $m\neq\alpha_i$ (pour tout i) alors ϕ_m peut également être arbitrairement approché par les ϕ_{α_i}, c'est-à-dire que

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N(m)=0.\tag{19.49}$$

Nous posons

$$u_n=\ln\left(\frac{\alpha_n-m}{\alpha_n+m+1}\right)\tag{19.50}$$

et nous prouvons que la série $\sum_n u_n$ diverge. En effet nous nous souvenons de la formule $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$, de telle sorte que la N^{e} somme partielle de $\sum_n u_n$ est

$$\ln\left(\frac{\alpha_1-m}{\alpha_1+m+1}\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha_N-m}{\alpha_N+m+1}\right)=\ln\left(\sqrt{2m+1}\Delta_N(m)\right),\tag{19.51}$$

qui tend vers $-\infty$ lorsque $N\to\infty$.

Si la suite (α_n) est majorée et plus généralement si nous n'avons pas $\alpha_n\to\infty$, alors évidemment la série $\sum_n\frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Nous supposons donc que $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$. Nous avons aussi[6]

$$u_n=\ln\left(\frac{\alpha_n-m}{\alpha_n+m+1}\right)=\ln\left(1-\frac{2m+1}{\alpha_n+m+1}\right)\sim-\frac{2m+1}{\alpha_n}.\tag{19.52}$$

Une justification est donnée à l'équation (17.376). Ce que nous avons surtout est

$$\sum_n u_n\sim-(2m+1)\sum_n\frac{1}{\alpha_n}.\tag{19.53}$$

Étant donné que la série de gauche diverge, celle de droite diverge[7].

Nous prouvons maintenant le sens opposé : nous supposons que la série $\sum_n 1/\alpha_n$ diverge et nous posons

$$V=\text{Span}\{\phi_{\alpha_n}\text{ tel que }n\in\mathbb{N}\}.\tag{19.54}$$

[5] Je crois qu'il y a une faute de frappe dans le dénominateur de [577].

[6] Je crois qu'il y a une faute de signe dans la dernière expression de [578].

[7] Nous utilisons le fait que si $u_n=\sum v_n$ en tant que suites et si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

Il suffit de prouver que $\phi_m \in \bar{V}$ pour tout m parce qu'un corolaire du théorème de Stone-Weierstrass 19.1 montre que Span$\{\phi_k$ tel que $k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans C pour la norme $\|.\|_2$.

Si $\alpha_n \to \infty$, nous avons :

$$u_n \sim \frac{2m+1}{\alpha_n} \to 0 \tag{19.55}$$

et alors $\Delta_N(m) \to 0$. Dans ce cas nous avons immédiatement $\phi_m \in \bar{V}$.

Si par contre α_n ne tend pas vers l'infini, nous repartons de l'expression (19.48), nous posons $0 < \alpha = \sup_i \alpha_i$ et nous calculons :

$$\sqrt{2m+1}\Delta_N(m) = \prod_{i=1}^{N} \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1} \tag{19.56a}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i + m}{\alpha_i + m + 1} = \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i + m + 1}\right) \tag{19.56b}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1}\right) = \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1}\right)^N. \tag{19.56c}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. □

REMooGPYYooCQJwFa

Remarque 19.8.
Certaines sources[8] citent le théorème de Müntz comme ceci (avec un implicite que $\alpha_i \neq 0$) :

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}} = C\big([0,1]\big) \Leftrightarrow \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty. \tag{19.57}$$

EQooPCSZooUDSzwQ

Que penser de la présence explicite du 1 (c'est-à-dire de ϕ_0) ou non dans l'ensemble ?

Première chose : la présence éventuelle de ϕ_0 est la raison pour laquelle nous faisons commencer la somme à $i = 2$ et non $i = 1$. Dans le même ordre d'idée, si Span$\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en prenant n'importe quelle queue de suite, ça reste dense.

Prouvons donc l'énoncé (19.57). Si Span$\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en posant $\beta_1 = 0$, $\beta_i = \alpha_{i-1}$ notre théorème prouve que $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} = +\infty$, cela est exactement que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$. Dans l'autre sens, si $\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$, alors nous avons aussi $\sum_{i \geqslant 2} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$ et notre théorème dit que Span$\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense. A fortiori, Span$\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense.

Exemple 19.9.
Nous savons depuis le théorème 17.134 que la somme des inverses des nombres premiers diverge. △

19.3 Intégrales convergeant uniformément

19.3.1 Définition et propriété

DEFooSHWAooWtswtp

Définition 19.10.
Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Nous disons que l'intégrale

$$\int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega) \tag{19.58}$$

converge uniformément *en x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ tel que pour tout compact K tel que $K_\epsilon \subset K$ nous avons*

$$\left| \int_{\Omega \setminus K} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| \leqslant \epsilon. \tag{19.59}$$

Le point important est que le choix de K_ϵ ne dépend pas de x.

LemOgQdpJ

Lemme 19.11.
Soit

$$F(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega), \tag{19.60}$$

[8] Dont le rapport du jury 2014

une intégrale uniformément convergente. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous considérons un compact K_k tel que

$$\left| \int_{\Omega \setminus K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega) \right| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{19.61}$$

Alors la suite de fonctions F_k définie par

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega) \tag{19.62}$$

converge uniformément vers F.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \left|F_k(x) - F(x)\right| &= \left| \int_{K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f(x,\omega) d\mu(\omega) \right| && (19.63a)\\ &= | \int_{\Omega \setminus K_k} f(x,\omega) d\mu(\omega)| && (19.63b)\\ &\leqslant \frac{1}{k}. && (19.63c) \end{aligned}$$

□

19.4 L'aire en dessous d'une courbe

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Nous voudrions pouvoir calculer l'aire au-dessous du graphe de la fonction f. Nous notons $S_f(x)$ l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x, c'est-à-dire l'aire bleue de la figure 19.1.

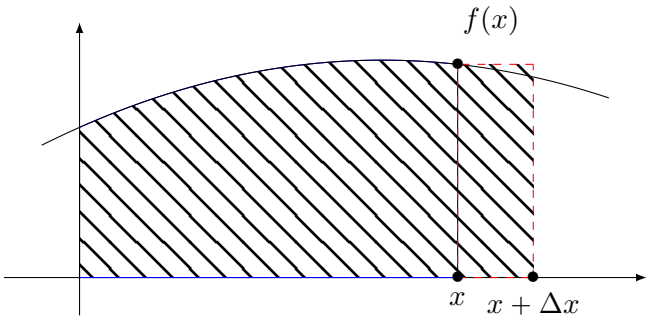


FIGURE 19.1 : L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime de combien la surface augmente lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$. LabelFigKKRooHseDzC

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x + \Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x + \Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x + \Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \tag{19.64}$$

ou encore

$$f(x) = \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \tag{19.65}$$

Nous formalisons la notion de « lorsque Δx est très petit » par une limite :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \tag{19.66}$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en dessous de f. Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

19.5 Propriétés des intégrales

LemIneqnormeintintnorm

Lemme 19.12.
Pour toute fonction $u\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\| \int_a^b u(t)dt\| \leqslant \int_a^b \|u(t)\|dt \tag{19.67}$$

pourvu que le membre de gauche ait un sens.

Démonstration. Étant donné que $\int_a^b u(t)dt$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, par la proposition 12.29, il existe un $\xi\in\mathbb{R}^n$ de norme 1 tel que

$$\| \int_a^b u(t)dt\| = \xi\cdot \int_a^b u(t)dt = \int_a^b u(t)\cdot\xi dt \leqslant \int_a^b \|u(t)\|\|\xi\| = \int_a^b \|u(t)\|dt. \tag{19.68}$$

□

Proposition 19.13 (Relations de Chasles)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Si $a,b,c\in I$ nous avons

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{19.69}$$

Sur la figure 19.2, la surface de a à c est évidemment égale à la somme des surfaces de a à b et de b à c.

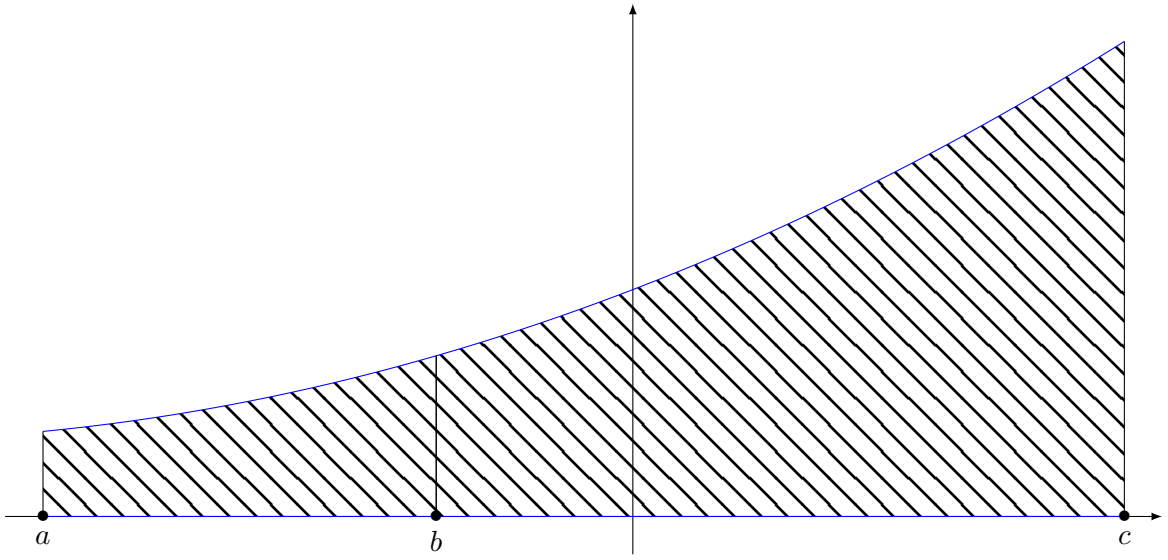


FIGURE 19.2 : Illustration pour les relations de Chasles.

LabelFigNWDooOObSHB

Corolaire 19.14.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{19.70}$$

linearite integrale

Proposition 19.15 (Linéarité de l'intégrale)**.**
Si f et g sont deux fonctions continues sur $I\subset\mathbb{R}$, a, $b\in I$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ nous avons

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{19.71}$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx. \tag{19.72}$$

PropCJIooHqECbq

Proposition 19.16 (L'intégrale est monotone)**.**
Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx. \tag{19.73}$$

PropHVWooBDRhCX

Corolaire 19.17 (Positivité)**.**
Si $a < b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0. \tag{19.74}$$

Ce résultat n'est qu'une application de la proposition 19.16 car il consiste à prendre comme fonction g la fonction nulle.

19.6 Techniques d'intégration

Par le théorème 16.290, la calcul d'une intégrale consiste essentiellement à trouver une primitive de la fonction à intégrer. Il est donc indispensable de bien connaitre les dérivées des fonctions usuelles.

Voici un tableau des primitives à connaitre.

PageLCHooMbWjOj

Fonction $f(x)$	Primitive $\int f(x)\,dx$	Ensemble de définition de f	Remarques
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	dépend de α	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\big(\lvert x\rvert\big) + C$	$x \neq 0$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$]-1, 1[$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	$]-1, 1[$	
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$	un intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi$	

Notez que au signe près, les fonctions arcsin et arccos ont la même dérivée.

Si la fonction à intégrer est une combinaison linéaire de fonctions usuelles alors sa primitive peut être calculée en utilisant la proposition 19.15. Dans les sections suivantes on abordera deux autres cas où la fonction à intégrer peut s'écrire en termes de fonctions dont on connaît une primitive.

19.6.1 Intégration par parties

PROPooRLFIooQHnyJY

Proposition 19.18 ([1])**.**
Si u et v sont deux fonctions dérivables de dérivées continues sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{19.75}$$

EQooKISBooQvGMQT

Si de plus les fonctions uv' et $u'v$ sont intégrables sur $[a, \infty]$, alors

$$\int_a^\infty u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^\infty - \int_a^\infty u'(x)v(x)dx. \tag{19.76}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser à l'envers la formule de dérivation d'un produit :

$$uv' = (uv)' - u'v. \tag{19.77}$$

Les fonctions à gauche et à droite étant égales, elles ont même intégrale sur $[a, b]$ et par linéarité, voir proposition 19.15, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x) - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \tag{19.78}$$

La fonction uv est évidemment une primitive de $(uv)'$, de telle sorte que l'on puisse un peu simplifier cette expression :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{19.79}$$

ce qu'il fallait démontrer.

En ce qui concerne l'affirmation avec $b = \infty$, le lemme 16.264 est applicable et il suffit de passer à la limite dans (19.75). □

ExWIEooVUgvSp

Exemple 19.19.
Un cas typique d'utilisation de l'intégrale par parties est le suivant. Soit à calculer

$$\int_0^\pi x\cos(x)dx. \tag{19.80}$$

Nous devons écrire $x\cos(x)$ comme un produit $u(x)v'(x)$. Il y a (au moins) deux moyens de le faire :

$$\begin{cases} u = x & \text{(19.81a)} \\ v' = \cos(x). & \text{(19.81b)} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \cos(x) & \text{(19.82a)} \\ v' = x. & \text{(19.82b)} \end{cases}$$

Nous allons choisir le premier[9]. Nous avons donc

$$\begin{aligned} u = x, \quad v' = \cos(x) \\ u' = 1 \qquad v = \sin(x). \end{aligned} \tag{19.83}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^\pi x\cos(x)dx = \Big[x\sin(x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\times\sin(x)dx = \pi\sin(\pi) - \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi = -2. \tag{19.84}$$

△

Le plus souvent, pour alléger les notations, il est plus pratique d'utiliser l'intégration par parties pour déterminer une primitive. Nous utilisons pour cela la formule (sans doute plus simple à retenir)

$$\int uv' = uv - \int u'v. \tag{19.85}$$

ExLTJooDZIYWP

Exemple 19.20.
Nous reprenons l'exemple 19.19 en déterminant cette fois une primitive de $x\cos(x)$:

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C, \qquad C\in\mathbb{R}. \tag{19.86}$$

EqTQNooVTYkZX

Nous retrouvons le résultat numérique de l'exemple précédent en ajoutant les extrêmes d'intégration

$$\int_0^\pi x\cos(x)dx = \Big[x\sin(x) + \cos(x)\Big]_0^\pi = -2. \tag{19.87}$$

△

Remarque 19.21.
Lorsqu'on calcule des intégrales, il est bon de passer par la primitive (c'est-à-dire en suivant l'exemple 19.20 et non 19.19) parce qu'il est alors facile de vérifier le résultat en calculant la dérivée de la primitive trouvée.

Par exemple pour vérifier si (19.86) est correct, il suffit de dériver $x\sin(x) + \cos(x)$:

$$\big(x\sin(x) + \cos(x)\big)' = \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x). \tag{19.88}$$

La fonction $x\sin(x) + \cos(x)$ est donc bien une primitive de $x\cos(x)$.

primln

Exemple 19.22 (Primitive du logarithme)**.**
La primitive de la fonction logarithme définie en 17.95 nous offre un bon moment d'intégration par partie.

Trouver la primitive de la fonction $x\mapsto\ln(x)$. Pour calculer

$$\int \ln(x)dx \tag{19.89}$$

[9] Mais nous conseillons vivement au lecteur d'essayer le deuxième pour se rendre compte qu'il ne fonctionne pas.

nous écrivons $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$ et nous posons $u' = 1$ et $v = \ln(x)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u' &= 1 \quad & v &= \ln(x) \\ u &= x & v' &= \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{19.90}$$

La formule d'intégration par parties (19.75) donne donc

$$\int \ln(x) = x\ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} = x\ln(x) - \int 1 = x\ln(x) - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{19.91}$$

Il est facile de vérifier par un petit calcul que

$$\big(x\ln(x) - x\big)' = \ln(x). \tag{19.92}$$

△

19.6.2 Changement de variables – pour trouver des primitives

De la même manière que l'utilisation « à l'envers » de la formule de dérivation du produit avait donné la méthode d'intégration par parties, nous allons voir que que l'utilisation « à l'envers » de la formule de dérivation d'une fonction composée donne lieu à la méthode d'intégration par changement de variables.

PROPooMVIUooZmvHxS

Proposition 19.23.
Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $u\colon I \to J$ une fonction qui est dérivable de dérivée continue et $f\colon J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F. Alors la fonction

$$x \mapsto F\big(u(x)\big) \tag{19.93}$$

est une primitive de

$$f\big(u(x)\big)u'(x). \tag{19.94}$$

changvar

Démonstration. Cela est une utilisation immédiate de la formule de dérivée des fonctions composées. □

Exemple 19.24.
Soit à calculer

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{19.95}$$

La fonction $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ est le produit de x et de $\sqrt{1-x^2}$. On remarque que la dérivée de $1-x^2$ est $-2x$: nous avons alors, à un facteur -2 près, une expression de la forme (19.94) où la racine carrée joue le rôle de f, $f(t) = \sqrt{t}$, et $1-x^2$ le rôle de u. Une primitive de la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ est $F(t) = 2t^{3/2}/3$.

Donc la fonction $\frac{2u(x)^{3/2}}{3} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}$ est primitive de $-2x\sqrt{1-x^2} = -2g(x)$. Autrement dit,

$$\int -2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3} + C, \tag{19.96}$$

et en divisant par -2 nous trouvons la primitive demandée :

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + C. \tag{19.97}$$

△

L'exemple suivant donne une façon plus économe de retenir la méthode du changement de variables.

exemeprimitivechangvar

Exemple 19.25.
Soit à calculer

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx. \tag{19.98}$$

Vu qu'il y a beaucoup de fonctions trigonométriques dans la fonction à intégrer, nous allons poser $u(x) = \sin(x)$, et remplacer élément par élément tout ce qui contient du « x » dans l'intégrale demandée par la quantité correspondante en termes de u.

La difficulté est de savoir ce que nous allons faire du « dx » dans l'intégrale. Ce dx marque une variation (infinitésimale) de x. La formule des accroissements finis dit que si x augmente de la valeur dx, alors $u(x)$ augmente de $u'(x)dx$, c'est-à-dire que

$$du = \cos(x)dx. \tag{19.99}$$

Nous avons donc les substitutions suivantes à faire :

$$\sin(x) = u \tag{19.100a}$$
$$du = \cos(x)dx \tag{19.100b}$$
$$dx = \frac{du}{\cos(x)}. \tag{19.100c}$$

La chose « magique » est que le $\cos(x)$ se trouvant dans la fonction se simplifie avec le cosinus qui arrive lorsqu'on remplace dx par $\frac{du}{\cos(x)}$. Les substitutions faites nous restons avec

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx = \int e^u du = e^u + C, \qquad \text{où } u = \sin(x). \tag{19.101}$$

Attention : la réponse doit être impérativement donnée en termes de x et non de u. Nous écrivons donc

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} + C. \tag{19.102}$$

△

19.6.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales

Le théorème 16.290 fixe la relation entre la recherche des primitives de f et la calcul de l'intégrale de f sur l'intervalle d'extrêmes a et b. On a vu dans la section précédente comment utiliser le changement de variable pour trouver une primitive de f. Il faut maintenant comprendre comment appliquer ce qu'on a vu dans le calcul d'une intégrale.

En effet nous avons le choix entre

- trouver une primitive de f comme dans la section précédente et appliquer ensuite la formule du corolaire 16.290 ;
- écrire une intégrale pour la nouvelle variable $u = u(x)$ sur l'intervalle entre $u(a)$ et $u(b)$.

Nous allons voir ces deux méthodes dans des exemples.

Exemple 19.26.
Soit à calculer

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{19.103}$$

Les primitives $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ ont été trouvé dans l'exemple 19.25. Une primitive est

$$F(x) = \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}. \tag{19.104}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale de $x\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[1/3, 1/2]$ par la définition

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \tag{19.105}$$

△

Remarque 19.27.
Pour que le calcul d'intégrale donne quelque chose de sensé il faut absolument que la primitive soit écrite en tant que fonction de x et non comme fonction de u. La méthode que nous allons voir dans l'exemple suivant réduit grandement la probabilité d'oublier ce détail, d'où le fait qu'elle soit de loin la plus utilisée.

Exemple 19.28.
Calculons à nouveau

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx. \tag{19.106}$$

Cette fois nous allons toucher à l'intervalle d'intégration en même temps que faire le changement de variables. Nous savons déjà les substitutions

$$\begin{cases} u = 1 - x^2 & \text{(19.107a)} \\ du = -2xdx & \text{(19.107b)} \\ dx = \dfrac{du}{-2x}. & \text{(19.107c)} \end{cases}$$

En ce qui concerne les extrêmes d'intégration, si $x = 1/3$ alors $u = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ et si $x = \frac{1}{2}$ alors $u = \frac{3}{4}$. Nous avons donc encore les substitutions suivantes :

$$\begin{cases} x = 1/3 \to u = 8/9 & (19.108a) \\ x = 1/2 \to u = 3/4 & (19.108b) \end{cases}$$

Le calcul est alors

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{8/9}^{3/4}\sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{8/9}^{3/4} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \tag{19.109}$$

Attention : la dernière égalité n'est pas immédiate ; elle demande quelques calculs et une bonne utilisation des règles de puissances. △

La deuxième méthode est plus utilisée et, avec un peu d'exercice, plus rapide à mettre en place que la première.

Jusqu'à présent nous avons utilisé des changements de variables dans lesquels nous exprimions u en termes de x. Comme le montre l'exemple suivant, il est parfois fructueux d'utiliser le changement de variable dans le sens inverse : avec x exprimé en termes d'un paramètre.

exemplepassagepolaires

Exemple 19.29.
À calculer :

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{1-x^2}dx. \tag{19.110}$$

Nous posons $x = \sin(\theta)$ parce que nous savons que $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$; nous espérons que le changement de variables simplifie l'expression[10]. Les substitutions à faire dans l'intégrale sont :

$$\begin{cases} x = \sin(\theta) & (19.111a) \\ dx = \cos(\theta)d\theta, & (19.111b) \end{cases}$$

et en ce qui concerne les bornes, si $x = 1/2$ alors $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{6}$. Si $x = \sqrt{3}/2$ alors $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta. \tag{19.112}$$

Nous avons $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ et vu que $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ nous avons toujours $\cos(\theta) > 0$, ce qui donne $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$. Nous devons donc calculer

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^2(\theta)d\theta. \tag{19.113}$$

Pour celle-là, il faut utiliser une formule de trigonométrie[11] :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}. \tag{19.114}$$

Donc

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^2(\theta)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta, \tag{19.115}$$

Pour calculer proprement la dernière intégrale nous effectuons un autre changement de variable (facile) en posant $t = 2\theta$, $dt = 2d\theta$, $t(\pi/6) = \pi/3$ et $t(\pi/3) = 2\pi/3$, nous avons alors

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^2(\theta)d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\cos(t)}{4}dt = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}, \tag{19.116}$$

parce que $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Au final,

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{12}. \tag{19.117}$$

△

[10] Lorsqu'on fait un changement de variables, il s'agit toujours d'*espérer* que l'expression se simplifie. Il n'y a pas moyen de savoir à priori si tel changement de variable va être utile. Il faut essayer.

[11] En fait, il y a moyen de terminer le calcul en intégrant deux fois par parties, mais c'est plus compliqué.

19.6.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites

Définition 19.30.
*Une **fraction rationnelle** est un quotient de deux polynômes à coefficients réels ou complexes.*

Par exemple

$$\frac{x^5+7x^4-\frac{x^3}{2}+x}{x^2-1} \tag{19.118}$$

est une fraction rationnelle.

Il sera expliqué dans le cours d'algèbre que toute fraction rationnelle peut être écrite sous forme d'une somme d'éléments simples, c'est-à-dire de fractions rationnelles d'un des deux types suivants :

$$\frac{\alpha}{(x-a)^m}, \qquad \alpha, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \tag{19.119a}$$

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^m}; \qquad \alpha,\beta,a,b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, a^2-4b<0. \tag{19.119b}$$

Nous allons nous contenter de donner un exemple de chaque type.

(1) En ce qui concerne le cas (19.119a) avec $m=1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{x-3}dx = \ln\big(|x-3|\big)+C. \tag{19.120}$$

Si vous voulez en être tout à fait sûr, effectuez d'abord le changement de variables $u=x-3$ qui donne $dx=du$.

(2) En ce qui concerne le cas (19.119a) avec $m\neq 1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{(x-1)^4}dx = -\frac{1}{3(x-1)^3}+C. \tag{19.121}$$

Encore une fois, pour s'en convaincre, utiliser le changement de variables $u=x-1$, $dx=du$:

$$\int \frac{1}{(x-1)^4}dx = \int \frac{1}{u^4}du = \int u^{-4}du = -\frac{u^{-3}}{3}+C = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^3}+C. \tag{19.122}$$

(3) En ce qui concerne le cas (19.119b) avec $\alpha\neq 0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C. \tag{19.123}$$

Pour ce faire, il faut faire le changement de variables $u=x^2+4$, $du=2xdx$, $dx=\frac{du}{2x}$ qui donne

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C = \frac{1}{2}\ln(|x^2+4|)+C. \tag{19.124}$$

Dans ce cas nous pouvons oublier d'écrire la valeur absolue dans le logarithme parce que de toutes façons, x^2+4 est toujours positif.

(4) En ce qui concerne le cas (19.119b) avec $\alpha=0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})+C. \tag{19.125}$$

où nous avons utilisé la primitive $\int \frac{dx}{x^2+1}dx = \arctan(x)$ du tableau de la page 1526. Pour vous en convaincre vous pouvez faire la dernière étape avec le changement de variables $u=x/2$, $dx=2du$.

19.6.5 Quelques formules à connaitre

À retenir 19.31

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx. \tag{19.126a}$$

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx. \tag{19.126b}$$

$$\int f'(u(x))u'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \qquad \text{avec } t = u(x). \tag{19.126c}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + C, \qquad \text{c'est un cas particulier de la formule précédente.} \tag{19.126d}$$

19.6.6 Critères de convergence uniforme

19.6.6.1 Critère de Weierstrass

Afin de tester l'uniforme convergence d'une intégrale, nous avons le **critère de Weierstrass** :

ThoCritWeiIntUnifCv

Théorème 19.32 (Critère de Weierstrass)**.**
Soit $f(x,t)\colon [\alpha,\beta]\times[a,\infty[\to\mathbb{R}$, une fonction dont la restriction à toute demi-droite $x=c$ est mesurable. Si $|f(x,t)|<\varphi(t)$ et $\int_a^\infty \varphi(t)dt$ existe, alors l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x,t)dt \tag{19.127}$$

est uniformément convergente.

19.6.6.2 Critère de Cauchy

Rappel : une intégrale impropre est la définition 16.300.

PROPooQDLZooYRABia

Proposition 19.33 (Critère de Cauchy de convergence uniforme pour les intégrales impropres[580])**.**
Soit une fonction $f\colon [a,b[\times S\to\mathbb{R}$. Nous supposons que pour tout $\epsilon>0$ il existe $r_0\in[a,b[$ tel que si $r_0<r_1,<r<b$,

$$\sup_{y\in S}\Big|\int_{r_1}^{r} f(x,y)dx\Big| < \epsilon. \tag{19.128}$$

Alors l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(x,y)dx = \lim_{r\to a^+}\int_r^b f(x,y)dx \tag{19.129}$$

converge uniformément sur S.

19.6.6.3 Critère d'Abel

LEMooZBARooCFlMyM

Lemme 19.34 (Transformation d'Abel[581, 1])**.**
Soient deux suites (u_n) et (v_n) dans $\mathbb{C}$. Soit $p\leqslant q$ dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$. En posant

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, \tag{19.130}$$

nous avons

$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = -u_p V_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1}(u_n - u_{n+1})V_n + u_q V_q. \tag{19.131}$$ EQooVCMBooOiwCVi

Démonstration. Nous fixons p et nous faisons une récurrence sur q en commençant par $q=p$. En posant $q=p$ dans (19.131), le membre de gauche se réduit à u_pv_p et celui de droite devient

$$-u_pV_{p-1} + 0 + u_pV_p = u_p(V_p - V_{p-1}) = u_pv_p. \tag{19.132}$$

Pour la récurrence, nous notons

$$f(q) = -u_pV_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1}(u_n - u_{n+1})V_n + u_qV_q \tag{19.133}$$

et

$$g(q) = \sum_{n=p}^{q} u_nv_n. \tag{19.134}$$

Nous avons déjà montré que $f(p) = g(p)$, et maintenant nous prouvons que $f(q+1) = g(q+1)$ sous l'hypothèse que $f(q) = g(q)$. Pour cela nous calculons $f(q+1) - g(q+1)$.

$$\diamondsuit = f(q+1) + g(q+1) = -u_pV_{p-1} + \sum_{n=p}^{q}(u_n - n_{n+1})V_n + u_{q+1}V_{q+1} - \sum_{n=p}^{q+1} u_nv_n \tag{19.135}$$

En ce qui concerne la dernière somme, en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\sum_{n=p}^{q+1} u_nv_q = g(q) + u_{q+1}v_{q+1} = f(q) + u_{q+1}v_{q+1}. \tag{19.136}$$

Donc

$$\diamondsuit = \underline{-u_pV_{p-1}} + \underline{\sum_{n=p}^{q-1}(u_n - u_{n+1})V_n + (u_q} - u_{q+1})V_q + u_{q+1}V_{q+1} - f(q) - u_{q+1}v_{q+1} \tag{19.137}$$

Notez que les termes soulignés forment $f(q)$. Nous avons donc

$$\diamondsuit = f(q) - u_{q+1}V_q + u_{q+1}V_{q+1} - f(q) - u_{q+1}v_{q+1} = u_{q+1}(-V_q + V_{q+1} - v_{q+1}) = 0. \tag{19.138}$$

□

PROPooZELPooQrHBuv

Proposition 19.35 ([581]).
Soit $\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit une suite (u_n) dans $\mathbb{K}$ et une suite (v_n) dans un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Si

(1) $u_n \to 0$,

ITEMooZAFCooSOaOXw

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} |u_{k+1} - u_k|$ *converge,*

(3) $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ *est bornée,*

alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_nv_n$ *converge.*

Démonstration. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Par le lemme 19.34, nous avons

$$\sum_{k=p}^{q} u_kv_k = -u_pV_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1}(u_k - u_{k-1})V_k + u_qV_q, \tag{19.139}$$

et en prenant la norme[12], et en notant $\alpha = \sup_{k\geqslant 1} |V_k|$ (qui est fini par hypothèse), nous avons

$$\| \sum_{k=p}^{q} u_kv_k\| \leqslant |u_p|\|V_{p-1}\| + \sum_{k=p}^{q-1} |u_k - u_{k+1}|\|V_k\| + |u_q|\|V_q\| \tag{19.140a}$$

$$\leqslant \alpha\Big(|u_p| + \sum_{k=p}^{q-1} |u_n - u_{n+1}| + |u_q|\Big). \tag{19.140b}$$

L'hypothèse (2) nous permet d'utiliser le critère de Cauchy 12.161 pour les séries et dire que si p est grand,

$$\| \sum_{k=p}^{q} u_kv_k\| \leqslant \alpha\Big(|u_p| + \sum_{k=p}^{q-1} |u_n - u_{n+1}| + |u_q|\Big) < \epsilon. \tag{19.141}$$

Cela signifie que la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_kv_k$ est de Cauchy dans l'espace complet E. Donc elle converge. □

[12] Et en utilisant 12.40.

19.6.6.4 Critère de Dirichlet

THOooTLUZooGeOvke

Théorème 19.36 (Critère de Dirichlet[580]).
Soient des applications continues $g,h\colon [a,b[\times S\to\mathbb{R}$. Nous supposons que

(1) $\partial_1 g$ est continue sur $[a,b[\times S$.

ITEMooZKXTooVocyVc

(2) Nous avons

$$\lim_{x\to b^-}\Big(\sup_{y\in S}|g(x,y)|\Big)=0. \tag{19.142}$$

ITEMooEPPPooPrbHYe

(3) Il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{y\in S}\Big|\int_a^x h(u,y)du\Big|<M \tag{19.143}$$

pour tout $a\leqslant x<b$.

ITEMooOQNNooPDdEQi

(4) L'intégrale impropre

$$\int_a^b|(\partial_1 g)(x,y)|dx \tag{19.144}$$

converge uniformément sur S.

Alors l'intégrale

$$\int_a^b g(x,y)h(x,y)dx \tag{19.145}$$

converge uniformément sur S.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **La fonction H** Nous posons

$$H(x,y)=\int_a^x h(u,y)du \tag{19.146}$$

de telle sorte que $\partial_1 H=h$ par la proposition 16.289.

(2) **Intégration par parties** Ensuite nous pouvons prendre r_1,r tels que $a\leqslant r<r_1<b$ et faire une intégration par partie[13] : [13]

SUBEQSooETSHooKfuRQv

$$\int_r^{r_1} g(x,y)h(x,y)dx=\int_r^{r_1} g(x,y)(\partial_1 H)(x,y)dx \tag{19.147a}$$

$$=g(r_1,y)H(r_1,y)-g(r,y)H(r,y)-\int_r^{r_1}(\partial_x g)(x,y)H(x,y)dx. \tag{19.147b}$$

Soit $\epsilon>0$.

(3) **Quelques majorations** Étant donnée l'hypothèse (4), il existe s_0 tel que si $a\leqslant s_0<r<r_1<b$ on ait

$$\int_r^{r_1}|(\partial_1 g)(x,y)|dx<\epsilon \tag{19.148}$$

pour tout $y\in S$.

D'autre part, l'hypothèse (2) nous dit que si s_0 est assez grand et si $r>s_0$,

$$\sup_{x\geqslant r}|g(x,y)|\leqslant\sup_{x\geqslant r}\big(\sup_{y\in S}|g(x,y)|\big)<\epsilon. \tag{19.149}$$

Et l'hypothèse (3) donne en plus $|H(x,y)|<M$.

(4) **Retour à l'intégrale par partie** Nous pouvons maintenant faire plein de majorations dans (19.147).

$$\Big|\int_r^{r_1} g(x,y)h(x,y)dx\Big|\leqslant|g(r_1,y)H(r_1,y)|+|g(r,y)H(r,y)|+\int_r^{r_1}|(\partial_x g)(x,y)H(x,y)|dx \tag{19.150a}$$

$$\leqslant 2M\sup_{x\geqslant r}|g(x,y)|+M\int_r^{r_1}|(\partial_x g)(x,y)| \tag{19.150b}$$

$$\leqslant 3M\epsilon. \tag{19.150c}$$

[13] Proposition 19.18.

(5) **Conclusion** Le critère de Cauchy 19.33 conclu que l'intégrale converge uniformément.

□

Remarque 19.37.
Étant donné que la fonction sinus est bornée, il est tentant de l'utiliser comme g dans le critère de Dirichlet (théorème 19.36). Hélas,

$$\int_0^T \sin(xt)dt = -\frac{1}{x}\big(\cos(xT) - \cos(x)\big), \tag{19.151}$$

qui n'est pas bornée en x. Poser $g(x,t) = \sin(xt)$ *ne fonctionne pas* pour assurer la convergence uniforme sur un intervalle qui contient des x arbitrairement proches de 0. Le critère d'Abel avec $\varphi(x,t) = \sin(xt)$ ne permet que de conclure à l'uniforme convergence *sur tout compact* ne contenant pas 0. C'est toutefois souvent suffisant pour étudier la continuité ou la dérivabilité en se servant coup du compact. Voir 19.41.

19.7 Fonctions définies par une intégrale

SecCHwnBDj

Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Nous nous demandons dans quel cas l'intégrale

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\omega \tag{19.152}$$

définit une fonction F continue, dérivable ou autre.

Dans la suite nous allons considérer des fonctions f à valeurs réelles. Quitte à passer aux composantes, nous pouvons considérer des fonctions à valeurs vectorielles. Par contre le fait que x soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$ n'est pas spécialement une chose facile à traiter.

19.7.1 Continuité sous l'intégrale

Nous allons présenter deux théorèmes donnant la continuité de F.

(1) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x, nous avons le théorème 19.38,

(2) si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 19.39.

ThoKnuSNd

Théorème 19.38.
Soit (Ω, μ) est un espace mesuré, soit $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $f\colon U \times \Omega \to \mathbb{R}$ où U est ouvert dans $\mathbb{R}^m$. Nous supposons que

(1) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^m$, la fonction $\omega \mapsto f(x,\omega)$ est dans $L^1(\Omega,\mu)$.

(2) Pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(x,\omega)$ est continue en x_0.

ItemNAuYNG

(3) Il existe une fonction $G \in L^1(\Omega)$ telle que

$$|f(x,\omega)| \leqslant G(\omega) \tag{19.153}$$

pour tout $x \in U$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F\colon U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega) \end{aligned} \tag{19.154}$$

est continue en x_0.

Démonstration. Soit (x_n) une suite convergente vers x_0. Nous considérons la suite de fonctions $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(\omega) = f(x_n,\omega). \tag{19.155}$$

sur qui nous pouvons utiliser le théorème de la convergence dominée (théorème 16.209) pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x_n,\omega)d\mu(\omega) \tag{19.156a}$$
$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f(x_n,\omega)d\mu(\omega) \tag{19.156b}$$
$$= \int_\Omega f(x_0,\omega)d\mu(\omega) \tag{19.156c}$$
$$= F(x_0). \tag{19.156d}$$

Nous avons utilisé la continuité de $f(.,\omega)$. □

Si nous avons un peu de compatibilité entre la topologie et la mesure, alors nous pouvons utiliser l'uniforme convergence d'une intégrale pour obtenir la continuité d'une fonction définie par une intégrale.

ThotexmgE

Théorème 19.39.
Soit (Ω,μ) un espace topologique mesuré tel que tout compact est de mesure finie. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ telle que

(1) Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f(x,.)$ est $L^1(\Omega,\mu)$.

(2) Pour chaque $\omega\in\Omega$, la fonction $f(.,\omega)$ est continue en x_0.

(3) L'intégrale

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{19.157}$$

est uniformément convergente[14].

Alors la fonction F est continue en x_0.

Démonstration. Nous reprenons les notations du lemme 19.11. Les fonctions

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x,\omega)d\mu(\omega) \tag{19.158}$$

existent parce que les fonctions $f(x,.)$ sont dans $L^1(\Omega)$. Montrons que les fonctions F_k sont continues. Soit une suite $x_k\to x_0$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} F_k(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{K_k} f(x_n,\omega)d\mu(\omega). \tag{19.159}$$

Nous pouvons inverser la limite et l'intégrale en utilisant le théorème de la convergence dominée. Pour cela, la fonction $f(x_n,\omega)$ étant continue sur le compact K_k, elle y est majorée par une constante. Le fait que les compacts soient de mesure finie (hypothèse) implique que les constantes soient intégrables sur K_k. Le théorème de la convergence dominée implique alors que

$$\lim_{n\to\infty} F_k(x_n) = \int_{K_k}\lim_{n\to\infty} f(x_n,\omega)d\mu(\omega) = \int_{K_k} f(x_0,\omega)d\mu(\omega) = F_k(x_0). \tag{19.160}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(.,\omega)$ était continue en x_0.

Le lemme 19.11 nous indique alors que la convergence $F_k\to F$ est uniforme. Les fonctions F_k étant continues, la fonction F est continue. □

Pour finir, citons ce résultat concernant les fonctions réelles.

ThoInDerrtCvUnifFContinue

Théorème 19.40.
Nous considérons $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)dt$. Si f est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,\alpha[$ et l'intégrale converge uniformément, alors $F(x)$ est continue.

[14] Définition 19.10.

19.7.2 Le coup du compact

NORMooZWECooHvRgBw

19.41.
Nous avons vu des fonctions définies par toute une série de processus de limite (suites, séries, intégrales). Une des questions centrales est de savoir si la fonction limite est continue, dérivable, intégrable, etc. étant donné que les fonctions sont continues.

Pour cela, nous inventons le concept de *convergence uniforme*. Si la limite (série, intégrale) est uniforme, alors la fonction limite sera continue. Il arrive qu'une limite ne soit pas uniforme sur un intervalle ouvert $]0,1]$, et que nous voulions quand même prouver la continuité sur cet intervalle. C'est à cela que sert la notion de convergence uniforme *sur tout compact*. En effet, la notion de continuité est une notion locale : savoir ce qu'il se passe dans un petit voisinage autour de x est suffisant pour savoir la continuité en x (idem pour sa dérivée).

Si nous avons uniforme convergence sur tout compact de $]0,1]$, mais pas uniforme convergence sur cet intervalle, la limite sera quand même continue sur $]0,1]$. En effet, si $x \in]0,1]$, il existe un ouvert autour de x contenu dans un compact contenu dans $]0,1]$. L'uniforme convergence sur ce compact suffit à prouver la continuité en x.

Déduire la continuité sur un ouvert à partir de l'uniforme convergence sur tout compact de l'ouvert est appelé faire le **coup du compact**.

19.7.3 Dérivabilité sous l'intégrale

Nous traitons à présent de la dérivabilité de la fonction F définie comme intégrale de f. Dans le théorème 19.42 nous traitons de fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour les fonctions définies sur $\mathbb{C}$, voir le théorème 28.75.

ThoMWpRKYp

Théorème 19.42 (Dérivation sous le signe intégral, formule de Leibniz, thème 62[539, 582])**.**
Soit (Ω,μ) un espace mesuré, un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et une fonction $f\colon \mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{C}$. Nous supposons qu'il existe A mesurable de mesure nulle dans Ω tels que

ITEMooAFVMooAeCEco

(1) Pour tout $x\in I$, la fonction $\omega\mapsto f(x,\omega)$ soit dans $L^1(\Omega)$.

ITEMooXIZXooGPYFyT

(2) L'application $x\mapsto f(x,\omega)$ est dérivable[15] pour tout $x\in I$ et pour tout $\omega\in\Omega\setminus A$.

ITEMooDTTIooWkldfB

(3) Il existe une fonction $G\colon\Omega\to\mathbb{R}^+$ intégrable sur Ω telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega)\right| \leqslant G(\omega) \tag{19.161}$$

EQooUHQYooHtwfML

pour tout $x\in I$ et pour tout $\omega\in\Omega\setminus A$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{C}\\ x&\mapsto\int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega)\end{aligned} \tag{19.162}$$

est dérivable sur I et pour tout $a\in I$ nous avons

$$F'(a)=\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\mu(\omega), \tag{19.163}$$

Démonstration. Soit une suite (x_n) dans I telle que $x_n\neq a$ et $x_n\to a$. Si la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(a)-F(x_n)}{a-x_n} \tag{19.164}$$

existe et ne dépend pas de la suite choisie, alors la fonction F est dérivable en a et sa dérivée vaut cette limite. Autrement dit, nous nous mettons en devoir d'étudier la limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{f(a,\omega)-f(x_n,\omega)}{a-x_n}d\omega. \tag{19.165}$$

EqLimIx

montrer qu'elle existe, ne dépend pas de la suite choisie et vaut $\int_\Omega\partial_x f(a,\omega)d\omega$. On y va.

[15] La dérivabilité pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a rien de mystérieux : c'est la dérivée composante par composante. Rien à voir avec la dérivée complexe.

(1) **La bonne suite de fonctions** D'abord nous posons

$$g_n(\omega) = \frac{f(x_n,\omega) - f(a,\omega)}{x_n - a}. \tag{19.166}$$

EqAFOUbQR

Nous montrons à présent que cette suite vérifie les hypothèses du théorème de la convergence dominée 16.209.

- Chacune des fonctions g_n est dans $L^1(\Omega)$ parce que, a étant fixé, l'élément x_n est dans $I \setminus \{a\}$; le dénominateur n'a donc aucun rôle. L'hypothèse (1) montre que $\omega \mapsto f(x_n,\omega)$ et $\omega \mapsto f(a,\omega)$ sont dans L^1. La somme est donc dans L^1 (proposition 16.195).
- Par l'hypothèse (2), pour chaque ω nous avons une fonction dérivable. Nous pouvons donc passer à la limite :
$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega). \tag{19.167}$$
- En ce qui concerne la majoration de g_n, nous utilisons le théorème des accroissements finis 14.217(2). Pour chaque ω, ce théorème peut être utilisé sur la fonction $x \mapsto f(x,\omega)$ qui est dérivable. Nous avons :
$$\Big|\frac{f(x_n,\omega) - f(a,\omega)}{x_n - a}\Big| \leqslant \sup_{x\in[a,x_n]} |\frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega)| \leqslant G(\omega). \tag{19.168}$$
Nous avons utilisé l'hypothèse (3).

Les hypothèses de la convergence dominée sont satisfaites.

(2) **Convergence dominée** Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 16.209) nous permet alors de calculer la limite (19.165) :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega)d\omega = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)d\omega = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\omega. \tag{19.169}$$

Notons que l'existence de la dernière intégrale fait partie du théorème de la convergence dominée.

Nous avons donc prouvé que la limite de gauche existait et ne dépendait pas de la suite choisie. Donc F est dérivable en a et la dérivée vaut cette limite :

$$F'(a) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a,\omega)d\mu(\omega). \tag{19.170}$$

□

En ce qui concerne les fonctions dans $\mathbb{R}^n$, il y a les propositions 19.47 et 19.48 qui parlent de différentiabilité sous l'intégrale.

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 19.43
Attention : l'énoncé et la démonstration de la proposition 19.44 sont de moi. Écrivez-moi pour

- *me dire si ça vous semble correct (ou pas),*
- *me donner un lien vers une source qui énonce et démontre ce résultat.*

PROPooJKXJooLxgEGd

Proposition 19.44 ([1]).
Soient un espace mesuré (Ω,μ) ainsi qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{C}$. Si $\omega \in \Omega$ est fixé, nous notons

$$\begin{aligned} f_\omega\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x,\omega) \end{aligned} \tag{19.171}$$

et si $x \in \mathbb{R}^n$ est fixé, nous notons

$$\begin{aligned} f_x\colon \Omega &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto f(x,\omega). \end{aligned} \tag{19.172}$$

Soient $\delta > 0$, A de mesure nulle dans Ω et une liste d'indices[16] α tels que

(1) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction f_x est dans $L^1(\Omega)$,

[16] Voir -1.2.

(2) *la dérivée partielle multiple* $\partial^\alpha f_\omega(x)$ *existe pour tout* $x \in B(a,\delta)$ *et pour tout* $\omega \in A^c$.

(3) *pour toute queue* β *de la liste d'indice* α, *il existe une fonction* $G_\beta \in L^1(\Omega)$ *telle que*

$$|(\partial^\beta f_\omega)(x)| \leqslant G_\beta(\omega) \tag{19.173}$$

pour tout $x \in B(a,\delta)$ *et* $\omega \in A^c$.

Enfin nous posons

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega). \tag{19.174}$$

Alors pour toute queue de suite β *de* α, *nous avons*

(1) $(\partial^\beta F)$ *existe en* a,

(2) *nous avons la formule*

$$(\partial^\beta F)(x) = \int_\Omega (\partial^\beta f_\omega)(a)d\mu(\omega). \tag{19.175}$$ EQooTDDWooAcLRwX

Démonstration. Nous allons opérer une récurrence sur α. Plus précisément, si $|\alpha| = p$, nous allons ajouter une dérivation à la fois, et dans l'ordre inverse de α. Donc nous commençons par ∂_{α_p}, puis par $(\partial_{p-1}, \partial_p)$, etc.

Nous commençons par prouver la formule (19.175) dans le cas de $\beta = (\alpha_p)$. Et pour alléger les notations nous notons $\alpha_p = i$. Nous posons

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}\times\Omega &\to \mathbb{C}\\ (t,\omega) &\mapsto f(a+te_i,\omega).\end{aligned} \tag{19.176}$$

Posons $H(t) = F(a+te_i)$, c'est-à-dire

$$H(t) = \int_\Omega f(a+te_i,\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega \varphi(t,\omega)d\mu(\omega). \tag{19.177}$$

En utilisant le théorème 19.42 sur la fonction φ nous trouvons

$$H'(0) = \int_\Omega \varphi'(0,\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,\omega)d\mu(\omega), \tag{19.178}$$

ce qui est la formule demandée dans le cas $\alpha = (i)$.

Pour la récurrence, nous supposons que la formule est démontrée pour $\beta = (\alpha_{p-k},\dots,\alpha_p)$, et nous montrons qu'elle fonctionne encore pour $\sigma = (i,\beta)$.

Il s'agit simplement de remarquer que la fonction

$$g(x,\omega) = (\partial^\beta f_\omega)(x) \tag{19.179}$$

vérifie encore les conditions du théorème 19.42[17]. □

19.7.4 Dérivation et intégrale

PROBooGVWHooOTNJFe

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 19.45
Si je regarde bien, le théorème 19.46 n'est utilisé nulle part. Je vais donc le supprimer un jour. Si vous l'aimez, vous devriez m'en envoyer une démonstration.

ThoDerSousIntegrale

Théorème 19.46.
Soient A *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* Ω *un espace mesuré. Soient une fonction* $f\colon A\times\Omega\to\mathbb{R}$ *et*

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\omega. \tag{19.180}$$

Nous supposons les points suivants.

(1) *La fonction* f *est mesurable.*

(2) *Pour chaque* $x \in A$, *la fonction* $\omega \mapsto f(x,\omega)$ *est intégrable sur* Ω.

(3) *Pour presque tout* $\omega \in \Omega$, *la fonction* $f(x,\omega)$ *est une fonction absolument continue*[18] *de* x.

[17] Je n'ai pas fait cette vérification. Écrivez-moi si vous l'avez faite.
[18] Définition 16.316 et proposition 16.319.

(4) La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement intégrable, c'est-à-dire que pour tout $[a,b] \subset A$,

$$\int_a^b \int_\Omega \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega) \right| d\omega\, dx < \infty. \tag{19.181}$$

Alors la fonction F est absolument continue et pour presque tout $x \in A$, la dérivée est donné par

$$\frac{d}{dx} \int_\Omega f(x,\omega) d\omega = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega) d\omega. \tag{19.182}$$

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

19.7.5 Différentiabilité sous l'intégrale

Le théorème suivant est restrictif sur l'ensemble d'intégration (qui doit être compact), mais accepte des fonctions de plusieurs variables, ce qui est un premier pas vers la différentiabilité.

PropDerrSSIntegraleDSD

Proposition 19.47 (Dérivation sous l'intégrale)**.**
Supposons $A \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Nous considérons une fonction $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$. Si pour un $i \in \{i,\dots,n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A \times B$ et est continue, alors la fonction

$$F(x) = \int_B f(x,t) dt \tag{19.183}$$

admet une dérivée partielle dans la direction x_i sur A. Cette dérivée partielle y est continue et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t) dt, \tag{19.184}$$

pour tout a dans l'ouvert A.

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes.

(1) **F est dérivable** Nous voulons prouver que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,t)$ existe. Pour cela nous posons

$$g_l(t) = \frac{f(a_1,\dots,a_i+\epsilon_l,\dots,a_n,t) - f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n,t)}{\epsilon_l} \tag{19.185}$$

où ϵ_l est une suite de nombres tendant vers zéro. La fonction f est dérivable dans la direction x_i si et seulement si $\lim_{l\to\infty} g_l(t)$ existe et ne dépend pas du choix de la suite. À ce moment, la valeur de la dérivée partielle sera cette limite. Dans notre cas, nous savons que f admet une dérivée partielle dans la direction x_i et donc nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t) = \lim_{l\to\infty} g_l(t). \tag{19.186}$$

De la même façon pour F nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{l\to\infty} \int_B g_l(t) dt. \tag{19.187}$$

Sous-entendu : si la limite de droite ne dépend pas de la suite choisie, alors $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existe et vaut cette limite.

Considérant la continuité de f, le seul point à vérifier pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue est l'existence d'une fonction intégrable de t majorant g_l. Pour cela le théorème de accroissements finis (théorème 14.217) appliqué à la fonction $\epsilon \mapsto f(a_n,\dots,a_i+\epsilon,\dots,a_n)$ nous dit que

$$f(a_1,\dots,a_i+\epsilon_l,\dots,a_n,t) - f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n,t) = \epsilon_l \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,\theta,\dots,a_n,t) \tag{19.188}$$

pour un certain $\theta \in B(a_i,\epsilon_l)$. Notons que ce θ dépend de t mais pas de l. Vu que $\partial_i f$ est continue par rapport à ses deux variables, si K est un voisinage compact autour de a, il existe $M > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) \right| < M \tag{19.189}$$

EqMXqviPC

pour tout $x \in K$ et tout $t \in B$. La valeur de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n, t)$ est donc bien majorée par rapport à θ et par rapport à t en même temps par une constante qui n'a pas de mal à être intégrée sur le compact B.

Le théorème de la convergence dominée (théorème 16.209) s'applique donc bien et nous avons

$$\lim_{l\to\infty} \int_B g_l(t)dt = \int_B \lim_{l\to\infty} g_l(t) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt. \tag{19.190}$$

Le membre de droite ne dépendant pas de la suite ϵ_l choisie, le membre de gauche est bien la dérivée de F par rapport à x_i et nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,t)dt. \tag{19.191}$$

Cela prouve la première partie de la proposition.

(2) **La dérivée est continue** Soit K un voisinage compact autour de a et U' un ouvert tel que $a \in U' \subset K$. Nous avons encore la majoration (19.189) sur U' et donc le théorème de continuité sous l'intégrale 19.38 nous indique que la fonction

$$\begin{aligned} U' &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt \end{aligned} \tag{19.192}$$

est continue en a.

□

Une conséquence de la proposition 19.47 est que si elle fonctionne pour tous les i, alors F est différentiable et même de classe C^1, et la différentielle de F s'obtient comme intégrale de la différentielle de f.

PropAOZkDsh

Proposition 19.48.
Supposons $A \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Si pour tout $i \in \{i, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A \times B$ et est continue, alors F est de classe C^1 et

$$(dF)_a = \int_B (df_t)_a dt \tag{19.193}$$

où $f_t(x) = f(x,t)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 19.47, toutes les dérivées partielles de F sont continues. Cela implique que F est de classe C^1 par le théorème 14.325 et que la différentielle s'écrive en termes des dérivées partielles avec la formule usuelle. Nous avons alors

$$(dF)_a(u) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(a)u_k \tag{19.194a}$$

$$= \int_B \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a,t)dt \tag{19.194b}$$

$$= \int_B \sum_k \frac{\partial f_t}{\partial x_k}(a)u_k dt \tag{19.194c}$$

$$= \int_B (df_t)_a(u)dt. \tag{19.194d}$$

Ce qui est la formule annoncée. □

Un autre théorème tourne autour du pot, et me semble inutile.

ThoOLAQyRL

Théorème 19.49.
Soit (Ω, μ) un espace mesuré, une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons la fonction

$$F(x) = \int_\Omega f(x,\omega)d\mu(\omega). \tag{19.195}$$

Pour chaque $k = 1, \dots, n$ nous supposons avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) = F'_{|_k}(a) = \int_\Omega \frac{\partial f_{|_k}}{\partial t}(a_k, \omega) d\mu(\omega) \tag{19.196}$$

où $F_{|_k}(t) = F(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ et $f_{|_k}$ est définie de façon similaire.
Nous supposons de plus que les fonctions $\partial_{x_k} F$ sont continues.
Alors F est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par

$$dF_a = \int_\Omega (df_\omega)_a d\omega \tag{19.197}$$

où f_ω est définie par $f_\omega(x) = f(x, \omega)$.

Démonstration. Étant donné que les dérivées partielles de F en a existent et sont continues, le théorème 14.325 dit que F est différentiable et que

$$dF_a(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) u_k. \tag{19.198}$$

La linéarité de l'intégrale et les hypothèses nous donnent alors

$$\begin{aligned} dF_a(u) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) u_k && (19.199a)\\ &= \int_\Omega \sum_k \frac{\partial f_{|_k}}{\partial t}(a_k; \omega) u_k d\mu(\omega) && (19.199b)\\ &= \int_\Omega \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a; \omega) u_k d\mu(\omega) && (19.199c)\\ &= \int_\Omega (df_\omega)_a(u) d\mu(\omega), && (19.199d) \end{aligned}$$

et donc $dF_a = \int_\Omega (df_\omega)_a d\mu(\omega)$. □

Notons qu'en passant aux composantes, ce théorème fonctionne tout aussi bien pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie plutôt que dans $\mathbb{R}$.

19.7.6 Dérivation dans les bornes

La proposition suivante sera utilisée entre autres pour montrer que sous l'hypothèse d'une densité continue, la loi exponentielle est sans mémoire, proposition 38.158.

PROPooIEUTooAfHqaC

Proposition 19.50 ([583]).
Soient des intervalles compacts[19] *I et J de $\mathbb{R}$. Soient des fonctions continues $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ et $a, b\colon I \to J$.*

(1) L'application

$$\begin{aligned} \phi\colon I \times J \times J &\to \mathbb{R} \\ (x, u, v) &\mapsto \int_u^v f(x, t) dt \end{aligned} \tag{19.200}$$

est bien définie et continue.

(2) L'application

$$\begin{aligned} F\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \end{aligned} \tag{19.201}$$

est continue.

[19] Les intervalles compacts sont de la forme $[a, b]$. Ce sont les seuls fermés et bornés de la liste de la proposition 11.1. Voir aussi Borel-Lebesgue 11.23.

Démonstration. Pour chaque $x \in I$ nous notons

$$\begin{aligned} f_x\colon J &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x,t). \end{aligned} \tag{19.202}$$

La fonction f_x est continue[20] En notons $u = a(x)$ et $v = b(x)$, l'intégrale $F(x) = \int_u^v f_x(t)dt$ est l'intégrale d'une application continue sur un compact. Pas de problèmes pour l'existence.

Nous passons à la continuité de ϕ. Soient $(x_0, u_0, v_0) \in I \times J \times J$ et $\epsilon > 0$. Nous devons évaluer

$$\phi(x,u,v) - \phi(x_0,u_0,v_0). \tag{19.203}$$

EQooUCSDooZMlIct

En utilisant l'additivité des domaines de l'intégrale (proposition 16.196), nous avons $\phi(x,a,b) = \phi(x,a,h) + \phi(x,h,b)$. Le truc est maintenant d'utiliser cette relation pour décomposer (19.203) de telle sorte à n'avoir que des bouts facilement majorables :

EQooXKAMooJQqhYZ

$$\phi(x,u,v) = \phi(x,u,u_0) + \phi(x,u_0,v) \tag{19.204a}$$
$$= \phi(x,u,u_0) + \phi(x,u_0,v_0) + \phi(x,v_0,v). \tag{19.204b}$$

Vu que f est continue sur le compact[21] $I \times J$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine 14.80) et bornée (théorème 11.56) :

(1) Il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f(x,t) - f(x_0,t)| < \epsilon$.

(2) il existe $M > 0$ tel que $|f(x,t)| < M$ pour tout $(x,t) \in I \times J$.

Avec ça, si $|x - x_0| < \eta$ on a :

$$\begin{aligned} |\phi(x,u,u_0)| &\leqslant M|u - u_0|, \\ |\phi(x,v_0,v)| &\leqslant M|v - v_0|, \end{aligned} \tag{19.205}$$

ainsi que

$$|\phi(x,u_0,v_0) - \phi(x_0,u_0,v_0)| \leqslant \int_{u_0}^{v_0} |f(x,y) - f(x_0,t)|dt \tag{19.206a}$$
$$\leqslant |v_0 - u_0|\epsilon. \tag{19.206b}$$

En prenant de plus $|u - u_0| < \epsilon$ et $|v - v_0| < \epsilon$ nous majorons (19.204) :

$$|\phi(x,u,v) - \phi(x_0,u_0,v_0)| \leqslant \big(2M + |u_0 - v_0|\big)\epsilon. \tag{19.207}$$

Donc ϕ est continue.

L'application $F(x) =^p \big(x, a(x), b(x)\big)$ est donc continue en tant que composée d'applications continues. □

THOooZPUYooQAlUTa

Théorème 19.51 ([583]).
Soient des intervalles compacts I, J dans $\mathbb{R}$. Soient des applications $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ et $a, b\colon I \to J$ telles que

(1) Les applications a et b sont de classe C^1.

(2) L'application f est continue.

(3) L'application $\partial_1 f$ est continue sur $I \times J$.

Nous posons :

$$\begin{aligned} F\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt. \end{aligned} \tag{19.208}$$

Alors

(1) F est bien définie,

(2) F est de classe C^1.

[20] Par le lemme 9.68.
[21] En tant que produit de compacts de $\mathbb{R}$ par le lemme 11.20.

(3) Nous avons la formule

$$F'(x) = b'(x)f\big(x,b(x)\big) - a'(x)f\big(x,a(x)\big) + \int_{a(x)}^{b(x)} (\partial_1 f)(x,t)dt. \tag{19.209}$$

Démonstration. Le fait que F existe et soit continue est la proposition 19.50. Nous reprenons la fonction

$$\begin{aligned}\phi\colon I\times J\times J &\to \mathbb{R}\\ (x,u,v) &\mapsto \int_u^v f(x,t)dt.\end{aligned} \tag{19.210}$$

Fixons $x_0\in I$ et $u_0\in J$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon J &\to \mathbb{R}\\ v &\mapsto \phi(x_0,u_0,v) = \int_{u_0}^v f(x_0,t)dt = \int_{u_0}^v f_{x_0}(t)dt.\end{aligned} \tag{19.211}$$

Nous avons $\varphi'(v) = f_{x_0}(v) = f(x_0,v)$ (primitive et intégrale, proposition 16.289). Nous écrivons cela sous la forme

$$(\partial_v\phi)(x,u,v) = f(x,v). \tag{19.212}$$

De même nous avons

$$(\partial_u\phi)(x,u,v) = -f(x,u). \tag{19.213}$$

Nous fixons u et v et nous posons

$$S(x) = \int_u^v f(x,t)dt, \tag{19.214}$$

et nous vérifions les hypothèses du théorème 19.42.

(1) Vu que f est continue, pour chaque f l'application $t\mapsto f(x,t)$ est $L^1\big([u,v]\big)$.

(2) La dérivabilité de $x\mapsto f(x,t)$ est dans l'hypothèse.

(3) Par hypothèse $\partial_1 f$ est continue, de ses deux variables ; elle est donc bornée par M sur le compact $I\times J$. Donc poser $G(t)=M$ fait l'affaire.

Nous avons donc

$$S'(x) = \int_u^v (\partial_x f)(x,t)dt. \tag{19.215}$$

Et nous notons ça sous la forme

$$(\partial_x\phi)(x,u,v) = \int_u^v (\partial_x f)(x,t)dt. \tag{19.216}$$

Et maintenant nous pouvons passer à la dérivée de F. Nous utilisons la proposition 14.303 pour écrire

$$\begin{aligned}F'(x) = &(\partial_x\phi)\big(x,a(x),b(x)\big)\\ &+ a'(x)(\partial_u\phi)\big(x,a(x),b(x)\big)\\ &+ b'(x)(\partial_v\phi)\big(x,a(x),b(x)\big),\end{aligned} \tag{19.217}$$

qui est continue en tant que composée de fonctions continues. □

L'exemple qui suit sera rendu rigoureux par les propositions 31.31 et 31.32.

ExfYXeQg

Exemple 19.52.
Si g est une fonction continue, la fonction suivante est une primitive de g :

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^\infty g(t)\mathbb{1}_{t<x}(t)dt. \tag{19.218}$$

Nous nous proposons de justifier *de façon un peu heuristique* le fait que ce soit bien une primitive de g en considérant la fonction

$$f(t,x) = g(t)\mathbb{1}_{t<x}(t). \tag{19.219}$$

Nous posons

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,t)dt, \tag{19.220}$$

et nous calculons F' en permutant la dérivée et l'intégrale[22]. D'abord,

$$f(t,x)=\begin{cases}g(t) & \text{si } t\in[0,x]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\tag{19.221}$$

La dérivée de f par rapport à x est donnée par la distribution

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_0,x_0)=g(t_0)\delta(t_0-x_0).\tag{19.222}$$

Donc

$$F'(x_0)=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt=\int_0^\infty g(t)\delta(t-x_0)=g(x_0),\tag{19.223}$$

comme attendu. △

19.8 Théorème d'Hadamard

LemWNBooGPlIwT

Lemme 19.53 (Hadamard[584]).
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^p avec $p\geqslant 1$. Pour tout $a\in\mathbb{R}^n$ il existe des fonctions $g_1,\dots,g_n$ de classe C^{p-1} telles que

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)g_i(x).\tag{19.224}$$

Démonstration. Puisque f est de classe C^1, le théorème fondamental de l'analyse 16.290 s'applique et

$$f(x)-f(a)=\int_0^1\frac{d}{dt}\Big[f\big(a+t(x-a)\big)\Big]dt=\int_0^1\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big)(x_i-a_i).\tag{19.225}$$

EqZLTooVKmGln

Plus de détails : la fonction $t\mapsto\frac{d}{dt}\Big[f\big(a+t(x-a)\big)\Big]$ possède comme primitive la fonction $F(t)=f\big(a+t(x-a)\big)$.

Nous posons

$$g_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big)dt\tag{19.226}$$

L'intégrale existe parce qu'il s'agit d'une fonction continue sur un compact et donc majorée par une constante. Pour voir que g_i est de classe C^{p-1} nous pouvons calculer $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ en permutant dérivée et intégrale par la proposition 19.47 :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big)\right)dt=\int_0^1 t\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big).\tag{19.227}$$

Nous pouvons ainsi permuter $p-1$ dérivées tout en gardant une fonction continue dans l'intégrale. Le théorème 19.38 nous donne alors une fonction continue. Ainsi toutes les fonctions

$$\frac{\partial^{p-1}g_i}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{p-1}}}\tag{19.228}$$

sont continues et g_i est de classe C^{p-1} par le théorème 14.367.

En repartant de (19.225) nous avons alors bien ce qui était annoncé :

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i-a_i).\tag{19.229}$$

□

CorQBXHooZVKeNG

Corolaire 19.54.
Soit $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ tel que $\phi^{(k)}(x_0)=0$ pour tout $k\leqslant n$. Alors il existe une fonction $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\phi(x)=(x-x_0)^{n+1}\psi(x)\tag{19.230}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$.

[22] Ceci n'est pas rigoureux : il faudrait avoir un théorème à propos de distributions qui permet de le faire.

Démonstration. En utilisant le lemme de Hadamard 19.53 avec $a = x_0$, $n = 1$ et $f(x_0) = 0$, nous avons une fonction g_1 à support compact telle que

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0)g_1(x). \tag{19.231}$$

EqTOJGooWZBBBJ

Alors $\phi'(x) = g_1(x) + (x - x_0)g_1'(x)$, ce qui donne immédiatement $g_1(x_0) = 0$ et donc une fonction g_2 telle que $g_1(x) = (x - x_0)g_2(x)$. En injectant dans (19.231) nous avons

$$\phi(x) = (x - x_0)^2 g_2(x). \tag{19.232}$$

Il suffit de continuer ainsi tant que les dérivées de ϕ s'annulent. □

19.9 Deux théorèmes de point fixe

Nous allons voir Picard. Les autres théorème de point fixe que sont Brouwer, Schauder et Markov-Kakutani sont plus bas[23] parce qu'ils utilisent de l'intégration. Voir le thème 66 pour les retrouver.

19.9.1 Points fixes attractifs et répulsifs

DEFooTMZUooMoBDGC

Définition 19.55 ([1])**.**
*Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi\colon I \to I$ une application C^1. Soit a un point fixe de φ. Nous disons que a est **attractif** si il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a.*

*Le point a est dit **répulsif** si il existe un voisinage[24] V de a tel que pour toute suite de la forme $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, si $u_n \in V$, alors $|x_{n+1} - a| \geqslant |u_n - a|$.*

19.56.
Beaucoup de sources prennent le lemme 19.57 comme définition de point fixe attractif et répulsif. Celle en termes de suites ne demande au moins pas la dérivabilité de f. Elle est donc un tout petit peu plus générale.

LEMooTIRAooQIHLyt

Lemme 19.57 ([585, 586])**.**
Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, et une application $\varphi\colon I \to I$ de classe C^1. Soit a un point fixe de φ.

(1) Si $|\varphi'(a)| < 1$ alors a est attractif et la convergence est au moins exponentielle.

(2) Si $|\varphi'(a)| > 1$ alors a est répulsif et la divergence est au moins exponentielle.

Démonstration. Si $|\varphi'(a)| < 1$ alors il existe k tel que $|\varphi'(a)| < k < 1$ et par continuité il existe un voisinage V de a dans lequel $|\varphi'(x)| < k$ pour tout $x \in V$. En utilisant le théorème des accroissements finis[25] nous avons

$$|x_n - a| = \big|\varphi(x_n) - a\big| \leqslant k|x_{n-1} - a| \tag{19.233}$$

et par récurrence

$$|x_n - a| \leqslant k^n |x_0 - a|. \tag{19.234}$$

Pour la seconde partie, nous supposons que $|f'(a)| > 1$. Il existe un voisinage V sur lequel $f' > 1$. La formule des accroissements finis donne une application $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \tag{19.235}$$

et $\alpha(h)/h \to 0$. Nous restreignons V pour que tout $x \in V$ nous ayons $|\alpha(x - a)/|x - a| + |f'(a)| < 1$. Bref. Supposons que $x_n \in V$ avec $x_n \neq a$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) && \text{(19.236a)}\\ &= f\big(a + (x_n - a)\big) && \text{(19.236b)}\\ &= f(a) + (x_n - a)f'(a) + \alpha(x_n - a). && \text{(19.236c)} \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\frac{|x_{n+1} - f(a)|}{|x_n - a|} \leqslant |f'(a)| + \frac{|\alpha(x_n - a)|}{|x_n - a|}. \tag{19.237}$$

[23] Dans la section 22.5.

[24] Cette partie de la définition est de moi. Je suis loin d'être sûr que c'est une bonne définition. Si vous avez une idée, écrivez-moi. Sinon, tenez-vous en à prendre le lemme 19.57 comme définition.

[25] Proposition 12.311.

Avec toutes les hypothèses que nous avons prises, nous avons

$$\frac{|x_{n+1}-f(a)|}{|x_n-a|}\leqslant 1, \tag{19.238}$$

et donc $|x_{n+1}-f(a)|<|x_n-a|$. □

Remarque 19.58.
Dans le cas $|\varphi'(a)|=1$, nous ne pouvons rien conclure. Si $\varphi(x)=\sin(x)$ nous avons $\sin(x)<x$ et le point $a=0$ est attractif. À contrario, si $\varphi(x)=\sinh(x)$ nous avons $|\sinh(x)|>|x|$ et le point $a=0$ est répulsif.

19.9.2 Picard

DEFooRSLCooAsWisu

Définition 19.59.
*Une application $f\colon (X,d_X)\to(Y,d_Y)$ entre deux espaces métriques est une **contraction** si elle est k-**lipschitzienne** pour un certain $0\leqslant k<1$, c'est-à-dire si pour tout $x,y\in X$ nous avons*

$$d_Y\big(f(x),f(y)\big)\leqslant kd_X(x,y). \tag{19.239}$$

ThoEPVkCL

Théorème 19.60 (Picard [587, 588][26].)**.**
Soit X un espace métrique complet et $f\colon X\to X$ une application contractante, de constante de Lipschitz k. Alors f admet un unique point fixe, nommé ξ. Ce dernier est donné par la limite de la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0\in X & \text{(19.240a)}\\ x_{n+1}=f(x_n). & \text{(19.240b)}\end{cases}$$

De plus nous pouvons majorer l'erreur par

$$\|x_n-x\|\leqslant\frac{k^n}{1-k}\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\frac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|. \tag{19.241}$$

EqKErdim

Soit $r>0$, $a\in X$ tels que la fonction f laisse la boule $K=\overline{B(a,r)}$ invariante (c'est-à-dire que f se restreint à $f\colon K\to K$). Nous considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0=v_0\in K & \text{(19.242a)}\\ u_{n+1}=f(v_n), v_{n+1}\in B(u_n,\epsilon). & \text{(19.242b)}\end{cases}$$

Alors le point fixe ξ de f est dans K et la suite (v_n) satisfait l'estimation

$$\|v_n-\xi\|\leqslant\frac{k^n}{1-k}\|u_1-u_0\|+\frac{\epsilon}{1-k}. \tag{19.243}$$

La première inégalité (19.241) donne une estimation de l'erreur calculable en cours de processus ; la seconde donne une estimation de l'erreur calculable avant de commencer.

Démonstration. Nous commençons par l'unicité du point fixe. Si a et b sont des points fixes, alors $f(a)=a$ et $f(b)=b$. Par conséquent

$$\|f(a)-f(b)\|=\|a-b\|, \tag{19.244}$$

ce qui contredit le fait que f soit une contraction.

En ce qui concerne l'existence, notons que si la suite des x_n converge dans X, alors la limite est un point fixe. En effet en prenant la limite des deux côtés de l'équation $x_{n+1}=f(x_n)$, nous obtenons $\xi=f(\xi)$, c'est-à-dire que ξ est un point fixe de f. Notons que nous avons utilisé ici la continuité de f, laquelle est une conséquence du fait qu'elle soit lipschitzienne. Nous allons donc porter nos efforts à prouver que la suite est de Cauchy (et donc convergente parce que X est complet). Nous commençons par prouver que $\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant k^n\|x_0-x_1\|$. En effet pour tout n nous avons

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|f(x_n)-f(x_{n-1})\|\leqslant k\|x_n-x_{n-1}\|. \tag{19.245}$$

[26] Il me semble qu'à la page 100 de [588], l'hypothèse H1 qui est prouvée ne prouve pas Hn dans le cas $n=1$. Merci de m'écrire si vous pouvez confirmer ou infirmer. La preuve donnée ici ne contient pas cette « erreur ».

La relation cherchée s'obtient alors par récurrence. Soient $q > p$. En utilisant une somme télescopique,

$$\|x_q - x_p\| \leqslant \sum_{l=p}^{q-1} \|x_{l+1} - x_l\| \tag{19.246a}$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=p}^{q-1} k^l \right) \|x_1 - x_0\| \tag{19.246b}$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=p}^{\infty} k^l \right) \|x_1 - x_0\|. \tag{19.246c}$$

Étant donné que $k < 1$, la parenthèse est la queue d'une série qui converge, et donc tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini.

En ce qui concerne les inégalités (19.241), nous refaisons une somme télescopique :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \tag{19.247a}$$

$$\leqslant k^p \|x_n - x_{n-1}\| + k^{p-1}\|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + k\|x_n - x_{n-1}\| = k(1 + \cdots + k^{p-1})\|x_n - x_{n-1}\| \tag{19.247b}$$

$$\leqslant \frac{k}{1-k}\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{19.247c}$$

En prenant la limite $p \to \infty$ nous trouvons

$$\|\xi - x_n\| \leqslant \frac{k}{1-k}\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \frac{k}{1-k}\|x_1 - x_0\|. \tag{19.248}$$ EqlUMVGW

Nous passons maintenant à la seconde partie du théorème en supposant que f se restreigne en une fonction $f : K \to K$. D'abord K est encore un espace métrique complet, donc la première partie du théorème s'y applique et f y a un unique point fixe.

Nous allons montrer la relation par récurrence. Tout d'abord pour $n = 1$ nous avons

$$\|v_1 - \xi\| \leqslant \|v_1 - u_1\| + \|u_1 - \xi\| \leqslant \epsilon + \frac{k}{1-k}\|u_1 - u_0\| \tag{19.249}$$

où nous avons utilisé l'estimation (19.248), qui reste valable en remplaçant x_1 par u_1[27]. Nous pouvons maintenant faire la récurrence :

$$\|v_{n+1} - \xi\| \leqslant \|v_{n+1} - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - \xi\| \tag{19.250a}$$

$$\leqslant \epsilon + k\|v_n - \xi\| \tag{19.250b}$$

$$\leqslant \epsilon + k\left(\frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| + \frac{\epsilon}{1-k} \right) = \frac{\epsilon}{1-k} + \frac{k^{n+1}}{1-k}\|u_1 - u_0\|. \tag{19.250c}$$

□

Remarque 19.61.
Ce théorème comporte deux parties d'intérêts différents. La première partie est un théorème de point fixe usuel, qui sera utilisé pour prouver l'existence de certaines équations différentielles.

La seconde partie est intéressante d'un point de vue numérique. En effet, ce qu'elle nous enseigne est que si à chaque pas de calcul de la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ nous commettons une erreur d'ordre de grandeur ϵ, alors le procédé (la suite (v_n)) ne converge plus spécialement vers le point fixe, mais tend vers le point fixe avec une erreur majorée par $\epsilon/(1-k)$.

Remarque 19.62.
Au final l'erreur minimale qu'on peut atteindre est de l'ordre de ϵ. Évidemment si on commet une faute de calcul de l'ordre de ϵ à chaque pas, on ne peut pas espérer mieux.

remIOHUJm

Remarque 19.63.
Si f elle-même n'est pas contractante, mais si f^p est contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}$ alors la conclusion du théorème de Picard reste valide et f a le même unique point fixe que f^p. En effet nommons x le point fixe de f : $f^p(x) = x$. Nous avons alors

$$f^p\big(f(x)\big) = f\big(f^p(x)\big) = f(x), \tag{19.251}$$

[27] Elle n'est cependant pas spécialement valable si on remplace x_n par u_n.

ce qui prouve que $f(x)$ est un point fixe de f^p. Par unicité nous avons alors $f(x) = x$, c'est-à-dire que x est également un point fixe de f.

ThoagJPZJ

Théorème 19.64 (Équation de Fredholm)**.**
Soit $K\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ et $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, deux fonctions continues. Alors si λ est suffisamment petit, l'équation

$$f(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x) \tag{19.252}$$

admet une unique solution qui sera de plus continue sur $[a,b]$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions continues $[a,b]\to[a,b]$ muni de la norme uniforme. Le lemme 14.399 implique que $\mathcal{F}$ est complet. Nous considérons l'application $\Phi\colon \mathcal{F}\to\mathcal{F}$ donnée par

$$\Phi(f)(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x). \tag{19.253}$$

Nous montrons que Φ^p est une application contractante pour un certain p. Pour tout $x\in[a,b]$ nous avons

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)-\Phi(g)\|_\infty &\leqslant \|\Phi(f)(x)-\Phi(g)(x)\| &\text{(19.254a)}\\ &= |\lambda|\Big\|\int_a^b K(x,y)\big(f(y)-g(y)\big)dy\Big\| &\text{(19.254b)}\\ &\leqslant |\lambda|\|K\|_\infty|b-a|\|f-g\|_\infty &\text{(19.254c)}\end{aligned}$$

Nous choisissons λ assez petit pour avoir $|\lambda|\|K\|_\infty|b-a|<1$. Dans ce cas, l'application Φ est une contraction. Elle possède donc un unique point fixe par le théorème de Picard 19.60. □

19.10 Théorèmes de point fixes et équations différentielles

19.10.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz réel

Nous démontrons ici deux théorèmes de Cauchy-Lipschitz. De nombreuses propriétés annexes seront démontrées dans le chapitre sur les équations différentielles, section 34.8.

Le théorème de Cauchy-Arzella 22.34 sera pour plus tard parce qu'il utilise Schauder 22.33.

ThokUUlgU

Théorème 19.65 (Cauchy-Lipschitz[589, 590])**.**
XtiXON
Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t,y(t)\big) & \text{(19.255a)}\\ y(t_0) = y_0 & \text{(19.255b)}\end{cases}$$

avec $f\colon U = I\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ où I est ouvert dans $\mathbb{R}$ et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que f est continue sur U et localement lipschitzienne[28] *par rapport à y.*

Alors il existe un intervalle $J\subset I$ sur lequel la solution au problème est unique. De plus toute solution du problème est une restriction de cette solution à une partie de J. La solution sur J (dite « solution maximale ») est de classe C^1.

Démonstration. Nous divisions la preuve en plusieurs étapes (même pas toutes simples).

(1) **Cylindre de sécurité**

Précisons l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ adéquat. Soient V et W les voisinages de t_0 et y_0 sur lesquels f est localement lipschitzienne. Nous considérons les quantités suivantes :

(1a) $M = \sup_{V\times W} f$;
(1b) $r>0$ tel que $\overline{B(y_0,r)}\subset V$
(1c) $T>0$ tel que $\overline{B(t_0,T)}\subset W$ et $T<r/M$.

Nous considérons alors l'ensemble

$$\mathcal{F} = C^0\big(\overline{B(t_0,T)},\overline{B(y_0,r)}\big) \tag{19.256}$$

que nous munissons de la norme uniforme. Par le lemme 14.399 l'espace $\big(\mathcal{F},\|.\|_\infty\big)$ est complet.

[28] Définition 14.356. Notons que nous ne supposons pas que f soit une contraction.

(2) **Une application $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$**

Si y est une solution de l'équation différentielle considérée, elle vérifie[29]

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, y(u)\big)du. \tag{19.257}$$

Ceci nous incite à considérer l'opérateur $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ défini par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, y(u)\big)du. \tag{19.258}$$

Pour que l'application Φ soit utile nous devons montrer que pour tout $y \in \mathcal{F}$,

- l'application $\Phi(y)$ est bien définie,
- pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons $\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$,
- l'application $\Phi(y)\colon \overline{B(t_0, T)} \to \overline{B(y_0, r)}$ est continue.

Attention : nous ne prétendons pas que Φ elle-même soit continue. C'est parti.

(2a) **$\Phi(y)$ est bien définie**

Il faut montrer que l'intégrale converge. Le calcul de $\Phi(y)(t)$ ne se fait qu'avec $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Vu que u prend ses valeurs dans $[t_0, t]$ et que $y \in \mathcal{F}$, le nombre $y(u)$ est toujours dans $\overline{B(y_0, r)}$. Ceci pour dire que dans l'intégrale, la fonction f n'est considérée que sur $[t_0, t] \times \overline{B(y_0, r)} \subset V \times W$. La fonction f est donc uniformément majorable, et l'intégrale ne pose pas de problèmes.

(2b) **$\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$**

Prouvons que $\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$. Pour cela, notons que

$$|\Phi(y)(t) - y_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f\big(u, y(u)\big)|du \leqslant |t - t_0|\|f\|_\infty. \tag{19.259}$$

Étant donné que $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons $|t - t_0| \leqslant r/M$ et donc $|\Phi(y)(t) - y_0| \leqslant r$.

(2c) **$\Phi(y)$ est continue**

Nous pourrions invoquer le théorème 19.38, mais nous allons le faire à la main. Soit $s_0 \in B(t_0, T)$ et prouvons que $\Phi(y)$ est continue en s_0. Pour cela nous prenons $s \in B(s_0, \delta)$ et nous calculons :

$$|\Phi(y)(s) - \Phi(y)(s_0)| \leqslant \int_{s_0}^{s} |f\big(u, y(u)\big)|du \leqslant |s_0 - s|\|f\|_\infty. \tag{19.260}$$

C'est le fait que f soit bornée dans le cylindre de sécurité qui fait en sorte que cela tende vers zéro lorsque $s \to s_0$.

L'équation (19.257) signifie que y est un point fixe de Φ. L'espace $\mathcal{F}$ étant complet, le théorème de point fixe de Picard (théorème 19.60) s'applique. Nous allons montrer qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que Φ^p soit contractante. Par conséquent Φ^p aura un unique point fixe qui sera également unique point fixe de Φ par la remarque 19.63.

(3) **Contractante**

Prouvons donc que Φ^p est contractante pour un certain p. Pour cela nous commençons par montrer la formule suivante par récurrence :

$$\big\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\big\| \leqslant \frac{k^p|t - t_0|^p}{p!}\|x - y\|_\infty \tag{19.261}$$

pour tout $x, y \in \mathcal{F}$, et pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Pour $p = 0$ la formule (19.261) est vérifiée parce que $\|x - y\|_\infty$ est le supremum de $\|x(t) - y(t)\|$ pour $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Supposons que la formule soit vraie

[29] C'est le théorème fondamental du calcul intégral 16.290.

pour p et calculons pour $p+1$. Pour tout $t \in \overline{B(t_0,T)}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{p+1}(x)(t)-\Phi^{p+1}(y)(t)\| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \|f\big(u,\Phi^p(x)(u)\big)-f\big(u,\Phi^p(y)(u)\big)\|du\right| && \text{(19.262a)}\\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} k\|\Phi^p(x)(u)-\Phi^p(y)(u)\|du\right| && \text{(19.262b)}\\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} k\frac{k^p|t-t_0|}{p!}\|x-y\|_\infty\right| && \text{(19.262c)}\\
&= \frac{k^{p+1}|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}\|x-y\|_\infty. && \text{(19.262d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- (19.262b) parce que f est lipschitzienne.
- (19.262c) par hypothèse de récurrence.

La formule (19.261) est maintenant établie. Nous pouvons maintenant montrer que Φ^p est une contraction pour un certain p. Pour tout $t \in \overline{B(t_0,T)}$ nous avons

$$\|\Phi^p(x)(t)-\Phi^p(y)(t)\| \leqslant \frac{k^p}{p!}|t-t_0|^p\|x-y\|_\infty \leqslant \frac{k^pT^p}{p!}\|x-y\|_\infty \tag{19.263}$$

où nous avons utilisé le fait que $|t-t_0|^p < T^p$. En prenant le supremum sur t des deux côtés il vient

$$\|\Phi^p(x)-\Phi^p(y)\|_\infty \leqslant \frac{k^pT^p}{p!}\|x-y\|_\infty. \tag{19.264}$$

Le membre de droite tend vers zéro lorsque $p\to\infty$ parce que $k^pT^p/p! \to 0$[30]. Nous concluons donc que Φ^p est une contraction pour un certain p.

(4) **Conclusion**

L'unique point fixe de Φ est alors l'unique solution continue de l'équation différentielle (19.255). Par ailleurs l'équation elle-même $y'=f(t,y)$ demande implicitement que y soit dérivable et donc continue. Nous concluons que l'unique point fixe de Φ est l'unique solution de l'équation différentielle donnée. Cette dernière est automatiquement C^1 parce que si y est continue alors $u\mapsto f(u,y(u))$ est continue, c'est-à-dire que y' est continue.

(5) **Unicité**

Nous passons maintenant à la partie « prolongement maximum » du théorème. Soient x_1 et x_2 deux solutions maximales du problème (19.255) sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement. Les intervalles I_1 et I_2 contiennent $\overline{B(t_0,T)}$ sur lequel $x_1=x_2$ par unicité.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $t\geqslant t_0$ pour lequel x_1 ou x_2 est défini, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont définis et sont égaux. Le raisonnement sur $t\leqslant t_0$ est similaire.

Supposons que l'ensemble des $t\geqslant t_0$ tels que $x_1=x_2$ soit ouvert à droite, c'est-à-dire soit de la forme $[t_0,b[$. Dans ce cas, soit x_1, soit x_2 (soit les deux) cesse d'exister en b. En effet si nous avions les fonctions x_i sur $[t_0,b+\epsilon[$ alors l'équation $x_1=x_2$ définirait un fermé dans $[t_0,b+\epsilon[$. Supposons pour fixer les idées que x_1 cesse d'exister : le domaine de x_1 (parmi les $t\geqslant 0$) est $[t_0,b[$ et sur ce domaine nous avons $x_1=x_2$. Dans ce cas x_1 pourrait être prolongé en x_2 au-delà de b. Si x_1 et x_2 s'arrêtent d'exister en même temps en b, alors nous avons bien $x_1=x_2$.

Nous devons donc traiter le cas où $x_1=x_2$ sur $[t_0,b]$ alors que x_1 et x_2 existent sur $[t_0,b+\epsilon[$ pour un certain ϵ.

Nous pouvons appliquer le théorème d'existence locale au problème

$$\begin{cases} y'=f(t,y) & \text{(19.265a)}\\ y(b)=x_1(b). & \text{(19.265b)}\end{cases}$$

Il existe un voisinage de b sur lequel la solution est unique. Sur ce voisinage nous devons donc avoir $x_1=x_2$, ce qui contredit le fait que $x_1\neq x_2$ en dehors de $[t_0,b]$.

Donc x_1 et x_2 existent et sont égaux sur, au moins $I_1\cup I_2$.

[30] Parce que les factorielles vont plus vite que les puissances.

□

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne existence et unicité d'une solution maximale. Cependant cette solution peut ne pas exister partout où les hypothèses sur f sont remplies. En d'autres termes, il peut arriver que f soit Lipschitz jusqu'à t_1, mais que la solution maximale ne soit définie que jusqu'en $t_2 < t_1$. Ce cas fait l'objet du théorème d'explosion en temps fini 34.23.

Sous quelques hypothèses, nous pouvons nous assurer de l'existence d'une solution unique sur tout $\mathbb{R}$.

THOooZIVRooPSWMxg

Théorème 19.66 (Cauchy-Lipschitz global[591, 112])**.**
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ et une fonction continue $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout compact K dans I, il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\| \tag{19.266}$$

pour tout $t \in K$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

Alors le problème EQSooBNREooUTfbMH

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) & \text{(19.267a)} \\ y(t_0) = y_0 & \text{(19.267b)} \end{cases}$$

possède une unique solution $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ sur I.

Démonstration. Soit un intervalle compact K dans I et contenant t_0. Nous notons ℓ le diamètre de K. Sur l'espace $E = C^0(K, \mathbb{R}^n)$ nous considérons la topologie uniforme : $(E, \|.\|_\infty)$. C'est un espace complet par le lemme 14.399 (nous utilisons le fait que $\mathbb{R}^n$ soit complet, proposition 4.22). Nous allons utiliser l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi\colon E &\to E \\ \Phi(y)(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds \end{aligned} \tag{19.268}$$ EQooJUTBooILBKoE

Démontrons quelques faits à propos de Φ.

(1) **Φ est bien définie** Nous devons commencer par prouver que cette application est bien définie. Si $y \in E$ alors f et y sont continues ; l'application $s \mapsto f\big(s, y(s)\big)$ est donc également continue. L'intégrale de cette fonction sur le compact $[t_0, t]$ ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la continuité de $\Phi(y)$ sous l'hypothèse que y soit continue,

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(y)(t')\| \leqslant \int_{t}^{t'} \|f(s, y(s))\|ds \leqslant M|t - t'| \tag{19.269}$$

où M est une majoration de $\|s \mapsto f\big(s, y(s)\big)\|_{\infty,K}$.

(2) **Si y est solution alors $\Phi(y) = y$**

Supposons que y soit une solution de l'équation différentielle (19.267). Alors, vu que $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ nous avons :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds = \Phi(y)(t). \tag{19.270}$$

(3) **Si $\Phi(y) = y$ alors y est solution**

Nous avons, pour tout t :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds. \tag{19.271}$$

Le membre de droite est dérivable par rapport à t, et la dérivée est $f\big(t, y(t)\big)$. Donc le membre de gauche est également dérivable et nous avons bien

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big). \tag{19.272}$$

De plus $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} \ldots = y_0$.

Nous sommes encore avec K compact et $E = C^0(K, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme uniforme. Nous allons montrer que Φ est une contraction de E pour une norme bien choisie.

(1) **Une norme sur E** Pour $y \in E$ nous posons

$$\|y\|_k = \max_{t\in K} \big(e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|\big). \tag{19.273}$$

Ce maximum est bien défini et fini, parce que dedans, la fonction de t est une fonction continue sur le compact K. C'est également une norme parce que si $\|y\|_k = 0$ alors $e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\| = 0$ pour tout t. Étant donné que l'exponentielle ne s'annule pas, $\|y(t)\| = 0$ pour tout t.

(2) **Équivalence de norme** Nous montrons que les normes $\|.\|_k$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes[31] :

$$\|y\|_\infty e^{-k\ell} \leqslant \|y\|_k \leqslant \|y\|_\infty \tag{19.274}$$

EQooSQYWooBTXvDL

pour tout $y \in E$. Pour la première inégalité, $\ell \geqslant |t-t_0|$ pour tout $t \in K$, et $k > 0$, donc

$$\|y(t)\|e^{-k\ell} \leqslant e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|. \tag{19.275}$$

En prenant le maximum des deux côtés, $\|y\|_\infty e^{-k\ell} \leqslant \|y\|_k$.

En ce qui concerne la seconde inégalité dans (19.274), $k|t-t_0| \geqslant 0$ et donc $e^{-k|t-t_0|} < 1$.

Puisque les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_k$ sont équivalentes, l'espace $(E, \|.\|_k)$ est tout autant complet que $(E, \|.\|_\infty)$. Nous démontrons à présent que Φ est une contraction dans $(E, \|\|_k)$.

Soient $y, z \in E$. Si $t \geqslant t_0$ nous avons

SUBEQSooEXVYooDkyTuB

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, z(s)\big)\|ds \tag{19.276a}$$

$$\leqslant k\int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\|ds. \tag{19.276b}$$

Il convient maintenant de remarquer que

$$\|y(t)\| = e^{-k|t-t_0|}e^{k|t-t_0|}\|y(t)\| \leqslant \|y\|_k e^{k|t-t_0|}. \tag{19.277}$$

Nous pouvons avec ça prolonger les inégalités (19.276) par

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant k\|y-z\|_k \int_{t_0}^{t} e^{k|s-t_0|}ds = k\|y-z\|_k \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)}ds \tag{19.278}$$

où nous avons utilisé notre supposition $t \geqslant t_0$ pour éliminer les valeurs absolues. L'intégrale peut être calculée explicitement, mais nous en sommes arrivés à un niveau de fainéantise tellement inconcevable que

```
1
2
3  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7  sage: var('a,b,k')
8  (a, b, k)
9  sage: f(x)=exp(-k*x)
10 sage: f.integrate(x,a,b)
11 e^(-a*k)/k - e^(-b*k)/k
```

tex/sage/sageSnip014.sage

Au final, si $t \geqslant t_0$,

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y-z\|_k \big(e^{k(t-t_0)} - 1\big). \tag{19.279}$$

Si $t \leqslant t_0$, il faut retourner les bornes de l'intégrale avant d'y faire rentrer la norme parce que $\|\int_0^1 f\| \leqslant \int_0^1 \|f\|$, mais ça ne marche pas avec $\|\int_1^0 f\|$. Pour $t \leqslant t_0$ tout le calcul donne

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y-z\|_k \big(e^{k(t_0-t)} - 1\big). \tag{19.280}$$

[31] Définition 12.67

Les deux inéquations sont valables a fortiori en mettant des valeurs absolues dans l'exponentielle, de telle sorte que pour tout $t \in K$ nous avons

$$e^{-k|t_0-t|}\|\phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leqslant \|y - z\|_k\big(1 - e^{-k|t_0-t|}\big). \tag{19.281}$$

En prenant le supremum sur t,

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_k \leqslant \|y - z\|_k(1 - e^{-k\ell}), \tag{19.282}$$

mais $0 < (1 - e^{e-k\ell}) < 1$, donc Φ est contractante pour la norme $\|.\|_k$. Comme $(E, \|.\|_k)$ est complet, l'application Φ y a un unique point fixe par le théorème de Picard 19.60.

Ce point fixe est donc l'unique solution de l'équation différentielle de départ.

(1) **Existence et unicité sur I** Il nous reste à prouver que la solution que nous avons trouvée existe sur I : jusqu'à présent nous avons démontré l'existence et l'unicité sur n'importe quel compact dans I.

Soit une suite croissante de compacts K_n contenant t_0 (par exemple une suite exhaustive comme celle du lemme 9.379). Nous avons en particulier

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n. \tag{19.283}$$

(2) **Existence sur I** Soit y_n l'unique solution sur K_n. Il suffit de poser

$$y(t) = y_n(t) \tag{19.284}$$

pour n tel que $t \in K_n$. Cette définition fonctionne parce que si $t \in K_n \cap K_m$, il y a forcément un des deux qui est inclus dans l'autre et le résultat d'unicité sur le plus grand des deux donne $y_n(t) = y_m(t)$.

(3) **Unicité sur I**

Soient y et z des solutions sur I ; puisque I n'est pas spécialement compact, le travail fait plus haut ne permet pas de conclure que $y = z$.

Soit $t \in I$. Alors $t \in K_n$ pour un certain n et y et z sont des solutions sur K_n qui est compact. L'unicité sur K_n donne $y(t) = z(t)$.

□

19.67.
Il y a d'autres moyens de prouver qu'une solution existe globalement sur $\mathbb{R}$. Si f est globalement bornée, le théorème d'explosion en temps fini donne quelques garanties, voir 34.25.

Si vous voulez un théorème de Cauchy-Lipschitz avec paramètre vraiment intéressant, allez voir le théorème 34.40.

19.68.
Ce théorème marque un peu la limite de ce que l'on peut faire avec la méthode des points fixes dans le cadre de Cauchy-Lipschitz : nous sommes limités à la continuité de la solution parce que les espaces C^p ne sont pas complets[32]. Il n'y a donc pas d'espoir d'adapter la méthode pour prouver que si f est de classe C^p alors $(t, \lambda) \mapsto y_\lambda(t)$ est de classe C^p. On peut, à λ fixé, prouver que $t \mapsto y_\lambda(t)$ est de classe C^p (utiliser une récurrence), mais pas plus.

La régularité C^1 de y par rapport à la condition initiale sera l'objet du théorème 34.36. Ce résultat n'est vraiment pas facile et utilise des ingrédients bien autres qu'un point fixe. Ensuite la régularité C^p par rapport à la condition initiale et par rapport à un paramètre seront presque des cadeaux (proposition 34.38 et 34.40).

EXooJXIGooQtotMc

Exemple 19.69 ([592])**.**
Nous savons que le théorème de Picard permet de trouver le point fixe par itération de la contraction à partir d'un point quelconque. Tentons donc de résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & \text{(19.285a)} \\ y(0) = 1 & \text{(19.285b)} \end{cases}$$

[32]Par exemple, le théorème de Stone-Weierstrass 14.461 nous dit que la limite uniforme de polynômes (de classe C^∞) peut n'être que continue. Voir aussi le thème 37.

dont nous savons depuis l'enfance que la solution est l'exponentielle[33]. Partons donc de la fonction constante $y_0 = 1$, et appliquons la contraction (19.268) :

$$u_1 = 1 + \int_0^1 u_0(s)ds = 1 + t. \tag{19.286}$$

Ensuite

$$u_2 = 1 + \int_0^t (1 + s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}. \tag{19.287}$$

Et on voit que les itérations suivantes vont donner l'exponentielle.

Nous sommes évidemment en droit de se dire que nous avons choisi un bon point de départ. Tentons le coup avec une fonction qui n'a rien à voir avec l'exponentielle : $u_0(x) = \sin(x)$.

Le programme suivant permet de faire de belles investigations numériques en partant d'à peu près n'importe quelle fonction :

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

x=var('x')

def Phi(f):
    prim=f.integrate()
    return 1+prim(x)-prim(0)

f=sin(x)

for i in range(1,30):
    print(i,f)
    f=Phi(f)

g=f(x)-exp(x)
plot(g,(x,-10,10)).show()
```

tex/sage/picard_exp.py

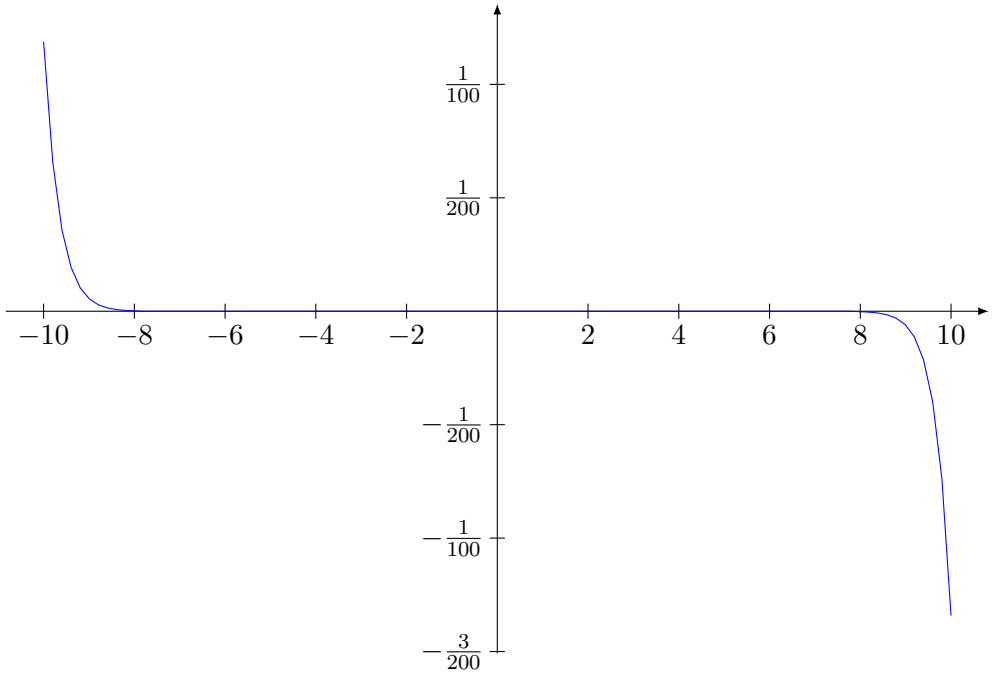
Ce programme fait 30 itérations depuis la fonction $\sin(x)$ pour tenter d'approximer $\exp(x)$. Pour donner une idée, après 7 itérations nous avons la fonction suivante :

$$\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - \sin(x) + 1. \tag{19.288}$$

Nous voyons que les coefficients sont des factorielles, mais pas toujours celles correspondantes à la puissance, et qu'il manque certains termes par rapport au développement de l'exponentielle que nous connaissons. Bref, le polynôme qui se met en face de $\sin(x)$ s'adapte tout seul pour compenser.

Et après 30 itérations, ça donne quoi ? Voici un graphe de l'erreur entre $u_{30}(x)$ et $\exp(30)$:

[33] Voir par exemple le théorème 17.88.



Pour donner une idée, $\exp(10) \simeq 22000$. Donc il y a une faute de 0.01 sur 22000. Pas mal.

△

19.10.2 Théorème de Caucy-Lipschitz analytique (tentative)

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 19.70
La démonstration ici n'est pas terminée ; il manque un détail technique vers la fin. Si vous savez comment terminer, dites-le moi.

https://math.stackexchange.com/questions/5101596
https://math.stackexchange.com/questions/5111835
https://math.stackexchange.com/questions/5113042

THOooZEBOooQJOSQj

Théorème 19.71 (Cauchy-Lipschitz analytique TENTATIVE [3]).
Nous considérons[34] $\Lambda = \mathbb{R}^m$ *ainsi qu'un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$, *un ouvert* Γ *de* Λ *et une application* $f : \mathbb{R} \times U \times \Gamma \to \mathbb{R}$ *tels que*

(1) *L'application* f *est Lipschitzienne en* y *: pour tout compact* K *de* $\mathbb{R} \times U \times \Gamma$, *il existe une constante* L_K *telle que*

$$\|f(y, y_1, \lambda) - f(t, y_2, \lambda)\| \leqslant L_K \|y_1 - y_2\| \tag{19.289}$$

pour tout $(t, y_1, \lambda), (t, y_2, \lambda)$ *dans* K.

(2) *L'application* f *est analytique*[35] *sur* $\overline{\mathbb{R} \times U \times \Gamma}$.

Alors pour tout $(t_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times U \times \Gamma$, *il existe un* $R > 0$ *et une unique application*

$$y : B(t_0, R) \times B(\lambda_0, R) \to \mathbb{R}^n \tag{19.290}$$

telle que EQooPTYDooMOxFti

$$\begin{cases} (\partial_t y)(t, \lambda) = f\big(t, y(t, \lambda), \lambda\big) & \text{(19.291a)} \\ y(t_0, \lambda) = y_0. & \text{(19.291b)} \end{cases}$$

pour tout $(t, \lambda) \in B(t_0, \epsilon) \times B(\lambda_0, R)$.

Cette application y *est analytique sur* $B(t_0, \epsilon) \times B(\lambda_0, R)$.

Démonstration. En plein de parties.

[34] Je suis presque certain qu'on peut prendre n'importe que espace de Banach pour Λ, mais ça demanderait d'adapter la proposition 17.210(1).
[35] Définition 17.190.

(1) **Cylindre de sécurité** Soit (t_0, y, λ_0). Il existe $\rho > 0$ tel que f est analytique sur le compact $\overline{B(t_0,\rho)} \times \overline{B(y_0,\rho)} \times \overline{B(\lambda_0,\rho)}$. En particulier f y est continue et donc bornée. Soit $M > 0$ tel que

$$\|f(t,x,\lambda)\| < M \tag{19.292}$$

pour tout $(t,x,\lambda) \in \overline{B(t_0,\rho)} \times \overline{B(y_0,\rho)} \times \overline{B(\lambda_0,\rho)}$.

(2) **L'espace $\mathcal{F}$** Nous fixons un $r < \rho/2M$ et nous posons

$$X = \overline{B(t_0,r)} \times \overline{B(\lambda_0,\rho)} \tag{19.293}$$

et $\mathcal{F}$ est

$$\mathcal{F} = \Big(\{ y \in C^0(X, \mathbb{R}^n) \text{ tel que } \|y\|_\infty < \rho \}, \|.\|_\infty \Big) \tag{19.294}$$

où $\|.\|_\infty$ est la norme supremum sur X.

(3) **$\mathcal{F}$ est de Banach** Le lemme 14.399 dit ça.

(4) **Une borne** Si $y \in \mathcal{F}$, alors et si $s \in B(t_0,r)$ et $\lambda \in B(\lambda_0,\rho)$ alors d'abord $\|y(s,\lambda)\| < \rho$ parce que $y \in \mathcal{F}$, et donc $\big(s, y(s,\lambda), \lambda\big) \in B\big((t_0,y_0,\lambda_0),\rho\big)$. Avec ça nous avons

$$\|f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big)\| < M. \tag{19.295}$$ EQooYPDTooLRKJrX

Donc en prenant $t \in B(t_0,r)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\| \int_{t_0}^{t} f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big)\| ds &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big)\| && \text{(19.296a)}\\
&\leqslant |t-t_0| M && \text{(19.296b)}\\
&\leqslant rM && \text{(19.296c)}\\
&\leqslant \rho/2 && \text{(19.296d)}\\
&< \rho. && \text{(19.296e)}
\end{aligned}$$

(5) **Une continuité** Soit $y \in \mathcal{F}$. Nous posons

$$\begin{aligned}
g\colon X &\to \mathbb{R}^n\\
(t,\lambda) &\mapsto \int_{t_0}^{t} f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big) ds.
\end{aligned} \tag{19.297}$$

Nous avons déjà prouvé dans (19.295) que l'intégrale ne posait pas de problèmes. Nous prouvons maintenant que g est continue. Soient donc $(t_1,\lambda_1) \in X$ et $d > 0$ ainsi que[36]

$$(t,\lambda) \in B\big((t_1,\lambda_1),d\big) \cap X. \tag{19.298}$$

En particulier $|t-t_1| < d$ et $|\lambda - \lambda_1| < d$. Et nous calculons SUBEQooOBONooAnUwAO

$$\begin{aligned}
g(t_1,\lambda_1) - g(t,\lambda) &= \int_{t_0}^{t_1} f\big(s,y(s,\lambda_1),\lambda_1\big) ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big) ds && \text{(19.299a)}\\
&= \int_{t_0}^{t} f\big(s,y(s,\lambda_1),\lambda_1\big) + \int_{t}^{t_1} f\big(s,y(s,\lambda_1),\lambda_1\big) - \int_{t_0}^{t} f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big) ds && \text{(19.299b)}\\
&= \int_{t_0}^{t} \big[f\big(s,y(s,\lambda_1),\lambda_1\big) - f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big) \big] ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big) ds. && \text{(19.299c)}
\end{aligned}$$

En ce qui concerne les normes de tout ça, vu que y est continue sur le compact $[t_0,t]$ si d est petit, $y(s,\lambda_1)$ et $y(s,\lambda)$ peuvent être rendus aussi proche qu'on veut (uniformément en s par 14.80). Puis comme f est continue, on a

$$\| \int_{t_0}^{t} \big[f\big(s,y(s,\lambda_1),\lambda_1\big) - f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big) \big] ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s,y(s,\lambda),\lambda\big) ds \| \leqslant |t-t_0| \epsilon. \tag{19.300}$$

[36] Oui, nous utilisons la topologie induite parce que X est fermé.

Pour l'autre terme en prenant d assez petit pour $d < \epsilon/M$,

$$\| \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s,\lambda), \lambda\big) \| \leqslant |t - t_0| M \leqslant dM \leqslant \epsilon. \tag{19.301a}$$

Tout cela pour dire que si d est petit, alors

$$\|g(t_1, \lambda_1) - g(t, \lambda)\| \leqslant \epsilon(|t - t_0| + 1). \tag{19.302}$$

Bref, g est continue.

(6) **L'application Φ** Tout cela nous permet de considérer l'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\ \Phi(y)(t,\lambda) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s,\lambda), \lambda\big). \end{aligned} \tag{19.303}$$

(7) **Φ est une contraction** Contraction : relisez la définition 19.59. Vu que $\overline{B(t_0,\rho)} \times \overline{B(y_0,\rho)} \times \overline{B(\lambda_0,\rho)}$ est compact, il existe un $L(\rho) > 0$ tel que

$$\|f\big(s, y_1(s,\lambda), \lambda\big) - f\big(s, y_2(s,\lambda), \lambda\big)\| < L\|y_1 - y_2\|. \tag{19.304}$$

Et notez au passage que que $L(\rho)$ peut être choisit décroissant en ρ. Calculons un petit peu :

$$\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_\infty = \sup_{(t,\lambda)\in X} \|\Phi(y_1)(t,\lambda) - \Phi(y_2)(t,\lambda)\| \tag{19.305a}$$

$$\leqslant \sup_{(t,\lambda)\in X} \int_{t_0}^{t} \|f\big(s, y_1(s,\lambda), \lambda\big) - f\big(s, y_2(s,\lambda), \lambda\big)\|_\infty ds \tag{19.305b}$$

$$\leqslant \sup_{(t,\lambda)\in X} \int_{t_0}^{t} L\|y_1(s,\lambda) - y_2(s,\lambda)\| ds \tag{19.305c}$$

$$\leqslant \sup_{(t,\lambda)\in X} |t - t_0| L\|y_1 - y_2\|_\infty \tag{19.305d}$$

$$\leqslant \rho L(\rho)\|y_1 - y_2\|_\infty. \tag{19.305e}$$

Il suffit de choisir ρ assez petit pour avoir $\rho L(\rho) < 1$ pour que Φ soit une contraction.

(8) **Picard** Le théorème de Picard 19.60 nous dit que sur Φ a un unique point fixe et que si $\alpha_0 \in \mathcal{F}$, alors en posant $\alpha_{n+1 j=\Phi(\alpha_n)}$, alors la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe que nous allons noter α.

(9) **Tout point fixe est solution** Nous prouvons maintenant que le point fixe de $\mathcal{F}$ est une solution du problème. Si α est le point fixe, alors $\Phi(\alpha) - \alpha = 0$, c'est-à-dire

$$y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \alpha(s,\lambda), \lambda\big) ds - \alpha(t,\lambda) = 0. \tag{19.306}$$

En évaluant en $t = t_0$ nous avons déjà $\alpha(t_0,\lambda) = y_0$ comme il fallait. De plus, le théorème « primitive et intégrale » 16.289 nous indique qu'en posant

$$g_\lambda(t) = f\big(t, \alpha(t,\lambda), \lambda\big) \tag{19.307}$$

et

$$F_\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} f\big(f(s, \alpha(s,\lambda), \lambda)\big) ds, \tag{19.308}$$

la fonction F_λ est primitive de g_λ. Nous avons donc

$$(\partial_t \alpha)(t,\lambda) = \partial_t\big(\Phi(\alpha)\big)(t,\lambda) = F'_\lambda(t) = g_\lambda(t) = f\big(t, \alpha(t,\lambda), \lambda\big). \tag{19.309}$$

Donc α vérifie l'équation 19.291.

(10) **Toute solution est un point fixe** Supposons que α soit une solution. Nous démontrons que c'est un point fixe de Φ :

$$\Phi(\alpha)(t,\lambda) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,\alpha(s,\lambda),\lambda\big)ds \tag{19.310a}$$
$$= y_0 + \int_{t_0}^{t} (\partial_t\alpha)(s,\lambda)ds \tag{19.310b}$$
$$= y_0 + \alpha(t,\lambda) - \alpha(t_0,\lambda) \tag{19.310c}$$
$$= \alpha(t,\lambda). \tag{19.310d}$$

Donc nous avons bien $\Phi(\alpha) = \alpha$.

(11) **Pour la suite** Nous savons que l'équation (19.291) possède une unique solution et que cette solution est le point fixe de $\mathcal{F}$. De plus nous savons que si α_0 est n'importe quel élément de $\mathcal{F}$, alors en posant $\alpha_{n+1} = \Phi(\alpha_n)$, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{F}$ vers un élément α qui est solution de (19.291).

(12) **La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$** Choisissons

$$\begin{aligned}\alpha_0\colon B(t_0,\rho)\times B(\lambda_0,\rho) &\to \mathbb{R}\\ (t,\lambda) &\mapsto 0.\end{aligned} \tag{19.311}$$

C'est une application analytique. Et posons $\alpha_{n+1} = \Phi(\alpha_n)$. Vu que $\mathcal{F}$ a la norme uniforme, la convergence $\alpha_n \to \alpha$ est uniforme. De plus la proposition 17.210 dit que α_n est analytique.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 19.72
Je voudrais utiliser le théorème 17.220, mais je ne sais pas comment vérifier la condition (2).

□

19.11 Flot

LEMooUXWKooKEjyrb

Lemme 19.73 ([1]).
Soient deux ouverts A_i $(i = 1, 2)$, deux intervalles ouverts I_i contenant 0 ainsi que deux applications continues $\gamma_i\colon I_i \to A_i$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Nous supposons que pour tout $t \in I_1 \cap I_2$ tel que au moins un des deux $\gamma_i(t)$ est dans $A_1 \cap A_2$, nous ayons $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$.

Alors $\gamma_1 = \gamma_2$ sur $I_1 \cap I_2$.

Démonstration. Nous posons

$$S = \{t \in I_1 \cap I_2 \text{ tel que } \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}, \tag{19.312}$$

et $t_0 = \inf(S)$.

Étant donné que γ_1 et γ_2 sont continues, S est ouvert et nous avons $t_0 \notin S$. Autrement dit, $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$.

Par ailleurs, le point $a = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ est dans $A_1 \cap A_2$ qui est un ouvert. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma_i(t) \in A_1 \cap A_2$ pour tout $t \in B(t_0, \epsilon)$. En particulier, $t_0 + \epsilon/2$ n'est pas dans S, ce qui contredit la définition de l'infimum. Nous en déduisons que S est vide et que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$. □

PROPooLTSZooBXBqtE

Proposition 19.74 ([593]).
Soit une application $F\colon V \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{A}$ (C^k, C^∞ ou analytique) où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in V$. Il existe un ouvert W autour de x_0 dans V, un $\epsilon > 0$ et une application

$$\phi\colon]-\epsilon,\epsilon[\times W \to V \tag{19.313}$$

de classe $\mathcal{A}$ telle que pour tout $x \in W$ nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big[\phi(t,x)\big]_{t=s} = F\big(\phi(t,x)\big) & \text{(19.314a)}\\ \phi(0,x) = x. & \text{(19.314b)}\end{cases}$$

De plus sur $(U_2, \epsilon_2, \phi_2)$ ont la même propriété, alors $\phi = \phi_2$ sur $]-\tau,\tau[\times (U \times U_2)$ où $\tau = \min(\epsilon, \epsilon_2)$.

19.12 Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite

19.12.1 Mise en situation

Dans un certain nombre de situation, il n'est pas possible de trouver des solutions explicites aux équations qui apparaissent. Néanmoins, l'existence « théorique » d'une telle solution est souvent déjà suffisante. C'est l'objet du théorème de la fonction implicite.

Prenons par exemple la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$F(x,y)=x^2+y^2-1. \tag{19.315}$$

Nous pouvons bien entendu regarder l'ensemble des points donnés par $F(x,y)=0$. C'est le cercle dessiné à la figure 19.3.

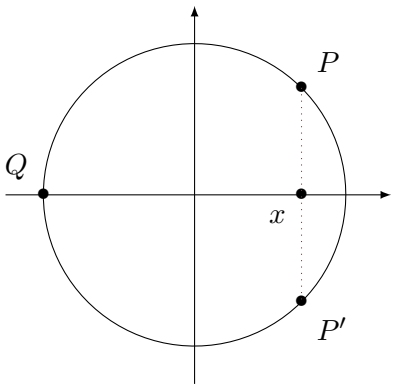


FIGURE 19.3 : Un cercle pour montrer l'intérêt de la fonction implicite. Si on donne x, nous ne pouvons pas savoir si nous parlons de P ou de P'. LabelFigCercleImplicite

Nous ne pouvons pas donner le cercle sous la forme $y=y(x)$ à cause du $\pm$ qui arrive quand on prend la racine carrée. Mais si on se donne le point P, nous pouvons dire que *autour de* P, le cercle est la fonction

$$y(x)=\sqrt{1-x^2}. \tag{19.316}$$

Tandis que autour du point P', le cercle est la fonction

$$y(x)=-\sqrt{1-x^2}. \tag{19.317}$$

Autour de ces deux points, donc, le cercle est donné par une fonction. Il n'est par contre pas possible de donner le cercle autour du point Q sous la forme d'une fonction.

Ce que nous voulons faire, en général, est de voir si l'ensemble des points tels que

$$F(x_1,\dots,x_n,y)=0 \tag{19.318}$$

peut être donné par une fonction $y=y(x_1,\dots,x_n)$. En d'autre termes, est-ce qu'il existe une fonction $y(x_1,\dots,x_n)$ telle que

$$F\big(x_1,\dots,x_n,y(x_1,\dots,x_n)\big)=0. \tag{19.319}$$

Plus généralement, soit une fonction

$$\begin{aligned} F\colon D\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m&\to\mathbb{R}^m\\ (x,y)&\mapsto\big(F_1(x,y),\dots,F_m(x,y)\big) \end{aligned} \tag{19.320}$$

avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_m)$. Pour chaque x fixé, on s'intéresse aux solutions du système de m équations $F(x,y)=0$ pour les inconnues y ; en particulier, on voudrait pouvoir écrire $y=\varphi(x)$ vérifiant $F(x,\varphi(x))=0$.

19.12.2 Théorème d'inversion locale

LemGZoqknC

Lemme 19.75 ([422]).
Soit E un espace de Banach (métrique complet) et $\mathcal{O}$ un ouvert de E. Nous considérons une λ-contraction $\varphi\colon\mathcal{O}\to E$. Alors l'application

$$f\colon x\mapsto x+\varphi(x) \tag{19.321}$$

est un homéomorphisme entre $\mathcal{O}$ et un ouvert de E. De plus f^{-1} est lipschitzienne de constante plus petite ou égale à $(1-\lambda)^{-1}$.

Cette proposition utilise le théorème de point fixe de Picard 19.60, et sera utilisée pour démontrer le théorème d'inversion locale 19.76.

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$. Nous posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. En vertu de l'inégalité de la proposition 9.233 nous avons[subEqEBJsBfz]

$$\begin{aligned}\big\|f(x_2) - f(x_1)\big\| &= \big\|x_2 + \varphi(x_2) - x_1 - \varphi(x_1)\big\| && \text{(19.322a)}\\ &\geqslant \Big|\|x_2 - x_1\| - \big\|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\big\|\Big| && \text{(19.322b)}\\ &\geqslant (1-\lambda)\|x_2 - x_1\|. && \text{(19.322c)}\end{aligned}$$

À la dernière ligne les valeurs absolues sont enlevées parce que nous savons que ce qui est à l'intérieur est positif. Cela nous dit d'abord que f est injective parce que $f(x_2) = f(x_1)$ implique $x_2 = x_1$. Donc f est inversible sur son image. Nous posons $A = f(\mathcal{O})$ et nous devons prouver que que $f^{-1}\colon A \to \mathcal{O}$ est continue, lipschitzienne de constante majorée par $(1-\lambda)^{-1}$ et que A est ouvert.

Les inéquations (19.322) nous disent que

$$\big\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\big\| \leqslant \frac{\|y_1 - y_2\|}{1-\lambda}, \tag{19.323}$$

c'est-à-dire que

$$f^{-1}\big(B(y,r)\big) \subset B\big(f^{-1}(y), \frac{r}{1-\lambda}\big), \tag{19.324}$$

ce qui signifie que f^{-1} est lipschitzienne de constante souhaitée et donc continue.

Il reste à prouver que $f(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela nous prenons $y_0 = f(x_0)$ dans $f(\mathcal{O})$ est nous prouvons qu'il existe ϵ tel que $B(y_0, \epsilon)$ soit dans $f(\mathcal{O})$. Il faut donc que pour tout $y \in B(y_0, \epsilon)$, l'équation $f(x) = y$ ait une solution. Nous considérons l'application

$$L_y\colon x \mapsto y - \varphi(x). \tag{19.325}$$

Ce que nous cherchons est un point fixe de L_y parce que si $L_y(x) = x$ alors $y = x + \varphi(x) = f(x)$. Puisque

$$\big\|L_y(x) - L_y(x')\big\| = \big\|\varphi(x) - \varphi(x')\big\| \leqslant \lambda\|x - x'\|, \tag{19.326}$$

l'application L_y est une contraction de constante λ. Par ailleurs x_0 est un point fixe de L_{y_0}, donc en vertu de la caractérisation (14.972) des fonctions lipschitziennes,

$$L_{y_0}\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) \subset \overline{B\big(L_{y_0}(x_0), \lambda\delta\big)} = \overline{B(x_0, \lambda\delta)}. \tag{19.327}$$

Comme pour tout y et x nous avons $L_y(x) = L_{y_0}(x) + y - y_0$,

$$L_y\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) = L_{y_0}\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) + (y - y_0) \subset \overline{B(x_0,\lambda\delta)} + (y - y_0) \subset \overline{B(x_0, \lambda\delta) + \|y - y_0\|}. \tag{19.328}$$

Si $\epsilon < (1-\lambda)\delta$ alors $\lambda\delta + \|y - y_0\| < \delta$. Un tel choix de $\epsilon > 0$ est possible parce que $\lambda < 1$. Pour une telle valeur de ϵ nous avons

$$L_y\big(\overline{B(x_0,\delta)}\big) \subset \overline{B(x_0,\delta)}. \tag{19.329}$$

Par conséquent L_y est une contraction sur l'espace métrique complet $\overline{B(x_0,\delta)}$, ce qui signifie que L_y y possède un point fixe par le théorème de Picard 19.60. □

Nous allons le démontrer dans le cas un peu plus général (mais pas plus cher[37]) des espaces de Banach en tant que conséquence du théorème de point fixe de Picard 19.60.

[ThoXWpzqCn]

Théorème 19.76 (Inversion locale dans un espace de Banach[594, 422])**.**
Soit une fonction $f \in C^p(E,F)$ avec $p \geqslant 1$ entre deux espaces de Banach. Soit $x_0 \in E$ tel que df_{x_0} soit une bijection bicontinue[38]. Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 et W de $f(x_0)$ tels que

(1) $f\colon V \to W$ soit une bijection,

(2) $f^{-1}\colon W \to V$ soit de classe C^p.

[37] Sauf la justification de la régularité de l'application $A \mapsto A^{-1}$

[38] En dimension finie, une application linéaire est toujours continue et d'inverse continu.

Démonstration. Nous commençons par simplifier un peu le problème. Pour cela, nous considérons la translation $T\colon x\mapsto x+x_0$ et l'application linéaire

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (df_{x_0})^{-1}x \end{aligned} \tag{19.330}$$

qui sont tous deux des difféomorphismes (L en est un par hypothèse d'inversibilité). Quitte à travailler avec la fonction $k=L\circ f\circ T$, nous pouvons supposer que $x_0=0$ et que $df_{x_0}=\mathbb{1}$. Pour comprendre cela il faut utiliser deux fois la formule de différentielle de fonction composée de la proposition 14.777 :

$$dk_0(u)=dL_{(f\circ T)(0)}\Big(df_{T(0)}dT_0(u)\Big). \tag{19.331}$$

Puisque L est linéaire, sa différentielle est elle-même, c'est-à-dire $dL_{(f\circ T)(0)}=(df_{x_0})^{-1}$, et par ailleurs $dT_0=\mathbb{1}$, donc

$$dk_0(u)=(df_{x_0})^{-1}\Big(df_{x_0}(u)\Big)=u, \tag{19.332}$$

ce qui signifie bien que $dk_0=\mathbb{1}$. Pour tout cela nous avons utilisé en plein le fait que df_{x_0} était inversible.

Nous posons $g=f-\mathbb{1}$, c'est-à-dire $g(x)=f(x)-x$, qui a la propriété $dg_0=0$. Étant donné que g est de classe C^1, l'application[39]

$$\begin{aligned} dg\colon E &\to \mathrm{GL}(F) \\ x &\mapsto dg_x \end{aligned} \tag{19.333}$$

est continue. En conséquence, nous avons un voisinage U' de 0 pour lequel

$$\sup_{x\in U'}\|dg_x\|<\frac{1}{2}. \tag{19.334}$$

Maintenant le théorème des accroissements finis 12.357 (14.351 pour la dimension finie) nous indique que pour tout $x,x'\in U'$ nous avons[40]

$$\|g(x')-g(x)\|\leqslant \sup_{a\in[x,x']}\|dg_a\|\cdot\|x-x'\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-x'\|, \tag{19.335}$$

ce qui prouve que g est une contraction au moins sur l'ouvert U'. Nous allons aussi donner une idée de la façon dont f fonctionne : si $x_1,x_2\in U'$ alors

$$\|x_1-x_2\|=\|g(x_1)-f(x_1)-g(x_2)+f(x_2)\| \tag{19.336a}$$
$$\leqslant\|g(x_1)-g(x_2)\|+\|f(x_1)-f(x_2)\| \tag{19.336b}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|+\|f(x_1)-f(x_2)\|, \tag{19.336c}$$

ce qui montre que

$$\|x_1-x_2\|\leqslant 2\|f(x_1)-f(x_2)\|. \tag{19.337}$$

Maintenant que nous savons que g est contractante de constante $\frac{1}{2}$ et que $f=g+\mathbb{1}$ nous pouvons utiliser la proposition 19.75 pour conclure que f est un homéomorphisme sur un ouvert U (partie de U') de E et f^{-1} a une constante de Lipschitz plus petite ou égale à $(1-\frac{1}{2})^{-1}=2$.

Nous allons maintenant prouver que f^{-1} est différentiable et que sa différentielle est donnée par $(df^{-1})_{f(x)}=(df_x)^{-1}$.

Soient $a,b\in U$ et $u=b-a$. Étant donné que f est différentiable en a, il existe une fonction $\alpha\in o(\|u\|)$ telle que

$$f(b)-f(a)-df_a(u)=\alpha(u). \tag{19.338}$$

En notant $y_a=f(a)$ et $y_b=f(b)$ et en appliquant $(df_a)^{-1}$ à cette dernière équation,

$$(df_a)^{-1}(y_b-y_a)-u=(df_a)^{-1}\big(\alpha(u)\big). \tag{19.339}$$

Puisque df_a est bornée (et son inverse aussi), le membre de droite est encore une fonction β ayant la propriété $\lim_{u\to0}\beta(u)/\|u\|=0$; en réordonnant les termes,

$$b-a=(df_a)^{-1}(y_b-y_a)+\beta(u) \tag{19.340}$$

[39] Ici $\mathrm{GL}(F)$ est l'ensemble des applications linéaires, inversibles et continues de F dans lui-même. Ce ne sont pas spécialement des matrices parce que nous n'avons pas d'hypothèses sur la dimension de F, finie ou non.

[40] Ici nous supposons avoir choisi U' convexe afin que tous les $a\in[x,x']$ soient bien dans U' et donc soumis à l'inéquation (19.334), ce qui est toujours possible, il suffit de prendre une boule.

et donc

$$f^{-1}(y_b) - f^{-1}(y_a) - (df_a)^{-1}(y_b - y_a) = \beta(u), \tag{19.341}$$

ce qui prouve que f^{-1} est différentiable et que $(df^{-1})_{y_a} = (df_a)^{-1}$.

La différentielle df^{-1} est donc obtenue par la chaine

$$df^{-1}\colon f(U) \xrightarrow{f^{-1}} U' \xrightarrow{df} \mathrm{GL}(F) \xrightarrow{\mathrm{Inv}} \mathrm{GL}(F) \tag{19.342}$$

où l'application $\mathrm{Inv}\colon \mathrm{GL}(F) \to \mathrm{GL}(F)$ est l'application $X \mapsto X^{-1}$ qui est de classe C^∞ par le théorème 12.365. D'autre part, par hypothèse df est une application de classe C^{k-1} et donc au minimum C^0 parce que $k \geqslant 1$. Enfin, l'application $f^{-1}\colon f(U) \to U$ est continue (parce que la proposition 19.75 précise que f est un homéomorphisme). Donc toute la chaine est continue et df^{-1} est continue. Cela entraine immédiatement que f^{-1} est C^1 et donc que toute la chaine est C^1.

Par récurrence nous obtenons la chaine

$$df^{-1}\colon f(U) \xrightarrow[C^{k-1}]{f^{-1}} U' \xrightarrow[C^{k-1}]{df} \mathrm{GL}(F) \xrightarrow[C^\infty]{\mathrm{Inv}} \mathrm{GL}(F) \tag{19.343}$$

qui prouve que df^{-1} est C^{k-1} et donc que f^{-1} est C^k. La récurrence s'arrête ici parce que df n'est pas mieux que C^{k-1}. □

19.12.3 Théorème de la fonction implicite

Nous énonçons et démontrons le théorème de la fonction implicite dans le cas d'espaces de Banach.

ThoAcaWho

Théorème 19.77 (Théorème de la fonction implicite dans Banach[424]).
Soient E, F et G des espaces de Banach et des ouverts $U \subset E$, $V \subset F$. Nous considérons une fonction $f\colon U \times V \to G$ de classe C^r telle que[41]

$$d_y f_{(x_0,y_0)}\colon F \to G \tag{19.344}$$

soit un isomorphisme pour un certain $(x_0, y_0) \in U \times V$.

Alors nous avons des voisinages U_0 de x_0 dans E et W_0 de $f(x_0, y_0)$ dans G et une fonction de classe C^r

$$g\colon U_0 \times W_0 \to V \tag{19.345}$$

telle que

$$f\big(x, g(x, w)\big) = w \tag{19.346}$$

pour tout $(x, w) \in U_0 \times W_0$.

Cette fonction g est unique au sens suivant : il existe un voisinage V_0 de y_0 tel que si $(x, y) \in U_0 \times V_0$ et $w \in W_0$ satisfont à $f(x, y) = w$ alors $y = g(x, w)$. Autrement dit, la fonction $g\colon U_0 \times W_0 \to V_0$ est unique.

Démonstration. Nous commençons par considérer la fonction

$$\begin{aligned} \Phi\colon U \times V &\to E \times G \\ (x, y) &\mapsto \big(x, f(x, y)\big) \end{aligned} \tag{19.347}$$

et sa différentielle

$$d\Phi_{(x_0,y_0)}(u, v) = \frac{d}{dt}\Big[\big(x_0 + tu, f(x_0 + tu, y_0 + tv)\big)\Big]_{t=0} \tag{19.348a}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\Big[x_0 + tu\Big]_{t=0}, \frac{d}{dt}\Big[f(x_0 + tu, y_0 + tv)\Big]_{t=0}\right) \tag{19.348b}$$

$$= \big(u, df_{(x_0,y_0)}(u, v)\big)\,. \tag{19.348c}$$

Nous utilisons alors la proposition 12.363 pour conclure que

$$d\Phi_{(x_0,y_0)}(u, v) = \big(u, (d_1 f)_{(x_0,y_0)}(u) + (d_2 f)_{(x_0,y_0)}(v)\big), \tag{19.349}$$

mais comme par hypothèse $(d_2 f)_{(x_0,y_0)}\colon F \to G$ est un isomorphisme, l'application $d\Phi_{(x_0,y_0)}\colon E \times F \to E \times G$ est également un isomorphisme. Par conséquent le théorème d'inversion locale 19.76 nous indique qu'il existe

[41] La notation d_y est la différentielle partielle de la définition 12.362.

un voisinage $\mathcal{O}$ de (x_0, y_0) et $\mathcal{P}$ de $\Phi(x_0, y_0)$ tels que $\Phi\colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ soit une bijection et $\Phi^{-1}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{O}$ soit de classe C^r. Comme $\mathcal{P}$ est un voisinage de

$$\Phi(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0, y_0)\big), \tag{19.350}$$

nous pouvons par 9.309 le choisir un peu plus petit de telle sorte à avoir $\mathcal{P} = U_0 \times W_0$ où U_0 est un voisinage de x_0 et W_0 un voisinage de $f(x_0, y_0)$. Dans ce cas nous devons obligatoirement aussi restreindre $\mathcal{O}$ à $U_0 \times V_0$ pour un certain voisinage V_0 de y_0. L'application Φ^{-1} a obligatoirement la forme

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\colon U_0 \times W_0 &\to U_0 \times V_0 \\ (x, w) &\mapsto \big(x, g(x, w)\big) \end{aligned} \tag{19.351}$$

EqMHT_QrHRn

pour une certaine fonction $g\colon U_0 \times W_0 \to V$. Cette fonction g est la fonction cherchée parce qu'en appliquant Φ à (19.351),

$$(x, w) = \Phi\big(x, g(x, w)\big) = \Big(x, f\big(x, g(x, w)\big)\Big), \tag{19.352}$$

qui nous dit que pour tout $x \in U_0$ et tout $w \in W_0$ nous avons

$$f\big(x, g(x, w)\big) = w. \tag{19.353}$$

Si vous avez bien suivi le sens de l'équation (19.351) alors vous avez compris l'unicité. Sinon, considérez $(x, y) \in U_0 \times V_0$ et $w \in W_0$ tels que $f(x, y) = w$. Alors $\big(x, f(x, y)\big) = (x, w)$ et

$$\Phi(x, y) = (x, w). \tag{19.354}$$

Mais vu que $\Phi\colon U_0 \times V_0 \to U_0 \times W_0$ est une bijection, cette relation définit de façon univoque l'élément (x, y) de $U_0 \times V_0$, qui ne sera autre que $g(x, w)$. □

Le théorème de la fonction implicite s'énonce de la façon suivante pour des espaces de dimension finie.

ThoRYN_jvZrZ

Théorème 19.78 (Théorème de la fonction implicite en dimension finie)**.**
Soit une fonction $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tels que

(1) $F(\alpha, \beta) = 0$,

(2) $\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$, *c'est-à-dire que* $(d_y F)_{(\alpha,\beta)}$ *est inversible.*

Alors il existe un voisinage ouvert V de α dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert W de β dans $\mathbb{R}^m$ et une application $\varphi\colon V \to W$ de classe C^k telle que pour tout $x \in V$ on ait

$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0. \tag{19.355}$$

De plus si $(x, y) \in V \times W$ satisfait à $F(x, y) = 0$, alors $y = \varphi(x)$.

RemPYA_pkTEx

Remarque 19.79.
Notons que cet énoncé est tourné un peu différemment en ce qui concerne le nombre de variables dont dépend la fonction implicite : comparez

$$f\big(x, g(x, w)\big) = w \tag{19.356a}$$
$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0. \tag{19.356b}$$

Le deuxième est un cas particulier du premier en posant

$$F(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \tag{19.357}$$

et donc en considérant w comme valant la constante $f(x_0, y_0)$; dans ce cas la fonction g ne dépend plus que de la variable x.

Exemple 19.80.
La remarque 19.79 signifie entre autres que le théorème 19.77 est plus fort que 19.78 parce que le premier permet de choisir la valeur d'arrivée. Parlons de l'exemple classique du cercle et de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Nous savons que

$$f(\alpha, \beta) = 1. \tag{19.358}$$

Alors le théorème 19.77 nous donne une fonction g telle que

$$f(x, g(x, r)) = r \tag{19.359}$$

tant que x est proche de α, que r est proche de 1 et que g donne des valeurs proches de β.

L'énoncé 19.78 nous oblige à travailler avec la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, de telle sorte que

$$F(\alpha, \beta) = 0, \tag{19.360}$$

et que nous ayons une fonction φ telle que

$$F(x, \varphi(x)) = 0. \tag{19.361}$$

La fonction φ ne permet donc que de trouver des points sur le cercle de rayon 1. △

19.12.4 Exemple

Le théorème de la fonction implicite a pour objet de donner l'existence de la fonction φ. Maintenant nous pouvons dire beaucoup de choses sur les dérivées de φ en considérant la fonction

$$x \mapsto F\big(x, \varphi(x)\big). \tag{19.362}$$

Par définition de φ, cette fonction est toujours nulle. En particulier, nous pouvons dériver l'équation

$$F\big(x, \varphi(x)\big) = 0, \tag{19.363}$$

et nous trouvons plein de choses.

EXooTLNAooCJHPnq

Exemple 19.81.
Prenons par exemple la fonction[42]

$$F\big((x, y), z\big) = ze^z - x - y, \tag{19.364}$$

Le théorème de la fonction implicite 19.77 nous permet de considérer la fonction $z(x, y)$ vérifiant

$$F\big(x, y, z(x, y)\big) = 0, \tag{19.365}$$

c'est-à-dire telle que

EqDefZImplExemple

$$z(x, y)e^{z(x,y)} - x - y = 0. \tag{19.366}$$

pour tout x et $y \in \mathbb{R}$. Que pouvons dire de la fonction z ?

Nous pouvons facilement trouver $z(0, 0)$ parce que

$$z(0, 0)e^{z(0,0)} = 0, \tag{19.367}$$

donc $z(0, 0) = 0$.

Nous pouvons dire des choses sur les dérivées de $z(x, y)$. Voyons par exemple $(\partial_x z)(x, y)$. Pour trouver cette dérivée, nous dérivons la relation (19.366) par rapport à x. Ce que nous trouvons est

$$(\partial_x z)e^z + ze^z(\partial_x z) - 1 = 0. \tag{19.368}$$

Cette équation peut être résolue par rapport à $\partial_x z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{e^z(1 + z)}. \tag{19.369}$$

Remarquez que cette équation ne donne pas tout à fait la dérivée de z en fonction de x et y, parce que z apparaît dans l'expression, alors que z est justement la fonction inconnue. En général, c'est la vie, nous ne pouvons pas faire mieux.

Dans certains cas, on peut aller plus loin. Par exemple, nous pouvons calculer cette dérivée au point $(x, y) = (0, 0)$ parce que $z(0, 0)$ est connu :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 1. \tag{19.370}$$

Ceci est pratique pour calculer, par exemple, le développement en Taylor de z autour de $(0, 0)$. △

[42] Définition de l'exponentielle : 17.70.

Exemple 19.82.
Est-ce que l'équation $e^y + xy = 0$ définit au moins localement une fonction $y(x)$? Nous considérons la fonction

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} \tag{19.371}$$

La différentielle de cette application est

$$df_{(0,0)}(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(tu_1, tu_2)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} tu_1 \\ e^{tu_2} + t^2u_1u_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{19.372}$$

L'application f définit donc un difféomorphisme local autour des points (x_0, y_0) et $f(x_0, y_0)$. Soit $(u, 0)$ un point dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. Alors il existe un unique (x, y) tel que

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19.373}$$

Nous avons automatiquement $x = u$ et $e^y + xy = 0$. Notons toutefois que pour que ce procédé donne effectivement une fonction implicite $y(x)$ nous devons avoir des points de la forme $(u, 0)$ dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. △

19.13 Décomposition polaire (régularité)

NomDJMUooTRUVkS

19.83.
Nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned} f\colon S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to S^{++}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sqrt{A} \end{aligned} \tag{19.374}$$

est une difféomorphisme.

Cependant $S^{++}(n,\mathbb{R})$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et nous ne savons pas ce qu'est la différentielle d'une application non définie sur un ouvert. Nous allons donc en réalité montrer que l'application racine carrée existe sur un voisinage de chacun des points de $S^{++}(n,\mathbb{R})$. Et comme une union quelconque d'ouverts est un ouvert, la fonction f sera bien définie sur un ouvert de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

LemLBFOooDdNcgy

Lemme 19.84.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to S^{++}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned} \tag{19.375}$$

est un C^∞-difféomorphisme.

Démonstration. Prouvons d'abord que f prend ses valeurs dans $S^{++}(n,\mathbb{R})$. Si $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ alors par la diagonalisation 10.228 elle s'écrit $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale avec des nombres strictement positifs sur la diagonale. Avec cela, $A^2 = QD^2Q^{-1}$ où D^2 contient encore des nombres strictement positifs sur la diagonale.

L'application f étant essentiellement des polynômes en les entrées de A, elle est de classe C^∞.

Passons à l'étude de la différentielle. Comme mentionné en 19.83 nous allons en réalité voir f sur un ouvert de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ autour de $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$. Par conséquent si $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$,

$$df\colon S^{++}(n,\mathbb{R}) \to \mathcal{L}\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R}), \mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big) \tag{19.376a}$$
$$df_A\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}). \tag{19.376b}$$

Le calcul de df_A est facile. Soit $u \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et faisons le calcul en utilisant la formule du lemme (14.273) :

$$df_A(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(A+tu)\Big]_{t=0} \tag{19.377a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[A^2 + tAu + tuA + t^2u^2\Big]_{t=0} \tag{19.377b}$$
$$= Au + uA. \tag{19.377c}$$

Nous allons utiliser le théorème d'inversion locale 19.76 à la fonction f. Dans la suite, A est une matrice de $S^{++}(n,\mathbb{R})$.

(1) df_A **est injective** Soit $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ dans le noyau de df_A. En posant $M' = Q^{-1}MQ$ nous avons $M = QM'Q^{-1}$ et on applique df_A à $QM'Q^{-1}$:

$$df_A(QM'Q^{-1}) = Q\big(DM + MD\big)Q^{-1}. \tag{19.378}$$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$. La matrice D est inversible. Nous avons $M' = -DM'D^{-1}$, et en coordonnées,

$$M'_{ij} = -\sum_{kl} D_{ik}M'_{kl}D^{-1}_{lj} \tag{19.379a}$$

$$= -\sum_{kl} \lambda_i\delta_{ik}M'_{kl}\frac{1}{\lambda_j}\delta_{lj} \tag{19.379b}$$

$$= -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}M'_{ij}. \tag{19.379c}$$

C'est-à-dire que $M'_{ij} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}M'_{ij}$ avec $-\frac{\lambda_i}{\lambda_j} < 0$. Cela implique $M' = 0$ et par conséquent $M = 0$.

(2) df_A **est surjective** Soit $N \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; nous cherchons $M \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tel que $df_A(M) = N$. Nous posons $N' = Q^{-1}NQ$ et $M = QM'Q^{-1}$, ce qui nous donne à résoudre $df_D(M') = N'$. Passons en coordonnées :

$$(DM' + M'D)_{ij} = \sum_k(\delta_{ik}\lambda_iM'_{kj} + M'_{ik}\delta_{kj}\lambda_j) = M'_{ij}(\lambda_i + \lambda_j) \tag{19.380}$$

où $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$. Il suffit donc de prendre la matrice M' donnée par

$$M'_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}N'_{ij} \tag{19.381}$$

pour que $df_A(M') = N'$.

Le théorème d'inversion locale donne un voisinage V de A dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et un voisinage W de A^2 dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tels que $f\colon V \to W$ soit une bijection et $f^{-1}\colon W \to V$ soit de même régularité, en l'occurrence C^∞. □

Remarque 19.85.
Oui, il y a des matrices non symétriques qui ont une unique racine carrée.

La proposition suivante, qui dépend du théorème d'inversion locale par le lemme 19.84, donne plus de régularité à la décomposition polaire donnée dans le théorème 15.38.

PropWCXAooDuFMjn

Proposition 19.86 (Décomposition polaire : cas réel (suite))**.**
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{19.382}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞.

Démonstration. Si M est donnée dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ alors la décomposition polaire[43] $M = QS$ est donnée par $S = \sqrt{MM^t}$ et $Q = MS^{-1}$. Autrement dit, si nous considérons la fonction de décomposition polaire

$$f\colon \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \tag{19.383}$$

alors

$$f^{-1}(M) = \big(M(\sqrt{MM^t})^{-1}, \sqrt{MM^t}\big). \tag{19.384}$$

Nous avons vu dans le lemme 19.84 que la racine carrée était un C^∞-difféomorphisme. Le reste n'étant que des produits de matrices, la régularité est de mise. □

[43] Proposition 15.38.

19.14 Théorème de Von Neumann

Lemme 19.87 ([112]).
Soit G, un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{L}_G = \{m \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } e^{tm} \in G \, \forall t \in \mathbb{R}\}. \tag{19.385}$$

Alors $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Si $m \in \mathcal{L}_G$, alors $\lambda m \in \mathcal{L}_G$ par construction. Le point délicat à prouver est le fait que si $a, b \in \mathcal{L}_G$, alors $a+b \in \mathcal{L}_G$. Soit $a \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$; nous savons qu'il existe une fonction $\alpha_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ telle que

$$e^{ta} = \mathbb{1} + ta + \alpha_a(t) \tag{19.386}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0. \tag{19.387}$$

Si a et b sont dans $\mathcal{L}_G$, alors $e^{ta}e^{tb} \in G$, mais il n'est pas vrai en général que cela soit égal à $e^{t(a+b)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$e^{a/k}e^{b/k} = \left(\mathbb{1} + \frac{a}{k} + \alpha_a(\frac{1}{k})\right)\left(\mathbb{1} + \frac{b}{k} + \alpha_b(\frac{1}{k})\right) = \mathbb{1} + \frac{a+b}{k} + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \tag{19.388}$$

où $\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ est encore une fonction vérifiant $\beta(t)/t \to 0$. Si k est assez grand, nous avons

$$\left\| \frac{a+b}{k} + \beta(\frac{1}{k}) \right\| < 1, \tag{19.389}$$

et nous pouvons profiter du lemme 17.171 pour écrire alors

$$\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k = e^{k \ln\left(\mathbb{1} + \frac{a+b}{k} + \beta(\frac{1}{k})\right)}. \tag{19.390}$$

Ce qui se trouve dans l'exponentielle est

$$k\left[\frac{a+b}{k} + \alpha(\frac{1}{k}) + \sigma\left(\frac{a+b}{k} + \alpha(\frac{1}{k})\right)\right]. \tag{19.391}$$

Les diverses propriétés vues montrent que le tout tend vers $a+b$ lorsque $k \to \infty$. Par conséquent

$$\lim_{k\to\infty}\left(e^{a/k}e^{b/k}\right)^k = e^{a+b}. \tag{19.392}$$

Ce que nous avons prouvé est que pour tout t, $e^{t(a+b)}$ est une limite d'éléments dans G et est donc dans G parce que ce dernier est fermé. □

Comme $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, nous pouvons considérer un supplémentaire M.

LemHOsbREC

Lemme 19.88.
Il n'existe pas de suite (m_k) dans $M \setminus \{0\}$ convergeant vers zéro et telle que $e^{m_k} \in G$ pour tout k.

Démonstration. Supposons que nous ayons $m_k \to 0$ dans $M \setminus \{0\}$ avec $e^{m_k} \in G$. Nous considérons les éléments $\epsilon_k = \frac{m_k}{\|m_k\|}$ qui sont sur la sphère unité de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que cette suite converge, et puisque M est fermé, ce sera vers $\epsilon \in M$ avec $\|\epsilon\| = 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k\to\infty} e^{t\epsilon_k}. \tag{19.393}$$

En vertu de la décomposition d'un réel en partie entière et décimale, pour tout k nous avons $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| \leqslant \frac{1}{2}$ tel que $t/\|m_k\| = \lambda_k + \mu_k$. Avec ça,

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{t}{m_k} m_k\right) = \lim_{k\to\infty} e^{\lambda_k m_k} e^{\mu_k m_k}. \tag{19.394}$$

Pour tout k nous avons $e^{\lambda_k m_k} \in G$. De plus $|\mu_k|$ étant borné et m_k tendant vers zéro nous avons $e^{\mu_k m_k} \to 1$. Au final

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k\to\infty} e^{t\epsilon_k} \in G \tag{19.395}$$

Cela signifie que $\epsilon \in \mathcal{L}_G$, ce qui est impossible parce que nous avions déjà dit que $\epsilon \in M \setminus \{0\}$. □

LemGGTtxdF

Lemme 19.89.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L}_G \times M &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ l, m &\mapsto e^l e^m \end{aligned} \tag{19.396}$$

est un difféomorphisme local entre un voisinage de $(0,0)$ *dans* $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ *et un voisinage de* $\mathbb{1}$ *dans* $\exp\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big)$.

Notons que nous ne disons rien de $e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{R})}$. Nous n'allons pas nous embarquer à discuter si ce serait tout $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$[44] ou bien si ça contiendrait ne fut-ce que G.

Démonstration. Le fait que f prenne ses valeurs dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est simplement dû au fait que les exponentielles sont toujours inversibles. Nous considérons ensuite la différentielle : si $u \in \mathcal{L}_G$ et $v \in M$ nous avons

$$df_{(0,0)}(u,v) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(t(u,v)\big)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[e^{tu}e^{tv}\Big]_{t=0} = u + v. \tag{19.397}$$

L'application df_0 est donc une bijection entre $\mathcal{L}_G \times M$ et $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Le théorème d'inversion locale 19.76 nous assure alors que f est une bijection entre un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathcal{L}_G \times M$ et son image. Mais comme df_0 est une bijection avec $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, l'image en question contient un ouvert autour de $\mathbb{1}$ dans $\exp\big(\mathbb{M}(n,\mathbb{R})\big)$. □

ThoOBriEoe

Théorème 19.90 (Von Neumann[112, 595, 596])**.**
Tout sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est une sous-variété de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit G un tel groupe ; nous devons prouver que c'est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Et si on est pervers, on ne va pas faire localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais à un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie. Nous allons être pervers.

Étant donné que pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned} L_g\colon G &\to G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \tag{19.398}$$

est de classe C^∞ et d'inverse C^∞, il suffit de prouver le résultat pour un voisinage de $\mathbb{1}$.

Supposons d'abord que $\mathcal{L}_G = \{0\}$. Alors 0 est un point isolé de $\ln(G)$; en effet si ce n'était pas le cas nous aurions un élément m_k de $\ln(G)$ dans chaque boule $B(0,r_k)$. Nous aurions alors $m_k = \ln(a_k)$ avec $a_k \in G$ et donc

$$e^{m_k} = a_k \in G. \tag{19.399}$$

De plus m_k appartient forcément à M parce que $\mathcal{L}_G$ est réduit à zéro. Cela nous donnerait une suite $m_k \to 0$ dans M dont l'exponentielle reste dans G. Or cela est interdit par le lemme 19.88. Donc 0 est un point isolé de $\ln(G)$. L'application ln étant continue[45], nous en déduisons que $\mathbb{1}$ est isolé dans G. Par le difféomorphisme L_g, tous les points de G sont isolés ; ce groupe est donc discret et par voie de conséquence, une variété.

Nous supposons maintenant que $\mathcal{L}_G \neq \{0\}$. Nous savons par la proposition 17.170 que

$$\exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \tag{19.400}$$

est une application C^∞ vérifiant $d\exp_0 = \mathrm{Id}$. Nous pouvons donc utiliser le théorème d'inversion locale 19.76 qui nous offre donc l'existence d'un voisinage U de 0 dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ tel que $W = \exp(U)$ soit un ouvert de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et que $\exp\colon U \to W$ soit un difféomorphisme de classe C^∞.

Montrons que quitte à restreindre U (et donc W qui reste par définition l'image de U par exp), nous pouvons avoir $\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) = W \cap G$. D'abord $\exp(\mathcal{L}_G) \subset G$ par construction. Nous avons donc $\exp\big(U \cap \mathcal{L}_G\big) \subset W \cap G$. Pour trouver une restriction de U pour laquelle nous avons l'égalité, nous supposons que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans U,

$$\exp\colon \mathcal{O} \cap \mathcal{L}_G \to \exp(\mathcal{O}) \cap G \tag{19.401}$$

ne soit pas surjective. Cela donnerait un élément de $\mathcal{O} \cap \complement\mathcal{L}_G$ dont l'image par exp n'est pas dans G. Nous construisons ainsi une suite en considérant une boule $B(0,\frac{1}{k})$ incluse à U et $x_k \in B(0,\frac{1}{k}) \cap \complement\mathcal{L}_G$ vérifiant $e^{x_k} \in G$. D'après le choix des boules, nous avons évidemment $x_k \to 0$.

L'élément e^{x_k} est dans $e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{R})}$ et le difféomorphisme du lemme 19.89[46] nous donne $(l_k, m_k) \in \mathcal{L}_G \times M$ tel que $e^{l_k}e^{m_k} = e^{x_k}$. À ce point nous considérons k suffisamment grand pour que e^{x_k} soit dans la partie de l'image de f sur lequel nous avons le difféomorphisme. Plus prosaïquement, nous posons

$$(l_k, m_k) = f^{-1}(e^{x_k}) \tag{19.402}$$

[44] Vu les dimensions y'a tout de même peu de chance.
[45] Par le lemme 17.171.
[46] Il me semble que l'utilisation de ce lemme manque à l'avant-dernière ligne de la preuve chez [112].

et nous profitons de la continuité pour permuter la limite avec f^{-1} :

$$\lim_{k\to\infty}(l_k,m_k)=f^{-1}\big(\lim_{k\to\infty}e^{x_k}\big)=f^{-1}(\mathbb{1})=(0,0). \tag{19.403}$$

En particulier $m_k\to 0$ alors que $e^{m_k}=e^{x_k}e^{-l_k}\in G$. La suite m_k viole le lemme 19.88. Nous pouvons donc restreindre U de telle façon à avoir

$$\exp\big(U\cap\mathcal{L}_G\big)=W\cap G. \tag{19.404}$$

Nous avons donc un ouvert de $\mathcal{L}_G$ (l'ouvert $U\cap\mathcal{L}_G$) qui est difféomorphe avec l'ouvert $W\cap G$ de G. Donc G est une variété et accepte $\mathcal{L}_G$ comme carte locale. □

Remarque 19.91.
En termes savants, nous avons surtout montré que si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors l'exponentielle donne un difféomorphisme local entre $\mathfrak{g}$ et G.

19.15 Recherche d'extrémums

DEFooJMMLooYMZehc

Définition 19.92 ([597]).
*Si $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est une fonction, le point $a\in\mathbb{R}^n$ est un **maximum local** de f si il existe $\delta>0$ tel que pour tout $x\in B(a,\delta)$, $f(x)\leqslant f(a)$.*

*Je vous laisse deviner la définition d'un **minimum local**.*

*Un **extrémum local** est un point qui est soit un minimum soit un maximum local.*

19.15.1 Extrema à une variable

Définition 19.93.
*Soit $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in A$. Le point a est un **maximum local** de f si il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que $f(a)\geqslant f(x)$ pour tout $x\in\mathcal{U}\cap A$. Le point a est un **maximum global** si $f(a)\geqslant g(x)$ pour tout $x\in A$.*

La proposition basique à utiliser lors de la recherche d'extrémums est la suivante :

PROPooNVKXooXtKkuz

Proposition 19.94.
Soit $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathrm{Int}(A)$. Supposons que f est dérivable en a. Si a est un extrémum local[47]*, alors $f'(a)=0$.*

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la fonction $x\mapsto x^3$ en $x=0$: sa dérivée est nulle et pourtant $x=0$ n'est ni un maximum ni un minimum local.

Cette proposition ne sert donc qu'à sélectionner des *candidats* extrémum. Afin de savoir si ces candidats sont des extrémums, il y a la proposition suivante.

PROPooCXHPooSlRsEJ

Proposition 19.95 ([598]).
Soit $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction de classe C^k au voisinage d'un point $a\in\mathrm{Int}\,I$. Supposons que

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0, \tag{19.405}$$

et que

$$f^{(k)}(a)\neq 0. \tag{19.406}$$

Dans ce cas,

ITEMooFJNAooCKGQVZ

(1) Si k est pair, alors a est un point d'extrémum local de f. Si $f^{(k)}(a)>0$ alors c'est un minimum local et si $f^{(k)}(a)<0$, c'est un maximum local.

ITEMooKNIOooOUXDJM

(2) Si k est impair, alors a n'est pas un extrémum local de f.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Supposons que $f^{(k)}(a)<0$. Alors, parce que $f^{(k)}$ est continue, il existe un $\delta>0$ tel que $f^{(k)}(x)<0$ pour tout $x\in B(a,\delta)$. La Taylor avec reste de Lagrange (proposition 14.505), il existe $x\in\,]a,x,[$ tel que

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{f^{(k)}(x)}{!k}(x-a)^k. \tag{19.407}$$

[47] Définition 19.92.

Après avoir effacé tous les termes nuls ($f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 1, \dots, k-1$) il nous reste

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-a)^k. \tag{19.408}$$

Étant donné que k est pair, nous avons $(x-a)^k > 0$ et vu que $f^{(k)}(x) < 0$ nous avons $f(x) < f(a)$ et donc a est un minimum local (sur $B(a,\delta)$).

(2) **Pour (2)** Tout la même chose, mais cette fois le signe de $(x-a)^k$ change suivant que $x > a$ ou $x < a$. Il y aura donc des $x \in B(a,\delta)$ avec $f(x) > f(a)$ et d'autres avec $f(x) < f(a)$.

□

Note : jusqu'à présent nous n'avons rien dit des extrémums *globaux* de f. Il n'y a pas grand chose à en dire. Si un point d'extrémum global est situé dans l'intérieur du domaine de f, alors il sera extrémum local (a fortiori). Ou alors, le maximum global peut être sur le bord du domaine. C'est ce qui arrive à des fonctions strictement croissantes sur un domaine compact.

Une seule certitude : si une fonction est continue sur un compact, elle possède une minimum et un maximum global par le théorème 11.56.

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si $f'(a) > 0$, alors la tangente au graphe de f au point $\big(a, f(a)\big)$ sera une droite croissante (coefficient directeur positif). Cela ne veut pas spécialement dire que la fonction elle-même sera croissante, mais en tout cas, cela est un bon indice.

Exemple 19.96.
Si $f(x) = x^2$, il est connu que $f'(x) = 2x$. Nous avons donc que f' est positive si $x \geqslant 0$ et f' est négative si $x < 0$. Cela correspond bien au fait que x^2 est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, \infty[$. △

Sur la figure 19.4, nous avons dessiné la fonction $f(x) = x\cos(x)$ et sa dérivée. Nous voyons que partout où la dérivée est négative, la fonction est décroissante tandis que, inversement, partout où la dérivée est positive, la fonction est croissante.

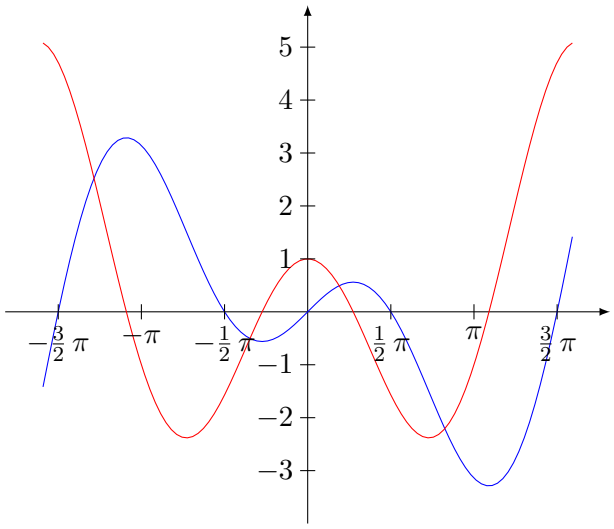


FIGURE 19.4 : La fonction $f(x) = x\cos(x)$ en bleu et sa dérivée en rouge. LabelFigWIRAooTCcpOV

Les extrémums de la fonction f sont donc placés là où f' change de signe. En effet si $f'(x) < 0$ pour $x < a$ et $f'(x) > 0$ pour $x > a$, la fonction est décroissante jusqu'à a et est ensuite croissante. Cela signifie que la fonction connait un creux en a. Le point a est donc un minimum de la fonction.

Attention cependant. Le fait que $f'(a) = 0$ ne signifie pas automatiquement que f a un maximum ou un minimum en a. Nous avons par exemple tracé sur la figure 19.5 les fonctions x^3 et sa dérivée. Il est à noter que, conformément à ce que l'on pense, certes la dérivée s'annule en $x = 0$, mais elle ne change pas de signe.

19.15.2 Extrema libre

DEFooYJLZooLkEAYf

Définition 19.97.
*Un point a à l'intérieur du domaine d'une fonction $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un **point critique** de f lorsque $df(a) = 0$.*

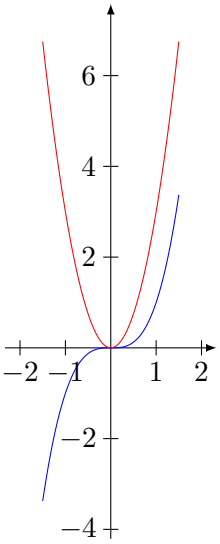


FIGURE 19.5 : La dérivée de x^3 s'annule en $x = 0$, mais ce n'est ni un minimum ni un maximum. LabelFigVBOIbcRHhKOH

Ces points sont analogues aux points où la dérivée d'une fonction sur $\mathbb{R}$ s'annule. Les points critiques de f sont donc les candidats à être des points d'extrémum.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, la proposition 14.386 nous permet de voir $(d^2 f)_a$ comme étant la matrice

$$d^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2}(a) & \frac{d^2 f}{dx\,dy}(a) \\ \frac{d^2 f}{dy\,dx}(a) & \frac{d^2 f}{dy^2}(a) \end{pmatrix}. \tag{19.409}$$

Dans le cas d'une fonction C^2, cette matrice est symétrique.

PropUQRooPgJsuz

Proposition 19.98 ([599]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Si a est un extrémum local de f, alors a est un point critique de f.

Démonstration. Nous supposons que a est un maximum local (ce sera la même chose si a est un minimum). Soit $r > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in B(a, r)$ (et tel que cette boule reste dans Ω). Soit $u \in \mathbb{R}^n$ assez petit pour que $a \pm u \in B(a, r)$ de sorte que la définition suivante ait un sens :

$$\begin{aligned} g\colon [-1, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + tu) \end{aligned} \tag{19.410}$$

Cette fonction est différentiable en $t = 0$ (composée de fonctions différentiables, théorème 12.335) et a un maximum local en $t = 0$. Donc $g'(0) = 0$ par la proposition 19.94. Donc

$$0 = \frac{d}{dt}\Big[f(a + tu)\Big]_{t=0} = df_a(u). \tag{19.411}$$

□

19.15.3 Extremums et hessienne

PropoExtreRn

Proposition 19.99 ([1, 600, 601]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable ainsi que $a \in \Omega$.

ITEMooCBMYooQQMqQL

(1) Si a est un point critique de f et si il existe r tel que $(d^2 f_x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in B(a, r)$ alors f possède un minimum local en a.

ITEMooCVFVooWltGqI

(2) Si a est un point critique[48] de f, et si $d^2 f_a$ est strictement définie positive[49], alors a est un minimum local strict de f,

ItemPropoExtreRn

(3) Si a est un minimum local, alors $(d^2 f)_a$ est semi-définie positive.

[48] Définition 19.97.

[49] La fonction f est de classe C^2, donc les dérivées croisées sont égales et $d^2 f$ est symétrique. La définition 10.231 s'applique donc.

Démonstration. Nous subdivisons la preuve.

(1) **(1)**
Soit h tel que $a+h\in B(a,r)$. Nous allons montrer que $f(a)\leqslant f(a+h)$; cela montrera que $x=a$ est un minimum local. Pour cela nous utilisons un développement de Taylor[50] : il existe $c\in]a,a+h[$ tel que

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\frac{1}{2}(d^2f)_c(h,h)\geqslant f(a) \tag{19.412}$$

parce que, par hypothèse, $(d^2f)_c$ est définie positive, et parce que $df_a=0$.

(2) **(2)**
La forme bilinéaire d^2f_a est strictement définie positive, donc il existe $\alpha>0$ tel que

$$d^2f_a(h,h)>\alpha\|h\|^2 \tag{19.413}$$

pour tout h. Nous utilisons encore Taylor : il existe une fonction ϵ telle que $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$ et

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h)+\|h\|^2\epsilon(h). \tag{19.414}$$

En tenant compte du fait que $df_a=0$,

$$f(a+h)>f(a)+\|h\|^2\big(\frac{1}{2}\alpha+\epsilon(h)\big). \tag{19.415}$$

La limite de ϵ nous dit qu'il existe $r>0$ tel que $\|\epsilon(h)\|<\frac{1}{2}\alpha$ pour tout $h\in B(0,r)$. Pour ces valeurs de h nous avons

$$f(a+h)>f(a). \tag{19.416}$$

Donc a est un minimum local strict de f.

(3) **(3)** Si a est un minimum local, nous savons déjà $df_a=0$ par la proposition 19.98. Nous écrivons le développement de Taylor de f à l'ordre 2 de la proposition 14.493 :

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h)+\|h\|^2\alpha(\|h\|). \tag{19.417}$$

En prenant h assez petit pour que $a+h$ ne sorte pas de la boule dans laquelle a est un minimum, nous avons $f(a+h)-f(a)>0$. Donc

$$\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h)+\|h\|^2\alpha(\|h\|)>0 \tag{19.418}$$

Nous divisons cela par $\|h\|^2$ et notons $e_h=h/\|h\|$:

$$\frac{1}{2}(d^2f)_a(e_h,e_h)+\alpha(\|h\|)>0. \tag{19.419}$$

À la limite $h\to 0$, le premier terme est constant tandis que le deuxième tend vers zéro. À la limite,

$$(d^2f)_a(e_h,e_h)\geqslant 0. \tag{19.420}$$

La caractérisation du lemme 10.235(2) nous dit alors que $(d^2f)_a$ est semi-définie positive.

□

La partie (3) est tout à fait comparable au fait bien connu que, pour une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si le point a est minimum local, alors $f'(a)=0$ et $f''(a)>0$.

Notons que le point (3) ne parle pas de minimum strict, et donc pas de matrice *strictement* définie positive.

Exemple 19.100 (Proposition 19.99(2) sans point critique)**.**
L'hypothèse de point critique pour l'utilisation de la stricte définition positive de d^2f_a est nécessaire. Soit en effet la fonction

$$f(x)=x^2+x. \tag{19.421}$$

Elle vérifie $f''(0)=2$, de telle sorte que sa différentielle seconde en zéro soit strictement définie positive. Le point $x=0$ n'est cependant même pas un minimum local. Entre autres parce que $f'(0)=1\neq 0$. △

[50] Proposition 14.496.

La méthode pour chercher les extrémums de f est donc de suivre les points suivants :

(1) Trouver les candidats extrémums en résolvant $\nabla f = (0,0)$,

(2) écrire $d^2f(a)$ pour chacun des candidats

(3) calculer les valeurs propres de $d^2f(a)$, déterminer si la matrice est définie positive ou négative,

(4) conclure.

Une conséquence de la proposition 10.234(3)[51] est que si $\det M < 0$, alors le point a n'est pas un extrémum dans le cas où $M = d^2f(a)$ par le point (3) de la proposition 19.99.

Exemple 19.101.
Soit la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. C'est une fonction différentiable sans problème. D'abord sa différentielle est

$$df = \big(4x^3 - 4y; 4y^3 - 4x\big), \tag{19.422}$$

et la matrice des dérivées secondes est

$$M = d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}. \tag{19.423}$$

Nous avons $df = 0$ pour les trois points $(0,0)$, $(1,1)$ et $(1,-1)$.

Pour le point $(0,0)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{19.424}$$

dont les valeurs propres sont 4 et -4. Elle n'est donc ni définie ni semi-définie positive ou négative. La proposition 19.99(2) conclut donc $(0,0)$ n'est pas un extrémum local.

Au contraire pour les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \tag{19.425}$$

dont les valeurs propres sont 16 et 8. La matrice d^2f y est donc définie positive. Ces deux points sont donc extrémums locaux. △

19.15.4 Un peu de recettes de cuisine

(1) Rechercher les points critiques, càd les (x,y) tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

En effet, si (x_0,y_0) est un extrémum local de f, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

(2) Déterminer la nature des points critiques : « test » des dérivées secondes :

$$\text{On pose } H(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2$$

(2a) Si $H(x_0,y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0 \implies (x_0,y_0)$ est un minimum local de f.

(2b) Si $H(x_0,y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0 \implies (x_0,y_0)$ est un maximum local de f.

(2c) Si $H(x_0,y_0) < 0 \implies f$ a un point de selle en (x_0,y_0).

(2d) Si $H(x_0,y_0) = 0 \implies$, on ne peut rien conclure.

[51] La matrice $d^2f(a)$ est toujours symétrique quand f est de classe C^2.

19.15.5 Extrema liés

Soit f, une fonction sur $\mathbb{R}^n$, et $M \subset \mathbb{R}^n$ une variété de dimension m. Nous voulons savoir quelles sont les plus grandes et plus petites valeurs atteintes par f sur M.

Pour ce faire, nous avons un théorème qui permet de trouver des extrémums *locaux* de f sur la variété. Pour rappel, $a \in M$ est une **extrémum local de f relativement** à l'ensemble M si il existe une boule $B(a,\epsilon)$ telle que $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in B(a,\epsilon) \cap M$.

ThoRGJosS

Théorème 19.102 (Extremum lié [576]).
Soit A, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

(1) une fonction (celle à minimiser) $f \in C^1(A,\mathbb{R})$,

(2) des fonctions (les contraintes) $G_1,\dots,G_r \in C^1(A,\mathbb{R})$,

(3) $M = \{x \in A \text{ tel que } G_i(x) = 0\, \forall i\}$,

(4) un extrémum local $a \in M$ de f relativement à M.

Supposons que les gradients $\nabla G_1(a)$, …,$\nabla G_r(a)$ soient linéairement indépendants. Alors $a = (x_1,\dots,x_n)$ est une solution de $\nabla L(a) = 0$ où

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_r) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i G_i(x_1,\dots,x_n). \tag{19.426}$$

Autrement dit, si a est un extrémum lié, alors $\nabla f(a)$ est une combinaisons des $\nabla G_i(a)$, ou encore il existe des λ_i tels que

EqRDsSXyZ

$$df(a) = \sum_i \lambda_i dG_i(a). \tag{19.427}$$

La fonction L est le **lagrangien** du problème et les variables λ_i sont les **multiplicateurs de Lagrange**.

Démonstration. Si $r = n$ alors les vecteurs linéairement indépendantes $\nabla G_i(a)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ et donc évidemment les λ_i existent. Nous supposons donc maintenant que $r < n$. Nous notons $(z_i)_{i=1\dots n}$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$.

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial z_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial z_n}(a) \end{pmatrix} \tag{19.428}$$

est de rang r parce que les lignes sont par hypothèses linéairement indépendantes. Nous nommons $(y_i)_{i=1,\dots,r}$ un choix de r parmi les (z_i) tels que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{19.429}$$

Nous identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ dans lequel $\mathbb{R}^r$ est la partie générée par les $(y_i)_{i=1,\dots,r}$. Les coordonnées sur $\mathbb{R}^s$ seront nommées $(x_j)_{j=1,\dots,s}$, de telle sorte que les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ seront $x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_r$. Dans ces coordonnées, nous nommons $a = (\alpha,\beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^s$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$.

Si nous notons $G = (G_1,\dots,G_r)$, le théorème de la fonction implicite (théorème 19.77) nous dit qu'il existe un voisinage U' de $\alpha \in \mathbb{R}^n$, un voisinage V' de $\beta \in \mathbb{R}^r$ et une fonction $\varphi\colon U' \to V'$ de classe C^1 telle que si $(x,y) \in U' \times V'$, alors

$$G(x,y) = 0 \tag{19.430}$$

si et seulement si $y = \varphi(x)$. Nous posons maintenant

$$\psi(x) = (x,\varphi(x)) \tag{19.431a}$$

$$h(x) = f\big(\psi(x)\big). \tag{19.431b}$$

Nous avons $\psi(\alpha) = a$ et $\psi(x) \in M$ pour tout $x \in U'$. La fonction h a donc un extrémum local en α et donc les dérivées partielles de h y sont nulles. Cela signifie que

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \tag{19.432}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial y_k}(a)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha)=0 \tag{19.433}$$

pour tout $i=1,\dots,s$. D'autre part pour tout k, la fonction $l_k(x)=G_k\big(x,\varphi(x)\big)$ est constante et vaut zéro ; ses dérivées partielles sont donc nulles :

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}(\alpha)=\frac{\partial G_k}{\partial x_i}(\alpha)+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial G_k}{\partial y_k}(a)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha)=0 \tag{19.434}$$

pour tout $i=1,\dots,s$ et $k=1,\dots,r$.

Les s premières colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_s} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial x_s} & \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \tag{19.435}$$

s'expriment en termes des r dernières. La matrice est donc au maximum de rang r. Notons que la première ligne est ∇f et les r suivantes sont les ∇G_i. Vu que ces lignes sont des vecteurs liés, il existe $\mu_0,\dots,\mu_r$ tels que

$$\mu_0\nabla f+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\nabla G_i=0. \tag{19.436}$$

Par hypothèse les ∇G_i sont linéairement indépendants, ce qui nous dit que $\mu_0\neq 0$. Donc nous avons ce qu'il nous faut :

$$\nabla f(a)=\sum_i\frac{\mu_i}{\mu_0}\nabla G_i(a). \tag{19.437}$$

Notons qu'au vu de l'expression (19.427), le fait que les formes $\{dG_i(a)\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ forment une partie libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$ implique que les λ_i sont uniques. □

La proposition suivante est la même que 19.102.

PropfPPUxh

Proposition 19.103.
Soit U, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et des fonctions de classe C^1 $f,g_1,\dots,g_r\colon U\to\mathbb{R}$. Nous considérons

$$\Gamma=\{x\in U \text{ tel que } g_1(x)=\dots=g_r(x)=0\}. \tag{19.438}$$

Soit a un extrémum de $f|_\Gamma$. Supposons que les formes $dg_1,\dots,dg_r$ soient linéairement indépendantes en a. Alors il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$df_a=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(dg_i)_a. \tag{19.439}$$

En pratique les candidats extrémums locaux sont tous les points où les gradients ne sont pas linéairement indépendants, plus tous les points donnés par l'équation $\nabla L=0$. Parmi ces candidats, il faut trouver lesquels sont maximums ou minima, locaux ou globaux.

L'existence d'extrémums locaux se prouve généralement en invoquant de la compacité, et en invoquant le lemme suivant qui permet de réduire le problème à un compact.

LemmeMinSCimpliqueS

Lemme 19.104.
Soit S, une partie de $\mathbb{R}^n$ et C, un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $a\in\operatorname{Int}S$ est un minimum local relatif à $S\cap C$, alors il est un minimum local par rapport à S.

Démonstration. Vu que a est un minimum local relatif à $S\cap C$, il existe un $\epsilon_1>0$ tel que pour tout $x\in B(a,\epsilon_1)\cap S\cap C$, nous avons $f(x)\geqslant f(a)$.

Mais étant donné que C est ouvert, et que $a\in C$, il existe un ϵ_2 tel que $B(a,\epsilon_2)\subset C$. En prenant $\epsilon=\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$, nous trouvons que $f(x)\geqslant f(a)$ pour tout $x\in B(a,\epsilon)\cap(S\cap C)=B(a,\epsilon)\cap S$. □

19.16 Fonctions convexes

SECooVZDaWvQXjRXQz

Définition 19.105 ([602]).
*Une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite **convexe** lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I et tout λ dans $[0,1]$ nous avons*

EQooYNAPooFePQZv
$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{19.440}$$

Si pour tout $\lambda \in]0,1[$ et pour tout $x \neq y$ dans I nous avons

EQooEGBSooCevoPB
$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{19.441}$$

*alors nous disons que la fonction f est **strictement convexe** sur I.*

*Une fonction est **concave** si son opposée est convexe.*

19.106 ([602]).
Les différents résultats pour les fonctions convexes s'adaptent généralement sans mal aux fonctions strictement convexes. Une nuance cependant : de même que les fonctions dérivables convexes sont celles qui ont une dérivée croissante, les fonctions dérivables strictement convexes sont celles qui ont une dérivée strictement croissante (proposition 19.112). En revanche, il ne faudrait pas croire que la dérivée seconde d'une fonction dérivable strictement convexe est nécessairement une fonction à valeurs strictement positives (voir théorème 19.113) : la dérivée d'une fonction strictement croissante peut s'annuler occasionnellement, ou plus exactement peut s'annuler sur un ensemble de points d'intérieur vide. Penser à $x \mapsto x^4$ pour un exemple de fonction strictement convexe dont la dérivée seconde s'annule.

19.107.
Demander un $\lambda \in [0,1]$ est équivalent à demande des $\alpha, \beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. En effet, si $\alpha + \beta = 1$, alors il suffit de se dire que α est le λ et que $\beta = 1 - \alpha$.

LEMooXUDSooBUMnaZ

Lemme 19.108.
soit une fonction strictement convexe f. Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Nous avons

EQooDKKUooSHLfwv
$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \tag{19.442}$$

si et seulement si $u = v$.

Démonstration. Tant que $u \neq v$, la définition (19.441) est une inégalité stricte. Donc si (19.442) est valide, alors $u = v$.

Dans le sens inverse, si $u = v$, alors $\alpha u + \beta v = u$, et $\alpha f(u) + \beta f(v) = f(u)$. □

19.16.1 Inégalité des pentes

Dans l'étude des fonctions convexes nous allons souvent utiliser la fonction **taux d'accroissement** qui est, pour α dans le domaine de convexité de f définie par

EaRYBazWd
$$\begin{aligned} \tau_\alpha \colon I \setminus \{\alpha\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}. \end{aligned} \tag{19.443}$$

PropMDMGjGO

Proposition 19.109 (Inégalité des pentes[603]).
Soit f une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tout $a < b < c$ dans I nous avons[52]

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}. \tag{19.444}$$

En d'autres termes,

$$\tau_a(b) \leqslant \tau_a(c) \leqslant \tau_b(c), \tag{19.445}$$

c'est-à-dire que τ est croissante en ses deux arguments.

Démonstration. D'abord les inégalités $a < b < c$ impliquent $0 < b - a < c - a$ et donc

$$\lambda = \frac{b-a}{c-a} < 1. \tag{19.446}$$

[52] Les inégalités sont strictes si la fonction f est strictement convexe.

L'astuce est de remarquer que $(1-\lambda)a+\lambda c=b$. Donc λ a toutes les bonnes propriétés pour être utilisé dans la définition de la convexité :

$$f\big((1-\lambda)a+\lambda c\big)\leqslant\lambda f(c)+(1-\lambda)f(a),\tag{19.447}$$

c'est-à-dire

$$f(b)-f(a)\leqslant\lambda\big(f(c)-f(a)\big)\tag{19.448}$$

ou encore, en remplaçant λ par sa valeur :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.\tag{19.449}$$

Cela fait déjà une des inégalités à savoir.

D'autre part en partant de $-a>-b<c$ nous posons

$$0<\lambda=\frac{c-b}{c-a}.\tag{19.450}$$

Nous avons à nouveau $b=(1-\lambda)c+\lambda a$ et nous pouvons obtenir la seconde inégalité

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.\tag{19.451}$$

□

Géométriquement, l'inégalité des pentes se comprend facilement : le coefficient angulaire de la corde du graphe augmente. Donc si $x<y<z$, le coefficient moyen entre x et y est plus petit que celui entre x et z qui est plus petit que celui entre y et z.

Donc si le coefficient angulaire moyen entre a et $b+u$ vaut celui entre a et b, ce coefficient ne peut qu'être constant entra a et b : sinon il serait plus grand entre b et $b+u$ et la moyenne sur $a\to b+u$ serait plus grande que sa moyenne sur $a\to b$. Mais avoir un coefficient angulaire constant signifie être une droite.

En résumé, si une fonction est convexe et non strictement convexe, alors son graphe est une droite. C'est en gros cela que la proposition 19.117 clarifiera.

19.16.2 Convexité et régularité

LemKLTsHIQ

Lemme 19.110 ([602]).
Une fonction convexe sur un ouvert de $\mathbb{R}$

(1) y admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point,

(2) y est continue.

Démonstration. Si A est l'ouvert sur lequel la fonction f est convexe, pour chaque point x de A, il existe une boule $B(x,r)\subset A$. Pour $0<r'<r$ nous avons aussi $\overline{B(0,r')}\subset A$. Bref, nous pouvons supposer que f est définie et convexe sur un intervalle $I=[a,b]$.

Soit $\alpha\in I$. Nous allons prouver que f est continue en α. Nous considérons τ_α le taux d'accroissement défini par (19.443) ; c'est une fonction croissante comme précisé dans l'inégalité des trois pentes 19.109 et de plus $\tau_\alpha(x)$ est bornée supérieurement par $\tau_\alpha(b)$ pour $x<\alpha$ et inférieurement par $\tau_\alpha(a)$ pour $x>\alpha$. Les limites existent donc et sont finies par la proposition 14.57. Autrement dit les limites

$$\lim_{x\to\alpha+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^+}\tau_\alpha(x)=\inf_{t>\alpha}\tau_\alpha(t)\tag{19.452a}$$

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^-}\tau_\alpha(x)=\sup_{t<\alpha}\tau_\alpha(t).\tag{19.452b}$$

existent et sont finies, c'est-à-dire que la fonction f admet une dérivée à gauche et à droite.

Pour tout x nous avons les inégalités

$$\tau_\alpha(a)\leqslant\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leqslant\tau_\alpha(b).\tag{19.453}$$

En posant $k=\max\{\tau_\alpha(a),\tau_\alpha(b)\}$ nous avons

$$\big|f(x)-f(\alpha)\big|\leqslant k|x-\alpha|.\tag{19.454}$$

La fonction est donc lipschitzienne et par conséquent continue par la proposition 14.355. □

Remarque 19.111.
Les dérivées à gauche et à droite ne sont à priori pas égales. Penser par exemple à une fonction affine par morceaux dont les pentes augmentent à chaque morceau.

19.16.3 Dérivées d'une fonction convexe

PropYKwTDPX

Proposition 19.112 ([604, 605, 1]).
Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

ITEMooUTSAooJvhZNm

(1) est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

ITEMooLLSIooFwkxtV

(2) est strictement convexe si et seulement si sa dérivée est strictement croissante sur I

Démonstration. Pour la preuve de (1) et (2), nous allons démontrer les énoncés « non stricts » et indiquer ce qu'il faut changer pour obtenir les énoncés « stricts ».

(1) **Sens direct** Nous supposons que f est convexe. Soient $a < b$ dans I et $x \in]a, b[$. D'après l'inégalité des pentes 19.109,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{19.455}$$

EqATDLooIcodDJ

En faisant la limite $x \to a$ nous avons

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{19.456}$$

et la limite $x \to b$ donne

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b). \tag{19.457}$$

Ici les inégalités sont à priori non-strictes, même si f est strictement convexe : même avec des inégalités strictes dans (19.455), le passage à la limite rend l'inégalité non stricte. Quoi qu'il en soit nous avons

$$f'(a) \leqslant f'(b). \tag{19.458}$$

EqQGVMooBpuvNx

(2) **Sens direct : strict** Nous savons déjà que f' est croissante. Si (19.458) était une égalité, alors f' serait constante sur $]a, b[$ parce qu'en prenant c entre a et b nous aurions $f'(a) \leqslant f'(c) \leqslant f'(b)$ avec $f'(a) = f'(b)$. Donc $f'(a) = f'(c)$. Avoir f' constante sur un intervalle est contraire à la stricte convexité.

(3) **Sens réciproque**

Nous supposons que f' est croissante et nous considérons $a < b$ dans I ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. Nous posons $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, et nous savons que $a \leqslant x \leqslant b$. Le théorème des accroissements finis 14.217 donne $c_1 \in]a, x[$ et $c_2 \in]x, b[$ tels que

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{19.459}$$

et

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{19.460}$$

Et en plus $c_1 < c_2$. Vu que f' est croissante nous avons $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ et donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{19.461}$$

EqSAOCooWAwClQ

En remplaçant x par sa valeur en termes de λ, a et b nous avons $x - a = (1 - \lambda)(b - a)$ et $b - x = \lambda(b - a)$, et l'inégalité (19.461) nous donne

$$f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b). \tag{19.462}$$

(4) **Sens réciproque : strict** Si f' est strictement croissante, nous avons $f'(c_1) < f'(c_2)$ et les inégalité suivantes sont strictes, ce qui donne

$$f(x) < \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b). \tag{19.463}$$

□

ThoGXjKeYb

Théorème 19.113 ([604]).
Soit une fonction f de classe C^2.

ITEMooIUTQooTkRMoyBP

(1) Est convexe si et seulement si f'' est positive.

ITEMooXUOMooYIoOtv

(2) Si f'' est strictement positive, elle est strictement convexe.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** La fonction est C^2, donc f'' est positive si et seulement si f' est croissante (proposition 14.213) alors que la proposition 19.112 nous jure que f sera convexe si et seulement si f' est croissante.

(2) **Pour (2)** Si f'' est strictement positive, f' sera strictement croissante et donc f strictement convexe (proposition 19.112).

□

REMooVRPQooIybxmp

Remarque 19.114.
Une fonction peut être strictement convexe sans que sa dérivée seconde ne soit toujours strictement positive. En exemple : $x \mapsto x^4$ est strictement convexe alors que sa dérivée seconde s'annule en zéro.

ExPDRooZCtkOz

Exemple 19.115.
Quelques exemples utilisant le théorème 19.113

(1) La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe parce que sa dérivée seconde est la constante (positive) 2.

(2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (sa dérivée seconde est $2x^{-3}$).

ITEMooRXSBooDBerbx

(3) La fonction exponentielle est strictement convexe par le théorème 19.113.

(4) La fonction ln est concave parce que la dérivée seconde de $-\ln$ est $\frac{1}{x^2}$ qui est strictement positif.

△

Nous en démontrons une en détail ; elle sera utile en analyse fonctionnelle, lors de l'étude des espaces L^p. Voir par exemple le théorème de la projection 29.156.

LEMooSXTXooZOmtKq

Lemme 19.116.
Soient $p > 1$ et la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \tag{19.464}$$

est strictement convexe.

Démonstration. La proposition 16.297 nous permet de dire que la fonction f est de classe C^∞ et que la dérivée seconde est donnée par

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2}. \tag{19.465}$$

Cela est strictement positif pour tous les x considérés, le théorème 19.113 conclut. □

19.16.4 Graphe d'une fonction convexe

L'idée principale du graphe d'une fonction convexe est qu'il est toujours au dessus du graphe de ses tangentes (lorsqu'elles existent). Lorsqu'elles n'existent pas, le lemme 19.110 donne des coefficients directeurs de droites qui vont rester en dessous du graphe de la fonction.

PROPooOCOEooEGybmS

Proposition 19.117 ([606]).
Une fonction convexe est strictement convexe si et seulement si il n'existe aucun intervalle de longueur non nulle sur lequel elle coïncide avec une fonction affine.

Démonstration. Si sur l'intervalle (non réduit à un point) $[x, y]$, la fonction convexe f coïncide avec une fonction affine, alors $f(t) = at + b$ et pour $\lambda \in]0, 1[$ nous avons

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = a\lambda x + a(1-\lambda)y + b = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{19.466}$$

où nous avons remplacé b par $\lambda b + (1-\lambda)b$. Par conséquent la fonction n'est pas strictement convexe.

Nous supposons maintenant que la fonction convexe f n'est pas strictement convexe sur l'intervalle I. Il existe $x \neq y \in I$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{19.467}$$

Nous posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ et $u \in]x, z[$ pour écrire des inégalités des pentes entre $x < u < z < y$. Plus précisément si nous notons $a \to b$ la pente de a à b, c'est-à-dire $a \to b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors les inégalités des pentes pour $x < u < z$ puis $u < z < y$ donnent

$$x \to z \leqslant u \to z \leqslant z \to y. \tag{19.468}$$

EqooBMEEooMpoEzd

Voyons maintenant qu'en réalité $z \to y = x \to z$. En effet en replaçant

$$f(y) = \frac{f(z) - \lambda f(x)}{1-\lambda} \tag{19.469}$$

et

$$y = \frac{\lambda x}{1-\lambda} \tag{19.470}$$

dans l'expression $z \to y = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ nous obtenons

$$z \to y = \frac{f(y) - f(z)}{y-z} = \frac{f(z) - f(x)}{z-x} = x \to z. \tag{19.471}$$

Les inégalités (19.468) sont donc des égalités :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} = \frac{f(z) - f(u)}{z-u} = \frac{f(y) - f(z)}{y-z}. \tag{19.472}$$

Nous avons donc montré que le nombre $a = \frac{f(z)-f(u)}{z-u}$ ne dépend pas de u. Nous avons alors

$$f(z) - f(u) = a(z-u) \tag{19.473}$$

ou encore :

$$f(u) = f(z) - a(z-u), \tag{19.474}$$

ce qui signifie que sur $]x, z[$, la fonction f est affine. □

PROPooQPOSooDZlUAJ

Proposition 19.118.
Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son graphe est au dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Sens direct** Soient $x, y \in I$. Nous voulons :

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x). \tag{19.475}$$

Étant donné que nous aurons besoin, dans le quotient différentiel de quelque chose comme $f(x+t)-f(x)$ nous écrivons la définition (19.440) de la convexité en inversant les rôles de x et y et en manipulant un peu :

$$f\big(ty + (1-t)x\big) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x) \tag{19.476a}$$
$$f\big(x + t(y-x)\big) \leqslant tf(y) + (1-t)f(x) \tag{19.476b}$$
$$f\big(x + t(y-x)\big) - f(x) \leqslant tf(y) - tf(x) \tag{19.476c}$$

Nous divisons par t :

$$\frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} \leqslant f(y) - f(x). \tag{19.477}$$

Le passage à la limite $t \to 0$ donne

$$(y-x)f'(x) \leqslant f(y) - f(x), \tag{19.478}$$

ce qu'il fallait.

(2) **Sens inverse** Pour tout $x, y \in I$ nous supposons avoir

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x). \tag{19.479}$$

EQooEXXIooHXJnER

Si nous supposons $x \neq y$ et si nous posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ nous voulons prouver que

$$f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{19.480}$$

Pour cela nous écrivons l'inégalité (19.479) avec les couples (x,z) et (y,z) :

$$f(x) \geqslant f(z) + f'(z)'(x-z) \tag{19.481a}$$
$$f(y) \geqslant f(z) + f'(z)'(y-z) \tag{19.481b}$$

En multipliant la première par λ et la seconde par $(1-\lambda)$ et en sommant,

$$\begin{aligned}\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) &\geqslant \lambda f(z) + \lambda f'(z)(x-z) + (1-\lambda)f(z) + (1-\lambda)f'(z)(y-z) &\text{(19.482a)}\\ &= f(z) + f'(z)\big(\lambda(x-z) + (1-\lambda)(y-z)\big) &\text{(19.482b)}\\ &= f(z). &\text{(19.482c)}\end{aligned}$$

□

PropNIBooSbXIKO

Proposition 19.119 ([1]).
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in \mathbb{R}$. Il existe une constante $c_a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout x nous ayons

$$f(x) - f(a) \geqslant c_a(x-a). \tag{19.483}$$

EqSKJooSeAekM

Autrement dit, le graphe de la fonction f est toujours au dessus de la droite d'équation

$$y = f(a) + c_a(x-a). \tag{19.484}$$

Démonstration. Les dérivées à gauche et à droite de f données par le lemme 19.110 sont les candidats tout désignés pour être coefficient directeur de la droite que l'on cherche. Nous allons prouver qu'en posant

$$c_a = \inf_{t>a} \tau_a(t), \tag{19.485}$$

la droite $y = f(a) + c_a(x-a)$ répond à la question[53].

Nous devons prouver que le nombre $\Delta_x = f(x) - \big(f(a) + c_a(x-a)\big)$ est positif pour tout x.

(1) **Si $x > a$**

Nous divisons par $x-a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est positif :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c_a &\text{(19.486a)}\\ &= \tau_a(x) - \inf_{t>a}\tau_a(t) &\text{(19.486b)}\\ &\geqslant 0 &\text{(19.486c)}\end{aligned}$$

parce que $t \to \tau_a(t)$ est croissante et que $x > a$.

(2) **Si $x < a$**

Nous divisons par $x-a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est négatif :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c_a &\text{(19.487a)}\\ &= \tau_a(x) - \inf_{t>a}\tau_a(t) &\text{(19.487b)}\\ &\leqslant 0 &\text{(19.487c)}\end{aligned}$$

parce que $t \to \tau_a(t)$ est croissante et que $x < a$.

□

PropPEJCgCH

Proposition 19.120 ([1]).
Si g est une fonction convexe, il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n x + b_n). \tag{19.488}$$

[53] En prenant l'autre, $c'_a = \sup_{t<a}\tau_a(t)$, ça fonctionne aussi. En pensant à une fonction affine par morceaux, on remarque qu'en choisissant un nombre entre les deux, nous avons plus facilement une inégalité stricte dans (19.483).

Démonstration. Pour $u \in \mathbb{R}$ nous considérons $a(u)$ et $b(u)$ tels que la droite $y(x) = a(u)x + b(u)$ vérifie $y(u) = g(u)$ et $y(x) \leqslant g(x)$ pour tout x. Cela est possible par la proposition 19.119. Il s'agit d'une droite coupant le graphe de g en $x = u$ et restant en dessous. Nous considérons alors (u_n) une suite quelconque dense dans $\mathbb{R}$ (disons les rationnels pour fixer les idées) et nous posons

$$\begin{cases} a_n = a(u_n) & (19.489a) \\ b_n = b(u_n). & (19.489b) \end{cases}$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $a_n x + b_n \leqslant g(x)$ pour tout n et $g(q)$ est le supremum qui est atteint pour le n tel que $u_n = q$. Si maintenant x n'est pas dans $\mathbb{Q}$ il faut travailler plus.

Nous prenons $(\tilde{q}_n)$, une sous-suite de (q_n) convergeant vers x et N suffisamment grand pour que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|\tilde{q}_n - x| \leqslant \epsilon$ et $|g(\tilde{q}_n) - g(x)| \leqslant \epsilon$; cela est possible grâce à la continuité de g (lemme 19.110). Ensuite les sous-suites $(\tilde{a}_n)$ et $(\tilde{b}_n)$ sont celles qui correspondent :

$$\tilde{a}_n \tilde{q}_n + \tilde{b}_n = g(\tilde{q}_n). \tag{19.490}$$

Nous considérons la majoration

$$|\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - g(x)| \leqslant |\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - (\tilde{a}_n \tilde{q}_n + \tilde{b}_n)| + \underbrace{|\tilde{a}_n \tilde{q}_n + \tilde{b}_n - g(\tilde{q}_n)|}_{=0} + \underbrace{|g(\tilde{q}_n) - g(x)|}_{\leqslant \epsilon} \tag{19.491a}$$

$$\leqslant |\tilde{a}_n||x - \tilde{q}_n| + \epsilon \tag{19.491b}$$

$$= \epsilon\big(|\tilde{a}_n| + 1\big). \tag{19.491c}$$

Il nous reste à montrer que $|\tilde{a}_n|$ est borné par un nombre ne dépendant pas de n (pour les $n > N$).

Comme la droite de coefficient directeur $\tilde{a}_n$ et passant par le point $\big(\tilde{q}_n, g(\tilde{q}_n)\big)$ reste en dessous du graphe de g, nous avons pour tout n et tout $y \in \mathbb{R}$ l'inégalité

$$g(y) \geqslant \tilde{a}_n(y - \tilde{q}_n) + g(\tilde{q}_n) \in \tilde{a}_n B(y - x, \epsilon) + B\big(g(x), \epsilon\big). \tag{19.492}$$

Si $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le haut, nous prenons y tel que $B(y-x, \epsilon)$ soit minoré par un nombre k strictement positif et nous obtenons

$$g(y) \geqslant k\tilde{a}_n + l \tag{19.493}$$

avec k et l indépendants de n. Cela donne $g(y) = \infty$. Si au contraire $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le bas, nous prenons y tel que $B(y - x, \epsilon)$ est majoré par un nombre k strictement négatif. Nous obtenons encore $g(y) = \infty$.

Nous concluons que $|\tilde{a}_n|$ est bornée. □

LemXOUooQsigHs

Lemme 19.121 ([112])**.**
L'application

$$\begin{aligned} \phi\colon S^{++}(n, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned} \tag{19.494}$$

est ***log-convave****, c'est-à-dire que l'application* $\ln \circ \phi$ *est concave*[54]*. De façon équivalente, si* $A, B \in S^{++}$ *et si* $\alpha + \beta = 1$*, alors*

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^\beta. \tag{19.495}$$

EqSPKooHFZymB

Ici S^{++} est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives, définition 10.231.

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Pseudo-réduction** Le théorème de pseudo-réduction simultanée, corolaire 12.61, appliqué aux matrices A et B nous donne une matrice inversible Q telle que

$$\begin{cases} B = Q^t D Q & (19.496a) \\ A = Q^t Q & (19.496b) \end{cases}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{19.497}$$

[54] La définition 17.95 du logarithme ne fonctionne que pour les réels strictement positifs. C'est le cas du déterminant d'une matrice réelle symétrique strictement définie positive.

$\lambda_i > 0$. Nous avons alors

$$\det(A)^\alpha \det(B)^\beta = \det(Q)^{2\alpha} \det(Q)^{2\beta} \det(D)^\beta = \det(Q)^2 \det(D)^\beta \tag{19.498}$$

(parce que $\alpha + \beta = 1$) et

$$\begin{aligned}\det(\alpha A + \beta B) &= \det(\alpha Q^t Q + \beta Q^t D Q) && (19.499a)\\ &= \det\big(Q^t(\alpha\mathbb{1} + \beta D)Q\big) && (19.499b)\\ &= \det(Q)^2 \det(\alpha\mathbb{1} + \beta D). && (19.499c)\end{aligned}$$

(2) **Ré-expression** L'inégalité (19.495) qu'il nous faut prouver se réduit donc à

$$\det(\alpha\mathbb{1} + \beta D) \geqslant \det(D)^\beta. \tag{19.500}$$

Vue la forme de D nous avons

$$\det(\alpha\mathbb{1} + \beta D) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha + \beta\lambda_i) \tag{19.501}$$

et

$$\det(D)^\beta = \big(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\big)^\beta. \tag{19.502}$$

Il faut donc prouver que

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \big(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\big)^\beta. \tag{19.503}$$ EqGFLooQFlciS

Cette dernière égalité de produit sera prouvée en passant au logarithme.

(3) **Logarithme** Puisque le logarithme est concave par l'exemple 19.115, nous avons pour chaque i que

$$\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \alpha\ln(1) + \beta\ln(\lambda_i) = \beta\ln(\lambda_i). \tag{19.504}$$

En sommant cela sur i et en utilisant les propriétés de croissance et de multiplicativité du logarithme nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\ln(\alpha + \beta\lambda_i) &\geqslant \beta\sum_i \ln(\lambda_i) && (19.505a)\\ \ln\big(\prod_i(\alpha + \beta\lambda_i)\big) &\geqslant \ln\Big(\big(\prod_i \lambda_i\big)^\beta\Big) && (19.505b)\\ \prod_i(\alpha + \beta\lambda_i) &\geqslant \big(\prod_i \lambda_i\big)^\beta, && (19.505c)\end{aligned}$$

ce qui est bien (19.503).

□

Rappel de notations : $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$. Voir la remarque 4.47.

LEMooNUDOooVfVPkw

Lemme 19.122 ([1]).
Soit une fonction strictement convexe $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) $f(tx, ty) = tf(x, y)$ *pour tout t (tant que ça ne déborde pas du domaine)*

(3) $f(1, y) = g(y)$ *pour tout y*

(4) $f(0, y) = f(y, 0)$.

Alors f est convexe.

Démonstration. Nous devons prouver que pour toute paire de points A, B sur le graphe de f, le segment $[A, B]$ est au-dessus du graphe de f. Ledit graphe étant d'ailleurs constitué de droites joignant $(0, 0, 0)$ et les points du graphe de g (situé en $x = 1$).

Nous notons $\mathcal{C}$ le graphe de f.

(1) **Une corde alignée à O** Soient deux points A et B alignés à l'origine O. Un point quelconque de $[A,B]$ (et même de toute la droite) s'écrit

$$\big(tA_x, tA_y, tf(A_x,A_y)\big) = \big(tA_x, tA_y, f(tA_x,tA_y)\big), \tag{19.506}$$

et donc est sur le graphe de f.

(2) **Autre corde** Nous prouvons que $[A,B]\cap\mathcal{C} = \{A,B\}$.

Si A et B sont dans le plan $x=1$ alors c'est d'accord parce que le graphe de f dans le plan est le même que celui de la fonction strictement convexe g.

Si A et B ne sont pas alignés à O et si ils ne sont pas dans le plan $x=1$ alors le plan AOB coupe le plan $x=1$ en une droite.

Nous supposons l'existence d'un point $C\in\,]A,B[\cap\mathcal{C}$.

Nous considérons la droite (OA) qui est contenue dans ce plan et dans $\mathcal{C}$ (au moins la partie positive) et nous notons A' son intersection avec le plan $x=1$. Même chose pour B et C qui donnent B' et C'.

Cela nous donne des points A', B' et C' qui sont alignés dans le graphe de f en $x=1$. Or le graphe de f en $x=1$ est le graphe de la fonction g qui est strictement convexe et qui ne contient donc pas de points alignés.

Nous en concluons que si $A,B\in\mathcal{C}$ alors $]A,B[$ est soit complètement strictement au-dessus de $\mathcal{C}$ soit complètement strictement en-dessous de $\mathcal{C}$.

Nous prouvons à présent que toutes les cordes sont au-dessus de $\mathcal{C}$. Pour cela, soient $A,B\in\,]0,\infty[\times]0,\infty[$, deux points non alignés à $O=(0,0)$. Nous considérons les points A',B' qui sont les intersections entre les droites (AO) et (BO) et la droite $x=1$ ainsi que le chemin σ qui parcourt le segment $[A,A']$ et le chemin γ qui parcourt le segment $[B,B']$:

$$\begin{aligned}\sigma(0)&=A, \quad \gamma(0)=B,\\ \sigma(1)&=A', \quad \gamma(1)=B'.\end{aligned} \tag{19.507}$$

Pour tout u, la seule droite passant par O et par $\sigma(u)$ passe également par A, et pas par B. En conséquence de quoi, pour tout $u_1,u_2\in[0,1]$, la droite $\big(\sigma(u_1)\gamma(u_2)\big)$ ne passe pas par $(0,0)$.

Nous considérons à présent non seulement la corde joignant $\big(A,f(A)\big)$ à $\big(B,f(B)\big)$ et la corde joignant $\big(A',f(A')\big)$ à $\big(B',f(B')\big)$ mais également toutes les cordes intermédiaires (si vous aimez les grands mots, vous pouvez parler d'homotopie) :

$$c(u,t) = t\Big(\sigma(u),f\big(\sigma(u)\big)\Big) + (1-t)\Big(\gamma(u),f\big(\gamma(u)\big)\Big) \tag{19.508}$$

Pour chaque $u\in[0,1]$, cela représente une corde entre deux points non alignés à $(0,0,0)$ et donc une corde qui est soit strictement au-dessus de $\mathcal{C}$ soit strictement en-dessous (à par les points correspondant à $t=0$ et $t=1$ qui, eux, sont sur $\mathcal{C}$).

Soit $t_0\in\,]0,1[$. La courbe $c(u,t_0)$ avec $u\in[0,1]$ ne touche jamais $\mathcal{C}$. Or le point $c(1,t_0)$ est au-dessus de $\mathcal{C}$, donc le point $c(0,t_0)$ est également au-dessus de $\mathcal{C}$.

Nous en concluons que toutes les cordes entre $(A,f(A))$ et $(B,f(B))$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$ et non en-dessous de $\mathcal{C}$. □

19.16.5 Convexité et hessienne

DEFooKCFPooLwKAsS

Définition 19.123.
Soit une partie convexe U de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon U\to\mathbb{R}$.

*(1) La fonction f est **convexe** si pour tout $x,y\in U$ avec $x\neq y$ et pour tout $\theta\in\,]0,1[$ nous avons*

$$f\big(\theta x+(1-\theta)y\big) \leqslant \theta f(x) + (1-\theta)f(y). \tag{19.509}$$

*(2) Elle est **strictement convexe** si nous avons l'inégalité stricte.*

PROPooYNNHooSHLvHp

Proposition 19.124 ([601])**.**
Soit Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et U convexe dans Ω, et une fonction différentiable $f\colon U\to\mathbb{R}$.

ITEMooRVIVooIayuPS

(1) La fonction f est convexe sur U si et seulement si pour tout $x,y\in U$,

$$f(y)\geqslant f(x)+df_x(y-x). \tag{19.510}$$

ITEMooCWEWooFtNnKl

(2) *La fonction f est strictement convexe sur U si et seulement si pour tout $x, y \in U$ avec $x \neq y$,*

$$f(y) > f(x) + df_x(y - x). \tag{19.511}$$

Démonstration. Nous avons quatre petites choses à démontrer.

(1) **(1) sens direct** Soit une fonction convexe f. Nous avons :

$$f\big((1-\theta)x + \theta y\big) \leqslant (1-\theta)f(x) + \theta f(y), \tag{19.512}$$

donc

$$f\big(x + \theta(y-x)\big) - f(x) \leqslant \theta\big(f(y) - f(x)\big) \tag{19.513}$$

Puisque $\theta > 0$ nous pouvons diviser par θ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{f\big(x + \theta(y-x)\big) - f(x)}{\theta} \leqslant f(y) - f(x). \tag{19.514}$$

EQooAXXFooHWtiJh

Nous prenons la limite $\theta \to 0^+$. Cette limite est égale à a limite simple $\theta \to 0$ et vaut (parce que f est différentiable) :

$$\frac{\partial f}{\partial(y-x)}(x) \leqslant f(y) - f(x), \tag{19.515}$$

et aussi

$$df_x(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \tag{19.516}$$

par le lemme 14.273.

(2) **(1) sens inverse** Pour tout $a \neq b$ dans U nous avons

$$f(b) \geqslant f(a) + df_a(b - a). \tag{19.517}$$

EQooEALSooJQszWr

Pour $x \neq y$ dans U et pour $\theta \in]0,1[$ nous écrivons (19.517) pour les couples $\big(\theta x + (1-\theta)y, y\big)$ et $\big(\theta x + (1-\theta)y, x\big)$. Ça donne :

$$f(y) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) + df_{\theta x + (1-\theta)y}\big(\theta(y - x)\big), \tag{19.518}$$

et

$$f(x) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) + df_{\theta x + (1-\theta)y}\big((1-\theta)(x - y)\big). \tag{19.519}$$

La différentielle est linéaire ; en multipliant la première par $(1-\theta)$ et la seconde par θ et en la somme, les termes en df se simplifient et nous trouvons

$$\theta f(x) + (1-\theta)f(y) \geqslant f\big(\theta x + (1-\theta)y\big). \tag{19.520}$$

(3) **(2) sens direct** Nous avons encore l'équation (19.514), avec une inégalité stricte. Par contre, ça ne va pas être suffisant parce que le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Nous devons donc être plus malins.

Soient $0 < \theta < \omega < 1$. Nous avons $(1-\theta)x + \theta y \in [x, (1-\omega)x + \omega y]$, donc nous pouvons écrire $(1-\theta)x + \theta y$ sous la forme $(1-s)x + s\big((1-\omega)x + \omega y\big)$. Il se fait que c'est bon pour $s = \theta/\omega$ (et aussi que nous avons $\theta/\omega < 1$). Donc nous avons

$$f\big((1-\theta)x + \theta y\big) = f\Big((1 - \frac{\theta}{\omega})x + \frac{\theta}{\omega}\big((1-\omega)x + \omega y\big)\Big) \tag{19.521a}$$

$$< (1 - \frac{\theta}{\omega})f(x) + \frac{\theta}{\omega} f\big((1-\omega)x + \omega y\big). \tag{19.521b}$$

Cela nous permet d'écrire

$$\frac{f\big((1-\theta)x + \theta y\big) - f(x)}{\theta} < \frac{f\big((1-\omega)x + \omega y\big)}{\omega} < f(y) - f(x). \tag{19.522}$$

Le seconde inégalité est le pendant de (19.514). Maintenant en passant à la limite pour θ nous conservons une inégalité stricte par rapport à $f(y) - f(x)$:

$$df_x(y - x) < f(y) - f(x). \tag{19.523}$$

□

Avant de lire la proposition suivante, il faut relire la proposition 14.386 et ce qui s'y rapporte. Lire aussi la remarque 19.114 qui indique qu'il n'y a pas de réciproque dans l'énoncé (2).

REMooYCRKooEQNIkC

Remarque 19.125.
Notons que la condition (19.524) n'est pas équivalente à demander $(d^2f)_x(h,h) \geqslant 0$ pour tout h. En effet nous ne demandons la positivité que dans les directions atteignables comme différence de deux éléments de U. La partie U n'est pas spécialement ouverte ; elle pourrait n'être qu'une droite dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas, demander que f (qui est C^2 sur l'ouvert Ω) soit convexe sur U ne demande que la positivité de $(d^2f)_x$ appliqué à des vecteurs situés sur la droite U.

PROPooBMIRooFkQSAb

Proposition 19.126 ([601]).
Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un convexe $U \subset \Omega$.

ITEMooZQCAooIFjHOn

(1) La fonction f est convexe sur U si et seulement si

$$(d^2f)_x(y-x,y-x) \geqslant 0 \tag{19.524}$$

EQooIBDCooJYdiBb

pour tout $x, y \in U$.

ITEMooHAGQooYZyhQk

(2) Si pour tout $x \neq y$ dans U nous avons

$$(d^2f)_x(y-x,y-x) > 0 \tag{19.525}$$

alors la fonction f est strictement convexe sur U.

Démonstration. Il y a trois parties à démontrer.

(1) **(1) sens direct**

Soit une fonction convexe f sur U. Soient aussi $x, y \in U$ et $h = y - x$. Nous utilisons ma version préférée de Taylor[55] : celle de la proposition 14.493 :

$$f(x+th) = f(x) + tdf_x(h) + \frac{t^2}{2}(d^2f_x)(h,h) + t^2\|h\|^2\alpha(th) \tag{19.526}$$

avec $\lim_{s\to 0}\alpha(s) = 0$. Le fait que f soit convexe donne

$$0 \leqslant f(x+th) - f(x) - tdf_x(h), \tag{19.527}$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{t^2}{2}(d^2f)_x(h,h) + f^2\|h\|^2\alpha(th). \tag{19.528}$$

En multipliant par 2 et en divisant par t^2,

$$0 \leqslant (d^2f)_x(h,h) + 2\|h\|^2\alpha(th). \tag{19.529}$$

En prenant $t \to 0$ nous avons bien $(d^2f)_x(y-x,y-x) \geqslant 0$.

(2) **(1) sens inverse**

Soient $x, y \in U$. Nous écrivons Taylor en version de la proposition 14.494 :

$$f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \frac{1}{2}(d^2f)_z(y-x,y-x) \tag{19.530}$$

pour un certain $z \in]x,y[$. En vertu de ce qui a été dit dans la remarque 19.125 nous ne pouvons pas évoquer l'hypothèse (19.524) pour conclure que $(d^2f)_z(y-x,y-x) \geqslant 0$. Il y a deux manières de nous sortir du problème :

- Trouver $s \in U$ tel que $y - x = s - z$.
- Trovuer un $z \in U$ tel que $z - x$ soit un multiple de $y - x$.

[55] Si vous présentez ceci au jury d'un concours, vous devriez être capable de raconter ce que signifie d^2f, et pourquoi nous l'utilisons comme une 2-forme.

La première approche ne fonctionne pas parce que $s = y - x + z$ n'est pas garanti d'être dans U ; par exemple avec $x = 1$, $z = 2$, $y = 3$ et $U = [0, 3]$. Dans ce cas $s = 4 \notin U$.

Pour suivre la seconde approche, nous posons $z = \theta x + (1 - \theta)y$, donc $z - x = (1 - \theta)(y - x)$. Dans ce cas la bilinéarité de $(d^2 f)_z$ donne[56]

$$f(y) = f(x) + df_x(y - x) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\theta)^2}(d^2 f)_z(z - x, z - x)}_{\geqslant 0}. \tag{19.531}$$

Nous en déduisons que f est convexe par la proposition 19.124(1).

(3) **(2)**

Le raisonnement que nous venons de faire pour le sens inverse de (1) tient encore, et nous avons

$$f(y) = f(x) + df_x(y - x) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\theta)^2}(d^2 f)_z(z - x, z - x)}_{>0} \tag{19.532}$$

d'où nous déduisons la stricte convexité de f par la proposition 19.124(2).

□

CORooMBQMooWBAIIH

Corolaire 19.127.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction deux fois différentiable f sur Ω.

ITEMooUAFTooXfCviI

(1) La fonction f est convexe si et seulement si pour tout x, la matrice hessienne $d^2 f_x$ est semi-définie positive.

ITEMooDGISooPlRLOd

(2) Si pour tout x de Ω, la matrice hessienne $d^2 f_x$ est strictement définie positive, alors f est strictement convexe.

Démonstration. Nous pouvons voir ce résultat comme une conséquence directe de la proposition 19.126 en posant $U = \Omega$. Nous allons cependant en donner une démonstration directe.

Soit $a \in \Omega$ et posons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(a) - (df)_a(x - a). \end{aligned} \tag{19.533}$$

Nous allons calculer des différentielles de f, et une chose importante à comprendre est que la différentielle de la fonction $x \mapsto df_a(x - a)$ ne fait pas intervenir la différentielle seconde de f ; c'est la différentielle de $a \mapsto df_a(x)$ qui demanderait la différentielle seconde de f. Ici le point a étant donné, df_a est une application linéaire sans histoires. En particulier, $df_a(x - a) = df_a(x) - df_a(a)$.

La fonction g vérifie :

(1) $g(a) = 0$,

(2) $dg_x = df_x - df_a$, parce que la différentielle de $x \mapsto df_a(x)$ est $x \mapsto df_a(x)$ en vertu du lemme 12.332.

(3) $dg_a = 0$. Le point a est un point critique de g.

(4) $d^2 g_x = d^2 f_x$ parce que la différentielle de $x \mapsto df_a$ est nulle.

Ceci étant dit, nous pouvons commencer avec la preuve.

(1) **(1) sens direct**

Nous supposons que f est convexe. Alors $g(x) \geqslant 0$ pour tout x par la caractérisation 19.124(1). Cela signifie que $x = 0$ est un minimum global de g. Par conséquent la proposition 19.99(3) nous dit que la hessienne $d^2 f_a$ est semi-définie positive.

(2) **(1) sens inverse**

Nous sommes dans le cas de la proposition 19.99(1). Le point $x = a$ est un minimum local de g, ce qui signifie que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de Ω. Encore une fois la caractérisation 19.124(1) nous permet de conclure.

[56] Si vous avez bien suivi, la bilinéarité est contenue dans la proposition 14.386.

(3) **(2)**
La fonction g vérifie les conditions de 19.99(2), donc $x = 0$ est un minimum local strict de g. La caractérisation 19.124(2) nous fait conclure que f est strictement convexe.

□

19.128.
Nous rappelons que, avec $p > 1$, la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \tag{19.534}$$

est strictement croissante. La proposition 14.442 est formelle sur ce point.

Lemme 19.129.
Soient un réel a, et $p > 1$. L'équation

$$|x|^p = ax \tag{19.535}$$

possède au plus deux solutions réelles.

Démonstration. En deux parties suivant le signe de a.

(1) **Si $a = 0$** Alors l'équation est $|x|^p = 0$, et l'unique solution est $x = 0$

(2) **Si $a > 0$** Si $x < 0$ alors $ax < 0$ et $|x|^p - ax > |x|^p > 0$. Cela prouve que notre équation n'a pas de solutions $x < 0$ lorsque $a > 0$.

Cherchons donc des solutions avec $x \geqslant 0$. D'abord $|x| = x$ et ensuite, en posant $p = 1 + \delta$ ($\delta > 0$), nous avons la factorisation

$$x^p - ax = x(x^\delta - a) = 0. \tag{19.536}$$

Poser $x = 0$ est clairement une solution. Si $x \neq 0$, nous avons le raisonnement suivant. Les réels formant un corps, c'est un anneau intègre qui vérifie alors la règle du produit nul[57]. Cela pour dire que si $x \neq 0$, alors

$$x^\delta = a. \tag{19.537}$$

La proposition 14.450 nous dit que cela a une unique solution dans les réels positifs.

(3) **Si $a < 0$** Ce cas se traite de façons similaire[58].

□

PROPooLIGIooPrHY1b

Proposition 19.130.
Soit $1 < p < \infty$. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|^p \end{aligned} \tag{19.538}$$

est strictement convexe.

Démonstration. La preuve va se diviser en deux parties. D'abord nous allons utiliser la matrice hessienne pour démontrer le résultat sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et ensuite nous allons un peu bricoler pour ajouter 0 au domaine de stricte convexité[59].

(1) **La hessienne** Nous notons

$$f_p(x) = \|x\|^p = \big(\sum_i x_i^2\big)^{p/2}, \tag{19.539}$$

et nous dérivons :

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) = \frac{p}{2} 2x_i \big(\sum_i x_i^2\big)^{(p-2)/2} = p x_i f_{p-2}(x). \tag{19.540}$$

EQooNZZWooGeAlyj

Cela n'est déjà pas bien défini en $x = 0$ lorsque $p < 2$, mais qu'importe ? Nous dérivons encore en utilisant entre autres la formule (19.540) elle-même avec $p \to p - 2$:

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_i}(x) = p\delta_{ij}\|x\|^{p-2} + p(p-2)x_i x_j \|x\|^{p-4}. \tag{19.541}$$

[57] Voir le lemme 3.23 et la définition 3.22.
[58] Vérifiez par vous-même et écrivez-moi si il y a un problème (personnellement, je n'ai pas vérifié.).
[59] Si quelqu'un sait comment éviter ce bricolage en deux parties, je suis preneur.

Nous avons donc la matrice hessienne

$$H_{ij}(x) = p\delta_{ij}\|x\|^{p-2} + p(p-2)x_i x_j \|x\|^{p-4}. \tag{19.542}$$

Pour prouver que cette matrice est strictement définie positive, nous avons le choix entre la proposition 10.234(1) ou le lemme 10.235(1). Nous utilisons le second. Nous avons[60] :

$$\begin{aligned}
y \cdot H(x)y &= \sum_{kl} y_k H(x)_{kl} y_l && (19.543a)\\
&= p\sum_l y_l^2 \|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4}\sum_{kl} x_k y_k x_l y_l && (19.543b)\\
&= p\|y\|^2\|x\|^{p-2} + p(p-2)\|x\|^{p-4}(x\cdot y)^2 && (19.543c)\\
&= p\|x\|^{p-4}\big(\|y\|^2\|x\|^2 + (p-2)(x\cdot y)^2\big) && (19.543d)\\
&> p\|x\|^{p-4}\big(\|y\|^2\|x\|^2 - (x\cdot y)^2\big) && (19.543e)\\
&\geqslant 0. && (19.543f)
\end{aligned}$$

SUBEQooUSZOooCqsWPE

SUBEQooBXQKooZcarVv

Justifications :

- Pour 19.543e. Puisque $p > 1$ nous avons $p - 2 > -1$. Là, l'inégalité est stricte et c'est important.
- Pour 19.543f. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du théorème 12.1.

Voilà. La matrice Hessienne est strictement définie positive par le lemme 10.235(1) sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Le corolaire 19.127(1) nous indique que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$f_p\big(\theta x + (1-\theta)y\big) < \theta f_p(x) + (1-\theta)f_p(y) \tag{19.544}$$

EQooFXXZooRZbJYY

pourvu que $\theta x + (1-\theta)y \neq 0$ pour tout θ.

(2) **La suite**

Nous devons prouver que l'inéquation (19.544) tient également lorsque $\theta x + (1-\theta)y = 0$ pour une certaine valeur $\theta = \theta_0 \in]0,1[$.

(3) **Les cordes passant par zéro**

Pour ce faire, nous allons montrer que le segment de droite joignant $\big(a, f_p(a)\big)$ à $(b, f_p(b))$ est toujours au-dessus de la courbe $\big(x, f_p(x)\big)$. Nous commençons par $b = 0$. Vu que $p > 1$ et que $\theta \in]0,1[$ nous avons

$$\|\theta a\|^p = |\theta|^p\|a\|^p < \theta\|a\|^p = \theta f_p(a). \tag{19.545}$$

(4) **Les cordes passant au-dessus de zéro**

Dans le cas $b \neq 0$ nous considérons

$$\begin{aligned} l_1 \colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto l_1(x) \end{aligned} \tag{19.546}$$

tel que $\big(x, l_1(x)\big)$ soit (le segment) la droite joignant $\big(a, \|a\|^p\big)$ à $\big(b, \|b\|^p\big)$.

Nous considérons aussi, pour $x \in [0,a]$ la fonction l_2 telle que $\big(x, l_2(x)\big)$ soit la droite joignant $(0,0)$ à $\big(a, \|a\|^p\big)$. Nous avons déjà vu que pour $x \in]0,a[$ nous avons $l_1(x) > \|x\|^p$.

Nous avons $l_1(a) = l_2(a) = \|a\|^p$. Donc $l_2(x) - l_1(x)$ ne change pas de signe sur $[0,a]$. Mais comme $l_1(0) > 0 = l_2(0)$ nous avons

$$l_2(x) > l_1(x) \tag{19.547}$$

pour tout $x \in [0,a]$.

Au final, $l_2(x) > l_1(x) > f_p(x)$.

Pour la partie $[b,0]$ nous faisons de même en considérant l_3 de telle sorte que $\big(x, l_3(x)\big)$ soit le segment joignant $(0,0)$ à $\big(b, \|b\|^p\big)$.

□

[60] Si vous ne savez pas où placer les indices, voyez la proposition 10.182.

19.16.6 Quelques inégalités

19.16.6.1 Inégalité de Jensen

PropXIBooLxTkhU

Proposition 19.131 (Inégalité de Jensen)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et des réels $x_1,\dots, x_n$. Soient des nombres positifs $\lambda_1,\dots, \lambda_n$ formant une combinaison convexe[61]*. Alors*

$$f\big(\sum_i \lambda_i x_i\big) \leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i). \tag{19.548}$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n, en sachant que $n = 2$ est la définition de la convexité de f. Vu que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_n}, \tag{19.549}$$

nous avons

$$f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) f\big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_n}\big). \tag{19.550}$$

La chose à remarquer est que les nombres $\frac{\lambda_k}{1-\lambda_n}$ avec k allant de 1 à $n-1$ forment eux-mêmes une combinaison convexe. L'hypothèse de récurrence peut donc s'appliquer au second terme du membre de droite :

$$f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leqslant \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} f(x_k) = \lambda_n f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k). \tag{19.551}$$

□

19.16.6.2 Inégalité arithmético-géométrique

La proposition suivante dit que la moyenne arithmétique de nombres strictement positifs est supérieure ou égale à la moyenne géométrique.

PropWDPooBtHIAR

Proposition 19.132 (Inégalité arithmético-géométrique[607])**.**
Soient $x_1,\dots, x_n$ des nombres strictement positifs. Nous posons

$$m_a = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{19.552}$$

et

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \tag{19.553}$$

Alors $m_g \leqslant m_a$ et $m_g = m_a$ si et seulement si $x_i = x_j$ pour tout i, j.

Démonstration. Par hypothèse les nombres m_a et m_g sont tous deux strictement positifs, de telle sorte qu'il est équivalent de prouver $\ln(m_g) \leqslant \ln(m_a)$ ou encore

$$\frac{1}{n}\big(\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)\big) \leqslant \ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right). \tag{19.554}$$

Cela n'est rien d'autre que l'inégalité de Jensen de la proposition 19.131 appliquée à la fonction ln et aux coefficients $\lambda_i = \frac{1}{n}$. □

19.16.6.3 Inégalité de Kantorovitch

PropMNUooFbYkug

Proposition 19.133 (Inégalité de Kantorovitch[608])**.**
Soit A une matrice symétrique strictement définie positive dont les plus grandes et plus petites valeurs propres sont λ_{min} et λ_{max}. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} + \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^2 \|x\|^4. \tag{19.555}$$

[61] Définition 13.31.

Démonstration. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $\|x\| = 1$. Nous diagonalisons[62] la matrice A par la matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$: $A = PDP^{-1}$ et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ où D est une matrice diagonale formée des valeurs propres de A.

Nous posons $\alpha = \sqrt{\lambda_{min}\lambda_{max}}$ et nous regardons la matrice

$$\frac{1}{\alpha}A + \alpha A^{-1} \tag{19.556}$$

dont les valeurs propres sont

$$\frac{\lambda_i}{\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda_i} \tag{19.557}$$

parce que les vecteurs propres de A et de A^{-1} sont les mêmes (ce sont les valeurs de la diagonale de D). Nous allons quelque peu étudier la fonction

$$\theta(x) = \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}. \tag{19.558}$$

Elle est convexe en tant que somme de deux fonctions convexes. Elle a son minimum en $x = \alpha$ et ce minimum vaut $\theta(\alpha) = 2$. De plus

$$\theta(\lambda_{max}) = \theta(\lambda_{min}) = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{19.559}$$

Une fonction convexe passant deux fois par la même valeur doit forcément être plus petite que cette valeur entre les deux[63] : pour tout $x \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$,

$$\theta(x) \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{19.560}$$

Nous sommes maintenant en mesure de nous lancer dans l'inégalité de Kantorovitch.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\langle Ax, x\rangle}{\alpha} + \alpha\langle A^{-1}x, x\rangle\right) && \text{(19.561a)}\\
&= \frac{1}{2}\langle\left(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right)x, x\rangle && \text{(19.561b)}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left\|\left(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right)x\right\|\|x\| && \text{(19.561c)}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right\| && \text{(19.561d)}
\end{aligned}$$

Justifications :

- 19.561a par l'inégalité arithmético-géométrique, proposition 19.132. Nous avons aussi inséré $\alpha\frac{1}{\alpha}$ dans le produit sous la racine.
- 19.561c par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème 12.1.
- 19.561d par la définition de la norme opérateur de la proposition 12.76

La norme opérateur est la plus grande des valeurs propres. Mais les valeurs propres de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ sont de la forme $\theta(\lambda_i)$, et tous les λ_i sont entre λ_{min} et λ_{max}. Donc la plus grande valeur propre de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ est $\theta(x)$ pour un certain $x \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$. Par conséquent

$$\sqrt{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1}\right\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}. \tag{19.562}$$

□

19.16.7 Norme l^p

Si vous êtes seulement intéressés par le cas $p = 1, 2$ ou le cas $p = \infty$, allez voir la proposition 12.65.

[62] Théorème spectral 10.228.

[63] Je ne suis pas certain que cette phrase soit claire, non ?

PROPooUDFTooQyhAtq

Proposition 19.134.
Pour tout réel $p \geqslant 1$, la formule

$$\|x\|_{L^p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \tag{19.563}$$

EqDeformeLp

définit une norme[64] *sur* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Le seul point un peu délicat parmi les propriétés à vérifier de la définition 9.232 est l'inégalité triangulaire. Grâce au lemme 9.234, nous allons seulement montrer que la partie $B = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\|_p \leqslant 1\}$ est convexe.

Soient $x, y \in B$ ainsi que $\lambda \in [0,1]$. La fonction

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,\infty[&\to [0,\infty[\\ t &\mapsto t^p \end{aligned} \tag{19.564}$$

est convexe par le lemme 19.116. Nous avons donc le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i + (1-\lambda)y_i|^p && \text{(19.565a)}\\
&\leqslant \sum_i \big(\lambda|x_i| + (1-\lambda)|y_i|\big)^p && \text{(19.565b)}\\
&\leqslant \sum_i \lambda^p |x_i|^p + (1-\lambda)^p |y_i|^p && \text{(19.565c)}\\
&\leqslant \sum_i \lambda |x_i|^p + \sum_i (1-\lambda)|y_i|^p && \text{(19.565d)}\\
&= \lambda\|x\|_p^p + (1-\lambda)\|y\|_p^p && \text{(19.565e)}\\
&\leqslant \lambda + (1-\lambda) && \text{(19.565f)}\\
&= 1. && \text{(19.565g)}
\end{aligned}$$

SUBEQooYETKooSSCrMp
SUBEQooHNZHooKmWdJS
SUBEQooMUPCooILicEC
SUBEQooEFCHooJmSdVy

Justifications.

- Pour (19.565b). L'inégalité $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.
- Pour (19.565c). La fonction α est convexe.
- Pour (19.565d). Nous avons $\lambda \in [0,1]$ et $p \geqslant 1$ et donc $\lambda^p \leqslant \lambda$ par 14.443.
- Pour (19.565f). Parce que $x \in B$ implique $\|x\|_p \leqslant 1$ qui implique $\|x\|_p^p \leqslant 1$.

□

19.16.8 Hölder

Notre étude de la fonction puissance permet de démontrer quelques inégalités de Hölder. Voir le thème 25.

THOooPPDPooJxTYIy

Théorème 19.135 ([609]).
Si $1 \leqslant p < \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons[65]

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{19.566}$$

Démonstration. Vu que la fonction $t \mapsto |t|^p$ est croissante pour les t positifs[66], pour chaque i nous avons

$$|x_i| \leqslant \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p. \tag{19.567}$$

Cela montre que

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\} \leqslant \|x\|_p. \tag{19.568}$$

D'autre part, pour chaque i nous avons $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$, donc

$$\|x\|_p \leqslant \big(n\|x\|_\infty\big)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{19.569}$$

□

[64] Définition 9.232.
[65] Définition de la norme $\|.\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$, proposition 19.134.
[66] Parce que $p \geqslant 1$ et la proposition 14.442.

Le corolaire suivant donne une façon de majorer une norme ℓ^p par une norme ℓ^q moyennant un facteur. Notons cependant que l'inégalité de Hölder de la proposition 19.140 est plus précise. Ce corolaire est suffisant pour prouver l'équivalence des normes ℓ^p.

CORooEZGHooACHOiB

Corolaire 19.136.
Soient $p \geqslant 1$ et $q \leqslant \infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_q. \tag{19.570}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser les deux inégalités du théorème 19.135. D'abord la seconde avec p, et ensuite la première avec q. □

Si vous cherchez l'inégalité de Hölder dans L^p, c'est la proposition 29.39. Les normes ℓ^p sont définies dans 19.134.

LEMooLGGDooGLGFHj

Lemme 19.137 ([610])**.**
Soient $x, y > 0$ ainsi que $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$xy \leqslant \alpha x^{1/\alpha} + \beta y^{1/\beta}. \tag{19.571}$$

Nous avons

$$xy = \alpha x^{1/\alpha} + \beta y^{1/\beta} \tag{19.572}$$

si et seulement si $x^{1/\alpha} = y^{1/\beta}$.

Démonstration. Nous utilisons le logarithme[67] et ses propriétés (surtout la proposition 17.98). D'abord

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\alpha\frac{\ln(x)}{\alpha}+\beta\frac{\ln(y)}{\beta}} \tag{19.573}$$

Comme l'exponentielle est strictement convexe (exemple 19.115(3)) et vu que $\alpha + \beta = 1$, nous avons

$$xy = e^{\alpha\frac{\ln(x)}{\alpha}+\beta\frac{\ln(y)}{\beta}} \leqslant \alpha e^{\ln(x)/\alpha} + \beta e^{\ln(y)/\beta} = \alpha x^{1/\alpha} + \beta y^{1/\beta}. \tag{19.574}$$

EQooNLQIooAYiEAQ

Cela prouve déjà l'inégalité demandée.

Nous passons au cas d'égalité. Puisque α et β ne sont pas nuls, l'inégalité (19.574) est une égalité si et seulement si[68]

$$\frac{\ln(x)}{\alpha} = \frac{\ln(y)}{\beta}. \tag{19.575}$$

Cela signifie $\ln(x^{1/\alpha}) = \ln(y^{1/\beta})$, qui implique $x^{1/\alpha} = y^{1/\beta}$ parce que le logarithme est une bijection. □

CORooTCBZooAcZxaC

Corolaire 19.138.
Si $p, q > 0$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et si $p > 1$ alors nous avons

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \tag{19.576}$$

EQooWKTSooQwBsLg

pour tout $x, y \geqslant 0$, avec une égalité si et seulement si $x^p = y^q$.

Démonstration. Il suffit de poser $\alpha = 1/p$ et $\beta = 1/q$ et appliquer le lemme 19.137. □

THOooYHMJooBlXfpl

Théorème 19.139 (Inégalité de Hölder[610])**.**
Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ nous avons[69]

$$|x \cdot y| = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q. \tag{19.577}$$

Il y a égalité si et seulement si $x_i y_i$ est de signe constant[70] *et les vecteurs $\sum_i |x_i|^p e_i$ et $\sum_i |y_i|^q e_i$ sont proportionnels.*

Démonstration. En plusieurs parties.

[67] Définition 17.95
[68] Par le lemme 19.108.
[69] Définition de la norme $\|.\|_p$, proposition 19.134.
[70] Je n'utilie pas cette hypothèse de signe constant. Il doit y avoir une subtilité qui m'a échappée. Soyez prudente en lisant et écrivez-moi si vous trouvez une erreur.

(1) **Le cas des vecteurs nuls** Si x ou y est nul, les inégalités sont évidentes. Donc nous supposons que non.

(2) **Première inégalité** En ce qui concerne la première inégalité,

$$|x \cdot y| = |\sum_i x_i y_i| \leqslant \sum_i |x_i||y_i| \leqslant \sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q \right) \tag{19.578}$$

où nous avons utilisé le corolaire 19.138 dans chaque terme de la somme en tenant compte du fait que $|x_i|$ et $|y_i|$ sont positifs.

(3) **Seconde inégalité** Pour la seconde inégalité, nous commençons avec $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Utilisant encore le corolaire 19.138 pour chaque terme, nous avons

$$\sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \underbrace{\sum_i |x_i|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_i |y_i|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q. \tag{19.579}$$

Si maintenant x et y sont arbitraires non nuls dans $\mathbb{R}^n$, nous posons $x' = x/\|x\|_p$ et $y' = y/\|y\|_q$; nous savons déjà que

$$\sum_i |x'_i y'_i| \leqslant 1. \tag{19.580}$$

En remplaçant x'_i par $x_i/\|x\|_p$ et y'_i par $y_i/\|y\|_q$, l'inégalité (19.580) devient

$$\sum_i \frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant 1, \tag{19.581}$$

ce qui signifie

$$\sum_i |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q. \tag{19.582}$$

(4) **Cas d'égalité, dans un sens** Nous notons

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sum_i |x_i y_i| = \|x\|_p \|y\|_q\}. \tag{19.583}$$

(4a) **Multiplications** D'abord si $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors $(\mu x, \lambda y) \in \mathcal{D}$ pour tout $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\sum_i |(\mu x)_i (\lambda y)_i| = |\mu||\lambda| \sum_i |x_i y_i| = |\mu||\lambda| \|x\|_p \|y\|_q = \|\mu x\|_p \|\lambda y\|_q. \tag{19.584}$$

(4b) **Avec normes égales à 1** Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Nous avons en particulier,

$$1 = \sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |y_i|^q \tag{19.585}$$

grâce à l'inégalité (19.576) appliquée à chaque terme. Vu que $\|x\|_p = 1$, nous avons $\sum_i |x_i|^p = 1$, de telle sorte que le membre de droite de (19.585) se réduise à $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Nous pouvons donc écrire

$$1 = \sum_i |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p} \sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_i |y_i|^q = 1. \tag{19.586}$$

L'inégalité est donc une égalité :

$$\sum_i |x_i y_i| = \sum_i \left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q \right). \tag{19.587}$$

Mais chaque terme à gauche est en inégalité avec le terme correspondant à droite :

$$|x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q. \tag{19.588}$$

Pour que le tout soit une égalité, il faut que chaque inégalité (19.588) soit une égalité. Pour chaque i, nous avons

$$|x_i y_i| = \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q. \tag{19.589}$$

La condition d'égalité du corolaire 19.138 nous dit alors que $|x_i|^p = |y_i|^q$.

(4c) **Avec normes arbitraires** Soit donc $(x,y)\in\mathcal{D}$. Nous savons qu'en posant $x'=x/\|x\|_p$ et $y'=y/\|y\|_q$ nous avons $(x',y')\in\mathcal{D}$ et donc

$$\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p=\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q. \tag{19.590}$$

Cela donne tout de suite

$$|x_i|^p=\frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q}|y_i|^q, \tag{19.591}$$

ce qui est bien ce que nous voulions : le vecteur $\sum_i|x_i|^pe_i$ est proportionnel au vecteur $\sum_i|y_i|^qe_i$.

(5) **Cas d'égalité dans l'autre sens**[1] Nous supposons que les vecteurs $\sum_i|x_i|^pe_i$ et $\sum_i|y_i|^qe_i$ sont proportionnels. Nous nommons c^q le facteur de proportionnalité, c'est-à-dire que nous posons

$$|x_i|^p=c^q|y_i|^q. \tag{19.592}$$

Dans ce cas, pour chaque i, les nombres $c|y_i|$ et $|x_i|$ sont dans le cas d'égalité du corolaire 19.138. Nous avons alors [SUBEQSooVULLooPGWUIP]

$$\sum_i|x_iy_i|=\frac{1}{c}\sum_i c|x_i||y_i| \tag{19.593a}$$
$$=\frac{1}{c}\sum_i\left(\frac{1}{p}|x_i|^p+\frac{1}{q}\big(c|y_i|\big)^q\right) \tag{19.593b}$$
$$=\frac{1}{c}\sum_i\left(\frac{1}{p}|x_i|^p+\frac{1}{q}|x_i|^p\right) \tag{19.593c}$$
$$=\frac{1}{c}\sum_i|x_i|^p. \tag{19.593d}$$

Et c'est maintenant que nous subdivisons.

(5a) **Si $\|x\|_p=\|y\|_q=1$** Dans ce cas, l'égalité (19.593) se réduisent à

$$\sum_i|x_iy_i|=\frac{1}{c}. \tag{19.594}$$

Mais l'hypothèse sur les normes donne

$$1=\sum_i|x_i|^p=\sum_i c^q|y_i|^q=c^q\sum_i|y_i|^q=c^q. \tag{19.595}$$

Donc $c=1$ et nous avons bien

$$\sum_i|x_iy_i|=\frac{1}{c}=1=\|x\|_p\|y\|_q. \tag{19.596}$$

(5b) **Pour des normes arbitraires** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ tels que $|x_i|^p=c^q|y_i|^q$. Nous posons comme d'habitude $x'=x/\|x\|_p$ et $y'=y/\|y\|_q$. En utilisant le cas « de norme 1 » nous avons

$$1=\sum_i|x'_iy'_i|=\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\sum_i|x_iy_i|. \tag{19.597}$$

Donc $\sum_i|x_iy_i|=\|x\|_p\|y\|_q$ comme nous le voulions.

□

La majoration de la proposition suivante sera utile pour les inégalités de Clarkson du lemme 29.147. Pour d'autres inégalités (plus simples) autour des normes $\|.\|_p$, voir le thème 25.

[PROPooQZTNooGACMIQ]

Proposition 19.140 ([610]).
Si $x\in\mathbb{R}^n$ et si $0<q<p$, alors

$$\|x\|_q\leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|x\|_p. \tag{19.598}$$

En particulier, si $0<q<p$, alors

$$\|x\|_q\leqslant\|x\|_p. \tag{19.599}$$

Démonstration. Nous posons $P = p/q$ et $Q = P/(P-1)$. Les nombres P et Q sont des exposants conjugués, parce que

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1. \tag{19.600}$$

Nous posons $y = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ainsi que

$$v = \sum_i |x_i|^q e_i, \tag{19.601}$$

et nous écrivons l'inégalité de Hölder de la proposition 19.139 sur les vecteurs v et y :

$$\sum_i |v_i y_i| \leqslant \|v\|_P \|y\|_Q. \tag{19.602}$$

En déballant,

$$\sum_i |x_i|^q \leqslant \left(\sum_i (|x_i|^q)^P \right)^{1/P} \underbrace{\Big(\sum_i 1^Q \Big)^{1/Q}}_{=n} \tag{19.603a}$$

$$= \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{q/p} n^{1/Q} \tag{19.603b}$$

$$= n^{1-q/p} \|x\|_p^q. \tag{19.603c}$$

Cela donne

$$\|x\|_q^q \leqslant n^{1-q/p} \|x\|_p^q. \tag{19.604}$$

En prenant la puissance $1/q$ des deux côtés,

$$\|x\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|x\|_p \leqslant \|x\|_p \tag{19.605}$$

parce que $n \geqslant 1$ et $p/q < 1$. □

19.17 Algorithme du gradient à pas optimal

Une idée pour trouver un minimum à une fonction est de prendre un point p au hasard, calculer le gradient $\nabla f(p)$ et suivre la direction $-\nabla f(p)$ tant que ça descend. Une fois qu'on est « dans le creux », recalculer le gradient et continuer ainsi.

Nous allons détailler cet algorithme dans un cas très particulier d'une matrice A symétrique et strictement définie positive.

- Dans la proposition 19.142 nous montrons que résoudre le système linéaire $Ax = -b$ est équivalent à minimiser une certaine fonction.
- La proposition 19.143 donnera une méthode itérative pour trouver ce minimum.

DefQXPooYSygGP

Définition 19.141.
*Si X est un espace vectoriel normé et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nous disons que f est **coercive** sur le domaine non borné P de X si pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$\{x \in P \text{ tel que } f(x) \leqslant M\} \tag{19.606}$$

est borné.

En langage imagé la coercivité de f s'exprime par la limite

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in P}} f(x) = +\infty. \tag{19.607}$$

Nous rappelons que $S^{++}(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives définies en 10.232.

PROPooYRLDooTwzfWU

Proposition 19.142.
Soit $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle. \end{aligned} \tag{19.608}$$

Alors :

(1) Il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\bar{x} = -b$.

(2) Il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^n$ minimisant f.

(3) Ils sont égaux : $\bar{x} = x^*$.

Démonstration. Une matrice symétrique strictement définie positive est inversible, entre autres parce qu'elle se diagonalise par des matrices orthogonales (qui sont inversibles) et que la matrice diagonalisée est de déterminant non nul : tous les éléments diagonaux sont strictement positifs. Voir le théorème spectral symétrique 10.228.

D'où l'unicité du $\bar{x}$ résolvant le système $Ax = -b$ pour n'importe quel b.

(1) **f est strictement convexe**

La fonction f s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{kl} A_{kl}x_l x_k + \sum_k b_k x_k. \tag{19.609}$$

Elle est de classe C^2 sans problèmes, et il est vite vu que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij}$, c'est-à-dire que A est la matrice hessienne de f. Cette matrice étant strictement définie positive par hypothèse, la fonction f est strictement convexe par le corolaire 19.127(2).

(2) **f est coercive** Montrons à présent que f est coercive. Nous avons :

$$|f(x)| = \big|\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle\big| \tag{19.610a}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|\langle Ax, x\rangle| - |\langle b, x\rangle| \tag{19.610b}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}\|x\|^2 - \|b\|\|x\| \tag{19.610c}$$

Pour la dernière ligne nous avons nommé λ_{min} la plus grande valeur propre de A et utilisé Cauchy-Schwarz pour le second terme. Nous avons donc bien $|f(x)| \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ et la fonction f est coercive.

Soit M une valeur atteinte par f. L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) \leqslant M\} \tag{19.611}$$

est fermé (parce que f est continue) et borné parce que f est coercive. Cela est donc compact[71] et f atteint un minimum qui sera forcément dedans. Cela est pour l'existence d'un minimum.

Pour l'unicité du minimum nous invoquons la convexité : si $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont deux points réalisant le minimum de f, alors

$$f\left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2}f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1), \tag{19.612}$$

ce qui contredit la minimalité de $f(\bar{x}_1)$.

Nous devons maintenant prouver que $\bar{x}$ vérifie l'équation $A\bar{x} = -b$. Vu que $\bar{x}$ est minimum local de f qui est une fonction de classe C^2, le théorème des minimums locaux 19.98 nous indique que $\bar{x}$ est solution de $\nabla f(x) = 0$. Calculons un peu cela avec la formule

$$df_x(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} = \frac{1}{2}\big(\langle Ax, u\rangle + \langle Au, x\rangle\big) + \langle b, u\rangle = \langle Ax, u\rangle + \langle b, u\rangle = \langle Ax + b, u\rangle. \tag{19.613}$$

Donc demander $df_x(u) = 0$ pour tout u demande $Ax + b = 0$. □

[71] Théorème 11.23

PropSOOooGoMOxG

Proposition 19.143 (Gradient à pas optimal)**.**
Soit $A \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ (A est une matrice symétrique strictement définie positive) et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle. \end{aligned} \tag{19.614}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous définissons la suite (x_k) par

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \tag{19.615}$$

où

- $d_k = -(\nabla f)(x_k)$
- t_k *est la valeur minimisant la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ sur $\mathbb{R}$.*

Alors pour tout $k \geqslant 0$ nous avons

$$\|x_k - \bar{x}\| \leqslant K\left(\frac{c_2(A)-1}{c_2(A)+1}\right)^k \tag{19.616}$$

où $c_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ est le rapport ente la plus grande et la plus petite valeur propre[72] *de la matrice A et $\bar{x}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ à minimiser f.*

Démonstration. Décomposition en plusieurs points.

(1) **Existence de $\bar{x}$** Le fait que $\bar{x}$ existe et soit unique est la proposition 19.142.

(2) **Si $(\nabla f)(x_k) = 0$** D'abord si $\nabla f(x_k) = 0$, c'est que $x_{k+1} = x_k$ et l'algorithme est terminé : la suite est stationnaire. Pour dire que c'est gagné, nous devons prouver que $x_k = \bar{x}$. Pour cela nous écrivons (à partir de maintenant « x_k » est la k^{e} composante de x qui est une variable, et non le x_k de la suite)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{kl} A_{kl}x_l x_k + \sum_k b_k x_k \tag{19.617}$$

et nous calculons $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ en tenant compte du fait que $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}$. Le résultat est que $(\partial_i f)(a) = (Ax+b)_i$ et donc que

$$(\nabla f)(a) = Aa + b. \tag{19.618}$$

Vu que A est inversible (symétrique définie positive), il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie cette relation. Par la proposition 19.142, cet élément est le minimum $\bar{x}$.

Cela pour dire que si $a \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(\nabla f)(a) = 0$ alors $a = \bar{x}$. Nous supposons donc à partir de maintenant que $\nabla f(x_k) \neq 0$ pour tout k.

(3) **t_k est bien défini**

Pour $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x_k + td_k) = f(x_k) + \frac{1}{2}t^2\langle Ad_k, d_k\rangle + t\langle \underbrace{Ax_k + b}_{=-d_k}, d_k\rangle = \frac{1}{2}t^2\langle Ad_k, d_k\rangle - t\|d_k\|^2 + f(x_k). \tag{19.619}$$

EqKEHogYaazQi

qui est un polynôme du second degré en t. Le coefficient de t^2 est $\frac{1}{2}\langle Ad_k, d_k\rangle > 0$ parce que $d_k \neq 0$ et A est strictement définie positive. Par conséquent la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ admet bien un unique minimum. Nous pouvons même calculer t_k parce que l'on connaît par cœur le sommet d'une parabole :

$$t_k = -\frac{\langle Ax_k + b, d_k\rangle}{\langle Ad_k, d_k\rangle} = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle} \tag{19.620}$$

EqVWJooWmDSER

parce que $d_k = -\nabla f(x_k) = -(Ax_k + b)$.

[72] Cela est certainement très lié au conditionnement de la matrice A, voir la proposition 36.110.

(4) **La valeur de d_{k+1}**

Par définition, $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) = -(Ax_{k+1} + b)$. Mais $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, donc

$$d_{k+1} = -Ax_k - t_k Ad_k - b = d_k - t_k Ad_k \tag{19.621}$$

parce que $-Ax_k - b = d_k$.

Par ailleurs, $\langle d_{k+1}, d_k \rangle = 0$ parce que

$$\langle d_{k+1}, d_k \rangle = \langle d_k, d_k \rangle - t_k \langle d_k, Ad_k \rangle = \|d_k\|^2 - \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle} \langle d_k, Ad_k \rangle = 0 \tag{19.622}$$

où nous avons utilisé la valeur (19.620) de t_k.

(5) **Calcul de $f(x_{k+1})$**

Nous repartons de (19.619) où nous substituons la valeur (19.620) de t_k :

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} = f(x_k) - \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle}. \tag{19.623}$$

(6) **Encore du calcul ...**

Vu que le produit $\langle Ad_k, d_k \rangle$ arrive tout le temps, nous allons étudier $\langle A^{-1} d_k, d_k \rangle$. Le truc malin est d'essayer d'exprimer ça en termes de $\bar{x}$ et $\bar{f} = f(\bar{x})$. Pour cela nous calculons $f(\bar{x})$:

$$\bar{f} = f(\bar{x}) = f(-A^{-1}b) = -\frac{1}{2} \langle b, A^{-1} b \rangle. \tag{19.624}$$

Ayant cela en tête nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
\langle A^{-1} d_k, d_k \rangle &= \langle A^{-1}(Ax_k + b), Ax_k + b \rangle && \text{(19.625a)} \\
&= \langle x_k, Ax_k \rangle + \langle A^{-1} b, Ax_k \rangle + \langle b, x_k \rangle + \underbrace{\langle A^{-1} b, b \rangle}_{-2\bar{f}} && \text{(19.625b)} \\
&= \langle x_k, Ax_k \rangle + 2\langle x_k, b \rangle - 2\bar{f} && \text{(19.625c)} \\
&= 2\big(f(x_k) - \bar{f}\big) && \text{(19.625d)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$ parce que A est symétrique.

(7) **Erreur sur la valeur du minimum**

Nous voulons à présent estimer la différence $f(x_{k+1}) - \bar{f}$. Pour cela nous mettons en facteur $f(x_k) - \bar{f}$ dans $f(x_{k+1} - \bar{f})$; et d'ailleurs c'est pour cela que nous avons calculé $\langle A^{-1} d_k, d_k \rangle$: parce que ça fait intervenir $f(x_k) - \bar{f}$.

$$\begin{aligned}
f(x_{k+1}) - \bar{f} &= f(x_k) - \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} - \bar{f} && \text{(19.626a)} \\
&= \big(f(x_k) - \bar{f}\big) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \big(f(x_k) - \bar{f}\big)} \right) && \text{(19.626b)} \\
&= \big(f(x_k) - \bar{f}\big) \left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \langle A^{-1} d_k, d_k \rangle} \right). && \text{(19.626c)}
\end{aligned}$$

Nous traitons le dénominateur à l'aide de l'inégalité de Kantorovitch 19.133. Nous avons

$$\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \langle A^{-1} d_k, d_k \rangle} \geqslant \frac{\|d_k\|^4}{\frac{1}{4} \left(\sqrt{c_2(A)} + \frac{1}{\sqrt{c_2(A)}} \right)^2 \|d_k\|^4} = \frac{4c_2(A)}{(c_2(A) + 1)^2}. \tag{19.627}$$

Mettre cela dans (19.626c) est un calcul d'addition de fractions :

$$f(x_{k+1}) - \bar{f} \leqslant \big(f(x_k) - \bar{f}\big) \left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right)^2. \tag{19.628}$$

Par récurrence nous avons alors

$$f(x_k) - \bar{f} \leqslant \big(f(x_0) - \bar{f}\big) \left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right)^{2k}. \tag{19.629}$$

Notons qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que $\bar{f}$ étant le minimum de f, les deux côtés de l'inégalité sont automatiquement positifs.

(8) **Erreur sur la position du minimum**

Nous voulons à présent étudier la norme de $x_k - \bar{x}$. Pour cela nous l'écrivons directement avec la définition de f en nous souvenant que $b = -A\bar{x}$:

$$f(x_k) - \bar{f} = \frac{1}{2}\langle Ax_k, x_k\rangle - \langle A\bar{x}, x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, \bar{x}\rangle \tag{19.630a}$$
$$= \frac{1}{2}\langle Ax_k, x_k\rangle - \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, x_k\rangle - \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle A\bar{x}, \bar{x}\rangle \tag{19.630b}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\langle A(x_k - \bar{x}), x_k\rangle + \langle A\bar{x}, \bar{x} - x_k\rangle\Big) \tag{19.630c}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\langle A(x_k - \bar{x}), (x_k - \bar{x})\rangle\Big) \tag{19.630d}$$

où à la dernière ligne nous avons fait $\langle A\bar{x}, \bar{x} - x_k\rangle = \langle \bar{x}, A(\bar{x} - x_k)\rangle$ en vertu de la symétrie de A.

Les produits de la forme $\langle Ay, y\rangle$ sont majorés par $\lambda_{min}\|y\|^2$ parce que λ_{min} est la plus petite valeur propre de A. Dans notre cas,

$$f(x_k) - \bar{f} \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}\|x_k - \bar{x}\|^2 \tag{19.631}$$ EqVMRooUMXiig

(9) **Conclusion**

En combinant les inéquations (19.631) et (19.629) nous trouvons

$$\frac{1}{2}\lambda_{min}\|x_k - \bar{x}\|^2 \leqslant f(x_k) - \bar{f} \leqslant \big(f(x_0) - \bar{f}\big)\left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1}\right)^{2k}, \tag{19.632}$$

c'est-à-dire

$$\|x_k - \bar{x}\| \leqslant \sqrt{\frac{2\big(f(x_0) - \bar{f}\big)}{\lambda_{min} + 1}}^{2k}. \tag{19.633}$$

□

Notons que lorsque $c_2(A)$ est proche de 1 la méthode converge rapidement. Par contre si $c_2(A)$ est proche de zéro, la méthode converge lentement.

19.18 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse

NORMooHSWKooLtUbRl

19.144.
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel réel normé de dimension finie n. L'ensemble des formes quadratiques réelles[73] sur E est vu comme l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$; il sera noté $Q(E)$ et le sous-ensemble des formes quadratiques non dégénérées est $S_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ qui sera noté $\Omega(E)$. Nous rappelons que la correspondance est donnée de la façon suivante.

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, la forme quadratique associée est q_A donnée par le produit scalaire $q_A(x) = x \cdot Ax$.

Pour information, le lemme de Morse est le lemme 22.178.

NORMooQZFLooYnILtn

19.145.
Nous noterons encore $Q^+(E)$ les formes quadratiques positives sur E et $Q^{++}(E)$ les formes quadratiques strictement définies positives sur E.

Sur $Q(E)$ nous mettons la norme

$$N(q) = \sup_{\|x\|_E = 1} |q(x)|, \tag{19.634}$$

qui du point de vue de $S_n(\mathbb{R})$ est

$$N(A) = \sup_{\|x\|_E = 1} |x^t Ax|. \tag{19.635}$$ EqDQgBNAg

Notons que à droite, c'est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

Nous savons par le théorème de Sylvester (théorème 10.252) que dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, toute matrice symétrique de signature (p, q) est semblable à la matrice

$$\mathbb{1}_{p,q} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_q & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}. \tag{19.636}$$

[73] Définition 10.121.

Donc deux matrices de S_n sont semblables si et seulement si elles ont la même signature (même si elles ne sont pas de rang maximum, cela soit dit au passage). Si nous notons $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de signature (p,q), alors

$$S_n^{p,q}(\mathbb{R}) = \{P^tAP \text{ tel que } P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\} \tag{19.637}$$

où A est une quelconque ce ces matrices.

Nous voudrions en savoir plus sur ces ensembles. En particulier nous aimerions savoir si la signature est une notion « stable » au sens où ces ensembles seraient ouverts dans S_n. Pour cela nous considérons l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur S_n définie par

$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) &\to S_n(\mathbb{R})\\ (P,A) &\mapsto P^tAP\end{aligned} \tag{19.638}$$

faite exprès pour que les orbites de cette action soient les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

La proposition suivante montre que lorsque $p+q=n$, c'est-à-dire lorsqu'on parle de matrices de rang maximum, les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ sont ouverts, c'est-à-dire que la signature d'une forme quadratique est une propriété « stable » par petite variations des éléments de matrice. Notons tout de suite que si le rang n'est pas maximum, le théorème de Sylvester dit qu'elle est semblable à une matrice diagonale avec des zéros sur la diagonale ; en modifiant un peu ces zéros, on peut modifier évidemment la signature.

PropNPbnsMd

Proposition 19.146 ([112]).
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

(1) les formes quadratiques non dégénérées forment un ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques,

(2) les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p+q=n$ sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$,

ItemGOhRIiViii

(3) les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p+q=n$,

ItemGOhRIiViv

(4) les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ non dégénérés sont connexes par arc.

Démonstration. Cette preuve est donnée du point de vue des matrices. La différence entre le point (3) et (4) est que dans le premier nous prouvons la connexité de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, tandis que dans le second nous prouvons la connexité par arc de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité par arc de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$. Bien entendu le second implique le premier.

(1) Il s'agit simplement de remarquer que $Q(E) = S_n(\mathbb{R})$, que $\Omega(E) = S_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et que le déterminant est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

(2) Soit $A_0 \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Le théorème de Sylvester 10.252 nous donne une matrice inversible P telle que $P^tA_0P = \mathbb{1}_{p,q}$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathbb{1}_{p,q}$ contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. À partir de là, l'ensemble $(P^{-1})^t\mathcal{U}P^{-1}$ sera un voisinage de A_0 contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

Nous considérons les espaces vectoriels

$$F = \mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_p\} \tag{19.639a}$$
$$G = \mathrm{Span}\{e_{p+1},\dots,e_n\} \tag{19.639b}$$

La norme euclidienne $\|.\|_p$ sur F est équivalente à la norme $|.|_E$ par le théorème 12.70. Donc il existe une constante $k_1 > 0$ telle que pour tout $x \in F$,

$$\|x\|_p \geqslant k_1\|x\|_E. \tag{19.640}$$

EqMViCjJJ

De la même façon sur G, il existe une constante $k_2 > 0$ telle que

$$\|x\|_q \geqslant k_2\|x\|_E. \tag{19.641}$$

EqSFwQcDw

Si nous posons $k = \min\{k_1^2, k_2^2\}$, alors nous avons

$$\forall x \in F, \quad \|x\|_p^2 \geqslant k_1^2\|x\|_E^2 \geqslant k\|x\|_E^2 \tag{19.642a}$$
$$\forall x \in G, \quad \|x\|_q^2 \geqslant k_2^2\|x\|_E^2 \geqslant k\|x\|_E^2. \tag{19.642b}$$

Soit une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A - \mathbb{1}_{p,q}) < k$, c'est-à-dire que A est dans un voisinage de $\mathbb{1}_{p,q}$ pour la norme sur $S_n(\mathbb{R})$ donné par (19.635). Si x est non nul dans E, nous avons

$$\left|x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x\right| \leqslant N(\mathbb{1}_{p,q} - A)\|x\|^2 \leqslant k\|x\|^2. \tag{19.643}$$

En déballant la valeur absolue, cela signifie que

$$-k\|x\|_E^2 \leqslant x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x \leqslant k\|x\|^2. \tag{19.644}$$

Si $x \in F$, alors la première inéquation et (19.640) donnent

$$x^tAx \geqslant \|x\|_p^2 - k\|x\|_E^2 > 0 \tag{19.645}$$

Si $x \in G$, alors la seconde inéquation et (19.641) donnent

$$x^tAx \leqslant k\|x\|_E^2 - \|x\|_q^2 < 0. \tag{19.646}$$

Nous avons donc montré que $x \mapsto x^tAx$ est positive sur F et négative sur G, ce qui prouve que A est bien de signature (p,q) et appartient donc à $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Autrement dit nous avons

$$B(\mathbb{1}_{p,q}, k) \subset S_n^{p,q}(\mathbb{R}). \tag{19.647}$$

(3) Cette partie de la preuve provient essentiellement de [611], et fonctionne pour tous les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$, même pour ceux qui ne sont pas de rang maximum.

Soit $A \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Nous savons que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ contient exactement deux composantes connexes (proposition 15.26). Vu que l'application

$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &\to S_n\\ P &\mapsto P^tAP\end{aligned} \tag{19.648}$$

est continue, l'image d'un connexe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ par α est connexe (lemme 9.296). En particulier, $\alpha\big(\mathrm{GL}^{\pm}(n,\mathbb{R})\big)$ sont deux connexes et nous savons que $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ a au plus ces deux composantes connexes.

Notre but est maintenant de trouver une intersection entre les parties $\alpha\big(\mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R})\big)$ et $\alpha\big(\mathrm{GL}^{-}(n,\mathbb{R})\big)$[74]. Soit par le théorème de Sylvester, soit par le théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles 10.228, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ diagonalisant A. En suivant la remarque 10.229, et en notant Q la matrice obtenue à partir de P en changeant le signe de sa première ligne, nous avons

$$\alpha(Q) = Q^tAQ = P^tAP = \alpha(P). \tag{19.649}$$

Or si $P \in \mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R})$, alors $Q \in \mathrm{GL}^{-}(n,\mathbb{R})$ et inversement. Donc nous avons trouvé une intersection entre $\alpha\big(\mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R})\big)$ et $\alpha\big(\mathrm{GL}^{-}(n,\mathbb{R})\big)$.

(4) Soient A et B dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Par le théorème de Sylvester, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telles que $A = P^t\mathbb{1}_{p,q}P$ et $B = Q^t\mathbb{1}_{p,q}Q$. Par la remarque 10.229 nous pouvons choisir P et Q dans $\mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R})$. Ce dernier groupe étant connexe par arc, il existe un chemin

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{GL}^{+}(n,\mathbb{R}) \tag{19.650}$$

tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$. Alors le chemin

$$s \mapsto \gamma(s)^t\mathbb{1}_{p,q}\gamma(s) \tag{19.651}$$

est un chemin continu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ joignant A à B.

□

Nous savons déjà de la proposition 19.146 que les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ (pas spécialement de rang maximum) sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$. Le lemme suivant nous donne une précision à ce sujet, dans le cas des matrices de rang maximum, en disant que la matrice qui donne la similitude entre A_0 et A est localement un C^1-difféomorphisme de A.

LemWLCvLXe

Lemme 19.147.
Soit $A_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n) = S_n \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S_n et une application $\varphi\colon V \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ qui

(1) est de classe C^1,

[74] À ce point, il me semble que [611] fait erreur parce que la matrice $-\mathbb{1}_n$ est de déterminant 1 lorsque n est pair. L'argument donné ici provient de [112]

(2) est telle que pour tout $A \in V$, $\varphi(A)^t A_0 \phi(A) = A$.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to S_n \\ M &\mapsto M^t A_0 M. \end{aligned} \tag{19.652}$$

Étant donné que les composantes de $\varphi(M)$ sont des polynômes en les entrées de M, cette application est de classe C^1 – et même plus. Soit maintenant $H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et calculons $d\varphi_{\mathbb{1}}(H)$ par la formule (14.698) :

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = \frac{d}{dt}\Big[\varphi(\mathbb{1}+tH)\Big]_{t=0} \tag{19.653a}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[(\mathbb{1}+tH^t)A_0(\mathbb{1}+tH)\Big]_{t=0} \tag{19.653b}$$
$$= \frac{d}{dt}\Big[A_0 + tA_0H + tH^tA_0 + t^2H^tA_0H\Big]_{t=0} \tag{19.653c}$$
$$= A_0H + H^tA_0. \tag{19.653d}$$

Donc

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = (A_0H) + (A_0H)^t. \tag{19.654}$$

Par conséquent

$$\ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) = \{H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est antisymétrique}\}, \tag{19.655}$$

et si nous posons

$$F = \{H \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est symétrique}\} \tag{19.656}$$

nous avons

$$\mathbb{M}(n,\mathbb{R}) = F \oplus \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \tag{19.657}$$

parce que toute matrice peur être décomposée de façon unique en partir symétrique et antisymétrique. De plus l'application

$$\begin{aligned} f\colon F &\to S_n \\ H &\mapsto A_0H \end{aligned} \tag{19.658}$$

est une bijection linéaire. D'abord $A_0H = 0$ implique $H = 0$ parce que A_0 est inversible, et ensuite si $X \in S_n$, alors $X = A_0A_0^{-1}X$, ce qui prouve que X est l'image par f de $A_0^{-1}X$ et donc que f est surjective.

Maintenant nous considérons la restriction $\psi = \varphi_{|_F}$, $\psi\colon F \to S_n$. Remarquons que $\mathbb{1} \in F$ parce que $A_0 \in S_n$. L'application $d\psi_{\mathbb{1}}$ est une bijection. En effet d'abord

$$d(\varphi_{|_F})_{\mathbb{1}} = (d\varphi_{\mathbb{1}})_{|_F}, \tag{19.659}$$

ce qui prouve que

$$\ker(d\psi_{\mathbb{1}}) = \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \cap F = \{0\}, \tag{19.660}$$

ce qui prouve que $d\psi_{\mathbb{1}}$ est injective. Pour montrer que $d\psi_{\mathbb{1}}$ est surjective, il suffit de mentionner le fait que $\dim F = \dim S_n$ du fait que l'application (19.658) est une bijection linéaire.

Nous pouvons utiliser le théorème d'inversion locale (théorème 19.76) et conclure qu'il existe un voisinage ouvert U de $\mathbb{1}$ dans F tel que ψ soit un difféomorphisme C^1 entre U et $V = \psi(U)$. Vu que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, nous pouvons prendre $U \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et donc supposer que $U \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Pour tout $A \in V$, il existe une unique $M \in U$ telle que $\psi(M) = A$, c'est-à-dire telle que $A = M^tA_0M$. Cette matrice M est $\psi^{-1}(A)$ et est une matrice inversible. Bref, nous posons

$$\begin{aligned} \phi\colon V &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \psi^{-1}(A), \end{aligned} \tag{19.661}$$

et ce ϕ est de classe C^1 sur V parce que c'est ce que dit le théorème d'inversion locale. Cette application répond à la question parce que V est un voisinage de $\varphi(\mathbb{1}) = A_0$ et pour tout $A \in V$ nous avons

$$\phi(A)^tA_0\phi(A) = \varphi^{-1}(A)^tA_0\varphi^{-1}(A) = A. \tag{19.662}$$

□

19.19 Ellipsoïde de John-Loewner

C'est le moment de relire les conventions de notations données en 19.144 et 19.145 ainsi que la définition 10.121 d'une forme quadratique.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de q est diagonale. Dans cette base, la forme q est donnée par la proposition 10.256 :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{19.663}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de q.

Plus généralement nous notons $mat_{\mathcal{B}}(q)$ la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

PropOXWooYrDKpw

Proposition 19.148.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et l'application[75]

$$\begin{aligned} D\colon Q(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \det\big(mat_{\mathcal{B}}(q)\big). \end{aligned} \tag{19.664}$$

Alors :

(1) *La valeur de D ne dépend pas du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$.*

(2) *La fonction D est donnée par la formule $D(q) = \prod_i \lambda_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de q.*

(3) *La fonction D est continue.*

Démonstration. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation de q :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \tag{19.665}$$

où les x_i sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$. Par définition, la matrice $mat_{\mathcal{B}}(q)$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de q.

Nous considérons aussi $\mathcal{B}_1$, une autre base orthonormées de $\mathbb{R}^n$. Nous notons $S = mat_{\mathcal{B}_1}(q)$; étant symétrique, cette matrice se diagonalise par une matrice orthogonale : il existe $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ telle que

$$S = P mat_{\mathcal{B}}(q) P^t; \tag{19.666}$$

donc $\det(S) = \det(PP^t)\det\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) = \lambda_1 \dots \lambda_n$. Ceci prouve en même temps que D ne dépend pas du choix de la base et que sa valeur est le produit des valeurs propres.

Passons à la continuité. L'application déterminant $\det\colon S_n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est continue car polynôme en les composantes. D'autre part l'application $mat_{\mathcal{B}}\colon Q(\mathbb{R}^n) \to S_n(\mathbb{R})$ est continue par la proposition 10.138. L'application D étant la composée de deux applications continues, elle est continue. □

LEMooLSTOooZiEOdx

Lemme 19.149 (Volume d'un ellipsoïde[112, 1])**.**
Soit une forme quadratique strictement définie positive q sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant r^2\} \tag{19.667}$$

pour un certain $r > 0$.

Alors le volume de $\mathcal{E}$ est donné par

$$V_q = \frac{V_0 r^n}{\sqrt{D(q)}} \tag{19.668}$$

où V_0 est une constante[76] *et D est l'application de la proposition 19.148.*

Démonstration. Vu que la matrice de q est symétrique, elle est diagonalisable par une matrice orthogonale (théorème 10.228). Autrement dit, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \tag{19.669}$$

EqELBooQLPQUi

où $x_i = \langle e_i, x\rangle$ et les a_i sont tous strictement positifs.

[75] L'ensemble $Q(E)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur E.

[76] C'est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et ce n'est pas tout à fait évident à calculer [612].

À priori nous devrions calculer

$$\int_{\mathcal{E}} dx, \tag{19.670}$$

mais nous effectuons le changement de variable[77] associé à la matrice qui diagonalise q et nous devons simplement calculer

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx \tag{19.671}$$

parce que le jacobien de ce changement de variable est 1 (déterminant d'une matrice orthogonale).

Tout cela pour dire que nous nommons $\mathcal{E}_q$ l'ellipsoïde associée à la forme quadratique q et V_q son volume que nous allons maintenant calculer[78] :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx \tag{19.672}$$

Cette intégrale est écrite de façon plus simple en utilisant le C^1-difféomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{E}_q &\to B(0,1) \\ x &\mapsto \frac{1}{r}\Big(x_1\sqrt{a_1}, \dots, x_n\sqrt{a_n}\Big). \end{aligned} \tag{19.673}$$

Le fait que φ prenne bien ses valeurs dans $B(0,1)$ est un simple calcul : si $x \in \mathcal{E}_q$, alors

$$\sum_i \varphi(x)_i^2 = \frac{1}{r^2}\sum_i a_i x_i^2 = \frac{1}{r^2} q(x) < 1. \tag{19.674}$$

Cela nous permet d'utiliser le théorème de changement de variables 16.284 :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < r^2} dx = \frac{r^n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \int_{B(0,1)} dx. \tag{19.675}$$

La dernière intégrale est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et nous la notons V_0. La proposition 19.148 nous permet d'écrire V_q sous la forme

$$V_q = \frac{V_0 r^n}{\sqrt{D(q)}}. \tag{19.676}$$

□

19.150.

Le théorème suivant dit en substance que si K est compact, alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en l'origine et contenant K. Il faut se rendre compte que l'ellipsoïde n'est pas celui que l'on croirait intuitivement parce que la contrainte *centrée en l'origine* est forte. Si $K = \overline{B\big((4,0),1\big)}$, alors l'ellipsoïde donnée n'est pas du tout K lui-même comme on pourrait s'y attendre. Ce serait probablement quelque chose comme la boule centrée en $(0,0)$ et de rayon 5[79].

Ce que l'on voudrait est un ellipsoïde qui soit centré où il faut pour que le volume soit minimal. Nous verrons que c'est possible en la proposition 19.152, mais qu'alors l'unicité est moins évidente (voir la remarque dans [613]). Si vous voulez en entendre parler, vous pouvez lire [614, 615].

PropJYVooRMaPok

Proposition 19.151 (Ellipsoïde de John-Loewner[112])**.**
Soit K compact dans $\mathbb{R}^n$ et d'intérieur non vide. Il existe une unique ellipsoïde[80] *(pleine) centrée en l'origine de volume minimal contenant K.*

Démonstration. Nous subdivisons la preuve en plusieurs parties.

(1) **Volume de l'ellipsoïde** Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde centré en l'origine. La proposition 10.318 et son corollaire 10.319 nous indiquent que

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant 1\} \tag{19.677}$$

[77] Théorème 16.284.

[78] Le volume ne change pas si nous écrivons l'inégalité stricte au lieu de large dans le domaine d'intégration ; nous le faisons pour avoir un domaine ouvert.

[79] Je ne sais pas très bien si il y a moyen de faire mieux. Ce serait sans doute un bon exercice ; faites-moi savoir si vous avez la réponse.

[80] Définition 10.316.

pour une certaine forme quadratique strictement définie positive q. Le lemme 19.149 nous donne alors le volume de $\mathcal{E}$ par

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}} \tag{19.678}$$

où V_0 est une constante.

(2) **Existence de l'ellipsoïde**

Nous voulons trouver un ellipsoïde contenant K de volume minimal, c'est-à-dire une forme quadratique $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $D(q)$ soit maximal
- $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$.

Nous considérons l'ensemble des candidats semi-définis positifs.

$$A = \{q \in Q^+ \text{ tel que } q(x) \leqslant 1 \forall x \in K\}. \tag{19.679}$$

Nous allons montrer que A est convexe, compact et non vide dans $Q(\mathbb{R}^n)$; il aura ainsi un maximum de la fonction continue D définie sur $Q(\mathbb{R}^n)$. Nous montrerons ensuite que le maximum est dans Q^{++}. L'unicité sera prouvée à part.

(2a) **Non vide** L'ensemble K est compact et donc borné par $M > 0$. La forme quadratique $q\colon x \mapsto \|x\|^2/M^2$ est dans A parce que si $x \in K$ alors

$$q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2} \leqslant 1. \tag{19.680}$$

(2b) **Convexe** Soient $q, q' \in A$ et $\lambda \in [0,1]$. Nous avons encore $\lambda q + (1-\lambda)q' \in Q^+$ parce que

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \geqslant 0 \tag{19.681}$$

dès que $q(x) \geqslant 0$ et $q'(x) \geqslant 0$. D'autre part si $x \in K$ nous avons

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1. \tag{19.682}$$

Donc $\lambda q + (1-\lambda)q' \in A$.

(2c) **Fermé**

Pour rappel, la topologie de $Q(\mathbb{R}^n)$ est celle de la norme (10.287). Nous considérons une suite (q_n) dans A convergeant vers $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ et nous allons prouver que $q \in A$, de sorte que la caractérisation séquentielle de la fermeture (proposition 9.170) conclue que A est fermé. En nommant e_x le vecteur unitaire dans la direction x nous avons

$$\big|q(x)\big| = \big|\|x\|^2 q(e_x)\big| \leqslant \|x\|^2 N(q), \tag{19.683}$$

de sorte que notre histoire de suite convergente donne pour tout x :

$$\big|q_n(x) - q(x)\big| \leqslant \|x\|^2 N(q_n - q) \to 0. \tag{19.684}$$

Vu que $q_n(x) \geqslant 0$ pour tout n, nous devons aussi avoir $q(x) \geqslant 0$ et donc $q \in Q^+$ (semi-définie positive). De la même manière si $x \in K$ alors $q_n(x) \leqslant 1$ pour tout n et donc $q(x) \leqslant 1$. Par conséquent $q \in A$ et A est fermé.

(2d) **Borné**

La partie K de $\mathbb{R}^n$ est borné et d'intérieur non vide, donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset K$. Si par ailleurs $q \in A$ et $x \in \overline{B(0,r)}$ nous avons $a + x \in K$ et donc $q(a+x) \leqslant 1$. De plus $q(-a) = q(a) \leqslant 1$, donc

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q\big(x + a - a\big)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2 \tag{19.685}$$

par l'inégalité de Minkowski 12.30. Cela prouve que si $x \in \overline{B(0,r)}$ alors $q(x) \leqslant 4$. Si par contre $x \in \overline{B(0,1)}$ alors $rx \in \overline{B(0,r)}$ et

$$0 \leqslant q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}, \tag{19.686}$$

ce qui prouve que $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$ et que A est borné.

L'ensemble A est compact parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 11.23. L'application continue $D\colon Q(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ de la proposition 19.148 admet donc un maximum sur le compact A. Soit q_0 ce maximum.

Nous montrons que $q_0 \in Q^{++}(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que l'application $f\colon x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans A et que $D(f) > 0$. Vu que q_0 est maximale pour D, nous avons

$$D(q_0) \geqslant D(f) > 0. \tag{19.687}$$

Donc $q_0 \in Q^{++}$.

(3) **Unicité**

Si il existe une autre ellipsoïde de même volume que celle associée à la forme quadratique q_0, nous avons une forme quadratique $q \in Q^{++}$ telle que $q(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in K$. C'est-à-dire que nous avons $q_0, q \in A$ tels que $D(q_0) = D(q)$.

Nous considérons la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ et nous posons $S = mat_{\mathcal{B}_c}(q)$, $S_0 = mat_{\mathcal{B}_c}(q_0)$. Étant donné que A est convexe, $(q_0 + q)/2 \in A$ et nous allons prouver que cet élément de A contredit la maximalité de q_0. En effet

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S+S_0}{2}\right) \tag{19.688}$$

Nous allons utiliser le lemme 19.121 qui dit que le déterminant est log-concave sous la forme de l'équation (19.495) avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S+S_0}{2}\right) > \sqrt{\det(S)}\sqrt{\det(S_0)} = \det(S_0) = D(q_0). \tag{19.689}$$

eqBHJooYEUDPC

Nous avons utilisé le fait que $D(q_0) = D(q)$ qui signifie que $\det(S_0) = \det(S)$. L'inéquation (19.689) contredit la maximalité de $D(q_0)$ et donne donc l'unicité.

□

Dans la proposition suivante nous oublions l'unicité, mais nous démontrons qu'il existe un ellipsoïde de volume minimal parmi les ellipsoïdes centrées où l'on veut et non seulement en zéro. La source de cette proposition est [1], et comme toujours avec cette source, vous devez regarder à la fois l'énoncé et la preuve avec un oeil encore plus prudent que d'habitude.

PROPooVIDPooOGrRJh

Proposition 19.152 ([1])**.**
Soit un compact d'intérieur non vide K dans $\mathbb{R}^n$. Il existe un ellipsoïde de volume minimal contenant K.

Démonstration. Au lieu de considérer le compact K et de chercher où centrer l'ellipsoïde afin qu'elle puisse contenir K en un volume minimal, nous allons chercher comment translater K pour qu'un ellipsoïde centré en zéro puisse contenir l'image translétée de K en un volume minimal.

Pour $a \in \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathcal{E}_a$ la plus petite ellipsoïde centrée en 0 contenant $K + a$ (translation de K par le vecteur a). Elle est bien définie par la proposition 19.151. Notre jeu est maintenant d'étudier la fonction[81]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^+ \\ a &\mapsto \mathrm{vol}(\mathcal{E}_a). \end{aligned} \tag{19.690}$$

Nous allons montrer que f est continue et qu'elle peut être restreinte à un compact sans risque de rater un minimum.

(1) **À propos de forme quadratique** Nous notons q la forme quadratique de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ et A sa matrice symétrique associée. Si $x \in K + h$ nous avons, pour un certain $k \in K$:

$$\begin{aligned} q(x) &= q(k+h) && \text{(19.691a)} \\ &= \langle k+h, A(k+h)\rangle && \text{(19.691b)} \\ &= \langle k, Ak\rangle + \langle k, Ahx\rangle + \langle h, Ak\rangle + \langle h, Ah\rangle. && \text{(19.691c)} \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $A = A^t$ nous avons aussi $\langle k, Ah\rangle = \langle h, Ak\rangle$ et donc

$$q(x) = 2\langle k, Ah\rangle + q(h). \tag{19.692}$$

[81] Notons que cette fonction est bien définie, même sans la partie unicité de 19.151 parce que même si $\mathcal{E}_a$ n'était pas bien définie, son volume, lui, est bien défini.

En ce qui concerne la norme, pour tout $x \in K + h$ nous avons donc la majoration

$$|q(x)| \leqslant 1 + 2\|k\|\|Ah\| + q(h) \tag{19.693a}$$
$$\leqslant 1 + 2|K|\|Ah\| + q(h) \tag{19.693b}$$

où nous avons noté $|K| = \sup_{k\in K} \|k\|$. Vu que $q(x)$ est en fait toujours positif nous pouvons oublier la valeur absolue à gauche et conclure que $K + h$ est contenu dans l'ellipsoïde

$$\mathcal{F}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leqslant 1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\}. \tag{19.694}$$

(2) **Volumes**

Nous avons donc $\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{F}_1)$. En reprenant la formule du lemme 19.149 pour le volume de l'ellipsoïde nous avons la majoration

$$\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n. \tag{19.695}$$

Autrement dit, en ce qui concerne notre fonction f :

$$f(h) \leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n. \tag{19.696}$$

EQooLVZCooJVxVNx

Nous pouvons faire le même raisonnement en partant de $K+h$ et en voyant comment modifier le rayon de $\mathcal{E}_h$ pour que $\mathcal{E}_0$ y rentre. Autrement dit, nous refaisons le raisonnement en posant $K' = K + h$ et en étudiant $K' - h$. Si q_1 est la forme quadratique de $\mathcal{E}_h$ et si A_1 est sa matrice symétrique,

$$\text{vol}(\mathcal{E}_0) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \tag{19.697}$$

En termes de f :

$$f(0) \leqslant f(h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \tag{19.698}$$

EQooRHWNooDisTyn

(3) **Encadrement**

Les majoration (19.696) et (19.698) nous permettent de créer un encadrement pour $f(h)$. En effet, en écrivant (19.698) et en continuant la majoration en remplaçant $f(h)$ par (19.696), nous obtenons

$$\begin{aligned} f(0) &\leqslant f(h)\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n \\ &\leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n. \end{aligned} \tag{19.699}$$

Vu que nous avons dans l'idée de prendre des h petits (en norme) et que les parenthèses tendent vers 1 lorsque h est petit, nous pouvons supposer qu'elles sont non nulles et allègrement les passer au dénominateur. Nous divisons donc tout par le coefficient de $f(h)$:

$$\frac{f(0)}{\big(1 + 2|K + h|\|A_1h\| + q_1(h)\big)^n} \leqslant f(h) \leqslant f(0)\big(1 + 2|K|\|Ah\| + q(h)\big)^n \tag{19.700}$$

Nous utilisons la règle de l'étau[82] pour conclure que

$$\lim_{h\to 0} \text{vol}(\mathcal{E}_h) = \text{vol}(\mathcal{E}_0). \tag{19.701}$$

EQooCMAQooMkkEVR

(4) **Continuité** Si $a \in \mathbb{R}^n$ nous pouvons appliquer la limite (19.701) pour l'ellipsoïde $\mathcal{E}_a$ au lieu de $\mathcal{E}_0$, c'est-à-dire en partant du compact $K + a$ au lieu de K. Cela donne

$$\lim_{h\to 0} \text{vol}(\mathcal{E}_{a+h}) = \text{vol}(\mathcal{E}_a). \tag{19.702}$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^n$.

(5) **Compact**

Nous avons en hypothèse que K est d'intérieur non vide. Il existe donc $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$. Soit l'hyperplan affine H passant par a et perpendiculaire à a. Nous notons $S = H \cap B(a, r)$. Nous avons évidemment $S \subset K$ et donc $S \subset \mathcal{E}_0$. Vu que l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ est convexe et contient K, tout le cône de base S et de hauteur a est dans $\mathcal{E}_0$.

[82] Théorème 14.247.

Sans rentrer dans le détails du calcul du volume de ce cône, son volume tend vers l'infini si a tend vers l'infini[83]

Nous avons donc une majoration

$$\text{vol}(\mathcal{E}_h) \geqslant \text{volume du cône de base } S \text{ et de hauteur } a+h. \tag{19.703}$$

Dès que ce volume est plus grand que $\text{vol}(\mathcal{E}_0)$, il est impossible que $\text{vol}(\mathcal{E}_h) \leqslant \text{vol}(\mathcal{E}_0)$. Soit $R > 0$ tel que pour tout $\|h\| \geqslant R$, le volume du cône soit plus grand que $\text{vol}(\mathcal{E}_0)$. Le minimum de f est certainement dans $B(0,R)$ parce que au moins

$$\text{vol}(\mathcal{E}_0) \in f\big(B(0,R)\big). \tag{19.704}$$

(6) **Minimum**

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \overline{B(0,R)} &\to \mathbb{R}^+ \\ h &\mapsto \text{vol}(\mathcal{E}_h). \end{aligned} \tag{19.705}$$

Elle est continue sur un compact, et le théorème de Weierstrass 9.215 nous dit alors qu'elle atteint son minimum. Il n'y a cependant pas unicité de la valeurs de h pour laquelle $f(h)$ est minimum.

(7) **Envoi**

Soit $s \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(s)$ soit minimal. Cela signifie que parmi tous les ellipsoïdes centrés en zéro et contenant des ensembles de la forme $K+h$, le plus petit est celui qui contient $K+s$. Soit $\mathcal{E}_s$ cet ellipsoïde.

Je prétend que $\mathcal{E}_s - s$ est le plus petit ellipsoïde contenant K, tout centres confondus. En effet, si $\mathcal{F}$ est un ellipsoïde centré en a et contenant K, alors $\mathcal{F}-a$ est un ellipsoïde centré en zéro et contenant $K-a$. Nous avons alors

$$\text{vol}(\mathcal{F}-a) \geqslant \text{vol}(\mathcal{E}_s) = \text{vol}(\mathcal{E}_s - s). \tag{19.706}$$

L'invariance de la mesure par translation est le théorème 16.254.

□

19.20 Prolongement de fonctions

LEMooTUQIooEyTLBa

Lemme 19.153 ([1])**.**
Soient un espace topologique séparé X et un ouvert $V \subset X$. Nous considérons une fonction[84] *$\phi \in C_c^0(V, \mathbb{C})$. Alors l'extension*

$$\begin{aligned} h\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{19.707}$$

est continue sur X.

Démonstration. La proposition 9.49 dit qu'il est suffisant de montrer que h est continue en tout point. Si $a \in V$, alors il existe un voisinage de a contenu dans V (parce que V est ouvert). Sur ce voisinage, $h = \phi$ est continue, et donc h est continue en a.

Supposons maintenant que $a \notin V$. Pour chaque $x \in \text{supp}(\phi)$, nous considérons deux ouverts disjoints A_x et B_x tels que $x \in A_x$ et $a \in B_x$ et tels que $A_x \subset V$. Étant donné que $\{A_x\}_{x\in\text{supp}(\phi)}$ recouvre le compact $\text{supp}(\phi)$, nous pouvons considérer un sous-ensemble fini $I \subset \text{supp}(\phi)$ tel que $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ recouvre $\text{supp}(\phi)$.

Nous posons alors $B = \bigcap_{i\in I} B_i$. En tant que intersection finie d'ouverts, B est un ouvert qui contient a. Nous avons $A \cap B = \varnothing$. Donc $h = 0$ sur A. Vu que h est identiquement nulle sur un voisinage de a, l'application h est continue en a. □

LemdCOMQM

Lemme 19.154.
Soit E, un espace vectoriel normé complet et (A_n) une suite emboîtée de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ contient exactement un point.

[83] Topologie du complété en un point, j'imagine que vous voyez de quoi il en retourne. Sinon c'est la définition 9.204, et il faut sans doute adapter le lemme 14.87 au cas de $\mathbb{R}^n$ pour tout faire dans les règles.

[84] Pour rappel, dans C_c^0, le 0 signifie « continue » et le c signifie « à support compact ». Donc ici, ϕ est à support compact dans V.

Démonstration. Si l'intersection contenait deux points distincts a et b, alors nous aurions pour tout n la majoration $\text{diam}(A_n) \geqslant \|a-b\|$ qui ne dépend pas de n. Cela contredirait la limite.

Soit une suite (x_n) avec $x_k \in A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est une suite de Cauchy. En effet si $\epsilon > 0$, considérons N tel que $\text{diam}(A_N) < \epsilon$. Dans ce cas dès que $n, m > N$ nous avons $x_n, x_m \in A_N$ et donc $\|x_n - x_m\| \leqslant \epsilon$. La suite x_n converge donc vers un élément dans E.

Nous devons montrer que $x \in A_k$ pour tout k. La queue de suite $(x_n)_{n\geqslant k}$ est une suite de Cauchy dans A_k qui converge donc vers un élément de A_k (ici nous utilisons le fait que A_k est fermé). Par unicité de la limite, cette dernière doit être x. Par conséquent $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

PropTTiRgAq

Proposition 19.155 ([616]).
Soit un espace normé X, un espace de Banach F et une partie dense A de X. Si l'application linéaire

$$f\colon \big(A, \|.\|_X\big) \to F \tag{19.708}$$

est continue[85]*, alors il existe une unique application linéaire continue $\tilde{f}\colon X \to F$ prolongeant f. De plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Démonstration. Soient $x \in X$ et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'ensembles définie par

$$A_n = \{y \in A \text{ tel que } \|x-y\| \leqslant 2^{-n}\}. \tag{19.709}$$

Étant donné que A est dense, ces ensembles sont tous non vides. De plus $\text{diam}\, A_n \to 0$ parce que si $y, y' \in A_n$ alors

$$\|y-y'\| \leqslant \|y-x\| + \|x-y'\| \leqslant 2^{-n+1}. \tag{19.710}$$

Vu que f est bornée, la suite d'ensembles $f(A_n)$ est une suite emboitée d'ensembles non vides de F. De plus leur diamètre tend vers zéro. En effet si $z, z' \in f(A_n)$, nous posons $z = f(y)$, $z' = f(y')$ et nous avons

$$\|z-z'\| \leqslant \|f(y)-f(x)\| + \|f(x)-f(y')\| \leqslant \|f\|\big(\|y-x\| + \|x-y'\|\big), \tag{19.711}$$

ce qui montre que $\text{diam}\, f(A_n) \leqslant \|f\|2^{-n+1}$. Notons que nous avons utilisé la linéarité de f. Par le lemme 19.154, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(A_n)}$ contient exactement un point. Nous posons

$$S(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(A_n)}. \tag{19.712}$$

Nous allons montrer que l'application $x \mapsto S(x)$ ainsi définie est l'application que nous cherchons.

Nous commençons par montrer que pour toute suite $y_k \to x$ avec $y_k \in A$ nous avons

$$f(y_k) \to S(x). \tag{19.713}$$ EqRnRZxW

Pour cela nous considérons $n_0 \in \mathbb{N}$ et k_0 tel que $y_{k_0} \in A_{n_0}$. Avec cela nous avons

$$\|f(y_k) - S(x)\| \leqslant \text{diam}(A_{n_0}) \leqslant \|f\|2^{-n_0+1}. \tag{19.714}$$

Pour montrer que S est linéaire, nous considérons deux suites dans A : $y_k \to x$ et $y'_k \to x'$ ainsi que la somme $y_k + y'k \to x + x'$. Nous écrivons la relation (19.713) pour ces trois suites :

$$f(y_k) \to S(x) \tag{19.715a}$$
$$f(y'_k) \to S(x') \tag{19.715b}$$
$$f(y_k + y'_x) \to S(x+x'). \tag{19.715c}$$

Cependant, étant donné que f est linéaire, pour tout k nous avons $f(y_k + y'_k) = f(y_k) + f(y'_k)$ et par conséquent

$$f(y_k + y'_k) \to S(x) + S(x'). \tag{19.716}$$

Par unicité de la limite, $S(x+x') = S(x)+S(x')$. Le même genre de raisonnement montre que $S(\lambda x) = \lambda S(x)$. L'application S est donc linéaire.

En ce qui concerna la continuité, nous avons

$$\|S(x)\| = \lim \|f(y_k)\| \leqslant \|f\|\|\lim y_k\| = \|f\|\|x\|, \tag{19.717}$$

donc $\|S\| \leqslant \|f\|$, c'est-à-dire que S est borné et donc continue parce que linéaire (théorème 12.98).

Nous montrons maintenant que S prolonge f. Si $x \in A$, alors nous avons $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) = f(x)$, et donc $S(x) = f(x)$. Cela montre du même coup que $\|f\| \leqslant \|S\|$ et que par conséquent $\|f\| = \|S\|$.

Passons à la partie sur l'unicité. Soient donc S et T deux prolongements continus de f sur X. Soient $x \in X$ et $x_n \to x$ une suite dans A. Par continuité nous avons $T(x_n) \to T(x)$ et $S(x_n) \to S(x)$. Étant donné que par ailleurs pour tout n nous avons $S(x_n) = T(x_n)$, l'unicité de la limite montre que $T(x) = S(x)$. □

[85] Nous avons bien mis sur A la topologie induite de X. Notons que ce n'est pas toujours celle qui est la plus naturelle sur A.

19.20.1 Encore du prolongement

Dans la même veine que la proposition 19.155 nous avons ce résultat.

ThoPVFQMi

Théorème 19.156 ([617]).
Soient E et F, deux espaces métriques complets ainsi que A dense dans E. Si $u\colon A\to F$ est uniformément continue, alors elle se prolonge de façon unique en une fonction continue $\tilde{u}\colon E\to F$. De plus ce prolongement est uniformément continu.

Démonstration. Soit $x\in E\setminus A$ et une suite (x_n) contenue dans A et convergente vers x. Nous voulons définir

$$\tilde{u}(x)=\lim_{n\to\infty}u(x_n) \tag{19.718}$$

mais pour ce faire nous devons prouver que la suite $\big(u(x_n)\big)$ converge dans F et que la limite ne dépend pas de la suite choisie parmi les suites de A qui convergent (dans E) vers x.

Commençons par montrer que $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy dans F. Pour cela nous prenons $\epsilon>0$ et $\eta>0$ telle que $d_E(a,b)<\eta$ implique $d_F\big(u(a),u(b)\big)<\epsilon$ (uniforme continuité de u). Après, il suffit de choisir N tel que pour tout $n,m>N$ nous ayons $d(x_m,x_n)<\eta$ (parce que x_n est de Cauchy). Avec tout ça nous avons

$$d_F\big(u(x_m),u(x_n)\big)<\epsilon, \tag{19.719}$$

ce qui signifie que $\big(u(x_n)\big)$ est de Cauchy et donc convergente dans F.

Nous voulons montrer maintenant que si (x_n) et (y_n) sont deux suites dans A convergentes vers x alors $\lim_{n\to\infty}u(x_n)=\lim_{n\to\infty}u(y_n)$. Pour cela nous considérons la suite $z=(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots)$. Nous avons évidemment $z_n\to x$, et donc $u(z_n)$ converge dans F par ce qui a été dit plus haut. Mais $u(x_n)$ et $u(y_n)$ en sont deux sous-suites convergentes. Donc leurs limites sont égales.

Il reste à montrer que ce $\tilde{u}$ est continue et uniformément continue. Pour cela nous utilisons le module de continuité et le lemme 12.377. Étant donné que $\tilde{u}$ prolonge u nous avons

$$\omega_{\tilde{u}}(h)\geqslant\omega_u(h). \tag{19.720}$$

EqFRYqON

Soient $h>0$ et $\epsilon>0$; soient aussi $x,y\in E$ tels que $d(x,y)<h$. Nous prenons des suites $(a_n)\to x$ et $(b_n)\to y$ tout en choisissant n assez grand pour avoir $d_E(a_n,b_n)<h$. Nous avons

$$d_F\big(\tilde{u}(x),\tilde{u}(y)\big)\leqslant d_F\big(\tilde{u}(x),u(a_n)\big)+d\big(u(a_n),u(b_n)\big)+d_F\big(u(b_n),\tilde{u}(y)\big). \tag{19.721}$$

Si n est assez grand, par construction de $\tilde{u}$, le premier et le dernier terme sont plus petits que ϵ. Par définition du module de continuité nous avons d'autre part $d_F\big(u(a_n),u(b_n)\big)\leqslant\omega_u(h)$. Du coup

$$d_F\big(\tilde{u}(x),\tilde{u}(y)\big)\leqslant\omega_u(h)+2\epsilon. \tag{19.722}$$

Si nous prenons le supremum sur les x et y vérifiant $d_E(x,y)<h$, à gauche nous obtenons $\omega_{\tilde{u}}(h)$ tandis que le membre de droite ne dépend pas de x et$y$. Donc pour tout ϵ, nous avons

$$\omega_{\tilde{u}}(h)\leqslant\omega_u(h)+2\epsilon. \tag{19.723}$$

En comparaison avec (19.720), nous trouvons

$$\omega_{\tilde{u}(h)}\leqslant\omega_u(h). \tag{19.724}$$

Les fonctions u et $\tilde{u}$ ayant le même module de continuité, le lemme 12.377 nous enseigne que l'une est uniformément continue si et seulement si l'autre l'est. Vu que u est uniformément continue par hypothèse, le prolongement $\tilde{u}$ est uniformément continu. □

DEFooMHQMooEvLccV

Définition 19.157.
*Un **plongement** de l'espace topologique X dans Y est une application $f\colon X\to Y$ telle que $f\colon X\to f(X)$ soit un homéomorphisme (isomorphisme d'espaces topologiques). Note : nous considérons sur $f(X)$ la topologie induite depuis Y.*

ThoPHllyoB

Théorème 19.158 (Extensiton des isométries).
Soit $\tilde{M}$ un espace métrique complet et une application isométrique

$$f\colon A\to\tilde{M} \tag{19.725}$$

où A est une partie dense d'un espace métrique M (pas spécialement complet). Alors f accepte une unique extension isométrique

$$\tilde{f}\colon M \to \tilde{M} \tag{19.726}$$

Supposons de plus que M soit complet[86]*. Alors $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ est une bijection si et seulement si $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.*

Démonstration. Nous commençons par prouver l'unicité. Soient $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ deux extensions de f et $x \in M$. Si (a_n) est une suite dans A convergeant vers x (possible parce que A est dense dans M), alors nous avons

$$\tilde{f}_1(a_n) = \tilde{f}_2(a_n) \tag{19.727}$$

et donc $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ par continuité (une application isométrique est continue (proposition 9.329)).

Nous démontrons à présent l'existence.

(1) **Construction de $\tilde{f}$** Soient $x \in M$ et (a_n) une suite dans A qui converge vers x. Nous définissons

$$\tilde{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f(a_k). \tag{19.728}$$

Note : nous pouvons prouver que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (a_n) convergeant vers x, mais ce serait superflu parce que nous avons déjà prouvé l'unicité de $\tilde{f}$. Par contre nous devons expliquer pourquoi la limite du membre de droite de (19.728) existe dans $\tilde{M}$. D'abord la suite (a_n) est de Cauchy parce qu'elle est convergente (attention : M n'étant pas complet le fait d'être de Cauchy n'implique pas la convergence). Donc, étant donné que f est une isométrie, la suite $\big(f(a_n)\big)$ est de Cauchy dans $\tilde{M}$. Or ce dernier étant complet, la suite des images converge.

Montrons que cette application $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ répond à la question.

(2) **$\tilde{f}$ est isométrique**

Soient $a, b \in M$ et des suites dans A convergeant vers eux : $a_n \to a$, $b_n \to b$. Nous avons, par continuité de l'application distance,

$$\begin{aligned}
d\big(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)\big) &= \lim_{k\to\infty} d\big(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b)\big) && (19.729a)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b_l)\big) && (19.729b)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(f(a_k), f(b_l)\big) && (19.729c)\\
&= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} d\big(a_k, b_l\big) && (19.729d)\\
&= d(a,b). && (19.729e)
\end{aligned}$$

Cela prouve que $\tilde{f}$ est une isométrie.

Pour la suite nous supposons que M est complet. Notons tout de suite que $\tilde{f}$ est injective parce qu'elle est isométrique.

(3) **Bijection implique dense**

Nous supposons que $\tilde{f}\colon M \to \tilde{M}$ est une bijection. Notons que $f\colon A \to \tilde{M}$ a son image dans $\tilde{M}$. Donc $\overline{f(A)} \subset \tilde{M}$.

Étant donné que $\tilde{f}$ a pour image des limites de suites dans $f(A)$, l'image de $\tilde{f}$ est contenue dans $\overline{f(A)}$, c'est-à-dire $\tilde{f}(M) \subset \overline{f(A)}$. Donc si $\tilde{f}$ est surjective, c'est que $\tilde{M} \subset \overline{f(A)}$. Au final nous avons l'égalité $\overline{f(A)} = \tilde{M}$. Cela prouve que si $\tilde{f}$ est bijective, alors $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.

(4) **Dense implique bijective**

Nous supposons que $\overline{f(A)} = \tilde{M}$ et nous devons prouver que $\tilde{f}$ est surjective. Soient $x \in \tilde{M}$ et $f(a_n)$ une suite dans $f(A)$ qui converge vers x ; une telle suite existe parce que $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$. Cette suite est de Cauchy dans $\tilde{M}$ parce que dans un espace métrique, une suite convergente est de Cauchy. La suite (a_n) est elle-même également de Cauchy parce que

$$d(a_n, a_m) = d\big(f(a_n), f(a_m)\big). \tag{19.730}$$

[86] Il me semble que cette hypothèse manque dans [618].

Étant donné que (a_n) est de Cauchy dans M, elle converge vers un élément que nous nommons $a \in M$. Par continuité de f nous avons alors

$$\tilde{f}(a) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) = x. \tag{19.731}$$

Cela prouve que x est bien dans l'image de $\tilde{f}$ et donc que $\tilde{f}$ est surjective.

□

19.21 Complétion d'un espace métrique

LEMooGJONooVwUgyv

Lemme 19.159 ([619]).
Soient des espaces métriques (X,d) et (Y,ρ). Soit une application isométrique $f\colon X \to Y$.

ITEMooKJJHooAEDfIU

(1) Si (x_n) est de Cauchy dans X, alors $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y.

ITEMooBGWMooQPfTAz

(2) Si (a_n) et (b_n) sont deux suites de Cauchy dans X ayant la même limite, alors $\big(f(a_n)\big)$ et $\big(f(b_n)\big)$ ont même limite.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Soit N_ϵ tel que si $p, q \geqslant N_\epsilon$, nous avons $d(x_p, x_q) \leqslant \epsilon$. Pour ce même N_ϵ, vu que f est isométrique,

$$\rho\big(f(x_p), f(x_q)\big) = d(x_p, x_q) \leqslant \epsilon. \tag{19.732}$$

Cela prouve (1). Nous passons à (2).

Supposons $a_n \xrightarrow{X} x$ et $b_n \xrightarrow{X} x$, et nous considérons y_a et y_b les limites $f(a_n) \xrightarrow{Y} y_a$ et $f(b_n) \xrightarrow{Y} y_b$. Nous avons

$$\rho(y_a, y_b) \leqslant \rho\big(y_a, f(a_n)\big) + \underbrace{\rho\big(f(a_n), f(b_n)\big)}_{=d(a_n,b_n)} + \rho\big(f(b_n), y_b\big) \tag{19.733a}$$

$$\leqslant \rho\big(y_a, f(a_n)\big) + d(a_n, x) + d(x, b_n) + \rho\big(f(b_n), y_b\big). \tag{19.733b}$$

À droite, les quatre termes tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$. Donc $\rho(y_a, y_b) = 0$, et donc $y_a = y_b$. □

LEMooNFIOooZUMhuA

Lemme 19.160 ([619]).
Soient des espaces métriques (X,d) et (Y,ρ) ainsi que D dense dans X. Nous supposons que Y est dense et nous considérons une application isométrique $f\colon D \to Y$.

Alors il existe une unique isométrie $F\colon X \to Y$ qui étend f.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Construction de F** Nous commençons par l'existence. Soit $x \in X$. Étant donné que D est dense dans X, il existe une suite (x_n) dans D telle que $x_n \xrightarrow{X} x$. Nous déduisons du lemme 19.159 que $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y, et même que la limite ne dépend pas de la suite (x_n) convergeant vers x. Bref, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} F\colon X &\to Y \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} f(x_n) \end{aligned} \tag{19.734}$$

où (x_n) est n'importe quelle suite dans D qui converge vers x. Si $x \in D$, alors il suffit de prendre la suite constante $x_n = x$ pour obtenir que $F(x) = f(x)$.

(2) **F est une isométrie**

Soient $x, y \in X$ ainsi que deux suites de Cauchy $x_n \xrightarrow{X} x$ et $y_n \xrightarrow{X} y$. Soit $\epsilon > 0$. Si n est assez grand,

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y,y_n) \tag{19.735a}$$

$$\leqslant 2\epsilon + \rho\big(f(x_n), f(y_n)\big) \qquad f \text{ est isom.} \tag{19.735b}$$

$$\leqslant 2\epsilon + \rho\big(f(x_n), F(x)\big) + \rho\big(F(x), F(y)\big) + \rho\big(F(y), f(y_n)\big) \tag{19.735c}$$

$$\leqslant 3\epsilon + \rho\big(F(x), F(y)\big). \tag{19.735d}$$

Donc nous avons l'inégalité

$$d(x,y) \leqslant \rho\big(F(x), F(y)\big). \tag{19.736}$$

En partant maintenant de $\rho\big(F(x),F(y)\big)$ et en effectuant les mêmes majorations, nous trouvons l'inégalité dans l'autre sens : $F\big(F(x),F(y)\big)\leqslant d(x,y)$, de telle sorte que

$$d(x,y)=\rho\big(F(x),F(y)\big),\tag{19.737}$$

ce qui signifie que F est une isométrie.

(3) **Unicité** Soient deux isométries $F\colon X\to Y$ et $F'\colon X\to Y$ telles que $F=F'$ sur D. Nous devons prouver que $F(x)=F'(x)$ pour tout $x\in X$.

Soient donc $x\in X$ ainsi qu'une suite (x_n) dans D telle que $x_n\xrightarrow{X}x$. Nous avons alors

$$\rho\big(F(x),F'(x)\big)\leqslant\rho\big(F(x),F(x_n)\big)+\underbrace{\rho\big(F(x_n),F'(x_n)\big)}_{=0}+\rho\big(F'(x_n),F'(x)\big)\tag{19.738a}$$

$$=d(x,x_n)+d(x_n,x).\tag{19.738b}$$

Donc pour tout n nous avons $\rho\big(F(x),F'(x)\big)\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,x)$. En faisant $n\to\infty$ nous trouvons $\rho\big(F(x),F'(x)\big)\leqslant 0$ et donc $\rho\big(F(x),F'(x)\big)=0$.

□

DEFooXHQFooNBIavy

Définition 19.161 ([619]).
*Soit un espace métrique (X,d). Une **complétion** de (X,d) est un triple $(\hat{X},\hat{d},j)$ où*

(1) L'espace $(\hat{X},\hat{d})$ est un espace métrique complet,

(2) L'application $j\colon X\to\hat{X}$ est une isométrie,

(3) La partie $j(X)$ est dense dans $\hat{X}$.

THOooRLYBooCVBjoP

Théorème 19.162 (Unicité de la complétion[619]).
Soient (X,d) un espace métrique ainsi que deux complétions[87] *(X_1,d_1,j_1), (X_2,d_2,j_2). Alors les espaces (X_1,d_1) et (X_2,d_2) sont isométriques.*

Démonstration. Nous considérons l'application $f=j_2\circ j_1^{-1}\colon j_1(X)\to X_2$. Cette application est isométrique (parce que j_1 et j_2 le sont), l'espace X_2 est complet et $j_1(X)$ est dense dans X_1. Le lemme 19.160 nous permet de considérer une isométrie $F\colon X_1\to X_2$. Nous devons prouver que F est bijective.

L'application F est injective parce qu'elle est isométrique. En ce qui concerne la surjectivité, soit $y\in X_2$. Étant donné que $j_2(X)$ est dense dans X_2, il existe une suite (y_n) dans X_2 telle que $y_n\xrightarrow{X_2}y$. Pour chaque n nous choisissons $x_n\in X$ tel que $j_2(x_n)=y_n$. Nous posons $z_n=j_1(x_n)\in X_1$.

Vu que (y_n) est de Cauchy et que j_1 est isométrique, la suite (z_n) est de Cauchy. Étant donné que X_1 est complet, la suite (z_n) a une limite dans X_1. Nous pouvons donc poser $z=\lim_{n\to\infty}z_n\in X_1$.

Nous prouvons à présent que $F(z)=y$. L'application $F\colon X_1\to X_2$ est isométrique et donc continue ; elle commute donc avec la limite et

$$\lim_{n\to\infty}d_2\big(F(z_n),y\big)=d_2\big(F(z),y\big).\tag{19.739}$$

Mais $j_1(x)\in j_1(X)$, et nous savons que $F=f$ sur $j_1(X)$. Donc

$$F\big(j_1(x_n)\big)=f\big(j_1(x_n)\big)=j_2(x_n).\tag{19.740}$$

Donc nous avons le calcul

$$d_2\big(F(z),y\big)=\lim_{n\to\infty}d_2\big(F(z_n),y\big)\tag{19.741a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}d_2\big(F(j_1(x_n)),y\big)\tag{19.741b}$$

$$=\lim_{n\to\infty}d_2\big(j_2(x_n),y\big)\tag{19.741c}$$

$$=\lim_{n\to\infty}d_2(y_n,y)\tag{19.741d}$$

$$=0.\tag{19.741e}$$

Cela prouve que $F(z)=y$ et donc que F est surjective. □

[87] Définition 19.161.

Une conséquence du théorème de prolongement est le théorème suivant qui permet de compléter un espace métrique.

ThoKHTQJXZ

Théorème 19.163 (Complétion d'un espace métrique[620, 618, 619]).
Plus précisément, soit (M,d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\tilde{M}$ muni d'un plongement[88] *isométrique $\varphi\colon M\to\tilde{M}$ tel que $\varphi(M)$ soit dense dans $\tilde{M}$.*

Ce complété de M est unique au sens suivant. Si $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$ sont deux espaces métriques complets munis de plongements isométriques $f_i\colon M\to\tilde{M}_i$ dont les images sont denses, alors il existe une bijection isométrique $\phi\colon\tilde{M}_1\to\tilde{M}_2$ telle que $\phi\circ f_1=f_2$.

Démonstration. L'unicité est déjà le théorème 19.162. Nous faisons l'existence.

(1) **Existence**

Soit C_M l'ensemble des suites de Cauchy de M. Nous définissons

$$\begin{aligned} f\colon C_M\times C_M&\to\mathbb{R}\\ u,v&\mapsto\lim_{n\to\infty}d(u_n,v_n). \end{aligned}\tag{19.742}$$

Notre première tâche est de nous assurer que cela est bien défini, c'est-à-dire que la limite existe toujours. En effet, si u et v sont des suites de Cauchy dans M, nous avons

$$\begin{aligned} |d(u_n,v_n)-d(u_m,v_m)|&\leqslant|d(u_n,v_n)+d(u_n,v_m)|+|d(u_n,v_m)-d(u_m,v_m)| && (19.743a)\\ &\leqslant d(v_n,v_m)+d(u_n,u_m) && \text{lem. 9.157} \quad (19.743b)\\ &\leqslant 2\epsilon && (19.743c) \end{aligned}$$

dès que m et n sont assez grand. Cela prouve que la suite $n\mapsto d(u_n,v_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, elle converge[89].

Nous considérons la relation d'équivalence $u\sim v$ si et seulement si $f(u,v)=0$. Nous posons $\tilde{M}=C_M/\sim$ et nous y mettons la distance

$$d([u],[v])=f(u,v)\tag{19.744}$$

EqDDLNRNF

et nous devons encore vérifier que cela est bien défini. Prenons $u'\sim u$ et $v'\sim v$. Alors nous avons

$$d(u'_n,v'_n)\leqslant d(u'_n,u_n)+d(u_n,v_n)+d(v_n,v'_n),\tag{19.745}$$

et donc

$$d(u',v')=\lim_{n\to\infty}d(u'_n,v'n)\leqslant\lim_{n\to\infty}d(u_n,v_n)=d(u,v).\tag{19.746}$$

Le même argument en inversant les primes et les non primes montre l'inégalité inverse. Donc $d(u,v)=d(u',v')$ dans C_M, et donc la distance (19.744) est bien définie sur $\tilde{M}$.

Afin de s'assurer que $\tilde{M}$ répond bien à la question du théorème, il faut encore démontrer les points suivants :

- M se plonge isométriquement dans $\tilde{M}$.
- l'image de M par le plongement est dense dans $\tilde{M}$.
- $\tilde{M}$ est complet.

Nous allons maintenant considérer l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon M&\to\tilde{M}\\ x&\mapsto\text{la classe de la suite constante }x. \end{aligned}\tag{19.747}$$

(1a) **Plongement isométrique** Nous allons montrer que cela est une isométrie bijective et que $\varphi(M)$ est dense dans $\tilde{M}$. Le fait que φ soit bijective entre M et $\varphi(M)$ est évident. C'est une isométrie parce que

$$d\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)=\lim_{n\to\infty}d\big(\varphi(x)_n,\varphi(y)_n\big)=d(x,y).\tag{19.748}$$

[88] Définition 19.157.

[89] Ici nous utilisons la complétude de $\mathbb{R}$. Cette dernière doit donc être démontrée indépendamment, ce qui est fait dans le théorème 9.360. De plus nous ne pouvons pas définir $\mathbb{R}$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$ en utilisant ce théorème.

(1b) **Densité**

Soit $[u] \in \tilde{M}$. Tous les termes u_n sont des éléments de M. Nous considérons la suite dans $\varphi(M)$ donnée par

$$a_n = \varphi(u_n) \tag{19.749}$$

Chaque a_n est un élément[90] de $\tilde{M}$. Montrons que (a_n) converge dans $\tilde{M}$ vers u. Nous avons

$$\begin{aligned} d(a_n, u) &= \lim_{k\to\infty} d\big((a_n)_k, u_k\big) && (19.750a)\\ &= \lim_{k\to\infty} d(u_n, u_k) && (19.750b)\\ &= d(u_n, \ell) && (19.750c) \end{aligned}$$

en notant ℓ la limite de la suite (u_n). Ici nous avons utilisé le fait que la fonction distance était continue pour l'inverser avec la limite, par le théorème 14.245. Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, [u]) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, \ell) = 0. \tag{19.751}$$

(1c) **Complétude** Nous passons maintenant à la preuve du fait que $\tilde{M}$ est complet. Soit (y_n) une suite de Cauchy dans $\tilde{M}$. Soit $\epsilon > 0$; nous définissons $K(n)$ par

$$d\big((y_n)_k, (y_n)_l\big) < \epsilon \tag{19.752}$$

dès que $k, l \geqslant K(n)$. Cette définition fonctionne parce que pour chaque n, y_n est une suite de Cauchy dans M. Nous posons

$$x_n = (y_n)_{K(n)} \in M \tag{19.753}$$

et nous allons montrer que (x_n) est de Cauchy dans M –donc est un élément de $\tilde{M}$– et que $y_k \to (x_n)$ dans $\tilde{M}$.

Nous commençons par montrer que (x_n) est de Cauchy dans M. Nous avons

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d\big((y_n)_{K(n)}, (y_m)_{K(m)}\big) && (19.754a)\\ &\leqslant d\big((y_n)_{K(n)}, (y_n)_l\big) + d\big((y_n)_l, (y_m)_l\big) + d\big((y_m)_l, (y_m)_{K(m)}\big) && (19.754b) \end{aligned}$$

Nous choisissons n, m tels que $d(y_n, y_m) < \epsilon$, ce qui nous permet de choisir l de telle façon à avoir $d\big((y_n)_k, (y_m)_k\big) < \epsilon$ pour tout $k \geqslant l$. De plus, quitte à encore augmenter l, nous supposons que $l > K(m)$ et $l > K(m)$. Avec ces choix nous voyons que $d(x_n, x_m) < 3\epsilon$, ce qui signifie que la suite (x_n) est de Cauchy dans M.

En ce qui concerne la convergence $y_n \to (x)$, on a

$$\begin{aligned} d\big(y_n, (x)\big) &= \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_k, (y_k)_{K(k)}\big) && (19.755a)\\ &\leqslant \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_k, (y_n)_l\big) + \lim_{k\to\infty} d\big((y_n)_l, (y_k)_l\big) + \lim_{k\to\infty} d\big((y_k)_l, (y_k)_{K(k)}\big) && (19.755b) \end{aligned}$$

EqABnqNwo

Nous devons trouver un n tel que si k est suffisamment grand, le tout est majoré par ϵ. Voici nos choix :

- n tel que $d(y_n, y_m) < \epsilon$ dès que $m \geqslant n$,
- $k > n$,
- $k > K(n)$,
- $l > k$,
- $l > K(k)$,
- l suffisamment grand pour que $d\big((y_n)_l, (y_k)_l\big) < \epsilon$.

Avec tous ces choix, les trois termes de (19.755b) sont plus petits que ϵ.

Ceci prouve que $\tilde{M}$ est complet.

Unicité Cette partie de la preuve est encore à écrire. Si vous savez comment faire, écrivez-moi.

□

[90] À partir de maintenant nous n'écrivons plus explicitement la classe d'équivalence.

19.21.1 Principe des zéros isolés

ThoukDPBX

Théorème 19.164 (Principe des zéros isolés [621]).
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Soient une fonction analytique[91] *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $a \in \Omega$, un zéro non isolé de f. Alors f est nulle sur un voisinage de a.*

Démonstration. Nous écrivons f sous la forme d'une série entière[92] autour de a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{19.756}$$

EqqrvfVl

valable sur une boule $B(a,r)$. Soit c_m le premier coefficient non nul (si il n'existe pas c'est que f est nulle sur tout $B(a,r)$ et alors le théorème est prouvé). Nous avons alors

$$f(z) = c_m (z-a)^m \big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z-a)^k\big) \tag{19.757}$$

avec $d_k = c_{k+m}/c_m$. Le rayon de convergence de la série $\sum_k d_k (z-a)^k$ est le même que celui de (19.756) parce que la suite $\frac{d_k r^{m+k}}{c_m}$ reste bornée (critère d'Abel, lemme 17.18). Si nous posons

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z-a)^k, \tag{19.758}$$

alors g est une fonction continue et $g(a) = 1$. De plus

$$f(z) = c_m (z-a)^m g(z). \tag{19.759}$$

Soit une suite (z_n) de zéros de f qui converge vers a. Étant donné que g est continue, nous devrions avoir $\lim_{k\to\infty} g(z_k) = g(a) = 1$, mais si $f(z_k) = 0$ avec $z_k \neq a$, alors $g(z_k) = 0$. Cela est un paradoxe qui nous permet de conclure que si la suite z_n existe bien, alors f est identiquement nulle sur un voisinage, c'est-à-dire que tous les c_n sont nuls. □

CORooFBXXooZyfUQi

Corolaire 19.165.
Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si f s'annule sur un ouvert (non vide) de Ω, alors f s'annule sur tout Ω.

Démonstration. soit

$$N = \{z \in \Omega \text{ tel que } f = 0 \text{ sur un ouvert autour de } z\}. \tag{19.760}$$

Le fait que N soit ouvert est évident à partir de sa définition. Nous allons montrer que N est également fermé dans Ω, et donc conclure que $N = \Omega$. Soit (z_n) une suite dans N convergente vers $z \in \Omega$. Étant donné que $f(z_n) = 0$ et que f est continue, nous avons

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0, \tag{19.761}$$

ce qui fait de z un zéro non isolé de f. Par conséquent le principe des zéros isolés (théorème 19.164) nous enseigne que f s'annule dans un voisinage autour de z, c'est-à-dire que $z \in N$. L'ensemble N est donc fermé. □

ThoAVBCewB

Théorème 19.166 (Principe du prolongement analytique[1]).
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble D de Ω contenant un point d'accumulation dans Ω, alors elles sont égales sur Ω.

Démonstration. Soient deux fonctions analytique $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ égales sur D. Nous considérons la fonction $h = f - g$. Il existe dans D une suite (z_n) qui converge vers $a \in \Omega$ et telle que $f(z_n) = g(z_n)$, c'est-à-dire $h(z_n) = 0$ pour tout n.

Vu que h est continue nous avons aussi $h(a) = 0$. Le point a est donc un zéro non isolé de h. Le théorème 19.164 conclut que $h = 0$ sur Ω. □

[91] Définition 14.479.
[92] Définition de fonction analytique 14.479.

19.22 Un petit extra

Ceci provient de notes de TP de l'université libre de Bruxelles autour des années 2000-2001[622].

LEMooXRMAooRADhOM

Lemme 19.167 ([1]).
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

ItemExtrai

(1) $f(1) = 1$,

ItemExtraii

(2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *pour tout réels x et y.*

Alors $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Vu que $f(x) + f(y) = f(x + y)$, nous avons, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{p} f(\frac{1}{p}) = f(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p}) = f(1) = 1. \tag{19.762}$$

Donc $f(1/p) = 1/p$. Nous en déduisons tout de suite que $p(p/q) = pf(1/q) = p/q$. □

Si nous ajoutons l'hypothèse de continuité, nous avons un résultat plus fort.

LEMooYKCUooUiIvPJ

Lemme 19.168 ([1]).
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

(1) $f(1) = 1$,

(2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *pour tout réels x et y.*

(3) f *est continue.*

Alors f est la fonction identité : $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous savons déjà du lemme 19.167 que $f(q) = q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. Soient $x \in \mathbb{R}$, ainsi qu'une suite q_k dans $\mathbb{Q}$ telle que $q_k \xrightarrow{\mathbb{R}} x$. Par continuité, nous avons

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} q_k = x \tag{19.763}$$

parce que $f(q_k) = q_k$ pour tout k. □

Une question naturelle qu'on peut alors se poser est la suivante :

Est-il possible de définir une fonction réelle non continue ayant les propriétés (1) et (2) ?

Nous savons qu'une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est continue[93], mais qu'en dimension infinie, une application linéaire non continue est possible[94].

Donc une manière de trouver une réponse positive à la question posée plus haut, serait de voir $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel de dimension infinie.

Nous nous souvenons que, grâce au lemme de Zorn[95], tout espace vectoriel admet une base[96]. En particulier, l'ensemble des réels vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ admet une base, i.e. $\exists (e_i)_{i\in I}$ des éléments de $\mathbb{R}$ tels que tout réel s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de ces e_i, i.e.

$$\forall r \in \mathbb{R}, \exists (\lambda_i)_{i\in I} \text{ des éléments de } \mathbb{Q} \text{ tels que } r = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i. \tag{19.764}$$

C'est avec ça en main que nous allons faire le travail.

Proposition 19.169.
Soient $e_1 = 1$ ainsi qu'un irrationnel e_2. Soit une $\mathbb{Q}$-base complétée $(e_i)_{i\in I}$ avec[97] *de $\mathbb{R}$.*

[93] Proposition 12.216.
[94] Exemples 12.99 et 12.100.
[95] Lemme 1.42.
[96] Proposition 6.27.
[97] Théorème de la base incomplète 6.28. Attention : nous ne prétendons pas que I est dénombrable. Par contre, par définition d'une base, les sommes sont toujours finies. Tout réel peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie des e_i avec des coefficients rationnels.

Nous définissons $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(e_1) = e_1 \tag{19.765a}$$
$$h(e_2) = e_3 \tag{19.765b}$$
$$h(e_3) = e_2 \tag{19.765c}$$
$$h(e_i) = e_i \qquad \forall i \in I \setminus \{1,2,3\}, \tag{19.765d}$$

et par $\mathbb{Q}$-linéarité :

$$h(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i \alpha_i \tag{19.766}$$

pour tout $(\lambda_i \in \mathbb{Q})_{i\in I}$.

La fonction h vérifie

ITEMooOXXMooJFSuuN

(1) $h(1) = 1$

(2) h est $\mathbb{Q}$-linéaire, c'est-à-dire que

ITEMooAVNMooEsodLR

(2a) $h(x+y) = h(x) + h(y)$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$

ITEMooDEJMooXtvrgi

(2b) $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{Q}$.

ITEMooMHNZooBHQywD

(3) h n'est pas continue (pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$).

Démonstration. En plusieurs points

(1) **Pour (1)** C'est la condition $h(e_1) = e_1$ en nous souvenant que $e_1 = 1$.

(2) **Pour (2a)** Nous décomposons x et y dans la base $\{e_i\}_{i\in I}$. Il existe J_x et J_y finis dans I tels que[98] $x = \sum_{i\in J_x} x_i e_i$, $y = \sum_{i\in J_y} y_i e_i$. Vu que toutes les sommes sont finies, nous n'avons aucun problème à écrire

$$x + y = \sum_{i\in J_x \cup J_y} (x_i + y_i) e_i \tag{19.767}$$

et donc

$$h(x+y) = \sum_i h(x_i + y_i) = \sum_i h(x_i) + \sum_i h(y_i) = h(x) + h(y). \tag{19.768}$$

(3) **Pour (2b)** Même type de vérifications que pour (2a).

(4) **Pour (3)** Si h était continue, elle serait l'identité par le lemme 19.168. Or elle n'est pas l'identité parce que $h(e_2) = e_3$.

□

Donc nous avons trouvé une application $\mathbb{Q}$-linéaire $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas continue.

[98] Les vrais chasseurs de précisions diront que x_i est défini pour $i \in I$, mais uniquement non nul sur J_x.

Chapitre 20

Trigonométrie, isométries

20.1 Trigonométrie

20.1.1 Définitions, périodicité et quelques valeurs remarquables

PROPooZXPVooBjONka

Proposition-Définition 20.1 (Définition du cosinus et du sinus)**.**
La série

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{20.1}$$

définit une fonction $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞*. Nous l'appelons* ***cosinus****.*

La série

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{20.2}$$

EQooCMRFooCTtpge

définit une fonction $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞*. Nous l'appelons* ***sinus****.*

Démonstration. La série entière définissant $\cos(x)$ a pour coefficients

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \tag{20.3}$$

Nous pouvons la majorer par la série entière donnée par les coefficients

$$b_n = \begin{cases} 1/n! & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \tag{20.4}$$

Quelle que soit la parité de k nous avons toujours

$$\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \frac{1}{k+1}, \tag{20.5}$$

de telle sorte que la formule d'Hadamard (17.98) nous donne $R = \infty$ pour la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. A fortiori[1] le rayon de convergence pour la série du cosinus est infini.

L'assertion concernant le sinus se démontre de même.

En ce qui concerne le fait que les fonctions sin et cos sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il faut invoquer le corolaire 17.52. □

LEMooZMJTooJPnyfv

Lemme 20.2 ([1])**.**
Nous avons

SUBEQooTTNNooXzApSM

$$\cos(0) = 1 \tag{20.6a}$$
$$\sin(0) = 0. \tag{20.6b}$$

ainsi que

SUBEQSooFOGNooQrBxYc

$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{20.6ca}$$
$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{20.6cb}$$
$$\tag{20.6cc}$$

[1] Remarque 17.16.

Démonstration. Par substitution directe dans les séries. □

LEMooBBCAooHLWmno

Lemme 20.3.
En ce qui concerne la dérivation, nous avons

$$\sin' = \cos \tag{20.4a}$$
$$\cos' = -\sin. \tag{20.4b}$$

Démonstration. Il s'agit de se permettre de dériver terme à terme (proposition 17.50) les séries qui définissent le sinus et le cosinus. □

LEMooAEFPooGSgOkF

Lemme 20.4.
Les fonctions sinus et cosinus vérifient

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{20.5}$$

EQooNYCZooAxyyBd

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Posons $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ et dérivons :

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)(-)\sin(x) = 0. \tag{20.6}$$

La fonction f est donc constante par le corolaire 14.222. Nous avons donc pour tout x :

$$f(x) = f(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 1. \tag{20.7}$$

Le dernier calcul s'obtient en substituant directement x par zéro dans les séries : $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$. □

Si $z \in \mathbb{C}$ et si $n \in \mathbb{Z}$, la définition de z^n ne pose pas de problème, c'est la définition 3.30.

DefJilXoM

20.5.
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle $\exp(x + yi)$ est déjà définie en 17.70 ; elle est la fonction donnée par

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \tag{20.8}$$

PROPooXEYFooIEaPvU

Proposition 20.6.
Le rayon de convergence[2] *de la série exponentielle est infini.*

Démonstration. L'exponentielle est la série de puissance dont les coefficients sont donnés par la suite $(a_k) = 1/k!$. Nous utilisons la formule de Hadamard de la proposition 17.39 :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} = 0. \tag{20.9}$$

Donc $R = \infty$ par la partie de Hadamard qui dit que si on tombe sur $1/R = 0$, alors c'est $R = \infty$. □

PropdDjisy

Proposition 20.7 ([623]).
Quelques propriétés de l'exponentielle.

(1) Le fonction exp *est continue.*

ITEMooRLHCooJTuYKV

(2) Nous avons la formule $e^{z+w} = e^z e^w$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$.

(3) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

ITEMooIFYFooUniuKS

(4) $(\exp(z))^n = \exp(nz)$.

Démonstration. La proposition 20.6 nous enseigne que le rayon de convergence est infini. La fonction ainsi définie est alors continue par la proposition 14.408.

[2] Définition 17.12.

Les séries $\exp(z)$ et $\exp(w)$ ayant un rayon de convergence infini, nous pouvons utiliser le produit de Cauchy (théorème 17.27) :

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{z^i w^j}{i!j!} \right) \tag{20.10a}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{z^i w^{n-i}}{i!(n-i)!} \right) \tag{20.10b}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} \tag{20.10c}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \tag{20.10d}$$
$$= \exp(z+w). \tag{20.10e}$$

Nous avons utilisé la formule du binôme (proposition 3.75).

Les autres propriétés énoncées sont des corolaires :

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1. \tag{20.11}$$

□

D'autres propriétés de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$, entre autres l'holomorphie, sont données dans le théorème 28.111.

20.1.2 Exponentielle avec « e »

NORMooUZZDooXUEPvT

20.8.
La vraie fonction exponentielle utilisée en mathématique est la fonction $z \mapsto \exp(z)$ définie par la série. Avec quelques contorsions de notations, on peut faire le lien avec $z \mapsto e^z$. La vraie proposition intéressante est la proposition 17.91 qui montre que si x est réel, alors $\exp(x) = e^x$.

En ce qui concerne les nombres complexes, e^z est pratiquement définie comme étant $\exp(z)$ juste pour avoir le plaisir de dire « $e^\pi = -1$ » et dire que c'est une formule incroyable. Alors qu'en réalité le nombre e n'apparaît pas dans cette formule.

NORMooROGZooDtzzpQ

20.9.
La fonction puissance a déjà fait l'objet de nombreuses définitions et extensions. Voir le thème 52. Nous allons maintenant définir a^z pour $a > 0$ et $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle $\exp(x + yi)$ est déjà définie en 17.70 ; il suffit donc maintenant de définir les notations e^z et a^z pour $z \in \mathbb{C}$.

DEFooRBTDooNLcWGj

Définition 20.10.
Pour le nombre $e \in \mathbb{R}$ et le nombre imaginaire pur iy ($y \in \mathbb{R}$), nous définissons

$$e^{iy} = \exp(iy) \tag{20.12}$$

où exp *est la série usuelle de la définition 17.70. Pour un nombre complexe général $x + yi$ nous définissons*

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}. \tag{20.13}$$

Et enfin, si $a > 0$ et si $z \in \mathbb{C}$ nous définissons

$$a^z = e^{z \ln(a)}, \tag{20.14}$$

la fonction logarithme ici étant celle $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *définie par la proposition 17.95.*

PROPooWSDKooJREQGk

Proposition 20.11.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\exp(z) = e^z. \tag{20.15}$$

Démonstration. Nous prenons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Par définition $e^z = e^x e^{iy}$ où $e^x = \exp(x)$ par la proposition 17.91 et $e^{iy} = \exp(iy)$ par définition. Bref :

$$e^{x+iy} = \exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iy)^l}{l!}\right). \tag{20.16}$$

Nous sortons maintenant de notre manche le produit de Cauchy 17.26 :

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(iy) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} && (20.17a)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(iy)^{n-k} && (20.17b)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k(iy)^{n-k} && \text{def. 3.67} \quad (20.17c)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+iy)^n && \text{prop. 3.75} \quad (20.17d)\\
&= \exp(x+iy) && (20.17e)
\end{aligned}$$

Et voila. □

LEMooTDGKooWdpUTD

Lemme 20.12 ([1])**.**
Soient $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(a^z)^n = a^{nz}. \tag{20.18}$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul utilisant les propositions 20.7(4) et 20.11 :

$$\begin{aligned}
(a^z)^n &= \big(e^{z\ln(a)}\big)^n && (20.19a)\\
&= \exp\big(z\ln(a)\big)^n && (20.19b)\\
&= \exp\big(nz\ln(a)\big) && (20.19c)\\
&= e^{nz\ln(a)} && (20.19d)\\
&= a^{nz}. && (20.19e)
\end{aligned}$$

□

Je vous invite à remarquer qu'aucune des propositions de ce paragraphe n'est utilisé ailleurs dans le Frido. Donc la fonction $z \mapsto e^z$ est complètement inutile en math. Ce qui est réellement utilisé est $z \mapsto \exp(z)$.

20.1.3 Formules de trigonométrie

Le lemme suivant est un premier pas pour le paramétrage du cercle dont nous parlerons dans la proposition 20.66(1).

LEMooHOYZooKQTsXW

Lemme 20.13.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

(1)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{20.20}$$

EQooRVPJooTMwNTU

(2) $|e^{ix}| = 1$.

Démonstration. La définition de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ est la définition 17.70. Cette définition fonctionne parce que $\mathbb{C}$ est une algèbre normée, et que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-module vérifiant l'inégalité $|zz'| \leqslant |z||z'|$ (en l'occurrence, une égalité).

Nous remarquons que i^k vaut 1, i, -1, $-i$. Donc un terme sur deux est imaginaire pur et parmi ceux-là, un sur deux est positif. À bien y regarder, les termes imaginaires purs forment la série du sinus et ceux réels la série du cosinus.

Si vous aimez les formules,

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(y) + i\sin(y). \tag{20.21}$$

Nous avons utilisé le fait que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = i(-1)^n$. □

NORMooXOVSooEwjecU

20.14 (Formule d'Euler)**.**
En posant $x = \pi$ dans (20.20) nous trouvons la soi-disant géniale formule d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1. \tag{20.22}$$

Cette formule fait intervenir les nombres π, e, -1 et i.

En fait non.

Le nombre e n'intervient pas dans la formule d'Euler. Vous vous souvenez de la définition (20.10) ? En fait e^z est juste un abus de notation pour $\exp(z)$.

Lorsque x est réel, nous avons la formule $\exp(x) = e^x$ qui est un théorème tout à fait non trivial liant la fonction exponentielle et la fonction puissance. Il n'y a pas de tel résultat pour z complexe. Dans le cas de z complexe, la formule $\exp(z) = e^z$ est juste une définition de la fonction puissance dans les complexes.

Bref, le nombre e n'intervient pas dans la formule d'Euler.

Le contenu mathématique de la formule d'Euler est ceci :

- On défini exp, cos et sin par leurs séries.
- On prouve que $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ (facile).
- On prouve que sin et cos sont périodiques (pas facile), on note π la demi-période.
- On trouve les valeurs particulières de $\cos(\pi)$ et $\sin(\pi)$.
- On découvre que $\exp(i\pi) = -1$.

Le nombre e n'intervient à aucun moment.

Après, par analogie avec la proposition 17.91 (pas triviale du tout) qui dit $\exp(x) = e^x$ pour les réels x, on définit $e^z = \exp(z)$). Mais là c'est juste une notation par analogie avec un fait non trivial uniquement valide sur le réels.

Si vous aimez les formules qui lient un peu toutes les constantes, vous avez la formule de Stirling.

CORooWZFIooDTCoRo

Corolaire 20.15.
Le complexe conjugué[3] *de* e^{ix} *est* e^{-ix}.

Démonstration. Vu le lemme 20.13, le complexe conjugué de $z = e^{ix}$ est $\bar{z} = \cos(x) - i\sin(x)$. En utilisant (20.6c) nous avons également

$$\bar{z} = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}. \tag{20.23}$$

□

LEMooJAWBooJGfZIL

Lemme 20.16.
Nous avons les formules d'addition d'angles[4] SUBEQSooFSSMooHcYwRc

EQooJYEMooQaQMib
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{20.24a}$$
EQooECAUooQzckDv
$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) \tag{20.24b}$$
EQooCVZAooQfcrya
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \tag{20.24c}$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b). \tag{20.24d}$$

pour tout a, b *réels.*

Démonstration. Nous utilisons la formule d'addition dans l'exponentielle, proposition (17.309) et la formule (20.20) avant de séparer les parties réelles et imaginaires :

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i\big(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)\big). \tag{20.25}$$

Cela est également égal à

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b). \tag{20.26}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaires, nous obtenons les formules (20.24a) et (20.24c) annoncées.

Pour la formule (20.24c), il suffit de se souvenir que $\sin(-b) = -\sin(b)$ et $\cos(-b) = \cos(b)$ (ces deux égalités sont immédiatement visibles sur les développements en série : l'un a uniquement des puissances paires et l'autre impaires) et d'écrire (20.24a) avec $-b$ au lieu de b. □

[3] Définition 4.117.

[4] Rien ne nous empêche de donner ce nom à ces formules, mais seriez-vous capable de définir précisément le mot « angle » ?

COROooQZDQooWjMXTF

Corolaire 20.17.
Les formules suivantes pour les duplications d'angles s'ensuivent :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \tag{20.27a}$$
SUBEQooLRJDooQuFuux
$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a). \tag{20.27b}$$

Démonstration. Poser $b = a$ dans les relations du lemme 20.16. □

PROPooPMWWooGgGfwr

Proposition 20.18.
Une autre formule pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{20.28}$$

Démonstration. Nous partons des formules d'addition d'angles du lemme 20.16 pour calculer

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b). \tag{20.29}$$

Et il suffit maintenant de poser $x = a + b$, $y = a - b$. □

PROPooXGABooBAsbsq

Proposition 20.19 (Formules de linéarisation[624])**.**
Il existe des réels $a_{n,k}$ tels que

$$\cos^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\cos(kx). \tag{20.30}$$

La somme est finie.

LEMooPQWWooMdPWUT

Lemme 20.20.
Un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $p\mathbb{Z}$ pour un certain réel $p \neq 0$.

Démonstration. Soit A, un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui ne soit pas dense. Soit un intervalle $]a, b[$ qui n'intersecte pas A (si vous voulez frimer, vous noterez ici que nous utilisons le fait que les intervalles ouverts forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$[5]). Si $d = |b - a|$, l'ensemble A ne contient pas deux éléments séparés par strictement moins de d. Soit p, le plus petit élément strictement positif de A ; nous avons $p \geqslant d$ (parce que $0 \in A$ de toutes façons).

Puisque A est un groupe, nous avons $p\mathbb{Z} \subset A$.

Pour l'inclusion inverse, si $x \in A$ est hors de $p\mathbb{Z}$, il existe un $y \in p\mathbb{Z}$ avec $|x - y| < p$. Et donc le nombre $|x - y|$ est dans A tout en étant plus petit que p. Contradiction. □

PROPooFRVCooKSgYUM

Proposition-Définition 20.21 (Périodicité, le nombre π[625])**.**
Plusieurs choses à propos de la périodicité de la fonction cos*.*

(1) La fonction cos *est périodique*[6]*.*

ITEMooVPMWooBqidZG

(2) Un nombre $T > 0$ est une période si et seulement si $\cos(T) = 1$ et $\sin(T) = 0$.

Nous définissons le nombre $\pi > 0$ comme étant la moitié de la période de la fonction cos *:*

$$2\pi = \min\{T > 0 \text{ tel que } \cos(x+T) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}\}. \tag{20.31}$$

Démonstration. Plusieurs étapes.

(1) **La fonction cosinus n'est pas toujours positive** Supposons d'abord que $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, la fonction sin est strictement croissante. Mais les deux fonctions sont bornées par 1 du fait de la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. La fonction sin étant croissante et bornée, elle est convergente vers un réel par la proposition 14.57 :

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x) = \ell \tag{20.32}$$

pour un certain $\ell > 0$. Avec ça nous avons aussi (pour cause de dérivée) $\lim_{x\to\infty} \sin'(x) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x\to\infty} \cos(x) = 0$. Mais vu que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, nous en déduisons que $\lim_{x\to\infty} \sin(x) = 1$. Mézalor $\lim_{x\to\infty} \cos'(x) = -1$, ce qui veut dire que la fonction cos n'est pas bornée. Cela est impossible. Nous en déduisons que $\cos(x)$ n'est pas toujours positive.

[5] Proposition 9.158.
[6] Définition 14.207.

(2) **Il existe $T > 0$ tel que $\cos(T) = 1$ et $\sin(T) = 0$** Par ce que nous venons de faire, il existe $r > 0$ tel que $\cos(r) = 0$. Pour cette valeur, nous avons aussi obligatoirement $\sin(r) = \pm 1$. Nous avons aussi, en utilisant les formules (20.24),

$$\cos(2r) = \cos^2(r) - \sin^2(r) = -1 \tag{20.33a}$$
$$\sin(2r) = 2\cos(r)\sin(r) = 0. \tag{20.33b}$$

et par conséquent

$$\cos(4r) = \cos^2(2r) - \sin^2(2r) = 1 \tag{20.34a}$$
$$\sin(4r) = 2\cos(2r)\sin(2r) = 0. \tag{20.34b}$$

Donc $T = 4r$ fonctionne.

(3) **Si T est une période** Nous entrons dans le vif de la preuve. Soit un $T > 0$ tel que $\cos(x + T) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Avec la formule d'addition d'angle dans le cosinus nous cherchons un T tel que

$$\cos(x + T) = \cos(x)\cos(T) - \sin(x)\sin(T) = \cos(x) \tag{20.35}$$

et donc tel que

$$\cos(x)\big(\cos(T) - 1\big) = \sin(x)\sin(T). \tag{20.36}$$ EQooELSAooLNtBnn

Nous dérivons cette équation :

$$-\sin(x)\big(\cos(T) - 1\big) = \cos(x)\sin(T). \tag{20.37}$$ EQooCECFooLpxXaw

Nous multiplions chacune des deux équations (20.36) et (20.37) par $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour obtenir les quatre relations suivantes :

$$\cos^2(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \sin(x)\cos(x)\sin(T) = 0 \tag{20.38a}$$ SUBEQooLGQXooIrLMLW
$$-\sin(x)\cos(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \cos^2(x)\sin(T) = 0 \tag{20.38b}$$ SUBEQooCHTDooKwvvZF
$$\sin(x)\cos(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \sin^2(x)\sin(T) = 0 \tag{20.38c}$$ SUBEQooEWPTooTLCUMf
$$-\sin^2(x)\big(\cos(T) - 1\big) - \sin(x)\cos(x)\sin(T) = 0 \tag{20.38d}$$ SUBEQooGBXTooCEskGJ

En faisant (20.38a) moins (20.38d) nous trouvons $\cos(T) = 1$. Et en sommant (20.38b) avec (20.38c) nous avons $-\sin(T) = 0$.

(4) **Si $T > 0$ est tel que $\sin(T) = 0$ et $\cos(T) = 1$** Alors les formules d'addition d'angle du lemme 20.16 donnent tout de suite

$$\cos(x + T) = \cos(x). \tag{20.39}$$

À ce niveau nous croyons avoir prouvé que cos était périodique et que la période est donnée par

$$\min\{T > 0 \text{ tel que } \sin(T) = 0, \cos(T) = 1\}. \tag{20.40}$$

Or rien n'est moins sûr parce qu'il pourrait arriver que ce minimum n'existe pas, c'est-à-dire que l'infimum soit zéro. Autrement dit, il peut arriver que l'ensemble des périodes soit dense. Plus précisément, soit $P \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des périodes de cos. C'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et le lemme 20.20 nous dit que P est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $p\mathbb{Z}$ pour un $p > 0$.

Si P est dense, soient $t \in \mathbb{R}$ et une suite (t_n) dans P telle que $t_n \to t$. Pour tout x et tout n nous avons

$$\cos(x + t_n) = \cos(x), \tag{20.41}$$

Comme la fonction cosinus est continue, nous pouvons passer à la limite et écrire $\cos(x + t) = \cos(x)$. Cela étant valable pour tout x et pour tout t, la fonction cosinus est constante. Or nous savons que ce n'est pas le cas, donc P n'est pas dense. Donc cosinus est périodique. □

PROPooKNLAooLwQHea

Proposition 20.22.
La fonction sin *est périodique de période* 2π *et*

$$2\pi = \min\{T > 0 \text{ } tel\ que \text{ } \sin(T) = 0, \cos(T) = 1\}. \tag{20.42}$$

Démonstration. La proposition 20.21 dit que cos est périodique. Puisque $\sin = -\cos'$ par le lemme 20.3, la fonction sin est également périodique par le lemme 14.209. Si T est une période de cos, alors T est une période de sin.

Mais $\sin' = \cos$, de telle sorte que les périodes de sin sont périodes de cos. Bref, T est une période de sin si et seulement si T est une période de cos. □

20.23.
Notons que tout ceci ne nous donne pas la plus petite indication d'ordre de grandeur de la valeur de π. Cela peut encore être 0.1 autant que 500.

PROPooMWMDooJYIlis

Proposition 20.24 ([625, 1])**.**
Des propriétés à la chaine à propos des sinus, cosinus et de leurs périodes.

ITEMooRJZHooCXcKmM

(1) *Nous avons*
$$2\pi = \min\{x > 0 \text{ tel que } \cos(x) = 1, \sin(x) = 0\}. \tag{20.43}$$
ITEMooTNHMooUtOjNC

(2) *Les fonctions* sin *et* cos *sont périodiques de période* 2π.

ITEMooSPZBooIQLUXh

(3) *Nous avons* $\cos(\pi) = -1$ *et* $\sin(\pi) = 0$.

(4) *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *nous avons*
$$\cos(a + \pi) = -\cos(a) \tag{20.44a}$$
$$\sin(a + \pi) = -\sin(a). \tag{20.44b}$$
ITEMooHDQNooYHVCkg

(5) *Nous avons*
$$\pi = \min\{x > 0 \text{ tel que } \cos(x) = -1, \sin(x) = 0\}. \tag{20.45}$$
ITEMooWFNUooYAybDB

(6) *Nous avons* SUBEQSooBTNPooSvCAHO
$$\begin{cases} \cos(\pi/2) = 0 & (20.46a) \\ \sin(\pi/2) = 1. & (20.46b) \end{cases}$$
ITEMooIRALooBMGOXP

(7) *Nous avons les formules* EQSooRJZGooCFVqbZ
$$\begin{cases} \cos(x + \pi/2) = -\sin(x) & (20.47a) \\ \sin(x + \pi/2) = \cos(x) & (20.47b) \end{cases}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ITEMooFHCVooQxKPKu

(8) *Nous avons les formules*
$$\begin{cases} \cos(x - \pi/2) = \sin(x) & (20.48a) \\ \sin(x - \pi/2) = -\cos(x) & (20.48b) \end{cases}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ITEMooMQQPooGwOdbt

(9) *Nous avons*
$$\frac{\pi}{2} = \min\{x > 0 \text{ tel que } \sin(x) = 1, \cos(x) = 0\}. \tag{20.49}$$

(10) *Nous avons les valeurs*
$$\begin{cases} \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 & (20.50a) \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1. & (20.50b) \end{cases}$$
ITEMooQKPKooEPeHER

(11) *Nous avons*
$$\frac{\pi}{2} = \min\{x > 0 \text{ tel que } \cos(x) = 0\}. \tag{20.51}$$
ITEMooMEXUooGBfSInJ

(12) *Pour tout* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *nous avons* $\cos(x) > 0$ *et* $\sin(x) > 0$.

Démonstration. C'est parti.

(1) Le fond de la proposition 20.21 est que toutes les périodes $T > 0$ vérifient $\cos(T) = 1$ et $\sin(T) = 0$. La définition de 2π est que c'est la plus petite période.

(2) En utilisant le fait que l'une est la dérivée de l'autre, si T est une période de cos nous avons

$$\sin(x+T) = -\cos'(x+T) \tag{20.52a}$$
$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\cos(x+T+\epsilon)-\cos(x+T)}{\epsilon} \tag{20.52b}$$
$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\cos(x+\epsilon)-\cos(x)}{\epsilon} \tag{20.52c}$$
$$= -\cos'(x) \tag{20.52d}$$
$$= \sin(x). \tag{20.52e}$$

Nous déduisons que toute période de cos est une période de sin. De la même façon, nous pouvons prouver l'autre sens : toute période de sin est une période de cos.

(3) D'un côté nous avons

$$\cos(2\pi) = \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi) = 1 \tag{20.53}$$

parce que $\cos(2\pi) = \cos(0) = 1$. Puisque $\cos(\pi)$ et $\sin(\pi)$ sont bornés par -1 et 1, nous devons avoir $\sin(\pi) = 0$ et $\cos(\pi) = \pm 1$.

Mais d'un autre côté, le nombre 2π est le plus petit T vérifiant $\cos(T) = 1$, $\sin(T) = 0$. Donc, avoir $\cos(\pi) = 1$ n'est pas possible. Nous concluons

$$\begin{cases} \cos(\pi) = -1 & \text{(20.54a)} \\ \sin(\pi) = 0. & \text{(20.54b)} \end{cases}$$

(4) Il s'agit d'utiliser les formules d'addition d'angles du lemme 20.16 pour calculer $\cos(a+\pi)$ et $\sin(a+\pi)$ en tenant compte du fait que $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.

(5) Soit $a \in]0,\pi[$ tel que $\cos(a) = -1$ et $\sin(a) = 0$. Alors nous avons

$$\cos(a+\pi) = -\cos(\pi) = 1 \tag{20.55a}$$
$$\sin(a+\pi) = -\sin(\pi) = 0, \tag{20.55b}$$

ce qui donnerait $a+\pi \in]\pi, 2\pi[$ dont le cosinus est 1 et le sinus est zéro. Mais nous savons déjà que 2π est le minimum pour cette propriété.

(6) Nous avons

$$-1 = \cos(\pi) = \cos^2(\pi/2) - \sin^2(\pi/2), \tag{20.56}$$

donc $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin^2(\pi/2) = 1$, ce qui donne $\sin(\pi/2) = \pm 1$.

Nous devons départager le $\pm$. Pour cela nous savons que $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et que $\sin(0) = 0$, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\epsilon[$ nous avons $0 < \cos(x) < 1$ et $0 < \sin(x) < 1$ (nous avons aussi utilisé le lien entre dérivation et croissance de la proposition 14.213). Nous choisissons ϵ plus petit que $\pi/2$.

Supposons que $\sin(\pi/2) = -1$. Le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 dit qu'il existe $x_0 \in]\epsilon, \pi/2[$ tel que $\sin(x_0) = 0$. Pour cette valeur de x_0 nous devons aussi avoir $\cos(x_0) = \pm 1$. Mais puisque 2π est minimum pour avoir $\cos = 1$ et $\sin = 0$, nous devons avoir $\cos(x_0) = -1$. Alors nous avons aussi

$$\cos(x_0+\pi) = \cos(x_0)\cos(\pi) - \sin(x_0)\sin(\pi) = -\cos(x_0) = 1 \tag{20.57a}$$
$$\sin(x_0+\pi) = \cos(x_0)\sin(\pi) + \sin(x_0)\cos(\pi) = \sin(x_0) = 0. \tag{20.57b}$$

Encore une fois par minimalité de 2π, cela ne va pas. Conclusion : $\sin(\pi/2) = 1$.

(7) Il s'agit encore d'utiliser les formules d'addition d'angle en tenant compte des valeurs remarquables $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$.

(8)

(9) Supposons $x_0 \in]0,\pi/2[$ tel que $\sin(x_0) = 1$ et $\cos(x_0) = 0$. En utilisant les formules (20.47) nous avons

$$\cos(x_0+\pi/2) = -1 \tag{20.58a}$$
$$\sin(x_0+\pi/2) = 0, \tag{20.58b}$$

avec $x_0 + \pi/2 < \pi$. Cela contredirait la minimalité de π.

(10) Il s'agit d'utiliser les formules (20.47) :

$$\cos(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\pi + \pi/2) = -\sin(\pi) = 0 \tag{20.59a}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\pi + \pi/2) = \cos(\pi) = -1. \tag{20.59b}$$

(11) Si $\cos(x_0) = 0$ alors $\sin(x_0) = -1$ (parce que $\sin(x_0) = 1$ est déjà exclu). Alors $\cos(x_0 + \pi/2) = 1$ et $\sin(x_0 + \pi/2) = 0$, ce qui est également impossible.

(12) La fonction cosinus est continue (proposition 20.1) et $\cos(0) = 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique que si $\cos(x) \leqslant 0$, alors il existe $t \in]0, x]$ avec $\cos(x) = 0$. Cela n'est pas possible pour $x < \pi/2$, par le point (9).

Le cosinus est positif sur l'intervalle considéré et $\sin'(x) = \cos(x)$. Donc $\sin(0) = 0$ et la dérivée est positive. La proposition 14.213 conclut que sin est strictement croissante et donc, strictement positive.

□

LEMooFESYooBoiuol

Lemme 20.25 (Positivité[1]).
À propos de positivité de la fonction cosinus.

ITEMooIXSDooJyCQyb

(1) $\cos(0) = 1$

ITEMooWJEVooGZykbO

(2) $\cos(x) > 0$ *pour* $x \in [0, \pi/2[$.

ITEMooANEPooLGmYtc

(3) $\cos(\pi/2) = 0$.

ITEMooXXISooBycstN

(4) $\sin(\pi/2) = 1$.

ITEMooRDWJooZXWyfv

(5) $\cos(x) < 0$ *pour* $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$

ITEMooFKPAooBNlvPU

(6) $\cos(3\pi/2) = 0$.

ITEMooIDZGooBTDvDF

(7) $\cos(x) > 0$ *pour* $x \in]3\pi/2, 2\pi]$.

ITEMooBRVEooFhxohI

(8) Si $x \in]0, \pi[$ *alors* $\sin(x) > 0$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** C'est déjà fait dans le lemme 20.2.

(2) **Pour (2)** C'est la proposition 20.24(12).

(3) **Pour (3)** C'est la proposition 20.24(6).

(4) **Pour (4)** C'est la proposition 20.24(6).

(5) **Pas d'annulation entre $\pi/2$ et π** Nous montrons à présent que cos ne s'annule pas entre $\pi/2$ et π. Supposons que $\cos(\frac{\pi}{2} + s) = 0$ avec $s \in]0, \pi/2[$. Comme $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ (lemme 20.4), nous avons

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + s) = 0 & (20.60a) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + s) = \epsilon & (20.60b) \end{cases}$$

avec $\epsilon = \pm 1$. Utilisant trois fois la proposition 20.24(7) nous trouvons

$$\begin{cases} \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin(x) & (20.61a) \\ \sin(x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos(x) & (20.61b) \end{cases}$$

pour tout x. Nous appliquons cela à $x = \frac{\pi}{2} + s$, en nous souvenant que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ (par 20.24(2)) :

$$\cos(s) = \cos(\frac{\pi}{2} + s + \frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + s) = \epsilon \tag{20.62}$$

et

$$\sin(s) = \sin(\frac{\pi}{2} + s + \frac{3\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2} + s) = 0. \tag{20.63}$$

Si $\epsilon = 1$, nous avons une contradiction avec 20.24(1). Si $\epsilon = -1$, nous avons une contradiction avec 20.24(5).

Donc $\cos(x) \neq 0$ pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

(6) $\cos(x) < 0$ **sur** $]\pi/2, \pi]$ Nous savons que $\cos(\pi) = -1$ (20.24(3)). Étant donné que la fonction cos est continue et qu'elle ne s'annule pas sur $]\pi/2, \pi]$, nous en déduisons qu'elle y est partout strictement négative.

(7) **Pour (5), (6), (7)** Il est directement visible sur le développement de définition que $\cos(-x) = \cos(x)$. Et comme $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, nous avons

$$\cos(\pi + s) = \cos(-\pi - s) = \cos(\pi - s). \tag{20.64}$$

Donc toutes les valeurs (et tous les signes) de $\cos(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$ peuvent être déduits de ceux sur $[0, \pi]$.

(8) **Pour (8)**

□

PROPooJGEHooOohyAj

Proposition 20.26 (Tableau de signes)**.**
Voici le tableau de signe de sin *et* cos *:*

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\sin(x)$	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
$\cos(x)$	1	+	0	−	−1	−	0	+	1

(20.65)

La 2π-période permet de savoir le signe partout dans $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. Les valeurs en 0 sont immédiates en substituant $x = 0$ dans la série. Entre 0 et $\pi/2$, c'est la proposition 20.24(6). Les valeurs en $\pi/2$ sont 20.24(6). Pour le reste, nous pouvons utiliser 20.24(7). □

LEMooPARBooTXbbiB

Lemme 20.27 ([3])**.**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$*.*

ITEMooDPLMooEfiCUZ

(1) Nous avons $\cos(x) = \cos(y)$ *si et seulement si*

$$y \in \{x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{-x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{20.66}$$

ITEMooXPNVooVtFqEY

(2) Nous avons $\sin(x) = \sin(y)$ *si et seulement si*

$$y \in \{x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{-x + (2k+1)\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{20.67}$$

Démonstration. Pour (1), nous partons de la proposition 20.18 qui nous permet de dire que $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0. \tag{20.68}$$

Le tableau de signe de la proposition 20.26 nous dit quand les sinus s'annulent : $\sin(t) = 0$ si et seulement si $t \in \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Donc si $\cos(x) = \cos(y)$, nous avons soit $(x + y)/2 \in \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ soit $(x - y)/2 \in \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Dans le premier cas nous avons $y \in \{-x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et dans le second cas $y \in \{x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Pour le sens inverse, nous supposons que $y \in \{x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{-x + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, et on refait le calcul à l'envers pour vérifier qu'alors $\cos(x) = \cos(y)$.

La preuve de (2) est du même tonneau[7]. □

PROPooZULQooBKWrcv

Proposition 20.28.
Les nombres $x, y \in \mathbb{R}$ *vérifient* [SUBEQSooIHUGooAUchjn]

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(y) & \text{(20.69a)} \\ \sin(x) = \sin(y) & \text{(20.69b)} \end{cases}$$

si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y = x + 2k\pi$*.*

[7] Mais je n'ai pas vérifié. Si ça bloque quelque part, écrivez-moi.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Leftarrow$ Si $y = x + 2k\pi$, le résultat est correct parce que la proposition 20.24(2) dit que sin et cos sont périodiques de période 2π.

(2) $\Rightarrow$ Supposons que $x > y$. Nous calculons $\sin(x-y)$ et $\cos(x-y)$ en utilisant les formules du lemme 20.16 et en tenant compte de (20.69). Cela donne $\cos(x-y) = 1$ et $\sin(x-y) = 0$. La proposition 20.21(2) dit alors que $x - y$ est une période de la fonction cos.

Or *la* période de cos est 2π (proposition 20.24(2)). Donc toutes les périodes de cos sont les $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ (lemme 14.208).

□

CORooTFMAooHDRrqi

Corolaire 20.29.
Des nombres $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $e^{ix} = e^{iy}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$.

Démonstration. Le lemme 20.13 donne $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Donc l'équation $e^{ix} = e^{iy}$ revient au système (20.69) dont les solutions sont bien $y = x + 2k\pi$. □

LEMooBIPFooQNiTqZ

Lemme 20.30 ([1])**.**
À propos de croissance et décroissance des fonctions trigonométriques.

(1) Sur $]0, \pi[$, la fonction cos *est décroissante.*

(2) Sur $]-\pi, 0[$, la fonction cos *est croissante.*

Démonstration. Nous savons que $\cos' = -\sin$ par le lemme 20.3. La liaison entre dérivée et croissance est la proposition 14.213. Les signes de la fonction cosinus sont dans le lemme 20.25. Les signes de la fonction sinus peuvent être déduits de la proposition 20.24(7).

Vous avez tout en main. □

Tout cela nous permet de calculer quelques valeurs remarquables de cosinus et sinus ainsi que d'écrire le tableau de variations de sinus et cosinus.

LEMooIGNPooPEctJy

Lemme 20.31.
Nous avons les valeurs remarquables

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{20.70}$$

Démonstration. La relation (20.27b) donne

$$0 = \cos(\pi/2) = \cos^2(\pi/4) - \sin^2(\pi/4). \tag{20.71}$$

Donc $\cos^2(\pi/4) = \sin^2(\pi/4)$. Mais puisque $\sin(\pi/4)$ et $\cos(\pi/4)$ sont positifs, ils sont égaux.

Nous avons aussi $\sin^2(\pi/4) + \cos^2(\pi/4) = 1$. Donc le nombre $x = \cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$ vérifie l'équation $2x^2 = 1$, dont l'unique solution positive est $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

LEMooRMHAooDEAPMw

Lemme 20.32.
Nous avons la valeur remarquable

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}. \tag{20.72}$$

Démonstration. Il faut utiliser la formule (20.24a) avec $\cos(\pi) = \cos(2\pi/3 + \pi/3)$ en sachant que $\cos(\pi) = -1$. Ensuite $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi/3 + \pi/3)$. En décomposant ainsi, nous exprimons $-1 = \cos(\pi)$ en termes de $\cos(\pi/3)$ et de $\sin(\pi/3)$. En substituant $\sin^2(\pi/3) = 1 - \cos^2(\pi/3)$ nous trouvons que le nombre $\cos(\pi/3)$ vérifie l'équation

$$4x^3 - 3x + 1 = 0. \tag{20.73}$$

Croyez-le ou non, les solutions de cette équation sont $x = -1$ et $x = 1/2$. Allez. Faisons comme si nous le savions pas. En tout cas, ces deux nombres sont des solutions, et nous avons la factorisation[8]

$$4x^3 - 3x + 1 = (2x-1)^2(x+1). \tag{20.74}$$

Donc $1/2$ est de multiplicité 2 et -1 de multiplicité 1. Le théorème 3.286 nous dit qu'il n'y a alors pas d'autres racines que ces deux-là[9].

[8] Factorisation d'un polynôme en sachant des racines, proposition 3.279.
[9] Nous attirons votre attention sur le fait que cela n'est en aucun cas une trivialité.

Nous en déduisons que la valeur de $\cos(\pi/3)$ est soit $1/2$ soit -1. La proposition 20.24(5) nous dit qu'il est impossible que $\cos(\pi/3)$ soit égal à -1 parce que $\pi/3 < \pi$. Donc $\cos(\pi/3) = 1/2$ comme annoncé. □

Remarque 20.33.
Vous avez déjà sans doute vu la démonstration de $\cos(30°) = 1/2$ à partir de la figure 20.4. Il n'est pas possible de l'utiliser parce que cela n'est en réalité pas loin d'être la définition de l'angle entre deux droites.

Si vous voulez savoir la définition de l'angle entre deux droites, il faut passer par la définition 20.164, laquelle se base sur le lemme 20.148 qui, elle-même, se base sur la proposition 20.64.

Bref, à notre niveau, nous sommes encore loin de pouvoir faire des raisonnements trigonométriques sur base de géométrie dans les triangles.

PROPooJFAGooYjRJcb

Proposition 20.34.
Pour tout $x \in [0, \pi/4[$ nous avons $\cos(x) > \sin(x)$.

Démonstration. Nous posons $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. Elle vérifie $f(0) = 1$. En utilisant les dérivées du lemme 20.3, nous trouvons

$$f'(x) = -\big(\sin(x) + \cos(x)\big). \tag{20.75}$$

Mais sur $]0, \pi/2[$ nous avons $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$ (proposition 20.24(12)). Donc f est strictement décroissante. Elle ne peut donc passer qu'une seule fois par zéro. Le lemme 20.31 nous indique que $f(\pi/4) = 0$. Donc $f(x) > 0$ sur $[0, \pi/4[$. □

PROPooIBYEooClQttq

Proposition 20.35.
Quelques valeurs trigonométriques.

(1) Pour le sinus :

(1a) $\sin(0) = 0$
(1b) $\sin(\pi/6) = 1/2$
(1c) $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
(1d) $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$
(1e) $\sin(\pi/2) = 1$

(2) Pour le cosinus :

(2a) $\cos(0) = 1$
(2b) $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$
(2c) $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
(2d) $\cos(\pi/3) = 1/2$
(2e) $\cos(\pi/2) = 0$

(3) Pour la tangente :

(3a) $\tan(0) = 0$
(3b) $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$
(3c) $\tan(\pi/4) = 1$
(3d) $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$
(3e) $\tan(\pi/2)$ *est non défini.*

Démonstration. Plusieurs ont déjà été faites. Les autres ne seront pas démontrées dans l'ordre énoncé.

(1) $\sin(0) = 0$ Substitution dans la définition (20.2).

(2) $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ C'est le lemme 20.31.

(3) $\sin(\pi/3) = 1/\sqrt{2}$ Nous utilisons la formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ avec $x = \pi/3$. Vu que $\cos(\pi/3) = 1/2$ (lemme 20.32), cela donne $\sin^2(\pi/3) = 3/4$. Nous en déduisons que $\sin(\pi/3)$ vaut $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La proposition 20.24(5) nous dit que sin est positive sur $[0, \pi]$. Donc c'est bien la possibilité $\sqrt{3}/2$ qui est la bonne.

(4) $\sin(\pi/6) = 1/2$ **et** $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ Nous partons de l'équation (20.27b) pour écrire

$$\sin(\pi/3) = 2\cos(\pi/6)\sin(\pi/6). \tag{20.76}$$

Nous avons déjà vu que $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. En posant $x = \sin(\pi/6)$ nous avons également $\cos(\pi/6) = \sqrt{1 - x^2}$ parce que nous savons que la fonction cosinus est positive sur $[0, \pi/2]$ (proposition 20.24(12)). Nous avons donc l'équation

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{1 - x^2}. \tag{20.77}$$

Nous passons au carré et posons $y = x^2$. Après quelque manipulations,

$$16y^2 - 16y + 3 = 0. \tag{20.78}$$

Cela donne deux possibilités pour y : $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Puisque $x > 0$, nous pouvons simplement passer à la racine carrée : $x = \sqrt{3}/2$ ou $x = 1/2$.

Notez que si nous avions posé $x = \cos(\pi/6)$ au lieu de $x = \sin(\pi/6)$, nous aurions obtenu le même résultat. Donc $\sin(\pi/6)$ et $\cos(\pi/6)$ peuvent tous deux avoir les valeurs $\sqrt{3}/2$ ou $1/2$. Cela fait 4 possibilités.

Étant donné que $\sin^2(\pi/6)+\cos^2(\pi/6) = 1$, les deux possibilités avec $\sin(\pi/6) = \cos(\pi/6)$ sont exclues.

La proposition 20.34 nous dit aussi que $\cos(\pi/6) > \sin(\pi/6)$. Donc $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(\pi/6) = 1/2$.

(5) $\sin(\pi/2) = 1$ C'est dans (20.46).

(6) $\cos(0) = 1$ Substitution dans la définition.

(7) $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ Déjà fait avec le sinus de $\pi/6$.

(8) $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ Lemme 20.31.

(9) $\cos(\pi/3) = 1/2$ Lemme 20.32.

(10) $\cos(\pi/2) = 0$ Dans (20.46).

Toutes les valeurs pour la tangente s'obtiennent maintenant par la définition, en calculant $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. □

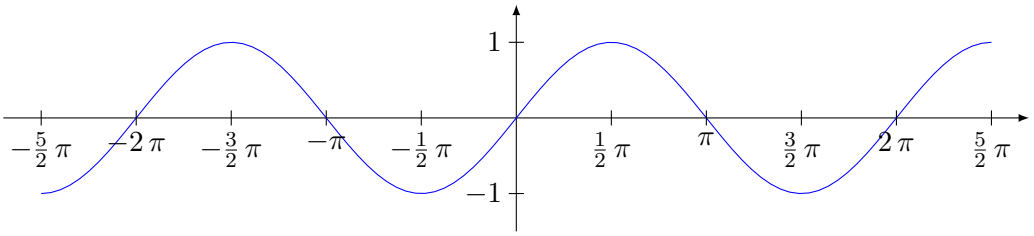
Voici un tableau qui rappelle les valeurs à retenir pour les fonctions sinus, cosinus et tangente.

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	N.D.

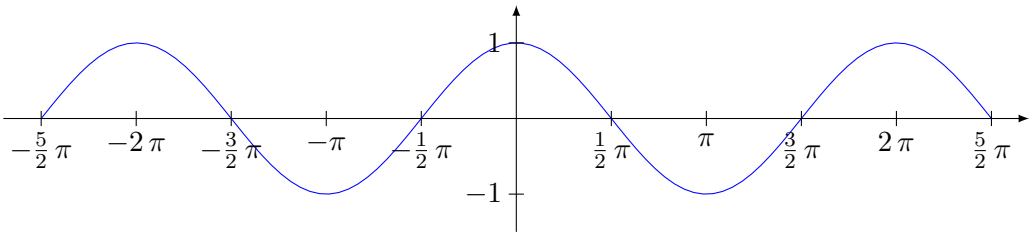
PGooIMQFooTnBdU (20.79)

où « N.D. » signifie « non défini ».

Rappelons le graphe de la fonction sinus :



celui de la fonction cosinus :



developcosenpisur3

Exemple 20.36.
Développer la fonction cos autour de $x = \frac{\pi}{3}$. Utiliser la valeur remarquable du lemme 20.32. Nous développons autour de $h = 0$ la fonction $\cos(\frac{\pi}{3} + h)$:

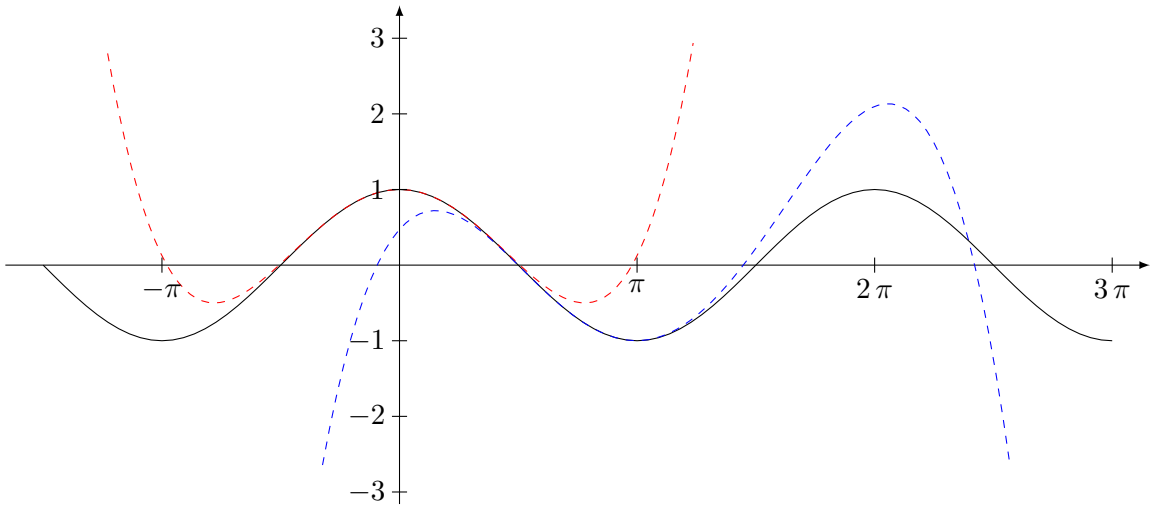
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \sim \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + h\cos'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{h^2}{2}\cos''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2. \tag{20.80}$$

Il est aussi possible d'écrire cela en notant $x = x_0 + h$, c'est-à-dire en remplaçant h par $x - \frac{\pi}{3}$:

$$\cos(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2. \tag{20.81}$$

△

20.37.
Voici un petit dessin pour donner une idée.



(1) En noir le graphe de $\cos(x)$.

(2) En rouge, le développement de $\cos(x)$ à l'ordre 4 autour de $x = 0$.

(3) En bleu, le développement de $\cos(x)$ à l'ordre 4 autour de $x = 3\pi/4$.

EXOooMWGTool

Exemple 20.38.
Étudiez la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

(2) $x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(3) $x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Item0035d

(4) $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans ces exercices, les fonctions données sont dérivables et à dérivée continue sur $\mathbb{R}_0$ car pour $a \in \mathbb{R}_0$, il existe toujours une boule autour de a dans laquelle la fonction est composée de fonctions dérivables (sin, $\frac{1}{x}$, ...). L'intérêt de l'exercice est donc d'établir (ou réfuter) la continuité et la dérivabilité en 0.

(1) Notons f cette fonction. f n'est pas continue en 0 car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 0 = 0 \neq f(0)$$

En particulier f n'est pas dérivable en 0 (et donc la continuité de sa dérivée n'a pas de sens en 0).

(2) Dans ce cas-ci, la limite « restreinte »

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas puisque, par exemple, pour la suite de terme général

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

on a bien $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ mais

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1 \neq f(0)$$

puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) = 1$. Donc la fonction n'est pas continue.

(3) Montrons que la fonction, notée f, est continue en 0. Pour tout x réel, nous avons

$$0 \leqslant |f(x)| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$$

ce qui montre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ par la règle de l'étau.

Par ailleurs, f n'est pas dérivable en 0 car la limite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas, comme on l'a vu précédemment.

(4) Montrons que cette fonction, notée f, est dérivable en 0 (ce qui prouvera qu'elle y est continue). Calculons

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

où la dernière égalité a été montrée à l'exercice précédent. Nous avons donc $f'(0) = 0$.

Par ailleurs, en utilisant les règles de calcul usuelles sur les dérivées, nous obtenons pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une fonction ne possédant pas de limite en 0 puisque, par exemple, si x_k est tel que

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, mais $f'(x_k)$ tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$. La dérivée n'est donc pas continue en zéro.

△

20.2 Trucs et astuces de calcul d'intégrales

SECooKSOFooEVKDLh

Afin d'alléger le texte de calculs parfois un peu longs, nous regroupons ici les intégrales à une variable.

20.2.1 Quelques intégrales « usuelles »

ItemIntegrali

(1) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big)} \tag{20.82}$$

se fait par partie en posant

$$\begin{aligned} u &= \ln(x), \quad & dv &= x\,dx \\ du &= \frac{1}{x}\,dx, \quad & v &= \frac{x^2}{2}, \end{aligned} \tag{20.83}$$

et ensuite

$$I = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}\big(\ln(x) - \frac{1}{2}\big). \tag{20.84}$$

(2) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(x^2)dx = x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}.} \tag{20.85}$$

En utilisant le fait que $\ln(u^2) = 2\ln(u)$, nous retombons sur une intégrale du type (1) :

$$I = x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2}. \tag{20.86}$$

(3) L'intégrale

$$\boxed{I = \int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)(x^2+1) - x^2 - \frac{1}{2}} \quad \text{EqTrucIntxlnxsqpux} \tag{20.87}$$

se traite en posant $v = 1+x^2$ de telle sorte à avoir $dx = \frac{dv}{2x}$ et donc

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)(x^2+1) - x^2 - \frac{1}{2}. \tag{20.88}$$

(4) L'intégrale

$$I = \int \cos(\theta)\sin(\theta)\ln\left(1+\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)d\theta \tag{20.89}$$

demande le changement de variable $u = \cos(\theta)$, $d\theta = -\frac{du}{\sin(\theta)}$. Nous tombons sur l'intégrale

$$I = -\int u\ln\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right) = -\int u\ln(1+u^2) + \int u\ln(u^2), \tag{20.90}$$

qui sont deux intégrales déjà faites. Nous trouvons

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2(\theta)-1}{\sin^2(\theta)-2}\right)\sin^2(\theta) - \ln\left(\sin^2(\theta)-2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sin^2(\theta)-1\right) \tag{20.91}$$

(5) L'intégrale

$$\boxed{\int \frac{r^3}{1+r^2}dr = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(r^2+1).} \tag{20.92}$$

commence par faire la division euclidienne de r^3 par r^2+1 ; ce que nous trouvons est $r^3 = (r^2+1)r - r$. Il reste à intégrer

$$\int \frac{r^3}{1+r^2}dr = \int r\,dr - \int \frac{r}{1+r^2}dr. \tag{20.93}$$

La fonction dans la seconde intégrale est $\frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}$ où $f(r) = 1+r^2$, et donc $\int \frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2}\ln(1+r^2)$. Au final,

$$I = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}\ln(r^2+1). \tag{20.94}$$

(6) L'intégrale

$$\boxed{I = \int \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \frac{\sin^2(\theta)}{2}} \quad \text{EqTrucIntexcxdx} \tag{20.95}$$

se traite par le changement de variable $u = \sin(\theta)$, $du = \cos(\theta)d\theta$, et donc

$$\int \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2(\theta)}{2}. \tag{20.96}$$

(7) L'intégrale

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x)} \quad \text{EqTrucsIntsqrtAplusx} \tag{20.97}$$

s'obtient en effectuant le changement de variable $u = \sinh(\xi)$.

(8) L'intégrale

$$\boxed{\int \cos^2(x)\sin^2(x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}} \quad \text{EqTrucIntcossqsinsq} \tag{20.98}$$

s'obtient à coups de formules de trigonométrie. D'abord, la formule (20.27b) permet de récrire la fonction à intégrer sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(x). \tag{20.99}$$

Ensuite nous utilisons le fait que $\sin^2(t) = (1-\cos(2t))/2$ pour transformer la formule à intégrer en

$$f(x) = \frac{1-\cos(4x)}{8}. \tag{20.100}$$

Cela s'intègre facilement en posant $u = 4x$, et le résultat est

$$\int f(x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}. \tag{20.101}$$

(9) La fonction

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{20.102}$$

est le **sinus cardinal** de x. Nous allons montrer que

$$\boxed{\int_0^\infty \big|\operatorname{sinc}(x)\big|dx = \infty}. \tag{20.103}$$

D'abord nous avons

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\big|\sin(t)\big|}{t}dt \geqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\big|\sin(t)\big|}{n\pi}dt, \tag{20.104}$$

mais par périodicité,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \big|\sin(t)\big|dt = \int_0^\pi \sin(t)dt = 2. \tag{20.105}$$

Par conséquent

$$\int_0^{n\pi} \big|\operatorname{sinc}(t)\big|dt \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{20.106}$$

ce qui diverge lorsque $n \to \infty$.

(10) Les intégrales, pour $\epsilon > 0$,

$$\boxed{\int_0^\infty \cos(kx)e^{-\epsilon x}dx = \frac{\epsilon}{k^2+\epsilon^2}} \tag{20.107}$$

et

$$\boxed{\int_0^\infty \sin(kx)e^{-\epsilon x}dx = \frac{k}{k^2+\epsilon^2}} \tag{20.108}$$

se calculent deux fois par partie. Nous posons

$$I = \int_0^\infty \cos(kx)e^{-\epsilon x}dx \tag{20.109a}$$

$$J = \int_0^\infty \sin(kx)e^{-\epsilon x}dx. \tag{20.109b}$$

L'intégrale I s'effectue par partie en posant $u = \cos(kx)$ et $v' = e^{-\epsilon x}$. Un peu de calcul montre que

$$I = \frac{1}{\epsilon} - \frac{k}{\epsilon}J. \tag{20.110}$$

Par ailleurs l'intégrale J se fait également par partie pour obtenir

$$J = \frac{k}{\epsilon}I. \tag{20.111}$$

En résolvant pour I et J les deux équations déduites, nous trouvons

$$I = \frac{\epsilon}{k^2+\epsilon^2} \tag{20.112a}$$

$$J = \frac{k}{k^2+\epsilon^2}. \tag{20.112b}$$

20.2.2 Reformer un carré au dénominateur

Lorsqu'on a un second degré au dénominateur, le bon plan est de reformer un carré parfait. Par exemple :

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1. \tag{20.113}$$

Ensuite, le changement de variable $t = x + 1$ est pratique parce que cela donne $t^2 + 1$ au dénominateur.

Cherchons

$$I = \int \frac{1-x}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1-x}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1-(t-1)}{t^2+1} \tag{20.114}$$

où nous avons fait le changement de variable $t = x + 1$, $dt = dx$. L'intégrale se coupe maintenant en deux parties :

$$I = \int \frac{-t}{t^2+1} + \int \frac{2}{t^2+1}. \tag{20.115}$$

La seconde est dans les formulaires et vaut

$$2\arctan(t) = 2\arctan(x+1), \tag{20.116}$$

tandis que la première est presque de la forme f'/f :

$$\int \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^1+1) = \frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2). \tag{20.117}$$

20.2.3 Décomposition en fractions simples

La décomposition en fractions simples décrite en 21.1.3 permet d'intégrer des fractions rationnelles. Elle peut parfois être évitée par la méthode de Rothstein-Trager que nous expliquerons dans 22.15.3.

20.3 Très modeste approximation de π

Nous sommes en droit de vouloir une valeur approchée de π.

LEMooJWSGooExmtDA

Lemme 20.39.
Nous avons l'encadrement

$$2\sqrt{2} < \pi < 4. \tag{20.118}$$

Démonstration. Grace au lemme 20.31 nous savons que la fonction sin passe de 0 à $\sqrt{2}/2$ sur un intervalle de taille $\pi/4$ avec une dérivée majorée par 1. Par conséquent

$$\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{20.119}$$

et donc[10]

$$\pi > 2\sqrt{2} \simeq 2.82 \tag{20.120}$$

De plus la fonction sin passe de 0 à $\sqrt{2}/2$ sur un intervalle de taille $\pi/4$ avec une dérivée minorée par $\sqrt{2}/2$, donc

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}, \tag{20.121}$$

ce qui donne

$$\pi < 4. \tag{20.122}$$

□

Pour avoir une meilleur approximation de π, nous pouvons remarquer que $\pi \in]2.82, 4[$, et que cet intervalle est suffisamment petit pour ne pas recouvrir l'intervalle correspondant pour 2π. L'équation $\cos(x) = -1$ possède donc une unique solution dans cet intervalle (et cette solution est π). Nous pouvons donc faire une dichotomie pour trouver la valeur de π, pourvu que nous ayons une façon d'évaluer des valeurs de $\cos(x)$ de façon pas trop ridicule.

LEMooIECUooQOGYyN

Lemme 20.40.
Pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Démonstration. Nous commençons par les valeurs $x > 0$. Considérons la fonction

$$f(x) = x - \sin(x). \tag{20.123}$$

La dérivée de f vaut

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0, \tag{20.124}$$

De plus $f(0) = 0$. Vu que f est croissante, nous avons $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

(1) **Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$** Nous avons $|x| = x$ et $|\sin(x)| = \sin(x)$, et ce que nous venons de dire à propos de f suffit pour conclure.

[10] Sérieusement, êtes-vous capables de trouver une approximation de $\sqrt{2}$ en ne vous basant que sur des choses vues jusqu'ici ?

(2) **Pour $x \geqslant \pi$** En utilisant l'approximation de π du lemme 20.39, nous avons $\pi > 2\sqrt{2} > 2$ et donc[11]

$$|x| - |\sin(x)| > 2 - 1 = 1 > 0. \tag{20.125}$$

(3) **Pour $x < 0$** Si $x \leqslant 0$, ce que nous venons de faire nous assure que $\sin(-x) \leqslant -x$. Par ailleurs, nous savons déjà par (20.6c) que $\sin(-x) = -\sin(x)$. Nous avons donc

$$|\sin(x)| = \sin(-x) \leqslant -x = |x|. \tag{20.126}$$

□

20.3.1 Les fonctions tangente et arc tangente

Définition 20.41.
La fonction ***tangente*** *est :*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{20.127}$$

où sin *et* cos *sont de la définition 20.1.*

La fonction tangente n'est pas définie sur les points de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une interprétation géométrique, qui justifie le nom, est donnée sur la figure 20.1.

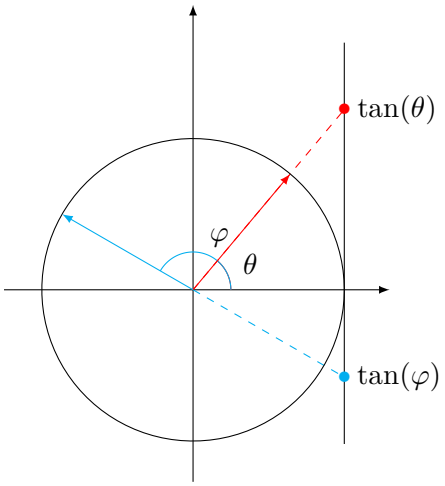


FIGURE 20.1 : Interprétation géométrique de la fonction tangente. La tangente de l'angle θ est positive (et un peu plus grande que 1) tandis que celle de la tangente de l'angle φ est négative. LabelFigTgCercleTrigono

LEMooYAMFooXCLXfr

Lemme 20.42.
La dérivée de la fonction tangente vaut

$$\tan'(x) = \tan^2(x) + 1, \tag{20.128}$$

Démonstration. Il suffit de suivre les règles de calcul comme la dérivation du quotient 14.196(5). □

PROPooTLHUooPpqupE

Proposition 20.43.
La fonction

$$\begin{aligned} \tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned} \tag{20.129}$$

est une bijection.

Démonstration. Le cosinus ne s'annulant pas sur l'intervalle donné, la fonction est bien définie. Nous avons

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan(x) = +\infty \tag{20.130}$$

[11] Ouais ; l'approximation $\pi > 2$ nous suffit. On est large.

parce que la limite du sinus est 1 est celle du cosinus est zéro par les valeurs positives. Le même raisonnement donne la limite en $-\pi/2$ qui vaut $-\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires[12] dit que la fonction tangente est alors surjective sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs le lemme 20.42 nous donne la dérivée de la tangente sous la forme $\tan'(x) = \tan^2(x) + 1$, ce qui nous donne une dérivée partout strictement positive, et donc une fonction strictement croissante et donc injective. □

Le graphe de la fonction tangente est sur la figure 20.2.

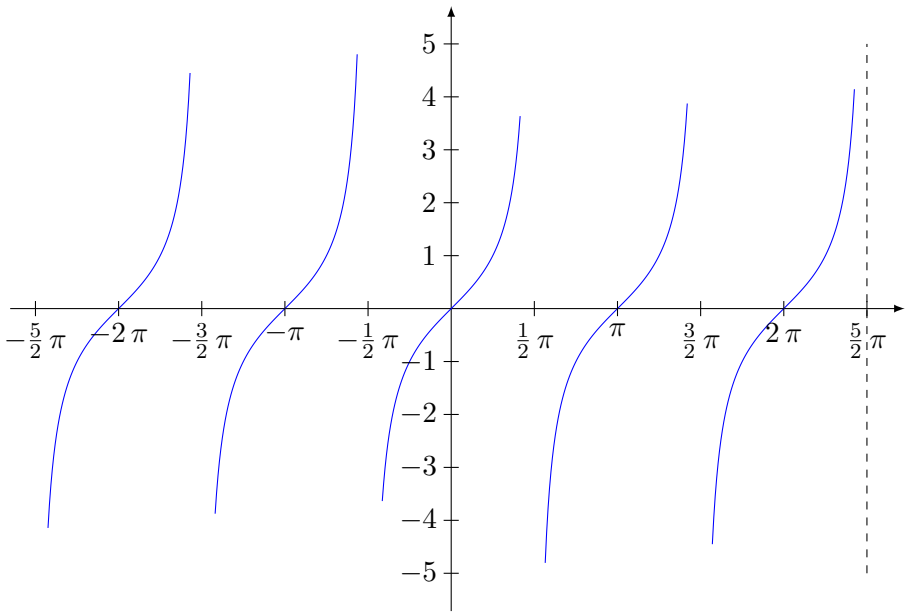


FIGURE 20.2 : Le graphe de la fonction tangente. LabelFigPVJooJDyNAg

En ce qui concerne la bijection réciproque nous avons le théorème suivant.

THOooUSVGooOAnCvC

Théorème 20.44.
La fonction inverse de la tangente,

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned} \tag{20.131}$$

nommée ***arc tangente*** *est*

(1) *impaire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

ITEMooMNHLooOVhIIb

(2) *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{20.132}$$

EQooGCHGooPlwYWt

Démonstration. Il est immédiatement visible sur son développement de définition (20.2) que la fonction sinus est impaire. Une vérification similaire montre que la fonction cosinus est paire. La fonction tangente est alors impaire et sa réciproque l'est tout autant.

La fonction arc tangente est également dérivable (donc continue) par la proposition 14.203 parce que la fonction tangente l'est. Notons qu'ici nous nous sommes restreint à $]-\pi/2, \pi/2[$. Sinon, le résultat est faux.

La formule proposée pour la dérivée provient également de la proposition 14.203 et de la dérivée de la tangente du lemme 20.42. □

LEMooHRDCooGtnyeQ

Lemme 20.45.
Nous avons les limites

(1) $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$,

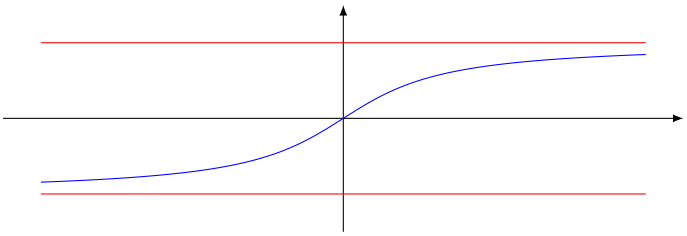
(2) $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

[12] Théorème 11.92.

LEMooHJEKooARZMil

Lemme 20.46.
L'application arctan: $\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ *est un homéomorphisme*[13].

Exemple 20.47.
Un homéomorphisme ϕ: $\mathbb{R} \to]-1,1[$ est donné par exemple par la fonction $\phi(t) = \frac{2}{\pi}\arctan(t)$ dont le graphique est donné ci-dessous :



△

LEMooJKIUooEMMOrs

Lemme 20.48.
Nous avons la valeur remarquable

$$\arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}. \tag{20.133}$$

Le nombre $\arctan(x_0)$ se calcule en cherchant l'angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont la tangente vaut x_0. Nous obtenons le tableau de valeurs suivant :

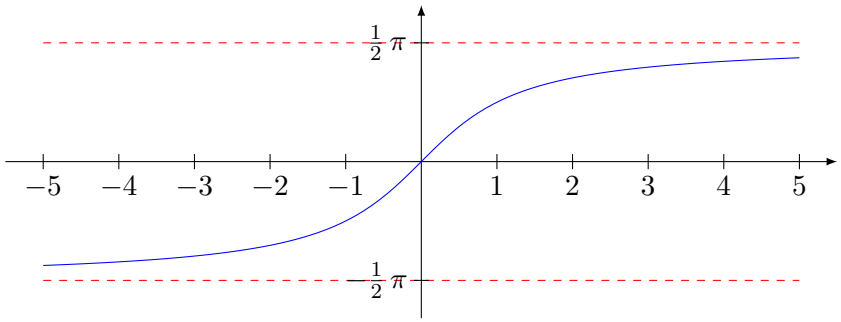
LEMooPQNCooDkEUyw

Lemme 20.49.
Quelques valeurs remarquables de l'arc tangente :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

(20.134)

En ce qui concerne la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$, elle s'obtient « en retournant » la partie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ du graphique de la fonction tangente :



20.3.2 La fonction arc sinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{20.135}$$

et sa réciproque éventuelle.

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas bijective : elle prend une infinité de fois chaque valeur de $J = [-1,1]$. Pour définir une bijection réciproque de la fonction sinus en utilisant le théorème 14.52, nous devons donc choisir un intervalle à partir duquel la fonction sinus est monotone. Nous choisissons l'intervalle

$$I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \tag{20.136}$$

La fonction

$$\begin{aligned} \sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{20.137}$$

est une bijection croissante et continue. Nous avons donc le résultat suivant.

[13] Bijection continue, inversion continu définition 9.54.

Théorème 20.50 (Définition et propriétés de arc sinus)**.**
Nous nommons ***arc sinus*** *la bijection inverse de la fonction* $\sin\colon I\to J$. *La fonction*

$$\begin{aligned}\arcsin\colon [-1,1]&\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ x&\mapsto\arcsin(x)\end{aligned}\tag{20.138}$$

ainsi définie est

(1) *continue et strictement croissante ;*

(2) *impaire : pour tout* $x\in[-1,1]$ *nous avons* $\arcsin(-x)=-\arcsin(x)$.

Démonstration. Nous prouvons le fait que arcsin est impaire. Un élément de l'ensemble de définition de arcsin est de la forme $y=\sin(x)$ avec $x\in[-\pi/2,\pi/2]$. La relation (14.99) s'écrit dans notre cas

$$x=\arcsin\big(\sin(x)\big).\tag{20.139}$$

Nous écrivons d'une part cette équation avec $-x$ au lieu de x :

$$-x=\arcsin\big(\sin(-x)\big)=\arcsin\big(-\sin(x)\big)=\arcsin(-y);\tag{20.140}$$

et d'autre part nous multiplions (20.139) par -1 :

$$-x=-\arcsin\big(\sin(x)\big)=-\arcsin(y).\tag{20.141}$$

En égalisant les valeurs (20.140) et (20.141) nous trouvons

$$\arcsin(-y)=-\arcsin(y),\tag{20.142}$$

ce qui signifie que arcsin est une fonction impaire. □

Notons que cette preuve repose sur le fait que tout élément de l'ensemble de définition de la fonction arc sinus peut être écrit sous la forme $\sin(x)$ pour un certain x.

Si $x_0\in[-1,1]$ est donné, calculer $\arcsin(x_0)$ revient à trouver un angle θ_0 dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ pour lequel $\sin(\theta_0)=x_0$. Un tel angle sera forcément unique.

Remarque 20.51.
La définition de arc sinus découle du choix de l'intervalle I, qui est une convention. Il aurait été possible de faire un choix différent : pourriez-vous trouver la réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $[\pi/2,3\pi/2]$? Le mieux est de l'écrire comme une translatée de arc sinus, en utilisant le fait que sinus est une fonction périodique.

Lemme 20.52.
Nous avons $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Pour calculer $\arcsin(1)$, il faut chercher un angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ayant 1 pour sinus : résoudre $\sin(\theta)=1$. La solution est $\theta=\frac{\pi}{2}$ et nous avons donc $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$. □

À l'aide des valeurs remarquables de la fonction sinus nous obtenons le tableau suivant de valeurs remarquables pour l'arc sinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Les autres valeurs remarquables peuvent être déduites du fait que l'arc sinus est une fonction impaire.

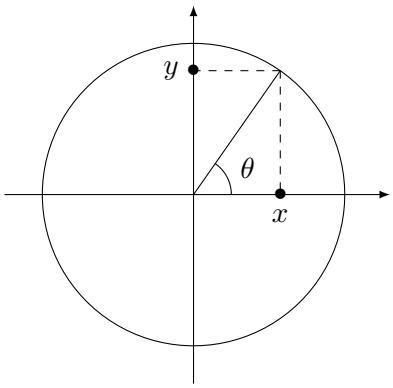
En ce qui concerne la dérivabilité de la fonction arc sinus, en application de la proposition 14.203 elle est dérivable en tout $y=\sin(x)$ tel que $\sin'(x)\neq0$, c'est-à-dire tel que $\cos(x)\neq0$. Or $\cos(x)=0$ pour $x=\pm\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $y=\sin(\pm\frac{\pi}{2})=\pm1$. La fonction arc sinus est donc dérivable sur $]-1,1[$. Nous avons donc la propriété suivante pour la dérivabilité.

Proposition 20.53.
La fonction arc sinus est continue sur $[-1,1]$ *et dérivable sur* $]-1,1[$. *Pour tout* $y\in]-1,1[$, *la dérivée est donnée par la formule* (14.543), *qui dans ce cas s'écrit*

$$\arcsin'(y)=\frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\tag{20.143}$$

La dernière égalité viens du fait que si $x = \arcsin(y)$ alors $y = \sin(x)$ et $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$.

Pour comprendre la dernière égalité, remarquer que dans le dessin suivant, $\theta = \arcsin(y)$, donc $y = \sin(\theta)$, et $x = \cos(\theta)$.



Notons enfin que le graphe de la fonction arc sinus est donné à la figure 20.3.

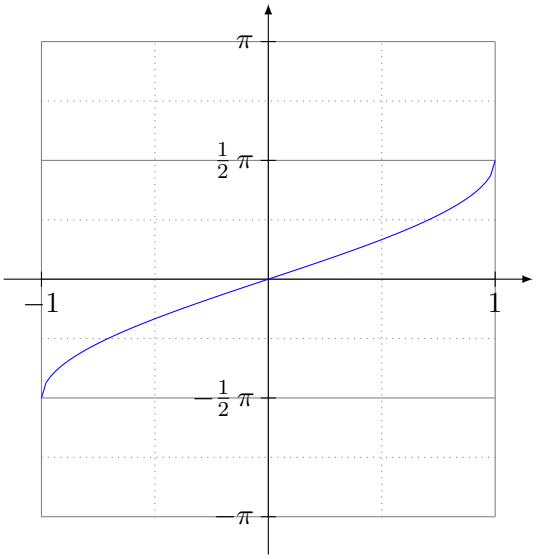


FIGURE 20.3 : Le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ LabelFigFGRooDhFkch

20.3.3 La fonction arc cosinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1] \tag{20.144}$$

et son éventuelle réciproque. Encore une fois il n'est pas possible d'en prendre la réciproque globale parce que ce n'est pas une bijection ; ne fut-ce que parce qu'elle est périodique (proposition 20.21). Nous choisissons de considérer l'intervalle $[0,\pi]$ sur lequel la fonction cosinus est continue et strictement monotone décroissante.

Nous avons alors le résultat suivant :

PROPooZOZHooSMoYQD

Proposition-Définition 20.54.
Pour définir la fonction arc cosinus.

ITEMooMJWZooNHgQox

(1) La fonction

$$\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1] \tag{20.145}$$

est une bijection continue strictement décroissante.

(2) Sa bijection réciproque est la fonction

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi] \tag{20.146}$$

nommée ***arc cosinus****.*

(3) La fonction arc cosinus est continue, strictement décroissante.

(4) Elle est dérivable et pour tout $y \in]-1,1[$, sa dérivée est donnée par

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sin\big(\arccos(y)\big)} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{20.147}$$

Démonstration. La fonction cosinus est continue et même de classe C^∞ par la proposition 20.1. Elle est strictement décroissante parce que sa dérivée $(-\sin)$ y est strictement négative (strictement, à l'intérieur du domaine).

Le fait que arc cosinus soit une bijection continue strictement monotone est dans le théorème de la bijection 14.52. La dérivabilité et la formule sont de la proposition 14.203. □

Pour $y_0 \in [-1,1]$, trouver la valeur de $\arccos(y_0)$ revient à résoudre l'équation $\cos(x_0) = y_0$. Cela nous permet de construire une tableau de valeurs :

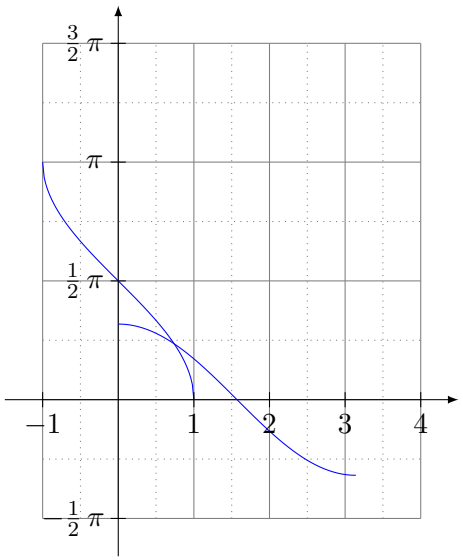
x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

Remarque 20.55.
Certes la fonction cosinus est paire (vue sur $\mathbb{R}$), mais la fonction arc cosinus ne l'est pas car elle est une bijection entre $[-1,1]$ et $[0,\pi]$.

Exemple 20.56.
Cherchons $\arccos(\frac{1}{2})$. Il faut trouver un angle $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. La solution est $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

Il n'est cependant pas immédiat d'en déduire la valeur de $\arccos(-\frac{1}{2})$. En effet $\theta = \arccos(-\frac{1}{2})$ si et seulement si $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0,\pi]$. La solution est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. △

En ce qui concerne la représentation graphique, il suffit de tracer la fonction cosinus entre 0 et π puis de prendre le symétrique par rapport à la droite $y = x$.



20.3.4 Une meilleure approximation de π

Nous avions laissé le nombre π avec l'approximation assez minable de $2\sqrt{2} < \pi < 4$ en le lemme 20.39. Nous pouvons maintenant faire nettement mieux.

Le lemme 20.48 donne

$$\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \tag{20.148}$$

et l'idée est de donner un développement de arctan autour de zéro, de l'évaluer en $1/\sqrt{3}$ et d'égaliser le résultat à $\pi/6$. Tout cela donne lieu à des calculs peut-être fastidieux, mais comme un gars l'a fait dès l'an 1424[626] pour trouver 16 décimales correctes, nous faisons comme si c'était facile.

Pour trouver le développement en série de Taylor (théorème 14.486) de arc tangente autour de $x = 0$, il faut partir de la formule (20.132) et sans doute pas mal calculer et faire une récurrence[14]. Le résultat est :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, \tag{20.149}$$

valable pour $x \in]-1, 1[$. Avec cela nous avons

$$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \tag{20.150}$$

et donc

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)k}{(2k+1)3^k}. \tag{20.151}$$

Pour donner une idée du fait que ça fonctionne pas mal, voici le calcul pour quelques termes :

```
1
2
3  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7 sage: n(taylor(arctan(x),x,0,5)(1/sqrt(3)))*6
8 3.15618147156995
9 sage: n(taylor(arctan(x),x,0,10)(1/sqrt(3)))*6
10 3.14260474566308
11 sage: n(taylor(arctan(x),x,0,20)(1/sqrt(3))*6-pi)
12 -2.14265171338823e-6
13 sage: n(taylor(arctan(x),x,0,58)(1/sqrt(3))*6-pi)
14 8.88178419700125e-16
```

tex/sage/sageSnip012.sage

Calculer 5 termes donne déjà 3.15. Et on est à 10^{-6} de la bonne réponse avec 20 termes. Et avec 58 termes, on n'est à 10^{-16}.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 20.57
Pour bien faire, il faudrait étudier le reste et donner un encadrement.

20.3.5 Angle entre deux vecteurs

DEFooSVDZooPWHwFQ

Proposition-Définition 20.58.
Soient des vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|}. \tag{20.152}$$

eqDefAngleVect

*Ce réel est appelé **angle** entre X et Y.*

Démonstration. Si a et b sont des réels, l'inégalité $|a| \leqslant b$ peut se développer en une double inégalité

$$-b \leqslant a \leqslant b. \tag{20.153}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (12.2) devient alors

$$-\|X\|\|Y\| \leqslant X \cdot Y \leqslant \|X\|\|Y\|. \tag{20.154}$$

Si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, nous en déduisons

$$-1 \leqslant \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|} \leqslant 1. \tag{20.155}$$

[14] Je n'ai pas fait le calcul, merci de me faire savoir si il y a une astuce.

Il existe donc par la proposition 20.54 un angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|}. \tag{20.156}$$

□

20.59.
Certains n'hésitent pas à écrire la formule

$$X \cdot Y = \|X\|\|Y\| \cos(\theta). \tag{20.157}$$ eqPropCosThet

comme une définition du produit scalaire. C'est ce qui arrive lorsqu'on définit les fonctions trigonométriques à partir de relations dans les triangles rectangles.

Nous pouvons prouver simplement que $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ et $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en s'inspirant de la figure 20.4.

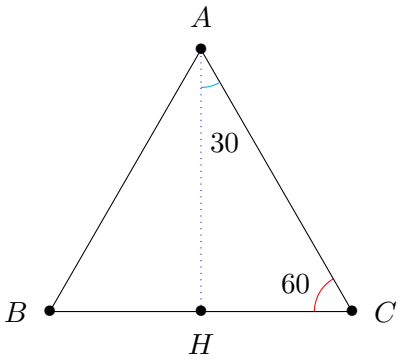


FIGURE 20.4 : Un triangle équilatéral de côté 1. LabelFigGVDJooYzMxLW

20.3.6 Aire du parallélogramme

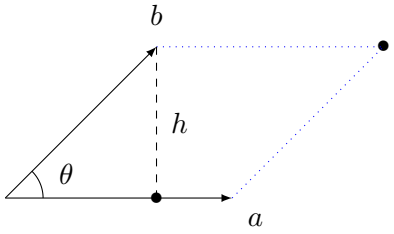


FIGURE 20.5 : Calculer l'aire d'un parallélogramme. LabelFigBNHLooLDxdPA

RemaAireParalProdVect

Remarque 20.60.
Le nombre $\|a\|\|b\| \sin(\theta)$ est l'aire du parallélogramme[15] formé par les vecteurs a et b, comme cela se voit sur la figure 20.5. Un vrai calcul avec une intégrale sera effectué dans la proposition 22.26.

PropNormeProdVectoabsint

Proposition 20.61.
Nous avons

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin(\theta) \tag{20.158}$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle formé par a et b.

[15] Définition de ce qu'est une aire : 22.21. Preuve dans le cas d'un parallélogramme : 22.26.

Démonstration. En utilisant la décomposition du produit vectoriel[16], nous avons

$$\begin{aligned}\|a\times b\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|a\|^2\|b\|^2 - (a\cdot b)^2 \\ &= \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2\cos^2(\theta) \\ &= \|a\|^2\|b\|^2\big(1-\cos^2(\theta)\big) \\ &= \|a\|^2\|b\|^2\sin^2(\theta).\end{aligned} \tag{20.159}$$

D'où le résultat. Nous avons utilisé la formule de la définition (20.58) donnant l'angle en fonction du produit scalaire. □

NORMooWWOKooWzScnZ

20.62.
Si les vecteurs a, b et c ne sont pas coplanaires, alors la valeur absolue du produit mixte (voir équation (12.157)) $a\cdot(b\times c)$ donne le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs a, b et c.

En effet si φ est l'angle entre $b\times c$ et a, alors la hauteur du parallélépipède vaut $\|a\|\cos(\varphi)$ parce que la direction verticale est donnée par $b\times c$, et la hauteur est alors la « composante verticale » de a. Par conséquent, étant donné que $\|b\times c\|$ est l'aire de la base, le volume du parallélépipède vaut[17]

$$V = \|b\times c\|\|a\|\cos(\varphi). \tag{20.160}$$

Or cette formule est le produit scalaire de a par $b\times c$; ce dernier étant donné par le déterminant de la matrice formée des composantes de a, b et c grâce à la formule (12.157).

La valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{20.161}$$

EqDerath

est l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. En effet, d'après la remarque 20.60, l'aire de ce parallélogramme est donnée par la norme du produit vectoriel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_z, \tag{20.162}$$

donc la norme $\|a\times b\|$ est bien donnée par la valeur absolue du déterminant (20.161).

20.4 Paramétrisation du cercle

Nous allons parler de paramértisation du cercle. L'ensemble S^1 sera vu tantôt comme le cercle dans $\mathbb{R}^2$, tantôt comme le cercle dans $\mathbb{C}$. Nous n'allons pas pousser le vice jusqu'à écrire explicitement les isomorphismes lorsque nous passons d'une représentation à l'autre. Parmi les identifications que nous allons faire sans ménagement, il y a l'identification entre les applications

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(\cos(t),\sin(t)\big)\end{aligned} \tag{20.163}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{it}.\end{aligned} \tag{20.164}$$

C'est évidemment la formule $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ (lemme 20.13) qui permet de transformer γ en φ et inversement. De plus $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels normés (et aussi donc topologiques).

Nous allons prouver suffisamment de résultats à propos de ces deux applications pour pouvoir dire qu'elles paramétrisent le cercle et écrire des égalités du type

$$\int_{S^1} f = \int_0^{2\pi} f\circ\varphi. \tag{20.165}$$

[16] Directement de la définition 12.49.

[17] Le calcul de ce volume mériterait une certaine réflexion, surtout à partir du moment où nous avons décidé de définir les fonctions trigonométriques à partir de leur développement (définition 20.1).

20.5 Cercle trigonométriques

PROPooWZFGooMVLtFz

Proposition 20.63 ([627]).
Soient des fonctions $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert I de $\mathbb{R}$ telles que $f^2 + g^2 = 1$. Soient $t_0 \in I$ et θ_0 tel que $f(t_0) = \cos(\theta_0)$ et $g(t_0) = \sin(\theta_0)$.

Alors il existe une unique fonction continue $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \theta(t_0) = \theta_0 & \text{(20.166a)} \\ f = \cos\circ\theta & \text{(20.166b)} \\ g = \sin\circ\theta. & \text{(20.166c)} \end{cases}$$

Démonstration. Nous commençons par l'existence, en passant par les nombres complexes. Soit $h\colon I \to \mathbb{C}$ définie par $h = f + ig$. Nous avons $h\bar{h} = 1$ et nous définissons

$$\theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} h'(s)\overline{h(s)}ds. \tag{20.167}$$

Cette intégrale existe pour tout t parce que les fonctions f et g étant continues, elles sont bornées sur le compact $[t_0, t]$. De plus θ est une fonction continue parce que c'est une primitive (proposition 16.289)[18].

La dérivée de θ est la fonction $s \mapsto -ih'(s)\overline{h(s)}$.

Utilisant la formule du lemme 20.13 sur la forme trigonométrique des nombres complexes, nous calculons :

$$\frac{d}{dt}\Big[he^{-i\theta}\Big]_{t=0} = e^{-i\theta}(h' - h\theta') = e^{-i\theta}(h' - ih(-i)h'\bar{h}) = 0. \tag{20.168}$$

Par conséquent il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $he^{-i\theta} = c$. Mais $h(t_0) = f(t_0) + ig(t_0) = \cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0) = e^{i\theta_0}$, du coup

$$h(t_0)e^{-i\theta(t_0)} = c \tag{20.169}$$

donne immédiatement $c = 1$, ou encore $e^{i\theta(t)} = h(t)$, c'est-à-dire que

$$f + ig = \cos\circ\,\theta + i\sin\circ\,\theta, \tag{20.170}$$

ce qu'il fallait pour l'existence.

Pour l'unicité nous supposons avoir une autre fonction, α qui satisfait aux exigences. Pour tout $t \in I$ nous avons

$$e^{i\theta(t)} = e^{i\alpha(t)}. \tag{20.171}$$

Il existe donc une fonction $n\colon I \to \mathbb{N}$ telle que $\theta(t) = \alpha(t) + 2n(t)\pi$. Par continuité de θ et α, la fonction n doit être constante, mais vu que $\theta(t_0) = \alpha(t_0)$ nous avons $n = 1$. □

20.5.1 Bijection continue

PROPooKSGXooOqGyZj

Proposition 20.64.
L'application

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big) \end{aligned} \tag{20.172}$$

est une bijection continue.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Image** Le fait que l'image de γ soit dans S^1 découle immédiatement du fait que $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

(2) **Continuité** La continuité découle de la continuité des composantes.

(3) **Injectif** Soient $x_1 < x_2$ tels que $\sin(x_1) = \sin(x_2)$ et $\cos(x_1) = \cos(x_2)$. Supposons pour fixer les idées que $\sin(x_1) > 0$ et $\cos(x_1) > 0$: si ce n'est pas le cas, il faut traiter séparément les 4 possibilités de combinaisons de signes.

Nous avons obligatoirement $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Vu que nous avons supposé que $\sin(x_1) = \sin(x_2)$, le théorème de Rolle 14.210 nous permet de considérer un élément $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\sin'(c) = 0$, c'est-à-dire $\cos(c) = 0$. Cela contredirait la proposition 20.24(11) à moins que $x_1 = x_2$.

[18] En réalité nous appliquons le théorème 12.1 à chacune des parties réelles et imaginaires de la fonction $s \mapsto h'(s)\overline{h(s)}$.

(4) **Surjectif**

Soient x, y tels que $x^2 + y^2 = 1$. Supposons pour varier les plaisirs[19] que $x < 0$ et $y > 0$. Puisque la fonction cos va de 0 à -1 lorsque x va de $\pi/2$ à π, le théorème des valeurs intermédiaires donne $t \in [\pi/2, \pi]$ tel que $\cos(t) = x$.

En reportant cette valeur de x dans l'égalité $x^2 + y^2 = 1$, nous trouvons $y^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$, et donc $\sin(t) = \pm y$. Mais pour $t \in [\pi/2, \pi]$ nous avons $\sin(t) > 0$. Par conséquent $\sin(t) = y$ parce que nous avons également supposé $y > 0$.

□

EXooJFDPooBZADKs

Exemple 20.65.
L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon]0, 2\pi[&\to S^1 \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20.173}$$

est continue par la proposition 20.64. Comme $]0, 2\pi[$ est connexe (proposition 11.54) le lemme 9.296 implique que le cercle privé d'un point est connexe. △

La proposition suivante ne va pas jusqu'à dire qu'il y a un C^∞-difféomorphisme entre $[0, 2\pi[$ et S^1. La raison est que n'avons pas défini la notion de différentielle pour des applications définies sur des fermés.

Si vous voulez un C^∞ difféomorphisme, il y a deux possibilités. Soit vous acceptez d'élargir un peu le domaine et vous allez voir les coordonnées polaires du théorème 20.239, soit vous allez étudier la géométrie différentielle, et vous considérez S^1 comme une variété.

PROPooXELTooYKjDav

Proposition 20.66 ([1, 194])**.**
Dans cette proposition, S^1 désigne l'ensemble des nombres complexes de norme 1. Trois affirmations.

ITEMooOHRHooRXvxrL

(1) L'application

$$\begin{aligned} f\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned} \tag{20.174}$$

est une bijection continue.

ITEMooPWUWooHsQBDg

(2) La réciproque de

$$\begin{aligned} f\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned} \tag{20.175}$$

n'est pas continue en 1.

ITEMooCVAQooLsYspI

(3) L'application

$$\begin{aligned} f\colon]0, 2\pi[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{ix} \end{aligned} \tag{20.176}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. En plein de points.

(1) **Pour (1)**

Nous savons que

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy \end{aligned} \tag{20.177}$$

est une bijection isométrique. C'est pour cela que nous allons nous permettre de noter S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ aussi bien que l'ensemble des nombres complexes de norme 1.

Sur $\mathbb{R}^2$ nous avons l'application

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20.178}$$

qui est une bijection continue (c'est la proposition 20.64). Et enfin le lemme 20.13 nous donne $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Avec tout ça, l'application $\varphi^{-1} \circ f\colon [0, 2\pi[\to S^1$ est une bijection continue. Et comme φ l'est également, f est une bijection continue.

[19] Mais les autres cas sont à faire, pour être complet.

(2) **Pour (2)** Nous vérifions que la définition 9.48(1) n'est pas satisfaite pour f^{-1}. Nous considérons le voisinage $W = [0, \epsilon[$ de 0 dans $[0, 2\pi[$ avec $\epsilon < 1/2$. Nous allons montrer que tout voisinage V de 1 dans S^1 contient des points z_k tels que $f^{-1}(z_k) \notin W$. Tout voisinage de 1 dans S^1 contient une partie de la forme $B(1, r) \cap S^1$. Posons $z_k = \exp\big(i(2\pi - 1/k)\big)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|1 - \exp\big(i(2\pi - 1/k)\big)\|^2 &= \|1 - \cos(2\pi - 1/k) - i\sin(2\pi - 1/k)\| \qquad \text{lem 20.13} && (20.179a)\\ &= |1 - \cos(2\pi - 1/k)|^2 + |\sin(2\pi - 1/k)|^2 && (20.179b)\\ &\to 0. && (20.179c) \end{aligned}$$

Donc pour tout r, nous avons $z_k \in B(1, r) \cap S^1$ dès que k est assez grand. Or $f^{-1}(z_k) = 2\pi - 1/k \notin [0, \epsilon[$ dès que k est assez grand.

(3) **Pour (3)** Nous avons $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$. Les fonctions sin et cos étant de classe C^∞ par la proposition 20.1, la fonction f l'est aussi.

□

La proposition suivante donne les coordonnées polaires sur $\mathbb{C}$. La régularité est l'objet du théorème 20.239 (à part le fait que ce dernier parle de $\mathbb{R}^2$ et non de $\mathbb{C}$).

PROPooRFMKooURhAQJ

Proposition 20.67 (Décomposition polaire des nombres complexes)**.**
Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$z = |z|e^{i\theta}. \tag{20.180}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous considérons $z' = z/|z|$ qui est de norme 1. Donc il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z' = e^{i\theta}$ (proposition 20.66(1)).

Pour ce θ nous avons $z = |z|e^{i\theta}$. □

Bien entendu, le θ est unique dans $[0, 2\pi[$, mais il n'est pas du tout unique dans $\mathbb{R}$.

LEMooOQKNooGZlJHf

Lemme 20.68 ([1])**.**
Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, il existe $t \in [0, 2\pi[$ tel que

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(t). \tag{20.181}$$

Plus précisément, si les formes trigonométriques[20] *de a et b sont $a = |a|e^{i\alpha}$ et $b = |b|e^{i\beta}$, alors*

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\alpha - \beta). \tag{20.182}$$

Démonstration. Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) && (20.183a)\\ &= |a|^2 + a\bar{b} + b\bar{a} + |b|^2 && (20.183b)\\ &= |a|^2 + |b|^2 + |a||b|\big(e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\beta-\alpha)}\big) && (20.183c)\\ &= |a^2| + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\alpha - \beta). && (20.183d) \end{aligned}$$

□

CORooONAVooKPhQuI

Corolaire 20.69.
La partie $B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| > R\}$ est connexe et connexe par arcs[21]*.*

Démonstration. Nous prouvons que B est connexe par arcs ; la connexité découlera du lemme 11.68. Nous considérons les points $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ dans B. Une telle décomposition est toujours possible par la proposition 20.67.

Supposons $\theta_1 < \theta_2$ et $r_1 < r_2$; sinon il faut faire différents cas. Nous relions les points z_1 et z_2 par le chemin continue constitué des deux chemins suivants mis bout à bout. D'abord

$$\begin{aligned} \gamma\colon [\theta_1, \theta_2] &\to B \\ t &\mapsto r_1 e^{it}, \end{aligned} \tag{20.184}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \sigma\colon [r_1, r_2] &\to B \\ u &\mapsto u e^{i\theta_2}. \end{aligned} \tag{20.185}$$

□

[20] Proposition 20.67.
[21] Définition 11.66.

20.5.2 Inverse

SUBSECooWFNMooOuZBRN

Nous pouvons écrire un inverse de la fonction φ grâce à la fonction arc tangente introduite au théorème 20.44. La fonction que nous écrivons à présent est la fonction $\arg_{0^-}$ définie par (28.138). Elle n'est pas exactement la fonction argument définie par (28.99).

Nous avons :

$$\varphi^{-1}\colon S^1 \to [0,2\pi[$$
$$x+iy \mapsto \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x>0, y\geqslant 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } (x,y)=(0,1) \\ \pi-\arctan(-y/x) & \text{si } x<0, y\geqslant 0 \\ \pi+\arctan(y/x) & \text{si } x<0, y<0 \\ 2\pi-\arctan(-y/x) & \text{si } x>0, y<0 \end{cases} \tag{20.186}$$

EQooSAYEooREVSPc

Chacune des branches est continue parce que la fonction arc tangente l'est. Trois des raccords sont également continus grâce aux limites du lemme 20.45.

L'application φ^{-1} n'est cependant pas continue au point $(1,0)$[22]. C'est l'objet du lemme suivant.

LEMooEQVRooMAffCw

Lemme 20.70.
L'application $\varphi^{-1}\colon S^1 \to [0,2\pi[$ n'est pas continue en $(1,0)$. Mais elle est continue ailleurs. Autrement dit,

$$\varphi^{-1}\colon S^1 \setminus \{(1,0)\} \to]0,2\pi[\tag{20.187}$$

est continue.

Démonstration. En effet, φ^{-1} serait continue si l'image de tout ouvert de $[0,2\pi[$ par φ était ouverte dans S^1 (topologie induite de $\mathbb{C}$). Prenons un petit ouvert $[0,\epsilon[$ (si vous êtes étonnés, c'est que vous n'avez pas bien la topologie induite en tête). Son image contient le point $(1,0)$, mais aucun point (x,y) avec $y<0$.

Montrons que tout voisinage de $(1,0)$ dans $\mathbb{C}$ contient des points $x+iy$ de S^1 avec $y<0$. Un point de S^1 est de la forme $\cos(t)+i\sin(t)$. Nous avons :

$$|\cos(t)+i\sin(t)-1|^2 = \big(\cos(t)-1\big)^2+\sin^2(t) = 2\big(1-\cos(t)\big). \tag{20.188}$$

Soit $\delta>0$, et montrons que $B\big((1,0),\delta\big)\cap S^1$ contient des points d'ordonnées négatives. D'abord il existe $\epsilon>0$ tel que pour $t=2\pi-\epsilon$,

$$2\big(1-\cos(t)\big)<\delta. \tag{20.189}$$

Ensuite pour de tels t, nous avons $\sin(t)<0$. Donc les points de S^1 correspondant à $2\pi-\epsilon$ sont dans $S^1\cap B\big((1,0),\delta\big)$.

Bref, l'image de $[0,\epsilon[$ n'est pas un ouvert de S^1. □

20.5.3 Cercle trigonométrique

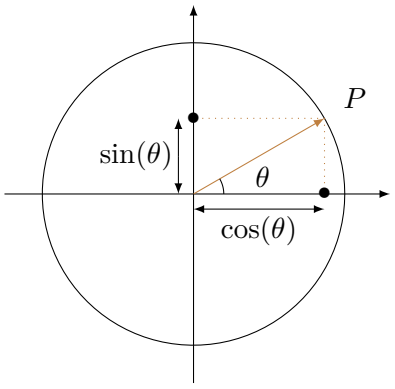


FIGURE 20.6 : Le cercle trigonométrique.

LabelFigCercleTrigono

Définition 20.71 ([628]).
Le cercle trigonométrique est le cercle dans $\mathbb{R}^2$ de rayon 1 centré en $(0,0)$ représenté à la figure 20.6. Nous n'hésiterons pas à parler de cercle trigonométrique dans $\mathbb{C}$.

[22] Puisque nous avons considéré $S^1\subset\mathbb{C}$, nous aurions dû noter « 1 » ce point. Mais vous vous imaginez le clash de notation avec le $1\in[0,2\pi[\subset\mathbb{R}$?

Nous verrons plus tard (proposition 23.13) que la longueur de l'arc de cercle intercepté par un angle θ est égal à θ. Les radians sont donc l'unité d'angle la plus adaptée au calcul de longueurs sur le cercle.

LEMooXISFooRMWUEC

Lemme 20.72.
Soit $R > 0$. Soient le cercle $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|x\| = R\}$ de rayon R ainsi que $t_0 \in \mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} \gamma_{t_0} : [t_0, t_0 + 2\pi[&\to S \\ x &\mapsto \big(R\cos(x), R\sin(x)\big) \end{aligned} \tag{20.190}$$

est une bijection continue.

Démonstration. La proposition 20.64 nous dit que

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[&\to S \\ x &\mapsto \big(R\cos(x), R\sin(x)\big) \end{aligned} \tag{20.191}$$

est une bijection continue.

D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} f : [t_0, t_0 + 2\pi[&\to [0, 2\pi[\\ x &\mapsto x - t_0 \end{aligned} \tag{20.192}$$

est une bijection continue.

Comme $\gamma_{t_0} = \gamma \circ f$, nous déduisons que γ_{t_0} est une bijection continue. □

20.73.
La proposition 23.13 dira que la longueur d'arc de cercle de rayon R interceptée par un angle θ vaut $R\theta$.

20.5.4 Du point de vue de la tribu, mesure et co.

Nous avons considéré sur S^1 la topologie induite de $\mathbb{C}$. Nous allons y mettre la tribu induite de celle de Lebesgue de $\mathbb{C}$. Mais nous n'allons pas y mettre la *mesure* induite de $\mathbb{C}$; sinon tout serait toujours de mesure nulle.

PROPooQFYHooEajmbW

Proposition 20.74 ([1]).
L'application φ est borélienne d'inverse borélien, c'est-à-dire

$$\mathcal{B}or(S^1) = \varphi\big(\mathcal{B}or([0, 2\pi[)\big). \tag{20.193}$$

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{B}\text{or}(S^1) \subset \varphi\big(\mathcal{B}\text{or}([0, 2\pi[)\big)$ est la plus simple : si $A \in \mathcal{B}\text{or}(S^1)$, alors $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}\text{or}\big([0, 2\pi[\big)$ parce que $\varphi : [0, 2\pi[\to S^1$ est continue et donc borélienne (théorème 16.58).

Pour l'autre inclusion, il faudra procéder par étapes.

(1) **Ouvert ne contenant pas zéro** Si A est un ouvert de $[0, 2\pi[$ ne contenant pas 0, il est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $]0, 2\pi[$. Le lemme 20.70 nous indique que son image par φ est ouverte dans S^1. En particulier, $\varphi(A) \in \mathcal{B}\text{or}(S^1)$.

(2) **Ouvert de la forme $[0, \epsilon[$** Nous supposons que ϵ est petit. Disons pour fixer les idées, plus petit que $\pi/2$. Nous avons :

$$\varphi\big([0, \epsilon[\big) = \varphi\big(]0, \epsilon[\big) \cup \varphi\big(\{0\}\big). \tag{20.194}$$

Le premier élément de l'union est un ouvert, et le second, un unique point. L'union est un borélien.

(3) **Ouvert général** Si un ouvert de $[0, 2\pi[$ ne contient pas 0, son image est ouverte. Nous nous penchons sur le cas d'un ouvert contenant 0.

Si un ouvert de $[0, 2\pi[$ contient 0, alors il contient un ouvert de la forme $[0, \epsilon[$, parce qu'un ouvert contient une boule autour de chacun de ses points (théorème 9.8 couplé au fait que nous sommes dans la topologie induite de $\mathbb{R}$).

Si A est un ouvert contenant zéro, alors

$$A = [0, \epsilon[\cup \big(A \setminus [0, \frac{\epsilon}{2}]\big). \tag{20.195}$$

Nous avons déjà vu que l'image du premier élément de l'union est un borélien. Étant donné que $A \setminus [0, \frac{\epsilon}{2}]$ est un ouvert ne contenant pas zéro, son image est un ouvert. Donc l'image de A est un borélien.

(4) **Pause** Nous avons déjà vu que l'image par φ de tout ouvert de $[0,2\pi[$ était un borélien de S^1. Nous devons en déduire que l'image de tout borélien de $[0,2\pi[$ est un borélien de S^1.

C'est ce que nous faisons maintenant

(5) **Boréliens** Nous utilisons le lemme de transport 16.50 avec l'application φ^{-1} et l'ensemble des ouverts :

$$\varphi\big(\sigma(\mathcal{C})\big)=\sigma\big(\varphi(\mathcal{C})\big) \tag{20.196}$$

où $\mathcal{C}$ est la tribu des ouverts dans $[0,2\pi[$. L'ensemble $\sigma(\mathcal{C})$ est par définition l'ensemble $\mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)$. D'autre part nous avons vu que l'image d'un ouvert est un borélien : $\varphi(\mathcal{C})\subset\mathcal{B}\text{or}(S^1)$. Nous avons donc

$$\varphi\big(\mathcal{B}\text{or}([0,2\pi[)\big)=\sigma\big(\varphi(\mathcal{C})\big)\subset\sigma\big(\mathcal{B}\text{or}(S^1)\big)\subset\mathcal{B}\text{or}(S^1). \tag{20.197}$$

La preuve est terminée. □

PROPooHMSCooRIjcJq

Proposition 20.75 (Boréliens sur S^1[1])**.**
Soit la structure usuelle d'espace mesurable $(\mathbb{C},\mathcal{B}or(\mathbb{C}))$. Nous considérons

- *la tribu $\mathcal{B}or(\mathbb{C})_{S^1}$ induite de la tribu des boréliens de $\mathbb{C}$ vers S^1,*
- *la tribu $\mathcal{B}or(S^1)$ des boréliens de S^1 construite à partir de la topologie induite de $\mathbb{C}$ vers S^1.*
- *la bijection $\varphi\colon[0,2\pi[\to S^1$,*
- *la mesure de Lebesgue sur $[0,2\pi[$ (induite de celle sur $\mathbb{R}$) et sur $\mathbb{C}$, que nous noterons toutes deux λ.*

Alors

ITEMooSUNEooRhAdep

(1) Nous avons les expressions

$$\mathcal{B}or(\mathbb{C})_{S^1}=\{A\in\mathcal{B}or(\mathbb{C})\text{ tel que }A\subset S^1\} \tag{20.198a}$$
$$=\{A\cap S^1\text{ tel que }A\in\mathcal{B}or(\mathbb{C})\} \tag{20.198b}$$

SUBEQooYZGCooDqXmft

ITEMooGYPNooRaZbNW

(2) Nous avons

$$\mathcal{B}or(S^1)=\mathcal{B}or(\mathbb{C})_{S^1}=\varphi\Big(\mathcal{B}or\big([0,2\pi[\big)\Big). \tag{20.199}$$

ITEMooFUXKooFQdoaw

(3) En définissant $\mu\colon\mathcal{B}or(S^1)\to\mathbb{R}$ par

$$\mu(A)=\frac{\lambda\big(\varphi^{-1}(A)\big)}{2\pi}, \tag{20.200}$$

EQooKHZBooSrFMdo

le triplet $\big(S^1,\mathcal{B}or(S^1),\mu\big)$ est un espace mesuré.

ITEMooBQLRooOsqesg

(4) L'espace mesuré $\big(S^1,\mathcal{B}or(S^1),\mu\big)$ est fini et

$$\mu(S^1)=1. \tag{20.201}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** C'est la proposition 16.9.

(2) **Pour (2)** La première égalité est le lemme 16.56. Le fait que $\mathcal{B}\text{or}(S^1)=\varphi\Big(\mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)\Big)$ est déjà la proposition 20.74.

(3) **Pour (3)** Nous devons d'abord nous assurer que la formule ait un sens. Cela est chose aisée ; si $A\in\mathcal{B}\text{or}(S^1)$, le point (2) nous indique que $\varphi^{-1}(A)\in\mathcal{B}\text{or}\big([0,2\pi[\big)$. Ensuite, nous devons vérifier les deux conditions de la définition 16.18 pour avoir un espace mesuré.

En premier lieu,

$$\mu(\varnothing)=\frac{1}{2\pi}\lambda\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big)=\frac{1}{2\pi}\lambda(\varnothing)=0. \tag{20.202}$$

Et en second lieu, si les $A_i \in \mathcal{B}or(S^1)$ sont disjoints, les $\varphi^{-1}(A_i)$ sont également disjoints parce que φ^{-1} est une bijection. Donc

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \frac{1}{2\pi}\lambda\big(\bigcup_i \varphi^{-1}(A_i)\big) \tag{20.203a}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_i \lambda\big(\varphi^{-1}(A_i)\big) \tag{20.203b}$$
$$= \sum_i \frac{\lambda\big(\varphi^{-1}(A_i)\big)}{2\pi} \tag{20.203c}$$
$$= \sum_i \mu(A_i). \tag{20.203d}$$

D'accord.

(4) **Pour (4)** En ce qui concerne la mesure de S^1 pour μ nous avons simplement

$$\mu(S^1) = \frac{\lambda\big([0,2\pi[\big)}{2\pi} = 1. \tag{20.204}$$

□

Maintenant que $(S^1, \mathcal{B}or(S^1), \mu)$ est un espace mesuré, nous pouvons compléter la tribu $\mathcal{B}or(S^1)$ pour la mesure μ.

Définition 20.76.
*La **tribu de Lebesgue** sur S^1 est la mesure complétée pour*

$$\big(S^1, \mathcal{B}or(S^1), \mu\big) \tag{20.205}$$

où μ est la mesure définie par la proposition 20.75. Nous notons $\mathcal{L}eb(S^1)$ la tribu et encore μ la mesure.

PROPooDLBCooUfQZOa

Proposition 20.77 (Lebesgue sur S^1[1])**.**
Soit la structure d'espace mesuré complet $\big(S^1, \mathcal{L}eb(S^1), \mu\big)$. Nous considérons

- *la tribu $\mathcal{L}eb(\mathbb{C})_{S^1}$ induite de la tribu des boréliens de $\mathbb{C}$ vers S^1,*
- *la bijection $\varphi\colon [0,2\pi[\to S^1$,*

Alors

ITEMooQMHDooHEThPf

(1) La tribu $\mathcal{L}eb(\mathbb{C})_{S^1}$ est la tribu de toutes les parties de S^1.

ITEMooNIRNooKSeyCa

(2) La tribu $\mathcal{L}eb(S^1)$ est donnée par

$$\mathcal{L}eb(S^1) = \varphi\big(\mathcal{L}eb(\mathbb{R})_{[0,2\pi[}\big) = \varphi\big(\mathcal{L}eb([0,2\pi[)\big) \tag{20.206}$$

où $\mathcal{L}eb([0,2\pi[)$ est la tribu sur $[0,2\pi[$ obtenue par complétion de la tribu des boréliens de la topologie induite.

ITEMooXDBTooYnauyi

(3) Nous avons l'inclusion stricte

$$\mathcal{L}eb(S^1) \subsetneq \mathcal{L}eb(\mathbb{C})_{S^1}. \tag{20.207}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Si $A \subset S^1$, alors A est une partie de S^1 qui est mesurable et de mesure nulle pour $\mathbb{C}$. Donc A est λ-négligeable et par conséquent mesurable.

(2) **Pour (2)** Il s'agit de prouver que

$$\widehat{\mathcal{B}or(S^1)} = \varphi\big(\widehat{\mathcal{B}or\big([0,2\pi[\big)}\big). \tag{20.208}$$

Ce n'est rien d'autre que la proposition 16.85. La seconde partie de l'égalité est la proposition 16.80

(3) **Pour (3)** Comme indiqué au point (1), la tribu $\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{C})_{S^1}$ est la tribu de toutes les parties de S^1 ; l'inclusion est donc évidente. Le point pas tout à fait évident à prouver est l'existence de parties de S^1 à n'être pas dans $\mathcal{L}\text{eb}(S^1)$.

Soit V non mesurable dans $[0,2\pi[$ (prenez quelque chose comme l'ensemble de Vitali de l'exemple 16.159). Puisque, par le point (2),

$$\mathcal{L}\text{eb}(S^1) = \varphi\big(\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})_{[0,2\pi[}\big), \tag{20.209}$$

la partie $\varphi^{-1}(V)$ ne peut pas être dans $\mathcal{L}\text{eb}(S^1)$.

□

Si vous en voulez plus à propos de S^1 et la façon dont on passe la structure depuis $[0,2\pi[$, vous pouvez lire la proposition 29.108 qui donne la structure de

$$L^2\big(S^1, \mathcal{L}\text{eb}(S^1), \mu\big) \tag{20.210}$$

qui sera, sans surprise, la même que celle de

$$L^2\big([0,2\pi[, \mathcal{L}\text{eb}\big([0,2\pi[\big), \lambda\big). \tag{20.211}$$

20.6 Exemples trigonométriques

Nous mettons ici quelques exemples concernant les fonctions trigonométriques, qui n'ont pas pu être mis dans les chapitres les plus adaptés, parce que ces derniers sont plus haut dans la table des matières.

PROPooJPRUooNOcXPJ

Proposition 20.78 ([3]).
Il existe une fonction différentiable dont les dérivées partielles ne sont pas continues.

Démonstration. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{aligned} \tag{20.212}$$

(1) **La fonction f est différentiable et $df_0 = 0$** Il suffit de suivre la définition. Nous posons $T(h)=0$ et nous calculons $\lim_{h\to 0}|f(h)|/\|h\|$. Pour cela nous prenons une boule de rayon r autour de $0,0$; la proposition 20.64 dit que tout point à l'intérieur (à part $(0,0)$) peut être écrit tout la forme $(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))$ pour un $0<\rho<r$. En calculant à peine,

$$\frac{|f\big(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)\big)|}{\|(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))\|} = \frac{|r^2\cos^2(\theta)\sin(1/\rho\cos(\theta))|}{r} \leqslant r. \tag{20.213}$$

Nous avons donc bien que $f(x,y)/\|(x,y)\|$ $to0$. Et donc que

$$df_0 = 0. \tag{20.214}$$

(2) **$(\partial_1 f)(0,0)) = 0$** Simple calcul :

$$\begin{aligned} (\partial_1 f)(0,0) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\epsilon,0)-f(0,0)}{\epsilon} && \text{(20.215a)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\sin(1/\epsilon) && \text{(20.215b)} \\ &= 0. && \text{(20.215c)} \end{aligned}$$

(3) **$(\partial_1 f)(x,y)$** Les règles de calcul de produit, de composées et de fonctions trigonométriques (lemme 20.3) nous donnent :

$$(\partial_1 f)(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \tag{20.216}$$

lorsque $x\neq 0$.

Calculons $\lim_{x\to 0}(\partial_1 f)(x,0)$. D'une part

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \tag{20.217}$$

mais d'autre part l'application $\cos(1/x)$ n'a pas de limites pour $x\to 0$. Donc l'application $x\mapsto(\partial_1 f)(x,0)$ n'a pas de limites pour $x\to 0$.

□

Retenez que si vous obtenez que les dérivées partielles d'une fonction ne sont pas continues, vous ne pouvez pas immédiatement en conclure que la fonction ne sera pas différentiable.

EXooSPFDooSluUGV

Exemple 20.79.
Prouvons que la fonction[23] $f(x) = x\sin(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers 0. D'abord, nous coinçons la fonction entre deux fonctions connues :

$$0 \leqslant |x\sin(x)| = |x||\sin(x)| \leqslant |x|. \tag{20.218}$$

Donc $|x\sin(x)|$ est coincé entre $g(x) = 0$ et $h(x) = |x|$. Ces deux fonctions tendent vers 0 lorsque $x \to 0$, et donc $f(x)$ tend vers zéro. △

20.6.1 Quelques équations trigonométriques

La proposition suivante se voit très facilement sur le cercle trigonométrique, mais il faut le démontrer.

PROPooTUUUooVrAGQo

Proposition 20.80 ([1])**.**
Si $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ vérifie $\cos(\theta_0) = x_0$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(\theta) = x_0$ (d'inconnue θ) est

$$\{\theta_0, 2\pi - \theta_0\}. \tag{20.219}$$

Cet ensemble est un singleton si et seulement si $x_0 = \pm 1$.

Démonstration. Commençons par prouver que θ_0 et $2\pi - \theta_0$ sont des solutions. Le nombre θ_0 est solution par hypothèse. En ce qui concerne $2\pi - \theta_0$, il est possible d'utiliser la formule d'addition d'angle (20.24c) :

EQooUCAOooTQsUUq

$$\cos(2\pi - \theta_0) = \cos(2\pi)\cos(\theta_0) + \sin(2\pi)\sin(\theta_0). \tag{20.220}$$

La proposition 20.24(1) nous indique que $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$. Donc l'égalité (20.220) se réduit à $\cos(2\pi - \theta_0) = \cos(\theta_0)$.

Le lemme 20.4 dit que si $\cos(\theta) = x_0$, alors

$$\sin(\theta) = \pm\sqrt{1 - x_0^2}. \tag{20.221}$$

Nous avons donc soit

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\ \sqrt{1-x_0^2}\end{pmatrix}, \tag{20.222}$$

soit

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\ -\sqrt{1-x_0^2}\end{pmatrix}, \tag{20.223}$$

Comme $\theta \mapsto \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ est une bijection avec S^1 (proposition 20.64), chacune de ces deux possibilités possède une unique solution. L'ensemble des solutions de $\cos(\theta) = x_0$ possède donc au maximum deux éléments.

L'ensemble des solutions possède exactement une solution lorsque les points $\big(x_0, \sqrt{1-x_0^2}\big)$ et $\big(x_0, -\sqrt{1-x_0^2}\big)$ sont identiques. C'est le cas, si et seulement si $\sqrt{1-x_0^2} = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si $x_0 = \pm 1$. □

20.6.2 Développements en série

PROPooNPYXooTuwAHP

Proposition 20.81 (Taylor pour cosinus)**.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0$ et

EQooGQOIooIkwbJV

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \alpha(x)x^{2n}. \tag{20.224}$$

En ce qui concerne le sinus, pour tout n nous avons une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0$ et

EQooKYJAooRebHgc

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\alpha(x). \tag{20.225}$$

[23] La définition de la fonction sinus est 20.1.

Démonstration. Il s'agit d'utiliser la proposition 17.61, en faisant attention à l'ordre. Le fait est que dans (20.224), nous avons écrit le polynôme de degré $2n+1$ (et non seulement $2n$), en sachant que le terme d'ordre $2n+1$ est nul.

C'est pour cela que nous avons pu écrire $\alpha(x)x^{2n+1}$ au lieu de $\alpha(x)x^{2n}$ qui aurait été attendu.

Même raisonnement pour le développement du sinus. □

Remarque 20.82.
Quelques remarques concernant l'ordre du polynôme.

(1) Notons que nous aurions aussi pu écrire le reste sous la forme $\alpha(x)x^{2n}$, mais ça aurait été avec une autre fonction α : celle correspondant au développement à l'ordre $2n$ au lieu de $2n+1$.

(2) Les développements de sinus et de cosinus ont un terme sur deux qui est nul. C'est pour cela qu'en ayant un polynôme de degré $2p$, nous avons le développement d'ordre $2p+1$.

(3) Nous aurions pu utiliser les dérivées données dans la proposition 20.3 et les valeurs spéciales (20.6).

Corolaire 20.83.
Il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{t\to 0}\alpha(t)/t=0$ *et*

$$\sin(x)=x+\alpha(x). \tag{20.226}$$

EQooDLGIooXyfmtC

Nous avons la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \tag{20.227}$$

Démonstration. Il s'agit de prendre la formule (20.225) avec $n=0$. Cela donne tout de suite (20.226). Pour la limite, on divise par x, ce qui donne (pour tout $x\neq 0$)

$$\frac{\sin(x)}{x}=1+\frac{\alpha(x)}{x}. \tag{20.228}$$

Et justement la fonction α a la propriété que $\lim_{x\to 0}\alpha(x)/x=0$. □

Exemple 20.84.
Cherchons le développement limité à l'ordre 5 de $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Nous utilisons les développements de la proposition 20.81 :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\alpha_1(x) \tag{20.229a}$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5\alpha_2(x). \tag{20.229b}$$

Nous calculons alors la division des deux polynômes, en classant les puissances dans l'ordre croissant (c'est le sens inverse de ce qui est fait pour la divisions euclidienne !) :

$$\begin{array}{rl|l}
x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5 & & 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\\
-\big(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5\big) & & x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5\\
\hline
\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5 & & \\
-\big(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{72}x^7\big) & & \\
\hline
\frac{2}{15}x^5-\frac{1}{72}x^7 & & \\
-\big(\frac{2}{15}x^5-\frac{1}{15}x^7+\frac{1}{180}x^9\big) & & \\
\hline
\frac{29}{360}x^7-\frac{1}{180}x^9 & &
\end{array}$$

Nous avons continué la division jusqu'à obtenir un reste de degré plus grand que 5. Le développement à l'ordre 5 de la fonction tangente autour de zéro est alors (proposition 14.509)

$$\tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+x^5\alpha(x). \tag{20.230}$$

Notons que, puisque le reste ne nous intéressait pas vraiment, nous aurions pu ne pas calculer les coefficients des termes en x^7 et x^8. La dernière soustraction était également inutile. △

20.7 Isométries de l'espace euclidien

Nous considérons l'espace affine euclidien $A=\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ modelé sur $\mathbb{R}^n$ avec sa métrique usuelle. Un premier grand résultat sera le théorème 10.153 qui dira que les isométries de cet espace sont des applications linéaires.

20.7.1 Structure du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Si vous ne voulez pas savoir ce qu'est un produit semi-direct de groupes, vous pouvez lire seulement le point (1) du théorème suivant, et passer directement à la remarque 20.86.

THOooQJSRooMrqQct

Théorème 20.85.
Un peu de structure sur $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

ITEMooLLUIooIGsknv

(1) *L'application*

$$\begin{aligned}\psi\colon T(n)\times \mathrm{O}(n) &\to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)\\ (v,\Lambda) &\mapsto \tau_v\circ\Lambda\end{aligned} \tag{20.231}$$

est une bijection. Ici, $T(n)$ *est le groupe des translations de* $\mathbb{R}^n$.

ITEMooBWQSooCJGPmC

(2) *Un couple* $(v,\Lambda)\in T(n)\times \mathrm{SO}(n)$ *agit sur* $x\in\mathbb{R}^n$ *par*

$$(v,\Lambda)x=\Lambda x+v \tag{20.232}$$

au sens où $\psi(v,\Lambda)x=\Lambda x+v$.

ITEMooEWSIooNKzRxB

(3) *En tant que groupes,*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)\simeq T(n)\times_\rho \mathrm{O}(n) \tag{20.233}$$

où ρ *représente l'action adjointe de* $\mathrm{O}(n)$ *sur* $T(n)$ *et* $\times_\rho$ *dénote le produit semi-direct de la définition 2.158.*

ITEMooLJAXooZeSzor

(4) *L'application* $\psi\colon T(n)\times_\rho \mathrm{O}(n)\to\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *est un isomorphisme et en particulier*

$$\psi\big((v,A)\cdot(w,B)\big)=\psi(v,A)\circ\psi(w,B) \tag{20.234}$$

pour tout $v,w\in T(n)$ *et* $A,B\in\mathrm{O}(n)$.

ITEMooSKUPooBDvNWX

(5) *Une isométrie de* $\mathbb{R}^n$ *est une application affine*[24].

ITEMooBZJHooWCPkfM

(6) *Une isométrie de* $\mathbb{R}^n$ *qui fixe* 0 *est dans* $\mathrm{O}(n)$.

ITEMooQLNPooSyHaps

(7) *La partie linéaire*[25] *d'une isométrie* f *est* $\psi^{-1}(f)_2$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Prouvons que l'application proposée est injective et surjective. Notons aussi que ce point ne parle pas de structure de groupe, mais seulement d'une bijection en tant qu'ensembles.

(1a) **Injection** Si $\psi(v,\Lambda)=\psi(w,\Lambda')$ alors en appliquant sur $x=0$ nous avons tout de suite $v=w$. Et ensuite $\Lambda=\Lambda'$ est immédiat.

(1b) **Surjection** Une isométrie $g\in\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est une application $g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ telle que $d(x,y)=d\big(g(x),g(y)\big)$. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ cela se traduit par

$$\|x-y\|=\big\|g(x)-g(y)\big\|, \tag{20.235}$$

Comme $x\mapsto\|x\|^2$ est une forme quadratique, elle tombe sous le coup du théorème 10.153, ce qui nous permet de dire que g est affine. Or par définition une application est affine lorsqu'elle est la composée d'une translation et d'une application linéaire.

Donc $g=\tau_v\circ\Lambda$ pour une certaine application linéaire isométrique $\Lambda\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. L'application Λ est donc dans $\mathrm{O}(n)$ par la proposition 10.44(3).

(2) **Pour (2)**

C'est seulement le fait que $(\tau_v\circ\Lambda)x=\tau_v\big(\Lambda x\big)=\Lambda(x)+v$.

(3) **Pour (3)** Nous allons étudier l'application

$$\psi\colon T(n)\times_\rho O(n)\to\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n). \tag{20.236}$$

[24] Définition 13.13.
[25] Définition 13.14.

(3a) **Le produit semi-direct est bien défini** Il faut montrer que

$$\begin{aligned}\rho\colon O(n) &\to \mathrm{Aut}\big(T(n)\big)\\ \Lambda &\mapsto \mathbf{Ad}(\Lambda)\end{aligned} \tag{20.237}$$

est correcte.
D'abord pour $\Lambda \in O(n)$, nous avons bien $\rho_\Lambda(\tau_v) \in T(n)$ parce qu'en appliquant à $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\Lambda\tau_v\Lambda^{-1})(x) = \Lambda\big(\tau_v(\Lambda^{-1}x)\big) = \Lambda\big(\Lambda^{-1}x + v\big) = x + \Lambda(v) = \tau_{\Lambda(v)}(x). \tag{20.238}$$

Donc $\rho_\Lambda(\tau_v) = \tau_{\Lambda(v)}$.
De plus, $\rho_\Lambda \in \mathrm{Aut}\big(T(n)\big)$ parce que

$$\rho_\Lambda\big(\tau_v \circ \tau_w\big) = \rho_\Lambda(\tau_v) \circ \rho_\Lambda(\tau_w), \tag{20.239}$$

comme on peut aisément vérifier que les deux membres sont égaux à $\tau_{\Lambda(v+w)}$.

(3b) **ψ est une bijection** Cela est déjà vérifié.

(3c) **ψ est un morphisme** SPITEMooWJPAopGOmSsd Nous avons d'une part

$$\psi\big((v,g)(w,h)\big) = \psi\big(v\rho_g(w), gh\big) = \tau_v \circ g \circ \tau_w \circ g^{-1} \circ g \circ h = \tau_v \circ g \circ \tau_w \circ h. \tag{20.240}$$

Et d'autre part,

$$\psi(v,g) \circ \psi(w,h) = \tau_v \circ g \circ \tau_w \circ h, \tag{20.241}$$

ce qui est la même chose.

(4) **Pour (4)** Le fait que ce soit une bijection et un morphisme vient d'être démonté dans (1) et (3c).

(5) **Pour (5)** Si f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, et si $\psi(f) = (v, \Lambda)$, nous avons

$$f(a+x) = \tau_v\big(\Lambda(a) + \Lambda(x)\big) = \Lambda(a) + \Lambda(x) + v = f(a) + \Lambda(x). \tag{20.242}$$

Donc f est affine et l'application qui serait notée u_M dans (13.42) est $u_M = \Lambda$ pour tout M.

(6) **Pour (6)** Soit $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tel que $g(0) = 0$. Nous avons $v \in \mathbb{R}^n$ et $\Lambda \in \mathrm{O}(n)$ tels que $g = \psi(v, \Lambda)$. En l'appliquant à 0 nous trouvons :

$$\psi(v,\Lambda)(0) = (\tau_c v \circ \Lambda)(0) = \tau_v(0) = v. \tag{20.243}$$

Donc $g(0) = 0$ implique $g = \psi(0, \Lambda) = \Lambda \in \mathrm{O}(n)$.

(7) **Pour (7)** Si $f(x) = \psi(v,\Lambda)x = \Lambda x + v$, nous avons

$$f(a+x) = \psi(v,\Lambda)(a+x) = f(a) + \Lambda(x), \tag{20.244}$$

et donc Λ est bien la partie linéaire de f.

□ REMooLUEZooIwvTqu

Remarque 20.86.
Notons au passage la loi de groupe sur les couples qui est donnée, pour tout $v, v' \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{SO}(n)$, par

$$(v,\Lambda) \cdot (v',\Lambda') = (\Lambda v' + v, \Lambda\Lambda') \tag{20.245}$$ EqDiHcut

comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned}(v,\Lambda) \cdot (v',\Lambda')x &= (v,\Lambda)(\Lambda' x + v') && \text{(20.246a)}\\ &= \Lambda\Lambda' x + \Lambda v' + v && \text{(20.246b)}\\ &= (\Lambda v' + v, \Lambda\Lambda')x. && \text{(20.246c)}\end{aligned}$$

PROPooDHYWooXxEXvl

Proposition 20.87 ([629]).
Soient $n \geqslant 1$ et R un élément de $\mathrm{O}(n)$ de déterminant -1 tels que $R^2 = \mathrm{Id}$. En posant $C_2 = \{\mathrm{Id}, R\}$ nous avons

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \times_\rho C_2 \tag{20.247}$$

Démonstration. Notons qu'un élément R comme décrit dans l'énoncé existe. Par exemple il y a l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Cela étant dit, nous allons montrer que

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathrm{SO}(n) \times C_2 &\to \mathrm{O}(n) \\ (A, h) &\mapsto Ah. \end{aligned} \tag{20.248}$$

est un isomorphisme.

(1) **Injectif** Soient $A, B \in \mathrm{SO}(n)$ et $h, k \in C_2$ tels que $\psi(A, h) = \psi(B, k)$, c'est-à-dire tels que $Ah = Bk$. Puisque $\det(A) = \det(B) = 1$, nous avons $\det(h) = \det(k)$. Mais comme C_2 contient un élément de déterminant 1 et un élément de déterminant -1, nous avons $h = k$. De là $A = B$.

(2) **Surjectif** Soit $X \in \mathrm{O}(n)$. Si $\det(X) = 1$ alors $X \in \mathrm{SO}(n)$ et $X = \psi(X, \mathbb{1})$. Si par contre $\det(X) = -1$, alors $XR \in \mathrm{SO}(n)$ parce que $\det(XR) = 1$, et nous avons

$$\psi(XR, R) = XR^2 = X. \tag{20.249}$$

(3) **Morphisme** Nous avons

$$\psi\Big((A, h)(B, k)\Big) = \psi\big(A\rho_h(B), hk\big) = A(hBh^{-1})hk = AhBk, \tag{20.250}$$

tandis que

$$\psi(A, h)\psi(B, k) = AhBk, \tag{20.251}$$

qui est la même chose.

□

PROPooOGHYooYgPkuE

Proposition 20.88 ([1, 2])**.**
Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie avec $a \in \mathbb{R}^2$ comme unique point fixe, alors

$$f = \tau_a \circ A \circ \tau_{-a} \tag{20.252}$$

où A est une isométrie de $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ ayant 0 comme unique point fixe.

De plus avec l'application $\psi\colon T(n) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ du théorème 20.85, nous avons $A = \psi^{-1}(f)_2$

Démonstration. Nous posons $A = \tau_{-a} \circ f \circ \tau_a$. Nous utilisons la décomposition du théorème 20.85 :

$$f(x) = \Lambda(x) + v \tag{20.253}$$

avec $\Lambda \in \mathrm{O}(2)$ et $v \in \mathbb{R}^2$. En posant $x = a$ nous avons

$$a = f(a) = \Lambda(a) + v, \tag{20.254}$$

donc $v = a - \Lambda(a)$ et

$$f(x) = \Lambda(x) + a - \Lambda(a). \tag{20.255}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} A(x) &= f(x + a) - a && \text{(20.256a)} \\ &= \Lambda(x + a) + a - \Lambda(a) - a && \text{(20.256b)} \\ a = \Lambda(x) + \Lambda(a) + a - \Lambda(a) - a & && \text{(20.256c)} \\ &= \Lambda(x). && \text{(20.256d)} \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que $A = \Lambda$.

Nous devons encore prouver que l'unique point fixe de Λ est 0. Supposons que u soit un point fixe de Λ. Nous avons

$$\begin{aligned} f(u + a) &= \Lambda(u + a) + a - \Lambda(a) && \text{(20.257a)} \\ &= \Lambda(u) + \Lambda(a) + a - \Lambda(a) && \text{(20.257b)} \\ &= u + a. && \text{(20.257c)} \end{aligned}$$

Donc $u + a$ est point fixe de f. Donc $u + a = a$ et donc $u = 0$. Cela prouve que si Λ a un point fixe, alors c'est 0. Évidemment 0 est un point fixe de Λ parce que Λ est linéaire. □

20.8 Réflexion par rapport à un hyperplan

LEMooPXIOooSlMIIY

Lemme-Définition 20.89 (Réflexion par rapport à un hyperplan)**.**
Soit un espace euclidien[26] *E. Soit un hyperplan affin*[27] *H de E. Nous notons H_0 l'hyperplan vectoriel parallèle à H. Il existe une unique application $\sigma_H : E \to E$ telle que*

(1) $\big(\sigma_H(x) - x\big) \cdot u = 0$ *pour tout $u \in H_0$.*

(2) Pour tout $x \in E$,

$$\frac{\sigma_H(x) + x}{2} \in H \tag{20.258}$$

*La **réflexion** σ_H est l'application $\sigma_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à x fait correspondre ce y.*

Démonstration. Il faut vérifier que les conditions données définissent effectivement un unique point de $\mathbb{R}^n$. Soit H_0 le sous-espace vectoriel parallèle à H et une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de H_0. Nous complétons cette partie en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec un vecteur e_n. Si $H = H_0 + v$, quitte à décomposer v en une partie parallèle et une partie perpendiculaire à H, nous avons

$$H = H_0 + \lambda e_n \tag{20.259}$$

pour un certain λ.

Une droite passant par x et perpendiculaire à H est de la forme $t \mapsto x + te_n$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors l'unique point de cette droite à être dans H est le point tel que $x_n e_n + te_n = \lambda e_n$, c'est-à-dire $t = \lambda - x_n$. L'unique point y sur cette droite à être tel que $[x, y]$ coupe H en son milieu est celui qui correspond à $t = 2(\lambda - x_n)$. □

PROPooVQOTooUEGYiY

Proposition 20.90 ([1])**.**
Soit un espace euclidien E. Soit un hyperplan H et $a \in E$. Si σ_H est la réflexion[28] *par rapport à H, alors la réflexion par rapport à $H + a$ est donnée par*

$$\sigma_{H+a} = \tau_a \circ \sigma_H \circ \tau_{-a}. \tag{20.260}$$

Démonstration. Nous posons $\alpha = \tau_a \circ \sigma_H \circ \tau_{-a}$ et nous prouvons que α vérifie les deux propriétés de la définition 20.89.

(1) **Si H est vectoriel** Nous commençons par supposer que H est un hyperplan vectoriel. Soient $u \in H$ et $x \in E$. Nous avons

$$\begin{aligned}\big(\alpha(x) - x\big) \cdot u &= \big(\sigma_H(x - a) + a - x\big) \cdot u && \text{(20.261a)}\\ &= \big(\sigma_H(x - a) - (x - a)\big) \cdot u && \text{(20.261b)}\\ &= 0 && \text{(20.261c)}\end{aligned}$$

parce que σ_H est une réflexion.

Nous considérons ensuite (grâce à la proposition 10.311) un $n \in E$ tel que

$$H = \{x \in E \text{ tel que } x \cdot n = 0\}. \tag{20.262}$$

Nous posons

$$m = \frac{\alpha(x) + x}{2}, \tag{20.263}$$

et nous devons prouver que $m \in H + a$, c'est-à-dire que $m - a \in H$ ou encore $(m - a) \cdot n = 0$. Nous calculons donc

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(x) - x - 2a}{2} \cdot n &= \frac{a + \sigma_H(x - a) + x - 2a}{2} \cdot n && \text{(20.264a)}\\ &= \frac{\sigma_H(x - a) + (x - a)}{2} \cdot n && \text{(20.264b)}\\ &= 0 && \text{(20.264c)}\end{aligned}$$

parce que c'est la propriété de σ_H appliquée au point $x - a$.

[26] Vectoriel avec produit scalaire, définition 10.167.
[27] Définition 10.167.
[28] Définition 20.89.

(2) **Si H n'est pas vectoriel** Soit $h \in H$. L'hyperplan $H_0 = H - h$ est vectoriel, et $H + a = H_0 + (h + a)$. Donc

$$\sigma_{H+a} = \sigma_{H_0+(h+a)} = \tau_{h+a} \circ \sigma_{H_0} \circ \tau_{-h-a} = \tau_a \circ \underbrace{\big(\tau_h \circ \sigma_{H_0} \circ \tau_{-h}\big)}_{=\sigma_H} \circ \tau_{-a} = \tau_a \circ \sigma_H \tau_{-a}. \tag{20.265}$$

□

20.9 Isométries dans $\mathbb{R}^n$

Lemme 20.91.
Soit un hyperplan vectoriel H_0 de $\mathbb{R}^n$. Nous considérons une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ soit une base de H_0 et $e_n \perp H_0$.

Soit l'hyperplan affine $H = H_0 + \lambda e_n$.

La réflexion de plan H est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x - 2(x_n - \lambda)e_n. \end{aligned} \tag{20.266}$$

EQooRTWLooLPsUpY

Démonstration. En posant $y = x - 2(x_n - \lambda)$, nous avons

$$x - y = 2(x_n - \lambda)e_n \perp H, \tag{20.267}$$

et

$$\frac{x+y}{2} = \frac{2x - 2(x_n - \lambda)e_n}{2} = x - (x_n - \lambda)e_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i + \lambda e_n \in H_0 + \lambda e_n = H. \tag{20.268}$$

Les deux conditions de la définition 20.89 sont donc vérifiées. □

LEMooWYVRooQmWqvM

Lemme 20.92.
Si H_0 est un plan vectoriel, si $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ est une base de H_0, si $e_n \perp H_0$ et si $H = H_0 + \lambda e_n$, alors

$$\sigma_H = \sigma_{H_0} + 2\lambda e_n. \tag{20.269}$$

Démonstration. En posant $\lambda = 0$ dans la formule (20.266), nous avons $\sigma_{H_0}(x) = x - 2x_n e_n$. Nous avons donc

$$\sigma_H(x) = x + 2(\lambda - x_n)e_n = x - 2x_n e_n + 2\lambda e_n = \sigma_{H_0}(x) + 2\lambda e_n. \tag{20.270}$$

□

Le lemme suivant est une généralisation du fait que tous les points de la médiatrice d'un segment sont à égale distance des deux extrémités du segment (très utile lorsqu'on étudie les triangles isocèles).

LEMooDPLYooJKZxiM

Lemme 20.93 ([629]).
Soient deux points distincts $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $H \subset \mathbb{R}^n$ donné par

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } d(x, x_0) = d(x, y_0)\}. \tag{20.271}$$

Alors

(1) H est hyperplan.

(2) $H \perp y_0 - x_0$

(3) H contient le milieu du segment $[x_0, y_0]$.

Démonstration. Nous savons que

$$d(x, x_0)^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \|x\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x, x_0 \rangle, \tag{20.272}$$

ou encore

$$\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2 = 2\langle x, x_0 - y_0 \rangle. \tag{20.273}$$

En posant $v = y_0 - x_0$ et en considérant la forme linéaire

$$\begin{aligned} \beta \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, v \rangle, \end{aligned} \tag{20.274}$$

Nous avons $x \in H$ si et seulement si $\beta(x) = \frac{1}{2}\big(\|y_0\|^2 - \|x_0\|^2\big) = \lambda$. En d'autres termes, $H = \beta^{-1}(\lambda)$. Par la proposition 13.28 la partie H est un sous-espace affine. C'est même un translaté de $\ker(\beta)$, et comme $\ker(\beta)$ est l'espace vectoriel des vecteurs perpendiculaires à v, nous avons $\dim(H) = \dim\big(\ker(\beta)\big) = n - 1$.

Le fait que H contienne le milieu du segment $[x_0, y_0]$ est par définition. □

Pour le lemme suivant, et pour que la récurrence se passe bien nous disons que l'ensemble vide est un espace vectoriel de dimension -1.

LEMooJCDRooGAmlwp

Lemme 20.94 (Cartan-Dieudonné[630, 631]).
Soit un espace euclidien E de dimension n.

ITEMooFYEDooIJZBjP

(1) Si f est une isométrie de E satisfaisant

$$\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = n - k \tag{20.275}$$

alors f peut être écrit comme composition de k réflexions hyperplanes.

ITEMooJTZVooWvyfDD

(2) Une isométrie de E peut être écrite sous la forme de $rang(f - \mathrm{Id})$ réflexions, mais pas moins.

ITEMooUCZWooSbyPwt

(3) Toute isométrie de E peut être écrite comme composition de $n + 1$ réflexions.

Démonstration. Les deux parties importantes à démontrer sont les points (1) et la partie « pas moins » de (2). Le reste proviendra de reformulations.

(1) **Pour (1)** Nous faisons une récurrence sur $k \geqslant 0$.

Pour l'initialisation, si $k = 0$ alors $\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = n$, c'est-à-dire que f fixe tout $\mathbb{R}^n$, autant dire que f est l'identité, une composition de zéro réflexions.

Pour la récurrence, nous supposons que le lemme est démontré jusqu'à $k \geqslant 0$. Soit donc $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = n - (k + 1). \tag{20.276}$$

Puisque $k \geqslant 0$, la dimension de $\mathrm{Fix}(f)$ est strictement plus petite que n, donc il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) \neq x_0$. Nous posons

$$H = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) = d\big(x, f(x_0)\big)\}. \tag{20.277}$$

Par le lemme 20.93, ce H est l'hyperplan orthogonal à $v = f(x_0) - x_0$ et passant par le milieu du segment $[x_0, f(x_0)]$.

Nous posons $g = \sigma_H \circ f$. Comme $g(x_0) = \sigma_H(f(x_0)) = x_0$, ce x_0 est un point fixe de g. Le fait que $\sigma_H\big(f(x_0)\big) = x_0$ est vraiment la définition de l'hyperplan H.

Nous avons donc

$$x_0 \in \mathrm{Fix}(g) \setminus \mathrm{Fix}(f). \tag{20.278}$$

Mais nous prouvons de plus que $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Fix}(g)$. En effet si $y \in \mathrm{Fix}(f)$ alors $y \in H$ parce que

$$d(y, x_0) = d\big(f(y), f(x_0)\big) = d\big(y, f(x_0)\big). \tag{20.279}$$

Puisque $y \in H$ nous avons $y \in \mathrm{Fix}(g)$ parce que

$$g(y) = \sigma_H\big(f(y)\big) = \sigma_H(y) = y. \tag{20.280}$$

Tout cela pour dire que l'ensemble $\mathrm{Fix}(g)$ est *strictement* plus grand que $\mathrm{Fix}(f)$. Et comme ce sont des espaces affines, nous pouvons parler de dimension :

$$\dim\big(\mathrm{Fix}(g)\big) > \dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big). \tag{20.281}$$

Par hypothèse de récurrence, l'application g peut être écrite comme composition de k réflexions. Donc l'application

$$f = \sigma_H \circ g \tag{20.282}$$

est une composition de $k + 1$ réflexions.

(2) **Pour (2), existence**

Ce point est une reformulation du point (1). Le fait est que $\text{Fix}(f) = \ker(f - \text{Id})$ parce que $x \in \text{Fix}(f)$ si et seulement si $f(x) = x$ si et seulement si $(f - \text{Id})x = 0$. Nous utilisons le théorème du rang 6.53 à l'endomorphisme $f - \text{Id}$:

$$\dim\big(\text{Fix}(f)\big) = \dim\big(\ker(f - \text{Id})\big) = \dim(E) - rang(f - \text{Id}). \tag{20.283}$$

En remplaçant par les valeurs :

$$n - k = n - rang(f - \text{Id}). \tag{20.284}$$

Or le point (1) donnait f comme composée de $n - k$ réflexions. Donc f est composée de $rang(f - \text{Id})$ réflexions.

(3) **Pour (2), « pas moins »**

Supposons que $f = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$ où σ_i est la réflexion de l'hyperplan H_i. Nous devons prouver que $r \geqslant rang(f - \text{Id})$. Nous avons

$$\bigcap_{i=1}^{r} H_i \subset \ker(f - \text{Id}). \tag{20.285}$$

D'autre part, la proposition 10.310 nous donne $\dim \bigcap_i H_i \geqslant n - r$. Donc

$$n - r \leqslant \dim\big(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\big) \leqslant \dim\big(\ker(f - \text{Id})\big) = n - rang(f - \text{Id}). \tag{20.286}$$

Donc $n - r \leqslant n - rang(f - \text{Id})$ ou encore

$$r \geqslant rang(f - \text{Id}). \tag{20.287}$$

(4) **Pour (3)** Le rang de $f - \text{Id}$ vaut au maximum n. Donc f peut être écrite comme composition de $n + 1$ réflexions par le point (2).

□

La proposition suivante dit que si la composée de deux réflexions est une isométrie, alors les axes sont des droites sécantes.

PROPooXMPPooJbuJiw

Proposition 20.95 ([1]).
Soient deux droites parallèles l_1, l_2 dans $\mathbb{R}^2$. Nous notons σ_i la réflexion[29] *d'axe l_i. Si $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est une isométrie, alors $l_1 = l_2$.*

Démonstration. Soit l_0 la droite parallèle à l_i passant par 0 (existe par la proposition 14.141(1) et c'est bien une parallèle commune par 14.138(2)). Soit $u \in l_0$. Nous considérons $b \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sigma_1(0) = 2b$. Nous avons donc $b \in l_1$ et $b \cdot u = 0$.

Étant donné que la droite $D = \{\lambda b\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ intersecte l_1 (pour $\lambda = 1$), elle intersecte aussi l_2 (proposition 14.138(4)). Donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda b \in l_2$.

Le point $y = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(0) \in \mathbb{R}^2$ est l'unique point tel que

$$\begin{cases} (y - 2b) \cdot u = 0 & \text{(20.288a)} \\ \dfrac{y + 2b}{2} \in l_2. & \text{(20.288b)} \end{cases}$$

Nous le cherchons sous la forme $y = \lambda b$. D'abord $(\lambda b - 2b) \cdot u = 0$ parce que $b \cdot u = 0$. Ensuite en posant $\lambda = 2(\mu - 1)$, la seconde condition est vérifiée. Bref,

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1)(0) = 2(\mu - 1)b. \tag{20.289}$$

Pour que la composée soit une isométrie il faut donc que $(\mu - 1)b = 0$. Il y a deux possibilités : $\mu = 1$ et $b = 0$.

(1) **Si $\mu = 1$** Dans ce cas $b \in l_2$ et donc $b \in l_1 \cap l_2$. Les droites l_1 et l_2 sont donc confondues (proposition 14.138(1)).

[29] Définition 20.89.

(2) **Si $b = 0$** Dans ce cas $\sigma_1(0) = 0$, et donc si $l_2 \neq l_1$ nous avons $0 \notin l_2$ et donc $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(0) \neq 0$. Dans ce cas $\sigma_1 \circ \sigma_2$ n'est pas une isométrie.

□

PROPooUSKEooUbNVfs

Proposition 20.96.
Un élément de SO(3) *qui fixe deux vecteurs linéairement indépendants est l'identité.*

Démonstration. Soit un élément $A \in \mathrm{SO}(3)$ et deux vecteurs linéairement indépendants $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = v_2$. Puisque v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, le théorème de la base incomplète 6.15 nous permet de considérer $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base. Dans cette base, la matrice de A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \tag{20.290}$$

Le déterminant de cette matrice est c. Or $\det(A) = 1$ parce qu'elle est dans SO(3). Donc $c = 1$. Le fait que A soit orthogonale implique que la troisième colonne doit être un vecteur de norme 1. Donc $a = b = 0$.

Donc $A = \mathrm{Id}$. □

CORooJCURooSRzSFb

Corolaire 20.97.
Tout élément de SO(3) *peut être écrit comme composée de deux réflexions.*

Démonstration. Un élément de SO(3) est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ parce que si $A \in \mathrm{SO}(3)$ alors[30]

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{20.291}$$

Donc si le rang de A est k, alors A est la composée de $3 - k$ réflexions par le lemme 20.94.

Si $A = \mathrm{Id}$, c'est bon parce que l'identité est la composée de deux réflexions égales. Nous supposons que A n'est pas l'identité.

Comme discuté dans l'exemple 14.94, l'opérateur A possède trois valeurs propres dans $\mathbb{C}$ dont une réelle, et deux complexes conjuguées. Nous les notons $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{C}$. Le déterminant de A, qui vaut 1, est le produit de ces trois valeurs propres, c'est-à-dire $\lambda|\alpha|^2$. En particulier $\lambda > 0$.

Si v est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ, nous avons $\|v\| = \|Av\| = |\lambda|\|v\|$ parce que A est une isométrie. Donc $\lambda = \pm 1$.

Au final, $\lambda = 1$. Cela signifie que A laisse au moins un vecteur invariant. Vu que A n'est pas l'identité, la proposition 20.96 nous indique qu'il n'y a pas d'autres vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à être fixé par A. Donc $\dim\big(\mathrm{Fix}(A)\big) = 1$ et le lemme 20.94(1) s'écrit avec $n = 3$, $k = 2$ et implique que A est la composée de deux réflexions. □

LEMooMCVKooKzmlAg

Lemme 20.98.
Soit un hyperplan H et un vecteur v de $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1} = \sigma_{\tau_v(H)}. \tag{20.292}$$

Démonstration. Pour ce faire, nous considérons une base adaptée. Les vecteurs $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ forment une base orthonormée de H_0 et e_n complète en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit H_0 l'hyperplan parallèle à H et passant par l'origine ; nous avons, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$H = H_0 + \lambda e_n \tag{20.293}$$

D'un autre côté, le vecteur v peut être décomposé en $v = v_1 + v_2$ où $v_1 \perp H$ et $v_2 /\!\!/ H$. Alors

$$\tau_v(H) = H + v = H + v_2 = H_0 + \lambda e_n + v_2. \tag{20.294}$$

Nous pouvons maintenant utiliser le lemme 20.92 pour exprimer la transformation $\sigma_{\tau_v(H)}$:

$$\sigma_{\tau_v(H)}(x) = \sigma_{H_0}(x) + 2\lambda e_n + 2v_2 \tag{20.295}$$

EQooNYKFooXprXav

Mais d'autre part,

$$(\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1})(x) = v + \sigma_H(x - v) = v + \sigma_{H_0}(x - v) + 2\lambda e_n. \tag{20.296}$$

Vue la décomposition de $v = v_1 + v_2$ nous avons $\sigma_{H_0}(v) = -v_1 + v_2$ et donc

$$(\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1})(x) = v + \sigma_{H_0}(x) + v_1 - v_2 + 2\lambda e_n = \sigma_{H_0} + 2v_1 + 2\lambda e_n. \tag{20.297}$$

EQooGOHEooALPRER

Les expressions (20.295) et (20.297) coïncident, d'où l'égalité recherchée. □

[30] Opérateur orthogonal, définition 10.41.

PROPooLYCUooRQgGtF

Proposition 20.99.
Soit un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine. Il existe une base orthonormée $\{e_1,\dots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ soit une base orthonormée de H et $e_n \perp H$.

Démonstration. Nous commençons par prendre une base quelconque $\{b_1,\dots,b_{n-1}\}$ de H. Le lemme 12.59 nous permet de considérer un vecteur e_n perpendiculaire à tous les b_i. Donc $e_n \perp H$.

Ensuite nous utilisons Gram-Schmidt 12.60 sur la base $\{b_1,\dots,b_{n-1}\}$ de H. Il en sort une base orthonormée $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ de H. □

20.9.1 Préserver l'orientation

Le fait qu'une isométrie puisse être décomposé en réflexions est le lemme 20.94.

DEFooUZFHooXVVLBL

Proposition-Définition 20.100 (Isométrie positive et négative[629])**.**
Nous utilisons la bijection $\psi\colon T(n)\times \mathrm{O}(n)\to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ décrite par le théorème 20.85, et nous définissons

$$\begin{aligned}\epsilon\colon \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) &\to \{\pm 1\}\\ f &\mapsto \det\big(\psi^{-1}(f)_2\big).\end{aligned} \tag{20.298}$$

Cette application ϵ est un morphisme de groupes.

*Nous disons que $f\in\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est **positive** ou **préserve l'orientation** si $\epsilon(f)=1$, et nous notons*

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)=\epsilon^{-1}(1). \tag{20.299}$$

LEMooVRELooESIWQl

Lemme 20.101.
La partie $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ des isométries positives est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Nous commençons par l'identité. Pour $\mathrm{Id}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, nous avons $\psi^{-1}(\mathrm{Id})=(0,\mathrm{Id})$ et donc $\epsilon(\mathrm{Id})=\det\big(\psi^{-1}(\mathrm{Id})_2\big)=\det(\mathrm{Id})=1$.

En ce qui concerne le produit, nous considérons $f,g\in\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ ainsi que $v,w\in T(n)$ et $A,B\in\mathrm{O}(n)$ tels que $f=\psi(v,A)$ et $g=\psi(w,B)$. Le théorème 20.85(4) nous donne

$$f\circ g=\psi(v,A)\circ\psi(w,B)=\psi\big((v,A)\cdot(w,B)\big). \tag{20.300}$$

Donc $\psi^{-1}(f\circ g)=(v,A)\cdot(w,B)=(\dots,A\circ B)$. La première composante ne nous intéresse pas. Au final

$$\epsilon(f\circ g)=\det\big(\psi^{-1}(f\circ g)_2\big)=\det(A\circ B)=\det(A)\det(B)=1. \tag{20.301}$$

□

LEMooJABDooOKHwWv

Lemme 20.102 ([629])**.**
Si H est un hyperplan et si σ_H est la réflexion de cet hyperplan, alors $\epsilon(\sigma_H)=-1$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que H passe par l'origine, de telle sorte que σ_H soit linéaire, et que $\epsilon(\sigma_H)=\det(\sigma_H)$.

Nous choisissons une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ comme dans la proposition 20.99 : $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ est une base de H et $e_n\perp H$. Nous avons alors

$$\sigma_H(e_i)=\begin{cases}e_i & \text{si } i=1,\dots,n-1\\ -e_n & \text{si } i=n.\end{cases} \tag{20.302}$$

Calculons ce déterminant à l'ancienne, en utilisant les définitions 10.14 et 10.9. Nous posons $\mu_i=1$ pour $i=1,\dots,n-1$ et $\mu_n=-1$, de telle sorte à avoir $\sigma_H(e_i)=\mu_i e_i$. Nous posons aussi $B=(e_1,\dots,e_n)$. Ensuite c'est parti pour le calcul :

$$\det{}_B\big(f(B)\big)=\sum_{s\in S_n}\epsilon(s)\prod_{i=1}^{n}e^*_{s(i)}\big(f(e_i)\big) \tag{20.303a}$$

$$=\sum_{s\in S_n}\epsilon(s)\prod_{i=1}^{n}\langle e_{s(i)},\mu_i e_i\rangle \tag{20.303b}$$

$$=\sum_{s\in S_n}\epsilon(s)\prod_{i=1}^{n}\mu_i\langle e_{s(i)},e_i\rangle. \tag{20.303c}$$

Vu que la base est orthogonale, $\langle e_{s(i)}, e_i\rangle = \delta_{s(i),i}$ et il ne reste, dans la somme sur S_n, que le terme $s = \mathrm{Id}$ dont la signature est $\epsilon(\mathrm{Id}) = 1$. Donc

$$\det_B\big(f(B)\big) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = -1. \tag{20.304}$$

Et si H ne passe pas par l'origine ? Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\tau_v(H)$ passe par l'origine (prendre pour v l'opposé de n'importe que élément de H). Le lemme 20.98 nous indique que

$$\sigma_{\tau_v(H)} = \tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1}. \tag{20.305}$$

Comme ϵ est un morphisme,

$$\epsilon\big(\sigma_{\tau_v(H)}\big) = \epsilon(\tau_v\sigma_H\tau_v^{-1}) = \epsilon(\tau_v)\epsilon(\sigma_H)\epsilon(\tau_v^{-1}) = \epsilon(\sigma_H). \tag{20.306}$$

Nous avons utilisé le fait que $\epsilon(g^{-1}) = \epsilon(g)^{-1}$. Tout ça pour dire que

$$\epsilon(\sigma_H) = \epsilon(\sigma_{\tau_v(H)}) = -1 \tag{20.307}$$

parce que $\tau_v(H)$ passe par l'origine. □

THOooQEWRooYeOIfZ

Théorème 20.103 ([629]).
Une isométrie de $(\mathbb{R}^n, d)$ préserve l'orientation[31] *si et seulement si elle est composition d'un nombre pair de réflexions hyperplanes.*

Démonstration. Le lemme 20.94 nous indique qu'une isométrie f de $\mathbb{R}^n$ peut être décomposée en réflexions hyperplanes. Le lemme 20.102 nous dit que chacune de ces réflexions est négative. Donc si $f = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$, alors

$$\epsilon(f) = \epsilon(\sigma_1)\ldots\epsilon(\sigma_r) = (-1)^r. \tag{20.308}$$

□

20.10 Groupes finis d'isométries

DEFooCUYLooAlbtzv

Définition 20.104.
Si X est une partie finie de $\mathbb{R}^n$, le ***barycentre*** *de X est le point*

$$B_X = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} x \tag{20.309}$$

où $|X|$ est le cardinal de X.

Cela est à mettre en relation avec la définition dans le cadre affine 13.30.

LEMooSEZYooYceLIb

Lemme 20.105 ([629]).
Les applications affines de $\mathbb{R}^n$ préservent le barycentre[32] *des parties finies.*

Démonstration. Soit une partie finie X de $\mathbb{R}^n$ et une application affine $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Nous devons prouver que

$$f(B_X) = B_{f(X)}. \tag{20.310}$$

Nous savons que toute application affine est une composée de translation et d'une application linéaire : $f = \tau_v \circ g$ avec $v \in \mathbb{R}^n$ et $g \in \mathrm{End}(n, \mathbb{R})$. Nous vérifions le résultat séparément pour τ_v et pour g.

D'une part,

$$B_{\tau_v(X)} = \frac{1}{|\tau_v(X)|}\sum_{y\in\tau_v(X)} y = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(x+v) = B_x + \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} v = B_x + v = \tau_v(B_X). \tag{20.311}$$

Nous avons utilisé le fait que X et $\tau_v(X)$ possèdent le même nombre d'éléments, ainsi que le fait d'avoir une somme de $|X|$ termes tous égaux à v.

D'autre part,

$$B_{g(X)} = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} g(x) = g\big(\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} x\big) = g(B_X) \tag{20.312}$$

où nous avons utilisé la linéarité de g dans tous ses retranchements. □

[31] Définition 20.100.
[32] Définition 20.104.

PROPooLAEBooWdcBoe

Proposition 20.106.
Points fixes d'un sous-groupe.

(1) *Soit H un sous-groupe fini des isométries de $(\mathbb{R}^n, d)$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(v) = v$ pour tout $f \in H$.*

(2) *Si H est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d)$ n'acceptant pas de point fixe, alors il est infini.*

Démonstration. Le groupe H agit sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$ nous pouvons considérer son orbite

$$Hx = \{f(x) \text{ tel que } f \in H\}, \tag{20.313}$$

qui est une partie finie de $\mathbb{R}^n$. Considérons son barycentre $v = B_{Hx}$. Soit $f \in H$. Alors

$$\begin{aligned} f(v) &= f(B_{Hx}) && \text{(20.314a)}\\ &= B_{f(Hx)} && \text{(20.314b)}\\ &= B_{Hx} && \text{(20.314c)}\\ &= v, && \text{(20.314d)} \end{aligned}$$

SUBEQooOQBZooYJbgN
SUBEQooXWEGooSoezYg

Justifications :

- Pour (20.314b), c'est le lemme 20.105.
- Pour (20.314c), c'est le fait que, $f \in H$ étant donné, l'application $g \mapsto fg$ est une bijection de H, donc

$$f(Hx) = \{(fg)(x) \text{ tel que } h \in H\} = \{g(x) \text{ tel que } g \in H\} = Hx. \tag{20.315}$$

Bref, v est fixé par H.

La seconde affirmation n'est rien d'autre que la contraposée de la première. □

PROPooEUFIooDUIYzi

Proposition 20.107.
À propos de groupes finis d'isométries.

(1) *Tout sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathrm{O}(n)$.*

(2) *Tout sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(n)$.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ un élément fixé par H (comme garanti par la proposition 20.106). Nous posons

$$\begin{aligned} \phi\colon H &\to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)\\ f &\mapsto \tau_v^{-1} \circ f \circ \tau_v. \end{aligned} \tag{20.316}$$

(1) ϕ **est un morphisme** Les opération du type $\phi = \mathbf{Ad}(\tau_v)$ sont toujours des morphismes.

(2) ϕ **consiste à extraire la partie linéaire** Si $f = \tau_w \circ g$ alors

$$\begin{aligned} \phi(f)(x) &= (\tau_{-v} \circ \tau_w \circ g \circ \tau_v)(x) && \text{(20.317a)}\\ &= \tau_{w-v}(g(x) + g(v)) && \text{(20.317b)}\\ &= g(x) + g(v) - v + w && \text{(20.317c)} \end{aligned}$$

Mais $g(v) + w = f(v)$ et nous savons que $f(v) = v$. Donc il ne reste que $\phi(f)(x) = g(x)$.

(3) ϕ **est injective** Si $f = \tau_w \circ g$ vérifie $\phi(f) = \mathrm{Id}$, il faut en particulier que $g = \mathrm{Id}$. Mais H est fini et ne peut donc pas contenir de translations non triviales. Donc $w = 0$ et $f = \mathrm{Id}$.

Donc ϕ est une injection à valeur dans les transformations linéaires de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, ϕ est un isomorphisme entre H et son image, laquelle image est dans $\mathrm{O}(n)$.

En ce qui concerne la seconde partie, si $f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi(f)$, qui est la partie linéaire de f (théorème 20.85(7)), est dans $\mathrm{O}(n)$ avec un déterminant égal à 1. Autrement dit, $\phi(f) \in \mathrm{SO}(n)$. □

L'extraction de la partie linéaire est injective ? Certe c'est prouvé, mais on peut se demander ce qu'il se passe si H contient deux éléments qui ont la même partie linéaire. Cela n'est pas possible parce si $f_1 = \tau_{w_1} \circ g$ et $f_2 = \tau_{w_2} \circ g$ sont dans H alors $f_1 f_2^{-1} = \tau_{w_1 - w_2}$ est également dans H. Vu que H est fini, cela n'est possible que si $w_1 = w_2$, c'est-à-dire si $f_1 = f_2$.

20.10.1 Points fixés par une affinité

LEMooGUEGooTUXRsQ

Lemme 20.108 ([631]).
Si $n \geqslant 3$, alors toute droite est intersection de deux plans non isotropes[33].

Démonstration. Soit une droite d dans E, ainsi que $x \in d$. Soit x est isotrope, soit il ne l'est pas.

(1) **Si x est isotrope**

Étant donné que f est non dégénérée, il existe $y \in E$ tel que $f(x,y) \neq 0$. Le plan $P = \text{Span}\{x,y\}$ est alors non isotrope. En effet, considérons $z \in P \cap P^\perp$. Nous avons alors $f(z,x) = f(z,x) = 0$. Vu que $z \in P$ nous pouvons l'écrire sous la forme $z = \alpha x + \beta y$. La première condition sur z donne :

$$0 = f(\alpha x + \beta y, x) = \beta f(y,x) \tag{20.318}$$

parce que $f(x,x) = 0$. Étant donné que $f(x,y) \neq 0$ nous en déduisons que $\beta = 0$. La seconde condition donne alors $f(\alpha x, y) = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$.

Le plan P étant non isotrope, le plan $P^\perp$ est également non isotrope par le lemme 10.141.

Nous fixons maintenant $z \in P^\perp$.

L'élément z n'est pas dans P parce que $P \cap P^\perp = \{0\}$. L'élément $y + z$ n'est pas dans P non plus parce que P est vectoriel, $y \in P$ et $z \notin P$.

Nous considérons donc le plan $Q = \text{Span}\{x, y+z\}$.

Ce plan est non isotrope. En effet, soit $u \in Q \cap Q^\perp$. Nous avons $u = \alpha x + \beta(y+z)$, et cela doit vérifier $f(u,x) = f(y, y+z) = 0$. Nous avons d'abord

$$0 = f(u,x) = \alpha \underbrace{f(x,x)}_{=0} + \beta \underbrace{f(x,y)}_{\neq 0} + \beta \underbrace{f(x,z)}_{=0}. \tag{20.319}$$

Nous en déduisons que $\beta = 0$. Il reste $u = \alpha x$, et nous imposons la seconde condition :

$$0 = f(u, y+z) = \alpha f(x,y) + \alpha f(x,z). \tag{20.320}$$

Vu que $f(x,y) \neq 0$ et $f(x,z) = 0$ nous déduisons $\alpha = 0$ et donc $u = 0$.

Au final, les plans P et Q sont non isotropes et $P \cap Q = d$.

(2) **Si x n'est pas isotrope** Nous supposons maintenant que x n'est pas isotrope. Le lemme 10.132 sur les dimensions, appliqué à l'espace de dimension 1 engendré par x donne $\dim(x^\perp) + 1 = \dim(E)$. Vu que $\dim(E) \geqslant 3$, nous déduisons que $\dim(x^\perp) \geqslant 2$.

Nous considérons une base f-orthogonale de $x^\perp$ (proposition 10.244). Les vecteurs de cette base ne sont pas isotropes. Soient y et z les vecteurs de cette base. Il nous reste à prouver que les plans $P = \text{Span}\{x,y\}$ et $Q = \text{Span}\{x,z\}$ font l'affaire.

Vu que x n'est pas isotrope, les vecteurs y et z ne sont pas dans d ; ce sont donc de vrais plans de dimension 2, et leur intersection est d. Montrons que P n'est pas isotrope, en considérant $v = \alpha x + \beta y \in P \cap P^\perp$. Vu que $v \in P^\perp$, il vérifie les deux conditions $f(v,x) = f(v,y) = 0$.

La première condition donne

$$0 = \alpha \underbrace{f(x,x)}_{\neq 0} + \beta \underbrace{f(y,x)}_{=0} = \alpha f(x,x) \tag{20.321}$$

parce que $y \in x^\perp$. Il nous reste $v = \beta y$. Appliquons la seconde condition :

$$0 = f(v,y) = \alpha f(y,y). \tag{20.322}$$

Le scalaire $f(y,y) \in \mathbb{K}$ n'est pas nul parce que nous avons choisi une base orthogonale. Au final $v = 0$, et P est non isotrope. Exactement le même raisonnement montre que Q n'est pas isotrope non plus.

□

PROPooVEEUooJQmmkN

Proposition 20.109 ([629]).
Si une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixe un ensemble F de points, alors elle fixe l'espace affine engendrée par F.

[33] Sous-espace isotrope, définition 10.139.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ fixant F. Par le théorème 10.153, c'est une application affine et l'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixés par f est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$, grâce à la proposition 13.61.

Donc $\mathrm{Fix}(f)$ est un espace affine contenant F. Puisque l'espace affine engendré par F est l'intersection de tous les espaces affines contenant F, il est en particulier contenu dans $\mathrm{Fix}(f)$. □

CORooZHZZooDgTzsW

Corolaire 20.110.
Si f et g sont des isométries de $\mathbb{R}^n$ qui coïncident sur F, alors elles coïncident sur l'espace affine engendré par F.

Démonstration. Nous considérons $h = g^{-1} \circ f$ qui est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixant F. Elle fixe donc, par la proposition 20.109, l'espace affine engendré par F. Or tout point fixé par h est un point sur lequel g et f coïncident. □

20.11 Classification des isométries dans $\mathbb{R}^2$

20.11.1 Projection orthogonale

Le lemme suivant dit que si on prend deux points sur le bord d'une sphère, alors les points de la corde sont à l'intérieur de la sphère.

LEMooKVBWooTxzZOx

Lemme 20.111 ([1]).
Soit un espace euclidien[34] *$(E, \cdot)$. Soient $s, a, b \in E$ tels que $\|s-a\| = \|s-b\| = \rho$. Alors pour tout $\lambda \in]0,1[$ nous avons*

$$\|s - \lambda a - (1-\lambda)b\| < \rho. \tag{20.323}$$

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **Si $s = 0$ et $\|a\| = \|b\| = 1$** Un peu de calcul montre que

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b\| = \lambda^2(2 - a \cdot b) - \lambda(2 - a \cdot b) + 1 \tag{20.324}$$

Nous posons $\alpha = 2 - a \cdot b$ et nous notons que Cauchy-Schwarz (12.2) donne

$$\alpha \geqslant 2 - |a \cdot b| \geqslant 2 - \|a\|\|b\| = 1. \tag{20.325}$$

Le sommet de la parabole[35] $f(\lambda) = \alpha\lambda^2 - \alpha\lambda + 1$ est en $\lambda = 1/2$. Et ce sommet est un minimum parce que $\alpha > 0$. Vu que 0 et 1 sont symétriques par rapport à $m = 1/2$, la proposition 11.117 nous dit que $f(0) = f(1)$ et que pour tout $\lambda \in]0,1[$, $f(\lambda) < f(0) = 1 = \|a\| = \|b\|$.

(2) **Si $\|a\| = \|b\| = \rho$** Nous posons alors $u = a/\rho$ et $v = b/\rho$. Pour tout $\lambda \in]0,1[$, grâce à la première partie, nous avons

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| < 1. \tag{20.326}$$

En ce qui concerne a et b nous avons alors

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b\| = \|\lambda\rho u + (1-\lambda)\rho v\| = \rho\|\lambda u + (1-\lambda)v\| < \rho. \tag{20.327}$$

Notez l'utilisation du lemme 4.53(2).

(3) **Si $s \neq 0$** Alors il suffit de poser $u = a - s$ et $v = b - s$. En posant $\|s - a\| = \|b - s\| = \rho$ nous avons $\|u\| = \|v\| = \rho$ et avec la partie précédente :

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| < \rho. \tag{20.328}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\lambda a + (1-\lambda)b - s\| &= \|\lambda(a-s) + (1-\lambda)(b-s)\| && \text{(20.329a)}\\
&= \|\lambda u + (1-\lambda)v\| && \text{(20.329b)}\\
&< \rho && \text{(20.329c)}\\
&= \|a - b\|. && \text{(20.329d)}
\end{aligned}$$

□

[34] Définition 10.167.
[35] Les détails dans la proposition 11.116.

Une version pour les espaces de Hilbert sera le théorème 27.6

DEFooHXJTooNPyDFQ

Proposition-Définition 20.112.
Soient un espace euclidien de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$. Nous considérons une partie H fermée dans E ainsi que $a \in E$.

(1) Il existe $m \in H$ tel que

$$\|a - m\| = \inf\{\|a - x\| \text{ tel que } x \in H\}. \tag{20.330}$$

(2) Si de plus H est convexe, alors ce minimum est unique : si $m_1, m_2 \in E$ vérifient

$$\|a - m_1\| = \|a - m_2\| = \inf\{\|a - x\| \text{ tel que } x \in H\}, \tag{20.331}$$

alors $m_1 = m_2$.

*Lorsque H est fermé et convexe, ce m est la **projection orthogonale** de a sur H et est notée $\texttt{proj}_H(a)$.*

Démonstration. Nous supposons pour commencer que H est fermé.

(1) **La partie K** Soit $s \in H$. Nous posons $r = \|a - s\|$ de telle sorte que

$$K = \overline{B(a, r)} \cap H \tag{20.332}$$

soit non vide.

(2) **K est compacte** C'est l'intersection entre le fermé H et le compact $\overline{B(a, r)}$. Donc c'est compact par le corolaire 9.138.

(3) **La fonction f** Nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon K &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|x - a\|. \end{aligned} \tag{20.333}$$

C'est une application continue sur un compact. Elle atteint donc ses bornes par le théorème 11.56. Notons $m \in K$ tel que

$$f(m) = \|a - m\| = \inf_{x \in H} \|a - x\|. \tag{20.334}$$

(4) **C'est bien un minimum sur H** Soit $h \in H$. Nous prouvons à présent que $f(h) \geqslant f(m)$. Il y a deux possibilités : soit $h \in \overline{B(a, r)}$ soit non. Si oui, alors $h \in K$ et par construction du minimum, $f(m) \leqslant f(h)$.
Si h n'est pas dans $\overline{B(a, r)}$ alors $\|a - h\| > r$ alors que $\|a - m\| \leqslant r$.

Nous supposons maintenant de plus que H est convexe. Nous supposons que m_1 et m_2 minimisent $x \mapsto \|a - x\|$. En particulier $\|a - m_1\| = \|a - m_2\| = \rho$. D'après le lemme 20.111, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ nous avons

$$\|a - \lambda m_1 - (1 - \lambda)m_2\| < \rho. \tag{20.335}$$

Par convexité de H nous avons bien $p(\lambda) = \lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2 \in H$. À moins que nous ayons $p(\lambda) = m_1$ ou $p(\lambda) = m_2$ pour tout λ, la minimalité de m_1 et m_2 est contredite. Si pour un certain $\lambda \in]0, 1[$ nous avons $p(\lambda) = m_1$, alors

$$(\lambda - 1)m_1 + (1 - \lambda)m_2 = 0, \tag{20.336}$$

ce qui signifie que $m_1 = m_2$. Même raisonnement si $p(\lambda) = m_2$. □

PROPooJIMHooGVzhLh

Proposition 20.113 ([1]).
Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \|\cdot\|)$ et si $x = \sum_i x_i e_i$, alors

$$x = \sum_i \texttt{proj}_i(x) \tag{20.337}$$

où $\texttt{proj}_i$ est un raccourci pour la projection sur la droite engendrée par e_i.

Démonstration. Nous allons montrer que $\texttt{proj}_i(x) = x_i e_i$. La définition de $\texttt{proj}_i$ demande de minimiser $\|x - \lambda e_i\|^2$. Étant donné que $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée,

$$\|x - \lambda e_i\|^2 = \|(x_i - \lambda)e_i + \sum_{j \neq i} x_j e_i\| = |x_i - \lambda|^2 + \sum_{j \in i} |x_j|^2. \tag{20.338}$$

Cela est minimum lorsque $\lambda = x_i$. □

PROPooOXEDooXxmRHj

Proposition 20.114 ([1]).
Soit un espace euclidien $(E, \cdot)$. Soient une droite ℓ, et la parallèle $\ell_0 \parallel \ell$ passant par 0. Nous considérons la perpendiculaire[36] q à ℓ passant par a. Alors

$$\texttt{proj}_\ell(a) = q \cap \ell. \tag{20.339}$$

Cette proposition est la raison pour laquelle la projection est dite « orthogonale ».

Démonstration. Soient la droite q_0 parallèle à q passant par 0, $b \in \ell$, $h \in \ell_0$ et $v \in q_0$ tels que $\|h\| = \|v\| = 1$. Nous avons

$$q = \{a + \lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \tag{20.340}$$

et

$$\ell = \{b + \lambda h\}_{\lambda \in \mathbb{R}}. \tag{20.341}$$

Nous considérons une base orthonormée de E commençant par $h : \{e_1, \dots, e_n\}$ avec $e_1 = h$. Pour trouver $\texttt{proj}_\ell(a)$ nous devons minimiser

$$\|b + \lambda g - a\|^2 = \|(b_1 + \lambda - a_1)h + \sum_{j>1}(b_j - a_j)e_j\|^2 \tag{20.342a}$$

$$= |b_1 + \lambda - a_1|^2 + \sum_{j>1}|b_j - a_j|^2. \tag{20.342b}$$

Cela est minimisé pour $\lambda = a_1 - b_1$, de telle sorte que

$$\texttt{proj}_\ell(a) = b + (a_1 - b_1)h. \tag{20.343}$$

Nous devons maintenant voir que ce point est $\ell \cap q$.
Commençons par prouver que

$$\texttt{proj}_\ell(a) - a \perp \ell. \tag{20.344}$$

Nous avons

$$\big(b + (a_1 - b_1)h\big) - a = (b_1 + a_1 - b_1 - a_1)h + \sum_{j>1}(b_j - a_j)e_j \tag{20.345a}$$

$$= \sum_{j>1}(b_j - a_j)e_j, \tag{20.345b}$$

qui est effectivement perpendiculaire à h parce que $h = e_1$.
La droite passant par $\texttt{proj}_\ell(a)$ et par a est donc perpendiculaire à ℓ. Elle est donc q. □

LEMooXZMFooOPTjNx

Lemme 20.115.
Soient un espace vectoriel euclidien $(E, \cdot)$ ainsi que $a \in E$. Soit une droite ℓ dans E et $h \in \ell_0$. Nous avons

$$a \cdot h = \texttt{proj}_\ell(a) \cdot h. \tag{20.346}$$

Démonstration. Nous prenons $v \perp h$. Par la proposition 20.114, nous avons $\texttt{proj}_\ell(a) = a + \lambda v$ pour un certain λ. Nous avons donc immédiatement

$$\texttt{proj}_\ell(a) \cdot h = (a + \lambda v) \cdot h = a \cdot h + \lambda \underbrace{v \cdot h}_{=0} = a \cdot h. \tag{20.347}$$

□

20.11.2 Réflexions

Soit un espace vectoriel E de dimension 2 muni d'un produit scalaire[37]. Cela pourrait très bien être $\mathbb{R}^2$, mais nous allons nous efforcer de l'appeler E pour rester un peu général.

DEFooLJKDooUaamen

Lemme-Définition 20.116 (Caractérisation des réflexions).
Soit une droite ℓ de $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

(1) $f(x) = x$ pour tout $x \in \ell$.

[36] Existence et unicité par la proposition 14.141(2).
[37] Définition 10.163.

(2) f échange les côtés de ℓ.

(3) f laisse invariants les droites perpendiculaires à ℓ et les cercles dont le centre est sur ℓ.

Cette application est la ***réflexion*** *d'axe ℓ.*

Démonstration. Soit x hors de ℓ et p la droite perpendiculaire à ℓ et passant par x. Nous avons $f(x) \in p$. En nommant P l'intersection entre ℓ et p, nous considérons le cercle $S(P, \|Px\|)$ qui est un cercle dont le centre est sur ℓ. Il contient x et donc $f(x) \in S(P, \|Px\|)$.

Donc $f(x) \in p \cap S(P, \|Px\|)$. L'intersection entre un cercle et une droite contient de façon générique deux points. L'un est x, mais $f(x) = x$ n'est pas possible parce que x est hors de ℓ et f doit inverser les côtés de ℓ. Donc $f(x)$ est l'autre.

Cela prouve l'unicité. En ce qui concerne l'existence, il suffit de noter que la réflexion σ_ℓ satisfait les contraintes. □

LEMooZSDRooUkNYer

Lemme 20.117.
Soit une droite ℓ et $A \in E$. Alors

$$\sigma_\ell(A) = 2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A \tag{20.348}$$

EQooVUQDooKuwszl

où $\texttt{proj}_\ell$ est l'opération de projection orthogonale sur la droite ℓ.

Démonstration. Nous posons $f(X) = 2\,\texttt{proj}_\ell(X) - X$ et nous allons montrer que $f = \sigma_\ell$ en vérifiant les conditions de la définition 20.116. Nous nous gardons bien de faire un raisonnement du type « nous allons montrer que f et σ_ℓ coïncident sur deux points, et sont donc égales par le corolaire 20.110 » parce que nous ne savons pas encore que σ_ℓ est une application affine, ni même que c'est une isométrie.

Si $X \in \ell$ alors $\texttt{proj}_\ell(X) = X$ et nous avons $f(X) = 2X - X = X$. Donc ℓ est conservée.

En ce qui concerne les deux côtés de ℓ, il existe une application linéaire $s\colon E \to \mathbb{R}$ et une constante $c \in \mathbb{R}$ telles qu'en posant $\ell(X) = s(X) + c$, la droite ℓ soit le lieux des points X tels que $\ell(X) = 0$. Un côté de la droite est $\ell < 0$ et l'autre côté est $\ell > 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\ell\big(f(A)\big) &= \ell\big(2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A\big) && \text{(20.349a)}\\
&= s(2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A) + c && \text{(20.349b)}\\
&= 2s\big(\texttt{proj}_\ell(A)\big) - s(A) + c && \text{(20.349c)}\\
&= s\big(\texttt{proj}_\ell(A)\big) - s(A) && \text{(20.349d)}\\
&= -c - s(A) && \text{(20.349e)}\\
&= -\ell(A) && \text{(20.349f)}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que, $\texttt{proj}_\ell(A)$ étant sur ℓ, $s\big(\texttt{proj}_\ell(A)\big) + c = 0$. Nous avons donc $\ell\big(f(A)\big) = -\ell(A)$, ce qui indique que A et $f(A)$ sont de part et d'autre de ℓ.

Si d est une droite perpendiculaire à ℓ et si $A \in d$ alors $f(A) = 2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A = \big(\texttt{proj}_\ell(A) - A\big) + A \in d$ parce que $\texttt{proj}_\ell(A) \in d$ du fait que d soit précisément perpendiculaire à ℓ. Nous avons aussi utilisé le fait que si $A, B, C \in d$ alors $(B - A) + C \in d$; pensez que $B - A$ est un vecteur directeur et que C est un point de d.

Enfin soit $K \in \ell$ et un cercle $S(K, r)$ centré en K. Soit $A \in S(K, r)$; nous devons vérifier que $f(A) = S(K, r)$. Le segment $[A, f(A)]$ est par définition perpendiculaire à ℓ. Soit M, le milieu, qui est sur la droite ℓ. Les triangles AMK et $f(A)MK$ sont rectangles en M, et $\|AM\| = \|Mf(A)\|$. Le théorème de Pythagore donne $\|AK\| = \|f(A)K\|$. Donc le cercle centré en K est alors préservé par f.

Nous en déduisons que $f = \sigma_\ell$. □

LEMooNYIWooXanBXh

Lemme 20.118.
Soit une droite ℓ dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que $a \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\texttt{proj}_\ell\big(\sigma_\ell(a)\big) = \texttt{proj}_\ell(a). \tag{20.350}$$

Démonstration. Nous savons de la proposition 20.114 que si q est la droite perpendiculaire à ℓ passant par a, nous avons $\texttt{proj}_\ell(a) = \ell \cap q$. Nous savons aussi que $\sigma_\ell(a)$ est sur q. Donc $\texttt{proj}_\ell\big(\sigma_\ell(a)\big) = \ell \cap q$. □

PROPooFSVEooWmJsnv

Proposition 20.119 ([632])**.**
Les réflexion par rapport aux droites de (E, d) sont des isométries.

Démonstration. Soient $A, B \in E$; il faut vérifier que $\|A - B\| = \|\sigma_\ell(A) - \sigma_\ell(B)\|$. Pour cela nous écrivons

$$B - A = \underbrace{B - \texttt{proj}_\ell(B)}_{=a} + \underbrace{\texttt{proj}_\ell(B) - \texttt{proj}_\ell(A)}_{=b} + \underbrace{\texttt{proj}_\ell(A) - A}_{=c}. \tag{20.351}$$

Vu que $b \perp a$ et $b \perp c$ (lemme 20.115) nous avons

$$\|B - A\|^2 = \langle B - A, B - A\rangle = \|a\|^2 + 2\langle a, c\rangle + \|b\|^2 + \|c\|^2. \tag{20.352}$$

Nous pouvons jouer le même jeu avec $\sigma_\ell(B) - \sigma_\ell(A)$ en tenant compte du lemme 20.118 et que

$$\sigma_\ell(A) - \texttt{proj}_\ell(A) = 2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A - \texttt{proj}_\ell(A) = -\big(A - \texttt{proj}_\ell(A)\big). \tag{20.353}$$

Là nous avons utilisé le lemme 20.117. Ce que nous trouvons est que

$$\sigma_\ell(B) - \sigma_\ell(A) = -a + b - c, \tag{20.354}$$

et donc encore une fois

$$\|\sigma_\ell(B) - \sigma_\ell(A)\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, c\rangle + \|b\|^2 + \|c\|^2. \tag{20.355}$$

□

Remarque 20.120.
Il faut bien comprendre que si l'axe de la réflexion ne passe pas par 0 (le zéro de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$), la réflexion n'est pas une isométrie de $(E, \|.\|)$ au sens où nous n'avons pas $\|\sigma_\ell(x)\| = \|x\|$.

LEMooTCIEooXdyuHu

Lemme 20.121.
Si A' est l'image de A par σ_ℓ alors ℓ est la médiatrice du segment $[A, A']$.

Démonstration. Soit $M \in \ell$. Nous avons

$$\|A - M\|^2 = \|\texttt{proj}_\ell(A) - A\|^2 + \|\texttt{proj}_\ell(A) - M\|^2 \tag{20.356}$$

parce que $A - \texttt{proj}_\ell(A) \perp M - \texttt{proj}_\ell(A)$. Par ailleurs, vu que $\sigma_\ell(A) = 2\,\texttt{proj}_\ell(A) - A$ et que $\texttt{proj}_\ell(A) = \texttt{proj}_\ell(A')$,

$$\|\texttt{proj}_\ell(A) - A\| = \|\texttt{proj}_\ell(A') - A'\|. \tag{20.357}$$

Nous avons donc

$$\|\sigma_\ell(A) - M\|^2 = \|A - M\|^2, \tag{20.358}$$

ce qui prouve que M est sur la médiatrice de $[A', A]$ par le lemme 14.159. □

20.122.
Si l est une droite dans $\mathbb{R}^2$, nous avons la réflexion $\sigma_l \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ d'axe l. Cela est une isométrie et donc une application affine par le théorème 10.153. Le lemme suivant détermine comment la réflexion σ_ℓ se décompose en une translation et une application linéaire.

LEMooVOJLooCFgdNG

Lemme 20.123.
Soit une droite ℓ. Alors

$$\sigma_\ell = \tau_{2w} \circ \sigma_{\ell_0} \tag{20.359}$$

où ℓ_0 est la droite parallèle à ℓ passant par l'origine, et w est le vecteur perpendiculaire à ℓ tel que $\ell_0 = \ell + w$.

Démonstration. Il faut trouver trois points non alignés sur lesquels les deux applications coïncident ; cela suffira par le corolaire 20.110.

Pour tous les points de ℓ_0, l'égalité fonctionne parce que si $x \in \ell_0$,

$$\sigma_\ell(x) = x + 2w, \tag{20.360}$$

tandis que

$$\sigma_{\ell_0}(x) + 2w = x + 2w \tag{20.361}$$

du fait que $\sigma_{\ell_0}(x) = x$.

Si $x \in \ell$, alors

$$\sigma_\ell(x) = x \tag{20.362}$$

tandis que

$$\sigma_{\ell_0}(x) + 2w = x - 2w + 2w = x. \tag{20.363}$$

Donc les applications affines σ_ℓ et $x \mapsto \sigma_{\ell_0}(x) + 2w$ coïncident sur ℓ et ℓ_0. Elles coïncident donc partout. □

20.11.3 Points fixés par une isométrie

LEMooURUZooYYDiFY

Proposition 20.124 ([2]).
Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixant deux points fixe tous les points de la droite les joignant.

Démonstration. Soient une isométrie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi que deux points fixes a et b, et faisons plusieurs parties.

(1) **Une application g** Nous posons $g = \tau_{-a} \circ f \circ \tau_a$.

(2) **g est linéaire** En utilisant $f(a) = a$ nous avons le calcul suivant :

$$g(0) = (\tau_{-a} \circ f)(a) = \tau_{-a}(a) = 0. \tag{20.364}$$

L'application g est une isométrie qui fixe 0. Le théorème 20.85(6) nous indique que $g \in \mathrm{O}(n)$ et est en particulier linéaire.

(3) **g fixe $b-a$** Simple calcul :

$$\begin{aligned} g(b-a) &= (\tau_{-a} \circ f \circ \tau_a)(b-a) && \text{(20.365a)}\\ &= (\tau_{-a} \circ f)(b) && \text{(20.365b)}\\ &= \tau_{-a}(b) && \text{(20.365c)}\\ &= b-a. && \text{(20.365d)} \end{aligned}$$

(4) **g fixe $\lambda(b-a)$ pour tout λ** Par linéarité nous avons

$$g\big(\lambda(b-a)\big) = \lambda g(b-a) = \lambda(b-a). \tag{20.366}$$

(5) **Conclusion** Nous avons $f = \tau_a \circ g \circ \tau_{-a}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned} f\big(\lambda a + (1-\alpha)b\big) &= (\tau_a \circ g)\big((\lambda-1)a + (1-\lambda)b\big) && \text{(20.367a)}\\ &= (\tau_a \circ g)\big((\lambda-1)(a-b)\big) && \text{(20.367b)}\\ &= \tau_a\big((1-\lambda)g(b-a)\big) && \text{(20.367c)}\\ &= \tau_a\big((1-\lambda)(b-a)\big) && \text{(20.367d)}\\ &= (1-\lambda)b + (\lambda-1+1)a && \text{(20.367e)}\\ &= (1-\lambda)b + \lambda a. && \text{(20.367f)} \end{aligned}$$

Donc f fixe tous les points de la forme $\lambda a + (1-\lambda)b$.

□

PROPooUQHMooHLtmXQ

Proposition 20.125 ([1]).
Une isométrie de $(\mathbb{R}, d)$ qui fixe trois points non alignés est l'identité.

Démonstration. Soient des points non alignés a, b, c fixés par l'isométrie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. D'une part, par le lemme 20.124, tous les points de $d(a,b)$ et $d(a,c)$ sont fixés. Et d'autre part la proposition 14.144 nous dit qu'il existe $s_1 \in d(a,b)$ et $s_2 \in d(a,c)$ tels que $x \in d(s_1, s_2)$. Mais comme $d(s_1, s_2)$ est une droite contenant deux points fixes de f (s_1 et s_2), tous les points de $d(s_1, s_2)$ (dont x) sont fixés par f. □

LEMooRVKEooSlIrIR

Lemme 20.126 ([629]).
Une isométrie de $(\mathbb{R}^2, d)$ fixant tous les points d'une droite est soit l'identité soit la réflexion de cette droite.

Démonstration. Soit l une droite fixée par f, et soient $x, y \in l$ et $z \notin l$ (avec $x \neq y$). Le fait que x et y soient des points fixes de f implique

$$\begin{cases} d\big(x, f(z)\big) = d(x,z) & \text{(20.368a)}\\ d\big(y, f(z)\big) = d(y,z) & \text{(20.368b)} \end{cases}$$

ce qui signifie que $f(z)$ est sur l'intersection des deux cercles[38] $S\big(x, d(x,z)\big)$ et $S\big(y, d(y,z)\big)$, et comme ce sont deux cercles centrés sur la droite l, les intersections sont liées par σ_l. Autrement dit, les intersections sont z et $\sigma_l(z)$.

Si $f(z) = z$ alors f fixe trois points non alignés et fixe donc $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $f = \mathrm{Id}$.

Si par contre $f(z) = \sigma_l(z)$ alors les isométries f et σ_l coïncident sur trois points et coïncident donc partout par le corolaire 20.110 : $f = \sigma_l$. □

[38] L'intersection existe parce que $d(x,z) + d(y,z) > d(x,y)$.

20.11.4 Translations et réflexions

LEMooMKTXooYKZcdQ

Lemme 20.127.
Si $A \in \mathbb{R}^2$, si ℓ est une droite de $\mathbb{R}^2$, alors nous avons

$$\texttt{proj}_{\tau_A(\ell)} = \tau_A \circ \texttt{proj}_\ell \circ \tau_A^{-1}. \tag{20.369}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Soit v unitaire dans la direction[39] de ℓ. La condition $q = \texttt{proj}_\ell(x)$ est le système

$$\begin{cases} q \in \ell & \text{(20.370a)} \\ (q - x) \cdot v = 0. & \text{(20.370b)} \end{cases}$$

Nous voulons prouver que $\tau_A(q) = \texttt{proj}_{\tau_A(\ell)}\big(\tau_A(x)\big)$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \tau_A(q) \in \tau_A(\ell) & \text{(20.371a)} \\ \big(\tau_A(q) - \tau_A(x)\big) \cdot v = 0. & \text{(20.371b)} \end{cases}$$

Nous avons utilisé le fait que v est un vecteur unitaire dans la direction de $\tau_A(\ell)$ aussi bien que de ℓ.

Puisque $q \in \ell$, il est bien entendu que $\tau_A(q) \in \tau_A(\ell)$. D'autre part, $\tau_A(q) - \tau_A(x) = q - x$, donc

$$\big(\tau_A(q) - \tau_A(x)\big) \cdot v = (q - x) \cdot v = 0. \tag{20.372}$$

□

LEMooSMMMooAqsHWb

Lemme 20.128.
Si ℓ est une droite de $\mathbb{R}^2$, si $A \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\sigma_{\tau_A(\ell)} = \tau_A \sigma_\ell \tau_A^{-1}. \tag{20.373}$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul mettant en scène les lemmes 20.117 et 20.127 :

$$\begin{aligned} \big(\sigma_{\tau_A(\ell)}\tau_A\big)(x) &= 2\,\texttt{proj}_{\tau_A(\ell)}\big(\tau_A(x)\big) && \text{(20.374a)} \\ &= 2\tau_A\big(\texttt{proj}_\ell(x)\big) - \tau_A(x) && \text{(20.374b)} \\ &= 2\,\texttt{proj}_\ell(x) + 2A - x - A && \text{(20.374c)} \\ &= 2\,\texttt{proj}_\ell(x) - x + A && \text{(20.374d)} \\ &= \tau_A\big(\sigma_\ell(x)\big). && \text{(20.374e)} \end{aligned}$$

□

20.11.5 Rotations

DEFooFUBYooHGXphm

Définition 20.129 (Rotation en dimension 2)**.**
*Une **rotation** d'un espace euclidien de dimension 2 est une composée de deux réflexions*[40] *d'axes non parallèles. L'identité est une rotation.*

20.130.
Quelques remarques à propos de cette définition.

(1) Attention : nous ne parlons pas encore de rotations « vectorielles » : ici le centre de la rotation (que nous n'avons pas encore défini) peut ne pas être 0.

(2) Dans la même veine : plus tard, lorsque nous saurons que les rotations sont des isométries de (E, d) où $d(X, Y) = \|X - Y\|$, nous allons en réalité beaucoup plus souvent parler de rotations centrées en l'origine qu'en un point quelconque. C'est pourquoi à partir de 20.142 nous dirons le plus souvent « rotation » pour « rotation centrée en 0 ». D'où les énoncés comme « les rotations sont les matrices orthogonales » (corolaire 20.150), qui *stricto sensu* de la définition 20.129, sont faux.

(3) Une rotation est composée de deux réflexions d'axes non parallèles. Il est cependant trop tôt pour décréter que l'intersection de ces axes est le centre de la rotation. Rien ne dit en effet pour l'instant que deux décompositions différentes de la même rotation, avec des axes différents donnent le même point d'intersection.

[39] Cela signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ell = a + \mathbb{R}v$.
[40] Définition 20.89.

(4) Pourquoi ajouter l'identité ? Pour avoir un groupe. Dans le cas vectoriel, il est suffisant de demander d'être une composée de deux réflexions, parce que toutes les réflexions vectorielles ont des axes qui s'intersectent en 0. Le cas des axes parallèles est seulement le cas des axes confondus et revient à l'identité.

Si nous voulons avoir un groupe même pour les rotations centrées ailleurs qu'en zéro, nous devons ajouter « à la main » l'identité.

Toutes ces remarques se résument par : « tout devient compliqué du fait que nous voulons considérer également les rotations centrées ailleurs qu'en zéro ». En se contentant du cas vectoriel, de nombreuses choses sont plus simples.

CORooNKKIooPGOUJl

Corolaire 20.131.
Si $A \neq B$ dans E alors il existe une unique réflexion envoyant A sur B.

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, la réflexion dont l'axe est la médiatrice de $[A, B]$ fait l'affaire. En ce qui concerne l'unicité, le lemme 20.121 nous dit que si A est envoyé sur B, l'axe est forcément la médiatrice de $[A, B]$. □

LEMooIJELooLWqBfE

Lemme-Définition 20.132 ([633]).
Soit une rotation $r = \sigma_1 \circ \sigma_2$ différente de l'identité.

(1) Elle admet un unique point fixe.

(2) Ce point fixe est l'intersection des axes $\ell_1 \cap \ell_2$.

*Le **centre** d'une rotation (autre que l'identité) est cet unique point fixe.*

Démonstration. Nous nommons $O = \ell_1 \cap \ell_2$. Soit $A \in E$, et supposons que $r(A) = A$. Nous avons $\sigma_1 \circ r = \sigma_2$ et donc

$$\sigma_1(A) = (\sigma_1 \circ r)(A) = \sigma_2(A). \tag{20.375}$$

On pose $B = \sigma_1(A)$. Alors σ_1 et σ_2 envoient tous deux A sur B.

Si $A = B$ alors A est fixé par σ_1 et donc appartient à ℓ_1. Même chose pour A qui est fixé par σ_2, et donc $A \in \ell_2$. Cela donne $A = B = O$, et alors, le point fixé par r est O.

Si $A \neq B$ alors il existe une unique réflexion envoyant A sur B (corolaire 20.131). L'unicité signifie que $\sigma_1 = \sigma_2$. Dans ce cas, $r = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \mathrm{Id}$. □

NORMooDPBOooKkRuTn

20.133.
La rotation $\sigma_1 \circ \sigma_2$ laisse évidemment fixé le point $\ell_1 \cap \ell_2$. Si $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_a \circ \sigma_b$ alors rien n'oblige les axes de σ_1 et σ_2 d'être identiques à ceux de σ_a et σ_b. Mais l'intersection $\ell_1 \cap \ell_2$ doit être la même que l'intersection $\ell_a \cap \ell_b$ parce que c'est l'unique point fixé par la composée. Cela nous permet de poser la définition suivante.

LEMooTZNWooTVOklu

Lemme 20.134.
Les rotations sont des isométries pour la distance : $\|X - Y\| = \|r(X) - r(Y)\|$.

Démonstration. Si $r = \sigma_1 \circ \sigma_2$, en utilisant le fait que σ_1 et σ_2 sont des isométries de (E, d) (20.119) nous avons :

$$d(X, Y) = d\big(\sigma_2(X), \sigma_2(Y)\big) = d\big(\sigma_1\sigma_2(X), \sigma_1\sigma_2(Y)\big) = d\big(r(X), r(Y)\big). \tag{20.376}$$

□

Ce lemme nous dit qu'une rotation de centre O vérifie $\|OX\| = \|Or(X)\|$ pour tout X.

PROPooNXJKooEDOczh

Proposition 20.135 ([1, 633]).
Soient $A, B, O \in E$ tels que $\|AO\| = \|BO\| \neq 0$. Alors il existe une unique rotation r centrée en O telle que $r(A) = B$.

Démonstration. Existence et unicité séparément.

(1) **Existence** Si $A = B$, l'identité fait l'affaire. Sinon, $\|A - O\| = \|B - O\|$ implique que la médiatrice de $[A, B]$ contient O. Soit σ_m la réflexion selon cette médiatrice. La rotation $\sigma_m \circ \sigma_{(AO)}$ convient.

(2) **Unicité** Soit r une rotation de centre O et telle que $r(A) = B$. Si $A = B$ alors $r = \mathrm{Id}$ parce qu'une rotation autre que l'identité ne fixe que son centre par le lemme 20.132. Nous supposons que $A \neq B$.

Nous posons $g = \sigma_m \circ r$. Alors $g(A) = \sigma_m(B) = A$ parce que $\sigma_m(B) = A$ et $r(A) = B$. Cela signifie que g est une isométrie qui fixe A.

(2a) **Si A et O ne sont pas alignés** Attention : ici O est un point de E, pas le zéro de l'espace vectoriel E. Lorsqu'on dit que A et O ne sont pas alignés, nous parlons bien d'alignement avec le zéro de E.

Nous avons $g(A) = A$ et $g(O) = O$. Donc g coïncide avec $\sigma_{(AO)}$ en deux points non alignés, c'est-à-dire en deux points pour lesquels l'espace engendré est tout E. Nous en déduisons que $g = \sigma_{(AO)}$.

(2b) **Si A et O sont alignés** Soit maintenant un point C tel que $A - O \perp C - O$ et

$$\|OC\| = \|OA\| = \|OB\|. \tag{20.377}$$

Puisque g est une isométrie pour la distance sur E, pas pour la norme, nous ne pouvons pas écrire $g(C - O) \perp g(A - O)$ à partir de $C - O \perp A - O$. Nous décomposons $g(X) = s(X) + G$ où s est linéaire sur E. Il est vite vu que s est une isométrie de $(E, \|.\|)$:

$$\|X - Y\| = \|g(X) - g(Y)\| = \|s(X) + G - s(Y) - G\| = \|s(X) - s(Y)\| = \|s(X - Y)\| \tag{20.378}$$

pour tout $X, Y \in E$. Nous avons de plus $g(A) = A$ et $g(O) = O$, ce qui donne $O = s(O) + G$ et $A = s(A) + G$. En égalisant les valeurs de G nous avons

$$O - s(O) = A - s(A). \tag{20.379}$$

EQooPEWGooABHUxx

Comme s est une isométrie (une vraie) nous avons

$$s(A - O) \perp s(C - O), \tag{20.380}$$

mais $s(A - O) = s(A) - s(O) = A - O$ par (20.379). Donc

$$A - O \perp s(C - O). \tag{20.381}$$

Nous en concluons que $s(C - O) = \pm(C - O)$. Parce que les vecteurs $\pm(C - O)$ sont les deux seuls de norme $\|AO\| = \|CO\|$ à être perpendiculaire à $A - O$. Rappel : la définition de C, et le fait que nous soyons en dimension 2.

Est-il possible d'avoir $s(C - O) = C - O$? Cela donnerait

$$g(A - O) = s(A) - s(O) + G = s(A) - O + O - s(O) + G = A - O + G \tag{20.382a}$$
$$g(C - O) = C - O + G, \tag{20.382b}$$

ce qui signifierait que g et τ_G coïncideraient sur les points $A - O$ et $C - O$, et donc seraient égaux par le corolaire 20.110. Cela est cependant impossible parce que g fixe au moins les points A et O alors que la translation ne fixe aucun point. Nous en déduisons $s(C - O) = -(C - O)$.

Nous avons aussi, parce que (AO) est une droite passant par l'origine que

$$\sigma_{(AO)}(A - O) = A - O \tag{20.383}$$

et parce que $C - O$ est perpendiculaire à cette droite :

$$\sigma_{(AO)}(C - O) = -(C - O). \tag{20.384}$$

Nous avons donc quand même que g et $\sigma_{(AO)}$ coïncident sur deux points non alignés : $A - O$ et $C - O$.

Dans tous le cas, $g = \sigma_{(AO)}$. Nous avons donc

$$\sigma_{(OA)} = \sigma_m \circ r, \tag{20.385}$$

et donc r est fixé à

$$r = \sigma_m \circ \sigma_{(OA)}. \tag{20.386}$$

□

20.136.

Anticipons un peu et faisons semblant de déjà connaitre les matrices et les fonctions trigonométriques. La proposition 20.135 nous dit qu'il existe une seule rotation amenant A sur B. Vous pourriez objecter que le point $(1, 0)$ peut être amené sur $(0, -1)$ soit par la rotation d'angle $3\pi/2$, soit par celle d'angle $-\pi/2$. Il n'en est rien parce que ces deux rotations sont les mêmes ! Pensez-y. En tant qu'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la rotation $R_{3\pi/2}$ est égale à $R_{-\pi/2}$.

Une rotation donnée peut être écrite de beaucoup de façons comme composée de deux réflexions. En fait d'autant de façons qu'il y a de réflexions.

PROPooKAZEooLTHWKe

Proposition 20.137 ([633]).
Soit une rotation r de E centrée en O. Pour toute réflexion σ_ℓ telle que le centre de r soit sur ℓ, il existe une réflexion σ_1 telle que $r = \sigma_1 \circ \sigma_\ell$. Il existe aussi une réflexion σ_2 telle que $r = \sigma_\ell \circ \sigma_2$.

Démonstration. Si $r = \mathrm{Id}$ c'est bon avec $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\ell$. Sinon nous considérons $A \neq O$ sur ℓ, et $B = r(A)$. Nous savons que $B \neq A$ parce que O est le seul point de E fixé par r (proposition 20.132). Il existe une réflexion (unique) σ_1 faisant $\sigma_1(A) = B$, et c'est la réflexion dont l'axe est la médiatrice de $[A, B]$. Le point O est sur cette médiatrice parce que les rotations sont des isométries de (E, d) (lemme 20.134).

La rotation $\sigma_1 \circ \sigma_\ell$ vérifie

$$(\sigma_1 \circ \sigma_\ell)(A) = \sigma_1(A) = B. \tag{20.387}$$

Or $\|OA\| = \|OB\|$, donc il y a unicité de la rotation centrée en O portant A sur B (proposition 20.135) ; nous avons donc $r = \sigma_1 \circ \sigma_\ell$.

En ce qui concerne $r = \sigma_\ell \circ \sigma_2$, il faut appliquer ce que nous venons de faire à la rotation r^{-1} : il existe σ_2 tel que $r^{-1} = \sigma_2 \circ \sigma_\ell$, ce qui donne

$$r = \sigma_\ell \circ \sigma_2. \tag{20.388}$$

□

LEMooDIHOooRMfzHB

Lemme 20.138 ([1]).
Une isométrie de $(\mathbb{R}^2, d)$ laissant un point fixe est soit une rotation soit une réflexion.

Démonstration. Il y a plusieurs possibilités en fonction du nombre de points fixes. Notez que l'identité est une rotation ; nous n'allons pas le répéter à chaque fois.

(1) **Si elle a 2 points fixes** Le lemme 20.124 dit qu'alors la droite joignant les deux points est fixée. Dans ce cas le lemme 20.126 dit que c'est l'identité ou une réflexion.

(2) **Si elle a 3 points fixes** Alors c'est l'identité par la proposition 20.125.

(3) **Si elle a exactment un point fixe** En utilisant la proposition 20.88, nous savons que $f = \tau_a \circ A \circ \tau_{-a}$ où $A \in \mathrm{O}(2)$ a 0 comme unique point fixe. Nous utilisons Cartan-Dieudonné 20.94 : $0 = \dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = 2 - k$. Donc $k = 2$ et A peut être écrit comme

$$A = \sigma_1 \circ \sigma_2 \tag{20.389}$$

où σ_1 et σ_2 sont soit des réflexions par rapport à un axe soit l'identité.

(3a) **Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \mathrm{Id}$** Alors $f = \mathrm{Id}$ et c'est bon.

(3b) **Si $\sigma_1 = \mathrm{Id}$ et pas σ_2** Si σ_1 est l'identité, mais δ_2 est une réflexion alors $f = \tau_a \circ \sigma_2 \circ \tau_{-a}$. Si σ_2 est la réflexion d'axe l_1, alors f est la réflexion d'axe $l_1 + a$ par 20.90.

(3c) **Si σ_1 et σ_2 sont des réflexions** Si σ_i est la réflexion d'axe l_i, les axes l_i sont soit confondus (et alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \mathrm{Id}$) soit s'intersectent en un unique point, mais ne peuvent pas être parallèles (proposition 20.95). Nous écrivons

$$f = \tau_a \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_{-a} = \underbrace{\tau_a \circ \sigma_1 \tau_{-a}}_{=\sigma_{l_1+a}} \circ \underbrace{\tau_a \circ \sigma_2 \circ \tau_{-a}}_{=\sigma_{l_2+a}} = \sigma_{l_1+a} \circ \sigma_{l_2+a}. \tag{20.390}$$

C'est une rotation (définition 20.129).

□

20.11.6 Rotation d'un angle donné

DEFooADTDooKIZbrw

Lemme-Définition 20.139.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous considérons l'application linéaire $R_0(\theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est[41]

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.391}$$

[41] Pour la définition des fonctions trigonométriques, définition 20.1.

ITEMooIEKJooZfsAui

(1) *Nous avons*

EQooEVCTooRpTDDq

$$R_0(\theta) = \sigma_\ell \circ s \tag{20.392}$$

où s est la réflexion d'axe horizontal et ℓ est la droite

$$\ell = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{20.393}$$

ITEMooBEYOooMHRRYk

(2) *L'application $R_0(\theta)$ est une rotation autour de $(0,0)$.*

ITEMooEQPAooQcsYfj

(3) *Si $A \in \mathbb{R}^2$, alors l'application*

EQooKMJQooWGxWHe

$$R_A(\theta) = \tau_A \circ R_0(\theta) \circ \tau_A^{-1} \tag{20.394}$$

est une rotation autour de A nommée ***rotation d'angle*** *θ.*

Démonstration. Nous allons prouver l'égalité (20.392) en calculant les deux membres sur les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui forment une base.

(1) **Pour $p = (1,0)$** D'abord la chose facile[42] : $s(1,0) = (1,0)$.

Pour calculer $\sigma_\ell(1,0)$, nous utilisons le lemme 20.117 ; nous commençons par chercher la projection orthogonale q de $p = (1,0)$ sur ℓ. Nous posons

EQooUFMWooWhwcHR

$$q = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{20.395}$$

et nous cherchons λ satisfaisant $q \cdot (q-p) = 0$. Un peu de calculs passant par (20.5) nous donne

$$q \cdot (q-p) = \lambda\big(\lambda - \cos(\theta/2)\big). \tag{20.396}$$

Les deux solutions sont $\lambda = 0$ et $\lambda = \cos(\theta/2)$. Mais la solution $\lambda = 0$ revient à dire que la droite ℓ est verticale, c'est-à-dire $\cos(\theta/2) = 0$. Donc la solution est toujours donnée par

$$\lambda = \cos(\theta/2). \tag{20.397}$$

Nous introduisons cette valeur dans (20.395) pour fixer q, et nous utilisons la formule du lemme 20.117 :

$$\sigma_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2q - p = \begin{pmatrix} 2\cos^2(\theta/2) - 1 \\ 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.398}$$

Nous avons utilisé les formules trigonométriques de duplication d'angle (corolaire 20.17).

(2) **Pour $p = (0,1)$** Cette fois $s(p) = (0,-1)$ et l'équation pour déterminer λ est

$$0 = q \cdot (q-p) = \begin{pmatrix} \lambda\cos(\theta/2) \\ \lambda\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda\cos(\theta/2) \\ \lambda\sin(\theta/2) - 1 \end{pmatrix}. \tag{20.399}$$

Nous trouvons $\lambda\big(\lambda + \sin(\theta/2)\big) = 0$. Le cas $\lambda = 0$ signifie que la droite ℓ est horizontale et donc que $\sin(\theta/2) = 0$. Donc la solution est dans tous les cas

$$\lambda = -\sin(\theta/2). \tag{20.400}$$

Nous trouvons

$$\sigma_\ell \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2q - p = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.401}$$

[42] Ici comme partout dans le Frido nous ne faisons aucune différence entre (a,b) et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; ce sont seulement deux façons différentes d'écrire le même élément de $\mathbb{R}^2$. Nous ne faisons pas semblant de croire que l'un ou l'autre serait un « covecteur » suivant que l'on tourne notre page dans un sens ou un autre.

Le calcul de $\sigma_\ell \circ s$ étant effectué sur une base, il est facile de reconstituer la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.402}$$

Cette matrice étant celle, par définition, de $R_0(\theta)$, nous avons montré que $R_0(\theta)$ était bien une rotation. Nous avons prouvé les points (1) et (2).

Nous passons maintenant au point (3). Il est facile de voir que A est un point fixe de $R_A(\theta)$ parce que $\tau_A^{-1}(A) = (0,0)$.

Nommons ℓ' la droite horizontale $\mathbb{R}(1,0)$. Nous avons, par le point précédent $R_0(\theta) = \sigma_\ell \circ \sigma_{\ell'}$. En introduisant astucieusement $\tau_A^{-1}\tau_A$ dans l'expression définissant $R_A(\theta)$, nous avons

$$R_A(\theta) = \tau_A\sigma_\ell\sigma_{\ell'}\tau_A^{-1} = \underbrace{\tau_A\sigma_\ell\tau_A^{-1}}_{=\sigma_{\tau_A(\ell)}}\underbrace{\tau_A\sigma_{\ell'}\tau_A^{-1}}_{\sigma_{\tau_A(\ell')}} = \sigma_{\tau_A(\ell)}\sigma_{\tau_A(\ell')}. \tag{20.403}$$

Nous avons utilisé le lemme 20.128.

Nous voyons que $R_A(\theta)$ est une composée de deux réflexions se coupant en A. C'est donc une rotation centrée en A. □

20.11.7 Rotations vectorielles

L'expression « rotation vectorielle » signifie rotation centrée en zéro. Elles sont « vectorielles » parce qu'elles sont linéaires comme nous le voyons à présent.

PROPooTFNSooFjiWHG

Proposition 20.140.
Quelques résultats à propos de rotations.

ITEMooONJOooRgycsQ

(1) *Toutes les rotations de $\mathbb{R}^2$ centrées en $(0,0)$ sont de la forme $R_0(\theta)$*[43] *pour un $\theta \in \mathbb{R}$.*

ITEMooMQPRooAbPcrr

(2) *Les rotations de $\mathbb{R}^2$ centrées en $(0,0)$ sont des applications linéaires.*

ITEMooSIHZooBEJhdu

(3) *Si r est une rotation dans $\mathbb{R}^2$, il existe $A \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$*

$$r = \tau_A \circ R_0(\theta) \circ \tau_A^{-1}. \tag{20.404}$$

Démonstration. Soit r une rotation centrée en $(0,0)$. Par la proposition 20.137, il existe une droite ℓ passant par $(0,0)$ telle que $r = \sigma_\ell \circ s$ où s est la réflexion d'axe horizontal : $s(x,y) = (x,-y)$.

Soit un vecteur unitaire $v \in \ell$. Puisque $v \in S^1$, la proposition 20.64 nous donne $t \in [0, 2\pi[$ tel que

$$v = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \tag{20.405}$$

En posant $\theta = 2t$ nous avons

$$\ell = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \tag{20.406}$$

et donc $r = R_0(\theta)$ qui est l'application linéaire définie en 20.139. Ceci prouve les points (1) et (2).

Et enfin nous voyons le point (3). Soit A l'unique point fixe de la rotation r. Cette dernière s'écrit alors $r = \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}$ où ℓ_1 et ℓ_2 sont des droites telles que $\ell_1 \cap \ell_2 = \{A\}$.

En utilisant le lemme 20.128, nous avons $\sigma_{\ell_i} = \tau_A \circ \sigma_{\tau_A^{-1}(\ell_i)} \circ \tau_A^{-1}$. En substituant, et en nous rendant compte que $\tau_A^{-1}\tau_A = \mathrm{Id}$, nous avons

$$r = \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} = \tau_A r_0 \tau_1^{-1} \tag{20.407}$$

où r_0 est la rotation $\sigma_{\tau_A^{-1}(\ell_1)} \circ \sigma_{\tau_A^{-1}}(\ell_2)$. Cette dernière est une rotation autour de $(0,0)$ parce que $\tau_A^{-1}(\ell_1) \cap \tau_A^{-1}(\ell_2) = \{0\}$. Elle est donc, par le point (1), de la forme $R_0(\theta)$, pour une certaine valeur de θ. □

PROPooWMESooNJMdxf

Proposition 20.141 ([633])**.**
Les rotations basées en $(0,0)$ forment un groupe abélien.

Démonstration. L'identité est une rotation par définition. En ce qui concerne l'inverse, si $r = \sigma_1\sigma_2$ alors $r^{-1} = \sigma_2\sigma_1$. Nous commençons maintenant les choses pas tout à fait évidentes.

[43] Définition 20.139.

(1) **Composition** Soient des rotations r, r' centrées en $(0,0)$. Soit également, une réflexion σ dont l'axe contient $(0,0)$. Alors la proposition 20.137 nous donne l'existence de σ_1 et σ_2 tels que $r = \sigma_1\sigma$ et $r' = \sigma\sigma_2$. Avec ça, la composition donne

$$rr' = \sigma_1\sigma\sigma\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2, \tag{20.408}$$

qui est encore une rotation.

(2) **Commutativité** Soient deux rotations r et r' ainsi que des décompositions $r = \sigma_1\sigma$, $r' = \sigma\sigma_2$. Nous avons

$$rr' = \sigma_1\sigma_2 \tag{20.409a}$$
$$r'r = \sigma\sigma_2\sigma_1\sigma. \tag{20.409b}$$

Vu que $t = \sigma_2\sigma_1$ est une rotation, nous pouvons encore appliquer la proposition 20.137 pour avoir $t = \sigma_2\sigma_1 = \sigma\sigma_3$. Ainsi,

$$r'r = \sigma\sigma\sigma_3\sigma = \sigma_3\sigma. \tag{20.410}$$

Mais aussi $rr' = \sigma_1\sigma_2 = t^{-1} = \sigma_3\sigma$. Nous avons donc bien $rr' = r'r$, et le groupe est commutatif.

□

NORMooOUDJooRfbDEX

20.142.
Jusqu'à présent nous avons parlé de rotations « affines ». Parmi elles, les rotations centrées en 0 (zéro, l'origine de E comme espace vectoriel) sont de particulière importance. Ce sont des applications linéaires, et même des isométries. Dans la suite, nous allons souvent dire simplement « rotation » pour dire « rotation centrée en 0 ».

Nous allons maintenant prendre un point de vue plus vectoriel, et allons noter les points de E avec des lettres comme x, y, u, v et non plus, avec des majuscules, comme lorsqu'on avait un point de vue affine. En même temps, nous allons noter les applications $E \to E$ par des lettres comme A et ne plus écrire les parenthèses. Bref, nous écrivons Au au lieu de $r(A)$.

LEMooSYZYooWDFScw

Lemme 20.143.
En dimension 2*, les réflexions vectorielles (c'est-à-dire dont l'axe passe par* 0*) ont un déterminant qui vaut* -1.

Démonstration. Soit une réflexion d'axe ℓ. Prenons une base orthonormale de E constituée de e_1 sur ℓ et de $e_2 \perp \ell$. Alors $\sigma_\ell(e_1) = e_1$ et $\sigma_\ell(e_2) = -e_2$. La formule du déterminant donne

$$\det(\sigma_\ell) = e_1^*\big(\sigma_\ell(e_1)\big)e_2^*\big(\sigma_\ell(e_2)\big) - e_2^*\big(\sigma_\ell(e_1)\big)e_1^*\big(\sigma_\ell(e_2)\big) = 1 \times (-1) - 0 \times 0 = -1. \tag{20.411}$$

Nous utilisons de façon cruciale le fait que le calcul du déterminant ne dépende pas de la base choisie, lemme 10.14. □

PROPooTUJWooAjtEnQ

Proposition 20.144.
Les rotations[44] *sont*

(1) des applications linéaires orthogonales au sens de la définition 10.41,

(2) des applications de déterminant 1,

Démonstration. Le fait qu'elles soient linéaires est la proposition 20.140.

Nous avons, pour tout $u \in E$ l'égalité de la norme $\|u\|$ et $\|Au\|$ par le lemme 20.134 appliqué à $Y = 0$. En termes de produits scalaires nous avons alors $\langle Au, Au\rangle = \langle u, u\rangle$, et donc

$$\langle A^*Au, u\rangle = \|u\|^2. \tag{20.412}$$

En particulier si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de E nous avons

$$(A^*Ae_i)_i = \|e_i\|^2 = 1, \tag{20.413}$$

ce qui donne $\|A^*Ae_i\| \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $A^*Ae_i = e_i$. Ici nous avons utilisé le fait que $\langle x, e_i\rangle = x_i$, et le fait que pour tout i nous ayons $\|x\| \geqslant |x_i|$, avec égalité seulement si x est un multiple de e_i.

[44] Centrées en 0, nous ne le répéterons pas !

Par ailleurs l'inégalité de Cauchy-Schwarz 12.1 nous donne

$$\|u\|^2 = |\langle A^*Au, u\rangle| \leqslant \|A^*Au\|\|u\| \tag{20.414}$$

et donc

$$\|u\| \leqslant \|A^*Au\|. \tag{20.415}$$

Encore une fois, en appliquant cela à $u = e_i$ nous trouvons $1 \leqslant \|A^*Ae_i\|$. Puisque nous avions déjà l'inégalité dans l'autre sens, $\|A^*Ae_i\| = 1$. Et le cas d'égalité est uniquement possible avec $A^*Ae_i = e_i$.

Donc pour tout i de la base, nous avons $A^*Ae_i = e_i$. Nous avons donc $A^*A = \mathrm{Id}$ et l'application A est orthogonale.

En ce qui concerne le déterminant, les réflexions sont de déterminant -1 par le lemme 20.143, donc $A = \sigma_1 \circ \sigma_2$ est de déterminant 1. Nous avons utilisé le fait que le déterminant était un morphisme : proposition 10.15(1). □

Remarque 20.145.
Nous ne savons pas encore que les rotations forment tout le groupe SO(2) des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1. Il faudra attendre le corolaire 20.150 pour le savoir.

LEMooMIJXooCjiQqP

Lemme 20.146.
L'application $-\mathrm{Id}$ *est une rotation de* $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Soit une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de E et la rotation $r = \sigma_1\sigma_2$ où σ_i est la réflexion le long de l'axe $\ell_i = \{te_i\}_{t\in\mathbb{R}}$. Faut-il vous prouver que $r = -\mathrm{Id}$? La réflexion σ_2 retourne la composante y d'un vecteur écrit dans la base $\{e_1, e_2\}$ sans toucher à la composante x. La réflexion σ_1 fait le contraire. □

20.11.8 Matrice des transformations orthogonales

Nous donnons maintenant une forme générale (trigonométrique) pour les matrices de SO(2). Nous ne pouvons cependant pas invoquer les lemmes 20.147 ou 20.148 pour prétendre avoir une matrice des rotations, parce que nous n'avons pas encore prouvé que les rotations étaient des transformations orthogonales. Ce sera pour la proposition 20.151.

LEMooAJMAooXPSKtS

Lemme 20.147.
Si $A \in \mathrm{O}(2)$ *alors il existe un unique* $(\theta, \epsilon) \in [0, 2\pi[\times \{\pm 1\}$ *tel que*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.416}$$

Démonstration. Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et imposons qu'elle soit dans O(2). Le fait que A soit orthogonale impose

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20.417}$$

Nous avons alors le système

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & \text{(20.418a)} \\ b^2 + d^2 = 1 & \text{(20.418b)} \\ ab + cd = 0 & \text{(20.418c)} \end{cases}$$

La proposition 20.64 nous permet de déduire qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$, $c = \sin(\theta)$, ainsi que plusieurs $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b = \cos(\alpha)$, $d = \sin(\alpha)$.

Note : si nous voulons $\alpha \in [0, 2\pi[$, alors il y a unicité. Ici nous ne nous attachons pas à cette contrainte ; nous savons qu'il en existe plusieurs, et nous allons en fixer un en fonction de θ. Le α ainsi fixé ne sera peut-être pas dans $[0, 2\pi[$, mais ce ne sera pas grave.

Les angles θ et α sont alors liés par la contrainte

$$\cos(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\theta)\sin(\alpha) = 0. \tag{20.419}$$

Utilisant l'identité (20.24c) cela signifie que $\cos(\theta - \alpha) = 0$. Donc

$$\alpha \in \{\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{20.420}$$

Si k est pair, ça donne

$$\cos(\alpha) = -\sin(\theta) \tag{20.421a}$$
$$\sin(\alpha) = \cos(\theta) \tag{20.421b}$$

et alors

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.422}$$

EQooNAMKooKAGIfd

Si au contraire k est impair, alors

$$\cos(\alpha) = \sin(\theta) \tag{20.423a}$$
$$\sin(\alpha) = -\cos(\theta), \tag{20.423b}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.424}$$

EQooJMYFooGgAiMJ

Nous avons démontré qu'une matrice de O(2) était forcément d'une des deux formes (20.422) ou (20.424). Il est maintenant facile de vérifier que ces deux matrices sont effectivement dans O(2). □

LEMooHRESooQTrpMz

Lemme 20.148.
Si $g \in \mathrm{SO}(2)$, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de g dans la base canonique soit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.425}$$

Démonstration. Puisque SO(2) est la partie de O(2) constituée des matrices de déterminant 1, nous pouvons reprendre la forme donnée par le lemme 20.147 et fixer ϵ par la contrainte sur le déterminant. Nous avons, en utilisant la relation du lemme 20.4,

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} = \epsilon. \tag{20.426}$$

Étant donné que $\det(g) = 1$, nous voyons que $\epsilon = 1$. □

CORooGGVUooLQYGET

Corolaire 20.149 ([1]).
Nous avons une bijection

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathrm{SO}(2) &\to [0, 2\pi[\\ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} &\mapsto \theta, \end{aligned} \tag{20.427}$$

et un isomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{SO}(2) &\to \mathrm{U}(1) = \{e^{i\theta}\}_{\theta\in\mathbb{R}} \\ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} &\mapsto e^{i\theta}. \end{aligned} \tag{20.428}$$

Démonstration. La première assertion est une paraphrase du lemme 20.148. Pour la seconde, il faut vérifier que c'est bien un morphisme et une bijection.

Pour le morphisme, ce sont les formules d'addition d'angle du lemme 20.16 qui jouent. En ce qui concerne la bijection…

(1) **Surjection** Comme $e^{i\theta+2ki\pi} = e^{i\theta}$, tout élément de U(1) est exponentielle de $i\theta$ pour un $\theta \in [0, 2\pi[$.

(2) **Injection** Remarquez que nous avons, pour $\theta \in [0, 2\pi[$, $\varphi\big(\psi^{-1}(\theta)\big) = e^{i\theta}$.

Soient $A, B \in \mathrm{SO}(2)$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Soient $\theta_a, \theta_b \in [0, 2\pi[$ tels que $A = \psi^{-1}(\theta_a)$ et $B = \psi^{-1}(\theta_b)$. L'hypothèse $\varphi(A) = \varphi(B)$ donne

$$e^{i\theta_a} = e^{i\theta_b}, \tag{20.429}$$

et donc $\theta_a = \theta_b$ par la proposition 20.66(1).

Nous en déduisons que $A = B$, et donc que φ est injective.

□

20.11.9 Rotations, SO(2) et matrice de rotation

CORooVYUJooDbkIFY

Corolaire 20.150 ([1]).
Le groupe des rotations centrées en $(0,0)$ *est le groupe* $\mathrm{SO}(2)$.

Démonstration. Nous devons prouver deux choses :

- Toutes les rotations sont des éléments de $\mathrm{SO}(2)$.
- Tous les éléments de $\mathrm{SO}(2)$ sont des rotations.

La proposition 20.140 nous indique que toute rotation de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(0,0)$ est de la forme $R_0(\theta)$, c'est-à-dire, a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.430}$$

EQooSJNBooMPIRZS

Donc toute rotation est dans $\mathrm{SO}(2)$.

D'autre part, le lemme 20.148 indique que tout élément de $\mathrm{SO}(2)$ a, dans la base canonique, une matrice de la forme (20.430). Le lemme 20.139 nous indique alors que c'est une rotation. □

PROPooOTIVooZpvLnb

Proposition 20.151.
Si r *est une rotation de* $\mathbb{R}^2$ *centrée en* $(0,0)$*, il existe un unique* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que* $r = R_0(\theta)$.

Démonstration. Soit une rotation r autour de $(0,0)$. Le corolaire 20.150 nous dit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$r = R_0(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.431}$$

Nous avons identifié l'application linéaire à sa matrice. L'élément $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ est dans S^1, et il existe donc, par la proposition 20.64, un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos(t) = \sin(\theta)$ et $\sin(t) = \sin(\theta)$. Pour ce t nous avons alors

$$r = R_0(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \tag{20.432}$$

□

PROPooISUCooRYJcwo

Proposition 20.152.
Nous avons la formule suivante pour la composition :

$$R_0(\alpha) \circ R_0(\beta) = R_0(\alpha + \beta). \tag{20.433}$$

Démonstration. Par définition de $R_0(\theta)$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la composition se calcule avec le produit suivant, en utilisant les formules du lemme 20.16 :

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{20.434a}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{20.434b}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}. \tag{20.434c}$$

Donc dans la base canonique, la matrice de $R_0(\alpha)R_0(\beta)$ est celle de $R_0(\alpha+\beta)$. □

20.11.10 Rotation et application affine

Nous considérons à nouveau la définition 13.13 d'une application affine ainsi que sa décomposition en application linéaire et translation donnée par le lemme 13.14. Nous voyons maintenant comment ces propriétés se déclinent dans le cas d'une rotation non centrée en l'origine.

Exemple 20.153.
Soit $A \in \mathbb{R}^2$ ainsi qu'une rotation f autour de A, c'est-à-dire une composition de deux symétries dont les axes se coupent en A[45]. Nous allons extraire de f la partie linéaire définie en 13.14.

Il existe des axes ℓ_1 et ℓ_2 tels que $\ell_1 \cap \ell_2 = \{A\}$ et tels que

$$f = s_{\ell_1} \circ s_{\ell_2}. \tag{20.435}$$

[45] Voir la définition 20.129.

En utilisant le lemme 20.128,

$$f = t_A \circ s_{t_A^{-1}(\ell_1)} \circ t_A^{-1} \circ t_A \circ s_{t_A^{-1}(\ell_2)} \circ t_A^{-1} = t_A \circ s_{t_A^{-1}(\ell_1)} \circ s_{t_A^{-1}(\ell_2)} \circ t_A^{-1}. \tag{20.436}$$

Comme $A \in \ell_i$, nous avons $O = (0,0) \in t_A^{-1}(\ell_i)$. Donc les axes $t_A^{-1}(\ell_1)$ et $t_A^{-1}(\ell_2)$ se coupent en O et nous pouvons écrire

$$f = t_A \circ R \circ t_A^{-1} \tag{20.437}$$

où R est une rotation centrée en O ; donc une application linéaire par la proposition 20.140.

Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= (t_A \circ R \circ t_A^{-1})(x) && \text{(20.438a)}\\ &= (t_A \circ R)(x - A) && \text{(20.438b)}\\ &= t_A\big(R(x) - R(A)\big) && \text{(20.438c)}\\ &= R(x) + t_{R(A)+A} && \text{(20.438d)}\\ &= (t_{R(A)+A} \circ R)(x). && \text{(20.438e)} \end{aligned}$$

Donc

$$f = t_{R(A)+A} \circ R. \tag{20.439}$$

Il est maintenant aisé de montrer que R est la partie linéaire de f. Pour tout $M, x \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$\begin{aligned} f(M + x) &= R(M + x) + R(A) + A && \text{(20.440a)}\\ &= R(M) + R(x) + R(A) + A && \text{(20.440b)}\\ &= R(x) + f(M). && \text{(20.440c)} \end{aligned}$$

Donc nous confirmons la formule

$$f(M + x) = R(x) + f(M) \tag{20.441}$$

et R est la partie linéaire de f, voir la définition 13.14. △

LEMooUKEVooAEWvlM

Lemme 20.154 ([1]).
Tout sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(2)$ *est cyclique*[46].

Démonstration. Soit un sous-groupe fini G de $\mathrm{SO}(2)$. Nous considérons les applications $\psi\colon \mathrm{SO}(2) \to [0, 2\pi[$ et $\varphi\colon \mathrm{SO}(2) \to U(1)$ données par le corolaire 20.149.

Vu que $\psi(e) = 0$, la partie $\psi(G \setminus \{e\})$ est une partie finie de $[0, 2\pi[$ qui ne contient pas 0. Nous en considérons le minimum $\theta_0 \neq 0$. Gardez en tête que ce minimum n'est pas nul : $\theta_0 \neq 0$.

Nous allons prouver que $\psi^{-1}(\theta_0)$ génère le groupe G. Pour cela nous devons montrer que pour tout $g \in G$, il existe un entier k tel que $g = \psi^{-1}(\theta_0)^k$.

Soient $g_1 \in \mathrm{SO}(2)$ et $\theta_1 = \psi(g_1)$. Si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\theta_1 = k\theta_0$, alors le résultat est prouvé. Supposons donc que $\theta_1 = \lambda\theta_0$ avec λ non entier. Nous allons en déduire une contradiction.

Soit k la partie entière de λ (définition 4.100). Vu que φ est un morphisme de groupes, en utilisant la formule de la proposition 20.7(2) nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\big(e^{i(\theta_1 - k\theta_0)}\big) &= \varphi^{-1}\big(e^{i\theta_1}e^{-ik\theta_0}\big) && \text{(20.442a)}\\ &= \varphi^{-1}(e^{i\theta_1})\varphi^{-1}(e^{-ik\theta_0}) && \text{(20.442b)}\\ &= \varphi^{-1}(e^{i\theta_1})\varphi^{-1}(e^{t\theta_0})^k && \text{(20.442c)}\\ &\in G. && \text{(20.442d)} \end{aligned}$$

Nous avons donc $\theta = \theta_1 - k\theta_0 \in \psi(G)$. Mais en utilisant le lemme 4.102,

$$\theta - \theta_0 = \theta_1 - (k+1)\theta_0 < \theta_1 - \lambda\theta_0 = 0. \tag{20.443}$$

Cela signifie que $\theta < \theta_0$, et contredit la minimalité de θ_0. □

[46] Définition 2.149.

20.11.11 Angle orienté

Avant d'aborder la classification des isométries, nous devons parler de l'angle entre deux droites. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux droites, alors il est bien clair que deux angles peuvent prétendre être « l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2 ». De plus chacun de ces deux angles sont doubles parce que si α peut prétendre être l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2, alors $-\alpha$ peut également y prétendre.

Remarque 20.155.
Nous ne parlons pas de l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2 mais bien de l'angle *de* ℓ_1 *à* ℓ_2. L'ordre des droites est important.

20.156.
Pour la suite, $R_O(\alpha)$ est la rotation d'angle α autour du point O tandis que $R(\alpha)$ est la rotation d'angle α autour de l'origine.

PROPooDWIMooQPkobw
Proposition 20.157 ([634]).
Si u et v sont des vecteurs unitaires[47] *de $\mathbb{R}^2$ alors il existe une unique rotation*[48] *f telle que $f(u) = v$.*

Démonstration. C'est la proposition 20.135 appliquée à $O = (0, 0)$. □

Remarque 20.158.
Notons l'unicité. Nous ne faisons pas de différence entre R_θ et $R_{\theta+2\pi}$ et les autres $R_{\theta+2k\pi}$. En particulier si une rotation T est donnée, dire « $T = R_\theta$ » ne définit pas un nombre θ de façon univoque. Par contre ça définit une classe modulo 2π, c'est-à-dire un élément $\theta \in \mathbb{R}/2\pi$.

Nous avons déjà défini le groupe $\mathrm{SO}(2)$ en la définition 10.45 et nous avons déterminé ses matrices dans $\mathbb{R}^2$ en le lemme 20.148.

La proposition 20.157 donne une application

$$T\colon S^1 \times S^1 \to \mathrm{SO}(2). \tag{20.444}$$

Et nous avons une relation d'équivalence sur $S^1 \times S^1$ donnée par $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si il existe $g \in \mathrm{SO}(2)$ telle que $g(u) = u'$ et $g(v) = v'$.

DEFooVBKIooWlHvod
Définition 20.159 (Angle orienté[634]).
Les classes de $S^1 \times S^1$ pour cette relation d'équivalence sont les ***angles orientés de vecteurs****. Nous notons $[u, v]$ la classe de (u, v).*

PROPooIWJQooGQJBWR
Proposition 20.160.
Nous avons $T(u, v) = T(u', v')$ si et seulement si $(u, v) \sim (u', v')$.

Démonstration. En utilisant la commutativité du groupe $\mathrm{SO}(2)$ nous avons équivalence entre les affirmations suivantes :

- $(u, v) \sim (u', v')$
- $T(u, u') = T(v, v')$
- $T(u, u') \circ T(u', v) = T(v, v') \circ T(u', v)$
- $T(u, v) = T(u', v')$.

□

Proposition 20.161.
Nous avons une bijection

$$\begin{aligned} S\colon \frac{S^1 \times S^1}{\sim} &\to \mathrm{SO}(2) \\ [u, v] &\mapsto T(u, v). \end{aligned} \tag{20.445}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **S est bien définie** En effet si $[u, v] = [z, t]$ alors $T(u, v) = T(z, t)$.

(2) **Injectif** Si $S[u, v] = S[z, t]$ alors $T(u, v) = T(z, t)$, qui implique $(u, v) \sim (z, t)$ par la proposition 20.160.

[47] De norme 1.
[48] Définition 20.129.

(3) **Surjectif** Nous avons $R_\theta = T(u, R_\theta u)$.

□

Définition 20.162 (Somme d'angles orientés[634]).
Si $[u,v]$ et $[z,t]$ sont des angles orientés, nous définissons la somme par

$$[u,v] + [z,t] = S^{-1}\Big(S[u,v] \circ S[z,t]\Big). \tag{20.446}$$

LEMooWISVooYsStJp

Lemme 20.163.
Quelques propriétés des angles plats liées à la somme.

(1) $(S^1 \times S^1)/\sim$ *est un groupe commutatif.*

ITEMooBKTFooWbEvIU

(2) Relations de Chasles :

$$[u,v] + [v,w] = [u,w]. \tag{20.447}$$

(3) $-[u,v] = [v,u]$.

Démonstration. Pour la relation de Chasles, ça se base sur la propriété correspondante sur T :

$$\begin{aligned}[u,v] + [v,w] &= S^{-1}\Big(T(u,v) \circ T(v,w)\Big) && \text{(20.448a)}\\ &= S^{-1}\big(T(u,w)\big) && \text{(20.448b)}\\ &= [u,w]. && \text{(20.448c)}\end{aligned}$$

Pour l'inverse, la vérification est que

$$[u,v] + [v,u] = [u,u] = 0. \tag{20.449}$$

□

DEFooFLGNooCZUkHY

Définition 20.164.
La ***mesure*** *de l'angle orienté $[u,v]$ est $[\theta]_{2\pi}$ si $T[u,v] = R_\theta$.*

Notons dans cette définition qu'écrire $T[u,v] = R_\theta$ dans $\mathrm{SO}(2)$ ne définit pas θ, mais seulement sa classe modulo 2π. C'est pour cela que la mesure de l'angle orienté n'est également définie que modulo 2π.

Pour la suite nous allons nous intéresser à des vecteurs qui ont, dans l'idée, un point de départ et un point d'arrivée. Si $A, B \in \mathbb{R}^2$ nous notons

$$\overrightarrow{AB} = \frac{B-A}{\|B-A\|}. \tag{20.450}$$

C'est le vecteur unitaire dans la direction « de A vers B ».

THOooQDNKooTlVmmj

Théorème 20.165 (Théorème de l'angle inscrit[635]).
Soit un cercle Γ de centre O et trois points distincts $A, B, M \in \Gamma$. Alors

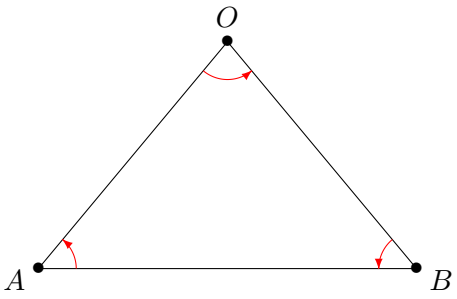
$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})_{2\pi} \tag{20.451}$$

où l'indice 2π indique la classe modulo 2π.

Démonstration. Le triangle MOA est isocèle en O, donc les angles à la base sont égaux. Et de plus la somme des angles est dans $[\pi]_{2\pi}$. Bon, entre nous, nous savons que la somme des angles est exactement π, mais comme nous n'avons pas défini les angles autrement que modulo π, nous ne pouvons pas dire mieux. Donc

$$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \in [\pi]_{2\pi}. \tag{20.452}$$

Il faut être sûr de l'orientation de tout cela. Le nombre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$ est l'angle qui sert à amener $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{AO}$. Vu que nous l'avons choisi dans le sens trigonométrique, il faut bien prendre les autres dans le sens trigonométrique, et utiliser $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et non $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.



De la même manière sur le triangle MOB nous écrivons

$$2(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})+(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})\in[\pi]_{2\pi}. \tag{20.453}$$

Nous faisons la différence entre les deux équations en remarquant que la différence de deux représentants de $[\pi]_{2\pi}$ est un représentant de $[0]_{2\pi}$ et en nous souvenant que $-(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})=(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})$ et les relations de Chasles du lemme 20.163(2) nous avons :

$$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})\in[0]_{2\pi}. \tag{20.454}$$

□

20.166.
Comment exprimer le fait qu'un angle orienté soit égal à θ modulo π alors que les angles orientés sont des classes modulo 2π ? Nous ne pouvons certainement pas écrire

$$(u,v)=[\theta]_\pi \tag{20.455}$$

parce que (u,v) est un élément de $S^1\times S^1$ alors que $[\theta]_\pi$ est un ensemble de nombres. Nous pouvons écrire

$$[u,v]\subset[\theta]_\pi. \tag{20.456}$$

C'est cohérent parce que nous avons des deux côtés des ensembles de nombres. Les opérations permises sont l'égalité ou l'inclusion. L'égalité entre les deux ensembles n'est pas possible parce que la différence minimale ente deux éléments dans $[u,v]$ est 2π alors que celle dans $[\theta]_\pi$ est π.

Si u et v forment un angle droit, nous avons

$$[u,v]=\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{20.457}$$

Et cela est bien un sous-ensemble de $[\pi/2]_\pi$.

Pour exprimer que deux angles orientés diffèrent de π nous devrions écrire :

$$[u,v]\subset[a,b]_\pi \tag{20.458}$$

où le membre de droite signifie la classe modulo π d'un représentant de $[a,b]$.

Nous allons cependant nous permettre d'écrire

$$[u,v]=[a,b]_\pi \tag{20.459}$$

voire carrément

$$(u,v)=(a,b)_\pi. \tag{20.460}$$

Cette dernière égalité devant être comprise comme voulant dire que l'angle pour passer de u à v est, soit le même que celui pour aller de a à b, soit ce dernier, plus π.

THOooUDUGooTJKDpO

Théorème 20.167 ([635]).
Soient 4 points distincts du plan A,B,C,D. Ils sont alignés ou cocycliques[49] *si et seulement si*

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})_\pi. \tag{20.461}$$

Nous allons seulement démontrer l'implication directe.

[49] C'est-à-dire sur un même cercle.

Démonstration. Si les quatre points sont alignés nous avons $[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] = [0]_{2\pi}$ et $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] = [0]_{2\pi}$. En particulier nous avons

$$[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] = [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] \tag{20.462}$$

et a fortiori l'égalité modulo π au lieu de 2π.

Nous nous relâchons en termes de notations. Si les quatre points sont cocycliques, nous pouvons utiliser le théorème de l'angle inscrit 20.165 dans les triangles ABC et ADB :

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})_{2\pi} \tag{20.463a}$$

$$2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})_{2\pi}, \tag{20.463b}$$

ce qui donne $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})_{2\pi}$ et donc

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})_{\pi}. \tag{20.464}$$

Comme annoncé, nous ne faisons pas la preuve dans l'autre sens ; elle peut être trouvée dans [635]. □

EXooOXAAooZMdDfP

Exemple 20.168.
À propos de groupe engendré et de générateur[50]. Soit G le groupe des rotations d'angle[51] $k\pi/5$ (avec k entier). Ce groupe est constitué des « dixièmes de tour », puisque $\frac{k\pi}{5} = \frac{2k\pi}{10}$.

La rotation d'angle $2\pi/5$ n'est pas génératrice parce qu'elle n'engendre que des « cinquièmes de tour » : $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$ et l'identité.

Par contre, la rotation d'angle $\pi/5$ est génératrice. △

20.11.12 Angles et nombres complexes

SUBSECooKNUVooUBKaWm

Les nombres complexes peuvent être repérés par une norme et un angle, ce qui en fait un terrain propice à l'utilisation des angles orientés. Nous en ferons d'ailleurs usage dans $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pour parler d'alignement, de cocyclicité et de birapport dans la proposition 25.88.

Soient deux éléments $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Nous les écrivons sous la forme $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$; remarquons que cela ne définit θ_i qu'à 2π près. Nous avons

$$[z_1, z_2] = [\theta_2 - \theta_1]_{2\pi}. \tag{20.465}$$

Soient maintenant $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Nous écrivons $\overrightarrow{ab}$ le vecteur unitaire dans le sens « de a vers b », c'est-à-dire un multiple positif bien choisi du nombre $b-a$. Nous notons θ_{ab} l'argument du nombre complexe $b-a$, et nous avons encore

$$[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{cd}] = [\theta_{ab} - \theta_{cd}]. \tag{20.466}$$

Avec toutes ces notations, ce qui est pas mal, c'est que les produits et quotients de nombres complexes se comportent très bien par rapport aux angles : l'argument de a/b est $\theta_a - \theta_b$ et en particulier l'argument de

$$\frac{a-b}{c-d} \tag{20.467}$$

est dans la classe de l'angle orienté

$$[\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{dc}]. \tag{20.468}$$

DEFooUPUUooKAPFrh

Définition 20.169 (Angle avec 3 points)**.**
Soient trois points $A, O, B \in \mathbb{R}^2$. Voici comment nous définissons l'angle $\widehat{AOB}$; de façon informelle, c'est l'angle de la rotation qui permet d'aller de A vers B.

- *Nous nous mettons en l'origine : $A' = A - O$ et $B' = B - O$.*
- *Nous normalisons : $A'' = A'/\|A'\|$ et $B'' = B'/\|B'\|$.*
- *Soit f, l'unique rotation telle que $f(A'') = B''$ (proposition 20.157).*
- *Soit θ l'unique élément de $[0, 2\pi[$ tel que la matrice de f dans la base canonique soit*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.469}$$

par la proposition 20.151.

[50] Définition 2.148 et 2.149
[51] Voir la définition 20.164.

- *L'angle* $\widehat{AOB}$ *est ce nombre* θ.

Nous noterons également l'angle $\widehat{AOB}$ *par* $\text{angle}(A,O,B)$.

Nous voyons que l'angle est toujours un nombre entre 0 et 2π. Par abus de notation, nous admettrons de temps en temps, de parler d'angle en dehors de cet intervalle.

DEFooMAKWooGRutOk

Définition 20.170 (Angle dans $\mathbb{C}$)**.**
Si $a,b,c\in\mathbb{C}$, *nous définissons l'angle* $\text{angle}(a,b,c)=\text{angle}\big(s(a),s(b),s(c)\big)$ *où*

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{C}&\to\mathbb{R}^2\\ x+iy&\mapsto(x,y), \end{aligned} \tag{20.470}$$

et le membre de droite étant défini par 20.169.

Avec cette définition, la multiplication dans $\mathbb{C}$ par un élément de S^1 revient à une rotation. C'est le lemme suivant.

LEMooUFOHooWdgIvO

Lemme 20.171 ([1])**.**
Soit

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{C}&\to\mathbb{R}^2\\ x+iy&\mapsto(x,y). \end{aligned} \tag{20.471}$$

Nous avons

$$s(e^{i\xi}z)=R_0(\xi)s(z) \tag{20.472}$$

pour tout $\xi\in\mathbb{R}$ *et* $z\in\mathbb{C}$.

Démonstration. Nous écrivons $z=re^{i\theta}$ comme l'autorise la proposition 20.67. En d'autres termes, $z=r\cos(\theta)+ir\sin(\theta)$ et donc

$$s(z)=\big(r\cos(\theta),r\sin(\theta)\big). \tag{20.473}$$

D'autre part, la proposition 20.7 donne $e^{i\xi}z=re^{i(\theta+\xi)}$, et donc

$$s(e^{i\xi}z)=\begin{pmatrix}r\cos(\theta+\xi)\\ r\sin(\theta+\xi)\end{pmatrix}. \tag{20.474}$$

La conclusion est un calcul :

$$rR(\xi)\big(\cos(\theta),\sin(\theta)\big)=r\begin{pmatrix}\cos(\xi)&-\sin(\xi)\\ \sin(\xi)&\cos(\xi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\quad\text{prop. 20.151} \tag{20.475a}$$

$$=r\begin{pmatrix}\cos(\xi)\cos(\theta)-\sin(\xi)\sin(\theta)\\ \sin(\xi)\cos(\theta)+\cos(\xi)\sin(\theta)\end{pmatrix} \tag{20.475b}$$

$$=r\begin{pmatrix}\cos(\xi+\theta)\\ \sin(\xi+\theta)\end{pmatrix}\quad\text{lemme 20.16} \tag{20.475c}$$

$$=s(e^{i\xi}z). \tag{20.475d}$$

□

LEMooXMYDooRrNblP

Lemme 20.172.
Pour tout $v\in S^1$, *l'application*

$$\begin{aligned} s\colon [0,2\pi[&\to S^1\\ \theta&\mapsto R(\theta)v \end{aligned} \tag{20.476}$$

est une bijection.

LEMooMFXWooGymSoF

Lemme 20.173 ([1])**.**
Si les points 0, $R(\theta_1)v$ *et* $R(\theta_2)v$ *sont alignés, avec* $\theta_1<\theta_2$ *dans* $[0,2\pi[$, *alors* $\theta_2\in\{\theta_1,\theta_1+\pi\}$.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\|v\|=1$. Étant donné que $R(\theta_2)v$ est sur la droite contenant 0 et $R(\theta_1)v$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$R(\theta_2)v=\lambda R(\theta_1)v. \tag{20.477}$$

Vu que $R(\theta)$ est une isométrie, nous avons $\lambda=\pm1$. Si $\lambda=1$, alors nous avons $R(\theta_1)v=R(\theta_2)v$ et donc $\theta_1=\theta_2$ par le lemme 20.172.

Si $\lambda=-1$, alors en remarquant que $R(\pi)v=-v$, nous avons $R(\theta_1+\pi)v=R(\theta_1)R(\pi)v=-R(\theta_1)v$. Donc le lemme 20.172 nous dit que $\theta_1+\pi=\theta_2$. □

DEFooEGKOooRPGOAs

Lemme-Définition 20.174 (Angle entre deux droites[1]).
Soient deux droites ℓ_1 et ℓ_2 de $\mathbb{R}^2$ sécantes au point $A \in \mathbb{R}^2$.
Il existe un unique $\theta_0 \in [0, \pi[$ tel que[52] *$R_A(\theta_0)x \in \ell_2$ pour tout $x \in \ell_1$.*
*Cet angle θ_0 est l'**angle** de ℓ_1 à ℓ_2.*

Démonstration. Nous considérons le vecteur v tel que $\ell_1 = \{A + tv\}_{t\in\mathbb{R}}$, ainsi qu'un point arbitraire $x_0 = A + \lambda v$ sur ℓ_1. Nous allons montrer qu'il existe un unique $\theta_\lambda \in]0, \pi[$ tel que $R_A(\theta_\lambda)x_0 \in \ell_2$. Ensuite nous allons montrer que $\theta_{\lambda_1} = \theta_{\lambda_2}$ pour tout λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$.

Nous considérons une application affine

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) + \alpha \end{aligned} \tag{20.478}$$

avec $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\ell_2 = \ker(f)$ (proposition 14.154). Nous supposons que $f(x_0) > 0$ pour fixer les idées.

Nous utilisons la formule (20.394) pour R_A ; pour tout θ nous avons

$$R_A(\theta)(A + \lambda v) = (\tau_A \circ R(\theta) \circ \tau_A^{-1})(A + \lambda v) = \tau_A\big(R(\theta)(\lambda)v\big) = A + \lambda R(\theta)v. \tag{20.479}$$

Nous avons d'une part

$$f(x_0) = f(A + \lambda v) = u(A + \lambda v) + \alpha = u(A) + \alpha + \lambda u(v) = f(A) + \lambda u(v) = \lambda u(v) \tag{20.480}$$

parce que $f(A) = 0$ du fait que $A \in \ell_2$.

De même, en tenant compte que $R(\pi)v = -v$ nous avons

$$R_A(\pi)x_0 = u(-\lambda v + A) + \alpha = -\lambda u(v). \tag{20.481}$$

Donc $f\big(R_A(\pi)x_0\big) = -f(x_0)$.

Nous avons prouvé qu'en posant

$$\begin{aligned} s\colon [0, \pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto R_A(\theta)(A + \lambda v), \end{aligned} \tag{20.482}$$

nous avons $s(0) = A + \lambda v$, $s(\pi) = A - \lambda v$ et que $(f \circ s)(0) > 0$ et $(f \circ s)(\pi) < 0$. Nous pouvons donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 à la fonction continue $f \circ s$. Il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que $(f \circ s)(\theta_0) = 0$.

Pour une telle valeur de θ_0, nous avons $s(\theta_0) \in \ker(f)$ et donc $R_A(\theta_0)x_0 \in \ell_2$.

(1) **Unicité** Nous prouvons que si $R_A(\theta_1)x_0$ et $R_A(\theta_2)x_0$ sont sur ℓ_2, alors $\theta_1 = \theta_2$. Supposons que ce les points A, $R_A(\theta_1)x_0$ et $R_A(\theta_2)x_0$ sont alignés sur ℓ_2. Alors les points 0, $R(\theta_1)v$ et $R(\theta_2)v$ sont alignés, et donc le lemme 20.173 nous assure que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ ou que $\theta_1 = \theta_2$. La possibilité $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ est exclue parce que θ_1 et θ_2 sont dans $]0, \pi[$. Donc $\theta_1 = \theta_2$.

Nous avons vu qu'il existe une unique angle, que nous notons θ_λ tel que $R_A(\theta_\lambda)(A + \lambda v) \in \ell_2$.

(2) **Petite note au passage** La droite ℓ_2 est l'ensemble

$$\ell_2 = \{A + tR(\theta_\lambda)v\}_{t\in\mathbb{R}}. \tag{20.483}$$

(3) **Ce θ_λ fonctionne sur tout ℓ_1** Tout élément de ℓ_1 peut être écrit sous la forme $x_0 + \mu v$. Nous prouvons à présent que si $x_1 = x_0 + \mu v$, alors $R_A(\theta)x_1 \in \ell_2$. Nous avons

$$\begin{aligned} R_A(\theta_\lambda)v &= R_A(\theta_\lambda)(x_0 + \mu v) && \text{(20.484a)} \\ &= R_A(\theta_\lambda)\big(A + (\lambda + \mu)v\big) && \text{(20.484b)} \\ &= R(\theta_\lambda)\big((\lambda + \mu)v\big) + A && \text{(20.484c)} \\ &= (\lambda + \mu)R(\theta_\lambda)v + A. && \text{(20.484d)} \end{aligned}$$

Donc cela est dans ℓ_2.

□

[52] Pour rappel, $R_A(\theta)$ est défini en 20.139.

PROPooKVSHooRODGWE

Proposition 20.175 ([1]).
Les angles sont invariants sous les translations.

Plus précisément, si $A, B, S, v \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\widehat{T_v(A)T_v(S)T_v(B)} = \widehat{ASB} \tag{20.485}$$

où $T_v(X) = X + v$.

Démonstration. Nous notons $X_v = X + v$. Nous avons $A'_v = A_v - S_v = (A + v) - (S + v) = A - S = A''$. Donc les vecteurs A'' et B'' à partir desquels est calculé $\widehat{ASB}$ sont les mêmes que les vecteurs A''_v et B''_v qui servent à calculer $\widehat{T_v(A)T_v(S)T_v(B)}$. □

PROPooYWKJooRjybUJ

Proposition 20.176 ([1]).
Les angles sont invariants par rotations, c'est-à-dire que si $A, B, S \in \mathbb{R}^2$ et si R_θ est une rotation, alors

$$\widehat{ASB} = \widehat{R_\theta(A)R_\theta(S)R_\theta(B)}. \tag{20.486}$$

Démonstration. Pour être plus concis, nous écrivons A_θ for $R_\theta(A)$ et de même pour B et S. Afin de calculer l'angle $\widehat{R_\theta(A)R_\theta(S)R_\theta(B)}$, nous définissons

$$\begin{cases} A'_\theta = A_\theta - S_\theta & \text{(20.487a)} \\ S'_\theta = 0 & \text{(20.487b)} \\ B'_\theta = B_\theta - S_\theta. & \text{(20.487c)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A''_\theta = \dfrac{A_\theta - S_\theta}{\|A_\theta - S_\theta\|} & \text{(20.488a)} \\ B''_\theta = \dfrac{B_\theta - S_\theta}{\|B_\theta - S_\theta\|}. & \text{(20.488b)} \end{cases}$$

Par définition, l'angle est le α tel que $R_\alpha(A''_\theta) = B''_\theta$. Nous devons prouver que le même α vérifie $R_\alpha(A'') = B''$.

Le fait que R_θ soit une isométrie nous donne déjà

$$\|R_\theta(A) - R_\theta(B)\| = \|A - B\|. \tag{20.489}$$

Ensuite, la relation de définition de α s'écrit

$$\frac{R_\alpha R_\theta(A) - R_\alpha R_\theta(S)}{\|A_\theta - S_\theta\|} = \frac{R_\theta(B) - R_\theta(S)}{\|B_\theta - S_\theta\|}. \tag{20.490}$$

Vu que R_α et R_θ commutent, nous avons

$$R_\theta \frac{R_\alpha(A) - R_\alpha(B)}{\|A - S\|} = R_\theta \frac{B - S}{\|B - S\|}, \tag{20.491}$$

et comme R_θ est inversible, cela donne $R_\alpha(A'') = B''$. □

LEMooJLHGooQIpKIE

Lemme 20.177 ([1]).
Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et une droite ℓ_1. Soit ℓ_2 une droite passant par A et intersectant ℓ_1 en O. Alors

$$\sigma_{\ell_1}(A) = R_O(-2\alpha)A \tag{20.492}$$

où α est l'angle de ℓ_1 à ℓ_2.

Démonstration. Nous allons utiliser des coordonnées autour de O. Il existe un vecteur v tel que

$$A = O + v \tag{20.493}$$

Par définition de l'angle α[53], la droite ℓ_2 s'obtient par rotation d'angle α depuis la droite ℓ_1. Donc le point

$$B = R_O(-\alpha)A \tag{20.494}$$

[53] Définition 20.174.

est sur ℓ_1.

Nous allons prouver que le point

$$D = R_O(-2\alpha)A \tag{20.495}$$

est $D = \sigma_{\ell_1} A$.

Nous commençons par montrer que la droite (DA) est perpendiculaire à ℓ_1, c'est-à-dire que

$$(D - A) \cdot (B - O) = 0. \tag{20.496}$$

En utilisant le fait que

$$R_O(\alpha)(O + X) = O + R(\alpha)X, \tag{20.497}$$

nous avons

$$D - A = R_O(-2\alpha)(O + v) - (O + v) = O + R(-2\alpha)v - O - v = R(-2\alpha)v - v \tag{20.498}$$

et de la même façon,

$$B - O = R(-\alpha)v. \tag{20.499}$$

Notons que tous les O se sont simplifiés et qu'il ne reste que des rotations usuelles. En utilisant le fait que $R(\alpha)$ est une isométrie, nous pouvons alors calculer

$$\begin{aligned}(D - A) \cdot (B - O) &= \langle R(-2\alpha)v - v, R(-\alpha)v\rangle & \text{(20.500a)}\\ &= \langle R(-\alpha)v - R(\alpha)v, v\rangle. & \text{(20.500b)}\end{aligned}$$

En utilisant la matrice de rotation du lemme 20.148 nous trouvons

$$\big(R(-\alpha) - R(\alpha)\big)v = \begin{pmatrix} 2\sin(\alpha)v_2 \\ -2\sin(\alpha)v_1 \end{pmatrix} \tag{20.501}$$

et donc

$$\langle \big(R(-\alpha) - R(\alpha)\big)v, v\rangle = 0. \tag{20.502}$$

Le point D est bien sûr la droite perpendiculaire à ℓ_1 et passant par A. Mais vu que D est obtenu à partir de A par une rotation, le point D est également sur le cercle de rayon $\|OA\|$ et centré en O. Ce cercle possède exactement deux intersections avec cette droite. Le premier est A et le second est $\sigma_{\ell_1}(A)$. Comme D n'est pas A, nous avons $D = \sigma_\ell(A)$. □

20.11.13 Polygone convexe

DEFooBCSKooABKKtR

Définition 20.178 ([636]).
*Un **polygone** est une union de segments dans $\mathbb{R}^2$ de la forme*

$$[a_N, a_1] \cup \bigcup_{i=1}^{N} [a_i, a_{i+1}]. \tag{20.503}$$

La définition suivante dit ce qu'est un polygone convexe. À mon avis, le théorème de Jordan 29.234 doit permettre de donner une définition plus précise en disant que c'est la partie compacte qui est convexe.

DEFooBCDPooXTpbFq

Définition 20.179.
*Nous disons qu'un polygone est **convexe** si il est la frontière*[54] *d'une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

PROPooFYRMooTqVDEm

Proposition 20.180 ([637]).
Un polygone est convexe[55] *si et seulement si il est contenu dans le demi-plan de chacun de ses côtés.*

PROPooUPPTooZBFvPg

Proposition 20.181.
Les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire la partie

$$\{e^{2ik\pi/n}, k = 0, \dots, n - 1\}, \tag{20.504}$$

forment un polygone régulier convexe[56].

[54] frontière, définition 9.181.
[55] Définition 20.179.
[56] Polygone, définition 20.178, polygone convexe, définition 20.179. En ce qui concerne les angles, formellement c'est la définition 20.170.

Démonstration. Nous posons $a_k = e^{2ik\pi/n}$ et $\xi = e^{2i\pi/n}$, de telle sorte que $a_{k+1} = \xi a_k$. Le polygone que nous considérons est celui formé par les segments $[a_i, a_{i+1}]$ avec $i = 0, \dots, n-1$. Nous savons que $a_n = a_0$; donc nous pouvons parler seulement de segments de la forme $[a_i, a_{i+1}]$ sans nous soucier du cas particulier $[a_{n-1}, a_0]$.

(1) **Longueurs** La longueur d'une arrête est donnée par

$$|a_k - a_{k+1}| = |a_k - \xi a_k| = |a_k||1 - \xi| = |1 - \xi| \tag{20.505}$$

parce que $|a_k| = 1$.

(2) **Angles** Nous avons un calcul utilisant pas mal de propriétés :

$$\begin{aligned}
\text{angle}(a_l, a_{l+1}, a_{l+2}) &= \text{angle}(\xi^l a_0, \xi^l a_1, \xi^l a_2) && && \text{(20.506a)}\\
&= \text{angle}\big(s(\xi^l a_0), s(\xi^l a_1), s(\xi^l a_2)\big) && \text{def. 20.170} && \text{(20.506b)}\\
&= \text{angle}\big(R_0(\xi^l)s(a_0), R_0(\xi^l)s(a_1), R_0(\xi^l)s(a_2)\big) && \text{lem. 20.171} && \text{(20.506c)}\\
&= \text{angle}\big(s(a_0), s(a_1), s(a_2)\big) && \text{prop. 20.176} && \text{(20.506d)}\\
&= \text{angle}(a_0, a_1, a_2). && && \text{(20.506e)}
\end{aligned}$$

(3) **Convexe** Voici un squelette de preuve[57].

- Utiliser la caractérisation 20.180.
- Tous les sommets sont sur le cercle unité.
- Considérer d, la droite passant par deux points successifs $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$.
- Cette droite définit deux demi-plans.
- La proposition 14.168 devrait permettre de prouver que la partie du cercle entre θ_1 et θ_2 est dans un demi-plan, et le reste dans l'autre demi-plan.
- Il n'y a pas d'autres racines de l'unité entre θ_1 et θ_2. Donc elles sont toutes dans le même demi-plan.
- Les demi-plans étant convexes (lemme 14.162), les arrêtes sont dans le demi-plan.

□

20.11.14 Groupe diédral

20.11.14.1 Définition et générateurs : vue géométrique

DEFooIWZGooAinSOh

Définition 20.182.
*Le **groupe diédral** D_n ($n \geqslant 3$) est le groupe des isométries de $(\mathbb{C}, d)$ laissant invariant l'ensemble*

$$\{e^{2ik\pi/n}, k = 0, \dots, n-1\} \tag{20.507}$$

des racines de l'unité.

20.183.
La proposition 20.181 nous permet de dire que le groupe diédral est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ laissant invariant un polygone régulier à n côtés. C'est un peu pour cela que nous n'avons défini D_n que pour $n \geqslant 3$; et un peu aussi pour une raison technique qui arrivera quand on parlera des générateurs abstraits. Voir 20.192 et ce qui suit.

LEMooCUVPooMZKnzo

Lemme 20.184.
Nous avons

$$D_n \subset O(2, \mathbb{R}). \tag{20.508}$$

Démonstration. Si $f \in D_n$, alors $f(e^{2ik\pi/n})$ doit être l'un des $e^{2ik'\pi/n}$, et puisque f conserve les longueurs dans $\mathbb{C}$, nous devons avoir

$$1 = d(0, e^{2ik\pi/n}) = d\big(f(0), e^{2ik'\pi/n}\big). \tag{20.509}$$

[57] Je ne n'ai pas vérifié. Écrivez-moi si vous voyez un problème.

Donc $f(0)$ est à l'intersection de tous les cercles de rayon 1 centrés en les $e^{2ik\pi/n}$, ce qui montre que $f(0)=0$ (dès que $n\geqslant 3$). Par conséquent notre étude du groupe diédral ne doit prendre en compte que les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes

$$D_n\subset O(2,\mathbb{R}). \tag{20.510}$$

□

PROPooELOIooVJtuZN

Proposition 20.185 ([638]).
Le groupe D_n contient un sous-groupe cyclique d'ordre 2 et un sous-groupe cyclique d'ordre n.

Démonstration. Nous notons s la conjugaison complexe[58]. C'est un élément d'ordre 2 qui est dans D_n parce que

$$s\big(e^{2ki\pi/n}\big)=e^{2(n-k)i\pi/n}. \tag{20.511}$$

EqSUshkuP

De la même façon, la rotations d'angle $2\pi/n$, que l'on note r, agit sur les racines de l'unité et engendre le groupe d'ordre n des rotations d'angle $2k\pi/n$. □

Proposition 20.186 ([638]).
Si s est la conjugaison complexe et r la rotation d'angle $2\pi/n$, alors $(sr)^2=\mathrm{Id}$.

Démonstration. Si $z^n=1$, alors

$$(srsr)z=(srs)\big(e^{2i\pi/n}z\big)=(sr)\big(e^{-2i\pi/n}\bar{z}\big)=s(\bar{z})=z. \tag{20.512}$$

□

PropLDIPoZ

Proposition 20.187 ([638]).
Nous notons s la conjugaison complexe et r la rotation d'angle $2\pi/n$.

(1) Le groupe diédral D_n est engendré par s et r.

ITEMooOEBHooULRmZk

(2) Tous les éléments de D_n s'écrivent sous la forme r^m ou $s\circ r^m$.

Démonstration. Nous considérons les points $A_0=1$ et $A_k=e^{2ki\pi/n}$ avec $k\in\{1,\dots,n-1\}$. Par convention, $A_n=A_0$. L'action des éléments s et r sur ces points est

$$r(A_k)=A_{k+1} \tag{20.513a}$$
$$s(A_k)=A_{n-k}. \tag{20.513b}$$

Cette dernière est l'équation (20.511).

Soit $f\in D_n$. Étant donné que c'est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ avec un point fixe (le point 0), f est soit une rotation, soit une réflexion (lemme 20.138).

(1) **Si un des A_k est fixé** Supposons pour commencer qu'un des A_k soit fixé par f. Dans ce cas f a deux points fixes : O et A_k. Elle fixe donc toute la droite passant par 0 et A_k (lemme 20.124) ; elle est donc soit la réflexion d'axe (OA_k), soit l'identité (lemme 20.126). L'identité étant engendrée par s et r, nous supposons que f est la réflexion d'axe (OA_k). Dans ce cas, nous avons $f=s\circ r^{n-2k}$. En effet pour chaque l nous avons

$$(s\circ r^{n-2k})(A_l)=s(A_{l+n-2k})=A_{n-l+n+2k}=A_{2k-l}. \tag{20.514}$$

Nous voyons que $s\circ r^{n-2k}$ fixe O et A_k, et donc la droite (OA_k). Elle est donc soit la réflexion d'axe (OA_k) soit l'identité. Mais elle n'est pas l'identité parce que elle ne fixe pas tous les A_l.

(2) **Si f ne fixe aucun des A_k** Nous passons à présent au cas où f ne fixe aucun des A_k. Étant donné que f une isométrie de $\mathbb{R}^2$ avec un point fixe (le point 0), elle est soit une rotation, soit une réflexion (lemme 20.138).

(2a) **Si f est une rotation** Supposons que f soit une rotation. Si $f(A_k)=A_m$, alors l'angle de la rotation est

$$\frac{2(m-k)\pi}{n}, \tag{20.515}$$

et donc $f=r^{m-k}$, qui est de la forme demandée.

[58] C'est une réflexion ; la réflexion d'axe $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

(2b) **Si f est une réflexion** Supposons à présent que f soit une réflexion d'axe Δ. Cette fois, Δ ne passe par aucun des points A_k, par contre Δ passe par 0. Nous commençons par montrer que Δ doit être la médiatrice d'un des côtés $[A_p, A_{p+1}]$ du polygone. Comme Δ passe par O et n'est aucune des droites (OA_k), cette droite passe par l'intérieur d'un des triangles OA_pA_{p+1} et intersecte donc le côté correspondant.

Notre tâche est de montrer que Δ coupe $[A_p, A_{p+1}]$ en son milieu. Dans ce cas, Δ sera automatiquement perpendiculaire parce que le triangle OA_pA_{p+1} est isocèle en O. Nommons l la longueur des côtés du polygone $P = \Delta \cap [A_p, A_{p+1}]$, $x = d(A_p, P)$ et $\delta = d(A_p, \Delta)$. Vu que f est la symétrie d'axe Δ, nous avons aussi $d\big(f(A_p), \Delta\big) = \delta$ et $d\big(A_p, f(A_p)\big) = 2\delta$. D'autre part, par la définition de la distance, $\delta < x$. Si $x < \frac{l}{2}$, alors $\delta < \frac{l}{2}$ et donc $d\big(A_p, f(A_p)\big) < l$. Or cela est impossible parce que le polygone ne possède aucun sommet à distance plus courte que l de A_p.

De la même manière si $x > \frac{l}{2}$, nous raisonnons avec A_{p+1} pour obtenir une contradiction. Nous en concluons que la seule possibilité est $x = \frac{l}{2}$, et donc $f(A_p) = A_{p+1}$. Montrons alors que $f = s \circ r^{n-2p-1}$. Il faut montrer que c'est une réflexion qui envoie A_p sur A_{p+1}. D'abord c'est une réflexion parce que

$$\det(sr^{n-2p-1}) = \det(s)\det(r^{n-2p-1}) = -1 \tag{20.516}$$

parce que $\det(s) = -1$ alors que $\det(r^k) = 1$ parce que r est une rotation dans SO(2). Ensuite nous avons

$$s \circ r^{n-2p-1}(A_p) = s(A_{p+n-2p-1}) = s(A_{n-p-1}) = A_{n-(n-p-1)} = A_{p+1}. \tag{20.517}$$

Donc $s \circ r^{n-2p-1}$ est bien une réflexion qui envoie A_p sur A_{p+1}.

□

CorWYITsWW

Corolaire 20.188.
La liste des éléments de D_n est

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \tag{20.518}$$

et $|D_n| = 2n$.

Démonstration. Nous savons par la proposition 20.187 que tous les élément de D_n s'écrivent sous la forme r^k ou sr^k. Puisque r est d'ordre n, il ne faut considérer que $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Les éléments 1, r,..., r^{n-1} sont tous différents, et sont (pour des raisons de déterminant) tous différents des sr^k. Les isométries sr^k sont toutes différentes entre elles pour essentiellement la même raison :

$$sr^k(A_p) = s(A_{p+k}) = A_{n-p+k} \tag{20.519}$$

donc si $k \neq k'$, $sr^k(A_p) \neq sr^{k'}(A_p)$. La liste des éléments de D_n est donc

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \tag{20.520}$$

et donc $|D_n| = 2n$. □

EXooHNYYooUDsKnm

Exemple 20.189.
Nous considérons le carré $ABCD$ dans $\mathbb{R}^2$ et nous cherchons les isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent le carré invariant. Nous nommons les points comme sur la figure 20.7. La symétrie d'axe vertical est nommée s et la rotation de 90 degrés est notée r.

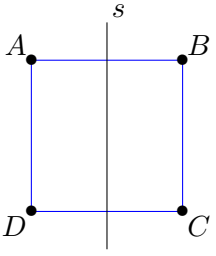


FIGURE 20.7 : Le carré dont nous étudions le groupe diédral.

LabelFigIsomCarre

Il est facile de vérifier que toutes les symétries axiales peuvent être écrites sous la forme $r^i s$. De plus le groupe engendré par s agit sur le groupe engendré par r parce que

$$(srs^{-1})(A,B,C,D) = sr(B,A,D,C) = s(A,D,C,B) = (B,C,D,A), \tag{20.521}$$

c'est-à-dire $srs^{-1} = r^{-1}$. Nous sommes alors dans le cadre du corolaire 2.161 et nous pouvons écrire que

$$D_4 = \mathrm{gr}(r) \times_\sigma \mathrm{gr}(s). \tag{20.522}$$

△

20.11.14.2 Table de multiplication

La proposition 20.187 nous indique que tous les éléments de D_n s'écrivent sous la forme $s^\epsilon \circ r^m$ avec $\epsilon \in \{0,1\}$. Nous allons maintenant écrire la table de multiplication pour de telles transformations de $\mathbb{C}$.

LEMooBNJFooAbhsUa

Lemme 20.190.
Si R est une rotation autour de 0 (dans $\mathbb{C}$), et si s est la conjugaison complexe, alors

$$Rs = sR^{-1} \tag{20.523}$$

Démonstration. Il s'agit seulement d'un calcul en écrivant R comme la multiplication par $e^{i\alpha}$. Nous avons

$$(Rs)z = e^{i\alpha}\bar{z} = s\big(e^{-i\alpha}z\big) = sR^{-1}z. \tag{20.524}$$

□

PROPooPYDLooLgiUjk

Proposition 20.191.
Si $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0,1\}$ et si $k,l \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$(s^{\epsilon_1}r^k)(s^{\epsilon_2}r^l) = s^{\epsilon_1+\epsilon_2}r^{l+(-1)^{\epsilon_1}k}. \tag{20.525}$$

Démonstration. Si $\epsilon_2 = 1$ alors nous utilisons le lemme 20.190 pour trouver

$$(s^{\epsilon_1}r^k)(s^{\epsilon_2}r^l) = s^{\epsilon_1}(r^k s^{\epsilon_2})r^l = s^{\epsilon_1}s^{\epsilon_2}r^{-k}r^l. \tag{20.526}$$

La proposition est déjà prouvée dans ce cas.

Passons à $\epsilon_2 = 0$. Dans ce cas nous avons

$$(s^{\epsilon_1}r^k)(s^{\epsilon_2}r^l) = s^{\epsilon_1}r^{k+l}, \tag{20.527}$$

et c'est bon. □

20.11.14.3 Générateurs : vue abstraite

NORMooCCUEooRRENed

20.192.
Nous allons montrer que D_n peut être décrit de façon abstraite en ne parlant que de ses générateurs. Nous considérons un groupe G engendré par des éléments a et b tels que

(1) a est d'ordre 2,

(2) b est d'ordre n avec $n \geqslant 3$,

(3) $abab = e$.

Nous allons prouver que ce groupe doit avoir la même liste d'éléments que celle du corolaire 20.188.

Proposition 20.193 ([638]).
Le groupe G n'est pas abélien.

Démonstration. Nous savons que $abab = e$, donc $aba = b^{-1}$, mais $b^{-2} \neq e$ parce que b est d'ordre $n > 2$. Donc $aba \neq e$. En manipulant un peu :

$$e \neq aba = (ab)(ba^{-1})^{-1} = (ab)(ba)^{-1} \tag{20.528}$$

parce que $a^{-1} = a$. Donc $ab \neq ba$. □

LemKKXdqdL

Lemme 20.194 ([638]).
Pour tout k entre 1 et $n-1$ nous avons

$$\boldsymbol{Ad}(a)b^k = ab^k a^{-1} = ab^k a = b^{-k}. \tag{20.529}$$

Démonstration. Nous faisons la démonstration par récurrence. D'abord pour $k = 1$, nous devons avoir $aba = b^{-1}$, ce qui est correct parce que par construction de G nous avons $abab = e$. Ensuite nous supposons que le lemme tient pour k et nous regardons ce qu'il se passe avec $k+1$:

$$ab^{k+1}a = ab^k ba = \underbrace{ab^k a}_{b^{-k}}\underbrace{aba}_{b^{-1}} = b^{-k}b^{-1} = b^{-(k+1)}. \tag{20.530}$$

□

PROPooVQARooWuKHMZ

Proposition 20.195.
L'élément a n'est pas une puissance de b.

Démonstration. Supposons le contraire : $a = b^k$. Dans ce cas nous aurions

$$e = (ab)(ab) = b^{k+1}b^{k+1} = b^{2k+2} = b^{2k}b^2 = a^2b^2 = b^2, \tag{20.531}$$

ce qui signifierait que b est d'ordre 2, ce qui est exclu par construction. □

PROPooEPVGooQjHRJp

Proposition 20.196 ([638]).
La liste des éléments de G est donnée par

$$G = \{1, b, \cdots, b^{n-1}, a, ab, \ldots, ab^{n-1}\} = \{a^\epsilon b^k\}_{\substack{\epsilon=0,1\\ k=0,\ldots,n-1}} \tag{20.532}$$

Les éléments de ces listes sont distincts.

Démonstration. Étant donné que a n'est pas une puissance de b, les éléments 1, a, b,..., b^{n-1} sont distincts. De plus si k et $m = k+p$ sont deux éléments distincts de $\{1, \ldots, n-1\}$, nous avons $ab^k \neq ab^m$ parce que si $ab^k = ab^{k+p}$, alors $a = ab^p$ avec $p < n$, ce qui est impossible. Pour la même raison, $ab^k \neq e$, et $ab^k \neq b^m$.

Au final les éléments $1, a, b, \ldots, b^{n-1}, ab, \ldots, ab^{n-1}$ sont tous différents. Nous devons encore voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Par définition le groupe G est engendré par a et b, donc tout élément $x \in G$ s'écrit $x = a^{m_1}b^{k_1}\ldots a^{m_r}b^{k_r}$ pour un certain r et avec pour tout i, $k_i \in \{1, \ldots, n-1\}$ (sauf k_r qui peut être égal à zéro) et $m_i = 1$, sauf m_1 qui peut être égal à zéro. Donc

$$x = a^m b^{k_1} ab^{k_2} a \ldots b^{k_{r-1}} ab^{k_r} \tag{20.533}$$

où m et k_r peuvent éventuellement être zéro. En utilisant le lemme 20.194 sous la forme $b^{k_i}a = ab^{-k_i}$, quitte à changer les valeurs des exposants, nous pouvons passer tous les a à gauche et tous les b à droite pour finir sous la forme $x = a^k b^m$.

Donc non, il n'existe pas d'autres éléments dans G que ceux déjà listés. □

LemooNFRIooPWuikH

Lemme 20.197 ([1]).
Tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme $a^\epsilon b^k$ ou $b^k a^\epsilon$ avec $\epsilon \in \{0,1\}$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Démonstration. Nous commençons par la forme $a^\epsilon b^k$. L'existence est la proposition 20.196. Pour l'unicité nous supposons $a^\epsilon b^k = a^\sigma b^l$ et nous décomposons en 4 cas distincts.

(1) $\epsilon = 0$, $\sigma = 0$ Alors $b^k = b^l$. Mais b étant d'ordre n et k, l étant égaux au maximum à $n-1$, cette égalité implique $k = l$.

(2) $\epsilon = 0$, $\sigma = 1$ Alors $b^k = ab^l$, ce qui donne $a = b^{k-l}$, ce qui est interdit par la proposition 20.195.

(3) $\epsilon = 1$, $\sigma = 0$ Même problème que ci-dessus.

(4) $\epsilon = 1$, $\sigma = 1$ Encore une fois $b^k = b^l$ implique $k = l$.

En ce qui concerne la forme $b^k a^\epsilon$, l'existence est à montrer. Soit l'élément $g = a^\epsilon b^k$; cherchons à le mettre sous la forme $b^l a^\sigma$. Si $\epsilon = 0$ c'est évident. Sinon $\epsilon = 1$ et nous avons par le lemme 20.194

$$ab^k = b^{-k}a^{-1} = b^{-k}b^n a = b^{-k}a. \tag{20.534}$$

En ce qui concerne l'unicité, nous distinguons 4 cas pour $b^k a^\epsilon = b^l a^\sigma$. Comme précédemment ils se traitement exactement comme précédemment. □

THOooYITHooTNTBuG

Théorème 20.198.
Les groupes G et D_n sont isomorphes.

Démonstration. Nous utilisons l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon G &\to D_n\\ a^kb^m &\mapsto s^kr^m.\end{aligned} \tag{20.535}$$

C'est évidemment bien défini et bijectif, mais c'est également un morphisme parce que si nous calculons ψ sur un produit, nous devons comparer

$$\psi\big(a^{k_1}b^{m_1}a^{k_2}b^{m_2}\big) \tag{20.536}$$

EqRUIPilp

avec

$$\psi\big(a^{k_1}b^{m_1}\big)\psi\big(a^{k_2}b^{m_2}\big) = s^{k_1}r^{m_1}s^{k_2}r^{m_2}. \tag{20.537}$$

EqIVFIphI

Vu que D_n et G ont les mêmes propriétés qui permettent de permuter a et b ou s et r, l'expression à l'intérieur du ψ dans (20.536) se simplifie en a^kb^m avec les même k et m que l'expression à droite dans (20.537) et se simplifie en s^kr^m. □

Corolaire 20.199.
Toutes les propriétés démontrées pour G sont vraies pour D_n. En particulier, avec quelques redites :

(1) *Le groupe D_n peut être défini comme étant le groupe engendré par un élément s d'ordre 2 et un élément r d'ordre $n-1$ assujettis à la relation $srsr = e$.*

(2) *Le groupe D_n n'est pas abélien.*

(3) *Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ nous avons $sr^ks = r^{-k}$.*

(4) *L'élément s ne peut pas être obtenu comme une puissance de r.*

(5) *La liste des éléments de D_n est*

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \tag{20.538}$$

(6) *Le groupe diédral D_n est d'ordre $2n$.*

Proposition 20.200.
En posant $C_n = \{r^k\}_{k=0,\dots,n-1}$ et $C_2 = \{a^\epsilon\}_{\epsilon=0,1}$, nous pouvons exprimer D_n comme le produit semi-direct

$$D_n = C_n \times_\rho C_2 \tag{20.539}$$

où ρ désigne l'action adjointe.

Démonstration. L'isomorphisme est :

$$\begin{aligned}\psi\colon C_n \times_\rho C_2 &\to D_n\\ (b^k, a^\epsilon) &\mapsto b^ka^\epsilon.\end{aligned} \tag{20.540}$$

(1) **Action adjointe** L'application $\rho_{a^\epsilon} = \mathbf{Ad}(a^\epsilon)$ est toujours un morphisme. Comme a^ϵ est, soit e, soit a, nous allons nous restreindre à a et oublier l'exposant ϵ. Il faut montrer que $\mathbf{Ad}(a) \in \mathrm{Aut}(C_n)$. En utilisant le lemme 20.194,

$$\mathbf{Ad}(a)b^k = ab^ka^{-1} = b^{-k} = b^{n-k}. \tag{20.541}$$

L'application $\mathbf{Ad}(a)\colon C_n \to C_n$ est donc bijective et homomorphique. Ergo isomorphisme.

(2) **Injectif** Si $\psi(b^k, a^\epsilon) = \psi(b^l, a^\sigma)$, alors par unicité du lemme 20.197 nous avons $k = l$ et $\epsilon = \sigma$.

(3) **Surjectif** Par la partie « existence » du lemme 20.197.

(4) **Morphisme** Lorqu'on prend deux sous-groupes d'un même groupe (ici le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$), et que l'on tente de faire un produit semi-direct en utilisant l'action adjointe, nous avons toujours un morphisme. Dans notre cas, le calcul est :

$$\psi\big((b^k, a^\epsilon)(b^l, a^\sigma)\big) = b^k\rho_{a^\epsilon}(b^l)a^{\epsilon+\sigma} = b^ka^\epsilon b^la^{-\epsilon}a^{\epsilon+\sigma} = b^ka^\epsilon b^la^\sigma = \psi(b^k, a^\epsilon)\psi(b^l, a^\sigma). \tag{20.542}$$

□

20.11.14.4 Classes de conjugaison

subsubsecZQnBcgo

Pour les classes de conjugaison du groupe diédral nous suivons [639].

D'abord pour des raisons de déterminants[59], les classes des éléments de la forme r^k et de la forme sr^k ne se mélangent pas. Nous notons $C(x)$ la classe de conjugaison de x, et $y \cdot x = yxy^{-1}$.

Les relations que nous allons utiliser sont

$$sr^k s = r^{-k} \tag{20.543a}$$
$$rs = sr^{-1} = sr^{n-1}. \tag{20.543b}$$

La classe de conjugaison qui ne rate jamais est bien entendu $C(1) = 1$. Nous commençons les vraies festivités avec $C(r^m)$. D'abord $r^k \cdot r^m = r^m$, ensuite

$$(sr^k) \cdot r^m = sr^k r^m r^{-k} s^{-1} = sr^m s^{-1} = r^{-m}. \tag{20.544}$$

Donc

$$C(r^m) = \{r^m, r^{-m}\}. \tag{20.545}$$ EqVEfExsi

À ce niveau il faut faire deux remarques. D'abord si $m > \frac{n}{2}$, alors $C(r^m)$ est la classe de C^{n-m} avec $n-m < \frac{n}{2}$. Donc les classes que nous avons trouvées sont uniquement à lister avec $m < \frac{n}{2}$. Ensuite si $m = \frac{n}{2}$ alors $r^m = r^{-m}$ et la classe est un singleton. Cela n'arrive que si n est pair.

Nous passons ensuite à $C(s)$. Nous avons

$$r^k \cdot s = r^k s r^{-k} = ssr^k sr^{-k} = sr^{-k} r^{-k} = sr^{n-2k}, \tag{20.546}$$

et

$$(sr^k) \cdot s = \underbrace{sr^k s}_{r^{-k}} r^{-k} s^{-1} = r^{-2k} s = r^{n-2k} s = sr^{(n-1)(n-2k)} = sr^{n^2-2kn-n+2k} = sr^{2k}. \tag{20.547}$$

donc

$$C(s) = \{sr^{n-2k}, sr^{2k}\}_{k=0,\dots,n-1}. \tag{20.548}$$

Ici aussi l'écriture n'est pas optimale : peut-être que pour certains k il y a des doublons. Nous reportons l'écriture exacte à la discussion plus bas qui distinguera n pair de n impair. Notons juste que si n est pair, l'élément sr n'est pas dans la classe $C(s)$.

Nous en faisons donc à présent le calcul en gardant en tête le fait qu'il n'a de sens que si n est pair. D'abord

$$s \cdot (sr) = ssrs = rs = sr^{n-1}. \tag{20.549}$$

Ensuite

$$(sr^k) \cdot (sr) = sr^k srr^{-k} s = r^{-2k+1} s = sr^{2k-1}. \tag{20.550}$$

Avec $k = \frac{n}{2}$, cela rend $s \cdot (sr)$, donc pas besoin de le recopier. Nous avons

$$C(sr) = \{sr^{2k-1}\}_{k=1,\dots,n-1}. \tag{20.551}$$

20.11.14.5 Le compte pour n pair

SubsubsecROVmHuM

Si n est pair, nous avons les classes

$$C(1) = \{1\} \qquad 1 \text{ élément} \tag{20.552a}$$
$$C(r^m) = \{r^m, r^{-m}\} = \{r^m, r^{n-m}\} \qquad \text{pour } 0 < m < \frac{n}{2} \qquad \frac{n}{2} - 1 \text{ fois 2 éléments} \tag{20.552b}$$
$$C(r^{n/2}) = \{r^{n/2}\} \qquad 1 \text{ élément} \tag{20.552c}$$
$$C(s) = \{sr^{2k}\}_{k=0,\dots,\frac{n}{2}-1} \qquad \frac{n}{2} \text{ éléments} \tag{20.552d}$$
$$C(sr) = \{sr^{2k+1}\}_{k=0,\dots,\frac{n}{2}-1} \qquad \frac{n}{2} \text{ éléments.} \tag{20.552e}$$

Au total nous avons bien listé $2n$ éléments comme il se doit, dans $\frac{n}{2} + 3$ classes différentes.

[59] Vous notez qu'ici nous utilisons un argument qui utilise la définition de D_n comme isométries de $\mathbb{R}^2$. Si nous avions voulu à tout prix nous limiter à la définition « abstraite » en termes de générateurs, il aurait fallu trouver autre chose.

20.11.14.6 Le compte pour n impair

GJIzDEP

Si n est impair, nous avons les classes

$$C(1) = \{1\} \qquad 1 \text{ élément} \tag{20.553a}$$

$$C(r^m) = \{r^m, r^{-m}\} = \{r^m, r^{n-m}\} \qquad \text{pour } 0 < m < \frac{n-1}{2} \qquad \frac{n-1}{2} \text{ fois 2 éléments} \tag{20.553b}$$

$$C(s) = \{sr^k\}_{k=0,\dots,n-1} \qquad n \text{ éléments} \tag{20.553c}$$

Au total nous avons bien listé $2n$ éléments comme il se doit, dans $\frac{n+3}{2}$ classes différentes.

20.11.15 Applications : du dénombrement

20.11.15.1 Le jeu de la roulette

pTqJLY

Soit une roulette à n secteurs que nous voulons colorier en q couleurs[640]. Nous voulons savoir le nombre de possibilités à rotations près. Soit d'abord E l'ensemble des coloriages possibles sans contrainte ; il y a naturellement q^n possibilités. Sur l'ensemble E, le groupe cyclique G des rotations d'angle $2\pi/n$ agit. Deux coloriages étant identiques si ils sont reliés par une rotation, la réponse à notre problème est donnée par le nombre d'orbites de l'action de G sur E qui sera donnée par la formule du théorème de Burnside 5.27.

Nous devons calculer $\text{Card}\big(\text{Fix}(g)\big)$ pour tout $g \in G$. Soit g, un élément d'ordre d dans G. Si g agit sur la roulette, chaque secteur a une orbite contenant d éléments. Autrement dit, g divise la roulette en n/d secteurs. Un élément de E appartenant à $\text{Fix}(g)$ doit colorier ces n/d secteurs de façon uniforme ; il y a $q^{n/d}$ possibilités.

Il reste à déterminer le nombre d'éléments d'ordre d dans G. Un élément de G est donné par un nombre complexe de la forme $e^{2ik\pi/n}$. Les éléments d'ordre d sont les racines primitives[60] d-ièmes de l'unité. Nous savons que –par définition– il y a $\varphi(d)$ telles racines primitives de l'unité. Bref il y a $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans G.

La formule de Burnside nous donne maintenant le nombre d'orbites :

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)q^{n/d}. \tag{20.554}$$

Cela est le nombre de coloriage possibles de la roulette à n secteurs avec q couleurs.

20.11.15.2 L'affaire du collier

siOQlG

Nous avons maintenant des perles de q couleurs différentes et nous voulons en faire un collier à n perles. Cette fois non seulement les rotations donnent des colliers équivalents, mais en outre les symétries axiales (il est possible de retourner un collier, mais pas une roulette). Le groupe agissant sur E est maintenant le groupe diédral[61] D_n conservant un polygone à n sommets.

Nous devons séparer le cas n impair, du cas n pair.

Si n est impair, alors les axes de symétries passent par un sommet et par le milieu du côté opposé. Le groupe D_n contient n symétries axiales. Nous avons donc maintenant

$$|G| = 2n. \tag{20.555}$$

Nous écrivons la formule de Burnside

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}\sum_{g\in G}\text{Card}\big(\text{Fix}(g)\big). \tag{20.556}$$

Si g est une rotation, le travail est déjà fait. Si g est une symétrie, nous avons le choix de la couleur du sommet par lequel passe l'axe et le choix de la couleur des $(n-1)/2$ paires de sommets. Cela fait

$$qq^{(n-1)/2} = q^{\frac{n+1}{2}} \tag{20.557}$$

possibilités. Nous avons donc

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n} q^{n/d}\varphi(d) + nq^{\frac{n+1}{2}}\right). \tag{20.558}$$

[60] Une racine non primitive 8ième de l'unité est par exemple i. Certes $i^8 = 1$, mais $i^4 = 1$ aussi. Le nombre i est d'ordre 4.
[61] Définition 20.182.

Si n est pair, les choses se compliquent un tout petit peu. En plus de symétries axiales passant par les milieux de deux côtés opposés, il y a les axes passant par deux sommets opposés. Pour colorier un collier en tenant compte d'une telle symétrie, nous pouvons choisir la couleur des deux perles par lesquelles passe l'axe ainsi que la couleur des $(n-2)/2$ paires de perles. Cela fait en tout

$$q^2 q^{\frac{n-2}{2}} = q^{\frac{n+2}{2}}. \tag{20.559}$$

Le groupe G contient $n/2$ tels axes.

Notons que cette fois G ne contient plus que $n/2$ symétries passant par un sommet et un côté. L'ordre de G est donc encore $2n$. La formule de Burnside donne

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)q^{n/d} + \frac{n}{2}q^{(n+2)/2} + \frac{n}{2}q^{n/2}\right). \tag{20.560}$$

20.11.16 Classification

THOooRORQooTDWFdv

Théorème 20.201 ([629]).
Toute isométrie du plan $(\mathbb{R}^2, d)$ est une composition d'au plus 3 réflexions.

Démonstration. Encore une fois nous décomposons la preuve en fonction du nombre de points fixes.

(1) **Si f n'a pas de point fixe** Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Nous considérons le segment $[x, f(x)]$ et nous nommons l sa médiatrice. Par construction, $f(x) = \sigma_l(x)$. Nous posons $g = \sigma_l \circ f$, et nous avons

$$g(x) = x. \tag{20.561}$$

Donc nous avons $f = \sigma_l \circ g$ avec $x \in \text{Fix}(g)$.

(2) **Si f a un unique point fixe** Soit x cet unique point fixe. Soit $y \neq x$ et l la médiatrice de $[y, f(y)]$. En posant $g = \sigma_l \circ f$ nous avons

$$g(y) = y \tag{20.562}$$

et $g(x) = x$ parce que

$$d\big(x, f(y)\big) = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y), \tag{20.563}$$

ce qui donne que x est à égale distance de y et de $f(y)$, c'est-à-dire que $x \in l$ et par conséquent $g(x) = (\sigma_l \circ f)(x) = \sigma_l(x) = x$.

Donc g fixe x et y. Par conséquent, g fixe toute la droite (xy).

(3) **Si f fixe une droite** Soit l une droite fixée par f. Alors f est soit σ_l soit l'identité par le lemme 20.126.

(4) **Conclusion** Nous avons montré que si $\text{Fix}(f)$ a pour dimension m, alors il existe une droite pour laquelle $f = \sigma_l \circ g$ avec $\dim\big(\text{Fix}(g)\big) > m$. Donc il faut au maximum trois pas pour avoir $\dim\big(\text{Fix}(g)\big) = 2$ c'est-à-dire pour avoir $g = \text{Id}$.

□

DEFooJEOYooNwYtuQ

Définition 20.202.
*Une **réflexion glissée** est une transformation du plan de la forme $\tau_v \circ \sigma_\ell$ où le vecteur v est parallèle à la droite ℓ.*

THOooVRNOooAgaVRN

Théorème 20.203 ([629]).
Les isométries du plan $(\mathbb{R}^2, d)$ sont exactement

(1) l'identité (composée de 0 réflexions),

(2) les réflexions,

(3) les translations (composées de 2 réflexions d'axes parallèles),

(4) les rotations (composées de 2 réflexions d'axes non parallèles),

(5) les réflexions glissées (composées de 3 réflexions)

Démonstration. Nous savons déjà que $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est une composée de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

(1) **Zéro réflexion** Alors c'est l'identité. Ce n'est pas très profond.

(2) **Une réflexion** Alors f est une réflexion. Toujours pas très profond.

(3) **Deux réflexions** Soit $f = \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}$. Maintenant ça s'approfondit un bon coup.

Nous supposons d'abord que $\ell_1 \parallel \ell_2$. Dans ce cas nous allons prouver que $f = \tau_{2v}$ où v est le vecteur perpendiculaire à ℓ_1 tel que $\ell_1 + v = \ell_2$. Nous allons utiliser le lemme 20.123 pour montrer que $\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} = \tau_{2v}$. Nous avons

$$\ell_1 = \ell_0 + w \tag{20.564a}$$
$$\ell_2 = \ell_0 + w + v \tag{20.564b}$$

où w est un vecteur perpendiculaire à ℓ_1 et ℓ_0 est la droite passant par l'origine et parallèle à ℓ_1 et ℓ_2. Avec cela,

$$\begin{aligned}(\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2})(x) &= \sigma_{\ell_1}\big(\sigma_{\ell_0}(x) + 2w\big) && (20.565a)\\ &= \sigma_{\ell_0}\big(\sigma_{\ell_0}(x) + 2w\big) + 2(v + w) && (20.565b)\\ &= x + \underbrace{\sigma_{\ell_0}(2w)}_{-2w} + 2v + 2w && (20.565c)\\ &= x + 2v. && (20.565d)\end{aligned}$$

Donc si f est composée de deux réflexions d'axes parallèles, alors f est une translation.

Toujours dans le cas où f est composée de deux réflexions, nous supposons que $f = \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$ avec ℓ_1 et ℓ_2 non parallèles. Nous notons O le point d'intersection, et nous allons voir que $f = R_O(2\alpha)$, où α est l'angle de ℓ_1 à ℓ_2 donné par le lemme 20.174.

Soit $x \in \ell_1$. Alors

$$f(x) = \sigma_{\ell_2}(x), \tag{20.566}$$

et le lemme 20.177 nous donne un moyen de calculer $\sigma_{\ell_2}(x)$ parce que ℓ_1 est une droite passant par x et coupant ℓ_2 au point O. Le lemme dit que $\sigma_{\ell_2}(x) = R_O(2\alpha)$. Remarque : c'est bien 2α et non -2α parce qu'il s'agit de l'angle de ℓ_2 à ℓ_1 ; il y a inversion des numéros entre ici et l'énoncé du lemme.

Nous avons donc bien $f(x) = R_O(2\alpha)x$ pour $x \in \ell_1$.

Si $y \in \ell_2$ alors

$$f(y) = \sigma_{\ell_2}\big(R_O(-2\alpha)y\big) \tag{20.567}$$

Nous posons $z = \sigma_{\ell_1}(y) = R_O(-2\alpha)y$. Soit la droite ℓ_3 passant par O et z. Puisque $R_O(2\alpha)z = y \in \ell_2$, l'angle de ℓ_3 à ℓ_2 est 2α. Par conséquent

$$\sigma_{\ell_2}(z) = R_O\big(-2\times(-2\alpha)\big)z = R_O(4\alpha)z = R_O(4\alpha)R_O(-2\alpha)y = R_O(2\alpha)y. \tag{20.568}$$

Donc les transformations f et $R_O(2\alpha)$ coïncident pour tous les points des droites ℓ_1 et ℓ_2, qui ne sont pas parallèles. Cela prouve que $f = R_O(2\alpha)$.

(4) **Trois réflexions** Nous écrivons $f = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$. Nous allons transformer cela progressivement en une symétrie glissée en passant par plusieurs étapes :

ITEMooHVYCooPhFMiv

(4a) $f = \sigma_\ell \circ \tau_v$,

ITEMooUKGLooFlCcjt

(4b) $f = \tau_v \circ \sigma_\ell$,

ITEMooWUCWooZSjofe

(4c) $f = \tau_v \circ \sigma_\ell$ avec $v \parallel \ell$.

À chacune de ces étapes, v et ℓ vont changer. La dernière est une réflexion glissée.

Nous commençons par supposer $\ell_2 \parallel \ell_3$. Dans ce cas, $\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2}$ est une translation, comme nous l'avons déjà vu. Alors $f = \tau_v \circ \sigma_{\ell_1}$ et nous sommes déjà dans le cas (4b).

Nous supposons que ℓ_2 n'est pas parallèle à ℓ_3. Dans ce cas, si $O = \ell_2 \cap \ell_3$ nous avons

$$\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} = R_O(2\alpha) \tag{20.569}$$

où α est l'angle de ℓ_2 à ℓ_3. En réalité tant que l'angle de ℓ_2' à ℓ_3' est α nous avons

$$\sigma_{\ell_3'} \circ \sigma_{\ell_2'} = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} = R_O(2\alpha). \tag{20.570}$$

Nous choisissons ℓ_2' parallèle à ℓ_1, de telle sorte que $\sigma_{\ell_2'} \circ \sigma_{\ell_1}$ soit une translation. Alors nous avons

$$f = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_3'} \circ \sigma_{\ell_2'} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_3} \circ \tau_v. \tag{20.571}$$

où v est le vecteur de la translation en question.

Nous avons donc prouvé que toute composition de trois réflexions peut être écrite soit sous la forme (4a) soit sous la forme (4b).

Nous prouvons à présent que toute transformation de la forme (4a) peut être écrite sous la forme (4b). Plus précisément nous allons prouver que si ℓ est une droite, v un vecteur et ℓ_0 la droite parallèle à ℓ passant par l'origine, alors

$$\sigma_\ell \circ \tau_v = \tau_{\sigma_{\ell_0}(v)} \circ \sigma_l \tag{20.572}$$

D'abord nous savons que $\sigma_\ell(x) = \sigma_{\ell_0}(x) + 2w$ où w est le vecteur tel que $\ell = \ell_0 + w$. Ensuite c'est un simple calcul utilisant le fait que σ_{ℓ_0} est linéaire :

$$(\sigma_\ell \circ \tau_v)(x) = \sigma_l(x + v) = \sigma_{\ell_0}(x) + \sigma_{\ell_0}(v) + 2w, \tag{20.573}$$

et

$$(\tau_{\sigma_{\ell_0}(v)} \circ \sigma_\ell)(x) = \sigma_{\ell_0}(v) + \sigma_\ell(x) = \sigma_{\ell_0}(v) + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w. \tag{20.574}$$

L'égalité est prouvée.

Nous montrons maintenant que toute transformation de la forme (4b) peut être mise sous la forme (4c). Soit donc $f = \tau_v \circ \sigma_\ell$ où v et ℓ ne sont pas spécialement parallèles.

Pour cela nous décomposons $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \perp \ell$ et $v_2 /\!\!/ \ell$ et nous posons $\ell' = \ell + \frac{1}{2}v_1$. Nous montrons que

- $\tau_v \circ \sigma_\ell = \tau_{v_2} \circ \sigma_{\ell'}$
- $v_2 /\!\!/ \ell'$.

Pour le deuxième point, $v_2 /\!\!/ \ell$ et bien entendu $\ell' /\!\!/ \ell$. Donc $v_2 /\!\!/ \ell'$.

Soit ℓ_0 la droite parallèle à ℓ et ℓ' et passant par l'origine. Soit aussi le vecteur w tel que $\ell = \ell_0 + w$. Alors nous avons

$$\begin{cases} \sigma_\ell = \sigma_{\ell_0} + 2w & \text{(20.575a)} \\ \sigma_{\ell'} = \sigma_{\ell_0} + 2w + v_1 & \text{(20.575b)} \end{cases}$$

Nous avons

$$(\tau_v \circ \sigma_\ell)(x) = v + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w \tag{20.576}$$

et

$$\begin{aligned} (\tau_{v_2} \circ \sigma_{\ell'})(x) &= v_2 + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w + v_1 && \text{(20.577a)} \\ &= \sigma_{\ell_0}(x) + v + 2w && \text{(20.577b)} \end{aligned}$$

où dans la dernière ligne, nous avons regroupé $v_1 + v_2 = v$. Et voilà.

□

20.11.17 Classification des isométries de $\mathbb{R}$

DEFooAROHooTrRfgQ

Définition 20.204 (Réflexion par rapport à un point)**.**
*Soit $x \in \mathbb{R}$; nous notons σ_x la **réflexion** par rapport à x, c'est-à-dire*

$$\sigma_x(y) = 2x - y. \tag{20.578}$$

Théorème 20.205 ([629])**.**
Toute isométrie de $\mathbb{R}$ est composée d'au plus 2 réflexions. Plus précisément toute isométrie de $\mathbb{R}$ est dans une des trois catégories suivantes :

- *l'identité (0 réflexion),*
- *les réflexions,*

- *les translations (2 réflexions)*

Démonstration. Nous divisons la preuve en fonction du nombre de points fixés par l'isométrie $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$.

(1) **f fixe deux points distincts** Alors elle fixe l'espace affine engendré par ces deux points par la proposition 20.109. Donc f fixe tout $\mathbb{R}$, et est l'identité.

(2) **f fixe un unique point** Soit x l'unique point fixé par f et considérons $y \neq x$. Puisque $x = f(x)$ et que f est une isométrie,

$$d\big(x, f(y)\big) = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y). \tag{20.579}$$

Donc $f(y)$ est à égale distance de x que de y. Autrement dit, $f(y)$ est, soit y, soit $\sigma_x(y)$. Mais comme x est unique point fixe, $f(y) = \sigma_x(y)$. Ce raisonnement étant valable pour tout $y \neq x$, nous avons $f = \sigma_x$.

(3) **f n'a pas de point fixe** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y = \frac{x+f(x)}{2}$. Nous posons $g = \sigma_y \circ f$. Alors x est un point fixe de g parce que

$$g(x) = \sigma_y\big(f(x)\big) = 2y - f(x) = x. \tag{20.580}$$

Donc, soit g est l'identité, soit g est une réflexion (par les points précédents). La possibilité $g = \mathrm{Id}$ est exclue parce que cela donnerait $f = \sigma_y$ alors que f n'a pas de point fixe. Donc g est une réflexion ; et comme x est un point fixe de g nous avons $g = \sigma_x$. Au final

$$f = \sigma_y \circ \sigma_x. \tag{20.581}$$

Montrons que cela implique que f est une translation :

$$\sigma_y\sigma_x(z) = \sigma_y(2x - z) = 2y - 2x + z = z + 2(y - x). \tag{20.582}$$

Donc $\sigma_y \circ \sigma_x$ est la translation de vecteur $2(y - x)$.

□

20.11.18 Isométries du tétraèdre régulier

PROPooHTBIooTJQNZt

Proposition 20.206.
Soient un tétraèdre régulier[62] *T ainsi qu'une application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui vérifie*

(1) f est affine[63]

(2) f est bijective (sur $\mathbb{R}^3$)

(3) $f(T) \subset T$.

Alors

ITEMooGAVPooVPESod

(1) Il existe une bijection $\alpha\colon \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ telle que $f(d_i) = d_{\alpha(i)}$.

ITEMooWRINooTlmXyI

(2) Pour la même bijection $\alpha\colon \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ nous avons $f(a_i) = a_{\alpha(i)}$.

ITEMooGPNPooZiEoLk

(3) Il existe une bijection $\beta\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ telle que $f(s_i) = s_{\beta(i)}$.

Autrement dit, f agit comme une permutation[64] *sur l'ensemble des sommets de T.*

Démonstration. Puisque d_i est une droite et que f est affine, l'ensemble $f(d_i)$ est une droite de $\mathbb{R}^3$ (proposition 14.146).

(1) **Pour (1)** Puisque $f(T) \subset T$, la partie $f(a_i)$ contient une infinité de points alignés dans T (parce que a_i contient une infinité de points et f est une bijection de $\mathbb{R}^3$).

Comme le tétraèdre n'a que 6 arrêtes, il y a forcément une des arrêtes qui contient au moins deux points de $f(a_i)$. Soit $a_{\beta(i)}$ une arrête qui contient deux points de $f(a_i)$. En particulier $d_{\alpha(i)}$ contient deux points de $f(a_i)$, et donc de $f(d_i)$. Donc $f(d_i) = d_{\alpha(i)}$.

[62] Définition 14.183
[63] Définition 10.155.
[64] Une permutation est une bijection, définition 2.2.

(2) **Pour (2)** L'ensemble $f(a_i)$ est contenu dans $d_{\alpha(i)} \cap T = a_{\alpha(i)}$ (lemme 14.185). Nommons s_1 et s_2 les deux sommets de T sur a_i. Soit $k \in \{1, 2\}$. Comme les sommets sont sur plusieurs arrêtes, il existe $j \neq i$ tel que $s_k = a_i \cap a_j$. Nous avons alors

$$f(s_k) \in f(a_i) \cap f(a_j) \subset a_{\alpha(i)} \cap a_{\alpha(j)}. \tag{20.583}$$

EQooWJXRopAHVQpW

Mais nous avons déjà vu que les seules intersections des segments sont les sommets (lemme 14.187). Donc $f(s_k)$ est un sommet de T.

Nous avons prouvé que $f(a_i)$ contient deux sommets sur $a_{\alpha(i)}$ donc il contient tout $a_{\alpha(i)}$. Cela prouve que $f(a_i) = f(a_{\alpha(i)})$.

(3) **Pour (3)** Nous avons déjà mentionné, juste en-dessous de (20.583) que l'image d'un sommet doit être un sommet. Nous avons donc une application $\beta\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ telle que $f(s_i) = s_{\beta(i)}$. Puisque f est injective, β est injective. Par principe des tiroirs, cette application doit également être surjective.

□

PROPooVNLKooOjQzCj

Proposition 20.207 (Isométries affines du tétraèdre régulier)**.**
Soient T un tétraèdre régulier et $\mathrm{Isom}(T)$ *son groupe d'isométries affines*[65]*. Alors*

$$\mathrm{Isom}(T) \simeq S_4 \tag{20.584}$$

où S_4 est le groupe des permutations de quatre objets.

Démonstration. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une bijection affine (ce qui est le cas d'une isométrie affine), alors la proposition 20.206(3) donne une bijection $\beta\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ des sommets de T. Si nous numérotons les sommets x_1,..., x_4, nous obtenons un morphisme de groupe $\varphi\colon \mathrm{Isom}(T) \to S_4$ qui envoie g sur la permutation qui envoie 1 sur le numéro du sommet $g(x_1)$, 2 sur le numéro du sommet $g(x_2)$, etc.

(1) **Le morphisme φ est injectif** Supposons $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Alors $g_1^{-1} \circ g_2$ est une isométrie de $(\mathbb{R}^3, d)$ qui fixe les quatre sommets. Une application affine $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fixant 4 point est l'identité par la proposition 10.157. Donc $g_1^{-1} \circ g_2 = \mathrm{Id}$, ce qui prouve que $g_1 = g_2$. Vous noterez que nous utilisons l'unicité de l'inverse dans un groupe.

(2) **φ est surjectif**

Nous savons que S_4 est engendré par les transpositions (proposition 2.116). Or les transpositions sont dans l'image de φ. En effet, notons les sommets de notre tétraèdre par A, B, C et D et considérons la transposition $A \leftrightarrow B$. Elle est l'image par φ de la réflexion selon le plan σ, médiateur du segment $[A, B]$. Pour nous assurer de cela, nous devons nous assurer que C et D appartiennent à σ. C'est le contenu du lemme 14.188.

(3) **Conclusion** L'application φ est un morphisme bijectif, c'est-à-dire un isomorphisme.

□

20.11.19 Représentation de S_4 via les isométries du tétraèdre

SUBSECooVEASooDUbsBh

20.208.
Lorsque le tétraèdre a son barycentre en l'origine de $\mathbb{R}^3$, l'isomorphisme $\varphi\colon \mathrm{Isom}(T) \to S_4$ donne une représentation de dimension 3 de S_4. Nous avons calculé les caractères de S_4 en la section 18.5 sans avoir besoin de savoir que l'une des représentations de dimension 3 est celle que nous venons de trouver via le groupe des isométries du tétraèdre. Nous allons cependant également y calculer les caractères de la représentation φ, pour le sport.

Une des représentations trouvées (la représentation ρ_s) peut être vue comme le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries affine du tétraèdre grâce à la proposition 20.207 qui donne un isomorphisme de groupe $S_4 \simeq \mathrm{Iso}(T)$ lorsque T est un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$.

Si le barycentre de T est situé à l'origine de $\mathbb{R}^3$, alors les éléments de $\mathrm{Isom}(T)$ sont des applications linéaires parce que

- les affinités laissent invariantes les barycentres (proposition 13.43),

[65] Une isométrie est une isométrie, et une application est affine dans la définition 10.155.

- les affinités qui laissent l'origine invariante sont linéaires (corolaire 13.60).

Nous allons à présent calculer la trace de cette représentation, en utilisant le fait que nous la connaissions explicitement. Nous savons que les caractères sont constants sur les classes de conjugaison ; nous allons donc écrire une matrice par classe de conjugaison (qui sont données dans l'exemple 2.112).

Pour tout cela nous allons considérer un tétraèdre dont l'isobarycentre est en $(0,0,0)$ et une base de $\mathbb{R}^3$ formée de trois sommets e_1, e_2 et e_3. Puisque l'isobarycentre des quatre sommets est en $(0,0,0)$, le quatrième sommet est forcément le point de coordonnées $e_4(-1,-1,-1)$, de telle sorte que $e_1+e_2+e_3+e_4=0$.

Les transpositions Quelle isométrie de $\mathbb{R}^3$ permute deux sommets du tétraèdre sans bouger les autres ? Pour permuter les sommets e_1 et e_2 en laissant e_3 et e_4, c'est le symétrie par rapport au plan médiateur de $[e_1,e_2]$. Ce plan passe par les sommets e_3 et e_4, parce que le tétraèdre étant régulier, les points e_3 et e_4 sont équidistants de e_1 et e_2. Le lemme 14.188 dit qu'alors, ces points font partie du plan médiateur.

Dans notre base, la matrice de la transposition précédemment nommée (12) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{20.585}$$

dont la trace est 1. Donc $\chi_s(12)=1$.

Les bitranspositions La bitransposition $(12)(34)$ est le produit des transpositions selon les plans médiateurs de $[e_1,e_2]$ et $[e_3,e_4]$. Ces deux plans sont perpendiculaires, et l'intersection est la droite qui passe par les milieux. Cette droite est perpendiculaire aux deux segments en même temps. La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{20.586}$$

parce que $e_1\mapsto e_2$, $e_2\mapsto e_1$ et $e_3\mapsto e_4$. Pour rappel, la matrice est formée des images des vecteurs de base. Cela donne

$$\chi_s\big((12)(34)\big)=-1. \tag{20.587}$$

Les 3-cycles La symétrie qui permute cycliquement les points e_1, e_2 et e_3 est la rotation d'angle[66] $2\pi/3$ dans le plan formé par les extrémités de ces trois vecteurs. Heureusement, la trace est invariante par changement de base ; donc nous pouvons calculer la trace d'une rotation d'angle $2\pi/3$ dans n'importe quelle base. Par exemple :

$$\chi_s\big((12)(34)\big)=\operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ 0 & -\sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}=1+2\cos(2\pi/3)=0. \tag{20.588}$$

Notons que, sans cette interprétation géométrique, nous y arrivons aussi facilement : dans notre base le 3-cycle est $e_1\mapsto e_2\mapsto e_3\mapsto e_1$, donc la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20.589}$$

dont la trace est manifestement nulle : $\chi_s\big((123)\big)=0$.

Le 4-cycle Il réalise $e_1\mapsto e_2\mapsto e_3\mapsto e_4\mapsto e_1$, dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{20.590}$$

et la trace est $\chi_s\big((1,2,3,4)\big)=-1$.

Nous avons retrouvé les caractères de la représentation ρ_s, et nous pouvons vérifier qu'elle est irréductible.

[66] Angle d'une rotation, définition 20.139.

20.12 Transformations de Lorentz

Nous considérons dans cette section un nombre réel $c > 0$ ainsi que l'espace $\mathbb{R}^2$ muni du produit pseudo-scalaire[67] donné par la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{20.591}$$

Et pour faire plus vrai, nous notons (x_0, x_1) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi

$$x \cdot y = c^2 x_0 y_0 - x_1 y_1. \tag{20.592}$$

Nous insistons sur le fait que cela n'est pas un produit scalaire.

LEMooPZPZooVAdPVj

Lemme 20.209 ([1]).
Soit $c > 0$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon]-c, c[&\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \frac{-v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{20.593}$$

est une bijection.

Démonstration. Nous commençons par mentionner le fait que φ est continue du fait que le dénominateur ne s'annule pas. Une petite étude de fonction montre que

$$\lim_{v \to -c} \varphi(v) = +\infty, \tag{20.594}$$

et

$$\lim_{v \to c} \varphi(v) = -\infty, \tag{20.595}$$

et

$$\varphi'(v) = -\frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^2/c^3}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} < 0. \tag{20.596}$$

Tout cela fait que φ est bijective (entre autres par le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 et le théorème dérivée et croissance 14.213). □

LEMooUZFKooSIjery

Lemme 20.210.
La forme bilinéaire

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x, y &\mapsto x \cdot y \end{aligned} \tag{20.597}$$

est non dégénérée[68].

Démonstration. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$b\big((x_0, x_1), (y_0, y_1)\big) = 0 \tag{20.598}$$

pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$c^2 x_0 y_0 - x_1 y_1 = 0. \tag{20.599}$$

En écrivant cela avec $(y_0, y_1) = (1, 0)$ puis $(0, 1)$ nous obtenons immédiatement que $(x_0, x_1) = (0, 0)$. □

THOooYHDWooWxVovH

Théorème 20.211.
Soit une bijection[69] $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \tag{20.600}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$. Alors :

(1) f est linéaire.

[67] Définition 10.164.
[68] Définition 10.125.
[69] À mon avis, il y a moyen d'affaiblir cette hypothèse. Écrivez-moi si vous avez une idée.

(2) Il existe un unique choix de $(\xi, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ *tel que la matrice de* f *ait la forme*

$$f = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cosh(\xi) & \frac{\sigma_1\sigma_2}{c} \sinh(\xi) \\ c \sinh(\xi) & \sigma_2 \cosh(\xi) \end{pmatrix}. \tag{20.601}$$

(3) Il existe un unique $v \in]-c, c[$ *tel que la matrice de* f *ait la forme*

$$f = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{\sigma_1\sigma_2}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{\sigma_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}. \tag{20.602}$$

Démonstration. Puisque notre produit pseudo-scalaire est non dégénéré (lemme 20.210), le fait que f soit linéaire est la proposition 10.153. Nous posons

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{20.603}$$

et, conformément à la proposition 10.158, nous imposons $A^t \eta A = \eta$. Après un petit produit matriciel nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} c^2\alpha^2 - \gamma^2 & c^2\alpha\beta - \gamma\delta \\ c^2\alpha\beta - \gamma\delta & c^2\beta^2 - \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{20.604}$$

Voilà quatre équations à résoudre pour les quatre inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Déjà les équations des termes anti-diagonaux sont les mêmes. Nous recopions le reste :

$$\begin{cases} c^2\alpha^2 - \gamma^2 = c^2 & \text{(20.605a)} \\ c^2\alpha\beta - \gamma\delta = 0 & \text{(20.605b)} \\ c^2\beta^2 - \delta^2 = 1. & \text{(20.605c)} \end{cases}$$

C'est le moment d'utiliser la proposition 17.147. La relation (20.605a) donne

$$\alpha^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 = 1, \tag{20.606}$$

ce qui implique l'existence d'un unique[70] $\xi_1 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1 \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\gamma = c \sinh(\xi_1) \tag{20.607a}$$
$$\alpha = \sigma_1 \cosh(\xi_1). \tag{20.607b}$$

La relation (20.605c) implique quant à elle l'existence de $\xi_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_2 \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\delta = \sigma_2 \cosh(\xi_2) \tag{20.608a}$$
$$\beta = \frac{1}{c} \sinh(\xi_2). \tag{20.608b}$$

Nous substituons maintenant toutes les valeurs (20.607) et (20.608) dans (20.605b). Cela donne

$$\sigma_1 \cosh(\xi_1) \sinh(\xi_2) = \sigma_2 \sinh(\xi_1) \cosh(\xi_2). \tag{20.609}$$

Nous mettons cette relation au carré et nous substituons $\cosh(\xi_1)^2 = 1 + \sinh^2(\xi_1)$. Ce que nous trouvons est

$$\sinh(\xi_1)^2 = \sinh(\xi_2)^2, \tag{20.610}$$

qui implique que $\xi_1 = \pm\xi_2$. Nous posons donc $\xi_2 = \sigma_3\xi_1$ pour un certain $\sigma_3 \in \{\pm 1\}$. Cela nous permet d'alléger la notation et d'écrire ξ au lieu de ξ_1.

Nous remettons la valeur $\xi = \xi_1 = \sigma_3\xi_2$ dans l'équation (20.609) en tenant compte du fait que sinh est impaire et cosh est paire :

$$\sigma_1\sigma_3 \cosh(\xi) \sinh(\xi) = \sigma_2 \sinh(\xi) \cosh(\xi). \tag{20.611}$$

Et cela nous enseigne que $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$.

Jusqu'à présent nous avons prouvé qu'il existe un unique $\xi \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm 1\}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cosh(\xi) & \frac{\sigma_1\sigma_2}{c} \sinh(\xi) \\ c \sinh(\xi) & \sigma_2 \cosh(\xi) \end{pmatrix}. \tag{20.612}$$

[70] Par 17.147.

Nous utilisons à présent la bijection du lemme 20.209. Il existe un unique $v \in]-c,c[$ tel que $\sinh(\xi) = \varphi(v)$. En utilisant $\cosh(\xi)^2 = 1 + \varphi(v)^2$, nous trouvons

$$\cosh(\xi)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{20.613}$$

Mais comme le cosinus hyperbolique est toujours strictement positif, nous pouvons prendre la racine carrée des deux côtés :

$$\cosh(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{20.614}$$

En substituant dans (20.612), nous trouvons le résultat annoncé. □

20.12.1 Sous-groupe fini d'isométries du plan

THOooKDMUooUxQqbB

Théorème 20.212 ([641]).
Soit un groupe fini G d'isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ contenant n éléments.

ITEMooYEONooCOMpeb

(1) Il existe un point $C \in \mathbb{R}^2$ fixé par tous les éléments de G.

ITEMooGELWooFFAqkc

(2) Si G ne contient pas de réflexion, alors il est cyclique[71] *et engendré par la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de C.*

ITEMooDHKEooFpCfmX

(3) Si G contient au moins une réflexion, et si C est un point fixe de G, alors

ITEMooGQZTooJIPPLtyf

(3a) toutes les réflexions ont un axe qui passe par C,

ITEMooKPQRooLquSiQ

(3b) n est pair,

ITEMooCHSWooHpDGHf

(3c) Si σ est une réflexion dans G, alors nous avons $G = \mathrm{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big)$ où $R_C(\theta)$ est la rotation d'angle θ autour de C,

ITEMooROUYooRghvMv

(3d) G est isomorphe au groupe diédral $D_{n/2}$.

Démonstration. Soit un groupe fini G constitué d'isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$. Nous prouvons le théorème point par point.

(1) **Pour (1)** C'est la proposition 20.106.

(2) **Questions de réflexions** Le théorème 20.201 nous dit que les éléments de G sont des compositions d'au maximum 3 réflexions.

(3) **Exclure trois réflexions** Il n'est pas possible que G contienne un élément composé de trois réflexions. En effet, les composées de trois réflexions, par le théorème 20.203 sont des réflexions glissées[72], c'est-à-dire des transformations de la forme $g = \tau_v \circ \sigma_\ell$ où v est un vecteur parallèle à la droite ℓ. Si $x \in \ell$, alors

$$g(x) = \tau_v(x) = x + v, \tag{20.615}$$

de telle sorte que $g^k(x) = x + kv$, qui signifie que tous les g^k sont différents. Le groupe G ne peut pas être fini si il contient une réflexion glissée.

(4) **G^+ et G^-** Pour la même raison que celle qui exclut les réflexions glissées, G ne peut pas contenir de translation. Le théorème 20.203 nous donne la liste des possibilités. Après exclusion des translations et des réflexions glissées, il reste :

- l'identité,
- les rotations,
- les réflexions.

Nous notons G^+ la partie de G contenant l'identité et les rotations et G^- celle contenant les réflexions. Notons que G^+ n'est pas vide parce qu'il contient au moins l'identité, tandis que G^- peut être vide, mais n'est certainement pas un groupe.

[71] Définition 2.149.
[72] Définition 20.202.

(5) **Même nombre d'éléments** Nous prouvons à présent que si G^- est non vide, alors il a le même nombre d'éléments que G^+. Un élément de G^- est une réflexion. Soit $\sigma \in G^-$. Nous prouvons que

$$\begin{aligned}\varphi\colon G^+ &\to G^-\\ f &\mapsto \sigma \circ f\end{aligned} \tag{20.616}$$

est une bijection.

(5a) **Surjective** Soit $s \in G^-$. Posons $f = \sigma^{-1} \circ s$. Puisque σ^{-1} et s sont des réflexions, f est une rotation. Donc $f \in G^+$ et $\varphi(f) = s$.

(5b) **Injective** La condition $\varphi(f) = \varphi(g)$ dit que $\sigma \circ f = \sigma \circ g$. En composant par σ^{-1} nous obtenons $f = g$.

(6) $G^+ = \text{gr}\big(R_C(2\pi/p)\big)$ Nous nommons p le nombre d'éléments de G^+. Si G^- est vide, $p = n$, et sinon $p = n/2$. Dans les deux cas, G^+ est un groupe de rotations à p éléments.

Le groupe G^+ contient seulement des rotations ; or le centre d'une rotation est l'unique point fixe. Donc tous les éléments de G^+ sont des rotations autour de C.

Le corolaire 2.74 au théorème de Lagrange nous indique que tous les éléments de G^+ vérifient $g^p = \text{Id}$. Seules les rotations d'angle $2k\pi/p$ autour de C satisfont la condition $g^p = \text{Id}$. Or il n'y a que p telles rotations. Donc elles sont toutes dans G^+. Nous en déduisons que

$$G^+ = \text{gr}\big(R_C(2\pi/p)\big). \tag{20.617}$$

(7) **Pour (2)** Dans le cas où G ne contient pas de réflexion, G^- est vide et G contient n éléments. La relation (20.617) devient

$$G = G^+ = \text{gr}\big(R_C(2\pi/n)\big). \tag{20.618}$$

(8) **Pour (3)** Nous supposons maintenant que G contienne au moins une réflexion. De la sorte $G^- \neq \varnothing$.

(8a) **Pour (3a)** Les seuls points fixes d'une réflexion sont ceux de l'axe. Donc C doit être sur tous les axes des réflexions contenues dans G^-.

Notons au passage que deux réflexions d'axes qui se coupent forment une rotation. Donc G^- ne forme pas un groupe, mais même pas en rêve, quoi.

(8b) **Pour (3b)** Vu que l'union $G = G^+ \cup G^-$ est disjointe et que G^+ et G^- ont le même nombre d'éléments par la bijection 20.616, si G^- est non vide, G possède un nombre pair d'éléments.

(8c) **Pour (3c)** Si $\sigma \in G$ est une réflexion, nous savons que n est pair, que G^+ possède $p = n/2$ éléments et que

$$G^+ = \{R_C(2k\pi/p)\} = \{R_C(4k\pi/n)\}_{k=1,\dots,n/2}. \tag{20.619}$$

L'élément $\sigma \in G^-$ étant fixé, la bijection (20.616) nous indique que tous les éléments de G^- sont de la forme $\sigma \circ f$ avec $f \in G^+$. Donc

$$G^- \subset \text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big). \tag{20.620}$$

Nous avons aussi

$$G^+ \subset \text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big). \tag{20.621}$$

Et comme σ et $R_C(4\pi/n)$ sont dans G nous avons $\text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big) \subset G$. Tout cela pour dire que

$$G = \text{gr}\big(\sigma, R_C(4\pi/n)\big). \tag{20.622}$$

(8d) $R\sigma = \sigma R^{-1}$ Nous restons dans le cas où G^- n'est pas vide. Nous considérons R, la rotation d'angle θ autour de C. Si R_0 est la rotation d'angle θ autour de $(0,0)$, nous avons

$$R = \tau_C \circ R_0 \circ \tau_C^{-1}, \tag{20.623}$$

et si σ_0 est la symétrie d'axe parallèle à l'axe de σ, mais passant par $(0,0)$ nous avons :

$$\sigma = \tau_C \circ \sigma_0 \circ \tau_C^{-1}. \tag{20.624}$$

Si v est le vecteur directeur de la réflexion σ_0, nous considérons enfin α, la rotation qui réalise $\alpha(v) = (1,0)$. Nous avons alors

$$\sigma_0 = \alpha^{-1} \circ s \circ \alpha \tag{20.625}$$

où s est la symétrie autour de l'axe horizontal. En n'ayant pas peur d'identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, l'application s est la conjugaison complexe. Avec tout ça nous avons

$$R\sigma = \tau_C R_0 \tau_C^{-1} \tau_C \sigma_0 \tau_C^{-1} = \tau_C R_0 \alpha^{-1} s \alpha \tau_C^{-1} = \tau_C \alpha^{-1} R_0 s \alpha \tau_C^{-1} \tag{20.626}$$

où nous avons utilisé le fait que les rotations autour de $(0,0)$ forment un groupe abélien pour commuter α^{-1} avec R_0. Nous utilisons à présent le lemme 20.190 pour commuter R avec s :

$$\begin{aligned}
R\sigma &= \tau_C \alpha^{-1} s R_0^{-1} \alpha \tau_C^{-1} && \text{(20.627a)}\\
&= \tau_C \underbrace{\alpha^{-1} s \alpha}_{\sigma_0} R_0^{-1} \tau_C^{-1} && \text{(20.627b)}\\
&= \tau_C \sigma_0 \tau_C^{-1} \tau_C R_0^{-1} \tau_C^{-1} && \text{(20.627c)}\\
&= \sigma R^{-1}. && \text{(20.627d)}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\tau_C R_0^{-1} \tau_C^{-1} = R^{-1}$ comme on peut s'en convaincre en calculant le produit.

(8e) **Table de multiplication**

Nous considérons une réflexion $\sigma \in G$. Les éléments de G^+ sont des rotations autour de C et ceux de G^- de la forme σR où R est une rotation autour de C. Pour connaître la table de multiplication de G, nous devons écrire

$$(\sigma^{\epsilon_1} R^k)(\sigma^{\epsilon_2} R^l) = \sigma^{\epsilon} R^m \tag{20.628}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0,1\}$, R est la rotation d'angle $4\pi/n$ autour de C et ϵ et m sont des constantes à exprimer en fonction de ϵ_1, ϵ_2, k et l.

Tous les éléments de G pouvant être écrits soit sous la forme R^m, soit sous la forme σR^m, nous avons les possibilités suivantes :

(8e.i) $R^m R^l = R^{m+l}$

(8e.ii) $(R^m)(\sigma R^l) = \sigma R^{-m} R^l = \sigma R^{l-m}$

(8e.iii) $(\sigma R^m) R^l = \sigma R^{m+l}$

(8e.iv) $(\sigma R^m)(\sigma R^l) = \sigma\sigma R^{l-m} = R^{l-m}$.

(8f) **Pour (3d)** Récoltons quelque acquis.

- Nous venons de prouver que $R\sigma = \sigma R^{-1}$.
- Tout élément de G peut s'écrire soit sous la forme R^m, soit sous la forme σR^m, selon que l'élément est dans G^+ ou G^-.
- Tout élément du groupe diédral D_n s'écrit soit sous la forme r^m, soit sous la forme sr^m (proposition 20.187(2)).

L'application $\varphi\colon G \to D_n$ suivante est donc une bijection :

$$\begin{cases} \varphi(R^m) = r^m & \text{(20.629a)}\\ \varphi(\sigma R^m) = sr^m. & \text{(20.629b)} \end{cases}$$

Il nous reste à prouver que c'est un morphisme. Cela se fait en utilisant la table de multiplication du groupe diédral donnée dans la proposition 20.191 et celle du groupe G que nous venons d'écrire.

□

Définition 20.213 (Groupe de symétrie d'une partie de $\mathbb{R}^n$[629])**.**
Si Y est une partie de $\mathbb{R}^n$, nous définissons le ***groupe des symétries*** *de Y par*

$$\mathrm{Sym}(Y) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } f(Y) = Y\}. \tag{20.630}$$

Nous définissons aussi le groupe des symétries propres de Y par

$$\mathrm{Sym}^+(Y) = \{f \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } f(Y) = Y\} \tag{20.631}$$

où $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des isométries positives de $\mathbb{R}^n$, définition 20.100.

THOooAYZVooPmCiWI

Théorème 20.214 ([629])**.**
Soit $Y \subset \mathbb{R}^2$.

(1) *Si le groupe* $\mathrm{Sym}^+(Y)$ *est fini d'ordre* n*, alors c'est un groupe cyclique d'ordre* n*.*

(2) *Si* $\mathrm{Sym}^+(Y)$ *est fini, alors* $\mathrm{Sym}(Y)$ *est soit cyclique*[73] *d'ordre* n*, soit isomorphe au groupe diédral*[74] *d'ordre* $2n$*.*

Démonstration. Nous savons déjà par la proposition 20.107 que $\mathrm{Sym}^+(Y)$ est isomorphe à un sous-groupe H^+ d'ordre n de $\mathrm{SO}(2)$. Vérifions que ce groupe est cyclique. Si $n = 1$, c'est évident. Si $n \geqslant 2$ alors nous savons que H^+ est constitué de rotations d'angles dans $[0, 2\pi[$ et vu que c'est un ensemble fini, il possède une rotation d'angle minimal (à part zéro). Notons α_0 cet angle.

Nous montrons que H^+ est engendré par la rotation d'angle α_0. Soit une rotation d'angle α. Étant donné que $\alpha_0 < \alpha$ nous pouvons effectuer la division euclidienne[75] de α par α_0 et obtenir

$$\alpha = k\alpha_0 + \beta \tag{20.632}$$

avec $\beta < \alpha_0$. Mézalors $R(\beta) = R(\alpha)R(\alpha_0)^{-k}$ est également un élément du groupe. Cela contredit la minimalité dès que $\beta \neq 0$. Avoir $\beta = 0$ revient à dire que α est un multiple de α_0, ce qui signifie que le groupe H^+ est cyclique engendré par α_0.

Notons au passage que nous avons automatiquement $\alpha_0 = \frac{2\pi}{n}$ parce qu'il faut $R(\alpha_0)^n = \mathrm{Id}$. Nous avons prouvé que $\mathrm{Sym}^+(Y)$ est cyclique d'ordre n.

Nous étudions maintenant le groupe $\mathrm{Sym}(Y)$. Par la proposition 20.107 nous avons un morphisme injectif

$$\phi\colon \mathrm{Sym}(Y) \to \mathrm{O}(2), \tag{20.633}$$

et en posant $H = \phi\big(\mathrm{Sym}(Y)\big)$ nous avons un isomorphisme de groupes $\phi\colon \mathrm{Sym}(Y) \to H$. Nous savons aussi que ce ϕ se restreint en

$$\phi\colon \mathrm{Sym}^+(Y) \to H^+ \subset \mathrm{SO}(2) \tag{20.634}$$

où $H^+ = \phi\big(\mathrm{Sym}^+(Y)\big) = H \cap \mathrm{SO}(2)$. Le groupe H^+ est cyclique et est engendré par la rotation $R(2\pi/n)$.

Supposons un instant que $H \subset \mathrm{SO}(2)$. Alors nous avons $H = H^+$ et ϕ est un isomorphisme entre $\mathrm{Sym}(Y)$ et le groupe cyclique engendré par $R(2\pi/n)$.

Nous supposons à présent que H n'est pas un sous-ensemble de $\mathrm{SO}(2)$. Quelles sont les isométries de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas de déterminant 1 ? Il faut regarder dans le théorème 20.203 quelles sont les isométries contenant un nombre impair de réflexions. Ce sont les réflexions et les réflexions glissées. Or il ne peut pas y avoir de réflexion glissée dans un groupe fini, parce que si f est une réflexion glissée, tous les f^k sont différents.

Nous en déduisons que si H n'est pas inclus dans $\mathrm{SO}(2)$, il contient une réflexion que nous nommons σ. Nous allons en déduire que $H \simeq H^+ \times_{\mathbf{Ad}} C_2$ où $C_2 = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$. Si $h \in H$ nous pouvons écrire

$$h = (h\sigma^\epsilon)\sigma^\epsilon \tag{20.635}$$

pour n'importe quelle valeur de ϵ, et en particulier pour $\epsilon = \pm 1$.

Si $h \in \mathrm{SO}(2)$ alors nous écrivons $h = h\sigma^0$ et si $h \notin \mathrm{SO}(2)$ nous écrivons $h = (h\sigma)\sigma$. Vu que $h\sigma \in \mathrm{SO}(2)$, cette dernière écriture est encore de la forme $\mathrm{SO}(2) \times C_2$. Quoi qu'il en soit, tout élément de H s'écrit comme un produit

$$H = H^+C_2. \tag{20.636}$$

Cette décomposition est unique parce que si $h_1c_1 = h_2c_2$ alors $h_2^{-1}h_1 = c_2c_1^{-1}$, et comme $h_2^{-1}h_1 \in H^+$ nous avons $c_2c_1^{-1} \in H^+$ et donc $c_1 = c_2$. Partant, nous avons aussi $h_1 = h_2$. Pour avoir le produit semi-direct, il faut encore montrer que $\mathbf{Ad}(C_2)H^+ \subset H^+$. Le seul cas à vérifier est $\mathbf{Ad}(\sigma)H^+ \subset H^+$. Comme les éléments de H^+ sont caractérisés par le fait d'avoir un déterminant positif, nous avons

$$\mathbf{Ad}(\sigma)R(\alpha) = \sigma R(\alpha)\sigma^{-1} \in H^+. \tag{20.637}$$

□

Remarque 20.215.
Tout ceci est cohérent avec le théorème de Burnside 10.314 parce que le sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(n)$ engendré par la rotation $R(2\pi/n)$ est un groupe d'exposant fini, à savoir que si h est dans ce groupe, $h^n = \mathrm{Id}$.

[73] Définition 2.149.
[74] Définition 20.182.
[75] Théorème 3.40.

20.12.2 Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

Nous donnons maintenant quelques relations trigonométriques classiques dans un triangle rectangle. Le théorème de Pythagore est déjà le théorème 12.46 ; nous nous concentrons ici sur les angles.

PROPooCDZVooKOQzct

Proposition 20.216.
Soient $A, B, S \in \mathbb{R}^2$ des points distincts et non alignés formant un triangle rectangle en A :

$$(A-S) \cdot (B-A) = 0. \tag{20.638}$$

En posant $\theta = \widehat{ASB}$ nous avons

$$\cos(\theta) = \frac{\|A-S\|}{\|B-S\|} \tag{20.639}$$

et

$$\sin(\theta) = \pm\frac{\|B-A\|}{\|B-S\|}. \tag{20.640}$$

EQooEKZEooFeNImX

Démonstration. Nous posons $C = A - S$ et $D = B - S$. Comme $C \neq 0$, il existe une rotation R_α telle que

$$\begin{cases} (R_\alpha C)_x > 0 & \text{(20.641a)} \\ (R_\alpha C)_y = 0. & \text{(20.641b)} \end{cases}$$

Nous posons $X = R_\alpha C$ et $Y = R_\alpha D$.

Le triangle formé de O, X et Y est « posé » sur l'axe des abscisses et est rectangle en X, c'est-à-dire

$$X \cdot (Y - X) = 0. \tag{20.642}$$

De ce fait, le point Y satisfait à $Y_x = X_x$. Et enfin, grâce aux propositions 20.175 et 20.176 nous avons $\widehat{ASB} = \widehat{XOY}$.

Nous écrivons les relations qui définissent l'angle $\widehat{XOY}$. Pour cela nous posons $X' = X/\|X\|$ et $Y' = Y/\|Y\|$ et nous avons

SUBEQooVHNDooPOfbjC

$$\begin{cases} \cos(\theta) = X'_x Y'_x & \text{(20.643a)} \\ \sin(\theta) = X'_y Y'_y. & \text{(20.643b)} \end{cases}$$

Vu que $X = (X_x, 0)$, nous avons $X'_x = 1$. De plus

$$\|Y\| = \|R_\alpha(D)\| = \|D\| = \|B - S\|. \tag{20.644}$$

En substituant les valeurs dans (20.643),

$$\cos(\theta) = Y'_x = \frac{Y_x}{\|Y\|} = \frac{X_x}{\|B-S\|} = \frac{\|C\|}{\|B-S\|} = \frac{\|A-S\|}{\|B-S\|}. \tag{20.645}$$

Voilà déjà une chose de prouvée.

Pour la seconde, nous avons $\sin(\theta) = Y'_y$. Selon le signe de Y_y nous avons $Y_y = \pm\|Y - X\|$ et donc

$$\sin(\theta) = Y'_y = \frac{Y_y}{\|Y\|} = \frac{\pm\|Y-X\|}{\|Y\|} = \pm\frac{\|D-C\|}{\|Y\|} = \pm\frac{\|B-A\|}{\|B-S\|}. \tag{20.646}$$

□

Le signe sur la formule du sinus revient au fait que la définition de l'angle $\widehat{AOB}$ est de considérer la rotation qui fait aller A vers B. Donc suivant la position relative de A, O et B, il se peut que l'angle mesuré soit l'angle *extérieur* au triangle.

La proposition suivante est parfois prise comme définition de l'angle.

Proposition 20.217.
Soient trois points non alignés $A, S, B \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\cos\left(\widehat{ASB}\right) = \frac{(A-S) \cdot (B-S)}{\|A-S\|\|B-S\|}. \tag{20.647}$$

EQooOWULooVQuxxF

Démonstration. Nous posons $C = A - S$, $D = B - S$, $X = C/\|C\|$ et $Y = D/\|D\|$. Avec cela, la définition 20.169 donne l'équation

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \end{pmatrix} \tag{20.648}$$

que nous écrivons comme le système

$$\begin{cases} X_x \cos(\theta) - X_y \sin(\theta) = Y_x & \text{(20.649a)} \\ X_y \cos(\theta) + X_x \sin(\theta) = Y_y. & \text{(20.649b)} \end{cases}$$

Nous considérons maintenant cela comme un système pour $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$:

$$\begin{pmatrix} X_x & -X_y \\ X_y & X_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \end{pmatrix}. \tag{20.650}$$

Le déterminant de la dernière matrice est $X_x + X_y^2 = \|X\|^2 = 1$ parce que X est unitaire. Cette matrice est donc inversible et son inverse est vite calculée. Nous avons

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & X_y \\ -X_y & X_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_x \\ Y_y \end{pmatrix}. \tag{20.651}$$

Cela donne ce que nous voulions :

$$\cos(\theta) = X \cdot Y = \frac{C \cdot D}{\|C\|\|D\|} = \frac{(A-S) \cdot (B-S)}{\|A-S\|\|B-S\|}. \tag{20.652}$$

□

Remarque 20.218.
Prendre la formule (20.647)

$$\cos\big(\widehat{ASB}\big) = \frac{(A-S) \cdot (B-S)}{\|A-S\|\|B-S\|}. \tag{20.653}$$

comme définition de l'angle $\widehat{ASB}$ est cependant trompeur parce que ça ne permet de définir les angles que sur une partie de $[0, 2\pi[$ sur laquelle le cosinus est injectif. Pour réellement définir tous les angles, il faut alors un peu bricoler.

Sans vouloir être méchant, je crois que ceux qui procèdent de cette manière sont ceux qui donnent un cours sur le produit scalaire sans avoir l'intention de lier la définition d'une rotation comme composée de réflexions aux matrices de SO(2) et aux fonctions trigonométriques.

20.12.3 Pavages du plan

DEFooHPKFooSIDhCM

Définition 20.219.
*Une application affine $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un **déplacement** lorsqu'elle est une isométrie de $(\mathbb{R}^n, d)$ qui préserve l'orientation*[76].

DEFooJPHKooRgCBJs

Définition 20.220 ([502])**.**
*Un **pavage** de $\mathbb{R}^2$ est une paire (G, K) où G est un groupe de déplacements*[77] *de $\mathbb{R}^2$ et K un compact de $\mathbb{R}^2$ d'intérieur non vide telle que*

(1) $G \cdot K = \mathbb{R}^2$,

ITEMooOIJZooZMKLUm

(2) Si $g_1, g_2 \in G$ satisfont $g_1 \cdot \mathrm{Int}(K) \cap g_2 \cdot \mathrm{Int}(K) \neq \varnothing$, alors $g_1 \cdot K = g_2 \cdot K$.

*Nous disons qu'un groupe G de déplacements de $\mathbb{R}^2$ est un **groupe de pavage** de $\mathbb{R}^2$ si il existe un compact K tel que la paire (G, K) soit un pavage.*

En termes de notations,

$$G \cdot K = \bigcup_{g \in G} g(K) = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{k \in K} g(k). \tag{20.654}$$

LEMooWZSWooZYkICn

Lemme 20.221 ([1])**.**
Soient une bijection affine $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ainsi qu'une droite d et un point A. Nous notons S la partie de $\mathbb{R}^2$ située du côté de d contenant A.

Alors $\varphi(S)$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ située du côté de $\varphi(d)$ contenant $\varphi(A)$.

[76] Définition 10.33.
[77] Définition 20.219.

Démonstration. La droite d est donnée par une application affine $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et la définition

$$d = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) = 0\}. \tag{20.655}$$

Nous supposons que $f(A) > 0$; sinon, nous pouvons utiliser $-f$ au lieu de f. Donc

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) > 0\}. \tag{20.656}$$

La partie $\varphi(S)$ est alors donnée par

$$\varphi(S) = \{\varphi(x) \text{ tel que } f(x) > 0\}. \tag{20.657}$$

Comme φ est une bijection, cela s'écrit aussi bien

$$\varphi(S) = \{y \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f\big(\varphi^{-1}(y)\big) > 0\}. \tag{20.658}$$

De même

$$\varphi(d) = \{s \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f\big(\varphi^{-1}(s)\big) = 0\}. \tag{20.659}$$

Donc les deux côtés de la droite $\varphi(d)$ sont donnés par le signe de $f \circ \varphi^{-1}$. Nous avons

$$(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(A)\big) = f(A) > 0. \tag{20.660}$$

Donc $\varphi(A) \in \varphi(S)$. □

LEMooZOXVooTJiLTF

Lemme 20.222.
Le groupe

$$G = \mathrm{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}) \tag{20.661}$$

est un groupe de pavage du plan.

Démonstration. Il suffit de prendre le carré $K = [0,1]\times[0,1]$. En appliquant les translations, nous recouvrons tout le plan, sans intersection des intérieurs des carrés. Notons toutefois qu'il y a un recouvrement des bords. □

LEMooTMRGooChBzZg

Lemme 20.223 ([1, 642])**.**
Le groupe

$$G = \mathrm{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, R_0(\pi)) \tag{20.662}$$

est un groupe de pavage du plan.

Démonstration. Le compact à considérer est $K = [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$. Le compact K et son image par $R_0(\pi)$ sont représentés sur la figure 20.8.

En agissant sur K avec les translations verticales et horizontales, nous recouvrons des bandes verticales de largeur $1/2$. En agissant de même sur $R_0(\pi)(K)$, nous recouvrons les autres bandes verticales.

Donc $G \cdot K$ recouvre bien $\mathbb{R}^2$. Il serait cependant un peu présomptueux de croire en avoir fini. Il faut vérifier la condition (2) de la définition 20.220 d'un pavage.

Supposons que $g_1 \cdot \mathrm{Int}(K) \cap g_2 \cdot \mathrm{Int}(K) \neq \varnothing$. Cela signifie qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathrm{Int}(K)$ tels que $g_1(k_1) = g_2(k_2)$, ou encore que

$$(g_2^{-1}g_1)k_1 = k_2 \in \mathrm{Int}(K). \tag{20.663}$$

EQooITJEooUkUKuu

Quelle est la forme d'un élément général de G ? Le lemme 2.146 nous indique qu'un élément général de G est un produit fini de τ_{e_1}, τ_{e_2} et $R_0(\pi)$. Mais nous savons que si α est linéaire,

$$\alpha \circ \tau_u = \tau_{\alpha(u)} \circ \alpha. \tag{20.664}$$

Dans notre cas, dans un produit général, nous pouvons déplacer tous les facteurs $R_0(\pi)$ à droite en changeant des τ_{e_i} en $\tau_{R_0(\pi)e_i} = \tau_{-e_i}$. Les translations par contre commutent sans faire d'histoires. Donc un élément général de G est de la forme

$$g = \tau_{e_1}^k \tau_{e_2}^l R_0(\pi)^m \tag{20.665}$$

Nous pouvons évidemment restreindre m à $\{0,1\}$. Supposons $k \in \mathrm{Int}(K)$ et $g(k) \in \mathrm{Int}(K)$. Nous avons $0 < k_x < 0.5$. Si $m = 1$, alors $g(k)_x \in]-1/2, 0[$ et aucun $\tau_{e_1}^k g(k)_x$ ne pourra plus être entre 0 et $1/2$. Donc $m = 0$. À partir de là, pour avoir $g(k) \in \mathrm{Int}(K)$ nous devons avoir également $k = l = 0$. Donc $g = \mathrm{Id}$.

Deux éléments g_1 et g_2 vérifiant la condition (20.663) doivent donc vérifier $g_2^{-1}g_1 = \mathrm{Id}$, et donc $g_1 = g_2$. Par conséquent $g_1 \cdot K = g_2 \cdot K$. □

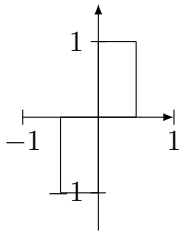


FIGURE 20.8 : Le compact K et son image par $R_0(\pi)$ pour le lemme 20.223. LabelFigATJSooefYkmCbP

LEMooJPNDooHDCLnY

Lemme 20.224 ([1, 642])**.**
Le groupe

$$\mathrm{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, R_0(\pi/2)) \tag{20.666}$$

est un groupe de pavage.

Démonstration. Le pavé à considérer est

$$K = [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{2}]. \tag{20.667}$$

En lui appliquant trois fois la rotation $R_0(\pi/2)$, nous reconstituons le carré $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ensuite, avec les translations, nous pavons tout le plan.

Pour la seconde condition, nous procédons comme dans la démonstration du lemme 20.223. D'abord $R_0(\pi/2)e_1 = e_2$ et $R_0(\pi/2)e_2 = -e_1$. Donc dans un produit général de τ_{e_1}, τ_{e_2} et $R_0(\pi/2)$ (et de leurs inverses), toutes les rotations peuvent être mises à droite ; nous avons donc un élément général de G sous la forme

$$g = \tau_a \circ R_0(\pi/2)^k \tag{20.668}$$

avec $a \in \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Vu que les translations se font par nombres entiers tandis que les différences de coordonnées entre les $R_0(\pi/2)^k K$ sont demi-entiers, si $k \in \mathrm{Int}(K)$, alors aucun τ_a ne permet d'avoir $(\tau_a \circ R_0(\pi/2))k \in \mathrm{Int}(K)$.

Bref, si $(g_2^{-1}g_1)k \in K$, alors encore une fois $g_2^{-1}g_1 = \mathrm{Id}$. □

Et c'est maintenant que les choses compliquées commencent.

LEMooMWWEooEbZXtb

Lemme 20.225.
Le groupe

$$\mathrm{gr}\left(\tau_{e_1}, \tau_{(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}, R_0(\pi/3)\right) \tag{20.669}$$

est un groupe de pavage.

Démonstration. Ici le compact K est le triangle de sommets $A = (0, 0)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ et $C = (1, 0)$. Plus précisément il s'agit de l'intersection des trois parties suivantes :

- le côté de la droite (AB) où est C,
- le côté de la droite (AC) où est B,
- le côté de la droite (BC) où est A.

Il est bon d'écrire ces trois conditions sous forme d'inéquations.

- La droite AB est donnée par l'équation $f_{AB}(x, y) = 0$ pour $f_{AB}(x, y) = x - \sqrt{3}y$. Puisque $f_{AB}(C) = 1$, la première inéquation pour K est
$$x - \sqrt{3}y \geqslant 0. \tag{20.670}$$
- Pour la droite (BC) nous avons $f_{BC}(x, y) = -x - \sqrt{3}y + 1$ et $f_{BC}(A) = 1$. Donc la seconde inéquation pour K est
$$-x - \sqrt{3}y + 1 \geqslant 0 \tag{20.671}$$
- La droite AC est donnée par l'application $f_{AC}(x, y) = y$. Vu que $f_{AC}(B) = \sqrt{3}/6$, nous avons la troisième inéquation pour K :
$$y \geqslant 0. \tag{20.672}$$

En résumé, la définition de K est le système SUBEQSooECKFooOdneOA

$$\begin{cases} x-\sqrt{3}y\geqslant 0 & (20.673a)\\ -x-\sqrt{3}y+1\geqslant 0 & (20.673b)\\ y\geqslant 0. & (20.673c) \end{cases}$$

La figure 20.9(a) nous montre ce triangle et l'action des puissances de $R_0(\pi/3)$ sur lui. Pour votre gouverne, la matrice de cette rotation est

$$R_0(\pi/3)=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{20.674}$$ EQooMRRXooTbLlt

La figure 20.9(c) vous montre une partie de ce pavage dans toute sa splendeur.

Puisque les translations sont $u_1=e_1$ et $u_2=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, il est suffisant de montrer que notre pavage pave réellement le parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Nous vous avons très obligeamment dessiné ce parallélogramme pavé sur la figure 20.9(b).

Pour montrer que les triangles dessinés pavent effectivement le parallélogramme, nous allons procéder à une exhaustion de cas. Soit (x,y) dans le parallélogramme.

Nous commençons par couper le parallélogramme en deux parties suivant la diagonale allant de u_1 à u_2. Dans la vie mon p'ti gars, il y a deux types de points : ceux qui vérifient $x+\frac{1}{\sqrt{3}}y-1\leqslant 0$ et les autres.

(1) **Si $x+y/\sqrt{3}-1\leqslant 0$** Ceci est le côté de $(0,0)$. Nous subdivisons suivant la petite barre verticale (suivez le dessin), c'est-à-dire suivant les deux cas : $x\geqslant\frac{1}{2}$ et $x\leqslant\frac{1}{2}$.

(1a) **Si $x\leqslant\frac{1}{2}$** Enfin nous coupons avec la droite diagonale partant de $(0,0)$, c'est-à-dire selon que $x-\sqrt{3}y\leqslant 0$ ou $x-\sqrt{3}y\geqslant 0$.

(1a.i) **Si $x-\sqrt{3}y\leqslant 0$** Les points dont nous parlons sont les $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant SUBEQSooNYWDooYMNVad

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y-1\leqslant 0 & (20.675a)\\ x\leqslant\dfrac{1}{2} & (20.675b)\\ x-\sqrt{3}y\leqslant 0. & (20.675c) \end{cases}$$

En suivant le dessin, vous remarquerez que l'élément de G à considérer est

$$g=\tau_{e_1}\circ\tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}\circ R_0(\pi/3)^4. \tag{20.676}$$

Nous avons EQSooOJBFooCTaTtu

$$g(A)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) \tag{20.677a}$$
$$g(B)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}) \tag{20.677b}$$
$$g(C)=(0,0). \tag{20.677c}$$

Ce que les équations (20.675) décrivent est l'intersection des trois parties suivanteas[78] :

- le côté de la droite $\big(g(A)g(B)\big)$ contenant $g(C)$,
- le côté de la droite $\big(g(A)g(C)\big)$ contenant $g(B)$,
- le côté de la droite $\big(g(B)g(C)\big)$ contenant $g(A)$,

Le lemme 20.221 nous permet d'exprimer ces trois parties en termes de K :

- l'image par g du côté de la droite (AB) contient C,
- l'image par g du côté de la droite (AC) contient B,
- l'image par g du côté de la droite (BC) contient A,

Comme g est une bijection, l'intersection des images par g est l'image par g de l'intersection. Bref, les équations (20.677) décrivent l'image par g de K.
Cette partie est donc pavée par (G,K).

(1a.ii) **Si $x-\sqrt{3}y\geqslant 0$** hop, même calculs avec des petites variations. Nous laissons le lecteur s'en occuper.

[78] Personnellement, je n'ai pas vérifié, mais ça m'étonnerait que ce soit faux. Vérifiez et écrivez-moi.

(1b) **Si** $x \geqslant \frac{1}{2}$ hop.

(2) **Si** $x + y/\sqrt{3} - 1 \geqslant 0$ hop.

Les cas listés se traitent surement de la même façon. Nous tenons pour prouvé que (G, K) est bien surjectif sur $\mathbb{R}^2$.

Nous devons encore montrer la condition (2) de la définition 20.220. Commençons par déterminer la forme générale d'un élément de G sous la forme $\tau_a \circ r_0$ où r_0 est une application linéaire. Le lemme 2.146 nous indique qu'un élément général de $G = \text{gr}(\tau_{e_1}, \tau_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}, R_0(\pi/3))$ est un produit arbitraire (mais fini) de τ_{e_1}, $\tau_{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}$ et de $R_0(\pi/3)$ et de leurs inverses.

Comme toujours nous avons $\alpha \circ \tau_v = \tau_{\alpha(v)} \circ \alpha$. Donc nous pouvons passer toutes les rotations $R_0(\pi/3)$ et $R_0(\pi/3)^{-1}$ à droite du produit, quitte à produire des translations des formes suivantes :

$$R_0(\pi/3)^k e_1 \tag{20.678a}$$

$$R_0(\pi/3)^k (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \tag{20.678b}$$

$$R_0(\pi/3)^{-k} e_1 \tag{20.678c}$$

$$R_0(\pi/3)^{-k} (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}). \tag{20.678d}$$

En utilisant la matrice (20.674) nous trouvons assez vite que [SUBEQooEMVIooNaaMqk]

$$R_0(\pi/3)e_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{20.679a}$$

$$R_0(\pi/3)^2 e_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{20.679b}$$

$$R_0(\pi/3)^3 e_1 = -e_1. \tag{20.679c}$$

Les applications suivantes de $R_0(\pi/3)$ ne donnent rien de nouveau, si ce n'est le signe. Les puissances de $R_0(\pi/3)$ appliquées à $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ sont déjà parmi celles listées en (20.679). Quant aux inverses, $R_0(\pi/3)^{-1} = R_0(\pi/3)^5$; donc rien de nouveau non plus.

Un élément général de G est donc dans

$$\tau_v \circ R_0(\pi/3)^k \tag{20.680}$$

avec v dans

$$\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} -1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{20.681}$$

Remarquons que

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = -e_1 + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}. \tag{20.682}$$

Donc un élément général de G est

$$\tau_{e_1}^k \circ \tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}^l \circ R_0(\pi/3)^m. \tag{20.683}$$

Nous pouvons maintenant prouver notre point. Pour cela nous allons successivement considérer les 5 rotations de K présentées dans la sous-figure 20.9(a). Pour chacune nous allons montrer qu'aucune translation ne permet d'obtenir une intersection avec K.

Nous allons en faire un seul en détail.

(1) **Pour** $L = R_0(\pi/3)K$ hop. les détails sont laissés à notre aimable lecteur qui ne pourra pas ne pas compléter tous les cas.

(2) **Pour** $L = R_0(\pi/3)^2 K$ Nous allons prouver que si $(x, y) \in \text{Int}(L)$, alors

$$\tau_{e_1}^k \circ \tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}^l (x, y) \tag{20.684}$$

ne peut pas être dans $\text{Int}(K)$. Pour la simplicité des notations nous notons $r = R_0(\pi/3)^2$; nous avons

$$r = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \tag{20.685}$$

Nous considérons $g = \tau_{e_1}^k \circ \tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} \circ r$. Un calcul nous donne l'image de (x,y) par g :

$$g(x,y) = \tau_{e_1}^k \circ \tau^l_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + k - \frac{1}{2}l \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l \end{pmatrix}. \tag{20.686}$$

Nous considérons $(x,y) \in \text{Int}(K)$ tel que $g(x,y) \in \text{Int}(K)$, et nous allons trouver une contradiction. Le fait que $(x,y) \in \text{Int}(K)$ signifie que (x,y) satisfait les inéquations (20.673) mais avec des inégalités strictes. Le fait que $g(x,y) \in \text{Int}(K)$ nous donne trois inéquations de plus. Assez rapide calcul :

$$f_{AB}\big(g(x,y)\big) = -2x + k - 2l, \tag{20.687a}$$
$$f_{BC}\big(g(x,y)\big) = -x - \sqrt{3}y - k - l + 1, \tag{20.687b}$$
$$f_{AC}\big(g(x,y)\big) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l. \tag{20.687c}$$

Au final, notre point (x,y) doit satisfaire le système suivant :

$$\begin{cases} x - \sqrt{3}y > 0 & \text{SUBEQooQJBRooSvcvfW} \quad (20.688a) \\ -x - \sqrt{3}y + 1 > 0 & \text{SUBEQooLWJQooAIQhCh} \quad (20.688b) \\ y > 0 & \text{SUBEQooYCVNooHJHVWt} \quad (20.688c) \\ -2x + k - 2l > 0 & \text{SUBEQooYYVUooORxLnp} \quad (20.688d) \\ -x - \sqrt{3}y - k - l + 1 > 0 & \text{SUBEQooRRGQooYtSxso} \quad (20.688e) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l > 0 & \text{SUBEQooSNVNooVrIVVy} \quad (20.688f) \end{cases}$$

Les inéquations 20.688c et 20.688a donnent déjà $x > 0$. De même avec 20.688b nous trouvons $x < 1$. Voilà déjà $x \in]0,1[$ qui est directement visible sur le dessin du triangle K.

Puisque $x > 0$, l'inéquation (20.688d) donne

$$k - 2l > -2x + k - 2l > 0. \tag{20.689}$$

Donc $k - 2l > 0$.

Comme $x < 1$ et $y > 0$, l'inéquation (20.688f) donne

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}l > \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}l > 0. \tag{20.690}$$

Donc $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+l) > 0$. Comme l est entier, cela donne $l \geqslant 0$.

Enfin, de (20.688e) nous tirons

$$-k + 1 > -x - \sqrt{3}y - k - l + 1 > 0, \tag{20.691}$$

Ce qui donne $k < 1$ et donc $k \leqslant 0$.

En résumé nous avons trouvé trois inéquations pour k et l :

$$\begin{cases} k \leqslant 0 & (20.692a) \\ l \geqslant 0 & (20.692b) \\ k - 2l > 0. & (20.692c) \end{cases}$$

Ce système est impossible.

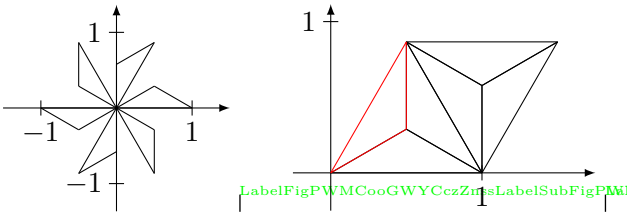
Il n'existe donc pas de translation qui, appliquée à $\text{Int}(L)$, donne une intersection avec $\text{Int}(K)$.

(3) **Pour $L = R_0(\pi/3)^3 K$** hop.

(4) **Pour $L = R_0(\pi/3)^4 K$** hop.

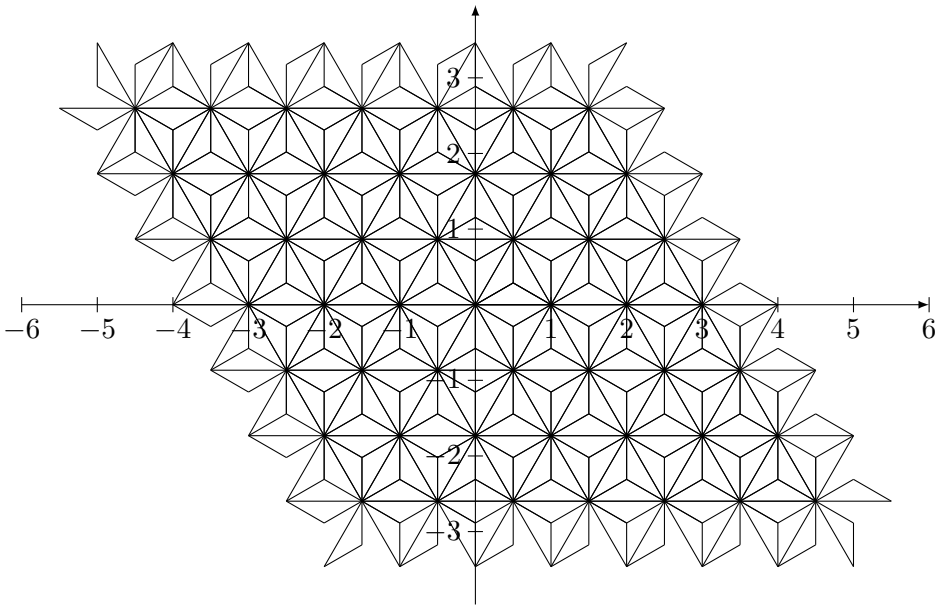
(5) **Pour $L = R_0(\pi/3)^5 K$** hop.

Voilà. J'espère que toutes les idées sont en place, et que les parties manquantes sont seulement des vérifications qui se font mécaniquement, de la même manière[79]. □



(a) Le compact K et ses rotations.

(b) Une maille du réseau des translations de G.



(c) Une partie du pavage complet.

FIGURE 20.9 : Illustrations pour le pavage du lemme 20.225. LabelFigPWMCooGWYCczZn

LEMooGSQSooGSfkaL

Lemme 20.226.
Le groupe

$$\mathrm{gr}\left(\tau_1, \tau_{(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})}, R_0(\pi/3)\right) \tag{20.693}$$

est un groupe de pavage.

D'après [642], la démonstration du lemme 20.226 demande d'utiliser le losange de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6})$ et $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6})$[80].

LEMooEKWZooYbcGBp

Lemme 20.227 ([1]).
Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires, ainsi que $\alpha, \beta \in [0,1]$. Nous considérons $v = \alpha u_1 + \beta u_2$.

Nous supposons pour fixer les idées, que $\|u_1\| \geqslant \|u_2\|$. Alors

$$\min\{\|v\|, \|u_1 + u_2 - v\|\} \leqslant \|u_1\|. \tag{20.694}$$

Autrement dit, tout point intérieur d'un parallélogramme est plus proche d'un angle que la longueur du plus long côté.

Démonstration. Les points $\alpha u_1 + \beta u_2$ $(\alpha, \beta \in [0,1])$ se divisent en deux parties : ceux avec $0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1$ et ceux avec $1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 2$.

Si $\alpha + \beta \leqslant 1$ alors

$$\|\alpha u_1 + \beta u_2\| < \|\alpha u_1\| + \beta\|u_2\| = \alpha\|u_1\| + \beta\|u_2\| \leqslant (\alpha+\beta)\|u_1\| \leqslant \|u_1\|. \tag{20.695}$$

L'inégalité est stricte parce que u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

[79] Je n'ai pas vérifié. Faites-le et écrivez-moi pour me dire ce qu'il en est.
[80] Je n'ai pas vérifié, mais à mon avis une preuve doit prendre les mêmes idées que celles du lemme 20.225.

Si au contraire $\alpha+\beta\geqslant 1$ nous avons

$$\|u_1+u_2-\alpha u_1-\beta u_2\|<\|(1-\alpha)u_1\|+\|(1-\beta)u_2\|<(2-\alpha-\beta)\|u_1\|\leqslant\|u_1\|. \tag{20.696}$$

□

LEMooWKTGooQlfuxm

Lemme 20.228.
Soient un ensemble E, et deux bijections $r,s\colon E\to E$ ayant chacune un unique point fixe. Si elles commutent, alors leurs points fixes sont égaux.

Démonstration. Nous nommons a le point fixe de r et b celui de s. Pour tout $x\in E$ nous avons $(rs)(x)=(sr)(x)$. En particulier pour $x=s^{-1}(a)$. D'une part

$$(rs)(x)=r(a)=a. \tag{20.697}$$

Et d'autre part,

$$(sr)(a)=(srs^{-1})(a) \tag{20.698}$$

Si nous imposons $(srs^{-1})(a)=a$, nous avons, en appliquant s^{-1} des deux côtés : $(rs^{-1})(a)=s^{-1}(a)$. Cela prouve que $s^{-1}(a)$ est un point fixe de r. Donc $s^{-1}(a)=a$.

Nous en déduisons que a est un point fixe de s et donc que $a=b$. □

LEMooDGSJooCiBhZz

Lemme 20.229.
Soit un sous-groupe T de $(\mathbb{R}^2,+)$ tel que $\|v\|>\delta$ pour tout $v\neq 0$ dans T.

Alors si u_1 et u_2 sont les plus petits éléments en norme de T, nous avons

$$T=\mathbb{Z}u_1+\mathbb{Z}u_2. \tag{20.699}$$

Démonstration. Nous décomposons en plusieurs parties.

(1) $\mathbb{R}^+v\cap T=\mathbb{N}v_m$ Soit $v\in T$. L'ensemble $\{\lambda\in\mathbb{R}^+ \text{ tel que } \lambda v\in T\}$ a un minimum parce que tous les éléments de T sont en norme plus grands que $\delta>0$. Soit λ_m ce minimum et $v_m=\lambda_m v$.

Nous prétendons à présent que $\mathbb{R}^+v\cap T=\mathbb{N}v_m$. Nous ne faisons d'ailleurs pas que prétendre ; nous *prouvons*. En effet, soit $\lambda v\in T$. Nous devons prouver que $\lambda=l\lambda_m$ pour un certain $l\in\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\leqslant\lambda<k+1$.

Nous avons

$$(k+1)\lambda_m-\lambda\leqslant(k+1)\lambda_m-k\lambda_m=\lambda_m. \tag{20.700}$$

Vu que T est un groupe pour l'addition, et que $\lambda_m v\in T$ et $\lambda v\in T$, cela implique que $\big((k+1)\lambda_m-\lambda\big)v\in T$. Mais

$$|\big((k+1)\lambda_m-\lambda\big)v|\leqslant\lambda_m. \tag{20.701}$$

Vue la propriété de minimalité de λ_m, nous avons forcément

$$(k+1)\lambda_m-\lambda=\lambda_m. \tag{20.702}$$

Cela prouve que $\lambda=k\lambda_m$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que

$$\mathbb{R}^+v\cap T=\mathbb{N}v_m \tag{20.703}$$

pour un certain multiple v_m de v.

(2) $\|u_1\|\leqslant\|v\|$ **pour tout** v

Nous montrons à présent qu'il existe $u_1\in T$ tel que $\|u_1\|\leqslant\|v\|$ pour tout $v\in T$. Si tel n'était pas le cas, il existerait une suite $v_k\in T$ telle que $\|v_{k+1}\|<\|v_k\|$. Toute cette suite serait contenue dans la couronne (compacte) de rayons δ et $\|u_1\|$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que (v_k) converge[81]. Cette suite serait de Cauchy et pour tout ϵ (en particulier $\epsilon<\delta$), il existerait p,q tels que $\|v_p-v_q\|<\epsilon$. Puisque T est un groupe pour l'addition, nous aurions $v_p-v_q\in T$ avec $\|v_p-v_q\|<\epsilon\leqslant\delta$.

(3) **Première pause**

Si T est engendré seulement par u_1, nous avons fini. Autrement dit, si tout T est dans un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, nous avons terminé.

Dans la suite, nous supposons donc que T n'est pas contenu dans un sous-espace de dimension 1.

[81] Proposition 9.363.

(4) $\underline{T = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2}$ Soient u_1 et u_2 les deux plus petits éléments de T en norme (peut-être ex-aequo). Ces deux éléments ne sont pas colinéaires, sinon leur différence serait plus petite. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $v \in T$. Comme $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2. \tag{20.704}$$

Notre but est à présent de prouver que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Si ce n'était pas le cas, une simple translation nous mènerait dans les circonstances du lemme 20.227. Nous aurions alors que, soit $\|v\|$, soit $\|u_1 + u_2 - v\|$ serait strictement plus petit que le plus grand entre $\|u_1\|$ et $\|u_2\|$. Cela contredirait le fait que $\|u_1\|$ et $\|u_2\|$ étaient les deux plus petits.

□

PROPooPQYXooIDZlHy

Proposition 20.230 ([1]).
Si G est un groupe de pavage[82] *de $\mathbb{R}^2$ et si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie affine, alors le groupe*

$$G' = f \circ G \circ f^{-1} = \{f \circ g \circ f^{-1} \text{ tel que } g \in G\} \tag{20.705}$$

est un groupe de pavage.

Démonstration. Soit un compact K tel que (G, K) soit un pavage. Nous notons $K' = f(K)$. Nous devons prouver deux choses :

- $f \circ G \circ f^{-1}$ est un groupe de déplacements ;
- (G', K') est un pavage.

Ceci mène à prouver trois éléments.

(1) $\underline{G' \text{ est constitué de déplacements}}$ Les éléments de G sont des isométries, ainsi que f et f^{-1}. Donc les éléments de G' sont des isométries.

Soit $g \in G$. Comme g est affine, il existe une décomposition $g = \tau_v \circ g_0$ où g_0 est linéaire. De même $f = \tau_w \circ f_0$. Les règles du produit et de l'inverse de la proposition 13.62(2)(3) nous indiquent que la partie linéaire de fgf^{-1} est $f_0 g_0 f_0^{-1}$.

En ce qui concerne le déterminant de $f_0 g_0 f_0^{-1}$, c'est la proposition 10.15 qui nous indique que

$$\det(f_0 g_0 f_0^{-1}) = \det(f_0)\det(g_0)\det(f_0^{-1}) = \det(f_0)\det(g_0)\det(f_0)^{-1} = \det(g_0) = 1. \tag{20.706}$$

(2) $\underline{G' \cdot K' = \mathbb{R}^2}$ Comme f est affine, K' est encore compact[83] Nous avons :

$$\begin{aligned}
(f \circ G \circ f^{-1})\big(f(K)\big) &= \bigcup_{g\in G}\bigcup_{k\in K}(f \circ g \circ f^{-1})\big(f(k)\big) && \text{(20.707a)}\\
&= \bigcup_{g\in G}\bigcup_{k\in K}(f \circ g)(k) && \text{(20.707b)}\\
&= \bigcup_{g\in G} f\Big(\bigcup_{k\in K} g(k)\Big) && \text{(20.707c)}\\
&= \bigcup_{g\in G}(f \circ g)(K) && \text{(20.707d)}\\
&= f\Big(\bigcup_{g\in G} g(K)\Big) && \text{(20.707e)}\\
&= f\big(G \cdot K\big) && \text{(20.707f)}\\
&= \mathbb{R}^2. && \text{(20.707g)}
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que f est bijective et que $G \cdot K = \mathbb{R}^2$.

[82] Définition 20.220.
[83] Il suffit de prouver que $f(K)$ est fermé et borné par le théorème de Borel-Lebesgue 11.23.

(3) **L'autre condition** Deux éléments de G' s'écrivent fg_1f^{-1} et fg_2f^{-1}. Nous les supposons tels que

$$(fg_1f^{-1})\cdot \operatorname{Int}(K')\cap(fg_2f^{-1})\cdot\operatorname{Int}(K')\neq\varnothing. \tag{20.708}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}(fg_1f^{-1})\cdot \operatorname{Int}(K')\cap(fg_2f^{-1})\cdot\operatorname{Int}(K') &= f\big(g_1\cdot\operatorname{Int}(K)\big)\cap f\big(g_2\cdot\operatorname{Int}(K)\big) && \text{(20.709a)}\\ &= f\Big(\underbrace{g_1\cdot\operatorname{Int}(K)\cap g_2\cdot\operatorname{Int}(K)}_{\neq\varnothing}\Big) && \text{(20.709b)}\\ &\neq\varnothing. && \text{(20.709c)}\end{aligned}$$

Justifications :

- Égalité (20.709a) parce qu'un peu de topologie nous enseigne que $f^{-1}\big(\operatorname{Int}(K')\big)=\operatorname{Int}\big(f^{-1}(K')\big)=\operatorname{Int}(K)$ parce que f est affine.
- Égalité (20.709b) parce que, f étant bijective, $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)$;

□

Théorème 20.231 ([502, 642]).
Nous notons τ_v la translation de vecteur v, $r_{A,\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ ainsi que $\tau_i=\tau_{e_i}$.

Un groupe G est un groupe de pavage de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une bijection affine $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f\circ G\circ f^{-1}$ est un groupe de la liste suivante :

(1) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_2\big)$

(2) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_2,R_0(\pi)\big)$

(3) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_{(\frac12,\frac{\sqrt3}{2})},R_0(2\pi/3)\big)$

(4) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_2,R_0(\pi/2)\big)$

(5) $\operatorname{gr}\big(\tau_1,\tau_{(-\frac12,\frac{\sqrt3}{2})},R_0(\pi/3)\big)$.

Démonstration. Les lemmes 20.222, 20.223, 20.224, 20.225, et 20.226 montrent que les groupes listés sont des groupes de pavage. La proposition 20.230 nous montre alors que si $H=fGf^{-1}$ est dans la liste, alors G est un groupe de pavage. Il nous reste à montrer que si G est un groupe de pavage, alors il existe une application affine α telle que $\alpha G\alpha^{-1}$ est un groupe de la liste.

Soit (G,K) un pavage de $\mathbb{R}^2$. Nous notons T l'ensemble des translations dans G, plus précisément,

$$T=\{v\in\mathbb{R}^2\text{ tel que }\tau_v\in G\}. \tag{20.710}$$

(1) **Une borne pour T** Nous prouvons qu'il existe $\delta>0$ tel que $\|v\|>\delta$ pour tout $v\neq0\in T$. En effet, soit $m\in\operatorname{Int}(K)$ ainsi que r tel que $B(m,r)\subset\operatorname{Int}(K)$. Alors si $v\in T$ est tel que $\|v\|<r$ nous avons $\tau_v(m)\in\operatorname{Int}(K)$, ce qui donnerait

$$m\in\tau_v\big(\operatorname{Int}(K)\big)\cap\operatorname{Int}(K) \tag{20.711}$$

par hypothèse, cette intersection est non vide seulement si $v=0$.

Donc il existe δ tel que $\|v\|\geqslant\delta$ pour tout $v\in T$.

(2) **Utilisation du lemme**

La partie T est donc dans la position du lemme 20.229 et nous avons

$$T=\mathbb{Z}u_1+\mathbb{Z}u_2 \tag{20.712}$$

pour les vecteurs u_1 et u_2 les plus petits en norme de T.

En réalité, il se peut que T soit plus petit que ça, parce que G peut par exemple ne contenir aucune translation. Nous avons trois possibilités :

- $T=\{0\}$,
- $T=\mathbb{Z}u$ pour un certain $u\neq0$ dans $\mathbb{R}^2$,
- $T=\mathbb{Z}u_1+\mathbb{Z}u_2$ pour certains $u_1,u_2\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

(3) **Translation** Si $r, s \in G$, alors l'élément $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation. En effet, puisque les éléments de G sont des déplacements, ce sont des applications affines et donc il existe des applications linéaires A_r, A_s et des translations τ_r, τ_s telles que $r = A_r \circ \tau_r$ et $s = A_s \circ \tau_s$. La proposition 13.62 nous donne les inverses. Nous avons

$$rsr^{-1}s^{-1} = (A_r \circ \tau_r)(A_s \circ \tau_s)(A_r^{-1} \circ \tau_{-A_r v_r})(A_s^{-1} \circ \tau_{-A_s v_s}). \tag{20.713}$$

La partie linéaire de cela est

$$A_r \circ A_s \circ A_r^{-1} \circ A_s^{-1}. \tag{20.714}$$

C'est donc une composée de rotations centrées en $(0,0)$. Mais ces rotations forment un groupe abélien (proposition 20.141). Donc nous pouvons écrire

$$A_r \circ A_s \circ A_r^{-1} \circ A_s^{-1} = A_r \circ A_r^{-1} \circ A_s \circ A_s^{-1} = \mathrm{Id}\,. \tag{20.715}$$

Tout ceci pour dire que dès que $r, s \in G$, l'élément $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation.

(4) **Les parties linéaires**[1] Nous savons de l'exemple 13.19 que les éléments de G s'écrivent sous la forme $f = \tau_v \circ \alpha$ où $v \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire.

De plus, f étant une isométrie de $(\mathbb{R}^2, d)$, l'application α est une isométrie de $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$. Puisque α est une isométrie, $\det(\alpha) = \pm 1$. Mais les déplacements conservent l'orientation ; donc α doit conserver l'orientation, et la proposition 10.32 nous dit que $\det(\alpha) > 0$. Donc

$$\det(\alpha) = 1. \tag{20.716}$$

Le théorème 20.103 dit que α est la composition d'un nombre pair de réflexions. Mais comme il y en a au plus trois (théorème 20.201), l'application α est composée de zéro ou deux réflexions.

Donc les parties linéaires des éléments de G sont des rotations.

(5) **Les autres**

Les parties linéaires des éléments de G sont des rotations. Mais les éléments de G eux-mêmes ne sont pas tellement mystérieux. Puisque ce sont des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$, elles sont composées de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

Mais ce sont des déplacements, donc ils préservent l'orientation et le théorème 20.103 dit qu'ils sont des composées de zéro ou deux réflexions (nombre pair). Ce sont donc des rotations.

(6) **Hein ?** Les éléments linéaires de G sont des rotations. Et les autres aussi ? Les linéaires sont des rotations autour de $(0,0)$; les autres sont des rotations autour de points autres que $(0,0)$.

C'est pourquoi dans la suite, nous préciserons « rotation linéaire » pour une rotation autour de $(0,0)$ et nous dirons « rotation » pour une rotation en général. Dans le contexte affine, il faut toujours faire attention à ça : une rotation peut très bien n'être pas linéaire[84].

(7) **Les rotations linéaires stabilisent T** Nous prouvons maintenant que les rotations linéaires de G stabilisent T, c'est-à-dire que si $v \in T$ et si α est une rotation linéaire de G, alors $\alpha(v) \in T$. La transformation $\alpha\tau_v\alpha^{-1}$ est dans G. Mais pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$(\alpha\tau_v\alpha^{-1})(x) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) + v\big) = x + \alpha(v) = \tau_{\alpha(v)}(x). \tag{20.717}$$

EQooLLZVooUnabir

Donc $\alpha\tau\alpha^{-1} = \tau_{\alpha(v)}$ et $\alpha(v) \in T$.

(8) **Exclusion de $T = \{0\}$** Le fait que $T = \{0\}$ ne signifie pas que tous les éléments de G sont des rotations ; il peut encore y avoir des composées de rotations et de translations $A \circ \tau$. Cela étant dit, si $T = \{0\}$, il n'en reste pas moins que $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation, c'est-à-dire est égal à Id. Mais $rsr^{-1}s^{-1} = e$ implique $rs = sr$.

Donc G est abélien. Les éléments de G sont donc des rotations qui commutent deux à deux. Puisqu'une rotation a son centre comme unique point fixe, le lemme 20.228 nous dit que tous les éléments de G sont des rotations de même centre.

Soit c le centre commun de tous les éléments de G. Vu que K est compact dans $\mathbb{R}^2$, il existe $r > 0$ tel que $K \subset B(c, r)$. Puisque G stabilise toutes les boules centrées en c, nous avons

$$G \cdot K \subset B(c, r). \tag{20.718}$$

Donc nous n'avons pas un recouvrement de $\mathbb{R}^2$. Le cas $T = \{0\}$ est exclu.

[84] Lorsque, ailleurs dans le Frido, nous disons « rotation », souvent nous pensons « rotation linéaire ». Gardez cependant à l'esprit qu'une rotation peut très bien être centrée ailleurs qu'en l'origine, et soyez toujours capable de préciser le cas échéant.

(9) **Exclusion de $T = \mathbb{Z}u$** Nous supposons à présent que $T = \mathbb{Z}u$ pour un certain $u \in \mathbb{R}^2$.

(9a) $r_0 = \pm \mathrm{Id}$ Nous savons que tous les éléments de G sont des rotations ; soit un élément r de G. La proposition 20.140(3) nous indique qu'il existe un point $a \in \mathbb{R}^2$ ainsi qu'une rotation linéaire r_0 telle que $r = \tau_a^{-1} r_0 \tau_a$. Nous allons prouver que r_0 est $\pm \mathrm{Id}$. D'abord,

$$r\tau_u r^{-1} = \tau_a^{-1} r_0 \tau_a \tau_u \tau_a^{-1} r_0^{-1} \tau_a = \tau_a^{-1} r_0 \tau_u r_0^{-1} \tau_a. \tag{20.719}$$

Ensuite, nous appliquons cela à $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(\tau_a^{-1} r_0 \tau_u r_0^{-1} \tau_a)(x) &= (\tau_a^{-1} r_0 \tau_u)\big(r_0^{-1}(x+a)\big) && \text{(20.720a)}\\ &= (\tau_a^{-1} r_0)\big(r_0^{-1}(x+a) + u\big) && \text{(20.720b)}\\ &= \tau_a^{-1}\big(x + a + r_0(u)\big) && \text{(20.720c)}\\ &= x + r_0(u). && \text{(20.720d)}\end{aligned}$$

Donc $r \circ \tau_u \circ r^{-1} = \tau_{r_0(u)}$, ce qui prouve que $r_0(u) \in T$. Comme $\|r_0(u)\| = \|u\|$ nous avons forcément $r_0(u) = \pm u$.

Si $r_0(u) = u$, alors $r_0 = \mathrm{Id}$ (parce que r_0 est une rotation fixant plus qu'un seul point). Dans ce cas, $r = \mathrm{Id}$.

Si au contraire $r_0(u) = -u$, alors $r_0 = -\mathrm{Id}$.

(9b) **Forme générale** Donc si r est un élément non trivial de G nous avons $r = \tau_a^{-1} \circ (-\mathrm{Id}) \circ \tau_a$, et alors

$$\big(\tau_a^{-1} \circ (-\mathrm{Id}) \circ \tau_a\big)(x) = \tau_a^{-1}(-\mathrm{Id})(x+a) = \tau_a^{-1}(-x-a) = -x - 2a. \tag{20.721}$$

Donc pour tout $r \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$r(x) = -x - 2a. \tag{20.722}$$

EQooQGNVooKyCGYW

Pour information, le centre de cette rotation est $-a$ (c'est le seul point fixe).

(9c) **Les centres sont alignés** Soit r une rotation de centre $-a$ et s de centre $-b$. Alors

$$(rs)(x) = r(-x-2b) = x + 2b - 2a = x + 2(b-a). \tag{20.723}$$

Donc $rs = \tau_{2(b-a)}$.

Cela prouve que $2(b-a) \in \mathbb{Z}u$.

(9d) **Une bande** Soit la droite $D = \mathbb{R}u$. Nous considérons la bande

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } d(x, D) < r\}. \tag{20.724}$$

(9e) **Une inclusion** Nous prouvons à présent que pour tout r, nous avons

$$G \cdot B_r \subset B_r. \tag{20.725}$$

Nous savons qu'un élément général de G est une rotation centrée en un point de D, et que l'action d'une telle rotation est donnée par (20.722). Nous avons

$$\begin{aligned}d\big(r(x), D\big) &= d(x + 2a, D) && \text{(20.726a)}\\ &= d\big(\tau_{2a}^{-1}(x+2a), \tau_{2a}^{-1}(D)\big) && \text{(20.726b)}\\ &= d(x, D). && \text{(20.726c)}\end{aligned}$$

EQooNCQGooGGAbCR
EQooNFJNooSAYtBD
SUBEQooMGTMooAlRwWT

Justifications :

- Pour (20.726a), nous avons $D = -D$ et $d(x,y) = d(-x,-y)$.
- Pour (20.726b), invariance par translation de la distance dans $\mathbb{R}^2$.
- Pour (20.726c), les éléments de D sont les multiples de a ; donc cette droite est invariante par cette translation.

Bref, $d(x, D) = d\big(r(x), D\big)$. Donc, pour tout $r > 0$[85] et pour tout $g \in G$, si $x \in B_r$, alors $g(x) \in B_r$.

[85] Remarquez la notation malheureuse pour r qui est maintenant une distance alors que trois mots plus tôt, c'était un élément de G.

(9f) **Exclusion**
Comme K est compact et que la fonction $x \mapsto d(x, D)$ est continue, il existe $r > 0$ tel que $K \subset B_r$. Avec ça, $G \cdot K \subset G \cdot B_r \subset B_r$. Donc $G \cdot K$ ne recouvre pas tout $\mathbb{R}^2$ et G n'est pas un groupe de pavage.

Et nous voilà avec seulement $T = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2$ en lice.

(1) **Pause : quelques parties de G à ne pas confondre** Il convient de ne pas se perdre entre différentes parties de G. Je vous laisse méditer quelques temps sur la liste suivante :

(1a) G est le groupe que nous cherchons à déterminer ;

(1b) T est le groupe des translations de G ;

(1c) le groupe des rotations linéaires dans G ;

(1d) l'ensemble des $\tau_A^{-1} \circ r \circ \tau_A$ où r est une rotation de G centrée en A. [ITEMooFWWMooNzLUGy]

(1e) L est l'ensemble des parties linéaires des éléments de G. [ITEMooIEJZooNaSKpc]

En particulier les deux derniers points ne sont pas les mêmes.

Dans le cas (1d), il s'agit de dire que r est une rotation centrée en $A \in \mathbb{R}^2$ et écrire $r = \tau_A \circ r_0 \circ \tau_A^{-1}$ (proposition 20.140(3)) et considérer r_0. Dans ce cas, r_0 est une rotation, mais elle n'est pas ce que nous appelons la « partie linéaire » de r. Il n'y a pas de garantie que cela forme un groupe.

Si r est une rotation dans G, dans le cas (1e) il s'agit de décomposer $r = \tau_v \circ \alpha$ (lemme 13.14) et considérer α. Dans ce cas, α est linéaire, mais il n'y a pas de garantie que α soit une rotation.

(2) **L est un groupe** En trois conditions.

- Si $\alpha, \beta \in L$, il existe $v, w \in \mathbb{R}^2$ tels que $\tau_v \circ \alpha \in G$ et $\tau_w \circ \beta \in G$. La loi de produit 13.62(2) dit que $\tau_v \circ \alpha \circ \tau_w \circ \beta = \tau_{\alpha(w)+v} \circ \alpha\beta$. Donc $\alpha\beta$ est la partie linéaire d'un élément de G.
- De la même façon, en utilisant l'inverse 13.62(3), $(\tau_v \circ \alpha)^{-1} = \tau_{-\alpha^{-1}(v)} \circ \alpha^{-1}$. Donc α^{-1} est la partie linéaire d'un élément de G.
- Et enfin $\mathrm{Id} = \tau_0 \circ \mathrm{Id}$. Donc l'identité est dans L.

Ok : L est un groupe.

(3) **Précision** L'ensemble L est un groupe, certes. Mais rien ne dit que L soit un sous-groupe de G.

(4) **L préserve le réseau** Soit $\alpha \in L$. Il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = \tau_v \circ \alpha \in G$. Soit $u \in T$. Nous allons montrer que $\alpha(u) \in T$. Vu que g et τ_u sont dans G, l'élément $g\tau_u g^{-1}$ est également dans G. Nous l'appliquons à $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
(\tau_v\alpha\tau_u\alpha^{-1}\tau_v^{-1})(x) &= (\tau_v\alpha\tau_u\alpha^{-1})(x - v) && \text{(20.727a)}\\
&= (\tau_v\alpha)\big(\alpha^{-1}(x - v) + u\big) && \text{(20.727b)}\\
&= \tau_v\big(x - v + \alpha(u)\big) && \text{(20.727c)}\\
&= x + \alpha(u) && \text{(20.727d)}\\
&= \tau_{\alpha(u)}(x). && \text{(20.727e)}
\end{aligned}$$

Donc $g\tau_u g^{-1} = \tau_{\alpha(u)} \in G$.

(5) **Question de trace** Soit $\alpha \in L$; dans la base $\{u_1, u_2\}$ la matrice de α est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{20.728}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. La trace de cette matrice est $a + d \in \mathbb{Z}$. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par contre, la proposition 20.151 nous dit qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de α soit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.729}$$

La trace est $2\cos(\theta)$. La trace est invariante par changement de base[86], donc $2\cos(\theta) = a + d \in \mathbb{Z}$. Les possibilités pour $\cos(\theta)$ sont donc -1, $-1/2$, 0, $1/2$ et 1.

[86] Proposition 10.205.

(6) **Les angles possibles** Nous savons que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$ (proposition 20.24(6) et lemme 20.32). La proposition 20.80 nous dit alors que, dans notre cas, les valeurs possibles pour θ dans $[0, 2\pi[$ sont

$$\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\}. \tag{20.730}$$

Donc les rotations possibles dans L sont les rotations de ces angles.

Nous devons trouver quels sont les groupes qui peuvent être formés seulement avec ces éléments.

(7) **Quelques combinaisons impossibles**

Puisque L est un groupe, il y a des combinaisons impossibles. Par exemple si $R_0(\pi/3)$ et $R_0(\pi/2)$ sont dans L, alors la composée[87] $R_0(\pi/2)R_0(\pi/3) = R_0(5\pi/6)$ est également dans L. Mais comme $5\pi/6$ n'est pas dans la liste (20.730), $R_0(5\pi/6)$ n'est pas dans L.

En raisonnant de la sorte, nous voyons que si $R_0(\pi/2) \in L$, alors $L = \text{gr}\big(R_0(\pi/2)\big)$.

(8) **La liste** Plus généralement, les possibilités pour L sont

- $\{\text{Id}\}$
- $\text{gr}\big(R_0(\pi/2)\big)$
- $\text{gr}\big(R_0(\pi/3)\big)$
- $\text{gr}\big(R_0(\pi)\big)$
- $\text{gr}\big(R_0(2\pi/3)\big)$

Une justification plus courte pour cette liste est d'invoquer le théorème 20.212(2) qui dit que L étant un sous-groupe fini des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$, il est cyclique et donc monogène. Notons pour cela que $\text{gr}\big(R_0(4\pi/3)\big) = \text{gr}\big(R_0(2\pi/3)\big)$ parce que $R_0(4\pi/3) = R_0(2\pi/3)^{-1}$. De la même manière $R_0(3\pi/2) = R_0(\pi/2)^{-1}$ et $R_0(5\pi/3) = R_0(\pi/3)^{-1}$.

(9) **Le cas un peu générique**

Nous supposons que $L = \text{gr}\big(R_0(\theta)\big)$ pour un certain θ. Nous allons voir qu'à part dans les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, il est possible de trouver une application affine α telle que le groupe $\alpha G \alpha^{-1}$ soit alors dans la liste.

Nous considérons un élément de G de la forme $\tau_{v_0} \circ R_0(\theta)$. Pour être bien clair, il n'est absolument pas garanti que v_0 soit dans T. Nous allons chercher un élément $w_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que le groupe de pavage[88] $G' = \tau_{w_0} G \tau_{w_0}^{-1}$ contienne $R_0(\theta)$. Le groupe G' contient l'élément $g = \tau_{w_0}\tau_{v_0}R_0(\theta)\tau_{w_0}^{-1}$; nous l'appliquons à $x \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x) = R_0(\theta)x - R_0(\theta)w_0 + w_0 + v_0. \tag{20.731}$$

Nous avons $g(x) = R_0(\theta)x$ lorsque

$$w_0 = \big(R_0(\theta) - \mathbb{1}\big)^{-1} v_0. \tag{20.732}$$

Voilà pourquoi le cas $\theta = 0$ sera traité à part : dans le cas $\theta = 0$, l'opérateur $R_0(\theta) - \mathbb{1}$ n'est pas inversible. Dans les autres cas, nous avons un groupe $G' = \tau_{w_0} G \tau_{w_0}^{-1}$ qui contient $R_0(\theta)$.

Puisqu'un élément général de G est de la forme $\tau_v \circ R_0(\theta)^k$, un élément général de G' est de la forme

$$\tau_{w_0} \circ \tau_v \circ R_0(\theta)^k \circ \tau_{w_0}^{-1} = \tau_{w_0 + v - R_0(\theta)^k w} \circ R_0(\theta)^k. \tag{20.733}$$

Donc tous les éléments de G' sont encore de la forme

$$\tau_v \circ R_0(\theta)^k. \tag{20.734}$$

Mais dans G' nous avons une information capitale : $R_0(\theta)^k$ lui-même est dans G'. Donc si $\tau_v \circ R_0(\theta)^k \in G'$, alors $\tau_v \in G'$.

Vu que G' est encore un groupe de pavage, tout ce qui a été dit précédemment tient, et le groupe des translations dans G' est un réseau $T' = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2$ où u_1 et u_2 peuvent être choisis arbitrairement parmi les deux plus petits vecteurs non colinéaires de T.

Tous les éléments de G' sont de la forme $\tau_v \circ R_0(\theta)^k$ avec $v \in T'$. Donc

$$G' = \text{gr}\big(\tau_{u_1}, \tau_{u_2}, R_0(\theta)\big). \tag{20.735}$$

[87] Proposition 20.152 pour l'addition des angles.
[88] Proposition 20.230.

Nous savons que $R_0(\theta)$ fixe T'. Or l'élément $R_0(\theta)u_1$ a la même norme que u_1 ; donc nous pouvons choisir $u_2 = R_0(\theta)u_1$ pour peu que $R_0(\theta)u_1$ soit non colinéaire à u_1. Et c'est ici que nous laissons le cas $\theta = \pi$ de côté.

Nous écrivons donc sans vergogne que

$$G' = \mathrm{gr}\big(\tau_{u_1}, \tau_{R_0(\theta)u_1}, R_0(\theta)\big). \tag{20.736}$$

Nous allons maintenant nous occuper de u_1. Pour cela nous considérons une rotation suivie d'une homothétie α telle que $\alpha(u_1) = e_1$. Une telle opération α d'une part, commute avec $R_0(\theta)$ et d'autre part, réalise $\alpha \circ \tau_v \circ \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(v)}$. Donc le groupe $G'' = \alpha G' \alpha^{-1}$ est, par le lemme 2.147,

$$G'' = \mathrm{gr}\big(\tau_{e_1}, \tau_{\alpha R_0(\theta)u_1}, R_0(\theta)\big). \tag{20.737}$$

Cela s'écrit aussi bien

$$G'' = \mathrm{gr}\big(\tau_{e_1}, \tau_{R_0(\theta)e_1}, R_0(\theta)\big). \tag{20.738}$$

Et voilà, ce groupe G'' est un de ceux de la liste.

(10) **Le cas $L = \{\mathrm{Id}\}$** Dans ce cas, tous les éléments de G sont de la forme τ_v avec $v \in T$. Nous considérons l'application linéaire $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\alpha(u_1) = e_1$ et $\alpha(u_2) = e_2$. Nous avons

$$(\alpha \circ \tau_{u_i} \circ \alpha^{-1})(x) = (\alpha\tau_{u_i})\alpha^{-1}(x) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) + u_i\big) = x + \alpha(u_i) = \tau_i(x). \tag{20.739}$$

Donc $\alpha \circ \tau_{u_i} \circ \alpha^{-1} = \tau_i$. De la même façon, si $a \in \mathbb{Z}$ nous avons $\alpha\tau_{au_i}\alpha^{-1} = \tau_{ae_i}$. Et avec tout ça, si $v \in T$, alors $v = au_1 + bu_2$ et nous avons

$$\alpha\tau_v\alpha^{-1} = \alpha\tau_{au_1}\tau_{bu_2}\alpha^{-1} = \alpha\tau_{au_1}\alpha^{-1}\alpha\tau_{bu_2}\alpha^{-1} = \tau_{ae_1}\tau_{be_2}. \tag{20.740}$$

Nous avons donc

$$\alpha G \alpha^{-1} = \mathrm{gr}(\tau_1, \tau_2). \tag{20.741}$$

Cela est un des groupes de la liste.

Notez qu'à la place de ces calculs, nous pouvions aussi invoquer la proposition 2.147.

(11) **Le cas $L = \{-\mathrm{Id}\}$** Dans le cas $\theta = \pi$, nous pouvons aller jusqu'à (20.735) et écrire

$$G' = \mathrm{gr}\big(\tau_{u_1}, \tau_{u_2}, R_0(\pi)\big). \tag{20.742}$$

Puisque $R_0(\pi) = -\mathrm{Id}$ commute avec toutes les applications linéaires et que u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, nous pouvons considérer une application linéaire $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\alpha(u_1) = e_1$, $\alpha(u_2) = e_2$. Nous avons alors

$$G'' = \alpha G' \alpha^{-1} = \mathrm{gr}\big(\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, -\mathrm{Id}\big), \tag{20.743}$$

qui est encore dans la liste.

□

20.13 Un peu de structure de O(n)

20.13.1 Valeurs propres dans O(n)

PROPooVEJGooWnqtMm

Proposition 20.232 ([643]).
Soit une matrice $A \in O(n)$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\bar{\lambda}$ est également une valeur propre de A, et de plus $|\lambda| = 1$.

Démonstration. Dire que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A signifie qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ (non nul) tel que $Ax = \lambda x$. Comme les éléments de la matrice A sont réels,

$$A\bar{x} = \bar{A}\bar{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}. \tag{20.744}$$

Donc $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A pour le vecteur propre $\bar{x}$.

Soit λ une valeur propre de A de vecteur propre x. Alors nous avons d'une part

$$\langle \overline{Ax}, Ax\rangle = \langle A^tA\bar{x}, x\rangle = \langle x, \bar{x}\rangle, \tag{20.745}$$

et d'autre part

$$\langle \overline{Ax}, Ax\rangle = \langle \bar{\lambda}\bar{x}, \lambda x\rangle = |\lambda|^2\langle \bar{x}, x\rangle. \tag{20.746}$$

Puisque $x \neq 0$ nous avons aussi $\langle \bar{x}, x\rangle \neq 0$. Par conséquent $|\lambda|^2 = 1$ et $|\lambda| = 1$. □

LEMooNEDQooNRmASH

Lemme 20.233 ([643]).
Soient un espace vectoriel euclidien E de dimension finie et une isométrie f de E. Soit F un sous-espace de E stable par f. Alors $F^\perp$ est stable par f.

Démonstration. La restriction $f_F\colon F \to F$ est encore une isométrie ; elle est donc inversible : pour tout $y \in F$, il existe $x \in F$ tel que $y = f(x)$. Soit $a \in F^\perp$; nous montrons que $f(a) \in F^\perp$. Soit donc $y \in F$ et calculons :

$$\langle y, f(a)\rangle = \langle f(x), f(a)\rangle = \langle x, a\rangle = 0 \tag{20.747}$$

parce que $x \in F$ et $a \in F^\perp$. □

PROPooOMORooWzsrDB

Proposition 20.234 ([643]).
Soit une isométrie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(1) L'application linéaire f possède au moins une valeur propre réelle qui vaut ± 1.

(2) Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.748}$$

avec $\epsilon, \lambda = \pm 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Démonstration. Le polynôme caractéristique de f, donné par $\det(f - \lambda\,\mathrm{Id})$, est à coefficients réels et de degré 3. Il possède donc au moins une solution réelle, par le corolaire 14.93. Soit donc une valeur propre réelle λ de χ_f ; par le lemme 20.232 nous avons $\lambda = \pm 1$. Soit u_1 le vecteur propre correspondant. Nous notons F l'espace engendré par u_1.

Nous avons $f(F) = F$ et donc $f(F^\perp) = F^\perp$ par le lemme 20.233. Soit une base orthonormée $\{u_2, u_3\}$ de $F^\perp$ et la matrice B de la restriction f_p à $F^\perp$. Comme l'application f_p est une isométrie de $F^\perp$, la matrice B est, par le lemme 20.147, de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.749}$$

pour un certain $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\epsilon = \pm 1$.

Dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est alors

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{20.750}$$

comme annoncé. □

Pour classifier les isométries de $\mathbb{R}^3$, nous pouvons nous baser sur les possibilités de la matrice donnée dans le lemme 20.234. Il y a essentiellement quatre possibilités suivant les valeurs de $\lambda = \pm 1$ et $\epsilon = \pm 1$.

(1) **Si $\epsilon = \lambda = 1$** Alors la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.751}$$

et l'isométrie correspondante est la rotation d'angle $-\theta$ autour de la droite de u_1.

(2) **Si $\epsilon = \lambda = -1$** Alors la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{20.752}$$

Cette application est plus subtile, parce que même dans le plan $\mathrm{Span}(u_2, u_3)$, ce n'est pas une rotation. Nous allons montrer qu'il s'agit d'une réflexion autour de la droite d'angle $\theta/2$ dans le plan $\mathrm{Span}(u_2, u_3)$. Nous nommons D cette droite. Dans la base (u_1, u_2, u_3), cette droite est donnée par[89]

$$t \mapsto t\big(0, \cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\big). \tag{20.753}$$

[89] Les plus acharnées liront 6.7 pour comprendre la différence entre $\{u_1, u_2, u_3\}$ et (u_1, u_2, u_3).

L'image de u_1 par cette réflexion est $-u_1$, c'est clair.

Étudions en détail l'image de u_3. Nous devons démontrer que la droite D coupe le segment $[u_3, A(u_3)]$ perpendiculairement en son milieu.

Nous considérons la base (u_2, u_3) du plan $\text{Span}(u_2, u_3)$. En utilisant les coordonnées dans cette base, nous avons $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(u_3) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Le milieu du segment $[u_3, A(u_3)]$ est le point

$$M = \left(\frac{\sin(\theta)}{2}, \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \right). \tag{20.754}$$

Les formules de duplication d'angle du corolaire 20.17 nous permettent d'écrire $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta/2)$ et $\cos(\theta/2)$, et donc d'exprimer le point M de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M &= \left(\cos(\theta/2)\sin(\theta/2), \frac{1 - \big(\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)\big)}{2} \right) && \text{(20.755a)} \\ &= \big(\cos(\theta/2)\sin(\theta/2), \sin^2(\theta/2) \big) && \text{(20.755b)} \\ &= \sin(\theta/2)\big(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \big). && \text{(20.755c)} \end{aligned}$$

Ce point fait donc partie de la droite D. La droite D coupe le segment $[u_3, A(u_3)]$ en son milieu.

En ce qui concerne l'orthogonalité, nous calculons le produit scalaire

$$\big(A(u_3) - u_3\big) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \sin(\theta)\cos(\theta/2) - \big(1 + \cos(\theta)\big)\sin(\theta/2) = 0 \tag{20.756}$$

où nous avons encore utilisé les duplications d'angles et le fait que $1 = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)$ (lemme 20.4).

(3) **Si $\epsilon = -1$ et $\lambda = 1$** Alors la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.757}$$

C'est la symétrie orthogonale par le plan engendré par u_1 et $v = \cos(\theta/2)u_2 + \sin(\theta/2)u_3$.

Le vecteur u_1 est bien évidemment préservé par A. En ce qui concerne le vecteur v,

$$A(v) = \cos(\theta/2) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = v. \tag{20.758}$$

Nous avons sauté quelques étapes de calcul mettant en scène les formules de duplication d'angle[90] : exprimer $\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$ et $\sin(\theta) = 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)$.

Pour achever, nous devons trouver un vecteur w perpendiculaire au plan, et montrer qu'il est envoyé par A sur $-w$. Un vecteur $w = xu_1 + yu_2 + zu_3$ est perpendiculaire au plan si les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \big(\cos(\theta/2)u_2 + \sin(\theta/2)u_3\big) \cdot (xu_1 + yu_2 + zu_3) = 0 && \text{(20.759a)} \\ u_1 \cdot (xu_1 + yu_2 + zu_3) = 0. && \text{(20.759b)} \end{aligned}$$

Nous avons immédiatement $x = 0$ et ensuite la relation

$$y\cos(\theta/2) + z\sin(\theta/2) = 0. \tag{20.760}$$

EQooXQMDooTvwrWk

Nous devons prouver que $A(w) = -w = -yu_2 - zu_3$, c'est-à-dire que

$$y \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}. \tag{20.761}$$

[90] Corolaire 20.17.

La première ligne est immédiate. Nous faisons la seconde, et nous laissons à la lectrice la troisième[91]. En utilisant les formules de duplication d'angle,

$$\begin{aligned} y\cos(\theta)+z\sin(\theta) &= y\big(\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)\big)+2z\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) && (20.762a)\\ &= y\big(2\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)-\cos^2(\theta/2)\big)+2z\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) && (20.762b)\\ &= -y+2\cos(\theta/2)\big(y\cos(\theta/2)+z\sin(\theta/2)\big) && (20.762c)\\ &= -y && (20.762d)\end{aligned}$$

où pour la dernière ligne, nous avons utilisé la relation (20.760).

(4) **Si $\epsilon=1$ et $\lambda=-1$** Alors la matrice est

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{20.763}$$

Cela est la composition entre la symétrie de plan $\mathrm{Span}(u_2,u_3)$ et la rotation d'angle θ dans ce plan.

20.13.2 Sous-groupes finis de SO(3)

LEMooWIMMooXOCfSt

Lemme 20.235 ([1]).
Points fixes pour SO(3).

(1) *Tout élément de* SO(3) *possède une droite de points fixes.*

(2) *Tout élément non trivial de* SO(3) *possède une seule droite de points fixes.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique d'un élément de SO(3) est de degré trois et possède donc (en comptant les multiplicités), trois racines dont une réelle par le corolaire 14.93. Comme nous sommes en dimension impaire, le coefficient du terme de degré 3 est -1 et le polynôme caractéristique de $g\in\mathrm{SO}(3)$ s'écrit

$$\chi_g(X)=-(X-\lambda_1)(X-\bar{\lambda}_1)(X-s) \tag{20.764}$$

avec $s=\pm1$ que nous allons tout de suite fixer. Nous savons que $\det(g)=\chi_g(0)$ mais aussi que $\det(g)=1$. Donc

$$1=\det(g)=\chi_g(0)=\lambda_1\bar{\lambda}_1 s=s. \tag{20.765}$$

Tout cela pour dire que tout élément de SO(3) possède une valeur propre égale à 1, et donc une droite de points fixes.

Pour continuer, supposons que g possède deux droites distinctes de points fixes. En particulier g fixe un plan. Une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ peut être choisie en prenant deux vecteurs e_1, e_2 dans ce plan et un vecteur e_3 perpendiculaire au plan.

Puisque g est une isométrie, la base reste orthonormée sous l'action de g. Donc g a pour matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pm1\end{pmatrix}. \tag{20.766}$$

Pour que le déterminant soit 1, il faut que la matrice soit l'identité. □

PROPooBHPNooHPlgwH

Proposition 20.236 ([1, 644, 121, 645, 576]).
Les sous-groupes finis de SO(3) *sont :*

(1) *les groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,*

(2) *les groupes diédraux D_n,*

(3) *le groupe alterné A_4,*

(4) *le groupe alterné A_5*

(5) *le groupe symétrique S_4.*

Démonstration. Soit G, un sous-groupe fini de SO(3). Par la proposition 10.44, les éléments de G sont des isométries de $\mathbb{R}^3$, et le lemme 20.235 dit que tout élément de G possède une droite de points fixes.

Un point de la sphère unité fixé par $g\in G$ est un **pôle** de g. Nous nommons Ω l'ensemble des pôles des éléments non triviaux de G.

[91] Je n'ai pas vérifié, alors faites attention.

(1) **Une action** Le groupe G agit sur Ω. En effet si $x \in \Omega$, alors x est fixé par un élément g. Montrons que $h(x)$ est également fixé par un élément de G. Pas dur : $(hgh^{-1})h(x) = h(x)$; donc $h(x)$ est un pôle de hgh^{-1}.

(2) **Les fixateurs sont cycliques** Nous montrons à présent que pour tout $x \in \Omega$, le sous-groupe $\mathrm{Fix}(x)$ est cyclique. Soit donc $x \in \Omega$, le plan orthogonal $\sigma = \mathrm{Span}(x)^\perp$ et $h \in \mathrm{Fix}(x)$. Nous avons $h(\sigma) = \sigma$. En effet si $y \in \sigma$ nous avons

$$0 = y \cdot x = h(y) \cdot h(x) = h(y) \cdot x, \tag{20.767}$$

donc $h(y)$ est perpendiculaire à x. L'inclusion inverse se démontre de même : si $y \in \sigma$ alors $y = h\big(h^{-1}(y)\big)$ alors que $h^{-1}(y) \in \sigma$.

La restriction de h à σ est une isométrie de σ. Prenant une isométrie $f : \sigma \to \mathbb{R}^2$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Fix}(x) &\to \mathrm{SO}(2) \\ h &\mapsto f \circ h \circ f^{-1}. \end{aligned} \tag{20.768}$$

est un morphisme injectif de groupes. En effet nous avons d'une part

$$\varphi(hh') = f \circ h \circ h' \circ f^{-1} = fhf^{-1}fh'f^{-1} = \varphi(h)\varphi(h'), \tag{20.769}$$

d'où le morphisme. Et d'autre part, si $\varphi(h) = \varphi(h')$ alors $f \circ h \circ f^{-1} = f \circ h' \circ f^{-1}$, qui donne immédiatement $h = h'$.

Nous en déduisons que $\mathrm{Fix}(x)$ est isomorphe à un sous-groupe de $SO(2)$ (l'image de φ). Le lemme 20.154 en fait un groupe cyclique.

(3) **Taille des fixateurs** Soient Ω_i les orbites. Si $x, y \in \Omega_i$ alors nous montrons que $|\mathrm{Fix}(x)| = |\mathrm{Fix}(y)|$ avec la bijection

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Fix}(x) &\to \mathrm{Fix}(y) \\ h &\mapsto g^{-1}hg \end{aligned} \tag{20.770}$$

où g est choisie de façon à avoir $y = g(x)$ (possible parce que x et y sont dans la même orbite). Cela est surjectif parce que si $k \in \mathrm{Fix}(x)$ alors $k = \varphi(gkg^{-1})$ et l'on vérifie que $gkg^{-1} \in \mathrm{Fix}(y)$. L'application φ est également injective parce que si $ghg^{-1} = gh'g^{-1}$ alors $h = h'$.

(4) **Un peu de notations** Puisque tous les fixateurs des éléments d'une orbite ont la même taille (finie), nous pouvons noter

$$n_i = |\mathrm{Fix}(x_i)| \tag{20.771}$$

pour $x_i \in \Omega_i$. Nous notons également r le nombre d'orbites de G.

La formule de Burnside du théorème 5.27, avec les notations d'ici, donne

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|. \tag{20.772}$$

(5) **Une belle formule** Soit l'ensemble

$$A = \{(g, x) \text{ tel que } g \in G \setminus \{e\}, x \in \mathrm{Fix}(g)\} \tag{20.773}$$

où par $\mathrm{Fix}(g)$ nous entendons les pôles de G fixés par g.

Il y a $|G| - 1$ possibilités pour la composante g, mais chaque élément $g \neq e$ possède exactement deux pôles, donc l'ensemble A contient exactement $2(|G| - 1)$ éléments.

Nous pouvons calculer le nombre d'éléments dans A d'une autre façon : pour chaque $x \in \Omega$ nous avons $|\mathrm{Fix}(x)| - 1$ éléments de $G \setminus \{e\}$ qui fixent x. Donc

$$|A| = \sum_{x \in \Omega} \big(|\mathrm{Fix}(x)| - 1\big). \tag{20.774}$$

Mais $|\mathrm{Fix}(x)|$ est constant sur les orbites. Nous coupons donc la somme sur Ω en plusieurs sommes sur les orbites Ω_i :

$$|A| = \sum_{i=1}^{r} \sum_{x \in \Omega_i} \big(|\mathrm{Fix}(x)| - 1\big) = \sum_i |\Omega_i|(n_i - 1). \tag{20.775}$$

En égalisant les deux façons de calculer $|A|$, nous déduisons la formule

$$2\big(|G|-1\big)=\sum_i|\Omega_i|(n_i-1). \tag{20.776}$$

Nous utilisons ensuite la relation orbite-stabilisateur, proposition 5.20 : $|\operatorname{Fix}(x_i)||\Omega_i|=|G|$; la formule (20.776) devient

$$2\big(|G|-1\big)=\sum_i|G|-\sum_i\frac{|G|}{n_i}=r|G|+|G|\sum_i\frac{1}{n_i}, \tag{20.777}$$

ou encore, en simplifiant par $|G|$:

$$2-\frac{2}{|G|}=r-\sum_i\frac{1}{n_i}=\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{n_i}\right). \tag{20.778}$$

Nous pouvons aussi repartir de (20.776) et sommer de façon plus simple $\sum_i|\Omega_i|=|\Omega|$ pour obtenir

$$2\big(|G|-1\big)=r|G|-|\Omega| \tag{20.779}$$

où Ω est l'ensemble des pôles de $G\setminus\{e\}$.

(6) **Quelles sont les possibilités ?** Les nombres $|G|$, r et n_i sont des entiers. Nous allons voir qu'il n'y a pas des centaines de possibilités pour satisfaire la relation (20.778). D'abord, pour toute valeur de $|G|$ (strictement plus grande que 1),

$$1\leqslant 2-\frac{2}{|G|}<2. \tag{20.780}$$

Ensuite, si g fixe x alors g^{-1} fixe également x, de sorte que $n_i=|\operatorname{Fix}(x_i)|\geqslant 2$ pour tout i. Donc tous les termes dans la somme à droite de (20.778) sont dans $[\frac{1}{2},1[$. Nous avons donc au minimum deux termes, et au maximum trois. Autrement dit : $r=2$ ou $r=3$.

(7) **Si $r=2$** Le plus simple est de repartir de (20.779). En posant $r=2$ nous trouvons tout de suite $|\Omega|=2$. Il y a donc exactement deux pôles pour l'action de G sur la sphère unité.

Tous les éléments de G laissent donc le même axe invariant et G est un sous-groupe des isométries du plan qui lui est perpendiculaire. Autrement dit, G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(2)$ et donc cyclique par le lemme 20.154.

Nous étudions à présent le cas $r=3$. Vu que ça va être un peu long, nous sautons un niveau d'indentation.

(1) **Les possibilités pour $r=3$** Nous devons voir les solutions entières $(n_1,n_2,n_3,|G|)$ de

$$2-\frac{2}{|G|}=3-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_3}<2. \tag{20.781}$$

Il faut en particulier que

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}>1, \tag{20.782}$$

ce qui signifie qu'au moins un des n_i doit être 1 ou 2, mais qu'il n'est pas possible que tous les n_i soient plus grands ou égaux à 3. Puisque $n_i=|\operatorname{Fix}(x_i)|\geqslant 2$, nous en déduisons qu'au moins un des n_i doit valoir 2. Nous posons donc $n_1=2$.

De plus, nous savons que les n_i doivent diviser $|G|$. Donc $|G|$ est pair.

(2) **Si $n_2=2$** Nous sommes dans le cas $r=3$, $n_1=2$, $n_2=2$. Nous avons

$$\frac{1}{n_3}=\frac{2}{|G|}, \tag{20.783}$$

mais aussi $n_3=|G|/|\Omega_3|$ d'où nous déduisons que $|\Omega_3|=2$. Nous avons donc une orbite à deux éléments. Soit $\Omega_3=\{x,y\}$ avec $x\neq y$.

Le groupe $\operatorname{Fix}(x)$ est un groupe à $|G|/2$ éléments. Il est donc normal par le lemme 3.166. Si $g\in G$ est tel que $g(x)=y$ alors nous avons $\operatorname{Fix}(y)=g\operatorname{Fix}(x)g^{-1}$, mais comme $\operatorname{Fix}(x)$ est normal nous avons $\operatorname{Fix}(x)=\operatorname{Fix}(y)$. Donc tous les éléments de $\operatorname{Fix}(x)$ fixent x et y. Le groupe $\operatorname{Fix}(x)$ est donc un sous-groupe de $\mathrm{SO}(2)$ et est cyclique, comme vu plus haut.

Mais de plus nous avons forcément $y = -x$ parce qu'un élément de G qui fixe un point fixe également l'opposé. Vu que $\Omega_3 = \{x, -x\}$, il existe $s \in G$ tel que $s(x) = -x$. Évidemment, s n'est pas dans $\mathrm{Fix}(x)$ et les points fixes de s ne sont pas parmi x et $-x$. Donc l'élément s^2 a au moins 4 points fixes : les deux de s ainsi que x et $-x$. Il a donc au moins deux droites de points fixes, et est donc l'identité : $s^2 = e$.

De plus, vu que $s(y)$ doit être égal soit à x soit à y, et que $s(x) = y$, l'injectivité de s donne $s(y) = x$.

Soit a, un générateur de $\mathrm{Fix}(x)$. Nous allons montrer que $G = \mathrm{gr}(s, sa)$. Nous avons déjà

$$(sa)(x) = s(x) = y \tag{20.784a}$$
$$(sa)(y) = s(y) = x. \tag{20.784b}$$

Donc sa inverse x et y. Mais sa a ses propres deux points fixes (qui ne sont ni x ni y). L'élément $(sa)^2$ a donc quatre points fixes sur la sphère unité : x, y et les deux de sa. Nous en déduisons que $(sa)^2 = e$.

Nous nous souvenons que a est un générateur $\mathrm{Fix}(x)$. Mais $a = s \cdot sa$, donc $a^k = (ssa)^k$. Nous en déduisons que $\mathrm{gr}(s, sa)$ contient au moins $\mathrm{Fix}(x)$.

D'autre part si h et h' sont des éléments distincts dans $\mathrm{Fix}(x)$, alors sh et sh' sont des éléments distincts de $\mathrm{gr}(s, sa)$ qui ne sont pas dans $\mathrm{Fix}(x)$. Autrement dit, la partie

$$A = \{sh \text{ tel que } h \in Fix(x)\} \tag{20.785}$$

est une partie de même cardinal que $\mathrm{Fix}(x)$ tout en n'ayant aucune intersection avec $\mathrm{Fix}(x)$ (note : l'identité n'est pas dans A). Mais $|\mathrm{Fix}(x)| = |G|/2$, donc $A \cup \mathrm{Fix}(x) = G$. Et justement $A \cup G \subset \mathrm{gr}(s, sa)$. Nous en déduisons que $\mathrm{gr}(s, sa) = G$.

Le théorème 20.198 nous assure que le groupe G est alors le groupe diédral parce que les éléments s et sa vérifient les relations données en 20.192.

(3) **Si $r = 3$, les autres cas possibles** Nous repartons de (20.778) en posant $r = 3$. Nous obtenons ceci :

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}. \tag{20.786}$$

Nous avons déjà vu que $n_1 = 2$ était obligatoire, et que tous les cas où deux des n_i sont égaux à 2 sont déjà couverts. Donc n_2 et n_3 valent 3 ou plus.

Nous trions les n_i dans l'ordre croissant. Si $n_2 = 4$ ou plus, alors n_3 vaut 4 ou plus. Mais

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 < 1 + \frac{2}{|G|}. \tag{20.787}$$

Donc $n_3 = 3$ est obligatoire. Nous avons alors l'inégalité suivante qui restreint n_3 :

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{3}{|G|} > \frac{1}{6}. \tag{20.788}$$

Donc n_3 est 3, 4 ou 5.

Les derniers cas à couvrir sont :

- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 3)$. Dans ce cas, $\frac{7}{6} = 1 + \frac{2}{|G|}$, donc $|G| = 12$.
- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 4)$. Dans ce cas, $|G| = 24$.
- $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 5)$. Dans ce cas, $|G| = 60$.

(4) **Le cas $(2, 3, 3)$**

Nous utilisons les relations $n_i|\Omega_i| = |G|$ pour connaître la taille des orbites. Nous avons :

(4a) $2|\Omega_1| = 12$, donc $|\Omega_1| = 6$,

(4b) $3|\Omega_2| = 12$, donc $|\Omega_2| = 4$,

(4c) $3|\Omega_3| = 12$, donc $|\Omega_3| = 4$.

Nous avons $G \cdot \Omega_2 = \Omega_2$. D'une part parce que, par définition d'une orbite, $G \cdot \Omega_2 \subset \Omega_2$, et d'autre part parce que si $x \in \Omega_2$, alors $g^{-1}(x) \in \Omega_2$ et $g\big(g^{-1}(x)\big) = x$; donc Ω_2 est bien dans l'image de Ω_2 par G. Nous avons donc un morphisme $s\colon G \to S_{\Omega_2}$ que nous allons immédiatement voir comme

$$s\colon G \to S_4 \tag{20.789}$$

où S_4 est le groupe des permutations de $\{1,2,3,4\}$.

Voyons que s est injective. Si $s(g) = s(h)$, alors $s(gh^{-1}) = \mathrm{Id}$. Autrement dit, l'élément sh^{-1} de G est l'identité sur Ω_2 qui contient 4 éléments. Fixant 4 points (au moins), l'élément sh^{-1} est l'identité. Par conséquent

$$s\colon G \to s(G) \subset S_4 \tag{20.790}$$

est un isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_4. Mais $|G| = 12$ et $|S_4| = 24$, donc G est d'indice deux dans S_4 et est donc le groupe alterné A_4 par la proposition 7.44(3).

(5) **Le cas $(2,3,4)$** Nous avons $|G = 24|$ et les orbites ont pour taille :

- $2|\Omega_1| = 24$, donc $|\Omega_1| = 12$,
- $3|\Omega_2| = 24$, donc $|\Omega_2| = 8$,
- $4|\Omega_3| = 24$, donc $|\Omega_3| = 6$.

(5a) **Ω_2 vient par paires** Soit $x \in \Omega$ tel que $|\operatorname{Fix}(x)| = 3$. Alors $x \in \Omega_2$ parce que x est forcément dans un des Ω_i et tout élément x_i de Ω_i vérifie $|\operatorname{Fix}(x_i)| = n_i$. Mais comme les éléments de $\mathrm{SO}(3)$ sont des applications linéaires, ceux qui fixent x fixent également $-x$. Cela pour dire que si $x \in \Omega_2$, alors $-x \in \Omega_2$. Nous avons donc quatre éléments distincts a_1, a_2, a_3 et a_4 tels que

$$\Omega_2 = \{\pm a_1, \pm a_2, \pm a_3, \pm a_4\}. \tag{20.791}$$

(5b) **Action sur les couples** Nous prétendons que G agit sur l'ensemble des couples $\{\pm a_i\}$. C'est encore la linéarité qui joue : l'élément $g(a_i)$ est forcément un des $\pm a_k$ (éventuellement $k = i$). Si $g(a_i) = a_k$, alors $g(-a_i) = -a_k$. Autrement dit, pour tout i, il existe un k tel que $g\big(\{a_i, -a_i\}\big) = \{a_k, -a_k\}$. Cette association $i \mapsto k$ est bijective (sinon g ne serait pas bijective), et fournit donc un morphisme de groupes

$$s\colon G \to S_4. \tag{20.792}$$

(5c) **s est injective** Nous prouvons à présent que $s(g) = \mathrm{Id}$ si et seulement si $g = e$. Dans un sens c'est évident : $g(e) = \mathrm{Id}$. Dans l'autre sens, nous devons prouver que si $g(a_i) \in \pm a_i$ pour tout i alors $g = e$.

Si $g(a_i) = a_i$ pour tout i, alors g stabilise 4 points et l'affaire est pliée. Nous supposons qu'au moins un des a_i n'est pas stabilisé par g. Pour fixer les idées nous disons que c'est a_1. Nous avons donc $g(a_1) = -a_1$. (oui : $g(a_1) = -a_1$ et non $\pm a_k$ pour un autre k parce que nous sommes sous l'hypothèse que g stabilise les couples)

L'élément g^2 fixe tout Ω_2 ; donc $g^2 = e$. Nommons $\pm b$ les points fixes de g. Si $b \in \Omega_2$ alors $|\operatorname{Fix}(b)| = 3$, c'est-à-dire que les éléments de G qui fixent b sont dans un groupe d'ordre 3, et le corolaire 2.74 nous indique que ces éléments ne peuvent être que d'ordre 1 ou 3, pas deux. Nous en déduisons que b n'est pas dans Ω_2 et donc que $g(a_i) = -a_i$ pour tout i.

Jusqu'à présent nous avons prouvé que si $g \in \ker(s)$ est non trivial, alors $g(a_i) = -a_i$ pour tout i.

Soit maintenant $h \in G$. Comme Ω_2 est une orbite, $h(a_i) \in \Omega_2$ et nous notons $h(a_i) = \epsilon a_k$ avec $\epsilon = \pm 1$ et éventuellement $k = i$ ou éventuellement pas. Nous avons :

$$(h^{-1}gh)(a_i) = \epsilon(h^{-1}g)(a_k) = -\epsilon h^{-1}(a_k) = -\epsilon^2 a_i = -a_i. \tag{20.793}$$

Donc g et $h^{-1}gh$ ont même restriction à Ω_2. En particulier $h^{-1}ghg^{-1}$ est l'identité sur Ω_2 et est donc l'identité.

Pour tout h nous avons $g = h^{-1}gh$. Les points fixes de $h^{-1}gh$ sont $\pm h^{-1}(b)$, mais aussi $\pm b$. Nous avons donc égalité d'ensemble $\{h(b), -h(b)\} = \{b, -b\}$ pour tout $h \in G$ (notez le changement de notation $h \to h^{-1}$). Cela signifie que $\{b, -b\}$ est une orbite de G. Maizon'a pas d'orbites de cardinal deux ; contradition. Nous en déduisons que e est l'unique élément de $\ker(s)$.

(5d) **Conclusion** La partie $s(G)$ est un sous-groupe de S_4 isomorphe à G. Mais au niveau des cardinaux, $|G| = 24$ en même temps que $|S_4| = 24$. Donc $G \simeq s(G) \simeq S_4$.

Nous passons au cas $(2,3,5)$, et comme ça va être long et douloureux[92], nous sautons un niveau d'indentation.

Au niveau du cardinal de G,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{2}{|G|}, \tag{20.794}$$

[92] Mais pas autant que le théorème 34.36, cependant.

donc $|G| = 60$. Et pour les orbites, $|\Omega_1| = 30$, $|\Omega_2| = 20$, $|\Omega_3| = 12$.

La proposition 7.54 nous indique que le seul groupe simple d'ordre 60 est le groupe A_5. Nous allons donc nous atteler à prouver que G est simple. Vous êtes prêts ?

(1) **Fixateurs et ordres** Tous les éléments de G sont dans un fixateur de type $\text{Fix}(x)$, et comme l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe (corolaire 2.74), tous les éléments de G ont un ordre 2, 3 ou 5. Nous sommes dans un cas très particulier parce que

- Les trois nombres 2, 3 et 5 sont des nombres premiers distincts. Donc « diviser n_i » signifie pratiquement « être égal à n_i », surtout lorsqu'on parle de l'ordre d'un élément, qui ne peut pas être 1.
- Il existe une seule orbite de chaque taille.

Nous notons $G(n_i)$ l'ensemble des éléments de G d'ordre n_i. Les parties $G(n_i)$ ne contiennent pas l'identité.

(2) $g \in G(n_i)$ **implique** $\text{Fix}(g) \subset \Omega_i$ Si $g \in G(n_i)$ et $x \in \text{Fix}(g)$ alors $x \in \Omega_i$. En effet $x \in Fix(g)$ signifie $g(x) = x$ et donc aussi $g \in \text{Fix}(x)$. Donc l'ordre de g divise $|Fix(x)|$, alors que l'ordre de g est n_i et que les possibilités pour $|\text{Fix}(x)|$ sont exactement les n_i, lesquels sont premiers entre eux. Donc $|\text{Fix}(x)| = n_i$ et $x \in \Omega_i$.

(3) $|\text{Fix}(x)| = n_i$ **implique** $x \in \Omega_i$ Comme plus haut, $g \in \text{Fix}(x)$ implique que l'ordre de g divise n_i et est donc égal à n_i. Autrement dit, $g \in G(n_i)$. De plus $g \in \text{Fix}(x)$ implique $x \in \text{Fix}(g)$. Par le cas juste au-dessus nous déduisons $x \in \Omega_i$.

(4) a **et** $-a$ **dans la même orbite**

Nous avons évidemment $\text{Fix}(a) = \text{Fix}(-a)$ parce que les éléments de G sont des applications linéaires. Si $|\text{Fix}(a)| = n_i$ alors $a \in \Omega_i$ et aussi $|\text{Fix}(-a)| = |\text{Fix}(a)| = n_i$ et encore $-a \in \Omega_i$.

(5) **Nombre de** $\text{Fix}(x_i)$ Soient $a, b \in \Omega_i$. Nous avons $|\text{Fix}(a)| = |\text{Fix}(b)| = n_i$ et $\text{Fix}(a) = \text{Fix}(b)$ si et seulement si $b = -a$ parce qu'un élément qui fixe a et b fixe automatiquement a, b, $-a$, et $-b$. Aucun élément non trivial ne peut fixer quatre points distincts. Autrement dit,

$$\text{Fix}(a) \cap \text{Fix}(b) = \begin{cases} \text{Fix}(a) & \text{si } a = \pm b \\ \{e\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.795}$$

Chaque élément $x_i \in \Omega_i$ a son fixateur (il y en aurait $|\Omega_i| = 60/n_i$), mais ces fixateurs sont égaux deux à deux, donc il y a seulement $\frac{60}{2n_i}$ groupes distincts de la forme $|\text{Fix}(x_i)|$ avec $x_i \in \Omega_i$.

(6) **Récapitulatif** En reprenant ce que nous venons de dire avec $i = 1, 2, 3$ nous trouvons :

(6a) $n_1 = 2$, avec $|\Omega_1| = 30$ et 15 groupes du type $\text{Fix}(x_1)$ avec x_1 parcourant Ω_1.

(6b) $n_2 = 3$, avec $|\Omega_2| = 20$ et 10 groupes du type $\text{Fix}(x_2)$ avec x_2 parcourant Ω_2.

(6c) $n_3 = 5$, avec $|\Omega_3| = 12$ et 6 groupes du type $\text{Fix}(x_3)$ avec x_3 parcourant Ω_3.

Un élément non trivial de G se trouve forcément dans un et un seul de ces sous-groupes. Plus précisément, si $g \in G(n_i)$ alors g est dans un des $\text{Fix}(x_i)$ avec $x_i \in \Omega_i$.

Comptons pour être sûr de ne pas s'être trompé. Chacune des lignes décrit 30 éléments de G ; par exemple, la seconde ligne donne 10 groupes de taille $|\text{Fix}(x_2)| = n_2 = 3$. Mais tous ces groupes ont pour intersection exactement $\{e\}$. Donc le comptage des éléments se fait comme suit :

$$3 \times 30 - 15 - 10 - 6 + 1. \tag{20.796}$$

Le dernier $+1$ est parce que nous aurions décompté l'identité une fois de trop. Bref, on a bien 60 éléments comme il se doit.

(7) **Un ensemble à calculer deux fois** Soient les ensembles A_2, A_3 et A_5 définis par

$$A_i = \{(g, a) \in G(n_i) \times \Omega_i \text{ tel que } g(a) = a\} \tag{20.797}$$

où $G(n_i)$ est la partie de G des éléments d'ordre n_i.

Nous avons

$$|A_i| = \sum_{g \in G(n_i)} |\text{Fix}(g) \cap \Omega_i|. \tag{20.798}$$

Mais les éléments de $G(n_i)$ sont d'ordre n_i, et par ce que nous avons dit plus haut, tous les éléments de $\text{Fix}(g)$ sont dans Ω_i. Donc $\text{Fix}(g) \cap \Omega_i = \text{Fix}(g)$. Nous avons alors

$$|A_i| = \sum_{g \in G(n_i)} |\text{Fix}(g)| = 2|G(n_i)| \tag{20.799}$$

parce que $|\text{Fix}(g)| = 2$ pour tout g.

En comptant $|A_i|$ dans l'autre sens, nous avons

$$|A_i| = \sum_{x \in \Omega_i} |\text{Fix}(x) \cap G(n_i)| \tag{20.800}$$

EQooBHIIooVcGgEd

Vu que $x \in \Omega_i$, les éléments de $\text{Fix}(x)$ sont d'ordre n_i[93] (sauf e), et comme $G(n_i)$ est justement l'ensemble des éléments d'ordre n_i dans G nous avons $\text{Fix}(x) \cap G(n_i) = \text{Fix}(x) \setminus \{e\}$. Cela pour dire que

$$\begin{aligned}
|A_i| &= \sum_{x \in \Omega_i} \Big(|\text{Fix}(x)| - 1 \Big) && \text{(20.801a)}\\
&= \sum_{x \in \Omega_i} |\text{Fix}(x)| - \sum_{x \in \Omega_i} 1 && \text{(20.801b)}\\
&= \sum_{x \in \Omega_i} n_i - |\Omega_i| && |\text{Fix}(x)| = n_i \text{ pcq } x \in \Omega_i \quad \text{(20.801c)}\\
&= |\Omega_i| n_i - |\Omega_i| = |G| - |\Omega_i|. && \text{(20.801d)}
\end{aligned}$$

En égalisant cela à la valeur $2|G(n_i)|$ déjà trouvée, nous déduisons les valeurs des $|G(n_i)|$:

$$|G(n_i)| = \frac{|G| - |\Omega_i|}{2}. \tag{20.802}$$

Nous avons alors

(7a) $|G(2)| = 15$

(7b) $|G(3)| = 20$

(7c) $|G(5)| = 24$

(8) **Les Sylow de G** Les p-Sylow sont définis en 7.6, et le super théorème qui répond à toutes les questions est le théorème 7.11. Dans notre cas, les diviseurs premiers de $|G| = 60$ sont 2, 3 et 5. Il faut faire attention au 2 parce que sa plus haute puissance dans la décomposition de 60 est 4 et non 2. Nous avons :

(8a) Un 2-Sylow est un sous-groupe d'ordre 4.

(8b) Un 3-Sylow est un sous-groupe d'ordre 3.

(8c) Un 5-Sylow est un sous-groupe d'ordre 5.

Entre autres :

(8a) Les 10 sous-groupes $\text{Fix}(x_2)$ avec $x_2 \in \Omega_2$ sont des 3-Sylow de G.

(8b) Les 6 sous-groupes $\text{Fix}(x_3)$ avec $x_3 \in \Omega_3$ sont des 5-Sylow de G.

(8c) Les 15 sous-groupes $\text{Fix}(x_1)$ avec $x_1 \in \Omega_1$ sont d'ordre 2 et ne sont donc pas des 2-Sylow de G.

(9) **Tous les 3-Sylow et les 5-Sylow** Nous avons déjà trouvé 10 3-Sylow et 6 5-Sylow. Nous montrons à présent qu'il n'y en a pas d'autres. Le théorème de Sylow 7.11(4) nous indique que le nombre n_3 de 3-Sylow est :

- diviseur de 60,
- dans $[1]_3$
- au moins 10.

[93] Encore et toujours parce que les éléments de $\text{Fix}(x)$ ont un ordre qui divise $|\text{Fix}(x)| = n_i$ et que n_i est premier, et que nous avons exclu l'identité.

Les diviseurs de 60 sont :

$$1, 5, 3, 15, 2, 10, 6, 30, 4, 20, 12, 60. \tag{20.803}$$

Le seul qui vérifie toutes les conditions est 10. Donc G possède seulement 10 3-Sylow et ils sont tous de la forme $\text{Fix}(x_2)$ avec $x_2 \in \Omega_2$.

Même raisonnement pour les 5-Sylow : il faut

- diviseur de 60,
- dans $[1]_5$
- au moins 6.

La seule possibilité est 6.

(10) **Sous-groupe normal** Soit H, un sous-groupe normal de G. Notre but étant de prouver que G est simple, nous voulons prouver que H est soit $\{e\}$ soit G. Nous supposons que H est non trivial, et nous allons prouver que $H = G$.

Le théorème de Lagrange 2.73(1) nous dit que $|H|$ divise $|G|$. Le nombre $|H|$ ne peut donc avoir que 2, 3 et 5 comme facteurs premiers. Avec une mention spéciale pour le 2 : $|H|$ pourrait être divisible aussi par 4.

(11) **Diviseurs de $|H|$**

Soit un sous-groupe normal H de G. Puisque c'est un sous-groupe, son ordre divise celui de G (encore et toujours le théorème de Lagrange 2.73), et donc les facteurs premiers de $|H|$ ne peuvent être que 2, 3 et 5.

(12) **Si $|H|$ est divisible en 3** Alors H contient au moins un 3-Sylow. Mais nous avons vu que les 3-Sylow de H sont les 3-Sylow de G. Donc H contient tous les 3-Sylow de G, parce que les 3-Sylow sont conjugués et H est normal.

Soit E l'ensemble des sous-groupes de H. Puisqu'il est normal, H agit sur E par conjugaison, et les 3-Sylow forment une orbite. Si α est un 3-Sylow, la formule des classes (proposition 5.20(2)) nous donne

$$|H| = |\text{Fix}(\alpha)||\mathcal{O}_\alpha|. \tag{20.804}$$

Mais l'orbite $\mathcal{O}_\alpha$ de α est l'ensemble des 3-Sylow, de sorte que $|\mathcal{O}_\alpha| = 10$. Donc $|H|$ est divisible en 10.

Mais il y a pire : H contient au moins les 10 sous-groupes $\text{Fix}(x_2)$ pour $x_2 \in \Omega_2$. Ce sont 10 groupes de $|\text{Fix}(x_2)| = 3$ éléments. En décomptant e qui est dans l'intersection, cela fait

$$10 \times |\text{Fix}(x_2)| - 10 + 1 = 21 \tag{20.805}$$

éléments. Donc H contient au moins 21 éléments. Le nombre $|H|$ est donc :

- diviseur de 60
- multiple de 10
- au moins 21.

Donc c'est 30 ou 60.

(13) **Si $|H|$ est divisible en 5** Le même raisonnement tient et $|H|$ est 30 ou 60.

Nous restons avec les possibilités $|H|$ égal à 2, 4, 30 ou 60.

(1) **Si $|H| = 4$**

Alors H contient au moins un 2-Sylow. Un 2-Sylow de H est un sous-groupe contenant 4 éléments qui sont d'ordre 2^m. Le seul m possible dans G est $m = 1$. Vu qu'un 2-Sylow de H contient 4 éléments, nous sommes dans le cas où H est un 2-Sylow. Il est donc le seul 2-Sylow de H parce que H est normal, et que tous les 2-Sylow sont conjugués.

Mais tous les sous-groupes d'ordre 2 sont contenus dans un 2-Sylow. En particulier tous les 15 groupes $\text{Fix}(x_1)$ sont dans l'unique 2-Sylow H qui est soi-disant d'ordre 4. Il y a là une belle impossibilité.

Donc, le cas $|H| = 4$ est hors-concours.

(2) **Si $|H| = 2$** Alors $H = \{e, g\}$ avec $g^2 = e$. Si $h \in G$, l'élément hgh^{-1} ne peut être que e ou g (parce que H est normal). Le premier cas est $g = e$, et le second donne $gh = hg$. Donc g est dans le centre de G : il commute avec tous les éléments de G.

Comme $g \in G(2)$, nous savons que les éléments $a \in \mathrm{Fix}(g)$ sont forcément dans Ω_1 parce que les points dont les fixateurs sont formés d'éléments d'ordre 2 sont dans Ω_1. Soit $h \in G$. Nous avons $g = hgh^{-1}$ et donc aussi

$$\big(hgh^{-1}\big)\big(h(a)\big) = hg(a) = h(a), \tag{20.806}$$

donc $h(a)$ et $-h(a)$ sont des points fixes de hgh^{-1}. Ce sont donc également des points fixes de g. Nous en déduisons que g a pour points fixes les points a, $-a$, $h(a)$ et $-h(a)$. Puisque g n'est pas e, ces quatre points ne peuvent pas être distincts. Comme $h(a)$ ne peut pas être $-h(a)$, nous avons forcément $h(a) = \pm a$.

Donc l'orbite de a ne contiendrait que 2 éléments. Pas possible.

(3) **Si $|H| = 30$** À part $|H| = 60$, le dernier cas à traiter est $|H| = 30$. Nous rappelons obligeamment que

(3a) $|G(2)| = 15$

(3b) $|G(3)| = 20$

(3c) $|G(5)| = 24$.

Si H possède 30 éléments, le théorème de Sylow dit que H contient au moins un 3-Sylow et un 5-Sylow, et donc tous. Puisque pour 3 et 5, les Sylow de H et de G sont les mêmes et bien identifiés, nous allons nous baser dessus. Le sous-groupe H contient tous les 3 et 5-Sylow, donc le comptage des éléments est :

$$10 \times |\mathrm{Fix}(x_2)| + 6 \times |\mathrm{Fix}(x_3)| - 15 = 45. \tag{20.807}$$

Nous aurions aussi pu ajouter $+4 - 1$ pour compter au moins un 2-Sylow.

Donc dès que H compte 30 éléments, il en compte au moins 45. Autrement dit le cas $|H| = 30$ est impossible.

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 20.237
La démonstration des groupes finis de SO(3) *est longue. Je me demande si il n'y a pas moyen de faire plus court. Par exemple [644] utilise le théorème de Cauchy 3.164 que je n'utilise pas. D'autre part, toutes les références me semblent utiliser plus ou moins implicitement le fait que si le sous-groupe normal H contient un élément de $G(n_i)$, alors il les contiennent tous. J'avoue ne pas trop comprendre pourquoi.*

20.14 Systèmes de coordonnées

SECooWTPRooZbOSzO

La trigonométrie nous offre de nouveaux systèmes de coordonnées qui peuvent se révéler pratiques dans certains cas : les coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$, ainsi que les coordonnées cylindriques et sphériques sur $\mathbb{R}^3$.

20.14.1 Coordonnées polaires

20.14.1.1 Ce que ça signifie intuitivement

On a vu qu'un point M dans $\mathbb{R}^2$ peut être représenté par ses abscisses x et ses ordonnées y. Nous pouvons également déterminer le même point M en donnant un angle et une distance comme illustré sur la figure 20.10.

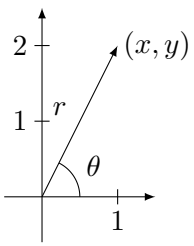


FIGURE 20.10 : Un point en coordonnées polaires est donné par sa distance à l'origine et par l'angle qu'il fait avec l'horizontale. LabelFigJWINooSfKCeA

Le même point M peut être décrit indifféremment avec les coordonnées (x, y) ou bien avec (r, θ).

Remarque 20.238.
L'angle θ d'un point n'étant à priori défini qu'à un multiple de 2π près, nous convenons de toujours choisir un angle $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Par ailleurs l'angle θ n'est pas défini si $(x, y) = (0, 0)$.

La coordonnée r est toujours positive.

Nous avons dans l'idée de définir r et θ par les formules EqrthetaxyPoal

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) & (20.808a) \\ y = r\sin(\theta). & (20.808b) \end{cases}$$

20.14.1.2 Coordonnées polaires : le théorème

THOooBETSooXSQhdX

Théorème 20.239 (Coordonnées polaires[1])**.**
Soit l'application

$$\begin{aligned} T\colon [0,\infty[\times [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20.809}$$

ITEMooNGOKooFCXmwy

(1) L'application T est surjective.

ITEMooMCIOooJiBvug

(2) L'application

$$T\colon]0,\infty[\times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \tag{20.810}$$

est bijective.

ITEMooZFRGooQPDUtX

(3) En considérant la demi-droite $D = \{(x, 0)\}_{x\geqslant 0}$, l'application

$$T\colon]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus D \tag{20.811}$$

est un C^∞-difféomorphisme[94]*.*

Démonstration. Une bonne partie de ce théorème est une conséquence de 20.64. La vraie nouveauté de ce théorème sera la régularité. Nous démontrons point par point.

(1) Pour (1). Soit $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons $a/\|a\| \in S^1$. Par la proposition 20.64, il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\frac{a}{\|a\|} = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big). \tag{20.812}$$

Alors $a = \|a\|\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big) = T(\|a\|, \theta)$. Voilà. L'application T est surjective.

(2) Pour (2). En ce qui concerne la surjectivité,

$$T\big(0, [0, 2\pi[\big) = \{(0, 0)\}. \tag{20.813}$$

Donc le point (1) donne le surjectif lorsque nous enlevons d'un côté les points avec $r = 0$ et de l'autre le point $(0, 0)$.

Pour l'injectivité, nous supposons $T(r_1, \theta_1) = T(r_2, \theta_2)$. Puisque $\|T(r, \theta)\| = r$, nous avons tout de suite $r_1 = r_2$. Nous restons donc avec l'égalité

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix}. \tag{20.814}$$

La proposition 20.64 dit alors que $\theta_1 = \theta_2$.

(3) Pour (3). L'application T est injective en tant que restriction d'une application injective. Pour le surjectif, soit $a \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Comme $a \notin D$, nous avons $\|a\| \neq 0$ et il est légitime de dire, comme plus haut, qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\frac{a}{\|a\|} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{20.815}$$

Ce θ n'est pas zéro parce que $\theta = 0$ donne le point $(1, 0)$ qui est sur D.

En ce qui concerne l'inverse, nous n'allons pas nous lancer dans une étude subtile de la fonction (20.186) ; nous avons déjà démontré la continuité dans le lemme 20.70, et monter dans les dérivées nous semble un peu compliqué. Au lieu de cela, nous allons procéder en deux étapes :

[94] L'application est de classe C^∞ et son inverse est également de classe C^∞. Le plus souvent, vous voulez seulement utiliser ce théorème dans le but de faire un changement de variables dans une intégrale ; vous n'avez donc besoin que d'un C^1-difféomorphisme.

- Prouver que T est de classe C^p pour tout p en invoquant seulement des théorèmes à proposition de différentielle,
- En déduire que T^{-1} est également C^p pour tout p en invoquant le théorème d'inversion locale 19.76.

Les applications $(r,\theta)\mapsto r$, $(r,\theta)\mapsto \sin(\theta)$ et $(r,\theta)\mapsto\cos(\theta)$ sont de classe C^∞ grâce au lemme 14.266. Le lemme 14.288 sur la différentiabilité du produit montre alors que les fonctions T_1 et T_2 données par

$$T_1(r,\theta)=r\cos(\theta) \tag{20.816a}$$
$$T_2(r,\theta)=r\sin(\theta) \tag{20.816b}$$

sont différentiables[95]. Mieux, la proposition 14.291 montre que ces fonctions T_1 et T_2 sont de classe C^p pour tout p, c'est-à-dire qu'elles sont de classe C^∞. Cela montre que les coordonnées polaires sont de classe C^∞, et il faut encore parler de l'inverse.

En ce qui concerne la différentielle,

$$dT_{(r,\theta)}(u,v)=\begin{pmatrix}u\cos(\theta)-rv\sin(\theta)\\ u\sin(\theta)+rv\cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{20.817}$$

Donc la matrice de la différentielle est

$$dT_{(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta),\end{pmatrix} \tag{20.818}$$

dont le déterminant est r (lemme 20.4 utilisé). Donc la différentielle en (r,θ) est une application linéaire inversible parce que $r\neq 0$ aux points que nous considérons. L'application $dT_{(r,\theta)}$ est bicontinue parce que nous sommes en dimension finie. Tout cela pour dire que le théorème d'inversion local 19.76 s'applique, et T^{-1} est C^p dès que T est C^p.

Puisque T est de classe C^p pour tout p, l'inverse T^{-1} est également C^p pour tout p, c'est-à-dire que T^{-1} est de classe C^∞.

□

Définition 20.240.
Ce que nous appelons ***les coordonnées polaires*** *est l'application*

$$\begin{aligned}T\colon [0,\infty[\times[0,2\pi[&\to\mathbb{R}^2\\ (r,\theta)&\mapsto\begin{pmatrix}r\cos(\theta)\\ r\sin(\theta)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{20.819}$$

du théorème 20.239(3). Selon les circonstances, nous considérons l'une ou l'autre des restrictions pour avoir une bijection ou un difféomorphisme.

EXooSDHDooJzDioW

Exemple 20.241.
Soit à calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x-y}. \tag{20.820}$$

Nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{x=y\}&\to\mathbb{R}\\ (x,y)&\mapsto\frac{x^2+y^2}{x-y}.\end{aligned} \tag{20.821}$$

Une idée souvent fructueuse pour traiter ce genre de limite est de passer aux coordonnées polaires. Attention, si on veut faire les choses très explicitement, c'est un peu lourd en notations. Il s'agit de poser

$$\begin{aligned}g\colon \big]0,\infty[\times[0,2\pi[\big)\setminus\big\{\mathbb{R}\times\{\tfrac{\pi}{4}\}\cup\mathbb{R}\times\{\tfrac{5\pi}{4}\}\big\}&\to\mathbb{R}\\ (r,\theta)&\mapsto\frac{r^2}{r\big(\cos(\theta)-\sin(\theta)\big)}.\end{aligned} \tag{20.822}$$

[95] Si vous voulez seulement avoir un C^1-difféomorphisme, calculez explicitement la différentielle et montrez que c'est continu. Vous n'avez pas à utiliser la proposition 14.291 ni rien des produits tensoriels.

Bon. À strictement parler, nous aurions pu dire que g est définie pour $r = 0$, mais vu que nous voulons seulement calculer la limite pour $r \to 0$, on n'a pas besoin de la valeur en zéro. De plus les coordonnées polaires ne sont pas bijectives en l'origine. Donc bon … on s'en passe.

Quel est le lien entre f et g ? Du point de vue du calcul, le lien est qu'on a remplacé x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$. Le vrai lien est l'égalité

$$g = f \circ T \tag{20.823}$$

où T est l'application de coordonnées polaires dont les principales propriétés sont données dans le théorème 20.239(2).

Soit un voisinage $B\big((0,0),R\big)$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Le but est de montrer que les valeurs $f(B)$ se regroupent autour d'une valeur ℓ lorsque $R \to 0$. Soyons plus précis et nommons ℓ le candidat limite. Soit $\epsilon > 0$; nous devons trouver $R > 0$ tel que $f\Big(B\big((0,0),R\big)\Big) \subset B(\ell,\epsilon)$.

Pour $R > 0$, nous avons

$$B\big((0,0),R\big) = T\big([0,R[\times [0,2\pi[\big), \tag{20.824}$$

donc

$$f(B) = g\big([0,R[\times [0,2\pi[\big). \tag{20.825}$$

Soit $r < R$. Nous avons

$$\lim_{\theta\to\pi/4} g(r,\theta) = \infty. \tag{20.826}$$

Donc $f(B)$ contient des valeurs arbitrairement grandes, quelle que soit la valeur de R. Il n'y a donc pas de limite possible.

Si vous voulez un argument un peu plus imagé, en voici un[96] basé sur une combinaison entre la méthode des coordonnées polaires et la méthode des chemins.

Certes *pour chaque* θ nous avons $\lim_{r\to 0} g(r,\theta) = 0$, mais il ne faut pas en déduire trop vite que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ vaut zéro parce que prendre la limite $r \to 0$ avec θ fixé revient à prendre la limite le long de la droite d'angle θ.

Il n'est pas possible de majorer $g(r,\theta)$ par une fonction ne dépendant pas de θ parce que cette fonction tend vers l'infini lorsque $\theta \to \pi/4$. Est-ce que cela veut dire que la limite n'existe pas ? Cela veut en tout cas dire que la méthode des coordonnées polaires ne parvient pas à résoudre l'exercice. Pour conclure, il faudra encore un peu travailler.

Nous pouvons essayer de calculer le long d'un chemin plus général $(r(t),\theta(t))$. Choisissons $r(t) = t$ puis cherchons $\theta(t)$ de telle sorte à avoir

$$\cos\theta(t) - \sin\theta(t) = t^2. \tag{20.827}$$

EqICrDSe

Le mieux serait de résoudre cette équation pour trouver $\theta(t)$. Mais en réalité il n'est pas nécessaire de résoudre : montrer qu'il existe une solution suffit. Nous pouvons supposer que $t^2 < 1$. Pour $\theta = \pi/4$ nous avons $\cos(\theta)-\sin(\theta) = 0$ et pour $\theta = 0$ nous avons $\cos(\theta)-\sin(\theta) = 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous enseigne alors qu'il existe une valeur de θ qui résout l'équation (20.827).

Pour être rigoureux, nous devons aussi montrer que la fonction $\theta(t)$ est continue. Pour cela il faudrait utiliser le théorème de la fonction implicite 19.78. Nous verrons dans l'exemple 20.257 comment s'en sortir sans théorème de la fonction implicite, au prix de plus de calculs. △

Les coordonnées polaires sont données par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} g\colon]0,\infty[\times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r,\theta) &\mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \end{aligned} \tag{20.828}$$

où D est la demi-droite $y = 0$, $x \geqslant 0$. Le fait que les coordonnées polaires ne soient pas un difféomorphisme sur tout $\mathbb{R}^2$ n'est pas un problème pour l'intégration parce que le manque de difféomorphisme est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. Le jacobien est donné par

$$Jg = \det\begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = r. \tag{20.829}$$

La fonction qui donne les coordonnées polaires est

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20.830}$$

[96] Qui satisfera tous vos professeurs, pourvu que vous ayez compris que ce qui se cache est une histoire de valeurs de f prises sur un voisinage de $(0,0)$.

Son Jacobien vaut

$$J_\varphi(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r. \tag{20.831}$$

PROPooFLUAooDsyMXO

Proposition 20.242.
Soit la fonction

$$\begin{aligned} T\colon]0,+\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ (r,\theta) &\mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big). \end{aligned} \tag{20.832}$$

(1) *Elle est surjective.*

(2) *Pour tout $a\in\mathbb{R}$, l'application T est bijective sur la bande $]0,+\infty[\times[a-\pi,a+\pi[$.*

(3) *Si $a=0$, la fonction inverse est donnée par*

$$T^{-1}(x,y) = \big(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)\big). \tag{20.833}$$

Soit $P=(x,y)$ un élément dans $\mathbb{R}^2$, on dit que $r=\sqrt{x^2+y^2}$ est le rayon de P et que $\theta=\arctan(y/x)$ est son argument principal. L'origine ne peut pas être décrite en coordonnées polaires parce que si son rayon est manifestement zéro, on ne peut pas lui associer une valeur univoque de l'angle θ.

Exemple 20.243.
L'équation du cercle de rayon a et centre $(0,0)$ en coordonnées polaires est $r=a$. △

Exemple 20.244.
Une équation possible pour la demi-droite $x=y$, $x>0$, est $\theta=\pi/4$. △

20.14.1.3 Polaires : calcul de limites

EXooBEROooPhPsSU

Exemple 20.245.
Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Tentez de les faire par vous-même avant de regarder la solution qui suit.

(1) Si $(x,y)\in B(0,\delta)\setminus\{(0,0)\}$, alors le théorème 20.239 dit qu'il existe $0<r<\delta$ et $\theta\in[0,2\pi[$ tels que $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$. Avec ça nous avons

$$f(x,y) = \frac{r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2\big(\cos(\theta)+\sin(\theta)\big)^2 + r^2\big(\cos(\theta)-\sin(\theta)\big)^2}. \tag{20.834}$$

Vu que $r\neq 0$ nous pouvons simplifier par r^2. Ce qui reste au dénominateur est une fonction de θ continue sur le compact $[0,2\pi]$. Je ne peux pas vous dire quel est le minimum, mais il est facile de voir que ce n'est pas zéro. Bref,

$$f(x,y) = r^2 f(\theta) \tag{20.835}$$

et $|f(x,y)|<ar^2$ où a est une constante que vous pouvez vous amuser à calculer. En posant $\delta<\sqrt{\epsilon/a}$ nous avons $|f(x,y)|<\epsilon$ pour tout $(x,y)\in B(0,\delta)$, ce qui signifie que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(2) Regardons la technique des coordonnées polaires. Nous remplaçons x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$:

$$f(r,\theta) = \frac{r^4\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{r^2} = r^2\cos(\theta)\sin^3(\theta). \tag{20.836}$$

Cette fonction tend vers zéro quand $r\to 0$. Nous avons donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0. \tag{20.837}$$

Pour cet exercice nous pouvons aussi utiliser la règle de l'étau en écrivant d'abord

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{|x||y^3|}{|x^2+y^2|}. \tag{20.838}$$

Mais on a $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $|x^2+y^2| = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$, donc

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \to 0. \tag{20.839}$$

(3) En passant aux polaires, nous avons

$$f(r,\theta) = \frac{r\cos\theta\sin\big(r\sin\theta\big)}{r} = \cos(\theta)\sin\big(r\sin\theta\big). \tag{20.840}$$

La limite de cette dernière fonction lorsque $r \to 0$ vaut zéro.

Une autre façon de procéder consiste à multiplier et diviser par y de telle façon à faire apparaitre $\sin(y)/y$ dont nous connaissons la limite :

$$f(x,y) = \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{20.841}$$

La limite du premier facteur est 1, tandis que le second peut être traité de façon classique en prenant la valeur absolue et en majorant $|x|$ par $\sqrt{x^2+y^2}$.

△

20.14.1.4 Transformation inverse : théorie

Voyons la question inverse : comment retrouver r et θ si on connait x et y ? Tout d'abord,

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{20.842}$$

parce que la coordonnée r est la distance entre l'origine et (x,y). Comment trouver l'angle ? Nous supposons $(x,y) \neq (0,0)$. Si $x = 0$, alors le point est sur l'axe vertical et nous avons

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } y < 0 \end{cases} \tag{20.843}$$

Notez que si $y < 0$, conformément à notre convention $\theta \geqslant 0$, nous avons noté $\frac{3\pi}{2}$ et non $-\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant le cas général avec $x \neq 0$. Les équations (20.808) montrent que

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}. \tag{20.844}$$

Nous avons donc

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{20.845}$$

La fonction inverse de la fonction tangente est celle définie plus haut.

20.14.1.5 Transformation inverse : pratique

Le code suivant utilise Sage.

```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

def PointToPolaire(x,y):
  x=SR(x)
  y=SR(y)
  r = sqrt(x**2+y**2)
```

```
  if x == 0:
    if y > 0:
      alpha = pi/2
    if y < 0:
      alpha = 3*pi/2
    if y == 0 :
      raise ValueError,"Pas d'angle pour le point (0,0) !!"
  else :
    alpha = atan(y/x)
  if (x < 0) and (y == 0) :
    alpha = pi
  if (x < 0) and (y > 0) :
    alpha = alpha + pi
  if (x < 0) and (y < 0 ) :
    alpha = alpha + pi
  alpha=alpha.simplify_trig()
  return (r,alpha)

print PointToPolaire(1,1)
print PointToPolaire(-2,1)
print PointToPolaire(6*sqrt(3)/2,3)
```

tex/frido/calculAngle.py

Son exécution retourne :

```
(sqrt(2), 1/4*pi)
(sqrt(5), pi - arctan(1/2))
(6, 1/6*pi)
```

Notez que ce sont des valeurs *exactes*. Ce ne sont pas des approximations, Sage travaille de façon symbolique.

20.14.1.6 Coordonnées polaires : dérivées partielles

Le changement de coordonnées pour les coordonnées polaires est la fonction

$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{20.846}$$

Considérons une fonction g sur $\mathbb{R}^2$, et définissons la fonction $\tilde{g}$ par

$$\tilde{g}(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta). \tag{20.847}$$

La formule (14.802) permet de trouver les dérivées partielles de g par rapport à r et θ en termes de celles par rapport à x et y de g.

Pour faire le lien avec les notations du point précédent, nous avons

$$\begin{aligned} f_1(r,\theta) &= r\cos(\theta) \\ f_2(r,\theta) &= r\sin(\theta) \\ (x_1,x_2) &\to (r,\theta) \\ (y_1,y_2) &\to (x,y). \end{aligned} \tag{20.848}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial g}{\partial x_i}\big(f(r,\theta)\big)\frac{\partial f_i}{\partial r}(r,\theta) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\cos\theta\big)}{\partial r}(r,\theta) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\sin\theta\big)}{\partial r}(r,\theta) \\ &= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned} \tag{20.849}$$

Prenons par exemple $g(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$. Étant donné que

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2},\tag{20.850}$$

nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{-2\cos\theta}{r^3}.\tag{20.851}$$

En utilisant la formule,

$$\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(r,\theta)=\cos(\theta)\left(\frac{-2\cos\theta}{r^3}\right)+\sin(\theta)\left(\frac{-2\sin\theta}{r^3}\right)=-\frac{2}{r^3}.\tag{20.852}$$

Nous pouvons vérifier directement que cela est correct. En effet

$$\tilde{g}(r,\theta)=g(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{1}{r^2},\tag{20.853}$$

dont la dérivée par rapport à r vaut $-2/r^3$.

En ce qui concerne la dérivée par rapport à θ, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\theta}&=\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\cos(\theta)\big)}{\partial\theta}+\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\frac{\partial\big(r\sin(\theta)\big)}{\partial\theta}\\&=\left(\frac{-2\cos\theta}{r^3}\right)(-r\sin\theta)+\left(\frac{-2\sin\theta}{r^3}\right)(r\cos\theta)\\&=0.\end{aligned}\tag{20.854}$$

En résumé et avec quelques abus de notation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}&=\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}+\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}\\\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\theta}&=-r\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}+r\cos(\theta)\frac{\partial g}{\partial y}\end{aligned}\tag{20.855}$$

20.14.2 Coordonnées cylindriques

Les **coordonnées cylindriques** sont un perfectionnement des coordonnées polaires. Il s'agit simplement de donner le point (x,y,z) en faisant la conversion $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ et en gardant le z. Les formules de passage sont

$$\begin{cases}x=r\cos(\theta) & \text{(20.856a)}\\ y=r\sin(\theta) & \text{(20.856b)}\\ z=z. & \text{(20.856c)}\end{cases}$$

Soit T la fonction de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ définie par

$$\begin{array}{rccc}T:&]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\\&(r,\theta,z)&\mapsto&(r\cos\theta,r\sin\theta,z),\end{array}\tag{20.857}$$

Cette fonction est surjective. Elle est bijective sur chaque bande de la forme $]0,+\infty[\times[a-\pi,a+\pi[\times\mathbb{R}$, a dans $\mathbb{R}$. Il n'y a presque rien de nouveau par rapport aux coordonnées polaires. Les coordonnées cylindriques sont intéressantes si on décrit un objet invariant par rapport aux rotations autour de l'axe des z.

Exemple 20.246.
Il faut savoir ce que décrivent les équations les plus simples en coordonnées cylindriques,

- $r\leqslant a$, pour a constant dans $]0,+\infty[$, est le cylindre de hauteur infinie qui a pour axe l'axe des z et pour base le disque de rayon a centré à l'origine,
- $r=a$ est la surface du cylindre,
- $\theta=b$ est un demi-plan ouvert et sa fermeture contient l'axe des z,
- $z=c$ est un plan parallèle au plan x-y.

△

Exemple 20.247.
Un demi-cône qui a son sommet en l'origine et pour axe l'axe des z est décrit par $z = dr$. Si d est positif il s'agit de la moitié supérieure du cône, si $d < 0$ de la moitié inférieure. △

Exemple 20.248.
De même, la sphère de rayon a et centrée à l'origine est l'assemblage des calottes $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ et $z = -\sqrt{a^2 - r^2}$. △

En ce qui concerne les coordonnées cylindriques, le Jacobien est donné par

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{20.858}$$

Nous avons donc $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & \text{(20.859a)} \\ y = r\sin\theta & \text{(20.859b)} \\ z = z & \text{(20.859c)} \end{cases}$$

avec $r \in]0,\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$. Le jacobien vaut r.

20.14.3 Coordonnées sphériques

Soit T la fonction de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} T: &]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} \\ & (\rho,\theta,\phi) & \mapsto & (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi), \end{array} \tag{20.860}$$

Cette fonction est surjective. Elle est bijective sur chaque bande de la forme $]0,+\infty[\times[a-\pi, a+\pi[\times[b-\pi/2, b+\pi/2[$, a et b dans $\mathbb{R}$. Si $a = 0$ et $b = -\pi/2$ la fonction inverse T^{-1} est donnée par

$$\begin{array}{rccc} T^{-1}: & \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} & \to &]0,+\infty[\times[-\pi,\pi[\times[0,\pi[\\ & (x,y,z) & \mapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arctan\frac{y}{x}, \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right). \end{array} \tag{20.861}$$

Soit P un point dans $\mathbb{R}^3$. L'angle ϕ est l'angle entre le demi-axe positif des z et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, ρ est la norme de $\overrightarrow{OP}$ et θ est l'argument en coordonnées polaires de la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur le plan x-y.

Remarque 20.249.
Dans la littérature, les angles θ et ϕ sont parfois inversés (voire, changent de nom, par exemple φ au lieu de ϕ). Il faut donc être très prudent lorsqu'on veut utiliser dans un cours des formules données dans un autre cours.

Exemple 20.250.
Il faut connaitre le sens des équations plus simples,

- $\rho \leqslant a$, pour a constant dans $]0,+\infty[$, est la boule fermée de rayon a centrée à l'origine,
- $\rho = a$ est la sphère de rayon a centrée à l'origine,
- $\theta = b$ est un demi-plan ouvert et sa fermeture contient l'axe des z,
- $\phi = c$ est un demi-cône qui a son sommet à l'origine et pour axe l'axe des z. Si c est positif il s'agit de la moitié supérieure du cône, si $d < 0$ de la moitié inférieure.

△

Les **coordonnées sphériques** sont ce qu'on appelle les « méridiens » et « longitudes » en géographie. Les formules de transformation sont [SubEqsCoordSphe]

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) & \text{(20.862a)} \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \text{(20.862b)} \\ z = \rho\cos(\theta) & \text{(20.862c)} \end{cases}$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Remarque 20.251.
Attention : d'un livre à l'autre les conventions sur les noms des angles changent. N'essayez donc pas d'étudier par cœur des formules concernant les coordonnées sphériques trouvées autre part. Par exemple sur le premier dessin de wikipédia, l'angle φ est noté θ et l'angle θ est noté Φ. Mais vous noterez que sur cette même page, les conventions de noms de ces angles changent plusieurs fois.

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \tag{20.863}$$ EqChmVarSpherique

avec $r \in]0,\infty[$, $\theta \in]0,2\pi[$ et $\varphi \in]0,\pi[$. Le jacobien associé est $Jg(r,\theta,\varphi) = -r^2\sin\varphi$. N'oubliez pas que lorsqu'on effectue un changement de variables dans une intégrale, la *valeur absolue* du jacobien apparaît.

Cependant notre convention de coordonnées sphériques fait venir $\sin(\phi)$ avec $\phi \in [0,\pi[$; vu que le signe de $\sin(\phi)$ y est toujours positif, cette histoire de valeur absolue est sans grandes conséquences. Ce n'est pas le cas de toutes les conventions possibles.

20.14.3.1 Coordonnées sphériques : inverse

Trouvons le changement inverse, c'est-à-dire trouvons ρ, θ et φ en termes de x, y et z. D'abord nous avons

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{20.864}$$

Ensuite nous savons que

$$\cos(\theta) = \frac{z}{\rho} \tag{20.865}$$

détermine de façon unique[97] un angle $\theta \in [0,\pi]$. Dès que ρ et θ sont connus, nous pouvons poser $r = \rho\sin\theta$ et alors nous nous trouvons avec les équations

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) & \text{(20.866a)} \\ y = r\sin(\varphi), & \text{(20.866b)} \end{cases}$$

qui sont similaires à celles déjà étudiées dans le cas des coordonnées polaires.

20.15 Calcul de limites

Beaucoup de techniques de calcul de limites fonctionnent bien avec les fonctions trigonométriques, entre autres grâce à l'utilisation des coordonnées polaires de la proposition 20.242. Nous en voyons quelques exemples à présent.

ExQWHooGddTLE

Exemple 20.252 (Limite et prolongement par continuité)**.**
La fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x} \tag{20.867}$$

n'est pas définie en $x = 0$.

Nous avons vu dans l'équation (20.6) que $\cos(0) = 1$, donc la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} \tag{20.868}$$

est la limite définissant la dérivée de cosinus en 0 (ici, le x joue le rôle de ϵ). Le lemme 20.3 nous donne la dérivée du cosinus comme étant le sinus. Nous avons donc :

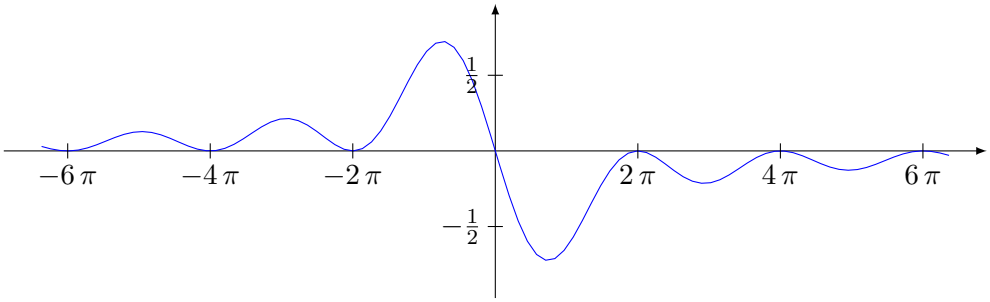
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = \sin(0) = 0, \tag{20.869}$$

et nous définissons le prolongement par continuité :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.870}$$

Encore une fois, le graphe de la fonction $\tilde{f}$ ne présente aucune particularité autour de $x = 0$.

[97] Le problème $\rho = 0$ ne se pose pas ; pourquoi ?



△

EXooINLRooPzRWEA

Exemple 20.253 (Un calcul heuristique de limite)**.**
Soit à calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2\cos(x)+2}\sin(x)}{\sqrt{e^{2\cos(x)+2}-1}}. \tag{20.871}$$

La stratégie que nous allons suivre pour calculer cette limite est de développer certaines parties de l'expression en série de Taylor, afin de simplifier l'expression. La première chose à faire est de remplacer $e^{y(x)}$ par $1+y(x)$ lorsque $y(x)\to 0$. La limite devient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(-2\cos(x)+3\big)\sin(x)}{\sqrt{-2\cos(x)+2}}. \tag{20.872}$$

Nous allons maintenant remplacer $\cos(x)$ par 1 au numérateur et par $1-x^2/2$ au dénominateur. Pourquoi ? Parce que le cosinus du dénominateur est dans une racine, donc nous nous attendons à ce que le terme de degré deux du cosinus donne un degré un en dehors de la racine, alors que du degré un est exactement ce que nous avons au numérateur : le développement du sinus commence par x.

Nous calculons donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{-2\big(1-\frac{x^2}{2}\big)+2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{20.873}$$

Tout ceci n'est évidemment pas très rigoureux, mais en principe vous avez tous les éléments en main pour justifier les étapes. △

20.15.1 Méthode des coordonnées polaires

SUBSECooWCGMooPrXSpt

La proposition suivante exprime la définition de la limite en d'autres termes, et va être pratique dans le calcul de certaines limites.

PropMethodePolaire

Proposition 20.254.
Soit $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, a un point d'accumulation de D et $\ell\in\mathbb{R}^n$. Nous définissons

$$E_r = \{f(x) \text{ tel que } x\in B(a,r)\cap D\}, \tag{20.874}$$

et

$$s_r = \sup\{\|v-\ell\| \text{ tel que } v\in E_r\}. \tag{20.875}$$

Alors nous avons $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ si et seulement si $\lim_{r\to 0} s_r = 0$.

Dans cette proposition, E_r représente l'ensemble des valeurs atteintes par f dans un rayon r autour de a. Le nombre s_r sélectionne, parmi toutes ces valeurs, celle qui est la plus éloignée de ℓ et donne la distance. En d'autres termes, s_r est la distance maximale entre $f(x)$ et ℓ lorsque x est à une distance au maximum r de a.

Lorsque nous avons affaire à une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, cette proposition nous permet de calculer facilement les limites en passant aux coordonnées polaires.

ExempleMethodeTrigigi

Exemple 20.255.
Reprenons la fonction de l'exemple 14.244 :

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}. \tag{20.876}$$

Son domaine est $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Nous voulons calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Écrivons la définition de E_r :

$$E_r = \{f(x,y) \text{ tel que } (x,y)\in B\big((0,0),r\big)\}. \tag{20.877}$$

Les points de la boule sont, en coordonnées polaires, les points de la forme (ρ,θ) avec $\rho<r$. La chose intéressante est que $f(\rho,\theta)$ est relativement simple (plus simple que la fonction départ). En effet en remplaçant tous les x par $\rho\cos(\theta)$ et tous les y par $\rho\sin(\theta)$, et en utilisant le fait que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, nous trouvons

$$f(\rho,\theta)=\frac{\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2}=\cos(\theta)\sin(\theta). \tag{20.878}$$

Eq2807fpolairerhodeuxcossin

Cela signifie que

$$E_r=\{\cos(\theta)\sin(\theta)\text{ tel que }\theta\in[0,2\pi[\}. \tag{20.879}$$

Prenons ℓ quelconque. Le nombre s_r est le supremum des

$$\|\ell-\cos(\theta)\sin(\theta)\| \tag{20.880}$$

lorsque θ parcours $[0,2\pi]$. Nous ne sommes pas obligés calculer la valeur exacte de s_r. Ce qui compte ici est que s_r ne vaut certainement pas zéro, et ne dépend pas de r. Donc il est impossible d'avoir $\lim_{r\to 0}s_r=0$, et la fonction donnée n'a pas de limite en $(0,0)$. △

Nous pouvons retenir cette règle pour calculer les limites lorsque $(x,y)\to(0,0)$ de fonctions $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

(1) passer en coordonnées polaires, c'est-à-dire remplacer x par $\rho\cos(\theta)$ et y par $\rho\sin(\theta)$;

(2) nous obtenons une fonction g de ρ et θ. Si la limite $\lim_{r\to 0}g(r,\theta)$ n'existe pas ou dépend de θ, alors la fonction n'a pas de limite. Si on peut majorer g par une fonction ne dépendant pas de θ, et que cette fonction a une limite lorsque $r\to 0$, alors cette limite est la limite de la fonction.

La vraie difficulté de la technique des coordonnées polaires est de trouver le supremum de E_r, ou tout au moins de montrer qu'il est borné par une fonction qui a une limite qui ne dépend pas de θ. Une des situations classiques dans laquelle c'est facile est lorsque la fonction se présente comme une fonction de r multiplié par une fonction de θ.

Exemplexyxsqysq

Exemple 20.256.
Soit à calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right). \tag{20.881}$$

Le passage aux coordonnées polaires donne

$$f(r,\theta)=r^2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta). \tag{20.882}$$

Déterminer le supremum de cela est relativement difficile. Mais nous savons que de toutes façons, la quantité $\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ est bornée par 1. Donc

$$\|f(r,\theta)\|\leqslant r^2. \tag{20.883}$$

Maintenant la règle de l'étau montre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ est zéro.

La situation vraiment gênante serait celle avec une fonction de θ qui risque de s'annuler dans un dénominateur. △

L'exemple 20.241 donnera un cas où la méthode fonctionne plus difficilement. Entre autres parce qu'il utilisera en même temps la méthode des chemins et celle des coordonnées polaires.

ExmeASDLAf

Exemple 20.257.
Considérons fonction

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x-y}. \tag{20.884}$$

Une mauvaise idée pour prouver que la limite n'existe pas pour $(x,y)\to(0,0)$ est de considérer le chemin (t,t). En effet, la fonction n'existe pas sur ce chemin. Or la méthode des chemins parle uniquement de chemins contenus dans le domaine de la fonction.

Nous prouvons que la limite n'existe pas en trouvant des chemins le long desquels les limites sont différentes. Si nous essayons le chemin (t,kt) avec k constant, nous trouvons

$$f(t,kt)=\frac{t(1+k^2)}{1-k}. \tag{20.885}$$

La limite $t\to 0$ est hélas toujours 0. Nous ne pouvons donc pas conclure.

Nous allons maintenant utiliser la même technique que celle utilisée en coordonnées polaires. Vous noterez que dans ce cas, travailler en cartésiennes donne lieu à des calculs plus longs. L'astuce consiste à prendre k non constant et à chercher par exemple $k(t)$ de façon à avoir

$$\frac{1+k(t)^2}{1-k(t)}=\frac{1}{t}. \tag{20.886}$$

Avec une telle fonction k, la fonction $t\mapsto f(t,tk(t))$ serait la constante 1. L'équation à résoudre pour k est

$$tk^2+k+(t-1)=0, \tag{20.887}$$

et les solutions sont

$$k(t)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4t(t-1)}}{2t}. \tag{20.888}$$

Nous proposons donc les chemins

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \frac{-1\pm\sqrt{1-4t(t-1)}}{2}\end{pmatrix} \tag{20.889}$$

Nous devons vérifier deux points. D'abord que ce chemin est bien défini, et ensuite que $tk(t)$ tend bien vers zéro lorsque $t\to 0$ (sinon $(t,k(t)t)$ n'est pas un chemin passant par $(0,0)$. Lorsque t est petit, ce qui se trouve sous la racine est proche de 1 et ne pose pas de problèmes. Ensuite,

$$\lim_{t\to 0}tk(t)=\frac{-1\pm 1}{2}. \tag{20.890}$$

En choisissant le signe $+$, nous trouvons un chemin qui nous convient.

Ce que nous avons prouvé est que

$$f\left(t,\frac{-1+\sqrt{1-4t(t-1)}}{2}\right)=1 \tag{20.891}$$

pour tout t. Le long de ce chemin, la limite de f est donc 1. Cette limite est différente des limites obtenues le long de chemins avec k constant. La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ n'existe donc pas. △

seno

Exemple 20.258.
Considérons la fonction (figure 20.11)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases} \tag{20.892}$$

et cherchons la limite $(x,y)\to(0,0)$. Le passage en coordonnées polaires[98] donne

$$f(\rho,\theta)=\rho\sin\frac{1}{\rho}. \tag{20.893}$$ EqFoncRho2907

Pour calculer la limite de cela lorsque $\rho\to 0$, nous remarquons que

$$0\leqslant|\rho\sin\frac{1}{\rho}|\leqslant\rho \tag{20.894}$$

parce que $\sin(\frac{1}{\rho})\leqslant 1$ quel que soit ρ. Or évidemment $\lim_{\rho\to 0}\rho=0$, donc la limite de la fonction (20.893) est zéro et ne dépend pas de θ. Nous en concluons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. △

20.15.2 Méthode du développement asymptotique

SUBSECooRAKKooAnpvkE

Nous savons que nous pouvons développer certaines fonctions en série grâce au développement de Taylor (théorème 14.486). Lorsque nous avons une limite à calculer, nous pouvons remplacer certaines parties de la fonction à traiter par la formule (14.1387a). Cela est très utile pour comparer des fonctions trigonométrique à des polynômes.

LEMooZYNEooYkwsWD

Lemme 20.259.
Nous avons la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1. \tag{20.895}$$

[98] Proposition 20.242.

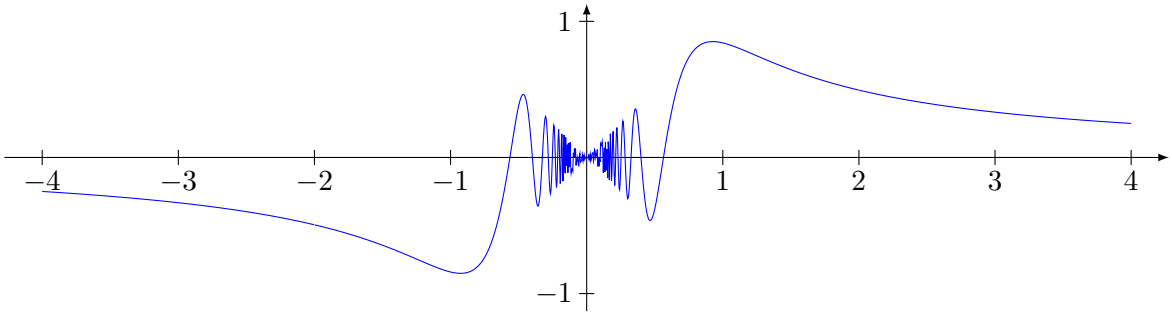


FIGURE 20.11 : La fonction de l'exemple 20.258.

LabelFigsenotopologo

Démonstration. Une manière de prouver cela est d'écrire

$$\sin(x) = x + h(x) \tag{20.896}$$

avec $h \in o(x)$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0} h(x)/x = 0$. Alors nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 1. \tag{20.897}$$

□

L'utilisation de la proposition 14.521 permet d'utiliser cette technique dans le cadre de limites à plusieurs variables. Reprenons le lemme 20.259 un tout petit peu modifié :

LEMooSFALooVRBdNb

Lemme 20.260.
Pour tout $x > 0$ nous avons $\sin(x) < x$.

Démonstration. Nous posons $f(x) = x - \sin(x)$. Cette fonction vérifie $f(0) = 0$ et

$$f'(x) = 1 - \cos(x). \tag{20.898}$$

Vu que $|\cos(x)| \leqslant 1$, nous avons toujours $f'(x) \geqslant 0$ et même $f'(x) > 0$ pour $x \in]0, \delta]$. Donc f est au moins strictement croissante sur $]0, \delta]$ et ensuite strictement croissante presque partout. □

Exemple 20.261.
Soit à calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ où

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}. \tag{20.899}$$

La première chose à faire est de voir f comme la composée de fonctions $f = f_1 \circ f_2$ avec

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\sin(t)}{t} \end{aligned} \tag{20.900}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy. \end{aligned} \tag{20.901}$$

Étant donné que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = 0$, nous avons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f_1(t) = 1$. △

EXooETZYooYsKPDJ

Exemple 20.262.
Les dérivées partielles de la fonction $f(x, y) = xy^3 + \sin y$ au point $(0, \pi)$ sont

$$\partial_x f(0, \pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \pi) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{(t\pi^3 + \sin\pi) - (\sin\pi)}{t} = \pi^3,$$

$$\partial_y f(0, \pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{0(\pi + t)^3 + \sin(t + \pi) - 0 \cdot \pi^3}{t} = \cos\pi = -1,$$

△

20.16 Quelques intégrales avec de la trigonométrie

SECooOOPPooZLbaEH

Le théorème 16.284 manque un peu d'exemples. Nous allons en voir quelques-uns maintenant.

20.16.1 Changement de variables

Le domaine $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2+y^2 < 1\}$ s'écrit plus facilement $E = \{(r,\theta) \text{ tel que } r < 1\}$ en coordonnées polaires. Le passage aux coordonnées polaires permet de transformer une intégration sur un domaine rond à une intégration sur le domaine rectangulaire $]0,2\pi[\times]0,1[$. La question est évidemment de savoir si nous pouvons écrire

$$\int_E f = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr d\theta. \tag{20.902}$$

Hélas, non. La vie n'est pas aussi simple ; il faut tenir compte du fait que le changement de base dilate ou contracte certaines surfaces.

Soit $\varphi\colon D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to D_2 \subset \mathbb{R}^2$ une fonction bijective de classe C^1 dont l'inverse est également de classe C^1. On désigne par x et y ses composantes, c'est-à-dire que

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} \tag{20.903}$$

avec $(u,v) \in D_1$.

ThoChamDeVarIntDDf

Théorème 20.263.
Soit une fonction continue $f\colon D_2 \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_{\varphi(D_1)} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J_\varphi(u,v)|dudv \tag{20.904}$$

où J_φ est le Jacobien de φ c'est-à-dire

$$J_\varphi(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{pmatrix}. \tag{20.905}$$

Ne pas oublier de prendre la valeur absolue lorsqu'on utilise le Jacobien dans un changement de variables.

20.16.2 Coordonnées polaires

Exemple 20.264.
Calculons la surface du disque D de rayon R. Nous devons calculer

$$\int_D dxdy. \tag{20.906}$$

Pour passer au polaires, nous savons que le disque est décrit par

$$D = \{(r,\theta) \text{ tel que } 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}. \tag{20.907}$$

Nous avons donc

$$\int_D dxdy = \int_D r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr d\theta = 2\pi\int_0^R r\, dr = \pi R^2. \tag{20.908}$$

△

ExpmfDtAtV

Exemple 20.265.
Montrons comment intégrer la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sur le domaine délimité par la droite $y = x$ et le cercle $x^2+y^2 = y$, représenté sur la figure 20.12. Pour trouver le centre et le rayon du cercle $x^2+y^2 = y$, nous commençons par écrire $x^2+y^2-y = 0$, et ensuite nous reformons le carré : $y^2-y = (y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

Le passage en polaire transforme les équations du bord du domaine en

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \sin(\theta) \\ r^2 &= r\sin(\theta). \end{aligned} \tag{20.909}$$

L'angle θ parcours donc $]0,\pi/4[$, et le rayon, pour chacun de ces θ parcours $]0,\sin(\theta)[$. La fonction à intégrer se note maintenant $f(r,\theta) = \sqrt{1-r^2}$. Donc l'intégrale à calculer est

$$\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sin(\theta)} \sqrt{1-r^2} r\, dr\right). \tag{20.910}$$

PgOMRapIntMultFubiniBoutCercle

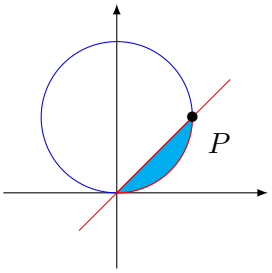


FIGURE 20.12 : Passage en polaire pour intégrer sur un morceau de cercle.LabelFigHFAYooOrfMAA

Remarquez la présence d'un r supplémentaire pour le jacobien.

Notez que les coordonnées du point P sont $(1, 1)$. △

En pratique, lors du passage en coordonnées polaires, le « $dxdy$ » devient « $r\,drd\theta$ ».

Exemple 20.266.
On veut évaluer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur la région V suivante :

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

On peut faire le calcul directement,

$$\int_V f(x, y)\, dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 + y^2\, dy\, dx = \int_0^1 \left(x^2\sqrt{1 - x^2} + \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} \right) dx$$

mais c'est un peu ennuyeux. On peut simplifier beaucoup les calculs avec un changement de variables vers les coordonnées polaires. Dans ce cas, on sait bien que le difféomorphisme à utiliser est $\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Le jacobien J_ϕ est

$$J_\phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r, \tag{20.911}$$

qui est toujours positif. D'une part, la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(\phi(r, \theta)) = r^2$ et d'autre part, $\phi^{-1}(V) =]0, 1] \times]0, \pi/2[$. Par conséquent, la formule du changement de variables nous donne

$$\int_V f(x, y)\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

△

20.16.3 Coordonnées cylindriques

Exemple 20.267.
On veut calculer le volume de la région A définie par l'intersection entre la boule unité et le cylindre qui a pour base un disque de rayon $1/2$ centré en $(0, 1/2)$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^1 \leqslant 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant 1/4\}.$$

On peut décrire A en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} A = \Big\{ & (r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times [-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \,| \\ & -\pi/2 < \theta < \pi,\ 0 < r \leqslant \sin\theta,\ -\sqrt{1 - r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - r^2} \Big\}. \end{aligned} \tag{20.912}$$

Le jacobien de ce changement de variables, J_{cyl}, est

$$J_{cyl}(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \tag{20.913}$$

qui est toujours positif. Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z)\, dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{8} + \frac{8}{9}.$$

△

Exemple 20.268 (Volume d'un solide de révolution)**.**
Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive. On dit que le solide A décrit par

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [a, b],\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant g^2(z)\right\}$$

est un solide de révolution. Afin de calculer son volume, on peut décrire A en coordonnées cylindriques,

$$A = \left\{(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times[-\pi, \pi[\times\mathbb{R} \,|\, a \leqslant z \leqslant b,\ 0 < r^2 \leqslant g^2(z)\right\}.$$

Le jacobien de ce changement de variables est $J_{cyl} = r$, comme dans l'exemple précédent. Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{g(z)} r\, dr\, d\theta\, dz = \int_a^b \pi g^2(z)\, dz.$$

Cette formule peut être utilisée pour tout solide de révolution. △

20.16.3.1 Coordonnées sphériques

Le calcul est un peu plus long :

$$\begin{aligned} J(\rho, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \sin\theta. \end{aligned} \tag{20.914}$$

Donc

$$dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin(\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \tag{20.915}$$

Exemple 20.269.
On veut calculer le volume du cornet de glace A

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{S}^2,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}.$$

On peut décrire A en coordonnées sphériques.

$$A = \{(\rho, \theta, \phi) \in]0, +\infty[\times[-\pi, \pi[\times[0, \pi[\,|\, 0 < \phi \leqslant \pi/4,\ 0 < \rho \leqslant 1\}.$$

Le jacobien de ce changement de variables J_{sph} est

$$J_{sph}(\rho, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\phi & \rho\sin\theta\cos\phi & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi, \tag{20.916}$$

Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z)\, dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

△

20.16.4 Un autre système utile

Un changement de variables que l'on voit assez souvent est

$$\begin{cases} u = x + y & \text{(20.917a)} \\ v = x - y. & \text{(20.917b)} \end{cases}$$

Afin de calculer son jacobien, il faut d'abord exprimer x et y en fonctions de u et v :

$$\begin{cases} x = (u + v)/2 & \text{(20.918a)} \\ y = (u - v)/2. & \text{(20.918b)} \end{cases}$$

La matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{20.919}$$

Le déterminant vaut $-\frac{1}{2}$. Nous avons donc

$$dxdy = \frac{1}{2}dudv. \tag{20.920}$$

Nous insistons sur le fait que c'est $\frac{1}{2}$ et non $-\frac{1}{2}$ qui intervient parce que que la formule du changement de variable demande d'introduire la *valeur absolue* du jacobien.

Exemple 20.270.
Calculer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ sur le domaine représenté sur la figure 20.13.

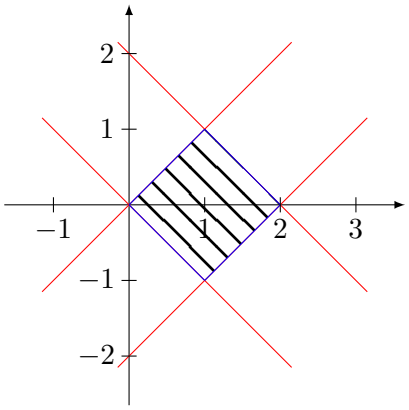


FIGURE 20.13 : Un domaine qui s'écrit étonnament bien avec un bon changement de coordonnées. LabelFigVWFLoofSrOqz

Les droites qui délimitent le domaine d'intégration sont

$$\begin{aligned} y &= -x + 2 \\ y &= x - 2 \\ y &= x \\ y &= -x \end{aligned} \tag{20.921}$$

Le domaine est donc donné par les équations

$$\begin{cases} y + x < 2 & (20.922a) \\ y - x > -2 & (20.922b) \\ y - x < 0 & (20.922c) \\ y + x > 0. & (20.922d) \end{cases}$$

En utilisant le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$ nous trouvons le domaine $0 < u < 2$, $0 < v < 2$. En ce qui concerne la fonction, $f(x, y) = (x + y)(x - y)$ et par conséquent

$$f(u, v) = uv. \tag{20.923}$$

L'intégrale à calculer est simplement

$$\int_0^2 \int_0^2 uv\, dudv = \int_0^2 u\, du \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^2 = 2\int_0^2 u\, du = 4. \tag{20.924}$$

△

20.17 Aire d'une surface de révolution

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 20.271
Vu que nous n'avons pas encore de définition d'une aire dans $\mathbb{R}^3$, ce qui suit n'est en réalité pas très rigoureux.

Soit γ une courbe dans le plan xy, paramétrée par

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20.925}$$

avec $u \in [a, b]$. Nous supposons que la courbe est toujours positive, c'est-à-dire $y(u) > 0$ pour tout u.

Nous voulons considérer la surface obtenue en effectuant une rotation de cette ligne autour de l'axe X. Chaque point de la courbe va parcourir un cercle de rayon $y(u)$ dans le plan YX et centré en $(x(u), 0, 0)$. La surface est donc donnée par

$$\varphi(u, \theta) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u)\cos\theta \\ y(u)\sin\theta \end{pmatrix} \tag{20.926}$$

avec $(u, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. Notez que la courbe de départ correspond à $\theta = 0$.

Les vecteurs tangents à la surface pour ce paramétrage sont

$$T_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u)\cos\theta \\ y'(u)\sin\theta \end{pmatrix} \quad T_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y(u)\sin\theta \\ y(u)\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{20.927}$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs vaut

$$\begin{aligned} T_u \times T_\theta &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x' & y'\cos\theta & y'\sin\theta \\ 0 & -y\sin\theta & y\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= y'(u)y(u)\,e_x - x'(u)y(u)\cos\theta\,e_y + x'(u)y(u)\sin\theta\,e_z. \end{aligned} \tag{20.928}$$

En ce qui concerne la norme :

$$dS = \|T_u \times T_\theta\| = \sqrt{(y'y)^2 + (x'y)^2} = |y(u)|\sqrt{y'(u)^2 + x'(u)^2}. \tag{20.929}$$

Étant donné que nous avons supposé que $y(u) > 0$, nous pouvons supprimer les valeurs absolues, et l'aire de la surface de révolution devient :

$$\begin{aligned} Aire(S) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b y(u)\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}du \\ &= 2\pi \int_a^b y(u)\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}du. \end{aligned} \tag{20.930}$$

EXooZCLXooVmXQgY

Exemple 20.272.
Calculons la surface du cône de révolution de rayon (à la base) R et de hauteur h. La courbe de départ est le segment droite qui part de $(0, 0)$ et qui termine en (R, h) de la figure 20.14.

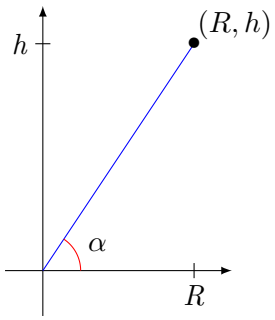


FIGURE 20.14 : En faisant tourner cette droite autour de l'axe X, nous obtenons un cône. LabelFigTHYooTEXLLn

Ce segment peut être paramétré par

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} Ru \\ hu \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20.931}$$

avec $u \in [0, 1]$. Cela donne $x(u) = Ru$, $y(u) = hu$ et par conséquent

$$Aire = 2\pi \int_0^1 hu\sqrt{R^2 + h^2} = \pi h\sqrt{R^2 + h^2}. \tag{20.932}$$

Ce résultat peut aussi être exprimé en fonction de l'angle, grâce à la formule (20.640). En sachant que $h = \sqrt{h^2 + R^2}\sin(\alpha)$, nous trouvons

$$Aire = \pi(R^2 + h^2)\sin(\alpha). \tag{20.933}$$

△

Exemple 20.273.
Calculons la surface latérale du tore obtenu par révolution du cercle de la figure 20.15.

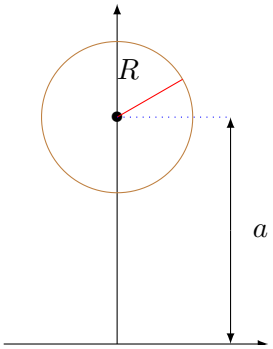


FIGURE 20.15 : Si nous tournons ce cercle autour de l'axe X, nous obtenons un tore de rayon « externe » a et de rayon « interne » R.
LabelFigROAOooPgUZIt

Le chemin qui détermine le cercle de départ est

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ a + R\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{20.934}$$

c'est-à-dire $x(u) = R\cos(u)$, $y(u) = a + R\sin(u)$ avec $u \in [0, 2\pi]$. Nous avons donc l'aire

$$\begin{aligned} Aire &= 2\pi \int_0^{2\pi} \big(a + R\sin(u)\big) R\, du \\ &= 2\pi R\big(2\pi a + R[-\cos(u)]_0^{2\pi}\big) \\ &= 4\pi^2 aR. \end{aligned} \tag{20.935}$$

△

20.18 Table de caractères du groupe diédral

SecWMzheKf
Cette section vient de [112] ; nous avons comme but d'établir la table des caractères des représentations complexes du groupe diédral D_n.

20.18.1 Représentations de dimension un

Nous nous occupons des représentations de D_n sur $\mathbb{C}$. Les applications linéaires $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont seulement les multiplications par des nombres complexes. Nous cherchons donc $\psi\colon D_n \to \mathbb{C}^*$.

Nous savons que D_n est généré[99] par s et r. Vu que $s^2 = 1$, nous avons

$$\psi(s)^2 = \psi(s^2) = \psi(1) = 1, \tag{20.936}$$

donc $\psi(s) \in \{-1, 1\}$. Nous savons aussi que $srsr = 1$, donc

$$\psi(s)^2\psi(r)^2 = 1, \tag{20.937}$$

ce qui donne $\psi(r) \in \{-1, 1\}$.

Nous avons donc quatre représentations de dimension un données par

	$\psi(r) = 1$	$\psi(r) = -1$
$\psi(s) = 1$	ρ^{++}	ρ^{+-}
$\psi(s) = -1$	ρ^{-+}	ρ^{--}

[99] Voir proposition 20.187 et tout ce qui suit.

Attention au fait que nous devons aussi avoir la relation $\psi(r)^n = \psi(r^n) = 1$. Donc $\psi(r)$ doit être une racine n^{e} de l'unité. Nous allons donc devoir avoir un compte différent selon la parité de n. Nous en reparlerons à la fin, au moment de faire les comptes. En ce qui concerne les caractères correspondants,

	r^k	sr^k
χ^{++}	1	1
χ^{+-}	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ^{-+}	1	-1
χ^{--}	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Étant donné qu'ils sont tous différents, ce sont des représentations deux à deux non équivalentes, lemme 18.16.

20.18.2 Représentations de dimension deux

Nous cherchons maintenant les représentations $\rho\colon D_n \to \text{End}(\mathbb{C}^2)$. Ici nous supposons connue la liste des éléments de D_n donnée par le corolaire 20.188. Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $h \in \mathbb{Z}$; nous considérons la représentation $\rho^{(h)}$ de D_n définie par

$$\rho^{(h)}(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix} \tag{20.938a}$$

$$\rho^{(h)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}. \tag{20.938b}$$

Cela donne bien $\rho^{(h)}$ sur tous les éléments de D_n par la proposition 20.187. Nous pouvons restreindre le domaine de h en remarquant d'abord que $\rho^{(h)} = \rho^{(h+n)}$, et ensuite que les représentations $\rho^{(h)}$ et $\rho^{(-h)}$ sont équivalentes. Un opérateur d'entrelacement est donné par $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et il est facile de vérifier que $T\rho^{(h)}(x) = \rho^{-h}(x)T$ avec $x = r^k$ puis avec $x = sr^k$.

Donc $\rho^{(h)} \simeq \rho^{(-h)} \simeq \rho^{(n-h)}$ et nous pouvons restreindre notre étude à $0 \leqslant h \leqslant \frac{n}{2}$.

Nous allons séparer les cas $n = 0$, $h = n/2$ et les autres. En effet si nous notons par commodité $a = \omega^h$, alors un vecteur (x, y) est vecteur propre de $\rho^{(h)}(s)$ et de $\rho^{(h)}(r)$ si et seulement si il vérifie les systèmes d'équations SubEqsGXZoxLq

$$\begin{cases} ax = \lambda x & (20.939a) \\ \frac{1}{a}y = \lambda y & (20.939b) \end{cases}$$

et SubEqsFYZmzhT

$$\begin{cases} \frac{1}{a}y = \mu x & (20.940a) \\ ax = \mu y & (20.940b) \end{cases}$$

avec λ et μ des nombres non nuls. Une représentation sera réductible si et seulement si ces deux systèmes acceptent une solution non nulle commune. Il est vite vu que si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $a^2 = 1$, ce qui signifie $h = 0$ ou $h = n/2$. Sinon, il n'y a pas de solutions, et la représentation associée est irréductible.

(1) $h = 0$. Nous avons

$$\rho^{(0)}(r^k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho^{(0)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20.941}$$

donc le caractère de cette représentation est $\chi^{(0)}(r^k) = 2$ et $\chi^{(0)}(sr^k) = 0$. Donc nous avons

$$\chi^{(0)} = \chi^{++} + \chi^{-+}. \tag{20.942}$$

Il y a maintenant (au moins) quatre façons de voir que la représentation $\rho^{(0)}$ est réductible.

Première méthode Trouver un opérateur d'entrelacement. Pour cela nous calculons les matrices :

$$S(r^k) = (\rho^{++} \oplus \rho^{-+})(r^k) = \begin{pmatrix} \rho^{++}(r^k) & 0 \\ 0 & \rho^{-+}(r^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20.943a}$$

$$S(sr^k) = (\rho^{++} \oplus \rho^{-+})(sr^k) = \begin{pmatrix} \rho^{++}(sr^k) & 0 \\ 0 & \rho^{-+}(sr^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{20.943b}$$

(20.943c)

Nous cherchons une matrice T telle que $TS(r^k) = \rho^{(0)}(r^k)T$ et $TS(sr^k) = \rho^{(0)}(sr^k)T$. Étant donné que $S(r^k) = \mathbb{1} = \rho^{(0)}(r^k)$, la première contrainte n'en est pas une. Nous pouvons vérifier qu'avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, nous avons bien

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20.944}$$

Donc ce T entrelace $\rho^{++} \oplus \rho^{-+}$ avec $\rho^{(0)}$ qui sont donc deux représentations équivalentes. Donc $\rho^{(0)}$ est réductible et ça ne nous intéresse pas de la lister.

Seconde méthode Invoquer le théorème 18.24(1) et dire que les représentations sont équivalentes parce que les caractères sont égaux.

Troisième méthode Utiliser le théorème 18.24(2) et calculer $\langle \chi^{(0)}, \chi^{(0)} \rangle$:

$$\langle \chi^{(0)}, \chi^{(0)} \rangle = \frac{1}{|D_n|} \sum_{g \in D_n} |\chi^{(0)}(g)|^2 \tag{20.945a}$$
$$= \frac{1}{2n}\big(4 + 0 + 4(n-1)\big) \tag{20.945b}$$
$$= 2. \tag{20.945c}$$

Ici le 4 est pour le 1, le zéro est pour les termes sr^k et $4(n-1)$ est pour les $n-1$ termes r^k. Vu que le résultat n'est pas 1, la représentation $\rho^{(0)}$ n'est pas irréductible.

Quatrième méthode Regarder les solutions des systèmes (20.939) et (20.940) dont nous avons parlé plus haut.

La première méthode a l'avantage d'être simple et ne demander aucune théorie particulière à part les définitions. La seconde méthode est la plus rapide, mais demande un théorème très puissant. La troisième utilise également un théorème assez avancé, mais a l'avantage sur les deux autres méthodes de ne pas avoir besoin de savoir à priori un candidat décomposition de $\rho^{(0)}$; cette méthode est applicable même sans faire la remarque que $\chi^{(0)} = \chi^{++} + \chi^{-+}$.

Quoi qu'il en soit, nous ne listons pas $\chi^{(0)}$ dans notre table de caractères.

(2) $h = n/2$. Vu que $\omega^{n/2} = e^{i\pi} = -1$, nous avons

$$\rho^{(n/2)}(r^k) = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \quad \rho^{(n/2)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}, \tag{20.946}$$

et donc

$$\chi^{(n/2)}(r^k) = 2(-1)^k \tag{20.947a}$$
$$\chi^{(n/2)}(sr^k) = 0. \tag{20.947b}$$

Il est vite vu que $\chi^{(n/2)} = \chi^{+-} + \chi^{-+}$. Ergo la représentation $\rho^{(n/2)}$ n'est pas irréductible.

(3) $0 < h < \frac{n}{2}$. Dans ce cas nous avons $\omega^h \neq \omega^{-h}$, et en regardant les systèmes d'équations donnés plus haut, nous voyons que $\rho^{(h)}(s)$ et $\rho^{(h)}(r)$ n'ont pas de vecteurs propres communs. Donc ces représentations sont irréductibles.

Nous devons cependant encore vérifier si elles sont deux à deux non équivalentes. Supposons que pour $h \neq h'$ nous ayons une matrice $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que $T\rho^{(h)}(r)T^{-1} = \rho^{(h')}(r)$. Cela impliquerait en particulier que les matrices $\rho^{(h)}(r)$ et $\rho^{(h')}(r)$ aient même valeurs propres. Nous aurions donc $\{\omega^h, \omega^{-h}\} = \{\omega^{h'}, \omega^{-h'}\}$. Mais cela est impossible avec $0 < h < h' < \frac{n}{2}$. Donc toutes ces représentations sont distinctes.

Le caractère de la représentation $\rho^{(h)}$ est $\chi^{(h)}(r^k) = \omega^{hk} + \omega^{-hk} = 2\cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$.
Nous ajoutons donc la ligne suivante à notre liste :

	r^k	sr^k
$\chi^{(h)}$	$2\cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$	0

20.18.3 Le compte pour n pair

Nous avons 4 représentations de dimension 1 puis $\frac{n}{2}-1$ représentations de dimension 2. En tout nous avons

$$\frac{n}{2}+3 \tag{20.948}$$

représentations irréductibles modulo équivalence. Cela fait le compte en vertu des classes de conjugaisons listées en 20.11.14.5. Pour rappel, le nombre de représentations non équivalentes est égal au nombre de classes de conjugaison par le corolaire 18.27. Notons que c'est cela qui justifie le fait que nous ne devons pas chercher d'autres représentations. Nous sommes sûrs de les avoir toutes trouvées.

20.18.4 Le compte pour n impair

Nous avions fait mention plus haut du fait que si ψ est une représentation de dimension 1, le nombre $\psi(r)$ devait être une racine n^{e} de l'unité. Donc en dimension 1 nous avons seulement les représentations ρ^{++} et ρ^{-+}. Pour celles de dimension 2, nous en avons $\frac{n-1}{2}$. En tout nous avons donc

$$\frac{n+3}{2} \tag{20.949}$$

représentations irréductibles modulo équivalence. Cela fait le compte en vertu des classes de conjugaisons listées en 20.11.14.6.