Le Frido 2026
volume 4
Laurent Claessens

Plusieurs extensions et versions de ce livre.

1. La version courante, régulièrement mise à jour et qui deviendra petit à petit le Frido 2027. Téléchargeable sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf`

2. La version la plus complète, contenant beaucoup de géométrie différentielle

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/giulietta.pdf`

3. Et bien entendu les sources LaTeX

   `https://github.com/LaurentClaessens/mazhe`

Copyright 2011-2026 Laurent Claessens, and many contributors. A complete list could be retrieved from the git log.
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled “GNU Free Documentation License”.

(c) 2015-2026 David Revoy pour les illustrations de couverture CC-BY,
https://www.peppercarrot.com/

ISBN : 979-10-97085-49-0

Chapitre 21

Corps finis, racines de l'unité

21.1 Le groupe des racines de l'unité dans les nombres complexes

SecGJOLooWdMYV1

21.1.1 Le groupe

DEFooDUWPooZaAByH

Définition 21.1.
Une ***racine*** n^e ***de l'unité*** *dans un anneau est une racine du polynôme* $X^n - 1$.

LEMooSXFBooYJmRTK

Lemme-Définition 21.2.
Soit

$$U_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } k = 0, \dots, n-1\} \tag{21.1}$$

EqIEAXooIpyFPe

(1) L'ensemble U_n *est un groupe pour la multiplication.*

(2) L'ensemble U_n *est l'ensemble des racines* n^e *de l'unité dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Il est vite vérifié que tous les éléments de U_n sont des racines de l'unité parce que

$$\big(e^{2i\pi k/n}\big)^n = e^{2i\pi k} = 1, \tag{21.2}$$

entre autres à cause du lemme 20.13.

Cela nous donne déjà n racines pour $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$. Le théorème 8.110 nous indique qu'il ne peut pas y en avoir plus. □

21.3.
En ce qui concerne les notations, dans U_n, le « U » signifie « unité ». Cela n'a à peu près rien à voir avec le « U » du groupe $\mathrm{SU}(n)$; dans ce dernier, le « U » est pour « unitaire ».

Un des intérêts du groupe des racines est qu'il permet de factoriser $X^n - 1$, comme nous le verrons via les polynômes cyclotomiques dans le lemme 21.20.

LEMooRQRYooWZAuSD

Lemme 21.4 ([646]).
Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sigma_k(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $k = 1, \dots, n$. *Alors pour tout* $l \in \mathbb{N}$ *et tout* $r \in \mathbb{N}^*$, *nous avons* $\sigma_r(z_1^l, \dots, z_n^l) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. L'application $(c_1, \dots, c_n) \mapsto \sigma_r(c_1^l, \dots, c_n^l)$ est un polynôme symétrique : il existe un polynôme symétrique P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$\sigma_r(z_1^l, \dots, z_n^l) = P(z_1, \dots, z_n). \tag{21.3}$$

Par le théorème de décomposition 8.180, il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$P(z_1, \dots, z_n) = Q\big(\sigma_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \sigma_n(z_1, \dots, z_n)\big). \tag{21.4}$$

Vu que Q est à coefficients entiers et que chacun des $\sigma_i(z_1, \dots, z_n)$ est entier, le tout est entier. □

LEMooDJQFooOhVoPj

Lemme 21.5 ([647]).
L'ensemble des polynômes unitaires de degré n *dans* $\mathbb{Z}[X]$ *dont les racines sont dans* $\overline{B(0,1)}$ *(boule dans* $\mathbb{C}$*) est fini.*

Démonstration. Nous notons n le degré de P, et $z_1, \dots, z_n$ les racines de P. Les relations coefficients-racines 8.183 dit que

$$\sigma_k(z_1, \dots, z_n) = (-1)^k a_{n-k} \tag{21.5}$$

où σ_k est le polynôme symétrique élémentaire défini en 8.179. Vu que $P \in \mathbb{Z}[X]$, nous avons $\sigma_k(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}$, et pour chaque k nous avons

$$|\sigma_k(z_1, \dots, z_n)| = |\sum_{s \in F_k} \prod_{i=1}^{k} g_{s(i)}| \leqslant \sum_{s \in F_k} \prod_{i=1}^{k} |g_{s(i)}| \leqslant \sum_{s \in F_k} 1 = \mathrm{Card}(F_k). \tag{21.6}$$

Nous avons montré que $|a_{n-k}| \leqslant \mathrm{Card}(F_k)$. Il n'y a qu'un nombre fini de possibilités. □

PROPooINGJooPkByVP

Proposition 21.6 (Théorème de Kronecker[647, 648, 646])**.**
Soit un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont toutes les racines sont dans $\overline{B(0,1)}$. Si $P(0) \neq 0$ alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

Démonstration. Nous notons Ω_n l'ensemble des polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré n dont les racines sont dans $\overline{B(0,1)}$. Ce ensemble est fini par le lemme 21.5.

Soit un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont toutes les racines sont dans $\overline{(B(0,1))}$ et tel que $P(0) \neq 0$. Nous devons prouver que toutes les racines de P sont des racines de l'unité. Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines de P.

(1) **Les polynômes P_k** Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$P_k(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - z_i^k). \tag{21.7}$$

C'est un polynôme symétrique unitaire de degré n sont les racines sont les z_i^k qui vérifient $|z_i^k| \leqslant 1$.

(2) $P_k \in \mathbb{Z}[X]$ Nous montrons que les polynômes P_k sont à coefficients entiers. Les relations coefficients racines montrent que les coefficients de P_k sont essentiellement les nombres $\sigma_r(z_1^k, \dots, z_n^k)$, qui sont entiers par le lemme 21.4.

Nous avons prouvé que $P_k \in \Omega_n$ pour tout k.

Notons que Ω_n étant fini et chaque élément de Ω_n ayant au maximum n racines distinctes, l'ensemble des racines d'éléments de Ω_n est fini. Par ailleurs, pour chaque i, tous les z_i^k sont racines d'éléments de Ω_n (en l'occurrence de P_k). Par une autre manière de le dire est que $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est un ensemble fini[1]. Il existe donc $k \neq l$ tels que $z_i^k = z_i^l$. Nous avons alors $z^{k-l} = 1$, et z_i est une racine de l'unité. □

LemWHQGooXyeJiw

Lemme 21.7.
L'ensemble U_n est un groupe cyclique[2] d'ordre n généré par $\xi = e^{2i\pi/n}$.

Démonstration. Il y a trois propriétés à vérifier pour que ce soit un groupe.

(1) **Neutre** Le nombre 1 est une racine de l'unité.

(2) **Inverse** Si $\omega \in U_n$ alors $\omega^n = 1$ et donc $\omega\omega^{n-1} = 1$, ce qui signifie que ω^{n-1} est un inverse de ω. Il reste à voir que $\omega^{n-1} \in U_n$. En effet $\left(\omega^{n-1}\right)^n = (\omega^n)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$.

(3) **Associativité** Cas particulier de l'associativité dans $\mathbb{C}$.

Le fait que ce soit un groupe cyclique contenant n éléments fait partie de la définition. □

Le lemme suivant donne les autres générateurs.

LemcFTNMa

Lemme 21.8.
Le nombre ξ^a est un générateur de U_n si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$.

Démonstration. Si $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$ alors le théorème de Bézout 3.46 nous fournit des entiers u et v tels que $ua + vn = 1$. Alors nous avons

$$e^{2i\pi/n} = e^{2(ua+vn)i\pi/n} = (e^{2ai\pi/n})^u, \tag{21.8}$$

ce qui signifie que ξ est dans le groupe engendré par ξ^a, et par conséquent tout U_n est engendré.

Pour l'implication inverse, nous utilisons le théorème de Bézout dans le sens inverse. Soit ξ^a un générateur de U_n. Alors il existe u tel que $(\xi^a)^u = \xi$, donc $\xi^{au-1} = 1$, c'est-à-dire qu'il existe v tel que $au - 1 = vn$. Cette dernière égalité implique que $\mathrm{pgcd}(a, n) = 1$. □

[1] En tant que partie d'un ensemble fini. On pourrait invoquer le principe des tiroirs, mais la proposition 1.76 fait aussi bien l'affaire.

[2] Définition 2.149.

Exemple 21.9.
Une conséquence tout à fait extraordinaire de ce lemme est que le nombre 7 est générateur de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (parce que $\text{pgcd}(7, 12) = 1$). Or en solfège, une quinte fait 7 demi-tons, et une gamme en fait 12. Le cycle des quintes est donc générateur de la gamme chromatique[649]. Ce fait est connu des musiciens[3] depuis des siècles. △

PROPooIOQEooGMcCJm

Proposition 21.10 (Intersection par deux)**.**
Les ensembles U_α et U_β ont une intersection réduite à $\{1\}$ si et seulement si α et β sont premiers entre eux.

Démonstration. Nous rappelons qu'une racine α^{e} de l'unité peut s'écrire sous la forme $e^{2i\pi k/\alpha}$ avec $0 \leqslant k < \alpha$.

(1) **Sens direct** Par contraposée, nous supposons que α et β ne sont pas premiers entre eux, et nous notons d leur pgcd. Nous nommons $\alpha = d\alpha'$ et $\beta = d\beta'$. Pour trouver une intersection entre U_α et U_β nous devons trouver une valeur de $0 < k < \alpha$ telle que

$$(e^{2i\pi k/\alpha})^\beta = e^{2i\pi k\beta/\alpha} = 1, \tag{21.9}$$

c'est-à-dire une valeur de k telle que $k\beta/\alpha$ soit un entier. Mais $k\beta/\alpha = k\beta'/\alpha'$ et par conséquent prendre $k = \alpha'$ fonctionne. Surtout que par hypothèse $d > 1$ et donc $k = \alpha' < \alpha$.

(2) **Sens réciproque** Supposons maintenant que α et β soient premiers entre eux. Soit $z \in U_\alpha \cap U_\beta$. Le fait que z soit une racine α^{e} de l'unité implique qu'il existe un $k < \alpha$ tel que $z = e^{2i\pi k/\alpha}$. Mais si z est également une racine β^{e} de l'unité, alors $z^\beta = 1$, c'est-à-dire que $k\beta/\alpha$ doit être un entier, soit l cet entier. Nous avons

$$k\beta = l\alpha. \tag{21.10}$$

Si $k > 0$, comme le nombre α divise $k\beta$, cela conduirait via le lemme de Gauss 3.58 à dire que α divise k. Mais α ne peut pas diviser k parce que nous avions supposé que k était strictement plus petit que α. Donc $k = 0$ et $z = 1$.

□

PropFDDHooEyYxBC

Proposition 21.11 (Intersection : le cas général[1])**.**
Soient des entiers positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Nous avons

$$\bigcap_{i=1}^{p} U_{\alpha_i} = \{1\} \tag{21.11}$$

si et seulement si $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = 1$ *(c'est-à-dire que les α_i sont premiers dans leur ensemble).*

Démonstration. Nous décomposons les α_i en facteurs premiers[4] de la façon suivante : $\alpha_i = \prod_{k\in\mathbb{N}} p_k^{\alpha_i^{(k)}}$ où les p_k sont les nombres premiers.

(1) **Caractérisation par une décomposition en facteurs premiers** Les éléments z différents de 1 dans U_{α_1} s'écrivent sous la forme

$$z = e^{2i\pi k/\alpha_1} \tag{21.12}$$

avec $0 < k < \alpha_1$.

Pour tout $i \neq 1$, le fait que $z \in U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_1}$ se traduit par le fait que $\left(e^{2i\pi k/\alpha_1}\right)^{\alpha_i} = 1$, c'est-à-dire que $\alpha_i k/\alpha_1$ est entier, donc que α_1 divise $k\alpha_i$. Par conséquent il existera un élément différent de 1 dans l'intersection des U_{α_i} si et seulement si il existe un entier k strictement compris entre 0 et α_1 pour lequel α_1 divise tous les $k\alpha_i$.

Un entier $0 < k < \alpha_1$ convient si et seulement si pour tout l, la puissance de p_l dans la décomposition de k est au moins égale à

$$\alpha_1^{(l)} - \alpha_i^{(l)} \tag{21.13}$$

pour tout l.

(2) **Sens direct** L'hypothèse $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq 1$ implique qu'il existe un l pour lequel tous les $\alpha_i^{(l)}$ sont non nuls. Nous construisons le k voulu en prenant pour tout p_i la même puissance que celle dans α_1, sauf pour p_l pour lequel nous prenons la puissance $\alpha_1^{(l)} - \min_i\{\alpha_i^{(l)}\}$. Le minimum en question est strictement positif, ce qui donne un k strictement inférieur à α_1.

[3] Même ceux qui ignorent le théorème de Bézout.
[4] Théorème 3.62.

(3) **Sens réciproque** Si $\text{pgcd}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = 1$ alors pour tout l, il existe un i tel que $\alpha_i^{(l)} = 0$. Donc pour tout l, la puissance de p_l dans la décomposition de k est au moins $\alpha_1^{(l)}$. Cela implique que $k \geqslant \alpha_1$, ce qui est impossible.

□

21.1.2 Fonction indicatrice d'Euler

Voir le thème 11.

DefLYGTooFPOYGZ

Définition 21.12.
*Les générateurs de U_n sont les **racines primitives**[5] de l'unité dans $\mathbb{C}$. Nous nommons Δ_n leur ensemble :*

$$\Delta_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = 1\}. \tag{21.14}$$

Nous avons par exemple

- Pour $n = 1$, $\text{pgcd}(k, 1) = 1$ et $1 \leqslant k \leqslant 1$ uniquement pour $k = 1$.
- Pour $n = 2$, $\text{pgcd}(k, 2) = 1$ et $1 \leqslant k \leqslant 2$ uniquement pour $k = 1$.
- Pour $n = 3$, $\text{pgcd}(k, 3) = 1$ et $1 \leqslant k \leqslant 3$ uniquement pour $k = 1$, $k = 2$.

$$\Delta_1 = \{1\} \tag{21.15a}$$
$$\Delta_2 = \{e^{i\pi}\} \tag{21.15b}$$
$$\Delta_4 = \{e^{i\pi/2}, e^{i3\pi/2}\}. \tag{21.15c}$$

Notons que $1 \in \Delta_d$ seulement avec $d = 1$.

PROPooWILSooFHWLnt

Proposition 21.13.
En posant[6]

$$U_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } k = 0, \ldots, n-1\}, \tag{21.16}$$

et[7]

$$\Delta_d = \{e^{2i\pi k/d} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant d \text{ et } \text{pgcd}(k, d) = 1\}, \tag{21.17}$$

nous avons

$$U_n = \bigcup_{d|n} \Delta_d \tag{21.18}$$

EqnZuIxL

et l'union est disjointe.

Démonstration. En plein de petites parties.

(1) **Union disjointe** Soient d_1, d_2 tels que $x \in \Delta_{d_1} \cap \Delta_{d_2}$. Il existe k, l tels que $e^{2i\pi k/d_1} = e^{2i\pi l/d_2}$. Le corolaire 20.29 dit alors qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{k}{d_1} = \frac{l}{d_2} + s = \frac{l + sd_2}{d_2}. \tag{21.19}$$

Vu que k/d_2 est une fraction irréductible, nous avons $d_2 \leqslant d_1$ par la proposition 3.172. Nous faisons de même en permutant les rôles de d_1 et d_2 : il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{l}{d_1} = \frac{k + d_1 t}{d_1}, \tag{21.20}$$

de telle sorte que $d_1 \leqslant d_2$. Nous en déduisons que $d_1 = d_2$. Donc l'union à droite dans (21.18) est disjointe.

[5] parce qu'en prenant les puissances successives de l'une d'entre elles, nous retrouvons toutes les racines de l'unité, voir aussi la définition 21.56.
[6] Voir la définition 21.2.
[7] Définition 21.12. On pourrait croire que la condition $\text{pgcd}(k, d) = 1$ exclu $k = d$. On aurait alors envie d'écrire $1 \leqslant k < d$. Mais pour $d = 1$, ça fait une différence parce que tel qu'écrit $\Delta_1 = \{1\}$.

(2) **Première inclusion** Soit $x \in U_n$. Il existe $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $x = e^{2i\pi k/n}$. Si $x = 1$, alors $x \in \Delta_1$; nous supposons que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que $k \neq 0$. Nous écrivons la fraction k/n sous forme irréductible :

$$\frac{k}{n} = \frac{k'}{d} \tag{21.21}$$

avec $d = \text{pgcd}(k, n)$, et $\text{pgcd}(k', d) = 1$. Donc $x \in \Delta_d$.

(3) **Seconde inclusion** Nous supposons que $x \in \Delta_d$ pour un certain diviseur d de n. Il existe donc $1 \leqslant k \leqslant d$ tel que $\text{pgcd}(k, d) = 1$ et $x = e^{2i\pi k/d}$. Si $d = 1$ alors $x = 1$ et $x \in U_n$. Nous excluons ce cas. Vu que $d \mid n$, nous considérons $s \in \mathbb{N}$ tel que $n = sd$. Nous avons alors

$$\frac{k}{d} = \frac{ks}{sd} = \frac{ks}{n}. \tag{21.22}$$

Multiplions par s les inéquations $1 \leqslant k \leqslant d$:

$$s \leqslant ks \leqslant sd = n. \tag{21.23}$$

Le cas $ks = n$ est exclu parce que cela demanderait $kn = ksd = nd$, et donc $k = d$, ce que nous avons exclu parce que $k = d$ est uniquement possible pour $d = 1$ à cause de la condition $\text{pgcd}(k, d) = 1$.

□

PROPooFKCHooWdFicM

Proposition 21.14.
Nous avons

$$\varphi(n) = \text{Card}(\Delta_n) \tag{21.24}$$

EqEulerGqPsvi

φ est l'indicatrice d'Euler[8].

Démonstration. Nous prouvons que l'application

$$\begin{aligned} f\colon \{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n, \text{pgcd}(k, n) = 1\} &\to \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n, \text{pgcd}(k, n) = 1\} \\ k &\mapsto e^{2i\pi k/n} \end{aligned} \tag{21.25}$$

est une bijection.

Le fait que ce soit surjectif est immédiat. Pour l'injectivité, nous considérons $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$ tels que $f(k) = f(l)$. Nous avons donc $e^{2i\pi k/n} = e^{2i\pi l/n}$. Le corolaire 20.29 nous dit alors qu'il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2\pi k/n = 2\pi l/n + 2\pi s. \tag{21.26}$$

En simplifiant par 2π et en multipliant par n, nous trouvons $k = l + sn$. Étant donné que k et l sont tout deux entre 1 et n, nous avons obligatoirement $s = 0$ et donc $k = l$.

Donc f est bijective et $\text{Card}(\Delta_n) = \varphi(n)$. □

21.1.3 Décomposition en éléments simples

SUBSEMooSAYXMoDHUqdV

Lemme 21.15 ([650, 1])**.**
Soient des nombres complexes distincts $a_1, \dots, a_N$. Alors pour tout $z \notin \{a_i\}_{i=1,\dots,N}$,

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{z - a_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{z - a_i} \tag{21.27}$$

où

$$\lambda_i = \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j}. \tag{21.28}$$

Démonstration. Nous posons $P(z) = \prod_{k=1}^{N}(z - a_k)$, et nous calculons :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{z - a_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i \prod_{k \neq i}(z - a_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z - a_k)} \tag{21.29a}$$

$$= \frac{1}{P(z)} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \prod_{k \neq i}(z - a_k) \tag{21.29b}$$

[8] Définition 7.29.

Il s'agit maintenant de prouver que la somme de gauche vaut toujours 1. Nous posons

$$S(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{k\neq i}(z-a_k)}{\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)}. \tag{21.30}$$

Calculons $S(a_l)$:

$$S(a_l)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\prod_{k\neq i}(a_l-a_k)}{\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)}. \tag{21.31}$$

Pour les termes $i\neq l$, le numérateur est nul, car il contient le facteur $a_l-a_l=0$. Donc la somme se réduit au seul terme $i=l$:

$$S(a_l)=\frac{\prod_{k\neq l}(a_l-a_k)}{\prod_{k\neq l}(a_l-a_k)}=1. \tag{21.32}$$

Le polynôme $S-1$ est donc un polynôme de degré $N-1$ qui possède N racines distinctes. Le théorème 8.110 implique que $S-1=0$ et donc que $S=1$ comme nous le voulions. □

Il est possible de décomposer une fraction rationnelle en fractions dites « simples ». Si $|z|<1$ nous avons par exemple la décomposition

$$\frac{1}{1-z^r}=\sum_{\omega\in U_r}\frac{A_\omega}{\omega-z} \tag{21.33}$$ EqDWYBoqIIMBAt

où U_r est le groupe des racines r^{e} de l'unité défini en (21.1). Les nombres A_ω peuvent alors être déterminés en effectuant la somme. Le dénominateur commun sera $1-z^r$ tandis que les A_ω sont déterminés en égalant le numérateur à 1.

Exemple 21.16.
Pour décomposer la fraction $\frac{1}{1-x^2}$ nous savons que les racines du dénominateur sont ±1. Donc nous écrivons

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}. \tag{21.34}$$

Nous trouvons les valeurs de A et B en effectuant la somme :

$$\frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}=\frac{A+B+(A-B)x}{1-x^2}. \tag{21.35}$$

Les coefficients A et B doivent donc vérifier $A+B=1$ et $A-B=0$. Au final,

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2(1-x)}+\frac{1}{2(1+x)}. \tag{21.36}$$

△

21.2 Chiffrement RSA

SecEVaFYi

Ce passage sur RSA provient en bonne partie de la page de Wikipédia[651].

Alice veut envoyer un message à Bob. L'idée est que Bob va donner à Alice une clef publique qui va permettre de chiffrer le message, tandis que Bob va garder pour lui une clef privée qui permet de déchiffrer.

21.2.1 Mise en place par Bob

Bob se crée une paire de clef publique, clef privée de la façon suivante.

(1) Bob choisit deux nombres premiers distincts p,q.

(2) Il calcule $n=pq$.

(3) Par le corolaire 7.42, l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)=(p-1)(q-1)$ est facile à calculer pour Bob.

(4) Bob choisit $e\in\mathbb{N}$ premier avec $\varphi(n)$, puis d tel que $ed\in[1]_{\varphi(n)}$.

Maintenant la paire est : clef publique (n,e) et clef privée (n,d)[9].

Bob envoie la paire (n,e) à Alice.

Remarque 21.17.
Ici nous ne supposons pas que la communication soit sure. Une tierce personne peut intercepter le message. D'ailleurs en principe, les gens publient leur clef publique sur leurs sites, voire sur des sites dédiés. Le problème de l'identification reste à résoudre à l'ancienne.

[9] Le fait que e soit public et d soit privé est une convention. e comme *encryption* et d comme *decryption*.

21.2.2 Chiffrement

Nous chiffrons en utilisant la clef publique (n, e). D'abord Alice se débrouille pour transformer son message en un nombre plus petit que n. Soit M ce message. Alice code M en

$$C = M^e \mod n. \tag{21.37}$$

Tout le truc est que nous allons voir que l'application $x \mapsto x^e$ est une bijection de $\mathbb{F}_n$, et que l'inverse est facile à calculer par Bob, et difficile pour les autres. Alice envoie C à Bob. Encore une fois, nous ne supposons pas que cette communication soit privée. Le nombre C peut être intercepté.

21.2.3 Déchiffrement

Nous allons montrer que $M = C^d \mod n$, et donc que Bob, connaissant (n, d), peut déchiffrer. D'abord

$$C^d = (M^e)^d = M^{ed}, \tag{21.38}$$

mais nous savons qu'il existe k tel que

$$ed = 1 + k\varphi(n) = 1 + k(p-1)(q-1). \tag{21.39}$$

L'étape astucieuse est de remarquer que

$$M^{1+k(p-1)(q-1)} \in [M]_p \cap [M]_q. \tag{21.40}$$

EqreeHgn

Pour montrer cela nous utilisons le petit théorème de Fermat 8.15(4).

- Si M est premier avec p, alors $M^{p-1} \in [1]_p$.
- Si M n'est pas premier avec p, alors M est multiple de p et on sait que $M^{p-1} \in [0]_p = [M]_p$.

Dans les deux cas nous avons (21.40). Le nombre $M^{1+k\varphi(n)} - M$ est donc à la fois multiple de p et de q.

Le lemme chinois 8.28 nous dit immédiatement[10] qu'alors

$$M^{1+k\varphi(n)} - M \tag{21.41}$$

est un multiple de $pq = n$, c'est-à-dire que

$$C^d = M^{ed} \in [M]_n. \tag{21.42}$$

Si on ne croit pas au lemme chinois, on peut utiliser le lemme de Gauss. Posons

$$M^{1+k\varphi(n)} - M = ap = bq. \tag{21.43}$$

Dans ce cas p divise bq, mais q est premier avec p, donc le lemme de Gauss 3.201 nous enseigne[11] que p divise b.

21.2.4 Une imprudence à ne pas commettre

Nous avons pris deux cas selon que M soit ou non premier avec p. Une question qui se pose est la suivante : est-ce que c'est une bonne idée d'envoyer un message qui ne soit pas premier avec p ?

Si nous savons que M n'est pas premier avec p, alors nous avons $M^e = l^e p^e$ et $n = pq$ qui sont publics. Donc un calcul de PGCD permettrait de trouver p.

Il faut cependant savoir que PageAKTBooMDeQxY

- La probabilité que ça arrive est infime : comme M est entre 0 et $n = pq$, les multiples de p possibles sont $p, 2p, \cdots pq$. Il y a donc une chance sur p que cela arrive. Typiquement avec des p de l'ordre de 10^{120}, on peut utiliser RSA chaque milliseconde sur chaque atome de l'univers depuis le début des temps que ça ne se serait presque certainement pas encore produit.
- De toutes façons, Alice ne sait pas vérifier si son message est premier avec p, parce qu'elle ne connaît pas p.
- En conclusion, la partie de la preuve qui montre que $M^{1+\varphi(n)} \in [M]_p \cap [M]_q$ dans le cas M non premier avec p est, à toutes fins pratiques, inutile parce que ce cas de figure ne se présentera jamais dans toutes l'histoire de l'univers, même pas avec une civilisation intelligente autour de chaque étoile.

ProbGAYFooZATuYy

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 21.18

Est-ce que ces trois points sont corrects ?

[10] C'est ici qu'il est important que p ne soit pas égal à q. Si $p = q$, alors le lemme chinois ne fonctionne pas.

[11] Ici aussi, si $p = q$, ça ne marche pas.

21.2.5 Problèmes calculatoires

Pour implémenter RSA, il faut pouvoir faire (au moins) trois choses :

(1) Trouver de grands nombres premiers.

(2) Trouver des couples de Bézout.

(3) Calculer M^e lorsque e est très grand.

En ce qui concerne le problème de trouver des nombres premiers, c'est compliqué, mais il faut savoir qu'il y en a plein. À 120 chiffres, il y a environ autant de nombres premiers que d'atomes dans 10^{20} fois l'univers connu. Cela rend impossible toute tentative de factoriser un grand nombre en essayant toutes les possibilités. Même pas en science-fiction.

Trouver des nombres u et v tels que $Au + Bv = \text{pgcd}(A, B)$ est un problème expliqué en 3.10.1.

En ce qui concerne le calcul de M^e lorsque e est grand, il n'est évidemment pas pensable de faire $M \cdot M \cdot \ldots M$ avec e facteurs. Un truc pour calculer en moins d'étapes est l'**exponentiation rapide**. Si $e = 2k$ est pair, nous calculons

$$M^e = (M^k)^2; \tag{21.44}$$

si $e = 2k + 1$ alors nous calculons

$$M^e = M(M^k)^2. \tag{21.45}$$

Le calcul prend alors seulement environ $\log_2(e)$ étapes. Pour donner une idée,

$$\log_2(10^{120}) \simeq 400. \tag{21.46}$$

Très raisonnable, mais un ordinateur reste indispensable.

21.2.6 La solidité de RSA

La solidité de la méthode repose sur deux conjectures (non démontrées !!) :

- Pour déchiffrer il *faut* connaitre p et q.
- La difficulté de trouver p et q en partant de $n = pq$ est exponentielle en n.

Dans la méthode de déchiffrage proposée ici, p et q sont utilisés pour calculer d qui est solution de $ed = [1]_{\varphi(n)}$. La seule formule connue pour calculer $\varphi(n)$ est $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Si on trouve plus simple, alors RSA peut être craqué.

21.2.7 Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme

Il est souvent dit[652] que différents systèmes de chiffrement peuvent aider à avoir des discussions « discrètes » dans les régimes totalitaires. La technologie au service de la démocratie, voilà qui enthousiasme la jeunesse[12]. La réalité est qu'il est souvent possible de craquer un système de chiffrement arbitrairement complexe, même sans connaitre le petit théorème de Fermat …
… tout dépend du contexte.

21.3 Polynômes cyclotomiques

21.3.1 Définitions et propriétés

DefXGHooRAXlpp

Définition 21.19.
*Le **polynôme cyclotomique** d'indice n est le polynôme*

$$\phi_n(X) = \prod_{z \in \Delta_n} (X - z) \tag{21.47}$$

EqLiGYKK

où Δ_n est l'ensemble des racines primitives de l'unité de la définition 21.12 :

$$\Delta_n = \{e^{2i\pi k/n} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = 1\}, \tag{21.48}$$

voir la définition 21.12.

[12] Cela dit, le navigateur Tor[653], qui est un pur produit de RSA, permet effectivement d'accéder en France aux sites bloqués pour apologie du terrorisme (mars 2015).

Le polynôme ϕ_n est un polynôme unitaire de degré $\varphi(n)$ où φ est l'indicatrice d'Euler[13]. Nous avons par exemple

$$\Delta_1 = \{1\} \tag{21.49a}$$
$$\Delta_2 = \{-1\} \tag{21.49b}$$
$$\Delta_3 = \{e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\} \tag{21.49c}$$

et les premiers polynômes cyclotomiques sont donnés par

$$\phi_1(X) = X - 1 \tag{21.50a}$$
$$\phi_2(X) = X + 1 \tag{21.50b}$$
$$\phi_3(X) = X^2 + X + 1. \tag{21.50c}$$

Pour le dernier nous avons utilisé le fait que $e^{6i\pi/3} = 1$ et $e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = -1$.

LemKYGBooAwpOHD

Lemme 21.20.
Le polynôme $X^n - 1$ se factorise des diverses manières suivantes :

$$X^n - 1 = \prod_{z\in U_n} (X - z) = \prod_{d|n} \prod_{z\in\Delta_d} (X - z) = \prod_{d|n} \phi_d(X) \tag{21.51}$$

où U_n est défini en 21.2.

Démonstration. En ce qui concerne la première égalité, tous les éléments de U_n sont des racines simples de $X^n - 1$. Donc le théorème 3.286 dit qu'il existe un nombre k (polynôme de degré zéro) tel que $X^n - 1 = k\prod_{z\in U_n}(X - z)$. Vu le coefficient du terme de plus haut degré, ce k ne peut être que 1.

Pour la suite nous utilisons l'union disjointe $U_n = \bigcup_{d|n} \Delta_d$ de la proposition 21.13 et la définition (21.47) des polynômes cyclotomiques. □

Remarque 21.21.
Notons juste pour le plaisir que dans le produit $\prod_{d|n}\prod_{z\in\Delta_d}$, il y a bien n termes parce que $\text{Card}(\Delta_d) = \varphi(d)$ et $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$ (définition 21.12 et proposition 7.38).

Proposition 21.22.
Les polynômes cyclotomiques sont à coefficients entiers : $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Nous devons démontrer que les coefficients de ϕ_n sont dans $\mathbb{Z}$ alors qu'ils sont à priori dans $\mathbb{C}$. Nous démontrons cela par récurrence. D'abord $\phi_1(X) = X - 1$, d'accord. Ensuite

$$X^{n+1} - 1 = \prod_{d|n+1} \phi_d(X) = \phi_{n+1}(X) \cdot \underbrace{\prod_{\substack{d|n+1\\ d\leqslant n}} \phi_d(X)}_{\in\mathbb{Z}[X] \text{ par récurrence}} \tag{21.52}$$

Le lemme 8.49 conclut que $\phi_{n+1} \in \mathbb{Z}[X]$. Nous avons considéré $\mathbb{Z}$ comme sous anneau du corps $\mathbb{C}$. □

PropUImYnL

Proposition 21.23.
Soient $1 \leqslant m \leqslant n$, deux entiers, et

$$T(X) = \frac{X^n - 1}{X^m - 1} \in \mathbb{Z}(X). \tag{21.53}$$

Alors :

ItemhpDPKE

(1) si $m \mid n$ alors $T \in \mathbb{Z}[X]$,

(2) si $m \mid n$ et si $m < n$ alors ϕ_n divise T dans $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Nous prouvons point par point.

(1) Si m divise n alors les diviseurs de n sont l'union des diviseurs de m et des diviseurs de n qui ne divisent pas m. Soit

$$Q = \{\text{diviseurs de } n \text{ ne divisant pas } m\}. \tag{21.54}$$

[13] Définie par l'équation 21.24.

Nous avons alors

$$X^n-1=\prod_{d|n}\phi_d(X)=\prod_{d|m}\phi_d(X)\cdot\prod_{q\in Q}\phi_q(X)=(X^m-1)\cdot\prod_{q\in Q}\phi_q(X). \tag{21.55}$$

Nous avons donc

$$T(X)=\frac{X^n-1}{X^m-1}=\prod_{q\in Q}\phi_q(X)\in\mathbb{Z}[X]. \tag{21.56}$$

(2) Nous venons de montrer que

$$T=\prod_{q\in Q}\phi_q\in\mathbb{Z}[X]. \tag{21.57}$$

Étant donné que $m<n$ nous avons $n\in Q$ et donc

$$T=\phi_n\cdot\prod_{q\in Q\setminus\{n\}}\phi_q. \tag{21.58}$$

Par conséquent ϕ_n divise T dans $\mathbb{Z}[X]$.

□

CorTVUooErJiAC

Corolaire 21.24.
Si p est premier alors le polynôme cyclotomique ϕ_p a une bonne tête :

$$\phi_p(X)=1+X+\cdots+X^{p-1}. \tag{21.59}$$

Démonstration. Nous utilisons la formule du lemme 21.20 en remarquant que seuls p et 1 divisent p :

$$X^p-1=\prod_{d|p}\phi_d(X)=\phi_1(X)\phi_p(X)=(X-1)\phi_p(X). \tag{21.60}$$

Nous pouvons simplifier par $X-1$ en utilisant la formule du lemme 3.292(2) :

$$1+X+\cdots+X^{p-1}=\phi_p(X) \tag{21.61}$$

□

PropoIeOVh

Proposition 21.25 (Irréductibilité des polynômes cyclotomiques[654])**.**
Les polynômes cyclotomiques sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Pour rappel, nous savons déjà que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\phi_n\in\mathbb{Z}[X]$. Puisque les racines de ϕ_n sont les racines primitives de l'unité, nous devons montrer que toutes les racines primitives de l'unité ont même polynôme minimal (qui sera alors ϕ_n) ; en effet comme ces polynômes divisent ϕ_n, s'ils sont distincts, la proposition 8.107 s'applique et le produit des polynômes minimaux diviserait ϕ_n. Dans le cas inverse, ϕ_n est polynôme minimal des racines primitives de l'unité et est donc irréductible. Soit donc ξ, une telle racine primitive. Une autre racine primitive est de la forme ξ^l où l est un nombre premier tel que $\operatorname{pgcd}(l,n)=1$.

Soient f et g, les polynômes minimaux dans $\mathbb{Z}[X]$ de ξ et ξ^l. Nous allons montrer que $f=g$ et donc que $f=g=\phi_n$. Supposons par l'absurde que $f\neq g$. Dans ce cas ils seraient des facteurs irréductibles distincts de ϕ_n et il existerait un polynôme h tel que $\phi_n=fgh$. A priori, $h\in\mathbb{Q}[X]$ parce que nous sommes justement en train de prouver que ϕ_n est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Quoi qu'il en soit, le lemme de Gauss 8.51 nous montre que $h\in\mathbb{Z}[X]$ parce que ϕ_n, f et g ont des coefficients entiers. Nous avons

$$f(\xi)=g(\xi^l)=0. \tag{21.62}$$

Considérons le polynôme $\psi(X)=g(X^l)$. Ce polynôme ψ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et ψ est annulateur de ξ, donc f divise ψ en tant que polynôme minimal de ξ. Il y a un polynôme unitaire à coefficients entiers (lemme de Gauss forever) k tel que

$$\psi=fk \tag{21.63}$$

Nous considérons maintenant les projections sur $\mathbb{F}_l[X]$: étant donné que $\phi_n=fgh$, nous savons que $\bar{f}\bar{g}$ divise $\bar{\phi}_n$. En même temps, $\bar{f}$ divise $\bar{\psi}$. En utilisant le morphisme de Frobenius (c'est ici que la projection sur $\mathbb{F}_l$ joue), nous avons aussi

$$\bar{\psi}(X)=\bar{g}(X^l)=\bar{g}(X)^l. \tag{21.64}$$

Par conséquent dire que $\bar{f}$ divise $\bar{\psi}$ revient à dire que $\bar{f}(X)$ divise $\bar{g}(X)^l$. En particulier tout facteur irréductible de $\bar{f}$ divise $\bar{g}$. Un facteur irréductible de $\bar{f}$ serait donc à la fois dans $\bar{f}$ et dans $\bar{g}$ et donc deux fois (au moins) dans $\bar{\phi}_n$ parce que $\bar{f}\bar{g}$ divise ϕ_n. Dans un corps de décomposition de ce facteur, ϕ_n aurait une racine double, alors que ce n'est pas le cas. Contradiction. Nous concluons que $f=g$. □

Le corolaire suivant va être utilisé pour déterminer les polygones constructibles à la règle et au compas, théorème de Gauss-Wantzel 21.88.

CorKRTooTJtyvP

Corolaire 21.26.
Soit p un nombre premier et α un entier non nul. Nous posons $q = p^\alpha$. Alors le polynôme minimal de $e^{2i\pi/q}$ sur $\mathbb{Q}$ est le polynôme cyclotomique ϕ_q.

Démonstration. Le polynôme ϕ_q est irréductible par la proposition 21.25, il est unitaire par définition et contient le monôme $X - e^{2i\pi/q}$, donc il est annulateur. Annulateur, irréductible et unitaire, la proposition 8.82(2) en fait le polynôme minimal de $e^{2i\pi/q}$. □

ThojCJpFW

Théorème 21.27.
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire irréductible non constant tel que toutes les racines dans $\mathbb{C}$ soient de module $\leqslant 1$. Alors, soit $P = X$, soit P est un polynôme cyclotomique.

Démonstration. Le polynôme $P = X$ vérifie les conditions. Pour la suite, nous supposons que $P \neq X$.

Nous notons $P = \sum_i a_i X^i$. Étant donné que P est irréductible et différent de X, nous avons $a_0 \neq 0$ (sinon $x = 0$ serait une racine). Nous allons montrer que les racines de P sont toutes des racines N-ièmes de l'unité (avec le même N pour toutes).

Soient $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,d}$ les racines de P ; on a

$$P = \prod_{i=1}^{d}(X - \xi_i) \tag{21.65}$$

avec $\prod_{i=1}^{d} \xi_i = a_0$. Par hypothèse, $|\xi_i| \leqslant 1$ et donc $0 < |a_0| \leqslant 1$. Puisque $P \in \mathbb{Z}[X]$ nous avons donc $a_0 = 1$ et $|\xi_i| = 1$, pour tout i.

Nous introduisons les polynômes

$$g_q(X) = \prod_{i=1}^{d}\big(X - (\xi_i)^q\big), \tag{21.66}$$

et en particulier $g_1 = P$, et nous développons

$$g_q(X) = X^n + C_{1,q}X^{n-1} + \cdots + C_{n,q} \tag{21.67}$$

où

$$C_{k,q} = (-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant d} (\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^q. \tag{21.68}$$

Nous introduisons aussi les polynômes

$$F_{k,q}(X_1,\dots,X_n) = (-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant d} (X_{i_1}\dots X_{i_k})^q \tag{21.69}$$

qui sont des polynômes symétriques. Ils vérifient deux propriétés. La première est que

$$C_{r,q} = F_{r,q}(\xi_1,\dots,\xi_n), \tag{21.70}$$

et la seconde est que les polynômes $F_{r,1}$ sont les polynômes symétriques élémentaires à un coefficient près. Le théorème 8.180 nous donne alors des polynômes $G_{k,q} \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ tels que

$$F_{k,q}(X_1,\dots,X_n) = G_{k,q}\big(F_{1,1}(X_1,\dots,X_n),\dots,F_{k,1}(X_1,\dots,X_n)\big). \tag{21.71}$$

Nous savons que

$$|C_{k,q}| \leqslant \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k<d} 1 = \binom{d}{k}. \tag{21.72}$$

Donc g_q fait partie de l'ensemble fini des polynômes dans $\mathbb{Z}[q]$ dont tous les coefficients sont bornés en valeur absolue par

$$\max_{k=1,\dots,d}\binom{d}{k}. \tag{21.73}$$

Il existe un certain nombre d'ensembles $\{\xi_i\}$ qui sont racines de polynômes vérifiant les conditions du théorème. À chacun de ces ensembles est associé une suite de polynômes g_q et donc des coefficients $C_{k,q}$. Ce

que nous avons vu est que l'ensemble de tous les coefficients $C_{k,q}$ possibles (pour un choix donné des $\{\xi_i\}$) est fini, en particulier, comme $C_{1,q} = \sum_i \xi_i^q$, pour chaque k, l'ensemble

$$\{\xi_k^q \text{ tel que } q \in \mathbb{N}\}. \tag{21.74}$$

Par le principe des tiroirs, il existe q_1 et q_2 tels que $\xi_k^{q_1} = \xi_k^{q_2}$. Ici, q_1 et q_2 dépendent de k et nous notons $N_k = q_1 - q_2$; nous avons donc $\xi_k^{N_k} = 1$.

En posant $N = \text{ppcm}(N_1, \dots, N_d)$, nous avons

$$\xi_k^N = 1 \tag{21.75}$$

pour tout k.

Mais P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$; si il a ± 1 comme racines, alors c'est que $P = X + 1$ ou $P = X - 1$ et ce sont des polynômes cyclotomiques. Si P n'a pas ± 1 parmi ses racines, alors P n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$ parce que ± 1 sont les seules racines de $X^N - 1$ dans $\mathbb{Q}$.

Par conséquent P est un facteur irréductible de $X^N - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Mais étant donné que

$$X^N - 1 = \prod_{d|N} \phi_d(X), \tag{21.76}$$

les polynômes cyclotomiques sont les seuls facteurs irréductibles de $X^N - 1$. Donc P est un polynôme cyclotomique. □

21.3.2 Nombres premiers

LemiAqLEn

Lemme 21.28 ([655]).
Soit $n \geqslant 1$. Il existe un nombre premier p et un entier a tels que

(1) p divise $\phi_n(a)$,

(2) p ne divise aucun de $\phi_d(a)$ avec $d \mid n$ et $d \neq n$.

De tels p et a vérifient automatiquement

(1) p divise $a^n - 1$,

(2) p ne divise aucun des $a^d - 1$ pour $d \mid n$, $d \neq n$.

Démonstration. Nous posons

$$B(X) = \prod_{\substack{d|n \\ d\neq n}} \phi_d(X), \tag{21.77}$$

et nous commençons par montrer que ϕ_n est premier avec B. Nous avons $X^n - 1 = B\phi_n$, donc B et ϕ_n n'ont pas de racine commune (même pas dans $\mathbb{C}$) parce que ce serait une racine double de $X^n - 1$. Notons que par définition 21.47, les polynômes cyclotomiques sont scindés (dans $\mathbb{C}$), donc en particulier les polynômes ϕ_n et B sont scindés, et donc premiers entre eux, dans $\mathbb{C}$ et a fortiori dans $\mathbb{Q}$. Par Bézout (proposition 3.200), il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$U\phi_n + VB = 1. \tag{21.78}$$

Si nous prenons $a \in \mathbb{Z}$ tel que $U' = aU$ et $V' = aV$ soient tous deux dans $\mathbb{Z}[X]$, alors nous avons

$$U'\phi_n + V'B = a, \tag{21.79}$$

EqCpNMEi

égalité dans $\mathbb{Z}[X]$. Quitte à prendre un multiple assez grand de a, nous pouvons choisir a de telle sorte que $|\phi_n(a)| \geqslant 2$. Nous prenons alors un nombre premier p divisant $\phi_n(a)$.

Montrons que le a et le p ainsi construits satisfont aux exigences.

Puisque $X^n - 1 = B\phi_n$, si p divise $\phi_n(a)$, il divise automatiquement $a^n - 1$ et donc $[a^n]_p = 1$, ce qui signifie entre autres que a et p sont premiers entre eux. Évaluons l'équation (21.79) en a :

$$U'(a)\phi_n(a) + V'(a)B(a) = a. \tag{21.80}$$

Le nombre p ne divisant pas a, mais divisant $\phi_n(a)$, il ne peut pas diviser $B(a)$[14]. Étant donné que p ne divise pas $B(a)$, il ne divise aucun des $\phi_d(a)$ avec $d \mid n$ et $d \neq n$.

[14] C'est pour pouvoir dire ça que l'on a choisi $V' \in \mathbb{Z}[X]$ de telle sorte que $V'(a)$ soit dans $\mathbb{Z}$

Nous passons maintenant à la seconde partie de la preuve. Nous supposons avoir a et p tels que p soit un nombre premier divisant $\phi_n(a)$ et tels que p ne divise aucun des $\phi_d(a)$ avec $d \mid n$, $d \neq n$. Le fait de diviser $\phi_n(a)$ entraine le fait de diviser $a^n - 1$ parce que ϕ_n est un des facteurs de $X^n - 1$. Soit maintenant $d \neq n$ divisant n ; nous avons

$$X^d - 1 = \prod_{d'|d} \phi_{d'}, \tag{21.81}$$

EqwTWcCu

et cela est une partie du produit

$$\prod_{\substack{d|n \\ d\neq n}} \phi_d. \tag{21.82}$$

Puisque p ne divise aucun des $\phi_d(a)$ de ce dernier produit, a fortiori, il ne divise pas le produit 21.81, et donc pas $a^d - 1$. □

LemrZnmpG

Lemme 21.29.
Si $n \geqslant 1$, alors il existe un nombre premier dans $[1]_n$, c'est-à-dire un nombre premier de la forme $1 + kn$ avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Soient $n \geqslant 1$ et p, a les nombres donnés par le lemme 21.28. Puisque p divise $\phi_n(a)$, p divise $a^n - 1$ et donc $[a]_p$ a un ordre qui divise n dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ parce que $[a]_p^n = [1]_p$.

Prenons $d \neq n$ divisant n. Nous savons que

$$a^d - 1 = \prod_{d'|d} \phi_{d'}(a). \tag{21.83}$$

Par construction de a et p, nous avons

$$[\phi_{d'}(a)]_p \neq 0 \tag{21.84}$$

Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre, le produit est également non nul, c'est-à-dire

$$\Big[\prod_{d'|d} \phi_{d'}(a)\Big]_p \neq 0, \tag{21.85}$$

et donc $[a]_p^a \neq 1$. Nous avons donc montré que si $d \neq n$ divise n, alors nous avons en même temps

$$[a]_p^n = 1 \tag{21.86}$$

et

$$[a]_p^d \neq 1. \tag{21.87}$$

Cela prouve que $[a]_p$ est d'ordre exactement n. Oui, mais l'ordre de $[a]_p$ doit diviser l'ordre du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui est $p - 1$, donc n divise $p - 1$ et nous écrivons $p = kn + 1$ avec k entier. □

ThoxwTjcl

Théorème 21.30 (Forme faible du théorème de Dirichlet [121])**.**
Pour tout $n \geqslant 1$, il existe une infinité de nombres premiers dans $[1]_n$.

Démonstration. Le lemme 21.29 nous donne déjà l'existence de nombres premiers dans $[1]_n$. Il faut maintenant voir qu'il y en a une infinité. Nous supposons qu'il y en ait seulement un nombre fini : $p_1, \dots, p_r$, et nous notons

$$N = np_1 \dots p_r. \tag{21.88}$$

Nous utilisons maintenant le lemme 21.29 avec ce N, c'est-à-dire qu'on a un nombre premier de la forme

$$p = 1 + kN = 1 + knp_1 \dots p_r. \tag{21.89}$$

C'est un nombre premier plus grand que tous les p_i, et de la forme $1 + \lambda n$. Cela contredit l'exhaustivité de la liste $p_1, \dots, p_r$. □

21.4 Corps finis

SecCorpsFinizkAcbS

Si vous cherchez des choses à propos de RSA, c'est à la section 21.2.

21.4.1 Théorème de Wedderburn

ThoMncIWA

Théorème 21.31 (Théorème de Wedderburn[197]).
Tout corps fini est commutatif.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini et Z, le centre de $\mathbb{K}$. Ce dernier est un corps fini et un sous-corps de $\mathbb{K}$. Si $q = \text{Card}(Z)$ alors par le lemme 8.58 nous avons

$$\text{Card}(\mathbb{K}) = q^n \tag{21.90}$$

pour un certain n.

Nous supposons maintenant que $\mathbb{K}$ est non commutatif. Dans ce cas $Z \neq \mathbb{K}$ et nous avons $n \geqslant 2$. Nous considérons aussi

$$Z_x = \{a \in \mathbb{K} \text{ tel que } ax = xa\}. \tag{21.91}$$

Le centre Z est un sous-corps de Z_x, donc il existe $d(x)$ tel que

$$\text{Card}(Z_x) = q^{d(x)}. \tag{21.92}$$

De la même manière, Z_x est un sous-corps de $\mathbb{K}$, donc il existe $m(x)$ tel que

$$\text{Card}(\mathbb{K}) = \text{Card}(Z_x)^{m(x)}. \tag{21.93}$$

En mettant bout à bout, nous avons

$$q^n = \text{Card}(Z_x)^{m(x)} = q^{d(x)m(x)}, \tag{21.94}$$

et par conséquent $n = d(x)m(x)$. Le point important à retenir est que $d(x)$ divise n pour tout $x \in \mathbb{K}$.

Nous considérons maintenant l'action adjointe du groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sur lui-même :

$$\varphi(k)x = kxk^{-1}. \tag{21.95}$$

Nous notons $\mathcal{O}_x$ l'orbite de $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ pour cette action, et $\text{Fix}(x)$ son stabilisateur. Nous avons

$$Z_y = \text{Fix}(y) \cup \{0\} \tag{21.96}$$

parce que Z_y et $\text{Fix}(y)$ ont les mêmes définitions, sauf que $\text{Fix}(y)$ est dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ alors que Z_y est dans $\mathbb{K}$. Nous avons donc

$$\text{Card}\big(\text{Fix}(y)\big) = \text{Card}(Z_y) - 1 = q^{d(y)} - 1. \tag{21.97}$$

Nous avons équivalence des affirmations suivantes :

- $\text{Card}(\mathcal{O}_x) = 1$
- $\mathcal{O}_x = \{x\}$
- $\text{Fix}(x) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$
- $x \in Z \setminus \{0\}$.

Soient $z_0, \ldots, z_{q-1}$ les éléments de Z avec $z_0 = 0$. Ce sont les éléments qui auront une orbite réduite à un point. Les orbites qui coupent $Z \setminus \{0\}$ sont

$$\{z_1\}, \ldots, \{z_{q-1}\} \tag{21.98}$$

et il y en a $q - 1$. Soient $\mathcal{O}_{y_1}, \ldots, \mathcal{O}_{y_r}$, les autres orbites. Nous utilisons l'équation des classes (5.55) :

$$\text{Card}(\mathbb{K}^*) = \text{Card}(Z^*) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\text{Card}(\mathbb{K}^*)}{\text{Card}(\text{Fix}(y_i))}, \tag{21.99}$$

mais $\text{Card}(Z^*) = q - 1$, $\text{Card}(\mathbb{K}^*) = q^n - 1$ et $\text{Card}\big(\text{Fix}(y_i)\big) = q^{d(y_i)} - 1$, donc

$$q^n - 1 = (q - 1) + \sum_{i=1}^{r} \frac{q^n - 1}{q^{d(y_i)} - 1}. \tag{21.100}$$

EqRPBDzE

Nous considérons la fraction rationnelle

$$F(X) = (X^n - 1) - \sum_{i=1}^{r} \frac{X^n - 1}{X^{d(y_i)} - 1}. \tag{21.101}$$

BqATGciu

Étant donné que $d(y_i)$ divise n, nous avons, contrairement aux apparences, $F \in \mathbb{Z}[X]$, par la proposition 21.23(1).

Nous pouvons exploiter un peu mieux la proposition 21.23 en remarquant que $d(y_i) < n$ parce que sinon $\text{Card}(Z_{y_i}) = \text{Card}(\mathbb{K})$, ce qui signifierait que $y_i \in Z$, ce qui nous avions exclu. Par conséquent le polynôme cyclotomique ϕ_n divise

$$\frac{X^n - 1}{X^{d(y_i)} - 1} \tag{21.102}$$

dans $\mathbb{Z}[X]$. Le polynôme cyclotomique ϕ_n divise également $X^n - 1$ et par conséquent ϕ_n divise F. Il existe donc $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $F = Q\phi_n$. En particulier en évaluant en q :

$$F(q) = Q(q)\phi_n(q) = q - 1. \tag{21.103}$$

aqmoLddy

En effet nous avons $F(q) = q - 1$ par construction : comparer (21.100) avec (21.101). Évidemment $q \neq 1$ parce que si $q = 1$ alors $\text{Card}(\mathbb{K}) = 1$ et le théorème est trivial. Par ailleurs $Q(q)$ est un entier (parce que $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $q \in \mathbb{N}$) et $Q(q) \neq 0$, parce qu'à droite de (21.103) nous avons $q - 1 \neq 0$. Nous avons donc $|Q(q)| \geqslant 1$ et donc

$$|\phi_n(q)| \leqslant q - 1. \tag{21.104}$$

Par définition du polynôme cyclotomique nous avons

$$|\phi_n(q)| = \prod_{z \in \Delta_n} |q - z|. \tag{21.105}$$

Étant donné que ce produit doit être inférieur à $q - 1$, au moins un des termes doit l'être : il existe $z_0 \in \Delta_n$ tel que $|z_0 - q| \leqslant q - 1$. Étant donné que $n \geqslant 2$ nous avons $z_0 \neq 1$.

Mais d'autre part, comme indiqué sur la figure 21.1, la distance entre z_0 et q doit être strictement plus grande que $q - 1$ parce que $q - 1$ est le minimum de la distance entre le cercle trigonométrique et q, et n'est atteint qu'en $z = 1$.

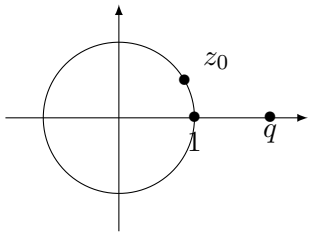


FIGURE 21.1 : Nous devons avoir $|z_0 - q| > q - 1$.

LabelFigtrigoWedd

Nous avons ainsi obtenu une contradiction, et nous concluons que le corps $\mathbb{K}$ est commutatif. □

21.4.2 Existence, unicité

Nous avons déjà défini le corps fini $\mathbb{F}_p$ lorsque p est un nombre premier dans la section 8.1.3. Le théorème suivant sert à définir $\mathbb{F}_{p^n}$ lorsque p est premier.

ThoOzgSfy

Théorème 21.32.
Soit p un nombre premier, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q = p^n$. Alors il existe un unique corps $\mathbb{K}$ de cardinal q. Ce corps est le corps de décomposition du polynôme $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$.

Démonstration. Montrons l'unicité. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal $q = p^n$. Le groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ est de cardinal $q - 1$, et par le corolaire 2.74 tous les éléments de $\mathbb{K}^*$ vérifient $g^{q-1} = e$, c'est-à-dire que dans $\mathbb{K}[X]$, les éléments de $\mathbb{K}^*$ sont des racines du polynôme

$$X^{q-1} - 1 \tag{21.106}$$

Par conséquent $\mathbb{K}$ est un corps de décomposition pour le polynôme $Q(X) = X^q - X = X(X^{q-1} - 1)$ parce que $Q(X) = 0$ dans $\mathbb{K}$. Il est unique par la proposition 8.145.

Montrons maintenant que le corps de décomposition de $P = X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$ est un corps de cardinal q. Pour ce faire nous considérons $\mathbb{K}$ ce corps de décomposition, et $\mathbb{E}$, l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que $\mathbb{E} = \mathbb{K}$ et que $\mathbb{E}$ est un corps contenant q éléments.

Montrons que $\mathbb{E}$ est un corps. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ nous avons

$$(\alpha\beta)^q = \alpha^q\beta^q = \alpha\beta \tag{21.107}$$

parce que $\alpha^q = \alpha$. Le produit $\alpha\beta$ est donc encore dans $\mathbb{E}$. Pour la somme,

$$(\alpha+\beta)^q = (\alpha+\beta)^{p^n} = \Big((\alpha+\beta)^p\Big)^{p^{n-1}} = (\alpha^p+\beta^p)^{p^{n-1}} = \ldots = \alpha^{p^n} + \beta^{p^n} = \alpha+\beta. \tag{21.108}$$

En ce qui concerne l'inverse,

$$(\alpha^{-1})^q = (\alpha^q)^{-1} = \alpha^{-1}. \tag{21.109}$$

Donc $\mathbb{E}$ est un corps. Évidemment $\mathbb{E}$ est un corps de décomposition de P au sens où $\mathbb{E}$ est une extension de $\mathbb{F}_p$ sur lequel P est scindé (parce qu'il est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{E}$ est le sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant les racines de P) et tel que $\mathbb{E} = \mathbb{F}_p(\{\alpha_i\})$ où les α_i sont les racines de P. Notons que $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{E}$ parce que dans $\mathbb{F}_p$ on a $x^q = x$.

Par unicité, nous avons $\mathbb{K} = \mathbb{E}$. Nous devons montrer que P possède exactement q racines distinctes, afin d'avoir $\text{Card}(\mathbb{E}) = q$. Pour cela remarquons que

$$P'(X) = qX^{q-1} - 1 = -1 \tag{21.110}$$

dans $\mathbb{F}_p$. En effet $P \in \mathbb{F}_p$ et $q = 0$ dans $\mathbb{F}_p$. Par conséquent P' ne s'annule pas et P n'a pas de racine double. Toutes les racines étant simples, il y en a exactement q. □

Le théorème 21.32 ne permet pas de *construire* le corps à $q = p^n$ éléments. Nous allons maintenant voir un certain nombre de résultats donnant des façons de le construire. Ces résultats proviennent de [656, 657, 658] et de Wikipédia.

PropnfebjI

Proposition 21.33 ([658]).
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Alors le groupe multiplicatif $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est cyclique.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps ayant q éléments. Le groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ en a $q-1$; ergo l'ordre des éléments de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sont des diviseurs de $q-1$; c'est le corolaire 2.74. Soit d un diviseur de $q-1$ et

$$H_d \setminus \{0\} = \{x \text{ d'ordre } d \text{ dans } \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \tag{21.111a}$$

$$H_d = \{\text{racines de } X^d - 1 \text{ dans } \mathbb{K}\}. \tag{21.111b}$$

Ici le polynôme $X^d - 1$ est vu dans $\mathbb{K}[X]$. Notons que nous avons automatiquement $H_d^* \subset H_d$, mais l'inclusion inverse n'est pas assurée parce que les éléments d'ordre $d/2$ par exemple sont aussi dans H_d. Supposons $H_d^* \neq \varnothing$ et considérons $a \in H_d^*$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} &\to H_d \\ n &\mapsto a^n \end{aligned} \tag{21.112}$$

est un isomorphisme d'anneaux. En effet étant donné que $a \in H_d^* \subset H_d$, l'ensemble H_d contient le groupe cyclique engendré par a. Ce dernier contient, par construction, d éléments. Mais $\text{Card}(H_d) \leqslant d$ parce que H_d est l'ensemble des racines d'un polynôme de degré d. Par conséquent $\text{Card}(H_d) = d$ et l'ensemble H_d est bien engendré par a et ϕ est bien un isomorphisme. Par conséquent tous les éléments de H_d^* sont des générateurs de H_d.

Inversement soit x un générateur de H_d. L'ordre de H_d étant d, l'ordre de x doit être un diviseur de d. Supposons donc que x soit d'ordre d/k. Dans ce cas nous devrions avoir $\text{Card}(H_d) = d/k$, ce qui contredit l'isomorphisme ϕ.

En conclusion, H_d^* est l'ensemble des générateurs du groupe H_d. Le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ étant $\varphi(d)$ par la proposition 7.40, et H_d étant isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ nous avons

$$\text{Card}(H_d^*) = \varphi(d). \tag{21.113}$$

Par conséquent si H_d^* n'est pas vide, son cardinal est $\varphi(d)$. Nous avons

$$\begin{aligned} q-1 &= \text{Card}(\mathbb{K}^*) && \text{(21.114a)}\\ &= \text{Card}\Big(\bigcup_{d|q-1} H_d^*\Big) && \text{(21.114b)}\\ &= \sum_{d|q-1} \text{Card}(H_d^*) && \text{(21.114c)}\\ &\leqslant \sum_{d|q-1} \varphi(d) = q-1 && \text{(21.114d)} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la proposition 7.38. Par conséquent pour tout d divisant $q-1$ nous avons $\text{Card}(H_d^*) = \varphi(d)$ et il y a au moins un élément d'ordre $q-1$ dans $\mathbb{K}$. Cet élément engendre $\mathbb{K}^*$ parce que $\mathbb{K}^*$ contient exactement $q-1$ éléments. Par conséquent $\mathbb{K}^*$ est cyclique. □

CorpRUndR

Corolaire 21.34.
Si p est un nombre premier, alors

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}. \tag{21.115}$$

L'isomorphisme est un isomorphisme de groupes (abéliens). À gauche multiplicatif et à droite additif.

Démonstration. La proposition 21.33 nous enseigne que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique et donc isomorphe à un certain $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un groupe cyclique d'ordre p, et donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n = p-1$. □

Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps les éléments du groupe $\mathbb{K}^*$ sont les **éléments primitifs** de $\mathbb{K}$.

propQRcUlq

Proposition 21.35.
Soit $\mathbb{K}$ un corps contenant q éléments. Alors

(1) $x^q = x$ pour tout $x \in \mathbb{K}$,

(2) $X^q - X = \prod_{a\in\mathbb{K}}(X-a)$.

Démonstration. Le groupe $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ ayant $q-1$ éléments, ses éléments vérifient $a^{q-1} = 1$ par le corolaire 2.74 et par conséquent $a^q = aa^{q-1} = a$.

Soit $a \in \mathbb{K}$. Étant donné que $a^q - a = 0$, le polynôme $(X-a)$ divise $X^q - X$ dans $\mathbb{K}[X]$. Par conséquent

$$\prod_{a\in\mathbb{K}}(X-a) \tag{21.116}$$

divise également $X^q - X$. Les polynômes $X^q - X$ et $\prod_{a\in\mathbb{K}}(X-a)$ étant deux polynômes unitaires de même degré, le fait que l'un divise l'autre montre qu'ils sont égaux. □

Une conséquence de $x^q = x$ est qu'il ne faut pas considérer le théorème 8.110 trop rapidement en disant « s'il s'annule partout, alors c'est le polynôme nul ». En effet dans un corps fini, « partout » n'est pas forcément très grand.

exVQBooBMPLkD

Exemple 21.36.
Si $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est le[15] corps à 3 éléments, alors le polynôme $P(X) = X^3 - X$ s'évalue à zéro pour tout $x \in \mathbb{F}_3$ (proposition 21.35.) mais il n'est pas le polynôme nul. △

21.4.3 Symboles de Legendre et carrés

Source : [659].

Nous disons que $a \in \mathbb{F}_p$ est un **carré** si il existe $b \in \mathbb{F}_p$ tel que $a = b^2$.

Définition 21.37.
*Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p > 2$ un nombre premier. Le **symbole de Legendre** est défini par*

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ divise } n\\ 1 & \text{si } n \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p\\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21.117}$$

[15] Le singulier est justifié par le théorème 21.32, mais ça n'a pas d'importance ici.

Note : -1 peut être un carré, et pas que dans $\mathbb{C}$. Par exemple dans $\mathbb{F}_5$ nous avons $4 = -1$ et donc -1 est un carré.

PropcGsJjk

Proposition 21.38.
Soit un nombre premier $p > 2$. Le corps $\mathbb{F}_p^*$ contient autant de carrés que de non carrés. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\left(\frac{n}{p}\right) = n^{(p-1)/2} \mod p. \tag{21.118}$$

Eqbcugos

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathbb{F}_p^* &\to \mathbb{F}_p^* \\ x &\mapsto x^2.\end{aligned} \tag{21.119}$$

C'est un morphisme de groupes multiplicatifs et $\ker\psi = \{-1, 1\}$. Étant donné que $p > 2$, nous avons alors

$$\text{Card}(\ker\psi) = 2 \tag{21.120}$$

parce que $1 \neq -1$. Évidemment l'ensemble des carrés dans $\mathbb{F}_p^*$ est l'image de ψ. Le premier théorème d'isomorphisme 2.20(3) nous permet alors de conclure que

$$\text{Card}(\text{Image}(\psi)) = \frac{\text{Card}(\mathbb{F}_p^*)}{2}. \tag{21.121}$$

Ceci prouve la première assertion.

Par le petit théorème de Fermat (théorème 8.15), nous avons $x^{p-1} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p^*$. Les $(p-1)$ éléments de $\mathbb{F}_p^*$ sont donc tous racines d'un des deux polynômes

$$X^{(p-1)/2} = \pm 1. \tag{21.122}$$

Mais chacun des deux ne peut avoir, au maximum, que $(p-1)/2$ solutions. Ils ont donc chacun exactement $(p-1)/2$ racines.

Nous pouvons maintenant prouver la formule (21.118). D'abord si $n = 0$, elle est évidente. Si n est un carré dans $\mathbb{F}_p$, nous posons $n = x^2$ et nous avons

$$n^{(p-1)/2} = x^{p-1} = 1 = \left(\frac{n}{p}\right). \tag{21.123}$$

Si n n'est pas un carré, c'est que n n'est pas une racine de $X^{(p-1)/2} = 1$. Le nombre n est alors une racine de $X^{(p-1)/2} = -1$. Nous avons alors

$$n^{(p-1)/2} = -1 = \left(\frac{n}{p}\right). \tag{21.124}$$

□

CoruJosNz

Corolaire 21.39.
Si $a, b \in \mathbb{N}$ et si $p > 2$ est un nombre premier, alors

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \tag{21.125}$$

Démonstration. Par la formule (21.118),

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = (ab)^{(p-1)/2} = a^{(p-1)/2}b^{(p-1)/2} = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \tag{21.126}$$

□

Soit un nombre premier $q > 2$ et $\mathbb{A}$, un anneau de caractéristique p. Si $\alpha \in \mathbb{A}$ vérifie

$$1 + \alpha + \cdots + \alpha^{q-1} = 0, \tag{21.127}$$

nous définissons la **somme de Gauss** par

$$\tau = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{x}{q}\right)\alpha^x = \sum_{x=1}^{q-1}\left(\frac{x}{q}\right)\alpha^x. \tag{21.128}$$

Notons que la somme de Gauss dépend de q et du α choisis.

PropciRUov

Proposition 21.40.
Les sommes de Gauss vérifient les propriétés suivantes.

(1) $\tau^2 = \left(\frac{-1}{q}\right) q$. *Nous allons noter* $\epsilon(q) = \left(\frac{-1}{q}\right)$.

(2) *Si* $\mathbb{A}$ *est de caractéristique* $p \geqslant 3$ *et si* $p \neq q$ *alors*

$$\tau^p = \left(\frac{p}{q}\right)\tau. \tag{21.129}$$

EqxBNpJz

(3) *Si* $\mathbb{A}$ *est de caractéristique* p *et si* q *est premier avec* p, *alors* τ *est inversible dans* $\mathbb{A}$.

Démonstration. D'abord nous notons que

$$\alpha^q - 1 = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{q-1}) = 0 \tag{21.130}$$

par définition de α. Nous calculons

$$\epsilon(q)\tau^2 = \epsilon(q) \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{y}{q}\right)\alpha^{x+y} \tag{21.131a}$$

$$= \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{-xy}{q}\right)\alpha^{x+y}. \tag{21.131b}$$

EqlQbFeo

$$= \sum_{z\in\mathbb{F}_q}\sum_{y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{-(z-y)y}{q}\right)\alpha^{z} \tag{21.131c}$$

EqWxIhhk

$$= \sum_{z\in\mathbb{F}_q} s_z\alpha^z \tag{21.131d}$$

EqWoIszS

Justifications :

- Pour obtenir (21.131b) nous avons utilisé le corolaire 21.39.
- (21.131c) est un changement de variable $z = x + y$ dans la somme sur x.
- Pour (21.131d) nous avons posé

$$s_z = \sum_{y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{-(z-y)y}{q}\right). \tag{21.132}$$

Nous avons

$$s_0 = \sum_{y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{y^2}{q}\right). \tag{21.133}$$

Dans cette somme, tous les termes sont égaux à 1, sauf celui avec $y = 0$ qui vaut zéro. Nous avons donc $s_0 = q - 1$. Voyons maintenant s_y avec $y \neq 0$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q^* &\to \mathbb{F}_q \setminus \{1\} \\ k &\mapsto 1 - zy^{-1} \end{aligned} \tag{21.134}$$

étant une bijection nous pouvons effectuer le changement de variables $t = y^{-1}z - 1$ pour la somme sur y en notant y^{-1} l'inverse de y dans $\mathbb{F}_q^*$, nous trouvons alors

$$\sum_{y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{y(z-y)}{q}\right) = \sum_{y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{y^2(y^{-1}z-1)}{q}\right) \tag{21.135a}$$

$$= \sum_{y\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{y^{-1}z-1}{q}\right) \tag{21.135b}$$

$$= \sum_{t\in\mathbb{F}_q\setminus\{1\}} \left(\frac{t}{q}\right) \tag{21.135c}$$

$$= \underbrace{\sum_{t\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{y}{q}\right)}_{=0} - \left(\frac{1}{1}\right) \tag{21.135d}$$

$$= -1 \tag{21.135e}$$

parce qu'il y a autant de carrés que de non carrés dans $\mathbb{F}_q^*$ (proposition 21.38). En résumé nous avons

$$\epsilon(q)\tau^2 = \sum_{z\in\mathbb{F}_q} s_z\alpha^z \tag{21.136}$$

où

$$s_z = \begin{cases} q-1 & \text{si } z=0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21.137}$$

Cela donne

$$\epsilon(q)\tau^2 = (q-1) - \underbrace{(\alpha+\cdots+\alpha^{q-1})}_{=-1} = q \tag{21.138}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse sur α. Donc $\epsilon(q)\tau^2 = q$, et étant donné que $\epsilon(q) = \pm 1$ nous concluons

$$\tau^2 = \epsilon(q)q. \tag{21.139}$$

Nous prouvons maintenant la seconde partie. Comme $\mathbb{A}$ est de caractéristique p, en utilisant le fait que le morphisme de Frobenius est un morphisme,

$$\tau^p = \left(\sum_{x\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{x}{q}\right)\alpha^x\right)^p = \sum_{x\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{x}{q}\right)^p\alpha^{px}. \tag{21.140}$$

Étant donné que $\left(\frac{x}{q}\right) = \pm 1$ et que p est impair, nous avons

$$\left(\frac{x}{q}\right)^p = \left(\frac{x}{q}\right). \tag{21.141}$$

Du coup nous avons

$$\left(\frac{p}{q}\right)\tau^p = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\left(\frac{xp}{q}\right)\alpha^{px}. \tag{21.142}$$

Mais p étant inversible dans $\mathbb{F}_q$, l'application $x\mapsto px$ est une bijection et nous pouvons sommer sur px au lieu de x :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\tau^p = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\left(\frac{x}{q}\right)\alpha^x = \tau. \tag{21.143}$$

Nous trouvons alors que

$$\tau^p = \left(\frac{p}{q}\right)\tau. \tag{21.144}$$

Étant donné la formule du τ^2 que nous venons de démontrer, nous avons $\tau^2 = \pm q$. Les nombres p et q étant premiers entre eux, le théorème de Bézout (théorème 3.46) nous donne a et b tels que

$$ap + bq = 1. \tag{21.145}$$

Cela montre que b est un inverse de q modulo p. Donc τ^2 est inversible, et il en découle que τ lui-même est inversible. □

ThoMiEiUm

Théorème 21.41 (Loi de réciprocité quadratique)**.**
Soient deux nombres premiers distincts $p, q \geqslant 3$. Alors

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}\left(\frac{q}{p}\right). \tag{21.146}$$

Démonstration. Soit ϕ_q le polynôme $1+X+\cdots+X^{q-1}$ et l'anneau

$$\mathbb{A} = \mathbb{F}_p[X]/(\phi_q). \tag{21.147}$$

C'est un anneau de caractéristique p parce que son unité est le polynôme constant 1. Nous nommons $\alpha = X/(\phi_q)$, c'est-à-dire que $\phi_q(\alpha) = 0$ dans $\mathbb{A}$, et nous pouvons considérer la somme de Gauss

$$\tau = \sum_{i\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{i}{q}\right)\alpha^i. \tag{21.148}$$

Notons que ceci est un élément de $\mathbb{A}$ et plus précisément un polynôme de degré zéro dans $\mathbb{A}$, et encore plus précisément, une classe d'un tel polyôme. Donc les coefficients de α doivent être compris comme des éléments de $\mathbb{F}_p$. Nous savons (proposition 21.40) que

$$\tau^2 = \left(\frac{-1}{q}\right), \tag{21.149}$$

et en utilisant la formule (21.118) nous trouvons

$$\left(\frac{\tau^2}{p}\right) = (\tau^2)^{(p-1)/2} \mod p = \tau^{p-1} \mod p \tag{21.150}$$

En réalité sur cette dernière ligne, nous ne devrions pas préciser le « modulo p » parce que, comme mentionné plus haut, ce sont des éléments de $\mathbb{F}_p$. En utilisant cela, ainsi que (21.129), nous avons

$$\underbrace{\left(\frac{\tau^2}{p}\right)}_{\tau^{p-1}} \tau = \tau^p = \left(\frac{p}{q}\right)\tau \tag{21.151}$$

Puisque τ est inversible, nous écrivons

$$\left(\frac{\tau^2}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \tag{21.152}$$

Nous utilisons maintenant la formule (21.118) sur le membre de gauche avec $n = \tau^2 = \left(\frac{-1}{q}\right)$:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right). \tag{21.153}$$

Toujours avec la même formule nous pouvons substituer $\left(\frac{-1}{q}\right)$ par $(-1)^{(q-1)/2}$ et obtenir

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(q-1)}{2}\frac{(p-1)}{2}}. \tag{21.154}$$

□

Lemoabzrn

Lemme 21.42.
Si p est un nombre premier $p \geqslant 3$, alors le symbole de Legendre $x \mapsto \left(\frac{x}{p}\right)$ est l'unique morphisme non trivial de $\mathbb{F}_p^*$ dans $\{-1, 1\}$.

Démonstration. Le fait que le symbole de Legendre soit non trivial est simplement le fait qu'il y ait des carrés et des non carrés dans $\mathbb{F}_p^*$; voir la proposition 21.38. Pour l'unicité, soit $\alpha\colon \mathbb{F}_p^* \to \{-1, 1\}$ un morphisme surjectif (c'est-à-dire non trivial). Étant donné que

$$\mathbb{F}_p^* = \ker(\alpha) \cup -\ker(\alpha), \tag{21.155}$$

le groupe $\mathbb{F}_p^*/\ker(\alpha)$ ne contient que deux éléments : $[1]$ et $[-1]$. Autrement dit, $\ker(\alpha)$ est d'indice 2 dans $\mathbb{F}_p^*$.

Or $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ ne possède qu'un seul sous-groupe d'indice 2. En effet soit S un tel sous-groupe et a, un générateur de $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ (qui est cyclique par la proposition 21.33), alors $a^2 \in S$ par le lemme 3.167. Par conséquent S contient le groupe des puissances paires de a. Le groupe S ne peut rien contenir de plus parce qu'il est d'indice 2 et que l'ordre de $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ est pair.

Bref, le sous-groupe $\ker(\alpha)$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Mais la proposition 21.38 nous indique que $|(\mathbb{F}_p \setminus \{0\})^2| = \frac{p-1}{2}$, c'est-à-dire que le groupe des carrés est d'indice 2. Nous avons donc, par l'unicité,

$$\ker(\alpha) = (\mathbb{F}_p \setminus \{0\})^2. \tag{21.156}$$

Au final, pour $y \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$,

$$\alpha(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ est un carré} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21.157}$$

Ce qui est bien la définition des symboles de Legendre. □

PROPooCLEUooHWnoXM

Proposition 21.43.
Si p est un nombre premier, nous avons

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in [1]_8 \text{ ou } p \in [7]_8 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21.158}$$

Démonstration. Soit le polynôme

$$X^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[X] \tag{21.159}$$

et α, une racine dans une extension[16] de $\mathbb{F}_p$[17]. Nous posons $\theta = \alpha + \alpha^{-1}$ et nous calculons

$$\theta^2 = (\alpha + \alpha^{-1})(\alpha + \alpha^{-1}) = \alpha^2 + 2 + (\alpha^2)^{-1} = \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2 \tag{21.160}$$

parce que α^4 étant -1, nous avons $(\alpha^2)^{-1} = -\alpha^2$. Bref, $\theta^2 = 2$.

Dire que 2 est un carré modulo p revient à dire que θ est dans $\mathbb{F}_p$. C'est-à-dire que pour calculer le symbole de Legendre $\left(\frac{2}{p}\right)$, nous étudions pour quels p, l'élément θ est vraiment dans $\mathbb{F}_p$ et non seulement dans l'extension $\mathbb{F}_p(\alpha)$. En tenant compte de l'exemple 8.97, il faut distinguer deux cas : $\alpha^p = \alpha$ et $\alpha^p \neq \alpha$. Autrement dit, si $\alpha^k = \alpha$ pour un certain nombre premier k, alors le cas $p = k$ est à traiter à part. La liste des puissances de α est :

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, -1, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, 1, \alpha, \ldots \tag{21.161}$$

Nous avons donc automatiquement $\alpha^{9k} = \alpha$, mais $p = 9k$ est exclu parce que p est premier. Nous devons donc vérifier si une des propriétés

$$\alpha^2 = \alpha \tag{21.162a}$$
$$\alpha^3 = \alpha \tag{21.162b}$$
$$-\alpha = \alpha \tag{21.162c}$$
$$-\alpha^3 = \alpha \tag{21.162d}$$

est possible. Il est aisément vérifiable, au cas par cas, que ces possibilités sont toutes incompatibles avec $\alpha^4 = -1$. Nous avons donc certainement $\alpha^p \neq \alpha$ et compte tenu de l'exemple 8.97, l'équation $x^p = x$ caractérise les éléments de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_p(\alpha)$.

L'équation $X^2 = 2$ a exactement deux solutions qui sont $\pm\theta$. Nous avons donc $2 \in \mathbb{F}_p^2$ si et seulement si $\theta \in \mathbb{F}_p$ si et seulement si $\theta^p = \theta$. Nous avons réduit notre problème à déterminer pour quels p nous avons $\theta^p = \theta$. D'abord nous avons, par le morphisme de Frobenius,

$$\theta^p = (\alpha + \alpha^{-1})^p = \alpha^p + \alpha^{-p}. \tag{21.163}$$

Nous pouvons maintenant conclure facilement. Un nombre premier étant impair (sauf $p = 2$ qui peut être traité à part), p est automatiquement dans un des ensembles $[1]_8$, $[3]_8$, $[5]_8$ ou $[7]_8$. Nous avons quatre petites vérifications à faire. Dans tous les cas $\alpha^{8k} = 1$. Si $p = 1 + 8k$, alors

$$\theta^p = \alpha^{1+8k} + (\alpha^{-1})^{1+8k} = \alpha + \alpha^{-1} = \theta, \tag{21.164}$$

donc 2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$. Si $p \in [3]_8$, alors $\theta^p = \alpha^3 + \alpha^{-3}$. Si cela était égal à $\alpha + \alpha^{-1}$, alors nous aurions

$$\alpha^6 + 1 = \alpha^4 + \alpha^2, \tag{21.165}$$

et donc $\alpha^2 = 1$, ce qui est impossible. Les vérifications pour $p \in [5]_8$ et $p \in [7]_8$ sont du même style. □

21.4.4 Théorème de Chevalley-Warning

Lemme 21.44.
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p et de cardinal q. Pour $m \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$S_m = \sum_{x \in \mathbb{K}} x^m. \tag{21.166}$$

Alors nous avons

$$S_m \mod p = \begin{cases} -1 & \text{si } m \geqslant 1 \text{ et } m \text{ divisible par } q-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21.167}$$

[16] Dans la source que je suivais (je ne sais plus où), on parlait ici de « fermeture » de $\mathbb{F}_p$ et non d'extension. Il me semble que parler simplement d'extension suffit. Vous confirmez ?

[17] Voir par exemple la proposition 8.142 pour l'existence d'une extension comme il faut.

Démonstration. Si $m=0$, alors $x^0=1$ et $S_m=q$. Par conséquent $S_m \mod p=0$ parce que la caractéristique d'un corps divise son ordre (proposition 3.117).

Nous prenons maintenant $m\geqslant 1$ et nous voyons séparément les cas où $q-1$ divise m ou non. Si $q-1$ divise m, alors pour tout $x\neq 0$ nous avons

$$x^m=x^{k(q-1)}=1 \tag{21.168}$$

parce que $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ est cyclique et $x^{q-1}=1$ par le petit théorème de Fermat (théorème 8.15). Par conséquent nous avons

$$\sum_{x\in\mathbb{K}} x^m=\sum_{x\in\mathbb{K}\setminus\{0\}} 1=q-1. \tag{21.169}$$

Si le nombre $m\geqslant 1$ n'est pas divisible par $q-1$ alors nous prenons un générateur y du groupe $\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Un tel élément vérifie $y^m\neq 1$. En effet, si y vérifiait $y^m=1$ alors cela signifierait que l'ordre de $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ est un diviseur de m, ce qui n'est pas le cas ici, parce que l'ordre de $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ est $q-1$. Pour un tel y, l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{K}\setminus\{0\}&\to\mathbb{K}\setminus\{0\}\\ x&\mapsto yx\end{aligned} \tag{21.170}$$

est une bijection[18]. En ce qui concerne l'injectivité, $ya=yb$ implique $a=b$. En ce qui concerne la surjectivité, si a est un générateur, si $z=a^l$ et si $y=a^k$, alors

$$z=\varphi(a^{l-k}). \tag{21.171}$$

Nous pouvons maintenant poser le calcul.

$$S_m=\sum_{x\in\mathbb{K}\setminus\{0\}} x^n=\sum_{x\in\mathbb{K}\setminus\{0\}}(yx)^m=y^m\sum_{x\in\mathbb{K}\setminus\{0\}} x^m=y^mS_m. \tag{21.172}$$

Étant donné que $y^m\neq 1$, la seule solution est $S_m=0$. □

ThoLTcYKk

Théorème 21.45 (Chevalley-Warning[660])**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q et de caractéristique p. Soient $P_1,\dots,P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ tels que $\sum_{i=1}^r \deg(P_i)<n$. Nous considérons l'ensemble des zéros communs à tous les polynômes :

$$V=\{x\in\mathbb{K}^n \text{ tel que } P_1(x)=\dots=P_r(x)=0\}. \tag{21.173}$$

Alors $\operatorname{Card}(V)=0 \mod p$.

Démonstration. Nous considérons le polynôme

$$P=\prod_{i=1}^r(1-P_i^{q-1}). \tag{21.174}$$

Montrons que

$$P(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in V\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{21.175}$$

La première ligne est facile : étant donné que tous les $P_i(x)$ sont nuls pour $x\in V$, nous avons $P(x)=1$. Si x n'est pas dans V, alors nous avons un i tel que $P_i(x)\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Mais dans ce cas (toujours la cyclicité de $\mathbb{K}\setminus\{0\}$) nous avons $P_i(x)^{q-1}=1$ et donc le produit est nul.

En utilisant l'hypothèse sur le degré des P_i, nous trouvons

$$\deg(P)=\sum_{i=1}^r(q-1)\deg(P_i)<n(q-1). \tag{21.176}$$

Pour un polynôme $Q\in\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$, nous définissons

$$\int Q=\sum_{x\in\mathbb{K}^n} Q(x). \tag{21.177}$$

[18] Notons que nous n'avons pas réellement besoin que y soit un générateur. Nous n'utilisons seulement le fait que $y^m\neq 1$ et $y\neq 0$.

Nous avons immédiatement

$$\int P = \sum_{x\in\mathbb{K}^n} P(x) = \sum_{x\in V} 1 = \text{Card}(V) \mod p. \tag{21.178}$$

Nous insistons sur le « modulo p » parce que dans la formule $P(x) = 1$, le membre de droite est le 1 de $\mathbb{K}$; il est donc automatiquement modulo la caractéristique de $\mathbb{K}$.

Il nous reste à prouver que $\int P = 0$. Pour cela nous décomposons

$$P = \sum_m c_m X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \tag{21.179}$$ EqHnUVlM

où la somme s'étend sur les $m \in \mathbb{N}^n$ tels que $c_m \neq 0$. Nous avons

$$\int P = \sum_{x\in\mathbb{K}^n} \sum_m c_m x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \tag{21.180a}$$

$$= \sum_m c_m \left(\sum_{x\in\mathbb{K}^n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \right) \tag{21.180b}$$

$$= \sum_m c_m S_{m_1} \dots S_{m_n}. \tag{21.180c}$$

Le terme de plus haut degré dans la décomposition (21.179) est celui du m tel que $\sum_i m_i$ est le plus grand. Comme ce degré est plus petit que $n(q-1)$, pour chacun des m rentrant dans la somme, nous avons

$$\sum_{i=1}^n m_i < n(q-1). \tag{21.181}$$

En particulier pour tout $m \in \mathbb{N}^n$, il existe i tel que $m_i < q-1$, et dans ce cas $S_{m_i} = 0$. Donc tous les termes de la somme

$$\sum_{m\in\mathbb{N}^n} c_m S_{m_1} \dots S_{m_n} \tag{21.182}$$

ont un facteur nul. □ CorfuHNKz

Corolaire 21.46.
Soit P_i des polynômes à n variables avec $\sum_{i=1}^r \deg(P_i) < n$. Si les P_i n'ont pas de terme constant, alors ils ont un zéro commun non trivial.

Démonstration. Nous reprenons les notations du théorème 21.45. Étant donné que les P_i n'ont pas de terme constant, $0 \in V$, mais $\text{Card}(V) = 0 \mod p$. Par conséquent nous devons avoir $\text{Card}(V) > p$. □

Exemple 21.47.
Nous considérons les polynômes

$$P_1(x,y,t,u) = xy + x + ux \tag{21.183a}$$

$$P_2(x,y,t,u) = x + y - 3t. \tag{21.183b}$$

La somme de leurs degrés est 3 et ce sont des polynômes à 4 variables. Nous devons donc avoir, en vertu du corolaire 21.46, d'autres racines que la racine triviale $(x,y,t,u) = (0,0,0,0)$.

Le corolaire nous donne aussi une borne inférieure du nombre de racines à chercher : plus que la caractéristique du corps sur lequel nous travaillons. Nous pouvons dire cela sans avoir la moindre idée de la façon dont on pourrait résoudre le système $P_1 = P_2 = 0$. △

21.4.5 Contenu d'un polynôme

LemHULrVaF

Lemme 21.48 (de Gauss[112, 661])**.**
Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Alors

$$c(PQ) = c(P)c(Q) \tag{21.184}$$

où c est le contenu, définition 3.269.

Démonstration. Afin de fixer les notations, nous posons $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_j b_j Y^j$.

(1) **Pour les polynômes primitifs**

Nous commençons par supposer que $c(P) = c(Q) = 1$. Dans ce cas si $c(PQ) \neq 1$, nous considérons un nombre premier p divisant $c(PQ)$. Puisque le contenu de P et de Q vaut 1, le nombre p ne peut pas diviser tous leurs coefficients. Nous définissons i_0 de façon que a_{i_0} soit le premier à ne pas être divisible par p, et j_0 de telle façon que b_{j_0} soit le premier à ne pas être divisible par p. Autrement dit :

$$p \mid a_0, p \mid a_1, \ldots, p \mid a_{i_0-1}, p \nmid a_{i_0} \tag{21.185}$$

et de façon similaire pour j_0. Donc p ne divise ni a_{i_0}, ni b_{j_0}. Nous nous demandons alors avec malice quel est le coefficient de $X^{i_0+j_0}$ dans PQ. La réponse est :

$$a_{i_0}b_{j_0} + \sum_{\substack{i+j=i_0+j_0 \\ i<i_0 \text{ ou } j<j_0}} a_i b_j. \tag{21.186}$$

Par définition p divise soit a_i soit b_j pour chacun des termes de la grande somme. Comme p ne divise pas $a_{i_0}b_{j_0}$, il ne divise pas le coefficient de $X^{i_0+j_0}$ dans PQ, alors que nous étions partis en disant que p divisait tous les coefficients de PQ.

Nous concluons donc que $c(PQ) = 1$.

(2) **Cas général**

Si P et Q sont maintenant des polynômes sans condition particulière dans $\mathbb{Z}[X]$, nous considérons $P_1 = \frac{P}{c(P)}$ et $Q_1 = \frac{Q}{c(Q)}$; ces deux polynômes sont primitifs et nous avons alors, en utilisant la première partie :

$$c(P_1Q_1) = 1. \tag{21.187}$$

Étant donné que

$$P_1Q_1 = \frac{1}{c(P)c(Q)}PQ, \tag{21.188}$$

nous avons

$$c(PQ) = c(P)c(Q)c(P_1Q_1) = c(P)c(Q). \tag{21.189}$$

□

21.4.6 Théorème de l'élément primitif

Définition 21.49.
*Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est dite **finie** si $\mathbb{L}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.*

Notez que la définition d'extension finie ne suppose ni que $\mathbb{K}$, ni que $\mathbb{L}$, soient finis en tant qu'ensembles.

THOooYFLZooHYENKp

Théorème 21.50 (de l'élément primitif)**.** *Si $\mathbb{K}$ est un corps fini, toute extension finie de $\mathbb{K}$ est simple*[19].

Si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque alors toute extension séparable finie est simple.

Démonstration. Nous ne donnons la preuve que dans le cas où $\mathbb{K}$ est fini. Dans ce cas nous savons par la proposition 21.33 que le groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est cyclique. Si de plus $\mathbb{L}$ est une extension finie alors $\mathbb{L}$ est fini en tant qu'ensemble. Par conséquent $\mathbb{L} \setminus \{0\}$ est un groupe cyclique. Si α est un générateur de $\mathbb{L}$ alors $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ et l'extension est donc simple.

Une preuve de l'assertion dans le cas où $\mathbb{K}$ est infini peut être trouvée sur Wikipédia. □

PROPooWNHYooSzMJqF

Proposition 21.51.
L'ordre d'un polynôme P vérifie les propriétés suivantes :

(1) L'ordre de P est l'ordre multiplicatif de ses racines

(2) L'ordre de P divise $p^n - 1$.

LemZrUUOz

Lemme 21.52.
Soit p un nombre premier et P un polynôme irréductible unitaire de degré n. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p[X]/P$, alors $(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p$.

[19] Définition 8.93.

Démonstration. La preuve est exactement la preuve classique[20] :

$$(\alpha+\beta)^p=\sum_k\binom{p}{k}\alpha^k\beta^{p-k} \tag{21.190}$$

où les coefficients binomiaux sont dans $\mathbb{F}_p$ et donc nuls pour les k différents de p et de 0. □

Cette proposition est encore vraie avec $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_{p^n}$ et $(\alpha+\beta)^{p^n}$.

Lemme 21.53.
Si $\alpha\in\mathbb{F}_q$ est une racine d'ordre k de P (de degré n) alors les racines de X^k-1 sont $\{\alpha^i$ tel que $i=0,\dots,k-1\}$.

Nous serions donc intéressés à construire $\mathbb{F}_q$ comme quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par un polynôme primitif. Le théorème suivant donne une description abstraite de $\mathbb{F}_q$ qui va nous servir de point de départ pour la construction.

ThoqSludu

Théorème 21.54 (Théorème de l'élément primitif)**.**
Soit p un nombre premier, $n\in\mathbb{N}$ et $q=p^n$. Soit $\mathbb{K}$ un corps à q éléments. Alors

(1) Il existe $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K}=\mathbb{F}_p[\alpha]$.

(2) Il existe un polynôme irréductible $P\in\mathbb{F}_p[X]$ de degré n tel que

$$\begin{aligned}\phi\colon\mathbb{F}_p[X]/(P)&\to\mathbb{K}\\ \overline{X}&\mapsto\alpha\end{aligned} \tag{21.191}$$

FqWlMhhm

soit un isomorphisme de corps.

Soient α et P choisis pour avoir les propriétés citées plus haut. Alors nous avons les propriétés suivantes.

(1) P est primitif[21]*.*

(2) P est scindé dans $\mathbb{K}$.

(3) L'ensemble des racines de P est $\{\alpha,\alpha^p,\dots,\alpha^{p^{n-1}}\}$.

(4) Le polynôme P divise X^q-X dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Démonstration. Le corps $\mathbb{K}$ étant fini, il est cyclique par la proposition 21.33. Soit α un générateur de $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ alors

$$\mathbb{K}=\mathbb{F}_p[\alpha]. \tag{21.192}$$

Soit ℓ le plus grand entier tel que l'ensemble

$$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{\ell-1}\}\subset\mathbb{K} \tag{21.193}$$

soit libre. Pour rappel, $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$. Il existe des $a_i\in\mathbb{F}_p$ tels que

$$\alpha^\ell+a_{\ell-1}\alpha^{\ell-1}+\cdots+a_0=0. \tag{21.194}$$

De façon équivalente, il existe un polynôme unitaire $P\in\mathbb{F}_p[X]$ de degré ℓ tel que $P(\alpha)=0$. Étant donné que α est générateur de $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}=\text{Span}\{1,\alpha,\dots,\alpha^{\ell-1}\} \tag{21.195}$$

parce que $\mathbb{K}$ est généré par les puissances de α alors que les puissances de α plus hautes que $\ell-1$ peuvent être générées par $1,\alpha,\dots,\alpha^{\ell-1}$. L'espace $\mathbb{K}$ est donc un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension ℓ ; par conséquent

$$\text{Card}(\mathbb{K})=p^n=q \tag{21.196}$$

et $\ell=n$.

Montrons que P est irréductible dans $\mathbb{F}_p$. Si P était réductible dans $\mathbb{F}_p$, l'élément $\alpha\in\mathbb{K}$ serait une racine d'un des facteurs, c'est-à-dire qu'il serait racine d'un polynôme de degré inférieur à n, ce qui contredirait le fait que

$$\{\alpha^{\ell-1},\dots,1\} \tag{21.197}$$

[20] Voir le coefficients binomiaux de la proposition 3.75.
[21] Définition 3.271.

soit libre.

Montrons que l'application

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{F}_p[X]/(P) &\to \mathbb{K}\\ \overline{X} &\mapsto \alpha\end{aligned} \tag{21.198}$$

est un isomorphisme. Pour l'injectivité, deux éléments $Q_1, Q_2 \in \mathbb{F}_p[X]/(P)$ s'écrivent

$$Q_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{X}^k \tag{21.199a}$$

$$Q_2 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \overline{X}^k. \tag{21.199b}$$

Dans ce cas si $\phi(Q_1) = \phi(Q_2)$ alors

$$\phi(Q_1) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k = \phi(Q_2) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \alpha^k. \tag{21.200}$$

Mais l'ensemble $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ étant libre sur $\mathbb{F}_p$, cela implique $a_k = b_k$. La surjectivité de ϕ provient du fait que α génère $\mathbb{K}$.

Nous passons maintenant à la seconde partie de la démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[\alpha]$ et $P \in \mathbb{F}_p[X]$ un polynôme irréductible de degré n tel que $\alpha \mapsto \overline{X}$ soit un isomorphisme entre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{F}_p[X]/(P)$.

Le polynôme P est primitif parce que α est d'ordre p^n dans $\mathbb{K}$ alors que $\overline{X} \mapsto \alpha$ est un isomorphisme. Par conséquent $\overline{X}$ est d'ordre p^n dans $\mathbb{F}_p[X]/P$.

Nous commençons par prouver que l'ensemble

$$\{\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{n-1}}\} \tag{21.201}$$

est l'ensemble des racines distinctes de P. Pour cela nous posons

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \tag{21.202}$$

avec $a_k \in \mathbb{F}_p$. D'abord α est une racine de P. En effet

$$P(\overline{X}) = \sum_k a_k \overline{X}^k = 0 \tag{21.203}$$

parce que cette somme est calculée dans $\mathbb{F}_p[X]/(P)$. En appliquant l'isomorphisme ϕ à l'égalité (21.203) nous trouvons

$$0 = \phi\big(P(\overline{X})\big) = \sum_k a_k \phi(\overline{X}^k) = \sum_k a_k \alpha^k. \tag{21.204}$$

Donc α est bien une racine de P dans $\mathbb{F}_p[X]$. Nous devons montrer qu'il en est de même pour les autres puissances dans l'ensemble (21.201). Étant donné que pour tout x dans $\mathbb{F}_p$ nous avons $x^p = x$, nous avons aussi

$$P(X^p) = \sum_k a_k (X^p)^k = \sum_k a_k^p (X^p)^k = \sum_k (a_k X^k)^p \tag{21.205}$$

alors que nous savons que $x \mapsto x^p$ est un automorphisme de $\mathbb{F}_p$ par la proposition 3.119. Par conséquent

$$P(X^p) = \sum_k (a_k X^k)^p = \left(\sum_k a_k X^k \right)^p = P(X)^p. \tag{21.206}$$

Nous avons montré que si β est une racine de P, alors β^p est également une racine de P. Nous savons déjà que α est une racine de P, et que α est également générateur de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire que α est d'ordre $q-1$. Les puissances

$$\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{n-1}} \tag{21.207}$$

sont donc distinctes ($\alpha^{p^n} = \alpha^q = 1$) et sont toutes des racines de P. Étant donné que P est de degré n il ne peut pas y avoir d'autres racines. Nous concluons que l'ensemble

$$\{\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{n-1}}\} \tag{21.208}$$

est l'ensemble des racines distinctes de P dans $\mathbb{K}$. Le polynôme P est alors scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Le dernier point du théorème est de montrer que P divise $X^q - X$. Pour cela nous allons montrer que toutes les racines de P sont des racines de $X^q - X$. Soit β une racine de P ; il s'écrit $\beta = \alpha^k$ pour un certain k. Étant donné que $\alpha^{q-1} = e = \alpha^{p^n-1}$,

$$\begin{aligned}\beta^q &= (\alpha^{p^n})^k && (21.209a)\\ &= \left(\alpha^{p^n-1}\alpha\right)^k && (21.209b)\\ &= \left(\alpha^{q-1}\alpha\right)^k && (21.209c)\\ &= \alpha^k && (21.209d)\\ &= \beta. && (21.209e)\end{aligned}$$

Cela signifie que $\beta^q = \beta$ et donc que β est racine de $X^q - X$. □

Corolaire 21.55.
Le corps fini à $q = p^n$ éléments est de caractéristique p.

Démonstration. Nous considérons le corps fini $\mathbb{K}$ à q éléments sous la forme $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/P$ comme indiqué par l'équation (21.191). Soit 1_q la classe du polynôme 1 modulo P, nous considérons le morphisme

$$\begin{aligned}\mu\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{F}_q\\ n &\mapsto n1_q.\end{aligned} \tag{21.210}$$

Le noyau de cette application est $\ker\mu = \mathbb{Z}_p$ parce que $p1_q = 0$, les coefficients étant à comprendre dans $\mathbb{F}_p$. □

DefnPNCFO

Définition 21.56.
*Soient P, un polynôme de degré n, et p, un nombre premier. Un élément $\alpha \in \mathbb{F}_p[X]/(P)$ est une **racine primitive** si les puissances de α parcourent tout le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$.*

Lembcerei

Lemme 21.57.
Soit p un nombre premier et P, un polynôme de degré n. Si $\alpha \in \mathbb{F}_p[X]/P$ est une racine primitive de P alors les autres racines de P sont également primitives.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_p[X]/P$ une racine primitive de P. L'élément α^p est également une racine parce que si $P = \sum_k a_k X^k$,

$$P(\alpha^p) = \sum_k (a_k\alpha^k)^p = \big(\sum_k a_k\alpha^k\big)^p = 0 \tag{21.211}$$

où nous avons utilisé le fait que $a_k^p = a_k$ étant donné que $a_k \in \mathbb{F}_p$. Par hypothèse α est une racine primitive ; cela implique que les éléments $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^n-1}$ sont distincts dans $\mathbb{F}_p[X]/P$. Ces éléments constituent donc *toutes* les racines de P.

Soit $\beta = \alpha^{p^k}$ une racine de P. Montrons que α est une puissance de β. Étant donné que $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$ est un groupe à $p^n - 1$ éléments, le corolaire 2.74 indique que $\alpha^{p^n} = \alpha$. En particulier avec $r = p^{n-k}$ nous avons

$$\beta^r = \alpha^{rp^k} = \alpha^{p^n} = \alpha. \tag{21.212}$$

Par suite toutes les puissances de α sont des puissances de β, ce qui implique que β est générateur du groupe cyclique $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$. □

LemkzWjse

Lemme 21.58.
Soit p un nombre premier et n, un entier. Un polynôme de degré d, irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, divise $X^{p^n} - X$ si et seulement si, d divise n.

Théorème 21.59.
Soient P et Q deux polynômes irréductibles de degré n dans $\mathbb{F}_p[X]$. Alors les quotients $\mathbb{F}_p[X]/P$ et $\mathbb{F}_p[X]/Q$ sont isomorphes en tant que corps.

En guise de démonstration de ce théorème, nous allons démontrer la proposition suivante.

PropCRPjZsp

Proposition 21.60.
Si $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont deux corps à $q = p^n$ éléments, alors ils sont isomorphes.

Démonstration. Soit a un élément primitif de $\mathbb{K}$ et P son polynôme minimal. Nous savons que $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_p[X]/P$ par le théorème de l'élément primitif 21.54. L'élément a est en particulier une racine de $X^q - X$. Par ailleurs P divise $X^q - X$ par le lemme 21.58.

Nous avons aussi

$$X^q - X = \prod_{b \in \mathbb{L}} (X - b) \tag{21.213}$$

par la proposition 21.35. Étant donné que P divise $X^q - X$, un des éléments de $\mathbb{L}$ annule P. Soit $b \in \mathbb{L}$ tel que $P(b) = 0$. Soit Q le polynôme minimal de b. Par définition nous savons que Q divise P, mais P étant irréductible et unitaire, nous avons immédiatement $P = Q$. En particulier

$$\mathbb{F}_p[X]/P \simeq \mathbb{F}_p[X]/Q \simeq \mathbb{K}. \tag{21.214}$$

Nous montrons maintenant que $\mathbb{F}_p[X]/Q \simeq \mathbb{L}$ par l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{F}_p[X]/Q &\to \mathbb{L} \\ \overline{X} &\mapsto b \end{aligned} \tag{21.215}$$

qui se prolonge en $R(\overline{X}) \mapsto R(b)$ pour tout $R \in \mathbb{F}_p[X]$. Cette application est bien définie parce que $Q(b) = 0$. Elle est injective parce que $R(b) = 0$ ne peut pas avoir lieu avec $R \in \mathbb{F}_p[X]/Q$ parce que Q est le polynôme minimal de b. La surjectivité vient alors du fait que les deux corps ont le même nombre d'éléments. □

21.4.7 Construction de $\mathbb{F}_{p^n}$

Le théorème 21.32 nous indique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q = p^n$, il existe un unique corps possédant q éléments. Ce corps est noté $\mathbb{F}_q$.

Le théorème 21.54 nous incite à chercher à écrire $\mathbb{F}_q$ sous la forme

$$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(P) \tag{21.216}$$

pour un certain polynôme irréductible $P \in \mathbb{F}_p[X]$.

21.4.7.1 La version du faignant

Nous pouvons construire le corps à $q = p^n$ éléments en prenant le quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par n'importe quel polynôme irréductible de degré n. Le résultat est le suivant.

PropHfrNCB

Proposition 21.61.
Soit P un polynôme unitaire irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$. Nous posons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$. Alors

(1) *$\mathbb{K}$ est un corps à q éléments.*

(2) *$\alpha = \overline{X}$ est une racine de P dans $\mathbb{K}$.*

ItemiEFRTg

(3) *$\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[\alpha]$.*

Démonstration. (1) En vertu du corolaire 8.44, $\mathbb{K}$ est un corps. Il est aussi un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}_p$, et contient donc $p^n = q$ éléments.

(2) Nous avons $P(\overline{X}) = 0$ par construction de $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$.

(3) En tant que quotient de $\mathbb{F}_p[X]$, les éléments de $\mathbb{K}$ sont des polynômes en $\overline{X}$.

□

21.4.7.2 La version plus élaborée

Construire $\mathbb{F}_q$ comme quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par un polynôme irréductible quelconque ne donne pas d'information sur les générateurs de $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$, et en particulier il n'est pas toujours vrai que $\overline{X}$ est générateur.

Exemple 21.62.
Construisons $\mathbb{F}_4$. Le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2$ parce qu'il n'a pas de racine (c'est vite vu : dans $\mathbb{F}_2$ il n'y a que deux candidats). Donc $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$. △

Remarque 21.63.
Le corps $\mathbb{F}_2$ n'est pas un sous-corps de $\mathbb{C}$ parce que leurs caractéristiques ne sont pas les mêmes. Une conséquence est que les racines de polynômes peuvent être très différentes. Par exemple le polynôme X^2+1 accepte $x=1$ comme racine dans $\mathbb{F}_2$ tandis qu'il a pour racines $\pm i$ dans $\mathbb{C}$.

En changeant de corps, les racines peuvent donc complètement changer. Ce n'est pas juste qu'il y a des racines dans l'un et pas dans l'autre.

ExemWUdrcs

Exemple 21.64.
Cherchons à construire $\mathbb{F}_{16}$ comme quotient de $\mathbb{F}_2$ par un polynôme de degré 4.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: x=polygen(GF(2))
sage: -x-1
x + 1
sage: Q=x**15-1
sage: Q.factor()
(x + 1) * (x^2 + x + 1) * (x^4 + x + 1) * (x^4 + x^3 + 1)
           * (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)
```

Les polynômes candidats à avoir des racines génératrices sont donc au nombre de 3 :

$$P_1 = X^4 + X + 1 \tag{21.217a}$$
$$P_2 = X^4 + X^3 + 1 \tag{21.217b}$$
$$P_3 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1. \tag{21.217c}$$

Dans le quotient $\mathbb{F}_2[X]/P_3$, l'élément $\overline{X}$ n'est pas générateur. En effet nous avons $X^4 = X^3 + X^2 + X + 1$ et par conséquent les puissances successives de X sont

$$X \tag{21.218a}$$
$$X^2 \tag{21.218b}$$
$$X^3 \tag{21.218c}$$
$$X^4 = X^3 + X^2 + X + 1 \tag{21.218d}$$
$$1. \tag{21.218e}$$

La classe de X dans $\mathbb{F}_2[X]/P_3$ n'est donc pas génératrice du groupe $(\mathbb{F}_2[X]/P_3) \setminus \{0\}$.

Le polynôme $P_1 = X^4 + X + 1$ par contre est primitif parce que les puissances de X dans $\mathbb{F}_2[X]/P_1$ sont

$$X \tag{21.219a}$$
$$X^2 \tag{21.219b}$$
$$X^3 \tag{21.219c}$$
$$X + 1 \tag{21.219d}$$
$$X^2 + X \tag{21.219e}$$
$$X^3 + X^2 \tag{21.219f}$$
$$X + 1 + X^3 \tag{21.219g}$$
$$X^2 + 1 \tag{21.219h}$$
$$X^3 + X \tag{21.219i}$$
$$X + 1 + X^2 \tag{21.219j}$$
$$X^2 + X + X^3 \tag{21.219k}$$
$$X^3 + X^2 + X + 1 \tag{21.219l}$$
$$1 + X^2 + X^2 \tag{21.219m}$$
$$1 + X^3 \tag{21.219n}$$
$$1 \tag{21.219o}$$

Cela fait 15 puissances distinctes, ce qui prouve que P_1 est primitif. Nous verrons plus loin comment alléger un peu la vérification de la primitivité de P_1. △

PropNsLqWb

Proposition 21.65 ([1]).
Soient un nombre premier p, un entier non nul $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ainsi qu'un polynôme P irréductible unitaire primitif dans $\mathbb{F}_p[X]$. Nous considérons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[X]/P$ et $\alpha = \overline{X} \in \mathbb{K}$. En notant $q = p^n$ nous avons

(1) Les racines de P sont $\{\alpha, \alpha^p, \dots, \alpha^{p^{n-1}}\}$ et $\alpha^q = \alpha$.

(2) P est le polynôme minimal de α.

(3) P est scindé dans $\mathbb{K}$.

(4) P divise $X^q - X$ dans $\mathbb{K}$.

(5) La famille $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ est une base de $\mathbb{K}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$.

(6) En tant qu'ensemble,

$$\mathbb{F}_q = \{0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{q-1}\}, \tag{21.220}$$

et les α^k sont distincts pour $k = 1, \dots, q-1$.

Démonstration. La plupart des assertions sont des corolaires ou des paraphrases de résultats contenus dans les propositions précédentes.

(1) L'assertion à propos des racines de P est contenue dans le lemme 21.57. D'autre part le groupe $(\mathbb{F}_p[X]/P) \setminus \{0\}$ est cyclique d'ordre $q-1$. Par conséquent le corolaire 2.74 indique que $\alpha^{q-1} = 1$ et donc $\alpha^q = \alpha$.

(2) Soit $\tilde{P}$ un polynôme annulateur de α. Nous voyons que si β est racine de $\tilde{P}$ alors β^p est également racine de $\tilde{P}$ en utilisant les techniques habituelles. Par conséquent toutes les racines de P sont racines de $\tilde{P}$, ce qui implique que $\tilde{P}$ est de degré au moins égal à celui de P.

(3) Possédant n racines distinctes dans $\mathbb{K}$, le polynôme P est scindé.

(4) D'après le lemme 21.35 un polynôme irréductible de degré n divise le polynôme $X^{p^n} - X$. Une autre façon de montrer ce point est de remarquer que le polynôme P est scindé et que toutes ses racines sont également racines de $X^q - X$.

(5) Une combinaison linéaire nulle entre les éléments de $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ serait un polynôme annulateur de degré $n-1$ de α. Cet ensemble est donc libre. Par ailleurs un ensemble libre de n éléments dans un espace vectoriel de dimension n est générateur.

(6) Si $\alpha^l = \alpha^k$ avec $k < l$ et $k, l \leqslant q$ alors nous avons $\alpha^r = 1$ avec $r = l - k < q$, ce qui contredirait la primitivité de P. Les éléments $0, \alpha, \dots, \alpha^{q-1}$ étant distincts et au nombre de q, ils forment tout l'ensemble $\mathbb{F}_q$.

□

21.4.8 Exemple : étude de $\mathbb{F}_{16}$

Dans cette section nous voulons construire $\mathbb{F}_{16}$. Nous considérons donc $p = 2$ et $n = 4$. Des polynôme irréductibles de degré 4 dans $\mathbb{F}_2[X]$ ne sont pas très difficiles à trouver. Par exemple $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Les polynômes primitifs par contre, doivent être trouvés parmi les diviseurs irréductibles de $X^{15} - 1$. Montrons que

$$P = X^4 + X^3 + 1 \tag{21.221}$$

est primitif. Nous posons $\omega = \overline{X} \in \mathbb{F}_2[X]/P$. L'ordre de ω dans le groupe $(\mathbb{F}_2[X]/P) \setminus \{0\}$ doit être un diviseur de 15 et donc peut être seulement 1, 3, 5 ou 15. Le fait que l'ordre ne soit ni 1 ni 3 est trivial parce que le degré de P est 4. Montrons que l'ordre de ω n'est pas 5 non plus :

$$\omega^5 = \omega^4\omega = (\omega^3 + 1)\omega = \omega^4 + \omega = \omega^3 + \omega + 1 \neq 1. \tag{21.222}$$

Dans ce calcul nous avons abondamment utilisé le fait que $-1 = 1$.

À partir de maintenant nous posons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2[X]/P$. Les racines de P sont $\omega, \omega^2, \omega^4$ et ω^8. En effet si β est une racine de P, alors β^2 est une racine en vertu de

$$P(\beta^2) = (\beta^2)^4 + (\beta^2)^3 + 1 = (\beta^4)^2 + (\beta^3)^2 + 1^2 = (\beta^4 + \beta^3 + 1)^2 = 0. \tag{21.223}$$

Ici nous avons implicitement utilisé le lemme 21.52. D'autre part P ne peut pas avoir plus de 4 racines.

Proposition 21.66.
L'ensemble $\{\omega, \omega^2, \omega^4, \omega^8\}$ *est une base de* $\mathbb{F}_{16}$ *sur* $\mathbb{F}_2$.

Démonstration. Nous savons que $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3\}$ est une base. En effet cet ensemble est libre (sinon ω aurait un polynôme annulateur de degré 3) et générateur parce que l'espace engendré par 4 vecteurs indépendants sur $\mathbb{F}_2$ contient $2^4 = 16$ éléments.

Nous posons $e_0 = 1$, $e_1 = \omega$, $e_2 = \omega^2$, $e_3 = \omega^3$ et $f_1 = \omega$, $f_2 = \omega^2$, $f_3 = \omega^4$, $f_4 = \omega^8$. En utilisant le calcul modulo $\omega^4 + \omega^3 + 1 = 0$ et $2 = 0$ nous trouvons

$$f_1 = \omega \tag{21.224a}$$
$$f_2 = \omega^2 \tag{21.224b}$$
$$f_3 = \omega^3 + 1 \tag{21.224c}$$
$$f_4 = \omega^3 + \omega^2 + \omega. \tag{21.224d}$$

Ensuite nous montrons que les vecteurs e_i peuvent être construits comme combinaisons linéaires des vecteurs f_j :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = e_0 \tag{21.225a}$$
$$f_1 = e_1 \tag{21.225b}$$
$$f_2 = e_2 \tag{21.225c}$$
$$f_1 + f_2 + f_4 = e_3. \tag{21.225d}$$

Les quatre vecteurs f_j forment donc bien une base parce qu'ils sont générateurs d'un espace de dimension 4. □

Exemple 21.67. (1) Résoudre dans $\mathbb{F}_{16}$ l'équation $x^5 = a$ en discutant éventuellement en fonction de la valeur de a.

(2) Montrer qu'il existe quatre éléments $\gamma \in \mathbb{F}_{16}$ tels que pour chacun d'eux l'ensemble $B_\gamma = \{\gamma, \gamma^2, \gamma^4, \gamma^8\}$ est une base de $\mathbb{F}_{16}$ sur $\mathbb{F}_2$ telle que le produit de deux éléments de B_γ est, soit un élement de B_γ, soit 1.

C'est parti !

(1) Si $a = 0$, alors $x = 0$ est la seule solution. Si $a \neq 0$ alors a est une puissance de ω ; nous posons $a = \omega^l$. Nous cherchons x sous la forme $x = \omega^k$. L'équation à résoudre pour k est

$$\omega^{5k} = \omega^l \tag{21.226}$$

où l est donné. Cette équation revient à

$$5k = l \mod 15. \tag{21.227}$$

Si l n'est pas un multiple de 5, alors il n'y a pas de solution. Il n'y a des solutions que pour $l = 0, 5, 10$ et elles sont :

$$k = \begin{cases} 3, 6, 9, 12 & \text{si } l{=}0 \\ 1 & \text{si } l{=}5 \\ 2 & \text{si } l{=}10 \end{cases} \tag{21.228}$$

(2) Nous cherchons γ sous la forme $\gamma = \omega^k$. Parmi les nombreuses contraintes liées à l'énoncé, nous devons avoir

$$\gamma^5 = 1, \gamma, \gamma^2, \gamma^4, \gamma^8. \tag{21.229}$$

Les possibilités $\gamma^5 = \gamma, \gamma^2, \gamma^4, \gamma^5$ ne sont pas bonnes parce qu'elles impliqueraient que B_γ n'est pas une base. Reste à explorer $\gamma^5 = 1$.

Étant donné le premier point, nous restons avec les possibilités

$$\gamma = 1, \omega^3, \omega^6, \omega^9, \omega^{12}. \tag{21.230}$$

Évidemment $\gamma = 1$ ne produit pas une base. Avec $\gamma = \omega^3$ nous trouvons

$$B_\gamma = \{\omega^3, \omega^6, \omega^{12}, \omega^{24}\} = \{\omega^3, \omega^6, \omega^{12}, \omega^9\} \tag{21.231}$$

où nous avons utilisé le fait que $\omega^k = \omega^{k \mod 15}$. En utilisant le fait que $\omega^4 = \omega^3 + 1$ nous trouvons

$$\omega^5 = \omega^3 + \omega + 1 \tag{21.232a}$$
$$\omega^6 = \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 \tag{21.232b}$$
$$\omega^9 = \omega^2 + 1 \tag{21.232c}$$
$$\omega^{12} = \omega + 1. \tag{21.232d}$$

L'ensemble B_γ est alors formé des éléments

$$f_1 = \omega^3 \tag{21.233a}$$
$$f_2 = \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 \tag{21.233b}$$
$$f_3 = \omega + 1 \tag{21.233c}$$
$$f_4 = \omega^2 + 1. \tag{21.233d}$$

Il est assez simple de vérifier que c'est une base en remarquant que $f_1 + f_2 + f_2 + f_4 = 1$.

Les possibilités $\gamma = \omega^6, \omega^9, \omega^{12}$ produisent les mêmes ensembles B_γ.

△

21.4.9 Fonction de Möbius

DefWXBkOxg

Proposition-Définition 21.68.
Il existe une unique application $\mu\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21.234}$$

EQooLREYooSBKsJk

*Celle fonction, nommée **fonction de Möbius** est donnée par*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré différent de } 1, \\ 1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre pair}[22] \text{ de nombres premiers distincts,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts,} \end{cases} \tag{21.235}$$

EQooTFBLooEIpcAI

Autre manière de le dire : si la décomposition en facteurs premiers[23] de n est $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$, alors

(1) $\mu(n) = 0$ si un des α_i est $\alpha_i \geqslant 2$. Dans ce cas n est divisible par p_i^2.

(2) $\mu(n) = 1$ si il y a un nombre pair de i avec $\alpha_i \neq 0$ et que pour eux, $\alpha_i = 1$

(3) $\mu(n) = -1$ si il y a un nombre impair de i avec $\alpha_i \neq 0$ et que pour eux, $\alpha_i = 1$

Démonstration. En deux parties.

(1) **Existence** Nous vérifions que la fonction μ donnée par (21.235) vérifie la condition (21.234).

(1a) **Pour $n = 1$** Nous vérifions la condition (21.234) avec $n = 1$. D'abord la somme sur $d \mid n$ contient seulement $d = 1$ et donc

$$\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1). \tag{21.236}$$

Étant donné que 1 n'a pas de facteurs premiers, c'est un produit de zéro facteurs premiers (donc un nombre pair), et donc $\mu(1) = 1$.

(1b) **Pour $n > 1$** Nous nommons P l'ensemble des facteurs premiers de n et $s = \text{Card}(P)$. Dans la somme $\sum_{d|n} \mu(d)$, les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels d est sans facteurs carrés. Un tel d est un produit d'éléments de P et donc s'écrit $\prod_{p\in D} p$ pour un certain sous-ensemble D de P. Bref :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{D\subset P} \mu\Big(\prod_{p\in D} p\Big) \tag{21.237}$$

[23] Théorème 3.62.

où la somme est sur les parties de P. Vu que $\mu(d)$ mesure le fait que d ait un nombre pair ou impair de facteurs premiers,

$$\mu\Big(\prod_{p\in D} p\Big) = (-1)^{\text{Card}(D)}. \tag{21.238}$$

Nous avons donc déjà

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \sum_{D\subset P}(-1)^{\text{Card}(D)} = \sum_{t=0}^{\text{Card}(P)}(-1)^t \,\text{Card}\big(D\subset P \text{ tel que } \text{Card}(D)=t\big) \tag{21.239}$$

où la dernière égalité revient à grouper les termes de la somme sur D en termes où D a le même cardinal. Combien de sous-ensemble de cardinal t a-t-on dans P ? C'est le lemme 3.70 qui dit qu'il y en a $\binom{n}{k}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n}\mu(d) &= \sum_{D\subset P}(-1)^{\text{Card}(D)} && \text{(21.240a)}\\
&= \sum_{t=0}^{\text{Card}(P)}(-1)^t \,\text{Card}\big(D\subset P \text{ tel que } \text{Card}(D)=t\big) && \text{(21.240b)}\\
&= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}(-1)^t && \text{(21.240c)}\\
&= (-1+1)^s && \text{prop. 3.75} \quad \text{(21.240d)}\\
&= 0. && \text{(21.240e)}
\end{aligned}$$

Ok pour l'existence.

(2) **Unicité** Supposons que l'application $f\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ vérifie la condition 21.234. Nous allons montrer que f est alors définie par une relation de récurrence qui la définit complètement. D'abord en écrivant la relation avec $n=1$ nous trouvons

$$\sum_{d|1} f(d) = 1. \tag{21.241}$$

Et comme il y a seulement $d=1$ dans la somme, nous trouvons immédiatement $f(1)=1$. Ensuite nous savons que si $n>0$,

$$\sum_{d|n} f(d) = 0. \tag{21.242}$$

Nous sortons le terme $d=n$ de cette somme :

$$0 = \sum_{d|n} f(d) = f(n) + \sum_{\substack{d|n\\ d<n}} f(d). \tag{21.243}$$

Cela montre que $f(n)$ est donnée par

$$f(n) = \sum_{\substack{d|n\\ d<n}} f(d). \tag{21.244}$$

Donc $f(n)$ est entièrement définie par les valeurs de $f(d)$ avec $d<n$.

□

NORMooAULBooKxNwLJ

21.69.
La fonction de Möbius arrive dans cette vidéo de Numberphile après 55 minutes de souffrances :

https://www.youtube.com/watch?v=XhA5U9pFXuU

Avec un lien avec la fonction totient d'Euler, qui est je crois celle définie en 7.29. Je n'ai pas vérifié.

Il faudrait prouver la formule

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p}). \tag{21.245}$$

Écrivez-moi si vous avez une preuve.

PROPooOVYJooFvmxyj

Proposition 21.70 ([662, 1]).
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors

EQooXEIAooMGIhtZ

$$\mu(pq) = \mu(p)\mu(q). \tag{21.246}$$

Démonstration. Si p ou q a un facteur carré, alors pq aussi et les deux membres de (21.246) sont nuls. Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit D_p l'ensemble des diviseurs premiers de p, et D_q celui de q. Nous avons $D_p \cap D_q = \varnothing$, sinon p et q ne seraient pas premiers entre eux.

La valeur de $\mu(p)$ est la parité de $\text{Card}(D_p)$. Comme $D_{pq} = D_p \cup D_q$ et que l'union est disjointe, la parité de $\text{Card}(D_{pq})$ est le produit des deux. □

PropLBZoIoO

Proposition 21.71 (Formule d'inversion de Möbius[662]).
Soient $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d). \tag{21.247}$$

Alors

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \tag{21.248}$$

où μ est la fonction de Möbius pour tout $n \geqslant 1$.

21.4.10 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

LemRGuWqNu

Lemme 21.72 ([663]).
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ayant une racine commune dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Si P est irréductible, alors $P \mid Q$.

Démonstration. Si P ne divise pas Q, alors P et Q sont premiers entre eux parce que dans la décomposition en irréductibles de Q, il n'y a pas de P tandis que dans celle de P, il n'y a que P. Par conséquent, il existe $a, b \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{L}[X]$ tels que[24] $aP + bQ = 1$. Cette dernière égalité est encore valable dans $\mathbb{L}$ et donc rend impossible l'existence d'une racine commune. □

PropVFNOvzZ

Proposition 21.73 ([663, 112]).
Soit p un nombre premier, $n \geqslant 1$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous notons $q = p^r$, $A(n,q)$, l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_q$. Nous notons aussi $I(n,q) = \text{Card}\big(A(n,q)\big)$. Alors :

(1) Le polynôme $X^{q^n} - X$ se décompose en irréductibles de la façon suivante :

$$X^{q^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in A(d,q)} P. \tag{21.249}$$

(2) Le nombre d'irréductibles est donné par

$$I(n,q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d \tag{21.250}$$

où μ est la fonction de Möbius (définition 21.68).

(3) Nous avons l'équivalence de suite

$$I(n,q) \sim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n}. \tag{21.251}$$

Démonstration. (1) Soit un diviseur d de n et $P \in A(d,q)$. Montrons que P divise $X^{q^n} - X$. Nous considérons le corps $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q[X]/(P)$, qui est une extension de degré $\deg(P)$ de $\mathbb{F}_q$ parce qu'il s'agit des polynômes de degré au maximum $\deg(P)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Ce corps possède donc q^d éléments et est isomorphe à $\mathbb{F}_{q^d}$ par la proposition 21.60. Par construction dans $\mathbb{K}$, l'élément $\alpha = [X]$ (la classe de X dans le quotient par P) est une racine de P. Cet élément est également une racine de $X^{q^d} - X$ parce que tout élément de $\mathbb{F}_{q^d}$ est une racine de ce polynôme. Ce dernier point est la proposition 21.35.

[24] Théorème de Bézout, 8.47.

Nous sommes donc dans la situation où P et $X^{q^d}-X$ ont une racine commune dans l'extension $\mathbb{F}_q[X]/(P)$. Nous en déduisons que α est aussi une racine de $X^{q^n}-X$. En effet en utilisant le fait que $\alpha^{q^d}=\alpha$, nous avons

$$\alpha^{q^n}=\alpha^{q^{kd}}=\alpha^{q^dq^{(k-1)d}}=\left(\alpha^{q^d}\right)^{q^{(k-1)d}}=\alpha^{q^{(k-1)d}}, \tag{21.252}$$

donc par récurrence, on a encore $\alpha^{q^n}=\alpha$, et α est racine de $X^{q^n}-X$. Puisque P est irréductible, le lemme 21.72 nous indique alors, que P divise $X^{q^n}-X$.

Étant donné que tous les éléments de $A(d,q)$ divisent $X^{q^n}-X$ et sont irréductibles, leur produit divise encore $X^{q^n}-X$:

$$\prod_{d|n}\prod_{P\in A(d,q)}P\mid X^{q^n}-X. \tag{21.253}$$

Nous devons à présent montrer que tous les facteurs irréductibles de $X^{q^n}-X$ sont dans un $A(d,q)$ avec $d\mid n$. Soit donc P un facteur irréductible de $X^{q^n}-X$ de degré $d\geqslant 1$. Nous posons encore $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q[X]/(P)$ et nous utilisons la propriété de multiplication sur les degrés (proposition 8.63) :

$$[\mathbb{F}_{q^n}:\mathbb{K}][\mathbb{K}:\mathbb{F}_q]=[\mathbb{F}_{q^n}:\mathbb{F}_q]=n, \tag{21.254}$$

donc $[\mathbb{K}:\mathbb{F}_q]$, qui vaut $\deg(P)$ est un diviseur de n.

Étant donné que $X^{q^n}-X$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{F}_{q^n}$ (à nouveau la proposition 21.35), dans sa décomposition en irréductibles sur $\mathbb{F}_q$, il n'a pas de facteur carré ; il n'a donc qu'une fois chacun des $P\in A(d,q)$ avec $d\mid n$. Autrement dit, tous les facteurs irréductibles de $X^{q^n}-X$ sont dans le produit $\prod_{d|n}\prod_{P\in A(d,q)}P$ et donc $X^{q^n}-X$ divise ce gros produit :

$$X^{q^n}-X\mid\prod_{d|n}\prod_{P\in A(d,q)}P. \tag{21.255}$$

Ayant déjà obtenu la divisibilité inverse et les polynômes étant unitaires, nous avons égalité.

(2) Nous passons au degré dans l'expression que nous venons de démontrer :

$$q^n=\sum_{d|n}d\,\mathrm{Card}\left(A(d,q)\right)=\sum_{d|n}dI(d,q). \tag{21.256}$$

Nous pouvons utiliser la formule d'inversion de Möbius (proposition 21.71) pour les fonctions $g(n)=q^n$ et $f(n)=dI(n,q)$. Nous écrivons alors

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d, \tag{21.257}$$

ou encore

$$I(n,q)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d, \tag{21.258}$$

ce qu'il fallait.

(3) Nous posons

$$r_n=\sum_{\substack{d|n\\ d<n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d, \tag{21.259}$$

mais sachant que les diviseurs de n, outre n lui-même, sont tous plus petits ou égaux à $n/2$ et qu'en valeur absolue, la fonction de Möbius est toujours plus petite ou égale à[25] 1,

$$|r_n|\leqslant\sum_{d=1}^{\lfloor n/2\rfloor}q^d=\frac{q-q^{\lfloor n/2\rfloor}}{1-q}=q\frac{q^{\lfloor n/2\rfloor}-1}{q-1}\leqslant\frac{q^{\lfloor n/2\rfloor+1}}{q-1}. \tag{21.260}$$

D'autre part en reprenant la formule déjà prouvée,

$$I(n,q)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)q^d=\frac{1}{n}\left(r_n+\mu\left(\frac{n}{n}\right)q^n\right)=\frac{r_n+q^n}{n}. \tag{21.261}$$

Au numérateur, le plus haut degré en n est q^n parce que r_n est en $q^{\lfloor n/2\rfloor}$. Donc nous avons bien l'équivalence de suite pour $n\to\infty$:

$$\frac{q^n+r_n}{n}\sim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n}. \tag{21.262}$$

□

[25] Dans [112], ma dernière inégalité arrive comme une égalité.

21.4.11 Matrices

Proposition 21.74.
Nous avons

$$|\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)| = (p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1}). \tag{21.263}$$

Démonstration. Par construction il existe une bijection entre $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$ et l'ensemble des bases de $\mathbb{F}_p^n$. Nous devons donc seulement compter le nombre de bases. Pour le premier vecteur de base nous avons le choix entre les p^n-1 éléments non nuls de $\mathbb{F}_p^n$. Pour le second nous avons le choix entre p^n-p éléments, et ainsi de suite. □

LemcDOTzM

Lemme 21.75.
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini autre que $\mathbb{F}_2$[26], soit un groupe abélien M et un morphisme $\varphi\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\to M$. Alors il existe un unique morphisme $\delta\colon \mathbb{K}\setminus\{0\}\to M$ tel que $\varphi=\delta\circ\det$.

Démonstration. D'abord le groupe dérivé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ parce que les éléments de $D\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\big)$ sont de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ dont le déterminant est 1.

De plus le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est normal dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Par conséquent $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est un groupe et nous pouvons définir l'application relevée

$$\tilde{\varphi}\colon \frac{\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})}{\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})}\to M \tag{21.264}$$

vérifiant $\varphi=\tilde{\varphi}\circ\pi$ où π est la projection.

Nous pouvons faire la même chose avec l'application

$$\det\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\to\mathbb{K}\setminus\{0\} \tag{21.265}$$

qui est un morphisme de groupes dont le noyau est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$. Cela nous donne une application

$$\tilde{\det}\colon \frac{\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})}{\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})}\to\mathbb{K}\setminus\{0\} \tag{21.266}$$

telle que $\det=\tilde{\det}\circ\pi$. Cette application $\tilde{\det}$ est un isomorphisme. En effet, elle est surjective parce que le déterminant l'est, et elle est injective parce que son noyau est précisément ce par quoi on prend le quotient. Par conséquent $\tilde{\det}$ possède un inverse et nous pouvons écrire

$$\varphi=\tilde{\varphi}\circ\tilde{\det}^{-1}\circ\tilde{\det}\circ\pi. \tag{21.267}$$

Étant donné que $\tilde{\det}\circ\pi=\det$, nous avons alors $\varphi=\delta\circ\det$ avec $\delta=\tilde{\varphi}\circ\tilde{\det}^{-1}$. Ceci conclut la partie existence de la preuve.

En ce qui concerne l'unicité, nous considérons $\delta'\colon\mathbb{K}\setminus\{0\}\to M$ telle que $\varphi=\delta'\circ\det$. Pour tout $u\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ nous avons $\delta'(\det(u))=\varphi(u)=\delta(\det(u))$. L'application det étant surjective depuis $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}\setminus\{0\}$, nous avons $\delta'=\delta$. □

Théorème 21.76.
Soient $p\geqslant 3$ un nombre premier et E, un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout $u\in\mathrm{GL}(E)$ nous avons

$$\epsilon(u)=\left(\frac{\det(u)}{p}\right). \tag{21.268}$$

Ici ϵ est la signature de u vue comme une permutation des éléments de $\mathbb{F}_p$.

Démonstration. Commençons par prouver que

$$\epsilon\colon \mathrm{GL}(E)\to\{-1,1\}. \tag{21.269}$$

est un morphisme. Si nous notons $\overline{u}\in S(E)$ l'élément du groupe symétrique correspondant à la matrice $u\in\mathrm{GL}(E)$, alors nous avons $\overline{uv}=\overline{u}\circ\overline{v}$, et la signature étant un morphisme (proposition 2.124),

$$\epsilon(uv)=\epsilon(\overline{u}\circ\overline{v})=\epsilon(\overline{u})\epsilon(\overline{v}). \tag{21.270}$$

Par ailleurs $\{-1,1\}$ est abélien, donc le lemme 21.75 s'applique et nous pouvons considérer un morphisme $\delta\colon\mathbb{F}_p\setminus\{0\}\to\{-1,1\}$ tel que $\epsilon=\delta\circ\det$.

[26] Je ne comprends pas très bien à quel moment joue cette hypothèse.

Nous allons utiliser le lemme 21.42 pour montrer que δ est le symbole de Legendre. Pour cela il nous faudrait trouver un $x \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ tel que $\delta(x) = -1$. Étant donné que det est surjective, nous cherchons ce x sous la forme $x = \det(u)$. Par conséquent nous aurions

$$\delta(x) = (\delta \circ \det)(u) = \epsilon(u), \tag{21.271}$$

et notre problème revient à trouver une matrice $u \in \mathrm{GL}(E)$ dont la permutation associée soit de signature -1.

Soit $n = \dim E$; en conséquence de la proposition 21.61(3), l'espace $\mathbb{E}_q = \mathbb{F}_{p^n}$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n et est donc isomorphe en tant qu'espace vectoriel à E. Étant donné que $\mathbb{F}_q$ est un corps fini, nous savons que $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ est un groupe cyclique à $q-1$ éléments. Soit y, un générateur de $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ et l'application

$$\begin{aligned} \beta\colon \mathbb{F}_q &\to \mathbb{F}_q \\ x &\mapsto yx. \end{aligned} \tag{21.272}$$

Cela est manifestement $\mathbb{F}_p$-linéaire (ici y et x sont des classes de polynômes et $\mathbb{F}_p$ est le corps des coefficients). L'application β fixe zéro et à part zéro, agit comme le cycle

$$(1, y, y^2, \dots, y^{q-2}). \tag{21.273}$$

Nous savons qu'un cycle de longueur n est de signature $(-1)^{n+1}$. Ici le cycle est de longueur $q-1$ qui est pair (parce que $p \geqslant 3$) et par conséquent, l'application β est de signature -1. □

21.5 Constructions à la règle et au compas

Définition 21.77 ([664]).
Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. Un point de $\mathbb{R}^2$ est constructible en une étape à partir de E si il est un point de E ou une intersection de deux objets parmi

- *les droites passant par deux points distincts de E ;*
- *les cercles centrés en un point de E et dont le rayon est la distance entre deux points de E.*

Nous notons $C_1(E)$ l'ensemble des points constructibles en une étape à partir de E.

*Les points constructibles en n étapes à partir de E sont définis par récurrence : $C_{n+1}(E) = C_1\big(C_n(E)\big)$. Enfin un point de $\mathbb{R}^2$ est **constructible** à partir de E si il appartient à*

$$C(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(E). \tag{21.274}$$

*Un réel est **constructible** si il est l'abscisse d'un point constructible.*

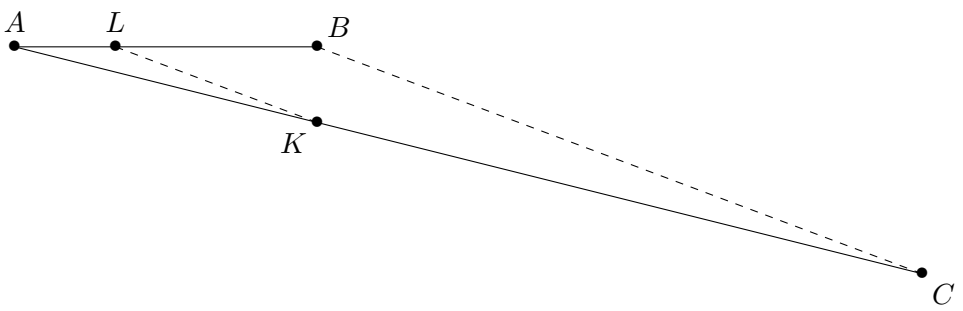
Pour toute la suite, nous allons considérer les points et réels constructibles à partir de l'ensemble $E = \{(0,0), (0,1)\}$.

21.5.1 Quelques constructions

PropIMFooDWAyoH

Proposition 21.78 ([665]).
Les nombres rationnels sont tous constructibles.

Démonstration. Si le réel r est constructible, alors kr est également constructible pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Nous devons donc seulement pouvoir construire le nombre $1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

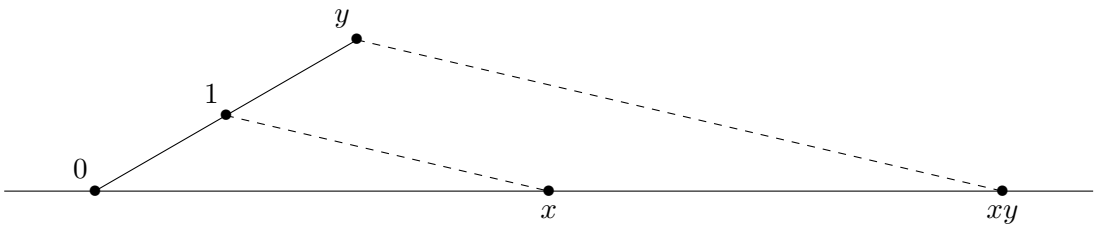


La méthode pour construire le nombre $1/n$ est la suivante. Soit $[AB]$ un segment de longueur 1 (par exemple $A=(0,0)$ et $B=(1,0)$) et un point C, non aligné avec A et B, et tel que $[AC]$ ait une longueur n. Nous plaçons sur $[AC]$ le point K situé à une distance 1 de A en pointant le compas en A et en traçant le cercle de rayon $[AB]$.

La droite passant par K et parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en un point L. Maintenant, le segment $[AL]$ a une longueur de $1/n$, par le théorème de Thalès[27]. □

ExGROooIosiBt

Exemple 21.79 (Multiplication à la règle et au compas[664])**.**
Soient x et y deux nombres constructibles. Montrons qu'il est possible de construire le nombre xy. La construction est la suivante :



- On trace deux droites sécantes en A.
- Sur la première nous plaçons le point Y à distance y de A et le point P à distance 1 de A.
- Sur la seconde on place le point X à distance x de A.
- On trace la droite (PX)
- Puis la parallèle à (PX) passant par Y.
- Le point d'intersection entre cette dernière droite et (AX) est le point B.

La longueur AB est égale à xy. △

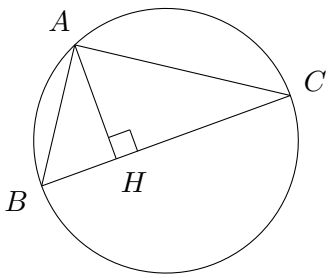
ExTYMooSMCvSr

Exemple 21.80 (Racine carrée à la règle et au compas[664])**.**
Nous supposons que le nombre x est constructible, et nous voulons une construction qui donne un segment de longueur $\sqrt{x}$. Nous traçons un segment $[BC]$ dont la longueur correspond à la plus grande des valeurs entre x et 1, puis le cercle de diamètre BC, ensuite le point H sur $[BC]$ tel que BH corresponde à la plus petite des valeurs entre x et 1, enfin la perpendiculaire à (BC) menée par H, qui rencontre le cercle en un point A. D'après le théorème de Thalès sur le cercle[28], le triangle ABC est rectangle en A.

Les triangles ABC et ABH sont donc semblables parce qu'ils sont rectangles avec un angle (autre que l'angle droit) égal. Nous avons donc proportionnalité des longueurs des côtés :

$$\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{AB}, \tag{21.275}$$

ce qui donne $AB^2=BC\times BH=x$ (BC et BH valent respectivement 1 et x ou le contraire).



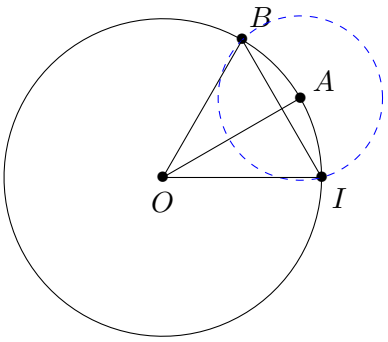
△

ExAHCooELGGPa

Exemple 21.81 (Duplication d'un angle)**.**
Si un angle α est constructible, nous allons construire les angles 2α, 3α, etc. Pour cela nous considérons un cercle de centre O et les points A et I sur le cercle tels que $\widehat{AOI}=\alpha$. Le cercle de centre A et de rayon AI intersecte le cercle de départ en les points I et B.

[27] Théorème 14.170.
[28] Théorème 14.171.

Le point A est à égale distance de B et I ; le point O également. Donc la droite (OA) est médiatrice du segment $[BI]$. Par conséquent elle est la hauteur du triangle isocèle OBI. L'angle $\widehat{BOA}$ est alors le même que $\widehat{AOI}$; par conséquent $\widehat{BOI} = 2\alpha$.



En traçant le cercle de centre B et de rayon BA, nous continuons et nous construisons 3α. △

L'exemple suivant qui permet d'additionner des angles repose sur le fait que deux cordes de mêmes longueurs sous-tendent des angles égaux, et est une adaptation simple de la duplication d'angle.

ExOVDooXnWPDl

Exemple 21.82 (Addition d'angles)**.**
Quitte à soustraire ou additionner un certain nombre de fois 90°, nous supposons que les deux angles donnés sont entre 0° et 90°.

Soient A, B, I sur un cercle de centre O, et nous notons $\alpha = \widehat{OAI}$, $\beta = \widehat{BOI}$. Nous traçons le cercle de centre B et de rayon AI ; il intersecte le cercle en des points K_1 et K_2. Les angles $\widehat{K_1OB}$ et $\widehat{K_2OB}$ sont tous deux égaux à α.

Les angles $\widehat{K_1OA}$ et $\widehat{K_2OA}$ sont égaux à $\beta - \alpha$ et $\beta + \alpha$. △

21.83.
Notez que l'exemple 21.82 donne un moyen de construire $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ ensemble. Il ne permet pas de savoir lequel est $\alpha + \beta$ et lequel est $\alpha - \beta$.

21.5.2 Nombres constructibles

ThoRHFooZsLbqd

Théorème 21.84 (Wantzel[666])**.**
Le réel a est constructible si et seulement si il existe une suite finie de corps $\mathbb{L}_i$ tels que

(1) $\mathbb{L}_0 = \mathbb{Q}$,

(2) $\mathbb{L}_{i+1}$ *est un extension quadratique*[29] *de* $\mathbb{L}_i$

(3) $a \in \mathbb{L}_n$.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres constructibles (par exemple $\mathbb{Q}$) ; nous notons $E_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont dans $\mathbb{K}$. Ce sont des points forcément constructibles.

(1) **Intersection de droites** Si $A, B \in E_{\mathbb{K}}$ alors la droite (AB) a pour équation $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, et le point d'intersection entre deux droites est donné par la solution du système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (21.276a) \\ a'x + b'y + c' = 0, & (21.276b) \end{cases}$$

dont les solutions sont encore dans $\mathbb{K}$.

(2) **Intersection droite-cerle** L'équation d'un cercle est de la forme

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \tag{21.277}$$

où $(u, v) \in E_{\mathbb{K}}$ et r est la distance entre deux points de $E_{\mathbb{K}}$; donc $r^2 \in \mathbb{K}$. En développant et en redéfinissant u, v nous voyons que tous les cercles à considérer ont une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0 \tag{21.278}$$

[29] C'est-à-dire une extension finie de degré 2.

avec $u, v, t \in \mathbb{K}$. Il s'agit de voir où sont les solutions du système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (21.279a) \\ x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0. & (21.279b) \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ alors nous pouvons opérer la substitution $x = -(c+by)/a$ et obtenir l'équation suivante pour y :

$$\left(\frac{-c-by}{a}\right)^2 + y^2 + u\left(\frac{-c-by}{a}\right) + vy + t = 0. \tag{21.280}$$

Cette équation est de la forme $P(y) = 0$ où P est un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $a = 0$ nous substituons y au lieu de x et le résultat est le même.

C'est le moment de relire la proposition 8.103 qui nous assure que si le réel α est une solution de $P(y) = 0$ hors de $\mathbb{K}$, alors l'extension $\mathbb{K}(\alpha)$ est de degré 2 parce que le polynôme minimal de α est de degré 2 :

$$\big[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}\big] = 2. \tag{21.281}$$

De plus $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$.

(3) **Intersection cercle-cercle** Le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0 & (21.282a) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 & (21.282b) \end{cases}$$

est équivalent au système (en substituant la seconde équation par la différence entre les deux)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ux + vy + t = 0 & (21.283a) \\ (u-a)x + (v-b)y + t - c = 0 & (21.283b) \end{cases}$$

qui est à nouveau une intersection entre un cercle et une droite.

Passons à la conclusion. Si α est un nombre constructible, alors il apparaît dans les coordonnées d'un point de $C_m(E_{\mathbb{Q}})$ pour un certain m. Nous supposons (pour la récurrence) que chaque réel constructible en $m-1$ étapes possède sa pile d'extension quadratiques en partant de $\mathbb{Q}$. Le nombre α vérifie donc

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{21.284}$$

avec a, b, c trois réels constructibles en $m-1$ étapes. L'hypothèse de récurrence donne donc des piles d'extensions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_0 = \mathbb{Q} & \mathbb{L}'_0 = \mathbb{Q} & \mathbb{L}''_0 = \mathbb{Q} \\ L_{i+1} = \mathbb{L}_i(a_i) & \mathbb{L}'_{i+1} = \mathbb{L}'_i(b_i) & \mathbb{L}''_{i+1} = \mathbb{L}''_i(c_i) \\ a \in \mathbb{L}_n & b \in \mathbb{L}'_{n'} & c \in \mathbb{L}''_{n''}. \end{array} \tag{21.285}$$

Nous considérons donc la suite d'extensions de $\mathbb{Q}$ qui consiste à étendre successivement par les nombres $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n'}, c_1, \dots, c_{n''}$ tout en excluant les doublons : il est possible que par exemple b_3 soit déjà dans $\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$. Cela nous fournit une suite d'extensions

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0 &= \mathbb{Q} \\ \mathbb{M}_{i+1} &= \mathbb{M}_i(\alpha_i) \\ a, b, c &\in \mathbb{M}_n. \end{aligned} \tag{21.286}$$

Ici le n n'est pas spécialement le même que celui plus haut. Maintenant, α est dans une extension quadratique de $\mathbb{M}_n$.

Pour la réciproque, nous supposons avoir une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{L}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathbb{L}_i$, et $\alpha \in \mathbb{L}_n$, et nous voulons prouver que α est constructible. Nous y allons par récurrence : si $n = 0$ alors α est rationnel, et il est constructible par la proposition 21.78.

Supposons que tous les points à coordonnées dans $\mathbb{L}_i$ sont constructibles. Alors, nous allons prouver que les éléments de $\mathbb{L}_{i+1}$ le sont également. Puisque α est solution d'une équation de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{L}_i$, nous avons

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{21.287}$$

pour certains $a, b, c \in \mathbb{L}_i$ et donc

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{21.288}$$

Les exemples 21.79 et 21.80 montrent que les produits et les racines carrées de nombres constructibles sont constructibles. Donc α est constructible. □

21.5.3 Polygones constructibles

Définition 21.85.
*Un angle α est **constructible** si le nombre $\cos(\alpha)$ est constructible.*

La raison est qu'il suffit de prendre la perpendiculaire à l'axe horizontal.

LemMAHooXcOCpr

Lemme 21.86 ([112]).
Soient m et n, deux nombres premiers entre eux. L'angle $\frac{2\pi}{mn}$ est constructible si et seulement si les angles $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$ sont constructibles.

Démonstration. (1) **Sens direct** Il suffit de pouvoir multiplier un angle par un entier, ce qui est fait dans l'exemple 21.81.

(2) **Sens réciproque** Le théorème de Bézout 3.46 nous donne $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $an+bm = 1$. Cela donne immédiatement

$$\frac{1}{mn} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}, \tag{21.289}$$

et donc

$$\frac{2\pi}{mn} = a\frac{2\pi}{m} + b\frac{2\pi}{n}, \tag{21.290}$$

ce qui fait que l'angle $2\pi/mn$ est une combinaison entière d'angles constructibles. Il est donc constructible par l'exemple 21.82.

□

LemUKNooSBzDyY

Lemme 21.87.
Soit un entier $n \geqslant 3$ ayant

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \tag{21.291}$$

comme décomposition en facteurs premiers. Le polynôme régulier à n côtés est constructible si et seulement si les angles $\frac{2\pi}{p_i^{\alpha_i}}$ sont constructibles.

Démonstration. Le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si l'angle $\frac{2\pi}{n}$ est constructible, c'est-à-dire si l'angle

$$\frac{2\pi}{\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}} \tag{21.292}$$

est constructible. Par récurrence sur le lemme 21.86, cet angle est constructible si et seulement si les angles $\frac{2\pi}{p_i^{\alpha_i}}$ sont constructibles. □

ThoTWAooEsLjJu

Théorème 21.88 (Gauss-Wantzel[112]).
Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

ItemFSEooONDFrSi

(1) L'angle $\frac{2\pi}{2^\alpha}$ est constructible.

ItemFSEooONDFrSii

*(2) Si p est premier et $p \neq 2$, alors l'angle $\frac{2\pi}{p^\alpha}$ est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un **nombre de Fermat**, c'est-à-dire de la forme $1 + 2^{(2^\beta)}$ pour $\beta \in \mathbb{N}$.*

ItemFSEooONDFrSiii

(3) Le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.

Démonstration. Le point (1) est une construction de bissectrice, et le point (3) consistera à remettre en place différents morceaux. Le gros de la preuve est donc consacré à (2).

(1) **Sens direct** Nous supposons que l'angle $\frac{2\pi}{p^\alpha}$ est constructible ; alors le nombre $\cos\left(2\pi/p^\alpha\right)$ l'est également et le théorème de Wantzel 21.84 nous indique que

$$\left[\mathbb{Q}\Big(\cos(2\pi/p^\alpha)\Big) : \mathbb{Q}\right] = 2^m \tag{21.293}$$

pour un certain m. Posons $q = p^\alpha$ et $\omega = e^{2i\pi/q}$. Grâce au corolaire 21.26, nous savons que le polynôme minimal de ω est le polynôme cyclotomique ϕ_q dont le degré est[30]

$$\varphi(q) = \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1). \tag{21.294}$$

[30] Voir juste en dessous de la définition 21.19.

Par conséquent

$$\big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big]=p^{\alpha-1}(p-1). \tag{21.295}$$

Mais par ailleurs

$$\omega+\omega^{-1}=2\cos(2\pi/q), \tag{21.296}$$

EqJDBooHURUQs

donc $\cos(2\pi/q)\in\mathbb{Q}(\omega)$. Et en multipliant (21.296) par ω nous trouvons le polynôme annulateur suivant pour ω :

$$\omega^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\omega+1=0. \tag{21.297}$$

Cela signifie que ω est de degré 2 dans $\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/q)\big)$, c'est-à-dire

$$\big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/q)\big)\big]=2. \tag{21.298}$$

EqSJXooRCLJxt

En remettant bout à bout et en utilisant la propriété multiplicative des degrés des extensions[31],

$$\underbrace{\big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big]}_{p^{\alpha-1}(p-1)}=\underbrace{\Big[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p^\alpha)\big)\Big]}_{2}\underbrace{\Big[\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p^\alpha)\big):\mathbb{Q}\Big]}_{2^m}, \tag{21.299}$$

donc $p^{\alpha-1}(p-1)=2^{m+1}$, mais comme p est premier et impair, $\alpha=1$ et $p=2^{m+1}+1$. Par ailleurs $m+1$ est un entier et nous nous proposons de mettre en facteur la puissance de 2 dans son développement en facteurs premiers : $m+1=\lambda 2^\beta$ avec $\beta\in\mathbb{N}$ et un certain nombre impair $\lambda\in\mathbb{N}^*$. Nous avons :

$$p=2^{\lambda 2^\beta}+1=\left(2^{2^\beta}\right)^\lambda+1, \tag{21.300}$$

mais le lemme 3.292(1) nous indique alors que $1+2^{2^\beta}$ divise $1+\left(2^{2^\beta}\right)^\lambda=p$. Mais vu que p est premier, il ne peut être divisé que par p lui-même et donc λ soit être égal à 1 et nous avons

$$p=1+2^{2^\beta}, \tag{21.301}$$

ce qui signifie que p est un nombre de Fermat premier.

(2) **Sens réciproque** Nous supposons que p est un nombre premier de la forme $p=1+2^{2^\beta}$ et nous devons prouver que l'angle $\frac{2\pi}{p}$ est constructible. Pour cela nous posons tout de suite $n=2^\beta$ et $\omega=e^{2i\pi/p}$. Comme dans la première partie nous nous souvenons que le polynôme minimal de ω est le polynôme cyclotomique ϕ_p de degré $p-1$; donc

$$[\mathbb{Q}(\omega):\mathbb{Q}]=p-1. \tag{21.302}$$

(2a) **Un groupe d'automorphismes** Nous considérons le groupe $G=\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\big(\mathbb{Q}(\omega)\big)$ des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\omega)$ agissant sur $\mathbb{Q}$ comme l'identité. Tous les éléments de $\mathbb{Q}(\omega)$ étant des polynômes en ω (proposition 8.103), un élément $g\in G$ est uniquement déterminé par $g(\omega)$, et de plus $g(0)=0$ ainsi que $\phi_p(\omega)=0$ et que ϕ_p commute avec g, donc

$$\phi_p\big(g(\omega)\big)=g\big(\phi_p(\omega)\big)=g(0)=0, \tag{21.303}$$

ce qui signifie que $g(\omega)$ est une racine du polynôme cyclotomique ϕ_p. Par définition 21.19, les racines sont $\{\omega,\omega^2,\dots,\omega^{p-1}\}$, ce qui signifie que l'action de g consiste à élever ω à une certaine puissance entre 1 et $p-1$. Le groupe G est donc d'ordre $|G|=p-1$ et a pour éléments

$$g_k:\omega\mapsto\omega^k \tag{21.304}$$

avec $k=1,\dots,p-1$. L'application[32]

$$\begin{aligned}\psi:\ G&\to(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\\ g_k&\mapsto[k]_p.\end{aligned} \tag{21.305}$$

est un morphisme surjectif entre deux groupes finis de même cardinal, donc c'est un isomorphisme. Le corolaire 21.34 nous donne de plus l'isomorphisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\simeq\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, ce qui fait que G a un élément d'ordre $p-1$ (parce que $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ en a un). Nous notons g_0 cet élément.

[31] Proposition 8.63.

[32] Pour rappel, la notation $[k]_p$ est la classe de l'entier k modulo p, qui est un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(2b) **La tour d'extensions** À partir de cet élément $g_0 \in G$ nous définissons avec $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$\mathbb{K}_i = \{z \in \mathbb{Q}(\omega) \text{ tel que } g_0^{2^i}(z) = z\}. \tag{21.306}$$

Ces ensembles sont bien des corps parce que g_0 est un morphisme : $g_0(zz') = g_0(z)g_0(z')$; on en déduit immédiatement que $g_0^2(zz') = g_0^2(z)g_0^2(z')$.

(2c) $\mathbb{K}_n = \mathbb{Q}(\omega)$ Cela est dû au fait que g_0 est, par définition, d'ordre 2^n, ce qui signifie que $g_0^{2^n}(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{Q}(\omega)$.

(2d) $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ Puisque les éléments de G laissent $\mathbb{Q}$ invariant nous avons forcément $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_0$. Nous nous attelons maintenant à prouver l'inclusion inverse. Nous savons par la proposition 8.103(2) que $\{\omega^i\}_{i=0,\dots,p-2}$ est une base[33] de $\mathbb{Q}(\omega)$. Vu que $g_0 \colon \mathbb{Q}(\omega) \to \mathbb{Q}(\omega)$ est un isomorphisme, l'image d'une base est une base :

$$\{g_0(\omega)^i\}_{i=0,\dots,p-2} \tag{21.307}$$

est également une base de $\mathbb{Q}(\omega)$. Soit $z \in \mathbb{K}_0$ et décomposons-le dans cette base[34] :

$$z = \sum_{i=0}^{p-2} \lambda_i g_0(\omega)^i; \tag{21.308}$$

nous appliquons g_0 à cette égalité en tenant compte du fait que $g_0(z) = z$:

$$z = \sum_{i=0}^{p-2} \lambda_i g_0(\omega)^{i+1}. \tag{21.309}$$

En identifiant les coefficients (et en remarquant que le dernier terme dans (21.308) est le premier dans (21.309)) nous voyons que tous les coefficients sont égaux :

$$z = \lambda_0 g_0(\omega + \cdots + \omega^{p-1}) = \lambda_0 g_0\big(\phi_p(\omega) - 1\big) = -\lambda_0 \in \mathbb{Q}. \tag{21.310}$$

Dans cette chaine d'égalités nous avons utilisé le fait que $\phi_p(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$ (corolaire 21.24) et que $\phi_p(\omega) = 0$ par définition.

(2e) $\mathbb{K}_i \subset \mathbb{K}_{i+1}$ **strictement** Nous avons une inclusion pour la simple raison que si $z \in \mathbb{K}_i$, alors $g_0^{2^i}(z) = z$. Par conséquent :

$$g_0^{2^{i+1}}(z) = g_0^{2\times 2^i}(z) = (g_0^{2^i})^2(z) = z. \tag{21.311}$$

Afin de voir que l'inclusion est stricte nous montrons que l'élément

$$x = \sum_{k=0}^{2^{n-i}-1} g_0^{k2^{i+1}}(\omega) \tag{21.312}$$

est dans $\mathbb{K}_{i+1} \setminus \mathbb{K}_i$. Dans la base $\{1, \omega, \dots, \omega^{p-1}\}$ l'élément x a une composante ω avec le terme $k = 0$, mais si on lui applique $g_0^{2^i}$ nous obtenons

$$g_0^{2^i}(x) = \sum_{k=0}^{2^{n-i-1}-1} g_0^{2^i(1+2k)}(\omega). \tag{21.313}$$

Une composante ω pour cela demanderait d'avoir $2^i(1+2k) = \lambda 2^n$ avec $\lambda \in \mathbb{N}$; cela demanderait

$$k = \lambda 2^{n-i-1} - \frac{1}{2} \tag{21.314}$$

ce qui est impossible. Donc $x \notin \mathbb{K}_i$.
Nous montrons que $x \in \mathbb{K}_{i+1}$ de la même manière :

$$g_0^{2^{i+1}}(x) = \sum_{k=0}^{2^{n-i-1}-1} g^{2^{i+1}(k+1)}(\omega). \tag{21.315}$$

Soit k_0 entre 0 et $2^{n-i-1} - 1$; nous voulons trouver un k entre 0 et $2^{n-i-1} - 1$ tel que $k_0 2^{i+1} = 2^{i+1}(k+1)$; cela est très simple : il suffit de prendre $k = k_0 - 1$ tant que $k_0 \neq 0$. Si $k_0 = 0$ alors cela correspond au terme ω dans (21.312), et il se trouve dans (21.315) avec $k = 2^{n-i-1} - 1$. Donc $g_0^{2^{i+1}}(x) = x$ et $x \in \mathbb{K}_{i+1}$.

[33] Ici [112] parle de $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$. Dans ce cas il me semble qu'il faille faire partir les valeurs de i de 0 et non de 1.
[34] Il s'agit d'une base en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, donc les λ_i sont dans $\mathbb{Q}$.

(2f) **Les degrés dans la tour** Par définition de n et de ω, et par la propriété multiplicative des degrés[35] nous avons :

$$2^n = p - 1 = \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\big] = \underbrace{\big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{K}_{n-1}\big] \dots \big[\mathbb{K}_1 : \mathbb{Q}\big]}_{n \text{ facteurs}}. \tag{21.316}$$

Un produit de n facteurs entiers tous strictement plus grands que zéro doit valoir 2^n. Ils doivent donc tous valoir 2 et nous avons en particulier

$$\big[\mathbb{K}_{n-1} : \mathbb{Q}\big] = 2^{n-1}. \tag{21.317}$$

(2g) $\cos(2\pi/p) \in \mathbb{K}_{n-1}$ Soit $f = g_0^{2^n-1}$; puisque l'action de g_0 (comme de tous les éléments de G) est de décaler les puissances de ω, il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $f(\omega) = \omega^\lambda$. Mais $f^2 = \text{Id}$ donc

$$\omega = f^2(\omega) = \omega^{2\lambda}, \tag{21.318}$$

ce qui donne $1 = \omega^{\lambda^2-1}$ ou encore que p divise $\lambda^2 - 1$ parce que ω est une racine primitive p^{e} de l'unité. Par conséquent $[\lambda^2 - 1]_p = 0$ ce qui donne $[\lambda]_p = \pm[1]_p$, mais comme $f \neq \text{Id}$ nous avons

$$[\lambda]_p = -[1]_p. \tag{21.319}$$

Ce que donne $f(\omega) = \omega^{-1}$.
Par ailleurs $\mathbb{Q}(\omega)$ est un corps, donc il contient

$$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \frac{1}{2}(\omega + \omega^{-1}). \tag{21.320}$$

Nous en déduisons que $\cos(2\pi/p)$ est un point fixe de $f = g_0^{2^{-1}}$:

$$f\big(\cos(2\pi/p)\big) = \frac{1}{2}\big(f(\omega) + f(\omega^{-1})\big) = \cos(2\pi/p). \tag{21.321}$$

Être un point fixe de $g_0^{2^{n-1}}$ signifie être un élément de $\mathbb{K}_{n-1}$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \in \mathbb{K}_{n-1}. \tag{21.322}$$

(2h) **Questions de degrés** Nous avons alors les (non)inclusions suivantes :

$$\mathbb{Q}\left(\cos(2\pi/p)\right) \subset \mathbb{K}_{n-1} \subsetneq \mathbb{K}_n = \mathbb{Q}(\omega), \tag{21.323}$$

ce qui fait que

$$1 < \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{K}_{n-1}\big] \leqslant \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big)\big] = 2 \tag{21.324}$$

EqGEKooJBAQbg

La première inégalité est le fait que $\mathbb{Q}(\omega)$ n'est pas égal à $\mathbb{K}_{n-1}$. La dernière égalité se démontre de la même manière que (21.298) (ici $\alpha = 1$). Les inégalités de (21.324) sont donc en réalité des égalités :

$$\big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{K}_{n-1}\big] = \big[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big)\big] = 2. \tag{21.325}$$

Cela, combiné au fait que $\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big) \subset \mathbb{K}_{n-1}$ donne

$$\mathbb{K}_{n-1} = \mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big). \tag{21.326}$$

Mais nous savons déjà que $\big[\mathbb{K}_{n-1} : \mathbb{Q}\big] = 2^{n-1}$, donc

$$\big[\mathbb{Q}\big(\cos(2\pi/p)\big) : \mathbb{Q}\big] = 2^{n-1} \tag{21.327}$$

et le nombre $\cos(2\pi/p)$ est bien sûr le sommet d'une tour d'extensions quadratiques partant de $\mathbb{Q}$. Il est donc constructible par le théorème de Wantzel 21.84.

[35] Proposition 8.63

Il est maintenant l'heure de conclure en prouvant le point (3). D'abord si n est un produit de nombres premiers de Fermat distincts, alors $n = p_1 \dots p_m$ et l'angle $\frac{2\pi}{n}$ est constructible si et seulement si chacun des angles $\frac{2\pi}{p_k}$ est constructible (lemme 21.87), ce qui est le cas d'après la partie (2). Si n est le produit d'une puissance de 2 avec un produit de nombres premiers de Fermat, le polygone à n côtés est tout autant constructible : il suffit de bissecter les angles.

À l'inverse si le polynôme à n côtés (avec n impair) est constructible, alors $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$, dont l'angle est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et p_i est un nombre premier de Fermat. Et si le polygone à n côtés (n pair) est constructible, alors $n = 2^\lambda \prod_i p_i^{\alpha_i}$. Ce polygone est constructible si et seulement si le polygone à $\prod_i p_i^{\alpha_i}$ côtés est constructible : il suffit de regrouper les côtés par deux. □

Remarque 21.89.
D'après Wikipédia[667], les seuls nombres de Fermat connus pour être premiers sont

$$F_0 = 3 \tag{21.328a}$$
$$F_1 = 5 \tag{21.328b}$$
$$F_2 = 17 \tag{21.328c}$$
$$F_3 = 257 \tag{21.328d}$$
$$F_4 = 65537. \tag{21.328e}$$

Pour les autres, essentiellement on ne sait pas. Il n'est même pas sûr qu'il y en ait d'autres. Le problème des polygones constructibles n'est donc pas encore tout à fait terminé.

Remarque 21.90.
Les angles $\frac{2\pi}{p^\alpha}$ avec p premier et $\alpha > 1$ ne sont pas constructibles. Il n'est donc pas possible de trisecter l'angle $\frac{2\pi}{3}$. Voilà qui règle un des vieux problèmes de l'antiquité.

Chapitre 22

Intégration sur des variétés

22.1 Variétés

22.1.1 Introduction

Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur la sphère usuelle $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Une question naturelle est d'estimer la régularité de f ; est-elle continue, dérivable, différentiable ? Il n'existe pas de dérivée directionnelle étant donné que le quotient différentiel

$$\frac{f(x+\epsilon u_1, y+\epsilon u_2) - f(x,y)}{\epsilon}$$

n'a pas de sens pour un point $(x+\epsilon u_1, y+\epsilon u_2)$ qui n'est pas –sauf valeurs particulières– dans la surface. Pour la même raison il n'est pas possible de parler de différentiabilité de cette manière. Comment faire, sans devoir étendre le domaine de définition de f à un voisinage de la sphère ? Une solution possible est de parler de la notion de variété.

Une variété est un objet qui ressemble, vu de près, à $\mathbb{R}^m$ pour un certain m. En d'autres termes, on imagine une variété comme un recollement de morceaux de $\mathbb{R}^m$ vivant dans un espace plus grand $\mathbb{R}^n$. Ces morceaux sont appelés des ouverts de carte, et l'application qui exprime la ressemblance à $\mathbb{R}^m$ est l'application de carte.

22.1.2 Définition, carte

DEFooJOAHooAxcLHe

Définition 22.1.
*Une **variété** de dimension m de classe C^1 est une partie M de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant m$) munie d'un ensemble de paires $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ où U_α est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ est une application vérifiant*

(1) φ_α est une bijection entre U_α et $\varphi_\alpha(U_\alpha)$;

(2) pour tout $a \in M$, il existe un α tel que $a \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$;

(3) pour tout α, β, la partie $\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)\big)$ est un ouvert de U_α ;

(4) L'application

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)\big) \to U_\beta \tag{22.1}$$

est un C^1-difféomorphisme vers son image.

Notez que cette définition n'utilise pas du tout la structure de $\mathbb{R}^n$ dans lequel se trouve M. Seulement la structure différentielle du $\mathbb{R}^m$ depuis lequel les cartes partent. En particulier, nous n'avons pas dit si $\varphi_\alpha : U_\alpha \to M$ était de classe C^1 pour une topologie induite de $\mathbb{R}^n$ vers M. Nous pouvons en réalité définir plus généralement une variété en remplaçant « une partie de $\mathbb{R}^n$ » par « un ensemble » sans rien y changer.

La difficulté qui apparaît lorsque nous voulons dire que M est un ensemble quelconque au lieu d'une partie de $\mathbb{R}^n$ est pour la mesure.

Nous verrons plus loin comment les cartes φ_α peuvent transporter la mesure de U_α (celle de Lebesgue dans $\mathbb{R}^m$) vers une partie de $\mathbb{R}^n$ en utilisant le déterminant de $d\varphi_\alpha$. Cela n'est possible que parce que $\mathbb{R}^n$ a une structure différentielle qui permet de définir $d\varphi_\alpha$. Si M est un ensemble quelconque, cette façon de faire n'est plus possible. Dans ce cas, il faut définir des fibrés tangents et cotangents puis en extraire une « forme volume ». Le choix de la forme volume n'étant pas canonique, il n'y a pas d'intégrale canonique sur une variété générale comme il y en a une sur une variété « dans $\mathbb{R}^n$ ».

DEFooWABZooGIEDEV

Définition 22.2.
Soit une variété M de dimension m. Une ***carte*** *pour M est un couple (U,φ) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\varphi\colon U\to M$ est une application*

(1) qui est une bijection entre U et son image,

(2) pour tout α,
$$\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi\colon \varphi^{-1}\big(\varphi(U)\cap\varphi_\alpha(U_\alpha)\big)\to\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi(U)\cap\varphi_\alpha(U_\alpha)\big) \tag{22.2}$$
est un C^1-difféomorphisme.

Proposition 22.3 ([1])**.**
Si (U_1,φ_1) et (U_2,φ_2) sont des cartes pour la variété M, alors en posant $S=\varphi_1(U_1)\cap\varphi_2(U_2)$, l'application
$$\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1\colon\varphi_1^{-1}(S)\to\varphi_2^{-1}(S) \tag{22.3}$$
est un C^1-difféomorphisme.

Démonstration. Le fait que $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ soit une bijection est dû au fait que nous ayons choisi les espaces de départ et d'arrivée pour que ce soit une bijection.

Soit $a\in\varphi_1(U_1)\cap\varphi_2(U_2)$. Soient α tel que $a\in\varphi_\alpha(U_\alpha)$ et un ouvert A autour de $\varphi_\alpha^{-1}(a)$ tel que $\varphi_\alpha(A)\subset\varphi_1(U_1)\cap\varphi_2(U_2)$. Nous allons montrer que
$$\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1\colon\varphi_1\big(\varphi_\alpha(A)\big)\to\varphi_2^{-1}\big(\varphi_\alpha(A)\big) \tag{22.4}$$
est un C^1-difféomorphisme. Nous avons
$$\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_1, \tag{22.5}$$
mais vu que φ_1 et φ_2 sont des cartes, les applications $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_\alpha$ et $\varphi_\alpha\circ\varphi_1$ sont de classe C^1 et d'inverses C^1. La composition l'est encore. □

Nous avons demandé qu'une variété n'admette que des cartes partant d'ouverts de $\mathbb{R}^m$. Aurions-nous pu admettre, dans la définition 22.2 que la carte parte d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ avec $p\neq m$? Non. Voici une résultat qui dit que si une carte part de $\mathbb{R}^m$, alors toutes les cartes doivent partir de $\mathbb{R}^m$.

Proposition 22.4.
Soit une variété M de dimension m et une carte $\varphi_\alpha\colon U_\alpha\to M$. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et si $\varphi\colon U\to M$ est telle que $\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi$ soit un difféomorphisme, alors $p=m$.

Démonstration. Soit $A=\varphi_\alpha(U_\alpha)\cap\varphi(U)$. Les parties $\varphi_\alpha^{-1}(A)$ et $\varphi^{-1}(U)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^p$ respectivement. Par hypothèse, l'application
$$\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi\colon\varphi^{-1}(A)\to\varphi_\alpha^{-1}(A) \tag{22.6}$$
est un difféomorphisme entre l'ouvert $\varphi^{-1}(A)\subset\mathbb{R}^p$ et l'ouvert $\varphi_\alpha^{-1}(A)\subset\mathbb{R}^m$. La proposition 12.344 implique que $m=p$. □

22.1.3 Ancienne définition

Cette section est à recycler.

Définition 22.5.
Soit $\varnothing\neq M\subset\mathbb{R}^n$, $1\leqslant m<n$ et $k\geqslant 1$. M est une variété de classe C^k de dimension m *si pour tout $a\in M$, il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, et un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ tel que $U\cap M$ soit le graphe d'une fonction $f:V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1, c'est-à-dire qu'il existe un réagencement des coordonnées $(x_{i_1},\dots,x_{i_m},x_{i_{m+1}},\dots,x_{i_n})$ avec*
$$M\cap U=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\text{ tel que }(x_{i_1},\dots,x_{i_m})\in V\quad\left\{\begin{array}{rcl}x_{i_{m+1}}&=&f_1(x_{i_1},\dots,x_{i_m})\\ \vdots&=&\vdots\\ x_{i_n}&=&f_{n-m}(x_{i_1},\dots,x_{i_m})\end{array}\right.\right\}$$
où V est un voisinage ouvert de $(a_{i_1},\dots,a_{i_m})\in\mathbb{R}^m$.

La littérature regorge de théorèmes qui proposent des conditions équivalentes à la définition d'une variété. Celle que nous allons le plus utiliser est la suivante

Proposition 22.6.
Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant m \leqslant n-1$. L'ensemble M est une variété si et seulement si $\forall a \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ et une application $F\colon W \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ où W est un ouvert tels que

(1) F est un homéomorphisme de W vers $M \cap \mathcal{U}$,

(2) $F \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$,

(3) Le rang de $dF(w) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est de rang maximum (c'est-à-dire m) en tout point $w \in W$.

Pour rappel, si $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, son rang[1] est la dimension de son image. Si A est la matrice d'une application linéaire, alors le rang de cette application linéaire est égal à la taille de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul contenue dans A[2].

La condition de rang maximum sert à éviter le genre de cas de la figure 22.1 qui représente l'image de l'ouvert $[-1, 1]$ par l'application $F(t) = (t^2, t^3)$.

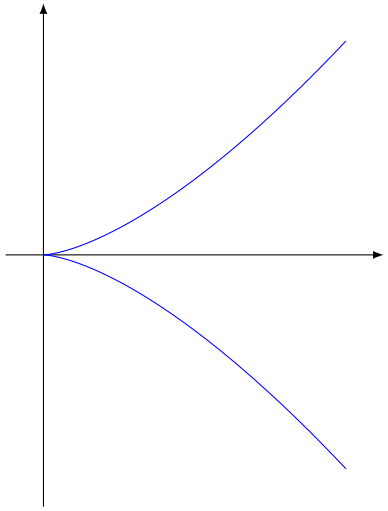


FIGURE 22.1 : Quelque chose qui n'est pas de rang maximum et qui n'est pas une variété. LabelFigExempleNonRang

La différentielle a pour matrice

$$dF(t) = (2t, 3t^2). \tag{22.7}$$

Le rang maximum est 1, mais en $t = 0$, la matrice vaut $(0, 0)$ et son rang est zéro. Pour toute autre valeur de t, c'est bon.

Une autre caractérisation des variétés est donnée par la proposition suivante

PropCarVarZerFonc

Proposition 22.7.
Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant m \leqslant n-1$. L'ensemble M est une variété si et seulement si $\forall a \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ tel et une application $G \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n-m})$ tel que

(1) le rang de $dG_a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$ soit maximum (c'est-à-dire $n-m$) en tout $a \in M$,

(2) $M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U}$ tel que $G(x) = 0\}$.

22.1.4 Espace tangent

DEFooMCEYooHuCAdg

Proposition-Définition 22.8 ([668])**.**
Soit une variété M de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in M$. L'ensemble

$$T_aM = \left\{ \gamma'(0) \text{ tel que } \begin{cases} \gamma \in C^1(]-1,1[, M) \\ \gamma(0) = a \end{cases} \right\} \tag{22.8}$$

*est un sous-espace vectoriel de dimension m, appelé **espace tangent** de M en a.*

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

[1] Définition 6.51.
[2] Proposition 6.122

22.2 Intégration

22.2.1 Le problème pour une intégration globale

Soient une variété M et une partie A de M. Si nous avons une fonction $f\colon A\to\mathbb{R}$, nous voudrions définir une intégrale de f sur A en utilisant les cartes.

Il y a une petite complication. Supposons que A soit dans $\varphi_\alpha(U_\alpha)\cap\varphi_\beta(U_\beta)$. Pour la carte φ_α nous aurions tendance à vouloir écrire

$$\int_A f=\int_{\varphi_\alpha^{-1}(A)} f\circ\varphi_\alpha \tag{22.9}$$

pour la mesure de Lebesgue induite de $\mathbb{R}^m$ vers son ouvert U_α. Pas de problème à ce que (22.9) soit bien définie. Le problème est que α n'est pas à priori spécial par rapport à β et qu'il faudrait également que

$$\int_A f=\int_{\varphi_\beta^{-1}(A)} f\circ\varphi_\beta \tag{22.10}$$

Mais en utilisant le changement de variable (théorème 16.284(3)) pour le C^1-difféomorphisme $\phi=\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta$, nous avons

$$\int_{\varphi_\alpha^{-1}(A)} f\circ\varphi_\alpha=\int_{\varphi_\beta^{-1}(A)}(f\circ\varphi_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta)|J_\phi|=\int_{\varphi_\beta^{-1}(A)}(f\circ\varphi_\beta)|J_\phi|. \tag{22.11}$$

À moins d'une coïncidence extraordinaire sur les valeurs du jacobien, il n'y aura pas égalité entre (22.9) et (22.10).

Pour faire mieux, il faudra ajouter quelque chose qui compense l'arrivée du jacobien. C'est ce que nous allons faire maintenant.

22.2.2 Intégrale sur une carte

Dans un premier temps, nous allons définir l'intégrale sur une carte. Nous verrons plus tard comment combiner les cartes pour faire une intégrale sur une variété entière.

Proposition-Définition 22.9 ([1]).
Soient deux cartes (U_1,φ_1) et (U_2,φ_2) pour la partie A d'une variété de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. Soit une fonction mesurable $f\colon A\to[0,+\infty]$[3].

Alors[4]

$$\int_{U_1}(f\circ\varphi_1)(x)\sqrt{\det\big((d\varphi_1)_x^*(d\varphi_1)_x\big)}dx=\int_{U_2}(f\circ\varphi_2)(y)\sqrt{\det\big((d\varphi_2)_y^*(d\varphi_2)_y\big)}dy \tag{22.12}$$

où les deux intégrales sont au sens de la mesure de Lebesgue sur des ouverts de $\mathbb{R}^m$.

*Ce nombre est **l'intégrale** de f sur A, et est noté*

$$\int_A f. \tag{22.13}$$

Démonstration. Vu que nous sommes en présence de cartes pour une variété, les applications $\varphi_1\colon U_1\to A$ et $\varphi_2\colon U_2\to A$ sont des bijections telles que $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2\colon U_2\to U_1$ soit un C^1-difféomorphisme.

Nous considérons le C^1-difféomorphisme $\phi=\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$. Notre but est d'utiliser le théorème de changement de variables 16.284(2).

Vu que φ_1 est une bijection, $(\varphi_1\circ\varphi_1^{-1})(A)=A$ et nous avons

$$\phi^{-1}\big(\varphi_1^{-1}(A)\big)=\varphi_2^{-1}(A). \tag{22.14}$$

Ensuite, $f\circ\varphi_1\circ\phi=f\circ\varphi_2$.

Jusqu'ici, rien de drôle me diriez-vous. Ok. Alors voyons un peu comment se passe le jacobien et ce qui se trouve sous la racine carrée.

L'application $x\mapsto\det\big((d\varphi_1)_x^*\circ(d\varphi_1)_x\big)$ doit être composée avec ϕ pour donner

$$y\mapsto\det\big((d\varphi_1)_{\phi(y)}^*\circ(d\varphi_1)_{\phi(y)}\big). \tag{22.15}$$

Attardons-nous un peu sur $(d\varphi_1)_{\phi(y)}$. Nous savons par la règle de différentiation en chaine 12.336 que

$$d(\varphi_1\circ\phi)_y=(d\varphi_1)_{\phi(y)}\circ(d\phi)_y. \tag{22.16}$$

[3] Si f est seulement mesurable, allez voir les hypothèses du théorème 16.284(3).
[4] Voir la définition de l'adjoint 10.35.

Le lemme 12.343 nous dit que l'application linéaire $d\phi_y\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est inversible et que $d\phi_y^{-1} = (d\phi^{-1})_{\phi(y)}$. En composant les deux côtés de (22.16) par cela nous trouvons

$$(d\varphi_1)_{\phi(y)} = d(\varphi_1 \circ \phi)_y \circ (d\phi)_y^{-1} = (d\varphi_2)_y \circ (d\phi^{-1})_{\phi(y)}. \tag{22.17}$$

C'est me moment d'utiliser la proposition 10.38 à propos de la composition des applications adjointes. Ce qui est dans le déterminant est :

$$\big((d\varphi_2)_y \circ (d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)^* \circ \big((d\varphi_2)_y \circ (d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big) = \underbrace{(d\phi^{-1})^*_{\phi(y)}}_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m} \circ \underbrace{(d\varphi_2)^*_y \circ (d\varphi_2)_y}_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m} \circ \underbrace{(d\phi^{-1})_{\phi(y)}}_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m}. \tag{22.18}$$

Nous utilisons à présent un combo entre les propriétés des déterminants et de l'adjoint : les propositions 10.15(2) et 10.37 font sortir $|\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)|$ de la racine carré. Ne pas oublier la valeur absolue parce que $\sqrt{x^2} = |x|$ et non $\sqrt{x^2} = x$. Cela pour dire que

$$\sqrt{\det\big((d\varphi_1)^*_{\phi(y)} \circ (d\varphi_1)_{\phi(y)}\big)} = |\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)|\sqrt{\det\big((d\varphi_2)^*_y \circ (d\varphi_2)_y\big)}. \tag{22.19}$$

En ce qui concerne l'intégrale que nous voulons calculer, en mettant les bouts ensemble,

$$\begin{aligned}&\int_{\varphi_1^{-1}(A)} (f\circ\varphi_1)(x)\sqrt{\det(\dots)}dx\\ &\quad= \int_{\varphi_2^{-1}(A)} (f\circ\varphi_2)(y)|\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)|\sqrt{\det\big((d\varphi_2)^*_y \circ (d\varphi_2)_y\big)}\,|\det(d\phi_y)|dy.\end{aligned} \tag{22.20}$$

Enfin, les déterminants se suppriment : dans la valeur absolue nous avons :

$$\det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)}\big)\det(d\phi_y) = \det\big((d\phi^{-1})_{\phi(y)} \circ d\phi_y\big) = \det(\mathrm{Id}) = 1. \tag{22.21}$$

□

22.10.
Notez que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ lui-même, le nombre défini dans la définition 22.9 est l'intégrale usuelle. Pour le voir, choisir $U = A$ ainsi que la carte

$$\begin{aligned}\varphi\colon U &\to A\\ x &\mapsto x.\end{aligned} \tag{22.22}$$

La différentielle de φ est l'identité, de telle sorte que $\det\big((d\varphi)^*_x(d\varphi)_x\big) = 1$. De même, $f\circ\varphi = f$. Il reste seulement $\int_U f(x)dx$.

Si nous voulons que la formule de la proposition 22.9 fournisse une définition raisonnable de $\int_A f$, il faut que si (U,φ) est une carte,

$$\det\big(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x\big) \geqslant 0 \tag{22.23}$$

pour tout x, et ne soit nul sur aucun ouvert de U.

Lemme 22.11 ([1])**.**
Soit une carte (U,φ) d'une variété M de dimension m. Soit $x \in U$. Alors

(1) L'opérateur $d\varphi_x^* \circ d\varphi_x$ est autoadjoint semi-défini positif.

(2) Il existe une base de $\mathbb{R}^m$ formée de vecteurs propres de $d\varphi_x^* \circ d\varphi_x$. Les valeurs propres sont réelles et positives.

(3) Pour tout $x \in U$ nous avons

$$\det(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x) > 0. \tag{22.24}$$

Démonstration. Point par point.

(1) Soit $x \in U$. Nous notons $A = d\varphi_x$. Par la proposition 10.38 nous avons $(AA^*)^* = AA^*$ du fait que $(A^*)^* = A$. Donc A^*A est autoadjoint. Sa matrice est donc symétrique par la proposition 10.35(2).

De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ nous avons

$$\langle A^*Au, u\rangle = \langle Au, Au\rangle \geqslant 0. \tag{22.25}$$

Cela implique que la matrice de A^*A est semi-définie positive par le lemme 10.235(2). L'opérateur A^*A est également semi-défini positif par la proposition 10.236.

(2) L'existence de la base de vecteurs propres est le théorème 10.228. Ce théorème dit de plus que les valeurs propres sont réelles. Le fait qu'elles soient positives est le fait déjà prouvé que A^*A est semi-défini positif.

(3) Dans la base de vecteurs propres, la matrice est diagonale avec des nombres positifs sur la diagonale. Le déterminant est alors le produit des valeurs propres. Voilà pourquoi le déterminant est positif.

Il nous reste à montrer que ce déterminant ne peut pas être nul. Si $\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a) = 0$, alors l'application $d\varphi_a^* \circ d\varphi$ a un noyau (proposition 10.15(2)), c'est-à-dire un vecteur u tel que $d\varphi_a^* d\varphi_a(u) = 0$ en particulier,

$$0 = \langle d\varphi_a^* d\varphi_a u, u\rangle = \langle d\varphi_a u, d\varphi_a u, \rangle = \|d\varphi_a u\|^2. \tag{22.26}$$

Donc $d\varphi_a(u) = 0$.

Mais $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ est bijective, donc l'application $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ l'est aussi et vu que φ est une carte, l'application $\varphi^{-1} \circ \varphi\colon U \to U$ est égale à l'identité. L'identité est une application linéaire dont la différentielle est elle-même[5], c'est-à-dire que

$$d(\varphi^{-1} \circ \varphi)_a = (d\varphi^{-1})_{\varphi(a)} \circ d\varphi_a = \mathrm{Id}\,. \tag{22.27}$$

Si donc $u \neq 0$, nous devons avoir $d\varphi_a(u) \neq 0$.

□

22.2.3 Quelques expressions pour l'élément de volume

Ce que nous appelons « élément de volume » (pour des raisons qui apparaîtront plus tard) est le coefficient $\sqrt{\det(d\varphi_x^* \circ d\varphi_x)}$, introduit pour le besoin de compenser l'arrivée du jacobien en cas de changement de variables. Mais à quoi ressemble ce coefficient pour les variétés de petite dimension ?

C'est ce que nous allons voir maintenant.

22.2.3.1 En dimension un

Nous supposons une variété de dimension un dans $\mathbb{R}^n$. Une carte est donc une application $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dont nous notons φ_i les composantes. Nous avons, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$d\varphi_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[\varphi(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varphi_1(a+tu)\\ \vdots \\ \varphi_n(a+tu)\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}\varphi_1'(a)\\ \vdots \\ \varphi_n'(a)\end{pmatrix} = u\varphi'(a). \tag{22.28}$$

Là dedans, vous vous souviendrez que $a \in \mathbb{R}$ et que $\varphi'(a) \in \mathbb{R}^n$.

Nous devons savoir ce que vaut $d\varphi_a^* x$ lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\langle d\varphi_a x, u\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, d\varphi_a(u)\rangle_{\mathbb{R}^n} = u\langle x, \varphi'(a)\rangle_{\mathbb{R}^n} = u\varphi'(a) \cdot x = \langle \varphi'(a) \cdot x, u\rangle_{\mathbb{R}}. \tag{22.29}$$

Donc $d\varphi_a^*(x) = \varphi'(a) \cdot x$.

Question notation, nous avons noté $\langle a, b\rangle_{\mathbb{R}} = ab$ et indifféremment $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = x \cdot y$.

L'application $d\varphi_a^* \circ d\varphi_a$ est une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$. Sa matrice est donc 1×1 et elle se calcule en appliquant l'application au vecteur de base 1 de $\mathbb{R}$:

$$(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)(1) = d\varphi_a^*\big(\varphi'(a)\big) = \varphi'(a) \cdot \varphi'(a) = \|\varphi'(a)\|^2. \tag{22.30}$$

Nous avons donc

$$\det\big(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a\big) = \|\varphi'(a)\|^2. \tag{22.31}$$

22.2.3.2 En dimension quelconque

Soit une carte $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pour une variété de dimension m. Les éléments de matrice de la différentielle d'une application sont donnés par la proposition 14.265 :

$$(d\varphi_a)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a). \tag{22.32}$$

[5] Lemme 12.326.

Les éléments de la matrice de $d\varphi_a^*$ sont ceux de la matrice transposée. En ce qui concerne la composition, c'est le produit des matrices :

$$(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)_{ij} = \sum_k (d\varphi_a^*)_{ik}(d\varphi_a)_{kj} = \sum_k (d\varphi_a)_{ki}(d\varphi_a)_{kj} = \sum_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}(a)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}(a). \tag{22.33}$$

Cela pour écrire cette bonne formule :

$$(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a). \tag{22.34}$$

EQooQRQKooJVJRsv

22.2.3.3 En dimension deux

Nous considérons maintenant une carte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ avec $U \subset \mathbb{R}^2$. En notant $v_i = \partial_i\varphi(a)$ nous notons la formule (22.34) sous la forme

$$\det\left(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a\right) = \det\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2\|v_2\|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2. \tag{22.35}$$

L'identité de Lagrange de la proposition 12.56 nous donne alors

$$\sqrt{\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a)} = \|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\|. \tag{22.36}$$

22.2.3.4 En dimension trois

Nous considérons maintenant une carte $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^3$ avec $U \subset \mathbb{R}^3$. Nous notons $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a)$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a)$ et $w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a)$.

En utilisant l'expression du lemme 12.54 à propos du produit mixte, la formule 22.34 donne

$$\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a) = \det\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & \|v\|^2 & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix} = \big|(u \times v) \cdot w\big|. \tag{22.37}$$

Donc

$$\det(d\varphi_a^* \circ d\varphi_a) = \big|(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a) \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a)) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z}(a)\big|. \tag{22.38}$$

EQooYIJSooHtkXfu

22.3 Intégrale sur une variété

22.3.1 Mesure sur une carte

Nous considérons dans cette section uniquement des variétés M de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Une particularité de $\mathbb{R}^3$ (par rapport aux autres $\mathbb{R}^n$) est qu'il existe le produit vectoriel.

Si v, $w \in \mathbb{R}^3$, alors le vecteur $v \times w$ est un vecteur normal au plan décrit par v et w qui jouit de l'importante propriété suivante :

$$\text{aire du parallélogramme} = \|v \times w\|. \tag{22.39}$$

L'aire du parallélogramme construit sur v et w est donnée par la norme du produit vectoriel. Afin de donner une mesure infinitésimale en un point $p \in M$, nous voudrions prendre deux vecteurs tangents à M en p, et puis considérer la norme de leur produit vectoriel. Cette idée se heurte à la question du choix des vecteurs tangents à considérer.

Dans $\mathbb{R}^2$, le choix est évident : nous choisissons e_x et e_y, et nous avons $\|e_x \times e_y\| = 1$. L'idée est donc de choisir une carte $F\colon W \to F(W)$ autour du point $p = F(w)$, et de choisir les vecteurs tangents qui correspondent à e_x et e_y via la carte, c'est-à-dire les vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial x}(w), \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(w). \tag{22.40}$$

L'**élément infinitésimal de surface** sur M au point $p = F(w)$ est alors défini par

$$d\sigma_F = \|\frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w)\|dw, \tag{22.41}$$

et si la partie $A \subset M$ est entièrement contenue dans $F(W)$, nous définissons la **mesure** de A par

$$\mu_2(A) = \int_{F^{-1}(A)} d\sigma_F = \int_{F^{-1}(A)} \|\frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w)\|dw. \tag{22.42}$$

EqDefMuDeuxDF

Remarque 22.12.
Afin que cette définition ait un sens, nous devons prouver qu'elle ne dépend pas du choix de la carte F. En effet, les vecteurs $\partial_x F$ et $\partial_y F$ dépendent de la carte F, donc leur produit vectoriel (et sa norme) dépendent également de la carte F choisie. Il faudrait donc un petit miracle pour que le nombre $\mu_2(A)$ donné par (22.42) soit indépendant du choix de F. Nous allons bientôt voir comme cas particulier du théorème 22.16 que c'est en fait le cas. C'est-à-dire que si F et $\tilde{F}$ sont deux cartes qui contiennent A, alors

$$\int_{F^{-1}(A)} d\sigma_F = \int_{\tilde{F}^{-1}(A)} d\sigma_{\tilde{F}}. \tag{22.43}$$

22.3.1.1 Exemple : la mesure de la sphère

PROPooAFGSooJBZiuo

Proposition 22.13 ([1]).
L'aire de la sphère $S^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + R^2$ est $4\pi R^2$.

Démonstration. Nous allons calculer l'aire de la demi-sphère. L'application $F\colon B((0,0),R) \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \tag{22.44}$$

est une carte pour une demi-sphère. Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}. \tag{22.45}$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs tangents donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\alpha}e_1 + \frac{y}{\alpha}e_2 + e_3 \tag{22.46}$$

où $\alpha = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. En calculant la norme, nous trouvons

$$\| \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \| = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}, \tag{22.47}$$

et en passant aux coordonnées polaires, nous écrivons l'intégrale (22.42) sous la forme

$$\int_B \|\partial_x F \times \partial_y F\| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dr = 2\pi R^2, \tag{22.48}$$

EQooYGRFooKwEYfV

qui est bien la mesure de la demi-sphère. □

22.3.2 Intégrale sur une carte

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'une fonction sur une carte de la variété M.

DEFooZNFOooZPiBWY

Définition 22.14.
*Soit $F\colon W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, une carte pour une variété M. Soit A, une partie de $F(W)$ telle que $A = F(B)$ où $B \subset W$ est mesurable. Soit encore $f\colon A \to \mathbb{R}$, une fonction continue. L'**intégrale** de f sur A est le nombre*

$$\int_A f = \int_A f d\sigma_F = \int_{F^{-1}(A)} (f \circ F)(w) \| \frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w) \| dw \tag{22.49}$$

EqDefIntDeuxDF

Remarque 22.15.
L'intégrale (22.49) n'est pas toujours bien définie. Étant donné que F est C^1 et que f est continue, l'intégrande est continue. L'intégrale sera donc bien définie par exemple lorsque B est borné et si la fermeture $\bar{A}$ est un compact contenu dans $F(W)$.

Le théorème suivant montre que le travail que nous avons fait jusqu'à présent ne dépend en fait pas du choix de carte F effectué.

ThoIntIndepF

Théorème 22.16.
Soient $F\colon W \to F(W)$ et $\tilde{F}\colon \tilde{W} \to \tilde{F}(\tilde{W})$, deux cartes de la variété M. Soit une partie $A \subset F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})$ telle que $A = F(B)$ avec $B \subset W$ mesurable. Alors $A = \tilde{F}(\tilde{B})$ avec $\tilde{B} \subset \tilde{W}$ mesurable.

Si f est une fonction continue, et si $\int_A f d\sigma_F$ existe, alors $\int_A f d\sigma_{\tilde{F}}$ existe et

$$\int_A f d\sigma_F = \int_A f d\sigma_{\tilde{F}}. \tag{22.50}$$

22.3.3 Exemples

Intégrons la fonction $f(x,y,z)$ sur le carré $K =]0,1[\times]0,2[\times \{1\}$. La première carte que nous pouvons utiliser est

$$\begin{aligned} F\colon]0,1[\times]0,2[&\to K \\ (x,y) &\mapsto (x,y,1). \end{aligned} \tag{22.51}$$

Nous trouvons aisément les vecteurs tangents qui forment l'élément de surface :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{22.52}$$

donc $d\sigma_F = 1 \cdot dxdy$, et

$$\int_K f d\sigma_F = \int_{]0,1[\times]0,2[} f(x,y,1) \cdot 1 \cdot dxdy. \tag{22.53}$$

IntKSurcarrUn

Nous pouvons également utiliser la carte

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon]0,\frac{1}{2}[\times]0,6[&\to K \\ (\tilde{x},\tilde{y}) &\mapsto (2\tilde{x},\frac{\tilde{y}}{3},1). \end{aligned} \tag{22.54}$$

Les vecteurs tangents sont maintenant

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{22.55}$$

et nous avons donc $d\sigma_{\tilde{F}} = \|\frac{2}{3}e_3\| = \frac{2}{3}$. Cette fois, l'intégrale de f sur K s'écrit

$$\int_K f d\sigma_{\tilde{F}} = \int_{]0,\frac{1}{2}[\times]0,6[} f\big(2\tilde{x},\frac{\tilde{y}}{3},1\big) \cdot \frac{2}{3} \cdot d\tilde{x}d\tilde{y}. \tag{22.56}$$

Conformément au théorème 22.16, cette dernière intégrale est égale à l'intégrale (22.53) parce qu'il s'agit juste d'un changement de variable.

22.3.4 Orientation

Soient $F\colon W \to F(W)$ et $\tilde{F}\colon \tilde{W} \to \tilde{F}(\tilde{W})$, deux cartes de la variété M. Nous pouvons considérer la fonction $h = \tilde{F}^{-1} \circ F$, définie uniquement sur l'intersection des cartes :

$$h\colon F^{-1}\big(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})\big) \to \tilde{F}^{-1}\big(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})\big). \tag{22.57}$$

Nous disons que F et $\tilde{F}$ ont même **orientation** si

$$J_h(w) > 0 \tag{22.58}$$

pour tout $w \in F^{-1}\big(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})\big)$.

Considérons les deux cartes suivantes pour le même carré :

$$\begin{aligned} F\colon]0,1[\times]0,1[&\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (x,y,0) \end{aligned} \tag{22.59}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon]0,\frac{1}{2}[\times]0,\frac{1}{3}[&\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (2x,3y,0) \end{aligned} \tag{22.60}$$

Ici, $h(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{3}\right)$ et nous avons $J_h=\frac{1}{6}>0$. Ces deux cartes ont même orientation. Notez que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\times\frac{\partial F}{\partial y}=e_3, \tag{22.61}$$

tandis que

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}\times\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}=6e_3. \tag{22.62}$$

Les vecteurs normaux à le paramétrage pointent dans le même sens.

Si par contre nous prenons le paramétrage

$$\begin{aligned} G\colon]0,1[\times]0,1[&\to\mathbb{R}^3\\ (x,y)&\mapsto(x,(1-y),0), \end{aligned} \tag{22.63}$$

nous avons

$$\frac{\partial G}{\partial x}\times\frac{\partial G}{\partial y}=-e_3, \tag{22.64}$$

et si $g=G^{-1}\circ F$, alors $J_g=-1$.

L'orientation d'une carte montre donc si le vecteur normal à la surface pointe d'un côté ou de l'autre de la surface.

DEFooSWREooNdQpdA

Définition 22.17 (Variété orientable)**.**
*Une variété M est **orientable** si il existe un atlas de M tel que deux cartes quelconques ont toujours même orientation. Une variété est **orientée** lorsque qu'un tel choix d'atlas est fait.*

Proposition 22.18.
Soit M, une variété orientable et un atlas orienté $\{F_i\colon W_i\to\mathbb{R}^3\}$. Alors le vecteur unitaire

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\|} \tag{22.65}$$

ne dépend pas du choix de F parmi les F_i.

Démonstration. Considérons deux cartes F_1 et F_2, ainsi que l'application $h=F_2^{-1}\circ F_1$. Écrivons le vecteur $\partial_xF_1\times\partial_yF_1$ en utilisant $F_1=F_2\circ h$. D'abord, par la règle de dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial x}=\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial x}. \tag{22.66}$$

Après avoir fait le même calcul pour $\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial y}$, nous pouvons écrire

$$\partial_x(F_2\circ h)\times\partial_y(F_2\circ h)=(\partial_xh_1\partial_xF_2+\partial_xh_2\partial_yF_2)\times(\partial_yh_1\partial_xF_2+\partial_yh_2\partial_yF_2). \tag{22.67}$$

Dans cette expression, les facteurs ∂_ih_j sont des nombres, donc ils se factorisent dans les produits vectoriels. En tenant compte du fait que $\partial_xF_2\times\partial_xF_2=0$ et $\partial_yF_2\times\partial_yF_2=0$, ainsi que de l'antisymétrie du produit vectoriel, l'expression se réduit à

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\times\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)(\partial_xh_1\partial_yh_2-\partial_xh_2\partial_yh_2). \tag{22.68}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\times\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial x}\times\frac{\partial(F_2\circ h)}{\partial y}=\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\times\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\det J_h. \tag{22.69}$$

Donc, tant que J_h est positif, les vecteurs unitaires correspondants au membre de gauche et de droite sont égaux. □

Corolaire 22.19.
Si nous avons choisi un atlas orienté pour la variété M, nous avons une fonction continue $G\colon M\to\mathbb{R}^3$ telle que $\|G(p)\|=1$ pour tout $p\in M$. Cette fonction est donnée par

$$G(F(x,y))=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\|} \tag{22.70}$$

DefCarteGOrite

sur l'image de la carte F.

Démonstration. La fonction G est construite indépendamment sur chaque carte $F(W)$ en utilisant la formule (22.70). Cette fonction est une fonction bien définie sur tout M parce que nous venons de démontrer que sur $F_1(W_1) \cap F_2(W_2)$, les fonctions construites à partir de F_1 et à partir de F_2 sont égales. □

Il est possible que prouver, bien que cela soit plus compliqué, que la réciproque est également vraie.

PROPooGHXTooPrAESF

Proposition 22.20.
Une variété M de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ est orientable si et seulement si il existe une fonction continue $G\colon M \to \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $p \in M$, le vecteur $G(p)$ soit de norme 1 et normal à M au point p.

22.4 Longueur, aire, volumes etc.

Grâce à la mesure de Lebesgue (définition 16.251), nous avons la définition d'aires dans $\mathbb{R}^2$ et de volumes dans $\mathbb{R}^3$. Dans tout ce qui suit, nous considérons toujours la tribu de Lebesgue, la mesure de Lebesgue, et l'intégrale de Lebesgue correspondante.

DEFooPZRDooWbbBXy

Définition 22.21.
*L'**aire** de la partie mesurable S de $\mathbb{R}^2$ est le nombre*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_S \tag{22.71}$$

au sens de l'intégrale pour la mesure de Lebesgue de la fonction caractéristique de la partie S.

Définition 22.22.
*Le **volume** de la partie mesurable V de $\mathbb{R}^3$ est le nombre*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_V \tag{22.72}$$

au sens de l'intégrale pour la mesure de Lebesgue de la fonction caractéristique de la partie V.

Ceci est bien beau, mais ne permet pas de définir l'aire d'une surface dans $\mathbb{R}^3$, ni une longueur dans $\mathbb{R}^2$. Nous n'avons pas encore défini ce que nous appelons une surface dans $\mathbb{R}^3$, mais selon toute définition raisonnable, si S en est une, elle sera négligeable au sens de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^3$ et nous aurons toujours

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_S = 0. \tag{22.73}$$

L'objet de ce chapitre sera de donner un sens aux notions de longueurs dans $\mathbb{R}^2$, de surfaces dans $\mathbb{R}^3$ et d'y définir des intégrales permettant de définir longueurs et aires.

22.4.1 Quelques aires faciles

Nous nous souvenons de la proposition 12.58 qui donnait une bonne propriété du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Nous en donnons une autre.

LEMooVHGKooDjcfOL

Lemme 22.23.
L'aire d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ est nulle.

Démonstration. Nous considérons la mesure le Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ et une droite A dans $\mathbb{R}^2$.

La mesure dans $\mathbb{R}^2$ est donné par la définition 16.251 qui demande de calculer les intégrales (16.754) :

$$(\lambda \otimes \lambda)(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\big(A_2(x)\big) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\big(A_1(y)\big) d\lambda(y) \tag{22.74}$$

EQooUTAHooUyESca

où $A_2(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) \in A\}$ et $A_1(y) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) \in A\}$.

En vertu du lemme 14.153, cette droite est soit d'équation $y = ax + b$, soit d'équation $x = a$.

(1) **Droite $y = ax + b$** Dans ce cas, $A_2(x) = \{ax + b\}$. C'est un singleton et nous avons $\lambda\big(A_2(x)\big) = 0$ pour tout x. Nous avons donc $(\lambda \otimes \lambda)(A) = 0$.

(2) **Droite $x = a$** Nous utilisons la seconde possibilité laissée par l'égalité (22.74). L'ensemble A_1 est facile à déterminer : $A_1(y) = \{a\}$ pour tout y. Donc $\lambda\big(A_1(y)\big) = 0$ pour tout y, et l'intégrale est nulle.

□

Remarque 22.24.
Dans la preuve de 22.23, nous aurions pu faire le cas $x = a$ en utilisant la première formule. Dans ce cas nous serions partis de

$$A_2(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x = a \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases} \tag{22.75}$$

et donc de

$$\lambda\big(A_2(x)\big) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22.76}$$

Le lemme 16.174 nous dit que l'intégrale de A_2 sur $\mathbb{R}$ est nulle.

DEFooDTFCooCTdaDO

Définition 22.25.
*Soient a, u_1 et u_2 dans $\mathbb{R}^2$. Le **parallélogramme** basé en a formé sur u_1 et u_2 est l'ensemble*

$$\{a + su_1 + tu_2 \text{ tel que } 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1\}. \tag{22.77}$$

Assez souvent, nous supposerons que u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

PROPooAVVNooOOlSzr

Proposition 22.26.
L'aire[6] *du parallélogramme*[7] *basé en a et formé sur u et v (que nous supposons n'être pas colinéaires) est donnée par*

$$\|u \times v\| = |u_1v_2 - v_1u_2|. \tag{22.78}$$

Démonstration. En vertu de la définition 22.21 d'une aire, le nombre à calculer est $\int_D 1 d\lambda$ où

$$D_0 = \{a + xu + yv \text{ tel que } x \in [0,1], y \in [0,1]\}. \tag{22.79}$$

En posant

$$D = \{a + xu + yv \text{ tel que } x \in]0,1[, y \in]0,1[\}, \tag{22.80}$$

nous avons

$$\int_{D_0} d\lambda = \int_D d\lambda, \tag{22.81}$$

parce que ce que nous avons enlevé sont des segments de droites alors que les droites sont de mesure nulle (lemme 22.23).

Nous considérons la paramétrisation

$$\begin{aligned} \varphi\colon]0,1[\times]0,1[&\to D \\ (x,y) &\mapsto a + xu + yv. \end{aligned} \tag{22.82}$$

Pour le théorème 16.284, nous devons montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme. Comme nous sommes un peu fatigués, nous allons seulement prouver ϕ est injective[8]. Supposons que $\phi(x_1, x_2) = \phi(y_1, y_2)$. Alors

$$(x_1 - x_2)u + (y_1 - y_2)v = 0. \tag{22.83}$$

Si $y_1 - y_2 = 0$, alors $x_1 - x_2 = 0$ et on est bon. Sinon,

$$v = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}u \tag{22.84}$$

Vu que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, nous en déduisons que $x_1 - x_2 = 0$ et on est encore bon.

Nous utilisons la formule (16.860) de changement de variable avec la fonction ϕ. Le jacobien à calculer est

$$J = \det \begin{pmatrix} (\partial_x\phi_1)(x,y) & (\partial_x\phi_2)(x,y) \\ (\partial_y\phi_1)(x,y) & (\partial_y\phi_2)(x,y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = |u_1v_2 - v_1u_2|. \tag{22.85}$$

Le lien avec le produit vectoriel est un petit abus de notation : il s'agit du produit vectoriel entre $(u1, u2, 0)$ et $(v_1, v_2, 0)$ qui peut être obtenu en utilisant directement la formule de définition (12.136). □

[6] Définition 22.21.
[7] Définition 22.25.
[8] Pour le reste, écrivez l'inverse explicitement, et prouvez que c'est C^1. Si ça pose problème, écrivez-moi parce que je n'ai pas vérifié.

22.5 Autres théorèmes de points fixes

SECooDWMPooWZgzRZ

En termes de théorème de points fixes nous avons déjà vu le théorème de Picard 19.60. Voir aussi le thème 66.

22.5.1 Brouwer

subSecZCCmMnQ

Proposition 22.27.
Soit $f\colon [a,b]\to[a,b]$ une fonction continue. Alors f accepte un point fixe.

Démonstration. En effet si nous considérons $g(x)=f(x)-x$ alors nous avons $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ et $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. Si $g(a)$ ou $g(b)$ est nul, la proposition est démontrée ; nous supposons donc que $g(a)>0$ et $g(b)<0$. La proposition découle à présent du théorème des valeurs intermédiaires 11.92. □

Exemple 22.28.
La fonction $x\mapsto\cos(x)$ est continue entre $[-1,1]$ et $[-1,1]$. Elle admet donc un point fixe. Par conséquent il existe (au moins) une solution à l'équation $\cos(x)=x$. △

PROPooBRZCooLvscEf

Proposition 22.29 (Théorème de rétraction[669])**.**
Il n'existe pas d'applications $g\colon \overline{B(0,1)B(0,1)}\to$ qui soit de classe C^1 et qui soit l'identité sur $\partial B(0,1)$.

Démonstration. En plein d'étapes.

(1) **Définition de l'application F** Nous définissons la fonction

$$\begin{aligned}F\colon \overline{B(0,1)}\times[0,1]&\to\overline{B(0,1)}\\(x,t)&\mapsto(1-t)x+tg(x).\end{aligned}\tag{22.86}$$

Lorsque t est fixé, nous notons

$$\begin{aligned}F_t\colon \overline{B(0,1)}&\to\overline{B(0,1)}\\x&\mapsto F(x,t).\end{aligned}\tag{22.87}$$

Nous avons $F_0=\mathrm{Id}\,|_{\overline{B(0,1)}}$ et $F_1=g$. De plus, nous avons $F(x,t)=x$ pour tout $x\in\partial B(0,1)$ et pour tout $t\in[0,1]$.

(2) **définition de V** Nous posons[9]

$$\begin{aligned}V\colon[0,1]&\to\mathbb{R}\\t&\mapsto\int_{B(0,1)}\det(dF_t)_x dx.\end{aligned}\tag{22.88}$$

En ce qui concerne la différentielle de F_t, nous avons $F_t(x)=(1-t)x+tg(x)$. La différentielle de $x\mapsto x$ est $v\mapsto v$ (lemma 12.326), et donc

$$(dF_t)_x=(1-t)\,\mathrm{Id}+tdg_x.\tag{22.89}$$

Le déterminant de cela est un polynôme en t.

(3) **$V(1)=0$** Vu que $g(x)\in\partial B(0,1)$, nous avons $g(x)\cdot g(x)=\|g(x)\|^2=1$. En utilisant la proposition 12.342, pour tout $h\in\mathbb{R}^n$ nous avons :

$$2g(x)\cdot(dg_x)(h)=0.\tag{22.90}$$

Autrement dit, l'image de dg_x est dans $g(x)^\perp$, qui est de dimension plus petite que n (parce que $g(x)\neq 0$). Donc dg_x n'est pas de rang maximum ; bref : son déterminant est nul.

Vu que $F_1(x)=F(1,x)=g(x)$, nous avons bien $V(1)=0$.

(4) **$\det\Big((dF_t)_x\Big)>0$ si t est assez petit**

Supposons le contraire : pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $t_n\in\,]0,1/n]$ et $x_n\in\overline{B(0,1)}$ tels que $\det\big((dF_{t_n})_{x_n}\big)\leqslant 0$. La suite (x_n) étant dans le compact $\overline{B(0,1)}$, elle admet une sous-suite convergente : il existe une

[9] L'intégrale est définie en (16.539), et la mesure de Lebesgue en 16.251. Mais en principe, ça fait longtemps que vous êtes à l'aise avec ça.

application strictement croissante $\phi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et un $x\in\overline{B(0,1)}$ tels que $x_{\phi(n)}\to x$. Notez au passage que $t_{\phi(n)}\to 0$.

Pour tout n nous avons

$$\det\Big(\big(dF_{t_{\phi(n)}}\big)_{x_{\phi(n)}}\Big)\leqslant 0. \tag{22.91}$$

Vu que l'application $x\mapsto\det\big((dF_t)_x\big)$ est continue en t et en x, nous pouvons passer à la limite dans (22.91) :

$$\det\Big((dF_0)_x\Big)\leqslant 0. \tag{22.92}$$

Mais comme $dF_0=\mathrm{Id}$, nous avons en réalité $\det\big((dF_0)_x\big)>0$. Contradiction. Nous en déduisons que il existe $m_1>0$ tel que pour tout $t<m_1$ et pour tout $x\in\overline{B(0,1)}$, nous avons

$$\det\Big((dF_t)_x\Big)>0. \tag{22.93}$$

(5) **F_t est injective si t est assez petit**

Soient $t<1/N$ et $x,y\in\overline{B(0,1)}$ tels que $F(x,t)=F(y,t)$. Nous avons

$$0=F(x,t)-F(y,t)=(1-t)(x-y)+t\big(g(x)-g(y)\big). \tag{22.94}$$

En passant aux normes et en utilisant le théorème des accroissements finis 12.357,

$$(1-t)\|x-y\|=t\|g(x)-g(y)\|\leqslant tM\|x-y\| \tag{22.95}$$

où $M=\sup_{x\in\overline{B(0,1)}}\|dg_x\|$. En simplifiant par $\|x-y\|$, nous trouvons $tM/(1-t)\geqslant 1$ ou encore

$$t\geqslant\frac{1}{M+1}. \tag{22.96}$$

Autrement dit, dès que $t<1/(M+1)$, l'application F_t est injective.

(6) **t est assez petit**

Nous posons

$$\alpha=\min\{m_1,\frac{1}{M+1}\}. \tag{22.97}$$

Dès que $t<\alpha$,

- F_t est injective,
- $\det\Big((dF_t)_x\Big)>0$.

Cela étant dit, nous continuons la preuve.

(7) **Un peu de relations ensemblistes**

Nous considérons $t<\alpha$ et $x\in\partial B(0,1)$. Nous avons alors $F(x,t)=x$. Nous avons alors

$$F\big(\partial B(0,1),t\big)\cup B(0,1)=\overline{B(0,1)}, \tag{22.98}$$

qui est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Vu que F_t est injective, nous pouvons utiliser la formule ensembliste (1.17) :

$$\begin{aligned}F\big(B(0,1),t\big)&=F\big(\overline{B(0,1)},t\big)\setminus F\big(\partial B(0,1),t\big)&\text{(22.99a)}\\&=F\big(\overline{B(0,1)},t\big)\setminus\partial B(0,1)&\text{(22.99b)}\\&=F\big(\overline{B(0,1)},t\big)\cap B(0,1),&\text{(22.99c)}\end{aligned}$$

parce que $X\setminus\partial B(0,1)=X\cap B(0,1)$.

(8) **$F\big(B(0,1),t\big)$ est ouvert**

L'application F est de classe C^1 et injective. Donc $(dF_t)_x$ est continue et injective (proposition 12.310). Soit $x\in B(0,1)$. Par le théorème d'inversion locale 19.76 il existe un ouvert $V_x\subset B(0,1)$ et un ouvert W_x de $\mathbb{R}^n$ tels que $F_t\colon V_x\to W_x$ soit une bijection. Nous avons donc

$$F_t\big(B(0,1)\big)=\bigcup_{x\in B(0,1)}F_t(V_x)=\bigcup_{x\in B(0,1)}W_x. \tag{22.100}$$

Une union d'ouverts étant ouverte, nous en déduisons que $F\big(B(0,1),t\big)$ est ouvert.

(9) **Un peu de topologie induite** Nous considérons l'espace $B(0,1)$ avec la topologie induite de $\mathbb{R}^n$.

(9a) **C'est fermé**
La partie $F\big(\overline{B(0,1)},t\big)$ est l'image d'un compact par une fonction continue. C'est donc un compact (et donc fermé) par le théorème 9.298. Du coup la proposition 9.33 dit que la partie

$$F\big(B(0,1),t\big)=F\big(\overline{B(0,1)},t\big)\cap B(0,1) \tag{22.101}$$

est fermée dans $B(0,1)$.

(9b) **C'est ouvert**
La partie $F\big(B(0,1),t\big)$ est ouverte (voir (22.100)) et contenue dans $B(0,1)$ (voir (22.99)). Elle est donc un ouvert pour la topologie de $B(0,1)$.

(9c) **Et donc c'est ...**
La partie $F\big(B(0,1),t\big)$ est ouvert et fermée dans $B(0,1)$. Par connexité, la proposition 9.121(4) conclu que

$$F\big(B(0,1),t\big)=B(0,1). \tag{22.102}$$

(10) **Volume de la boule**

Nous sommes toujours avec $t<\alpha$. Nous avons donc $\det\big((dF_t)_x\big)>0$ pour tout x. Nous calculons le volume de la boule $B(0,1)$ en introduisant la fonction constante 1. En utilisant le changement de variables[10] $F_t\colon B(0,1)\to B(0,1)$:

$$\int_{B(0,1)}1dx=\int_{F_t^{-1}\left(B(0,1)\right)}\underbrace{(1\circ F_t)(x)}_{=1}|\det\big((dF_t)_x\big)|dx \tag{22.103a}$$

$$=\int_{B(0,1)}\det\big((dF_t)_x\big)dx \tag{22.103b}$$

$$=V(t). \tag{22.103c}$$

Nous venons de prouver que sur $t\in[0,\alpha[$, la fonction $V(t)$ est en réalité une constante égale au volume de la boule unité.

(11) **Et enfin...**

Vu que V est un polynôme et que V est constant sur un intervalle, V est constante partout. En particulier, $V(1)$ est encore égal au volume de le boule. Ah ben non parce que nous avions démontré plus haut que $V(1)=0$.

Contradiction, fin de l'histoire.

□

PropDRpYwv

Proposition 22.30 (Brouwer dans $\mathbb{R}^n$ version C^∞)**.**
Toute application $f\colon\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$ de classe C^∞ admet un point fixe.

Démonstration. Supposons que f ne possède pas de points fixes. Alors pour tout $x\in\overline{B(0,1)}$ nous considérons la demi-droite issue de $f(x)$ et passant par x (cette demi-droite existe parce que x et $f(x)$ sont supposés distincts). Cette demi-droite intersecte $\partial B(0,1)$ en un point que nous appelons $g(x)$. Prouvons que cette fonction est C^k dès que f est C^k (y compris avec $k=\infty$).

L'application

$$g\colon\overline{B(0,1)}\to\partial B(0,1) \tag{22.104}$$

est construite comme solution du système

$$\begin{cases}g(x)-f(x)=\lambda\big(x-f(x)\big) & (22.105a)\\ \|g(x)\|^2=1 & (22.105b)\\ \lambda\geqslant 0. & (22.105c)\end{cases}$$

En substituant nous obtenons l'équation

$$P_x(\lambda)=\|\lambda\big(x-f(x)\big)+f(x)\|^2-1=0, \tag{22.106}$$

[10] Théorème 16.284.

ou encore

$$\lambda^2\|x-f(x)\|^2+2\lambda\big(x-f(x)\big)\cdot f(x)+\|f(x)\|^2-1=0. \tag{22.107}$$

En tenant compte du fait que $\|f(x)\|<1$ (parce que les images de f sont dans $\mathcal{B}$), nous trouvons que $P_x(0)\leqslant 0$ et $P_x(1)\leqslant 0$. De même $\lim_{\lambda\to\infty}P_x(\lambda)=+\infty$. Par conséquent le polynôme de second degré P_x a exactement deux racines distinctes $\lambda_1\leqslant 0$ et $\lambda_2\geqslant 1$. La racine que nous cherchons est la seconde. Le discriminant est strictement positif, donc pas besoin d'avoir peur de la racine dans

$$\lambda(x)=\frac{-\big(x-f(x)\big)\cdot f(x)+\sqrt{\Delta_x}}{\|x-f(x)\|^2} \tag{22.108}$$

où

$$\Delta_x=4\Big(\big(x-f(x)\big)\cdot f(x)\Big)^2-4\|x-f(x)\|^2\big(\|f(x)\|^2-1\big). \tag{22.109}$$

Notons que la fonction $\lambda(x)$ est C^k dès que f est C^k ; et en particulier elle est C^∞ si f l'est.

En résumé la fonction g ainsi définie vérifie deux propriétés :

(1) $g\colon\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$

(2) elle est C^∞ ;

(3) elle est l'identité sur $\partial B(0,1)$.

Cela viole le théorème de contraction 22.29. Contradiction, fin de la preuve. □

22.31.
Voici comment on démontre le théorème de rétraction dans le cas C^∞ en utilisant Stokes.

La suite de la preuve consiste à montrer qu'une telle application $g\colon B\to\partial B$ ne peut pas exister[11]. Nous considérons une forme de volume ω sur ∂B : l'intégrale de ω sur ∂B est l'aire de ∂B qui est non nulle. Nous avons alors la contradiction suivante :

$$0<\int_{\partial B}\omega=\int_{\partial B}g^*\omega=\int_B d(g^*\omega)=\int_B g^*(d\omega)=0 \tag{22.110}$$

Justifications :

- L'intégrale $\int_{\partial B}\omega$ est l'aire de ∂B et est donc strictement positive.
- La fonction g est l'identité sur ∂B. Nous avons donc $\omega=g^*\omega$.
- Le lemme 29.96.
- La forme ω est de volume, par conséquent de degré maximum et $d\omega=0$.

Un des points délicats pour démontrer le théorème de Brouwer en version continue est de se ramener au cas de fonctions C^∞. Pour la régularisation par convolution, voir [670] ; pour celle utilisant le théorème de Weierstrass, voir [671].

ThoRGjGdO

Théorème 22.32 (Brouwer dans $\mathbb{R}^n$, version continue)**.**
Toute application continue[12] $\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$ *admet un point fixe.*

Démonstration. Soit une application continue $f\colon\overline{B(0,1)}\to\overline{B(0,1)}$. Nous commençons par définir une suite de fonctions

$$f_k(x)=\frac{f(x)}{1+\frac{1}{k}}. \tag{22.111}$$

Nous avons $\|f_k-f\|_\infty\leqslant\frac{1}{1+k}$ où la norme est la norme uniforme sur B. Par le théorème de Weierstrass 14.460 il existe une suite de fonctions $C^\infty(B,\mathbb{R})$ que nous nommons g_k telles que

$$\|g_k-f_k\|_\infty\leqslant\frac{1}{1+k}. \tag{22.112}$$

[11] Notons qu'il n'existe pas non plus de rétractions continues sur B, mais pour le montrer il faut utiliser d'autres méthodes que Stokes, ou alors présenter les choses dans un autre ordre.

[12] Une fonction continue sur un fermé de $\mathbb{R}^n$ est à comprendre pour la topologie induite.

Vérifions que cette fonction g_k soit bien une fonction qui prend ses valeurs dans B :

$$\|g_k(x)\| \leqslant \|g_k(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x)\| \tag{22.113a}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+k} + \frac{\|f(x)\|}{1+\frac{1}{k}} \tag{22.113b}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \tag{22.113c}$$
$$= 1. \tag{22.113d}$$

Par la version C^∞ du théorème (proposition 22.30), g_k admet un point fixe que l'on nomme x_k.

Étant donné que x_k est dans le compact B, quitte à prendre une sous-suite nous supposons que la suite (x_k) converge vers un élément $x \in B$. Nous montrons maintenant que x est un point fixe de f :

$$\|f(x) - x\| = \|f(x) - g_k(x) + g_k(x) - x_k + x_k - x\| \tag{22.114a}$$
$$\leqslant \|f(x) - g_k(x)\| + \underbrace{\|g_k(x) - x_k\|}_{=0} + \|x_k - x\| \tag{22.114b}$$
$$\leqslant \frac{1}{1+k} + \|x_k - x\|. \tag{22.114c}$$

En prenant le limite $k \to \infty$ le membre de droite tend vers zéro et nous obtenons $f(x) = x$. □

22.5.2 Théorème de Schauder

Une conséquence du théorème de Brouwer est le théorème de Schauder qui est valide en dimension infinie.

ThovHJXIU

Théorème 22.33 (Théorème de Schauder[672])**.**
Soit E, un espace vectoriel normé, K un convexe compact de E et $f\colon K \to K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe.

Démonstration. Étant donné que $f\colon K \to K$ est continue, elle y est uniformément continue. Si nous choisissons ϵ alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \epsilon \tag{22.115}$$

dès que $\|x - y\| \leqslant \delta$. La compacité de K permet de choisir un recouvrement fini par des ouverts de la forme

EqKNPUVR
$$K \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p} B(x_j, \delta) \tag{22.116}$$

où $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset K$. Nous considérons maintenant $L = \text{Span}\{f(x_j) \text{ tel que } 1 \leqslant j \leqslant p\}$ et

$$K^* = K \cap L. \tag{22.117}$$

Le fait que K et L soient convexes implique que K^* est convexe. L'ensemble K^* est également compact parce qu'il s'agit d'une partie fermée de K qui est compact (lemme 9.137). Notons en particulier que K^* est contenu dans un espace vectoriel de dimension finie, ce qui n'est pas le cas de K.

Nous allons à présent construire une sorte de partition de l'unité subordonnée au recouvrement (22.116) sur K (voir le théorème 29.89). Nous commençons par définir

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geqslant \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22.118}$$

pour chaque $1 \leqslant j \leqslant p$. Notons que ψ_j est une fonction positive, nulle en-dehors de $B(x_j, \delta)$. En particulier la fonction suivante est bien définie :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)} \tag{22.119}$$

et nous avons $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$. Les fonctions φ_j sont continues sur K et nous définissons finalement

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) f(x_j). \tag{22.120}$$

Pour chaque $x \in K$, l'élément $g(x)$ est une combinaison des éléments $f(x_j) \in K^*$. Étant donné que K^* est convexe et que la somme des coefficients $\varphi_j(x)$ vaut un, nous avons que g prend ses valeurs dans K^* par la proposition 13.29.

Nous considérons seulement la restriction $g\colon K^* \to K^*$ qui est continue sur un compact contenu dans un espace vectoriel de dimension finie. Le théorème de Brouwer 22.32 nous enseigne alors que g a un point fixe. Nous nommons y ce point fixe. Notons que y est fonction du ϵ choisi au début de la construction, via le δ qui avait conditionné la partition de l'unité.

Nous avons [EqoXuTzE]

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) && (22.121a)\\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) && (22.121b)\\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \big(f(y) - f(x_j)\big). && (22.121c) \end{aligned}$$

Par construction, $\varphi_j(y) \neq 0$ seulement si $\|y - x_j\| \leqslant \delta$ et par conséquent seulement si $\|f(y) - f(x_j)\| \leqslant \epsilon$. D'autre part nous avons $\varphi_j(y) \geqslant 0$; en prenant la norme de (22.121) nous trouvons

$$\|f(y) - y\| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \|\varphi_j(y)\big(f(y) - f(x_j)\big)\| \leqslant \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\epsilon = \epsilon. \tag{22.122}$$

Nous nous souvenons maintenant que y était fonction de ϵ. Soit y_m le y qui correspond à $\epsilon = 2^{-m}$. Nous avons alors

$$\|f(y_m) - y_m\| \leqslant 2^{-m}. \tag{22.123}$$

L'élément y_m est dans K^* qui est compact, donc quitte à choisir une sous-suite nous pouvons supposer que y_m est une suite qui converge vers $y^* \in K$[13]. Nous avons les majorations

$$\|f(y^*) - y^*\| \leqslant \|f(y^*) - f(y_m)\| + \|f(y_m) - y_m\| + \|y_m - y^*\|. \tag{22.124}$$

Si m est assez grand, les trois termes du membre de droite peuvent être rendus arbitrairement petits, d'où nous concluons que

$$f(y^*) = y^* \tag{22.125}$$

et donc que f possède un point fixe. □

22.5.3 Théorème de Cauchy-Arzella

[ThoHNBooUipgPX]

Théorème 22.34 (Cauchy-Arzela[587]).
Nous considérons le système d'équation différentielles [EqTXlJdH]

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & (22.126a)\\ y(t_0) = y_0. & (22.126b) \end{cases}$$

avec $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, continue où U est ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe un voisinage fermé V de t_0 sur lequel une solution C^1 du problème (22.126) existe.

Idée de la démonstration. Nous considérons $M = \|f\|_\infty$ et K, l'ensemble des fonctions M-lipschitziennes sur U. Nous prouvons que $(K, \|.\|_\infty)$ est compact. Ensuite nous considérons l'application

$$\begin{aligned} &\Phi\colon K \to K\\ &\Phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, f(u)\big)du. \end{aligned} \tag{22.127}$$

Après avoir prouvé que Φ était continue, nous concluons qu'elle a un point fixe par le théorème de Schauder 22.33. □

Remarque 22.35.
Quelques remarques.

[13] Notons que même dans la sous-suite nous avons $\|f(y_m) - y_m\| \leqslant 2^{-m}$, avec le même « m » des deux côtés de l'inégalité.

(1) Les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et Cauchy-Arzella donnent des existences pour des équations différentielles du type $y' = f(t, y)$. Et si nous avons une équation du second ordre ? Alors il y a la méthode de la réduction de l'ordre qui permet de transformer une équation différentielle d'ordre élevé en un système d'ordre 1.

(2) Ces théorèmes posent des *conditions initiales* : la valeur de y est donnée en un point, et la méthode de la réduction de l'ordre permet de donner l'existence de solutions d'un problème d'ordre k en donnant les valeurs de $y(0)$, $y'(0)$, ...$y^{(k-1)}(0)$. C'est-à-dire de la fonction et de ses dérivées en un point. Rien n'est dit sur l'existence de *conditions aux bords*.

Ces deux points sont illustrés dans les exemples 34.20 et 34.21.

22.5.4 Théorème de Markov-Kakutani

Le théorème de Markov-Kakutani, nous donne l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe compact.

ThoeJCdMP

Théorème 22.36 (Markov-Katutani[673]).
Soit E un espace vectoriel normé et L, une partie non vide, convexe, fermée et bornée de E'. Soit $T : L \to L$ une application linéaire et continue. Alors T a un point fixe.

Démonstration. Nous considérons un point $x_0 \in L$ et la suite

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T^i x_0. \tag{22.128}$$

La somme des coefficients devant les $T^i(x_0)$ étant 1, la convexité de L montre que $x_n \in L$. Nous considérons l'ensemble

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_m \text{ tel que } m \geqslant n\}}. \tag{22.129}$$

Le lemme 9.374 indique que C n'est pas vide, et de plus il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément $x \in C$. Nous avons

$$\lim_{n \to \infty} x_{\sigma(n)}(v) = x(v) \tag{22.130}$$

pour tout $v \in E$. Montrons que x est un point fixe de T. Nous avons[14]

$$(Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)})(v) = \frac{1}{1+\sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} (T^{i+1}x_0)(v) - \frac{1}{1+\sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} (T^i x_0)(v) \tag{22.131a}$$

$$= \frac{1}{1+\sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} (T^{i+1}x_0 - T^i x_0)(v) \tag{22.131b}$$

$$= \frac{1}{1+\sigma(k)} (T^{i+\sigma(k)+1}x_0 - x_0)(v) \qquad \text{somme télescopique.} \tag{22.131c}$$

En prenant la norme,

$$\|(Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)})v\| = \frac{1}{1+\sigma(k)} \left\|T^{\sigma(k)+1}x_0(v) - x_0(v)\right\| \tag{22.132a}$$

$$\leqslant \frac{2M}{\sigma(k)+1} \tag{22.132b}$$

où $M = \sum_{y \in L} \|y(v)\| < \infty$ parce que L est borné. En prenant $k \to \infty$ nous trouvons

$$\lim_{k \to \infty} \big(Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)}\big)v = 0, \tag{22.133}$$

ce qui signifie que $Tx = x$ parce que T est continue. □

[14] Je ne vois pas comment fonctionne ce passage si on suppose que T est affine et non linéaire.

22.6 Intégrales curvilignes

secintcurvi

22.6.1 Chemins de classe C^1

DEFooQTAWooOCmSJo

Définition 22.37 ([674]).
*Soit $p, q \in \mathbb{R}^n$. Un **chemin** C^1 **par morceaux** joignant p à q est une application continue*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \tag{22.134}$$

vérifiant :

(1) L'application $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est continue.

(2) Les extrémités : $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$

(3) Il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r = b$ telle que la restriction de γ sur chaque fermé $[t_i, t_{i+1}]$ est de classe C^1.

Pour être d'accord sur les définitions, quand on dit qu'une application est C^1 sur un fermé, c'est qu'elle est C^1 sur ce fermé, avec la topologie de ce fermé (induite[15] de $\mathbb{R}$). Autrement dit, toutes les limites et tous les ouverts qui interviennent dans la notion de « être C^1 » sont à prendre dans la topologie du fermé $[a_i, b_i]$.

Remarque 22.38.
Si a et b sont des points de $\mathbb{R}^n$, on peut créer le chemin particulier

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (1 - t)a + tb \tag{22.135}$$

qui relie ces points par un segment de droite.

Il existe des fonctions C^1 par morceaux qui ne sont pas C^1.

Proposition 22.39.
L'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & si\ x \leqslant 0 \\ 2x & si\ x > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{22.136}$$

est C^1 par morceaux.
Elle n'est pas de classe C^1.

Démonstration. Le fait que f ne soit pas de classe C^1 est immédiat parce que sa dérivée n'est pas définie en zéro.

Pour montrer que f est C^1 par morceaux, nous définissons les deux fonctions

$$\begin{aligned} f_1 :]-\infty, 0] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned} \tag{22.137}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 : [0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x. \end{aligned} \tag{22.138}$$

Nous calculons la dérivée de f_1 en $x = 0$. C'est par définition

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}. \tag{22.139}$$

Attention : cette limite est à comprendre au sens de la topologie de $]-\infty, 0]$. Nous allons montrer que cette limite vaut 1, en remontant aux définitions pour le sport.

Posons $g(x) = f(x)/x$. Si V est un voisinage de 1 dans $\mathbb{R}$, il existe une boule $B(1, r)$ qui contient V. Nous allons trouver un $\epsilon > 0$ tel que $g\big(B(0, \epsilon) \setminus \{0\}\big) \subset B(1, r)$. Attention : à gauche c'est une boule au sens de la topologie induite. Au sens de la topologie normale, nous cherchons $\epsilon > 0$ tel que

$$g\Big(\big(B(0, \epsilon) \cap]-\infty, 0]\big) \setminus \{0\}\Big) \tag{22.140}$$

[15] Topologie induite, définition 9.30.

Bref, pour tout x dans cette boule, nous devons avoir $|g(x)-1|<r$. Vu que $x\in\,]-\infty,0]\setminus\{0\}$, nous avons $g(x)=1$ pour tout x. Et voilà, n'importe que ϵ fait l'affaire.

Nous avons prouvé que la dérivée de f_1 est donnée par

$$\begin{aligned} f_1'\colon\,]-\infty,0]&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto 1. \end{aligned} \tag{22.141}$$

Elle est continue. Nous laissons la démonstration de la continuité de f_1' au lecteur ; attention : continuité pour la topologie induite, toujours. Bref,f_1 est de classe C^1.

Nous démontrons de même que f_2 est de classe C^2 et que $f_2'(x)=2$ pour tout x. □

22.6.2 Intégrer une fonction

DEFooFAYUooCaUdyo

Définition 22.40.
*Soit $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et $\gamma:[a,b]\to D$ un chemin C^1. On définit **l'intégrale de f sur γ** par*

$$\int_\gamma f\,ds=\int_\gamma f=\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt. \tag{22.142}$$

EqhJGRcb

Note : dans le cadre de l'analyse complexe, ce n'est pas exactement cette définition. Voir 28.6.

Exemple 22.41.
Soit l'hélice

$$\begin{aligned} \sigma\colon[0,2\pi]&\to\mathbb{R}^3\\ t&\mapsto\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{22.143}$$

et la fonction $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. L'intégrale de f sur σ est

$$\begin{aligned} \int_\sigma f&=\int_0^{2\pi}(\cos^2t+\sin^2t+t^2)\|\sigma'(t)\|dt\\ &=\int_0^{2\pi}(1+t^2)\sqrt{2}dt\\ &=\sqrt{2}\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}\\ &=\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right). \end{aligned} \tag{22.144}$$

△

Remarque 22.42.
Si $f=1$, alors nous tombons sur

$$\int_\gamma ds=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt, \tag{22.145}$$

Nous verrons par le théorème 23.9 que cette dernière intégrale est la longueur de la courbe. Il est un fait général que l'intégrale de la fonction 1 sur un ensemble en donne la « mesure ». Cela est à mettre en rapport avec le lemme 16.177 en gardant en tête que $\int_\gamma 1$ n'est pas la mesure de l'image de γ dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 22.43 (Indépendence en le paramétrage)**.**
La valeur de l'intégrale de f sur γ ne dépend pas du paramétrage (équivalent ou pas) choisi.

Démonstration. Soit donc un chemin $\gamma\colon[c,d]\to\mathbb{R}^3$ ainsi que $\varphi\colon[c,d]\to[a,b]$, un reparamétrage de classe C^1, strictement monotone et le chemin σ défini par $\gamma(s)=\sigma\big(\varphi(s)\big)$ avec $s\in[c,d]$. En supposant que $\varphi'(s)\geqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned} I=\int_\gamma f&=\int_c^d f\big(\gamma(s)\big)\|\gamma'(s)\|ds\\ &=\int_c^d f\Big(\sigma\big(\varphi(s)\big)\Big)\|\sigma'\big(\varphi(s)\big)\|\,|\varphi'(s)|ds. \end{aligned} \tag{22.146}$$

Pour cette intégrale, nous posons $t = \varphi(s)$, et par conséquent $dt = \varphi'(s)ds$. Étant donné que $\varphi'(s) \geqslant 0$, nous pouvons supprimer les valeurs absolues, et obtenir

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f\big(\sigma(t)\big)\|\sigma'(t)\|dt \\ &= \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\|\sigma'(t)\|dt \\ &= \int_\sigma f. \end{aligned} \tag{22.147}$$

Essayez de faire le cas $\varphi'(s) \leqslant 0$. □

RemiqswPd

Remarque 22.44.
Attention : les intégrales sur des chemins dans $\mathbb{C}$ ne sont la même chose. En effet $\mathbb{C}$ doit être souvent plutôt traité comme $\mathbb{R}$ que comme $\mathbb{R}^2$. Si γ est un chemin dans $\mathbb{C}$, l'intégrale

$$\int_\gamma f \tag{22.148}$$

doit être comprise comme une généralisation de $\int_a^b f(x)dx$ et non comme l'intégrale sur un chemin. La différence est qu'en retournant les bornes d'une intégrale usuelle sur $\mathbb{R}$ on change le signe, alors qu'en retournant un chemin dans $\mathbb{R}^2$, on ne change pas. Bref, la définition est que si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, alors

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt, \tag{22.149}$$

sans valeur absolue autour de $\gamma'(t)$.

22.6.3 Intégrer un champ de vecteurs

DEFooSHHFooVdsxMf

Définition 22.45.
*Un **champ de vecteur** est une application $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On définit l'intégrale de G sur un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ par*

$$\int_\gamma G \stackrel{def}{=} \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt.$$

Remarque 22.46.
Cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi, mais le signe change selon le sens du chemin.

22.6.4 Intégrer une forme différentielle sur un chemin

La formule d'intégration d'un champ de vecteur[16],

$$\int_\gamma G = \int_{[a,b]} \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt, \tag{22.150}$$

contient quelque chose d'intéressant : la combinaison $\langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$. Cette combinaison sert à transformer le vecteur tangent $\gamma'(t)$ en un nombre en utilisant le produit scalaire avec le vecteur $G(\gamma(t))$.

Si G est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous pouvons utiliser l'isomorphisme musical (définition 14.659)

$$\begin{aligned} G_x^\flat\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle G(x), v\rangle \end{aligned} \tag{22.151}$$

pour écrire de façon plus compacte :

$$\int_\gamma G = \int_{[a,b]} G^\flat_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt. \tag{22.152}$$

DEFooRMHGooFtMEPB

Définition 22.47.
*Soient une forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^n$ et un chemin de classe C^1 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. L'**intégrale** de ω sur γ est définie par*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\gamma'(t)dt \tag{22.153}$$

EqRFIZvEc

[16] Définition 22.45.

Remarque 22.48.
Cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi, mais le signe change selon le sens du chemin.

22.6.5 Intégration d'une forme différentielle sur un chemin

Les formes intégrales que nous avons déjà vues sont celles de fonctions et de champs de vecteur sur des chemins. Si $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ est le chemin, les formules sont

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_{[a,b]} f\big(\gamma(t)\big)\|\gamma'(t)\|dt\\ \int_\gamma G &= \int_{[a,b]}\langle G\big(\gamma(t)\big),\gamma'(t)\rangle dt.\end{aligned}\tag{22.154}$$

Dans les deux cas, le principe est que nous disposons de quelque chose (la fonction f ou le vecteur G), et du vecteur tangent $\gamma'(t)$, et nous essayons d'en tirer un nombre que nous intégrons. Lorsque nous avons une 1-forme, la façon de l'utiliser pour produire un nombre avec le vecteur tangent est évidemment d'appliquer la 1-forme au vecteur tangent. La définition suivante est donc naturelle.

Définition 22.49.
*Soit $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$, un chemin de classe C^1 tel que son image est contenue dans le domaine D. Si ω est une 1-forme différentielle sur D, nous définissons l'**intégrale de ω le long de** γ le nombre*

$$\begin{aligned}\int_\gamma\omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt\\ &= \int_a^b\Big[a_1\big(\gamma(t)\big)\gamma_1'(t)+\ldots+a_n\big(\gamma(t)\big)\gamma_n'(t)\Big]dt.\end{aligned}\tag{22.155}$$

Cette définition est une bonne définition parce que si on change le paramétrage du chemin, on ne change pas la valeur de l'intégrale, c'est la proposition suivante.

Proposition 22.50.
Si γ et β sont des chemins équivalents, alors

$$\int_\gamma\omega=\int_\beta\omega,\tag{22.156}$$

c'est-à-dire que l'intégrale est invariante sous les reparamétrages du chemin.

Démonstration. Deux chemins sont équivalents quand il existe un difféomorphisme C^1 $h\colon[a,b]\to[c,d]$ tel que $\gamma(t)=(\beta\circ h)(t)$. En remplaçant γ par $(\beta\circ h)$ dans la définition de $\int_\gamma\omega$, nous trouvons

$$\int_a^b\omega_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt=\int_a^b\omega_{(\beta\circ h)(t)}\big((\beta\circ h)'(t)\big)dt.\tag{22.157}$$

Un changement de variable $u=h(t)$ transforme cette dernière intégrale en $\int_\beta\omega$, ce qui prouve la proposition. □

Remarque 22.51.
Si γ est une somme de chemins, $\gamma=\gamma^{(1)}+\ldots+\gamma^{(n)}$, où chacun des $\gamma^{(i)}$ est un chemin, alors

$$\int_\gamma\omega=\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i}\omega\tag{22.158}$$

parce que ω est linéaire.

Remarque 22.52.
Si $-\gamma$ est le chemin

$$\begin{aligned}-\gamma\colon[a,b]&\to\mathbb{R}^n\\ t&\mapsto\gamma\big(b-(t-a)\big),\end{aligned}\tag{22.159}$$

alors

$$\int_{-\gamma}\omega=-\int_\gamma\omega,\tag{22.160}$$

c'est-à-dire que si l'on parcours le chemin en sens inverse, alors on change le signe de l'intégrale.

L'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin est compatible avec l'intégrale déjà connue d'un champ de vecteur sur le chemin parce que si G est un champ de vecteurs,

$$\int_\gamma G^\flat = \int_\gamma G. \tag{22.161}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_\gamma G^\flat &= \int_a^b G^\flat_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \\ &= \int_a^b \big[G_1(\gamma(t))dx_1 + \ldots + G_n(\gamma(t))dx_n\big]\big(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)\big) \\ &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \\ &= \int_\gamma G.\end{aligned} \tag{22.162}$$

Proposition 22.53.
Soit $\omega = df$, une 1-forme exacte et continue sur le domaine D. Alors la valeur de $\int_\gamma df$ ne dépend que des valeurs de f aux extrémités de γ.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int_\gamma df &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\gamma(t)\big)\gamma_i'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big((f\circ\gamma)(t)\Big)dt \\ &= (f\circ\gamma)(b) - (f\circ\gamma(a)).\end{aligned} \tag{22.163}$$

□

22.6.6 Interprétation physique : travail

Définition 22.54 ([675]).
*Une force $F\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est **conservative** si elle dérive d'un potentiel, c'est-à-dire si il existe une fonction $V \in C^1(D, \mathbb{R})$ telle que*

$$F(x) = (\nabla V)(x). \tag{22.164}$$

Étant donné que F est un champ de vecteurs, nous avons une forme différentielle associée $F^\flat$,

$$F^\flat_x\colon v \mapsto \langle F(x), v\rangle. \tag{22.165}$$

Lemme 22.55.
Le champ F est conservatif si et seulement si la 1-forme différentielle $F^\flat$ est exacte.

Démonstration. Supposons que la force F soit conservative, c'est-à-dire qu'il existe une fonction V telle que $F = \nabla V$. Dans ce cas, il est facile de prouver que $F^\flat$ est exacte et est donnée par $F^\flat_x = dV(x)$. En effet,

$$\begin{aligned}F^\flat_x(v) &= \langle F(x), v\rangle \\ &= F_1(x)v_1 + \ldots + F_n(x)v_n \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)v_1 + \ldots \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)v_n \\ &= dV(x)v.\end{aligned} \tag{22.166}$$

Pour le sens inverse, supposons que $F^\flat$ soit exacte. Dans ce cas, nous avons une fonction V telle que $F^\flat = dV$. Il est facile de prouver qu'alors, $F = \nabla V$. □

En résumé, nous avons deux façons équivalentes d'exprimer que la force F dérive du potentiel V : soit nous disons $F = \nabla V$, soit nous disons $F^\flat = dV$.

Proposition 22.56.
Si F est une force conservative, alors le travail[17] *de F lors d'un déplacement ne dépend pas du chemin suivi.*

[17] Voir [676].

Démonstration. Le travail d'une force le long d'un chemin n'est autre que l'intégrale de la force le long du chemin, et le calcul est facile :

$$W_\gamma(F) = \int_\gamma F = \int_\gamma dV = V\big(\gamma(b)\big) - V\big(\gamma(a)\big). \tag{22.167}$$

Donc si β est un autre chemin tel que $\beta(a) = \gamma(a)$ et $\beta(b) = \gamma(b)$, nous avons $W_\beta(F) = W_\gamma(F)$. □

22.6.7 Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en 2D

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est tel que ∂D est une variété de dimension 1 et tel que D accepte un champ de vecteur normal extérieur unitaire ν. Si nous voulons définir

$$\int_{\partial D} G, \tag{22.168}$$

le mieux est de prendre un paramétrage $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et de calculer

$$\int_0^1 \langle G_{\gamma(t)}, \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\rangle dt. \tag{22.169}$$

Hélas, cette définition ne fonctionne pas parce que son signe dépend du sens du paramétrage γ. Si le paramétrage tourne dans l'autre sens, il y a un signe de différence.

Nous allons définir

$$\int_{\partial D} G = \int_0^1 \langle G_{\gamma(t)}, T(t)\rangle dt \tag{22.170}$$

où $T(t) = \dot\gamma(t)/\|\dot\gamma(t)\|$ et où γ est choisi de telle façon que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ amène ν sur T. Cela fixe le choix de sens.

Ce choix de sens aura des répercussions dans l'application de la formule de Green et du théorème de Stokes.

22.6.8 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 2D

Nous n'allons pas chercher très loin :

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \omega^\sharp, \tag{22.171}$$

c'est-à-dire que l'intégrale de la forme différentielle est celle du champ de vecteur associé. Le membre de droite est défini par (22.170), avec le choix d'orientation qui va avec.

22.6.9 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 3D

Nous allons maintenant intégrer une forme différentielle sur certains chemins fermés dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F(D) \subset \mathbb{R}^3$, une variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ où $F\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est la carte. Nous supposons que D vérifie les hypothèses de la formule de Green. Alors nous définissons

$$\int_{F(\partial D)} \omega = \int_{\partial D} F^*\omega \tag{22.172}$$

où $F^*\omega$ est la forme différentielle définie sur ∂D par $(F^*\omega)(v) = \omega\big(dF(v)\big)$.

Cette définition est très abstraite, mais nous n'allons, en pratique, jamais l'utiliser, grâce au théorème de Stokes.

22.6.10 Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en 3D

Encore une fois, nous n'allons pas chercher bien loin :

$$\int_{F(\partial D)} G = \int_{F(\partial D)} G^\flat \tag{22.173}$$

où $G^\flat$ est la forme différentielle associée au champ de vecteur. Le membre de droite est défini par l'équation (22.172).

22.6.11 Dérivées croisées et forme différentielle exacte

Nous considérons le problème suivant : trouver une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que [Eqskfgfnr]

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y) & (22.174a) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y) & (22.174b) \end{cases}$$

où a et b sont des fonctions supposées suffisamment régulières. Nous savons que ce problème n'a pas de solutions lorsque

$$\frac{\partial a}{\partial y} \neq \frac{\partial b}{\partial x} \tag{22.175}$$

parce que cela impliquerait $\partial^2_{xy} f \neq \partial^2_{yx} f$. Nous sommes en droit de nous demander si la condition

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \tag{22.176}$$

impliquerait qu'il existe une solution au problème (22.174). La réponse est oui, et nous allons brièvement la justifier. Pour plus de détails nous vous demandons de chercher un peu. La référence [677] peut être utile.

Proposition 22.57.
Si a et b sont des fonctions qui satisfont à la condition

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \tag{22.177}$$

alors la fonction

$$f(x,y) = \int_0^x a(t,0)dt + \int_0^y b(x,t)dt \tag{22.178}$$ [EqIlbTaT]

répond au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y) & (22.179a) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y) & (22.179b) \end{cases}$$

La preuve qui suit n'en est pas complètement une parce qu'il manque des justifications, notamment au moment de permuter la dérivée et l'intégrale.

Démonstration. La clef de la preuve est le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt = f(x,y) \tag{22.180}$$

et son pendant par rapport à y :

$$\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt = f(x,y). \tag{22.181}$$

En appliquant ces versions du théorème fondamental, nous obtenons immédiatement.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y). \tag{22.182}$$

En ce qui concerne la dérivée par rapport à y,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a(x,0) + \int_0^y \frac{\partial b}{\partial x}(x,t)dt & (22.183a) \\ &= a(x,0) + \int_0^y \frac{\partial a}{\partial y}(x,t)dt & (22.183b) \\ &= a(x,0) + [a(x,t)]_{t=0}^{t=y} & (22.183c) \\ &= a(x,y). & (22.183d) \end{aligned}$$

□

En ce qui concerne l'unicité, supposons que f et g soient deux solutions au problème. L'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{22.184}$$

implique que

$$f(x,y) = g(x,y) + C(y) \tag{22.185}$$

où C est une fonction seulement de y. L'autre équation implique

$$f(x,y) = g(x,y) + D(x) \tag{22.186}$$

où D est seulement une fonction de x. En égalisant nous voyons que les fonctions C et D doivent être des constantes.

Par conséquent la fonction f est donnée à une constante près et en réalité la fonction (22.178) est suffisante pour répondre au problème de trouver toutes les fonctions dont les dérivées partielles sont données par les fonctions a et b.

La fonction f ainsi créée est un **potentiel** pour le champ de force

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}. \tag{22.187}$$

Notez que ce champ de vecteurs est le gradient de f. La question initiale aurait donc pu être posée en les termes suivants : trouver une fonction f dont le gradient est donné par

$$\nabla f = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}. \tag{22.188}$$

22.7 Surfaces paramétrées

De la même façon qu'un chemin dans $\mathbb{R}^3$ est décrit comme une application $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, une surface dans $\mathbb{R}^3$ sera vue comme une application $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Une **surface paramétrée** dans $\mathbb{R}^3$ est une application

$$\begin{aligned} \varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22.189}$$

Nous allons parler de la « surface φ » pour désigner l'image de φ dans $\mathbb{R}^3$.

Si on fixe le paramètre $u = u_0$, alors l'application

$$v \mapsto \varphi(u_0, v) \tag{22.190}$$

est un chemin dans la surface. Un vecteur tangent à ce chemin sera tangent à la courbe :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}. \tag{22.191}$$

De même, en fixant v_0, on considère le chemin

$$u \mapsto \varphi(u, v_0). \tag{22.192}$$

Le vecteur tangent à ce chemin est égalent tangent à la surface :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \tag{22.193}$$

DefSurfReguliere

Définition 22.58.
Nous disons que la surface est ***régulière*** *si les vecteurs $\partial_u\varphi(u_0,v_0)$ et $\partial_v\varphi(u_0,v_0)$ sont non nuls et non colinéaires.*

Si la surface est régulière, les vecteurs tangents au paramétrage forment le plan tangent à la surface au point $\varphi(u_0, v_0)$.

Un vecteur orthogonal à la surface (et donc au plan tangent) est donc donné par le produit vectoriel :

$$n(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0). \tag{22.194}$$

L'équation du plan tangent est alors obtenue par

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot n(u_0, v_0) = 0 \tag{22.195}$$

EqPlanTgSurfacePara

où $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$.

22.7.1 Graphe d'une fonction

Soit la fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le graphe de f est l'ensemble des points de la forme

$$\big(x, y, f(x, y)\big) \tag{22.196}$$

tels que $(x, y) \in D$. Cela est une surface paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi\colon D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22.197}$$

Les vecteurs tangents sont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{22.198}$$

La surface est donc partout régulière parce que ces deux vecteurs ne sont jamais nuls ou colinéaires. Un vecteur normal à cette surface au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par le produit vectoriel

$$n = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & \partial_x f(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \partial_y f(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) e_x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) e_y + e_z. \tag{22.199}$$

En suivant l'équation (22.195), nous avons l'équation suivante pour le plan :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{22.200}$$

c'est-à-dire

$$-(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0, \tag{22.201}$$

ce qui revient à

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{22.202}$$

Nous retrouvons donc l'équation du plan tangent à un graphe.

Exemple 22.59.
La sphère de rayon R peut être paramétrée par les angles sphériques :

$$\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin\theta \cos\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\theta \end{pmatrix} \tag{22.203}$$

avec $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Tentons d'en trouver le plan tangent au point $(x,y,z)=(R,0,0)$. Un petit dessin nous montre que c'est un plan vertical d'équation $x=R$. Montrons cela en utilisant la théorie que nous venons de découvrir. D'abord le point $(R,0,0)$ correspond à $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ et $\varphi=0$. Les vecteurs tangents sont

$$T_\theta=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(R,\frac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix}R\cos\theta\cos\varphi\\R\cos\theta\sin\varphi\\-R\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-R\end{pmatrix},\tag{22.204}$$

et

$$T_\varphi=\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}(R,\frac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix}-R\sin\theta\sin\varphi\\R\sin\theta\cos\varphi\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\R\\0\end{pmatrix}.\tag{22.205}$$

Cela sont de toute évidence bien les deux vecteurs tangents à la sphère au point $(x,y,z)=(R,0,0)$. Le vecteur normal est

$$\begin{vmatrix}e_x&e_y&e_z\\0&0&-R\\0&R&0\end{vmatrix}=R^2e_x.\tag{22.206}$$

Ici encore, nous avons le vecteur que nous attendions sur un dessin. L'équation du plan tangent est maintenant

$$\begin{pmatrix}x-R\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R^2\\0\\0\end{pmatrix}=0,\tag{22.207}$$

c'est-à-dire $R^2(x-R)=0$ et donc $x=R$. △

22.7.2 Intégrale sur une partie de $\mathbb{R}^m$

Soit M une variété de dimension n dans $\mathbb{R}^m$. Soit $F:W\subset\mathbb{R}^n\to M$ un paramétrage d'un ouvert relatif de M.

Si f est une fonction définie sur un sous-ensemble $A\subset F(W)$ tel que $F^{-1}(A)$ est mesurable, l'*intégrale de f sur A* est définie par

$$\int_A f=\int_{F^{-1}(A)}f(F(w))\sqrt{\det(J_F(w)^tJ_F(w))}dw$$

où l'intégrale est l'intégration usuelle (de Lebesgue) sur $F^{-1}(A)\subset\mathbb{R}^n$. On écrit parfois cette intégrale $\int_{F^{-1}(A)}f(F(w))d\sigma$ où

$$d\sigma=\sqrt{\det(J_F(w)^tJ_F(w))}dw\tag{22.208}$$

est l'*élément infinitésimal de volume* de la variété.

Si $m=3$ et $n=2$, l'élément infinitésimal de volume vaut

$$d\sigma=\left\|\frac{\partial F}{\partial w_1}\times\frac{\partial F}{\partial w_2}\right\|dw$$

où $\times$ représente le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, et (w_1,w_2) sont les coordonnées sur $W\subset\mathbb{R}^2$. Dans la suite, nous ne regarderons plus que ce cas.

22.8 Intégrales de surface

22.8.1 Intégrale d'un champ de vecteurs

Dans l'intégration curviligne, on a noté que si l'intégrale d'une fonction ne dépendait pas de l'orientation du chemin, l'intégrale d'un champ de vecteurs ou d'une forme différentielle en dépendait. Ce problème d'orientation apparait également dans l'intégration sur des surfaces de l'espace.

Définition 22.60.
*Une **orientation** sur une surface $S\subset\mathbb{R}^3$ est le choix d'un champ de vecteurs continu $\nu:S\to\mathbb{R}^3$ dont la norme en tout point de S vaut* 1.

On remarque qu'ayant fait un tel choix d'orientation $\nu(x)$ en un point x, le seul autre choix possible en x est $-\nu(x)$. Si S est le bord d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^3$, l'*orientation induite par D sur S* est, si elle existe, l'orientation qui pointe hors de D en tout point de S. Plus précisément, il faut que pour tout $x \in D$ il existe $\epsilon > 0$ vérifiant, pour tout $0 < t < \epsilon$, la relation $t\nu(x) \notin D$. Dans ce cas, le champ de vecteurs ν est appelé le *vecteur normal unitaire extérieur* à D et il est forcément unique.

Soit G un champ de vecteurs défini sur une surface orientée par un champ ν. L'intégrale de G sur S, aussi appelée le *flux de G à travers S*, est

$$\iint_S G \cdot dS \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \langle G, \nu \rangle \, d\sigma. \tag{22.209}$$

cqfux star

Si on suppose que la surface est paramétrée par une application

$$F : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))$$

alors un vecteur unitaire ν peut s'écrire sous la forme

$$\nu = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\|}$$

et grâce à ce paramétrage l'intégrale (22.209) devient

$$\iint_S G \cdot dS = \iint_W \left\langle G(F(u, v)), \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle du dv.$$

où on utilise l'expression de $d\sigma$ obtenue précédemment dans le cas qui nous intéresse (surface dans l'espace).

22.9 Aires et intégrales

22.9.1 Aire d'une surface paramétrée

Lorsque nous avions vu la longueur d'une courbe paramétrée, nous avions pris comme « élément de longueur » la norme du vecteur tangent. Il est donc naturel de prendre comme « élément de surface » une petite surface que l'on peut construire à partir des deux vecteurs tangents à la surface.

Au point $\varphi(u_0, v_0)$, nous avons les deux vecteurs tangents

$$T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0). \tag{22.210}$$

L'élément de surface que nous pouvons construire à partir de ces deux vecteurs est la surface du parallélogramme, donnée par la norme du produit vectoriel :

$$dS = \|T_u \times T_v\|. \tag{22.211}$$

EQooNYWSooZuvcPe

L'aire de la surface donnée par $\varphi \colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sera donc donnée par

$$Aire\big(\varphi(D)\big) = \iint_D \|T_u \times T_v\| du \, dv. \tag{22.212}$$

Exemple 22.61.
Calculons l'aire de la sphère. Les vecteurs tangents ont déjà été calculés aux équations (22.204) et (22.205) :

$$T_\theta = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22.213}$$

Le produit vectoriel vaut

$$\begin{aligned} T_\theta \times T_\varphi &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (R^2\sin^2\theta\cos\varphi)e_x + (R^2\sin^2\theta\sin\varphi)e_y \\ &\quad + (R^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + R^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi)e_z. \end{aligned} \tag{22.214}$$

La norme demande quelques calculs et mises en évidences. Le résultat est :

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = R^2 \sin\theta. \tag{22.215}$$

L'aire de la sphère est donc donnée par

$$Aire = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} = 4\pi R^2. \tag{22.216}$$

Il est bon de se souvenir que, en coordonnées sphériques,

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = R^2 \sin\theta. \tag{22.217}$$

Or nous savons que ce vecteur est dirigé dans le sens de e_r parce que ce dernier est le vecteur qui est constamment dirigé radialement. En coordonnées sphériques nous avons donc

$$T_\theta \times T_\varphi = R^2 \sin(\theta) e_r. \tag{22.218}$$

△

Remarque 22.62.
L'équation (22.215) donne l'élément de surface pour la sphère. Notez que cela est justement l'expression du jacobien des coordonnées sphériques. Cela n'est évidemment pas une coïncidence.

Exemple 22.63.
Nous pouvons donner l'aire du graphe d'une fonction quelconque. La surface est paramétrée par

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}. \tag{22.219}$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}. \tag{22.220}$$

Le produit vectoriel est donné par

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & \partial_x f \\ 0 & 1 & \partial_y f \end{vmatrix} = (-\partial_x f)e_x - (\partial_y f)e_y + e_z. \tag{22.221}$$

L'élément de surface est par conséquent

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}, \tag{22.222}$$

et la surface du graphe sera

$$Aire = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}\, dx\, dy \tag{22.223}$$

△

22.9.2 Intégrale d'une fonction sur une surface

Si S est une surface dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{aligned} &\varphi\colon D \to \mathbb{R}^3 \\ &(u,v) \mapsto \varphi(u,v) \in S, \end{aligned} \tag{22.224}$$

et si f est une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie au moins sur S, l'intégrale de f sur S est logiquement définie par

$$\int_S f\, dS = \iint_D f\big(\varphi(u,v)\big) \|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\| du dv \tag{22.225}$$

où $T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. La quantité

$$\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\| du dv \tag{22.226}$$

est appelé **élément de surface**.

Encore une fois, si on prend $f = 1$, alors on retrouve la surface de S :

$$\int_S dS = Aire(S). \tag{22.227}$$

Remarque 22.64.
Le nombre $\int_S f dS$ ne dépend pas de le paramétrage choisie pour S.

22.9.3 Intégrale d'une 2-forme

Nous considérons ω, une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 22.65.
Si $\omega_{(x,y)} = u(x,y)dx \wedge dy$ et si D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors nous définissons

$$\int_D \omega = \int_D u(x,y)dx\,dy. \tag{22.228}$$

Nous voulons maintenant intégrer une 2-forme sur une surface dans $\mathbb{R}^3$. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$, une surface orientée (c'est-à-dire que nous avons un choix continu d'un vecteur normal unitaire n). Nous supposons de plus avoir un paramétrage $\phi\colon D \to S$ de S avec D ouvert dans $\mathbb{R}^2$ compatible avec l'orientation, c'est-à-dire que pour tout $(t,s) \in D$,

$$n\big(\phi(t,s)\big) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s). \tag{22.229}$$

Définition 22.66.
Pour intégrer ω sur S nous faisons

$$\int_S \omega = \int_D \phi^*\omega \tag{22.230}$$

où $\phi^*\omega$ est de la forme $F(t,s)dt \wedge ds$.

Montrons ce que cela fait. Soient u, v des vecteurs de D et calculons

$$(\phi^*\omega)(u,v) = \omega\big(d\phi(u), d\phi(v)\big) \tag{22.231a}$$

$$= \omega\left(u_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial \infty}{\partial x_2}, v_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial \infty}{\partial x_2}\right). \tag{22.231b}$$

Les termes en u_1v_1 et u_2v_2 sont nuls ; par exemple :

$$\omega\left(u_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, v_1\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) = u_1v_1\omega\left(\frac{\partial \infty}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{22.232}$$

parce que ω est antisymétrique. Il nous reste donc

$$(\phi^*\omega)(u,v) = (u_1v_2 - u_2v_1)\omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) \tag{22.233a}$$

$$= \omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)(dt \wedge ds)(u,v). \tag{22.233b}$$

Cette dernière ligne est bien de la forme $\phi^*\omega = F(t,s)dt \wedge ds$.

22.10 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

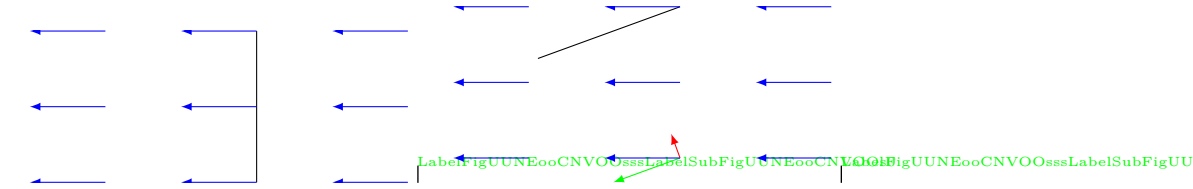
Nous voulons construire un moulin à eau. Comment placer les pales pour maximiser le travail de la pression de l'eau ? On n'a pas attendu l'invention du calcul intégral pour répondre à cette question. Trois paramètres rentrent en ligne de compte :

(1) plus il y a d'eau, plus ça pousse ;

(2) plus la surface de la pale est grande, plus on va utiliser d'eau ;

(3) plus la pale est perpendiculaire au courant, plus on va en profiter.

Nous voyons sur la figure 22.2 que lorsque la pale du moulin est inclinée, non seulement elle prend moins d'eau sur elle, mais qu'en plus elle la prend avec un moins bon angle : une partie de la force ne sert pas à la faire tourner.



(a) L'eau pousse bien perpendiculairement à la palle du moulin.

(b) Lorsque l'eau ne pousse pas perpendiculairement, une partie de la force est perdue. Ici la partie normale (en rouge) est très petite.

FIGURE 22.2 : La partie rouge de la force est perdue si l'eau ne pousse pas perpendiculairement. De plus lorsque la pale est inclinée, elle prend moins d'eau sur elle. LabelFigUUNEooCNVOOs

L'idée du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface est de savoir quelle est la quantité « utile » de vecteurs qui traverse la surface. Ce sera simplement l'intégrale sur la surface de la composante du champ de vecteurs normale à la surface. Il reste deux problèmes à régler : le premier est de savoir quel est le vecteur normal à la surface, et le second est de savoir comment « sélectionner » la composante normale d'un champ de vecteurs F.

Le problème de trouver un vecteur normal est résolu par le produit vectoriel des vecteurs tangents. Si la surface est donnée par $\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, les vecteurs tangents sont $T_u = \partial_u\varphi(u,v)$ et $T_v = \partial_v\varphi(u,v)$. Le normal de norme 1 est donné par :

$$n(u,v) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}. \tag{22.234}$$

Si p est un point de la surface $\varphi(D)$, la composante de $F(p)$ qui est normale à la surface au point p est donnée par le produit scalaire

$$F(p)_\perp = F(p) \cdot n(p). \tag{22.235}$$

C'est ce nombre là que nous intégrons sur la surface.

Définition 22.67.
*Le **flux du champ de vecteurs** à travers la surface $S = \varphi(D)$ est*

$$\int F \cdot dS = \int F \cdot n \, dudv. \tag{22.236}$$

Une petite simplification se produit lorsqu'on veut calculer effectivement cette intégrale. En effet $F \cdot n$ est, en soi, une fonction sur S. Pour l'intégrer, il faut donc la multiplier par $\|T_u \times T_v\|$ (c'est la définition de l'intégrale d'une fonction sur une surface). Donc, étant donné que $n = (T_u \times T_v)/\|T_u \times T_v\|$, nous avons

$$\int F \cdot dS = \iint_D F\big(\varphi(u,v)\big) \cdot (T_u \times T_v) \, dudv \tag{22.237}$$

où $T_u = \frac{\partial\phi}{\partial u}$ et $T_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$.

Exemple 22.68.
Soit le champ de vecteurs

$$F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}. \tag{22.238}$$

Calculons son flux au travers de la sphère de rayon R.

Nous choisissons de paramétrer la sphère en coordonnées sphériques avec $\phi(\theta,\varphi)$. Nous pouvons reprendre le résultat (22.218) :

$$T_\theta \times T_\varphi = R^2 \sin(\theta). \tag{22.239}$$

Nous savons aussi que

$$F\big(\phi(\theta,\varphi)\big) = Re_r. \tag{22.240}$$

L'intégrale à calculer est donc

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, 2e_r \cdot \big(R^2\sin(\theta)e_r\big). \tag{22.241}$$

Vu que le produit scalaire $e_r \cdot e_r$ vaut 1, nous calculons

$$I = 4\pi R^2 \int_0^\pi \sin(\theta)d\theta = 8\pi R^2. \tag{22.242}$$

△

Exemple 22.69.
Calculons le flux du champ de force de gravitation d'une masse au travers de la sphère de centre R centrée autour la masse. À un coefficient constant près, le champ vaut

$$G(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}e_r. \tag{22.243}$$

Sur la sphère de rayon R, nous avons

$$G\big(\phi(\theta,\varphi)\big) = \frac{1}{R^2}e_r. \tag{22.244}$$

L'intégrale est donc

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}e_r \cdot \big(R^2\sin(\theta)e_r\big)d\varphi = 8\pi. \tag{22.245}$$

Ce flux ne dépend pas de R. △

Exemple 22.70.
Soit S le disque de rayon 5 placé horizontalement à la hauteur 12. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x,y,z) = xe_x + ye_y + ze_z. \tag{22.246}$$

Les équations de la surface sont $z = 12$, $x^2 + y^2 \leqslant 25$. Nous prenons le paramétrage en coordonnées cylindriques :

$$\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ 12 \end{pmatrix}. \tag{22.247}$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22.248}$$

Le vecteur normal est alors

$$T_r \times T_\theta = re_z. \tag{22.249}$$

Sur la surface, le champ de vecteurs s'écrit

$$F\big(\varphi(r,\theta)\big) = r\cos(\theta)e_x + r\sin(\theta)e_y + 12e_z. \tag{22.250}$$

Par conséquent

$$F \cdot (T_r \times T_\theta) = 12r. \tag{22.251}$$

L'intégrale à calculer est

$$\begin{aligned} \int_0^5 dr \int_0^{2\pi} 12r\, d\theta &= 12 \cdot 2\pi \int_0^5 r\, dr \\ &= \frac{25}{2}24\pi \\ &= 300\pi. \end{aligned} \tag{22.252}$$

△

22.11 Divergence, Green, Stokes

Le théorème de Stokes (et ses variations) peut se voir comme une généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui stipule que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

c'est-à-dire qui relie l'intégrale de f' sur $I = [a, b]$ aux valeurs de f sur le bord $\partial I = \{a, b\}$. Le signe $-$ qui apparait vient de l'orientation ; celle-ci requiert de la prudence dans l'utilisation des théorèmes.

Voici, pour votre culture générale, un énoncé général :

ThoATsPuzF

Théorème 22.71.
Si M est une variété orientable de dimension n avec un bord noté ∂M, alors pour toute forme différentielle ω de degré $n-1$ on a

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

où $d\omega$ désigne la différentielle extérieure de ω.

Nous allons maintenant voir quelques cas particuliers.

Une des nombreuses formes du théorème de Stokes (théorème 22.71) est que si la forme différentielle ω est exacte alors son intégrale est facile.

ThoUJMhFwU

Théorème 22.72 ([1])**.**
Si γ est une chemin de classe C^1 dans un ouvert Ω et si ω est la forme différentielle exacte $\omega = df$, alors

$$\int_\gamma df = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big). \tag{22.253}$$

Démonstration. C'est une application du lemme 14.300 et du théorème fondamental du calcul intégral 16.290. □

22.11.1 Théorème de la divergence

Si nous considérons une surface dans $\mathbb{R}^n$ et un champ de vecteurs, il est bon de se demander quelle « quantité de vecteurs » traverse la surface. Soit D, un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ telle que ∂D soit une variété de dimension $n-1$, et G, un champ de vecteurs défini sur $\bar{D}$. Afin de compter combien de G traverse ∂D, il faudra faire en sorte de ne considérer que la composante de G normale à ∂D : pas question d'intégrer par exemple la norme de G sur ∂D.

Comme nous le savons, la composante du vecteur v dans la direction w est le produit scalaire $v \cdot 1_w$ où 1_w est le vecteur de norme 1 dans la direction w. Nous allons donc introduire le concept de vecteur normal extérieur.

Définition 22.73.
*Soit $x \in \partial D$ et $\nu \in \mathbb{R}^n$, nous disons que ν est un **vecteur normal extérieur** de ∂D si*

(1) $\langle \nu, v\rangle = 0$ pour tout vecteur tangent v à ∂D au point x. Pour rappel, ∂D étant une variété de dimension $n-1$, il y a $n-1$ tels vecteurs v linéairement indépendants.

(2) Il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall t \in]0, \delta[$, nous avons $x + t\nu \notin \bar{D}$ et $x - t\nu \in D$.

Nous pouvons maintenant définir le concept de flux. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que ∂D soit une variété de dimension $n-1$ qui admette un vecteur normal extérieur $\nu(x)$ en chaque point. Soit aussi $G\colon \bar{D} \to \mathbb{R}^n$, un champ de vecteur de classe C^1. Le **flux** de G au travers de ∂D est le nombre

$$\int_{\partial D} \langle G(x), \nu(x)\rangle d\sigma(x). \tag{22.254}$$

Cette intégrale est en général très compliquée à calculer parce qu'il faut trouver le champ de vecteur normal, puis un paramétrage de la surface ∂D et ensuite appliquer la méthode décrite au point 22.8.

Heureusement, il y a un théorème qui nous permet de calculer plus facilement : sans devoir trouver de vecteurs normaux.

Il n'est pas plus contraignant d'énoncer ce théorème dans le cadre d'une hypersurface de $\mathbb{R}^n$, ce que nous faisons donc :

Théorème 22.74 (Formule de la divergence)**.**
Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est « assez régulier par morceaux », c'est-à-dire :

$$\partial D = A_1 \cup \ldots \cup A_p \cup N \tag{22.255}$$

où

(1) *$A_1, \ldots, A_p, N$ sont deux à deux disjoints,*

(2) *pour tout $i \leqslant p$, A_i est un ouvert relatif d'une certaine variété M_i de dimension $(n-1)$*

(3) *$\bar{A}_i \subset M_i$*

(4) *N est un compact contenu dans une réunion finie de variétés de dimensions $(n-2)$.*

Supposons également qu'en chaque point de $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ il existe un vecteur normal extérieur ν.
Si G est un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\bar{D}$ alors

$$\int_D \nabla \cdot G = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} \langle G, \nu \rangle . \tag{22.256}$$

L'intégrale du membre de gauche est l'intégrale sur un ouvert d'une simple fonction.

22.11.2 Lacets et homotopie

DEFooQZMSooYYkGDv

Définition 22.75 (chemin, lacet[248, 678])**.**
Plusieurs notions autour de chemins dans un espace topologique X.

(1) *Un **chemin** dans un espace vectoriel X est une application continue $\gamma\colon [a,b] \to X$ avec $a < b$.*

(2) *Un **lacet** dans X est un chemin $\gamma\colon [a,b] \to X$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

(3) *Un chemin $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est **régulier** si il est C^1 et si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t*

(4) *Le chemin $\gamma\colon [a,b] \to X$ est un **chemin de Jordan** si il est injectif.*

(5) *Un lacet $\gamma\colon [a,b] \to X$ est un **lacet de Jordan** si $\gamma\colon [a,b[\to X$ est injective.*

(6) *Une **courbe de Jordan** est l'image d'un lacet de Jordan.*

(7) *Une **courbe simple** est l'image d'un chemin de Jordan.*

L'homotopie sera définie en 22.77.

22.76.
Un chemin de Jordan peut évidemment être vu comme une application $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. En particulier il n'est jamais mauvais de se rappeler qu'on peut choisir un paramétrage normal par la proposition 23.46.

DEFooHJQTooYUFcee

Définition 22.77 (homotopie de lacets)**.**
Soit un espace topologique X. Les lacets[18] *$\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to X$ sont **homotopes** dans X si il existe une application continue*

$$H\colon [0,1] \times [a,b] \to X \tag{22.257}$$

telle que

(1) *Pour tout $s \in [0,1]$, l'application*

$$\begin{aligned} \Gamma_s\colon [a,b] &\to X \\ t &\mapsto H(s,t) \end{aligned} \tag{22.258}$$

est un lacet dans X.

(2) *Nous avons $\Gamma_0 = \gamma_0$ et $\Gamma_1 = \gamma_1$.*

L'application H est l'homotopie entre γ_0 et γ_1.

[18] Définition 22.75.

DEFooLXDTooDPgxqL

Définition 22.78 (Homotopie à extrémités fixées[248]).
*Soit un espace topologique X. Soient des chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to X$. Nous supposons que leurs extrémités soient égales, et nous les notons p, q : $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$ et $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$. Nous disons que γ_0 et γ_1 sont **homotopes avec les extrémités fixées** si il existe une application continue $H : [0,1] \times [a,b] \to X$ telle que*

(1) les extrémités sont fixées : $H(s,a) = p$ et $H(s,b) = q$ pour tout $s \in [0,1]$.

(2) pour tout $t \in [a,b]$, nous avons $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$.

22.11.3 Formule de Green

La formule de Green est un cas particulier du théorème de la divergence dans le cas $n = 2$, légèrement reformulé.

THOooQSWMooAZasTl

Théorème 22.79.
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert borné tel que son bord est la réunion finie d'un certain nombre de chemins de classe C^1 de Jordan réguliers. Supposons qu'en chaque point de son bord, D possède un vecteur normal unitaire extérieur ν. Soient P et Q deux fonctions réelles de classe C^1 sur $\bar{D}$. Alors

$$\iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dx\, dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy \tag{22.259}$$

EqYLhlSqV

où chaque chemin γ formant le bord de D est orienté de sorte que $T\nu = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$ où T représente la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Justifions le fait que cela soit un cas particulier de la formule de Stokes du théorème 22.71. Nous considérons la forme différentielle

$$\omega = P dx + Q dy, \tag{22.260}$$

et sa différentielle

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i d\omega_i \wedge dx_i && \text{(22.261a)}\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy && \text{(22.261b)}\\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. && \text{(22.261c)} \end{aligned}$$

Intégrons cette forme $d\omega$ sur le domaine ouvert D que nous paramétrons de façon triviale par

$$\begin{aligned} \varphi &: D \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\mapsto (u,v). \end{aligned} \tag{22.262}$$

Ce que nous avons est

$$\iint_D d\omega = \iint_D d\omega_{(u,v)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) du dv \tag{22.263}$$

EqKYjEEGE

Nous avons aussi $T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$(dx \wedge dy)(T_u, T_v) = dx(T_u)dy(T_v) - dx(T_v)dy(T_u) = 1 - 0 = 1. \tag{22.264}$$

L'intégrale (22.263) se développe donc en

$$\iint_D d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial y}(u,v)\right) (dx \wedge dy)(T_u, T_v) du dv = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) du dv. \tag{22.265}$$

Par conséquent la formule de Stokes nous donne la formule (22.259).

La formule de Green nous permet de calculer l'aire de la surface délimitée par une courbe fermée en termes de l'intégrale d'une forme bien choisie le long du contour. Pour cela nous prenons la forme

$$\omega = -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy, \tag{22.266}$$

EqZNXYMQb

de telle sorte que $\partial_x Q - \partial_y Q = 1$ et que

$$\iint_D d\omega = \iint_D dudv = S, \tag{22.267}$$

et au final l'aire est donnée par

$$S = \int_{\partial D} \Big(-\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy \Big). \tag{22.268}$$

Lorsque le bord de D est paramétré par

$$\begin{aligned} \gamma\colon [a,b] &\to \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{22.269}$$

nous avons

$$(Pdx + Qdy)\gamma'(u) = Px' + Qy', \tag{22.270}$$

et alors

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_a^b P\big(x(u),y(u)\big)x'(u) + Q\big(x(u),y(u)\big)y'(u)du. \tag{22.271}$$

En ce qui concerne l'aire de la surface, nous prenons les P et Q de la forme 22.266 :

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b \Big(-y(u)x'(u) + x(u)y'(u)\Big)du. \tag{22.272}$$

22.11.4 Formule de Stokes

secstokesusuel

La formule de Stokes est la version classique, qui permet d'exprimer la circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe de $\mathbb{R}^3$ comme le flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface dont le bord est la courbe. La version présentée ici suppose que la surface peut se paramétrer en un seul morceau :

THOooDCPKooMqNOMU

Théorème 22.80 (Formule de Stokes)**.**
Soit $F : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un paramétrage (carte) d'une surface dans $\mathbb{R}^3$, supposée de classe C^2. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les hypothèses de la formule de Green, et tel que $\bar{D} \subset W$. Soit G un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur $F(\bar{D})$, et soit N le champ normal unitaire donné par le paramétrage

$$N = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}}{\big\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \big\|} \tag{22.273}$$

alors

$$\iint_{F(D)} \langle \nabla \times G, N \rangle \, d\sigma_F = \int_{F(\partial D)} G \tag{22.274}$$

où les chemins formant le bord ∂D sont orientés comme dans le théorème de Green.

Notons, juste pour avoir une bonne nouvelle de temps en temps, que

$$d\sigma_F = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\| dudv, \tag{22.275}$$

mais cette norme apparaît exactement au dénominateur de N. Il ne faut donc pas la calculer parce qu'elle se simplifie.

Sous forme un peu plus physicienne[19], la formule (22.274) s'écrit

$$\int_{F(D)} \langle \nabla \times G, N(x) \rangle \, d\sigma_F(x) = \int_{F(\gamma)} \langle G, T \rangle \, ds \tag{22.276}$$

où T est le vecteur unitaire tangent à $F(\gamma)$.

[19] et surtout plus explicite.

22.11.4.1 Quelle est la bonne orientation ?

Le signe du vecteur normal N dépend du choix de l'ordre des coordonnées dans la carte. Supposons que je veuille paramétrer la surface $x^2+y^2=1$, $z=1$. Nous prenons naturellement comme carte le cercle C de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ et la carte

$$F(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22.277}$$

Mais nous aurions aussi pu mettre les coordonnées r et θ dans l'autre ordre :

$$\tilde{F}(\theta,r)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22.278}$$

Les vecteurs normaux ne sont pas les mêmes : la carte F donnera $\partial_r F\times\partial_\theta F$, tandis que l'autre donnera $\partial_\theta\tilde{F}\times\partial_r\tilde{F}$. Le signe change !

Il faut savoir laquelle choisir. Le cercle $C\subset\mathbb{R}^2$ a une orientation donnée par le théorème de Green. Nous choisissons l'ordre des coordonnées pour que 1_θ et 1_r soient dans la même orientation que les vecteurs ν et T tels que donnés par le théorème de Green, et tels que dessinés sur la figure 22.3.

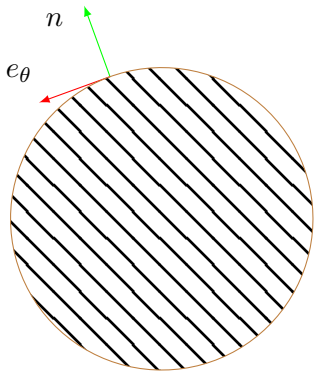


FIGURE 22.3 : L'orientation sur le cercle. Si nous les prenons dans l'ordre, les vecteurs $(1_r,1_\theta)$ ont la même orientation que celle donnée par les vecteurs (ν,T) donnés par la convention de Green. LabelFigCercleTnu

Plus généralement, nous choisissons l'ordre des coordonnées u et v pour que la base $(1_u,1_v)$ ait la même orientation que (ν,T) où T a le sens convenu dans le théorème de Green.

22.12 Résumé des intégrales vues

Nous sommes maintenant capables de revoir tous les types d'intégrales vues jusqu'ici de façon très cohérentes. Nous commencerons par les intégrales de fonctions et nous ferons ensuite les intégrales de champs de vecteurs.

22.12.1 L'intégrale d'une fonction sur les réels

Si $f\colon[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction usuelle, sont intégrale est

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{22.279}$$

où F est une primitive de f.

22.12.2 Intégrale d'une fonction sur un chemin

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^3$ et si $\sigma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ est un chemin dans $\mathbb{R}^3$, l'intégrale de f sur σ est, par définition,

$$\int f\,d\sigma=\int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\|\sigma'(t)\|dt. \tag{22.280}$$

22.12.3 Intégrale d'une fonction sur une surface

Nous devons paramétrer la surface S par une application $\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. À partir d'un tel paramétrage, nous construisons un élément de surface en prenant le produit vectoriel des deux vecteurs tangents :

$$dS = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} du dv. \tag{22.281}$$

L'intégrale est

$$\int f\, dS = \iint_D f\big(\varphi(u,v)\big) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\| du dv. \tag{22.282}$$

Il ne faut pas rajouter de jacobien : la norme du produit vectoriel *est* le jacobien.

Remarque 22.81.
La formule (22.282) est autant valable pour des surfaces dans $\mathbb{R}^2$ que dans $\mathbb{R}^3$. Si nous considérons une surface dans $\mathbb{R}^2$, nous la voyons dans $\mathbb{R}^3$ en ajoutant un zéro comme troisième composante.

Exemple 22.82.
Les coordonnées polaires sont données par

$$\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22.283}$$

Les vecteurs tangents à ce paramétrage sont

$$T_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22.284}$$

Le vecteur normal est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = re_z. \tag{22.285}$$

Nous trouvons donc que l'élément de surface est la norme de re_z, c'est-à-dire r, le jacobien connu. △

22.12.4 Intégrale d'une fonction sur un volume

Si V est un volume dans $\mathbb{R}^3$, nous effectuons la même procédure : nous trouvons un paramétrage, et nous formons un élément de volume avec les vecteurs tangents de le paramétrage. Nous avons donc un volume déterminé par l'application

$$\varphi\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \tag{22.286}$$

et ses trois vecteurs tangents

$$\begin{aligned} T_u &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ T_v &= \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ T_w &= \frac{\partial\varphi}{\partial w}. \end{aligned} \tag{22.287}$$

Comment former un volume avec trois vecteurs ? Réponse : le produit mixte. L'intégrale de f sur V sera

$$\int f\, dV = \iiint_D f\big(\varphi(u,v,w)\big) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} \times \frac{\partial\varphi}{\partial w} \right) \right\| du dv dw. \tag{22.288}$$

Encore une fois, le produit mixte *est* le jacobien. Prenons les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x(r,\theta,\varphi) &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) &= r\cos(\theta) \end{aligned} \tag{22.289}$$

Les trois vecteurs tangents seront

$$T_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{22.290a}$$

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{22.290b}$$

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22.290c}$$

Nous avons vu que le produit mixte revient à mettre toutes les composantes dans une matrice. Ici nous avons donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \tag{22.291}$$

Cela est précisément le jacobien dont nous parlions plus haut.

22.12.5 Conclusion pour les fonctions

Lorsque nous intégrons une fonction sur un chemin, une surface ou un volume, la technique est toujours la même :

(1) Trouver un paramétrage à une, deux ou trois variables.

(2) Dériver le paramétrage par rapport à ses variables.

(3) Construire un élément de longueur, surface ou volume à partir des vecteurs que l'on a. Cela se fait en prenant la norme, le produit vectoriel ou le produit mixte.

22.12.6 Circulation d'un champ de vecteurs

Pour les champs de vecteurs, nous faisons la même chose, mais au lieu de *multiplier* par l'élément de longueur ou de surface, nous prenons le produit scalaire. Si nous considérons la courbe paramétrée $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ et le champ de vecteurs F, nous avons donc

$$\int_\sigma F = \int F \cdot d\sigma = \int_a^b F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t) dt. \tag{22.292}$$

22.12.7 Flux d'un champ de vecteurs

Si la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est paramétrée par

$$\begin{aligned} \phi\colon D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto \phi(u,v), \end{aligned} \tag{22.293}$$

et si F est un champ de vecteurs, alors on a

$$\int_S F = \int_S F \cdot dS = \iint_D F\big(\phi(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) du dv. \tag{22.294}$$ EqResIntFluxPhi

22.12.8 Conclusion pour les champs de vecteurs

La circulation et le flux ne représentent pas tout à fait la même chose. En effet pour la circulation, nous sélectionnons la composante *tangente* à la courbe, c'est-à-dire la partie du vecteurs qui « circule » le long de la courbe. Une force perpendiculaire au mouvement ne travaille pas.

La situation est exactement le contraire pour le flux. Étant donné que le vecteur

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \tag{22.295}$$

est normal à la surface, le fait de prendre le produit scalaire du champ de vecteurs avec lui sélectionne la composante *normale* à la surface, c'est-à-dire la partie du vecteur qui traverse la surface.

22.12.9 Attention pour les surfaces fermées !

Si nous considérons une surface fermée, il faut faire attention à choisir une *orientation*. Les vecteurs normaux doivent soit tous pointer vers l'intérieur soit tous vers l'extérieur. En effet, en tant que vecteur normal, nous avons choisi de prendre

$$T_u \times T_v. \tag{22.296}$$

Mais le vecteur $T_v \times T_u$ est tout aussi normal ! Il n'y a pas à priori de façon standard pour choisir l'un ou l'autre. Il faut juste être cohérent : il faut que si on divise la surface en plusieurs morceaux, tous les vecteurs pointent dans le même sens.

Notez que si vous faites un choix et que votre voisin fait le choix inverse, vous obtiendrez des réponses qui diffèrent d'un signe. Sans plus de précisions[20], les deux réponses sont correctes.

Un exemple de ce problème est donné dans l'exemple 22.83.

EXooAJRLooSTPChN

Exemple 22.83.
Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x, y, z) = e_x \tag{22.297}$$

au travers du cylindre de rayon R et de hauteur h autour de l'axe z.

Même question si le cylindre est autour de l'axe x.

Remarque : ces cylindres sont considérés *avec* leur « couvercles ».

Un paramétrage du cylindre autour de l'axe z est

$$\phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}. \tag{22.298}$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_\theta = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, T_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22.299}$$

Le vecteur normal est donc

$$T_\theta \times T_z = R\cos(\theta)e_x + R\sin(\theta)e_y. \tag{22.300}$$

C'est un vecteur dirigé vers l'extérieur.

Le champ de vecteurs considéré est constant : $F(\theta, z) = e_x$. Nous avons donc

$$F(\theta, z) \cdot (T_\theta \times T_z) = R\cos(\theta) \tag{22.301}$$

et le flux vaut

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h R\cos(\theta)dz = 0. \tag{22.302}$$

En ce qui concerne les couvercles haut au bas, ils sont paramétrés par

$$\phi_1(r, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \\ h \end{pmatrix}, \phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22.303}$$

Les vecteurs normaux correspondants sont dans la direction de e_z, de façon que le produit scalaire avec $F(r, \theta)$ soit nul. Le flux total est donc nul.

Regardons maintenant le cylindre le long de l'axe x. Un paramétrage est

$$\phi(\theta, x) = \begin{pmatrix} x \\ R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \end{pmatrix}, \tag{22.304}$$

et le vecteurs tangents sont

$$T_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22.305}$$

Le vecteur normal est alors donné par

$$T_\theta \times T_x = R\cos(\theta)e_y + R\sin(\theta)e_z. \tag{22.306}$$

[20] Il faudrait définir ce qu'est une surface *orientable* et choisir une orientation.

Nous avons par conséquent $F(\theta, x) \cdot (T_\theta \times T_x) = 0$. Pas de flux par le côté du cylindre.

Regardons les « couvercles ». Le premier est donné par le paramétrage

$$\phi_1(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{22.307}$$

Le vecteur normal serait $T_r \times T_\theta = re_x$, et le flux

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr = \pi R^2. \tag{22.308}$$

Le second couvercle est donné par

$$\phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} h \\ r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{22.309}$$

Le vecteur normal est encore re_x, et le flux est à nouveau πR^2.

Le flux total serait donc $2\pi R^2$.

Cela n'est pas possible parce que tous les vecteurs qui « rentrent » d'un côté doivent « sortir » de l'autre côté. L'erreur est le le premier vecteur normal est un vecteur qui pointe vers l'intérieur du cylindre, tandis que le second pointe vers l'extérieur. Si nous choisissons, par convention, de prendre uniquement les vecteurs extérieurs, il faut changer le vecteur normal du premier couvercle en $-re_x$. Le premier flux vaudra donc

$$-\pi R^2, \tag{22.310}$$

de telle sorte que le flux total sera nul. △

22.13 Formes différentielles exactes et fermées

Nous avons déjà parlé de formes différentielles et de leurs intégrales sur un chemin dans la section 14.24.

DefEFKQmPs

Définition 22.84.
*La forme différentielle ω est **exacte** si il existe une fonction f telle que $\omega = df$; elle est dite **fermée** si $d\omega = 0$.*

Dire que la forme différentielle $\omega = f dx + g dy$ est fermée, c'est dire que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{22.311}$$

Il est naturel de se demander si toutes les formes différentielles sont des différentielles de fonctions. Une réponse complète est délicate à établir, mais a d'innombrables conséquences en physique, notamment en ce qui concerne l'existence d'un potentiel vecteur pour le champ magnétique dans les équations de Maxwell.

Le fait qu'une forme exacte soit fermée est relativement facile à établir ; c'est la proposition suivante. La question plus délicate est la réciproque : sous quelles conditions une forme fermée est-elle exacte ?

Proposition 22.85.
Si ω est une 1-forme exacte de classe C^1, alors ω est fermée.

Démonstration. Le fait que ω soit exacte implique l'existence d'une fonction f telle que $\omega = df$, c'est-à-dire

$$\omega_x = \sum_i a_i(x) dx_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \tag{22.312}$$

c'est-à-dire que $a_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. L'hypothèse que ω est C^1 implique que f est C^2, et donc que nous pouvons inverser l'ordre de dérivation pour les dérivées secondes $\partial^2_{ij} f = \partial^2_{ji} f$. Nous pouvons donc faire le calcul suivant :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \tag{22.313}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

La réciproque est vraie sur un ouvert simplement connexe.

ThoFermeExactFormRappel

Théorème 22.86.
Supposons que $D \subset \mathbb{R}^n$ soit un ouvert simplement connexe. Alors toute forme différentielle de degré 1 et de classe C^1 sur D qui est fermée est exacte.

Nous allons prouver ce théorème dans un cas un peu moins général : celui d'un domaine étoilé de $\mathbb{R}^2$ plutôt que simplement connexe de $\mathbb{R}^n$.

ThoMSofFxL

Théorème 22.87.
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, une ouvert étoilé, et ω, une 1-forme fermée de classe C^1. Alors ω est exacte.

Démonstration. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert étoilé par rapport à l'origine. Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}$, des fonctions de classe C^1 telles que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{22.314}$$

sur D, et

EqIMDefFformI33

$$F(x,y) = \int_0^1 \big[f(tx,ty)x + g(tx,ty)y\big]dt \tag{22.315}$$

pour tout $(x,y) \in D$.

Étant donné que nous ne définissons $F(x,y)$ que pour des $(x,y) \in D$, la fonction $t \mapsto f(tx,ty)$ est C^1 sur tout le compact $[0,1]$ et aucune divergence de l'intégrale n'est à craindre. Nous sommes donc dans le cadre de la proposition 19.47, et nous pouvons dériver sous le signe intégral.

Nous calculons, en utilisant la règle de dérivation de fonctions composées

EqIMI33dsdsFlolo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left[f\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + f(tx,ty) + t\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)y\right]dt \\ &= \int_0^1 \left[t\Big(x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\Big) + f(tx,ty)\right]dt\end{aligned} \tag{22.316}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse $\partial_y f = \partial_x g$. Ce qui se trouve dans la parenthèse n'est autre que $\partial_t\big(f(tx,ty)\big)$, plus précisément, si nous posons $\mathcal{F}(x,y,t) = f(tx,ty)$, nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x,y,t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty). \tag{22.317}$$

En recopiant le résultat (22.316) en termes de $\mathcal{F}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left(t\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x,y,t) + \mathcal{F}(x,y,t)\right)dt \\ &= \int_0^1 \partial_t\big(t\mathcal{F}(x,y,t)\big)dt \\ &= \big[t\mathcal{F}(x,y,t)\big]_0^1 \\ &= \mathcal{F}(x,y,1) \\ &= f(x,y).\end{aligned} \tag{22.318}$$

Le résultat correspondant pour $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$ s'obtient de la même manière. Nous avons donc obtenu que

EqIMFormI33Ffdd

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g. \tag{22.319}$$

En ayant prouvé cela, nous avons prouvé que si $\omega = fdx + gdy$ avec $\partial_y f = \partial_x g$, alors $\omega = dF$ où F est définie par (22.315). □

Démonstration alternative du théorème 22.87. Nous posons $u = tx$ et $v = ty$, ainsi que $\mathcal{F}(x,y,t) = f(u,v)$ et $\mathcal{G}(x,y,t) = g(u,v)$. Avec cette notation, nous avons

$$F(x,y) = \int_0^1 \big(x\mathcal{F}(x,y,t) + y\mathcal{G}(x,y,t)\big)dt, \tag{22.320}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = t\frac{\partial f}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= t\frac{\partial g}{\partial u}.\end{aligned} \tag{22.321}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \int_0^1 \left(x\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \mathcal{F} + y\frac{\partial G}{\partial x} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(xt\frac{\partial f}{\partial u} + \mathcal{F} + yt\frac{\partial g}{\partial u} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left[t\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} \right) + \mathcal{F} \right] dt.\end{aligned} \tag{22.322}$$

où nous avons utilisé le fait que, par hypothèse, $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v}$. Nous calculons par ailleurs que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{22.323}$$

Donc, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^1 \left(t\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{F} \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(t\mathcal{F})dt. \tag{22.324}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = [t\mathcal{F}]_0^1 = \mathcal{F}(x, y, 1) = f(x, y). \tag{22.325}$$

Le même genre de calculs fournit $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$. □

22.14 Théorème d'Abel angulaire

ThoTGjmeen

Théorème 22.88 (Abel angulaire[112])**.**
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence plus grand ou égal à 1 et de somme f. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Nous posons

$$\Delta_{\theta_0} = \{z = 1 - \rho e^{i\varphi} \text{ tel que } \rho > 0, \varphi \in [-\theta_0, \theta_0], |z| < 1\}. \tag{22.326}$$

Nous supposons de plus que $\sum_n a_n$ converge. Alors

$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_0}} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{22.327}$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est que l'on peut calculer la limite $z \to 1$ avec des chemins contenus dans un domaine de la forme de celui dessiné à la figure 22.4.

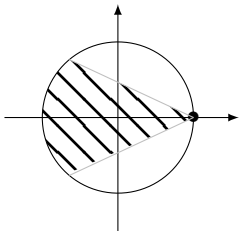


FIGURE 22.4 : La zone dans laquelle peut être le chemin qui va vers $z = 1$. LabelFigJGuKEjH

De façon très classique nous posons

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \tag{22.328}$$

et $R_n = S - S_n$. En particulier $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Le but du théorème est de montrer que $\sum a_n z^n$ converge vers S lorsque z converge vers 1 à l'intérieur de Δ_{θ_0}. Pour cela nous calculons pour un N donné la différence $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N$ en triant les termes par

ordre de R_n, en isolant le terme R_0 et le terme R_N :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(z^n - 1) \tag{22.329a}$$
$$= \sum_{n=1}^{N}(R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \tag{22.329b}$$
$$= R_0(z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1 - z^n + 1) + R_N(z^N - 1) \tag{22.329c}$$
$$= R_0(z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^n(z-1) + R_N(z^N - 1) \tag{22.329d}$$
$$= (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n + R_N(z^N - 1). \tag{22.329e}$$

Cela est valable pour tout N et $|z| < 1$. Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n + R_N(z^N - 1). \tag{22.330}$$

Par hypothèse nous avons $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$. Et de plus le membre de gauche converge parce que chacun des deux termes converge séparément. En passant à la limite nous avons pour tout $|z| < 1$:

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n. \tag{22.331}$$

Nous voudrions étudier le comportement de la différence $f(z) - S$ lorsque z tend vers 1. Pour cela nous nous fixons $\epsilon > 0$ et $N \geqslant 1$ tel que $|R_n| < \epsilon$ dès que $n \geqslant N$. Alors pour tout $|z| < 1$ nous avons

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \underbrace{|z^n|}_{\leqslant 1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{|R_n|}_{\leqslant \epsilon} |z^n| \right) \tag{22.332a}$$
$$\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \epsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \tag{22.332b}$$

où nous avons utilisé la somme de la série géométrique (4.174) et l'égalité $|z^n| = |z|^n$. Avant de nous particulariser à $z \in \Delta_{\theta_0}$ nous devons anticiper un problème au dénominateur en multipliant par le binôme conjugué :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2}. \tag{22.333}$$

C'est maintenant que nous nous particularisons à $z \in \Delta_{\theta_0}$ en posant $z = \rho e^{i\varphi}$ et en remarquant que $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\varphi) + \rho^2$. Nous avons le calcul suivant :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho(1+|z|)}{2\rho\cos(\varphi) - \rho^2} \tag{22.334a}$$
$$= \frac{1+|z|}{2\cos(\varphi) - \rho} \tag{22.334b}$$
$$\leqslant \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho} \tag{22.334c}$$
$$\leqslant \frac{2}{2\cos(\varphi) - \cos(\theta_0)} \tag{22.334d}$$
$$\leqslant \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \tag{22.334e}$$
$$= \frac{2}{\cos(\theta_0)}. \tag{22.334f}$$

Quelques justifications.

- Vu que nous avons dans l'idée de faire $\rho \to 0$ nous supposons que $\rho < \cos(\theta_0)$.
- Nous avons $\cos(\varphi) > \cos(\theta_0)$ parce que z est dans Δ_{θ_0}.

Nous avons donc, pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ que

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \epsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}. \tag{22.335}$$

Il suffit de prendre ρ assez petit pour que

$$|z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \epsilon \tag{22.336}$$

et nous avons

$$|f(z) - S| \leqslant \epsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right). \tag{22.337}$$

Nous avons donc bien $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_0}} f(z) = S$, comme nous le voulions. □

La réciproque du théorème d'Abel angulaire est que si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ sur $B(0,1)$ se prolonge par continuité en $z = 1$ alors cette prolongation se fait par $f(1) = \sum_n a_n$. Cela est faux comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 22.89.
Nous considérons la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ qui converge[21] vers

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \tag{22.338}$$

sur $B(0,1)$. De plus nous avons

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}. \tag{22.339}$$

Donc la fonction converge bien vers quelque chose lorsque z tend vers 1. La fonction f se prolonge par continuité en 1. Pourtant la série ses coefficients $\sum_n (-1)^n$ ne converge pas. △

Le théorème suivant donne une espèce d'inverse au théorème d'Abel angulaire. En effet il dit que si la série converge en allant vers 1 le long de l'axe réel, alors ça converge vers la somme des coefficients. Il faut cependant une hypothèse en plus sur les a_n.

Théorème 22.90 (Théorème taubérien faible[112])**.**
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Nous supposons

(1) Il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1,1[}} f(x) = S$.

(2) $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et vaut S.

Démonstration. Nous notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $M = \sup_{k \geqslant 1} k|a_k|$, qui est fini par hypothèse. Pour $x \in]0,1[$ et $n \geqslant 0$ nous avons

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k. \tag{22.340}$$

Nous utilisons la série géométrique sous la forme $1 - x^k = (1-x) \sum_{i=0}^{n} x^i$ pour écrire

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (1-x) \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} x^i}_{\leqslant k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \tag{22.341a}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} k a_k (1-x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \tag{22.341b}$$

[21] C'est la série géométrique de raison $-z$.

donc en passant à la norme

$$\big|S_n - f(x)\big| \leqslant (1-x)Mn + \sum_{k=n+1} |a_k| x^k \tag{22.342a}$$

$$\leqslant (1-x)Mn + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{n}|a_k|}_{\leqslant M/n} x^k \tag{22.342b}$$

$$\leqslant (1-x)Mn + \frac{M}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \tag{22.342c}$$

$$\leqslant (1-x)Mn + \frac{M}{n} \frac{1}{1-x}. \tag{22.342d}$$

Ce que nous cherchons à étudier est le comportement $x \to 1$ et montrer que $S_n \to S$, ce qui nous incite à calculer $|S_n - f(1 - \frac{\epsilon}{n})|$ avec $0 < \epsilon < 1$:

$$\big|S_n - f\big(1 - \frac{\epsilon}{n}\big)\big| \leqslant \epsilon M + \epsilon. \tag{22.343}$$

Nous choisissons N_1 tel que $\frac{M}{n} \leqslant \epsilon^2$ dès que $n \geqslant N_1$. En sus nous savons que

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(1-\epsilon) = S. \tag{22.344}$$

Nous choisissons N_2 de telle sorte à avoir

$$\left| f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S \right| < \epsilon, \tag{22.345}$$

et en prenant $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ nous avons

$$|S_n - S| \leqslant \left| S_n - f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S \right| \leqslant \epsilon M + 2\epsilon. \tag{22.346}$$

Il suffit de choisir ϵ suffisamment petit (en particulier pour que ϵM soit petit) pour montrer que $|S_n - S|$ est borné par un nombre arbitrairement petit. □

22.15 Passage à la limite sous le signe intégral

Un autre résultat très important pour l'étude de l'intégrabilité est le théorème de la **convergence dominée de Lebesgue** :

Théorème 22.91.
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable et $\{f_k\}$, une suite de fonctions intégrables sur E qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Supposons qu'il existe une fonction g intégrable sur E telle que pour tout k,

$$|f(x)| \leqslant g(x) \tag{22.347}$$

pour tout $x \in E$. Alors f est intégrable sur E et

$$\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_E f_k. \tag{22.348}$$

22.15.1 Intégrale en dimension un

Proposition 22.92 (Critère de comparaison)**.**
Soit f mesurable sur $]a, \infty[$ et bornée sur tout $]a, b]$, et supposons qu'il existe un $X_0 \geqslant a$, tel que sur $]X_0, \infty[$,

$$|f(x)| \leqslant g(x) \tag{22.349}$$

où $g(x)$ est intégrable. Alors $f(x)$ est intégrable sur $]a, \infty[$.

Corolaire 22.93 (Critère d'équivalence)**.**
Soient f et g des fonctions mesurables et positives ou nulles sur $]a, \infty[$, bornées sur tout $]a, b]$, telles que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{22.350}$$

existe dans $\bar{\mathbb{R}}$.

(1) Si $L \neq \infty$ et $\int_a^\infty g(x)dx$ existe, alors $\int_a^\infty f(x)dx$ existe,

(2) Si $L \neq 0$ et si $\int_a^\infty f(x)dx$ existe, alors $\int_a^\infty g(x)dx$ existe,

CorCritFonsTest

Corolaire 22.94 (Critère des fonctions test)**.**
Soit $f(x)$ une fonction mesurable et positive ou nulle sur $]a,\infty[$ et bornée pour tout $]a,b]$. Nous posons

$$L(\alpha) = \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x), \tag{22.351}$$

et nous supposons qu'elle existe.

(1) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $L(\alpha) \neq \infty$, alors $\int_a^\infty f(x)dx$ existe,

(2) Si il existe $\alpha \leqslant 1$ et $L(\alpha) \neq 0$, alors $\int_a^\infty f(x)dx$ n'existe pas.

CorAlphaLCasInteabf

Corolaire 22.95.
Soit $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, positive ou nulle, et bornée sur $[a+\epsilon,b]$ $\forall \epsilon > 0$. Si $\lim_{x\to a}(x-a)^\alpha f(x) = L$ existe, alors

(1) Si $\alpha < 1$ et $L \neq \infty$, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe,

(2) Si $\alpha \geqslant 1$ et $L \neq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$ n'existe pas.

22.15.2 Intégrales convergentes

Définition 22.96.
Soit f, une fonction mesurable sur $[a,\infty[$, bornée sur tout intervalle $[a,b]$. On dit que l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{22.352}$$

converge *si la limite*

$$\lim_{X\to\infty} \int_a^X f \tag{22.353}$$

EqDEfConvergeZeroInftX

existe et est finie.

22.15.3 La méthode de Rothstein-Trager

subSecBCRYooRVjFpS

Mes sources pour parler d'intégration de fractions rationnelles : [679].

ThoXJFatfu

Théorème 22.97 (Rothstein-Trager[680])**.**
Soient $P,Q \in \mathbb{Q}[X]$ premiers entre eux avec $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$ et $\deg(P) < \deg(Q)$. Nous supposons que Q est unitaire et sans facteurs carrés. Supposons que nous puissions écrire, dans un extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{Q}$ la primitive de P/Q de la façon suivante :

$$\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n c_i \ln(P_i) \tag{22.354}$$

EqCHVaDay

où les c_i sont des constantes non nulles et deux à deux distinctes et où les P_i sont des polynômes unitaires non constants sans facteurs carrés et premiers deux à deux entre eux dans $\mathbb{K}[X]$.

Alors les c_i sont les racines distinctes du polynôme

$$R(Y) = \operatorname{res}_X(P - YQ', Q) \in \mathbb{K}[Y] \tag{22.355}$$

et

$$P_i = \operatorname{pgcd}(P - c_i Q', Q). \tag{22.356}$$

Démonstration. Nous posons

$$U_i = \prod_{j\neq i} P_j. \tag{22.357}$$

(1) **Question de division** Ensuite nous dérivons formellement l'équation (22.354) et nous multiplions les deux côtés du résultat par $\prod_{j=1}^{n} P_j$:

$$P\prod_{j=1}^{n} P_j = Q\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{P'i}{P_i}\prod_{j=1}^{n} P_j = Q\sum_{i=1}^{n} c_i P'_i U_i. \tag{22.358}$$

Une première chose que nous en tirons est que Q divise le produit $P\prod_{j=1}^{n} P_j$; mais P et Q étant premiers entre eux,

$$Q \mid \prod_{j=1}^{n} P_j \tag{22.359}$$

par le théorème de Gauss 8.50.

Une seconde chose que nous tirons de (22.358) est que P_j divise $Q\sum_{i=1}^{n} c_i P'_i U_i$. De cette somme, à cause du U_i qui est divisé par P_j pour tout i sauf $i = j$, le polynôme P_j divise tous les termes sauf peut-être un. Donc il les divise tous et en particulier

$$P_j \mid Qc_j P'_J U_j \tag{22.360}$$

En nous souvenant que les P_k sont premiers entre eux, P_j ne divise pas U_j. De plus P_j étant sans facteurs carrés, les polynômes P_j et P'_j sont premiers entre eux. Il ne reste que Q. Nous en déduisons que

$$P_j \mid Q \tag{22.361}$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$. Et vu que les P_i sont premiers entre eux, le fait que chacun divise Q implique que leur produit divise Q, c'est-à-dire

$$\prod_{j=1}^{n} P_j \mid Q. \tag{22.362}$$

Or nous avions déjà prouvé la division contraire. Du fait que les deux polynômes sont unitaires nous en déduisons qu'ils sont en réalité égaux :

$$Q = \prod_{j=1}^{n} P_j. \tag{22.363}$$

Nous pouvons simplifier les deux membres de (22.358) par cela :

$$P = \sum_{i=1}^{n} c_i P'_i U_i. \tag{22.364}$$

(2) **Encore un peu de division**

En dérivant (22.363) nous trouvons

$$Q' = \sum_{j=1}^{n} P'_j U_j, \tag{22.365}$$

et en écrivant P sous sa forme (22.364),

$$P - c_i Q' = \sum_{j=1}^{n} c_j P'_j U_j - \sum_{j=1}^{n} c_i P'_j U_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c_i) P'_j U_j. \tag{22.366}$$

Le terme $i = j$ de la somme est nul ; en ce qui concerne les autres termes, ils sont divisés par P_i parce que $P_i \mid U_j$. Donc P_i divise tous les termes de la somme et nous avons

$$P_i \mid P - c_i Q'. \tag{22.367}$$

(3) **Un pgcd pour continuer**

Nous montrons à présent que $P_i = \text{pgcd}(P - c_i Q', Q)$. Pour cela nous utilisons la multiplicativité du PGCD lorsque les facteurs sont premiers entre eux :

$$\text{pgcd}(P - c_i Q', Q) = \text{pgcd}(P - c_i Q', \prod_{j=1}^{n} P_j) = \prod_{j=1}^{n} \text{pgcd}(P - c_i Q', P_j). \tag{22.368}$$

Nous remplaçons $P - c_iQ'$ par son expression (22.366) et nous écrivons un des facteurs du produit :

$$\operatorname{pgcd}(P - c_iQ', P_j) = \operatorname{pgcd}(\sum_{k=1}^{n}(c_k - c_i)P'_kU_k, P_j) \tag{22.369}$$

Le polynôme P_j divise tous les U_k sauf celui avec $k = j$. Donc le lemme 8.57(1) nous permet de dire

$$\operatorname{pgcd}(P - c_iQ', P_j) = \operatorname{pgcd}\left((c_j - c_i)P'_jU_j, P_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ P_j & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{22.370}$$

La seconde ligne provient du fait que nous ayons déjà montré que $P_j \mid P - c_jQ'$. En fin de compte,

$$\operatorname{pgcd}(P - c_iQ', Q) = P_i. \tag{22.371}$$

(4) **Une histoire de résultant**

Les nombres c_i sont tels que les polynômes $P - c_iQ'$ et Q ne sont pas premiers entre eux. Vu que les P_i sont non nuls, la proposition 10.23 nous dit que le résultant

$$\operatorname{res}_X(P - c_iQ', Q) = 0. \tag{22.372}$$

Donc les c_i sont des racines du polynôme (en Y)

$$R(Y) = \operatorname{res}_X(P - YQ', Q). \tag{22.373}$$

EqQOimwJj

Nous n'avons pas prouvé qu'ils étaient *toutes* les racines[22].

(5) **Toutes les racines**

Nous allons maintenant montrer que les c_i étaient toutes les racines imaginables du polynôme (22.373) dans toutes les extensions de $\mathbb{Q}$. Soit donc c une racine de R dans une extension $\hat{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ qui ne soit pas parmi les c_i de la formule (22.354). Étant donné que c est racine du résultat, les polynômes $P - cQ'$ et Q ont un PGCD non trivial, c'est-à-dire non constant. Donc

$$\operatorname{pgcd}(P - cQ', Q) = S \in \hat{\mathbb{K}}[X] \tag{22.374}$$

est un polynôme non constant. Si T un facteur irréductible de S, alors T divise $P - cQ'$ et Q, mais $Q = \prod_{i=1}^{n} P_i$ avec les P_i premiers entre eux. Donc T ne peut diviser que l'un (et exactement un) d'entre eux[23]. Soit P_{i_0} celui qui est divisé par T. La relation (22.366) dans ce contexte donne :

$$P - cQ' = \sum_{j=1}^{n}(c_j - c)P'_jU_j \tag{22.375}$$

Le polynôme T divise tous les U_j avec $j \neq i_0$, mais comme en plus il divise $P - cQ'$, il divise aussi le dernier terme de la somme :

$$T \mid (c_{i_0} - c)P'_{i_0}U_{i_0}. \tag{22.376}$$

Le polynôme T ne divisant pas U_{i_0} et $(c_{i_0} - c)$ étant non nul, nous concluons que T divise P'_{i_0}. Mais cela n'est pas possible parce que nous avons supposé que P_{i_0} était sans facteur carré, ce qui voulait entre autres dire que P_{i_0} et P'_{i_0} n'ont pas de facteurs communs.

□

Ce théorème suggère la méthode suivante pour trouver la primitive de la fraction rationnelle P/Q (si elle vérifie les hypothèses)

(1) Écrire le résultant $R(y) = \operatorname{res}_X(P - yQ', Q)$ et en trouver les racines $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$.

(2) Calculer les polynômes $P_i = \operatorname{pgcd}(P - c_iQ', Q)$.

(3) Écrire la réponse :

$$\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \ln(P_i). \tag{22.377}$$

[22] De plus, nous n'avons pas de garanties que ces racines soient dans $\mathbb{Q}$, et en fait il y a des cas dans lesquels les c_i n'y sont pas.

[23] On ne peut pas diviser deux trucs qui sont premiers entre eux ; c'est une question de cohérence, madame !

Notons que le polynôme $R(Y)$ est de degré $\deg(Q)$ (pour le voir, faire un peu de comptage de lignes et colonnes dans la matrice de Sylvester), donc il n'est à priori pas pire à factoriser que Q lui-même[24]. Mais il se peut que nous ayons de la chance et que R soit plus facile que Q.

À part qu'on a peut-être plus de chance avec R qu'avec Q, l'avantage de la méthode est qu'elle permet d'éviter de passer par des extensions de $\mathbb{Q}$ non nécessaires[25].

Exemple 22.98 ([680]).
Prenons la fraction rationnelle $\frac{x}{x^2-3}$. L'intégration via les fractions simples est :

$$\int \frac{x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln(x-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln(x^2-3). \tag{22.378}$$

Nous voyons que dans la réponse, il n'y a pas de racines. Passer par l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est par conséquent peut-être un effort inutile. Voyons comment les choses se mettent avec la méthode Rothstein-Trager.

D'abord

$$\begin{aligned}
R(Y) &= \operatorname{res}_X(X - 2YX, X^2 - 3) && (22.379a)\\
&= \operatorname{res}_X\big((1-2Y)X, X^2-3\big) && (22.379b)\\
&= \det\begin{pmatrix} 1-2Y & 0 & 0 \\ 0 & 1-2Y & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} && (22.379c)\\
&= (1-2Y)\big(-3(1-2Y)\big) && (22.379d)\\
&= -3(1-2Y)^2, && (22.379e)
\end{aligned}$$

dont les solutions sont faciles : il n'y a que la racine double $y = \frac{1}{2}$. La somme (22.354) sera donc réduite à un seul terme avec $c_1 = \frac{1}{2}$. Nous calculons P_1 :

$$P_1 = \operatorname{pgcd}(X - \frac{1}{2}2X, X^2 - 3) = \operatorname{pgcd}(0, X^2 - 3) = X^2 - 3, \tag{22.380}$$

et par conséquent

$$\int \frac{X}{X^2-3} = \frac{1}{2}\ln(X^2-3). \tag{22.381}$$

À aucun moment nous ne sommes sortis de $\mathbb{Q}$. △

Comme vu sur cet exemple, l'intérêt du théorème de Rothstein-Trager est de permettre, lorsqu'on a de la chance, d'en profiter, et non de nous en rendre compte à la fin en remarquant bêtement que la réponse pouvait s'écrire dans $\mathbb{Q}[X]$.

Remarque 22.99.
Afin d'utiliser cette méthode, il faut s'assurer que Q soit sans facteurs carrés. Si nous devons intégrer un $\frac{P}{Q}$ quelconque, nous devons commencer par écrire

$$Q = Q_1Q_2^2Q_3^3\dots Q_r^r, \tag{22.382}$$

et ensuite il y a moyen de ramener l'intégrale de P/Q à des intégrales de $\frac{P}{Q_1\dots Q_r}$. Cela ne demande pas de factoriser complètement Q, mais seulement de trouver ses facteurs irréductibles Q_i dans $\mathbb{Q}[X]$.

Dans l'exemple donné plus haut, $Q = X^2 - 3$ a des facteurs irréductibles autres que Q lui-même dans $\mathbb{R}[X]$, mais nous n'en avons pas besoin.

Voici une exemple où nous évitons de passer par les complexes.

EXooIPEQooGKDjea

Exemple 22.100 ([681]).
À calculer : $\int \frac{1}{x^3+x}$. La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{1/2}{x-i} - \frac{1/2}{x+i}. \tag{22.383}$$

Déjà cette décomposition passe par l'extension $\mathbb{Q}[i]$, et le calcul de la primitive de $\frac{1}{x+i}$ demande le logarithme complexe qui ne sera vu que dans la proposition 28.44 au prix d'un peu de sang. Nous verrons dans l'exemple 28.45 comment ça se passe en passant par les complexes.

[24] C'est de la factorisation de Q qu'on a besoin pour utiliser la méthode de décomposition en fractions simples.
[25] J'imagine que pour un ordinateur, c'est plus facile d'éviter les extensions.

En ce qui concerne la méthode de Rothstein-Trager, nous commençons par calculer le résultant (qui est tout de même un peu de calcul) :

$$P(y) = \text{res}_X\big(-3yX^2 - y + 1, X^3 - X\big) \tag{22.384a}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -3y & 0 & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & -3y & 0 & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & -3y & 0 & 1-y \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{22.384b}$$

$$= -(y-1)^2(2y+1)^2 \tag{22.384c}$$

```
------------------------------------------------------------------------
| Sage Version 5.7, Release Date: 2013-02-19                           |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.          |
| Type "help()" for help.                                              |
------------------------------------------------------------------------
sage: y=var('y')
sage: R=matrix(5,5,[-3*y,0,1-y,0,0,0,-3*y,0,1-y,0,0,0,
                    -3*y,0,1-y,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0])
sage: R.determinant().factor()
-(y - 1)*(2*y + 1)^2
```

Les solutions sont $c_1 = 1$ et $c_2 = -\frac{1}{2}$. Nous pouvons alors calculer les P_i :

$$P_1 = \text{pgcd}(-3X^2, X^3 + X) = X \tag{22.385}$$

et

$$P_2 = \text{pgcd}(\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}, X^3 + X) = X^2 + 1, \tag{22.386}$$

et finalement

$$\int \frac{1}{X^3 + X} = \ln(X) - \frac{1}{2}\ln(X^2 + 1). \tag{22.387}$$

△

Notons qu'il n'y a pas de miracles : lorsque la réponse contient des racines, nous ne pouvons pas couper à passer par des extensions et factoriser un peu à la dure.

ExYQODuyU

Exemple 22.101 ([681]).
Nous voulons calculer

$$\int \frac{1}{X^2 + 1}. \tag{22.388}$$

Nous posons donc $P = 1$ et $Q = X^2 + 1$. Le résultant à calculer est

$$P(y) = \text{res}_X(-2yX + 1, X^2 + 1) = \det\begin{pmatrix} -2y & 1 & 0 \\ 0 & -2y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4y^2 + 1. \tag{22.389a}$$

Les racines de cela sont complexes et il n'y a donc pas d'échappatoires : $c_1 = \frac{i}{2}$, $c_2 = -\frac{i}{2}$. Ensuite, étant donné que $X^2 + 1 = (X + i)(X - i) = i(-iX + 1)(X - i)$ nous avons

$$P_1 = \text{pgcd}(-iX + 1, X^2 + 1) = X + i. \tag{22.390}$$

Notons que de façon naturelle, nous aurions écrit $P_1 = 1 - iX$, mais par convention nous considérons le PGCD unitaire. Cela ne change rien à la réponse parce que changer P_i en kP_i ne fait que rajouter une constante $\ln(k)$ à la primitive trouvée.

De la même façon,

$$P_2 = \text{pgcd}(1 + iX, X^2 + 1) = X - i. \tag{22.391}$$

Au final nous écrivons

$$\int \frac{1}{X^2 + 1} = \frac{i}{2}\ln(X + i) - \frac{i}{2}\ln(X - i). \tag{22.392}$$

△

Remarque 22.102.
Tout cela est si nous voulons absolument écrire la primitive avec des logarithmes de polynômes. Pour celui de l'exemple 22.101, nous avons trouvé

$$\int \frac{1}{X^2+1} = \frac{i}{2}\ln(X+i) - \frac{i}{2}\ln(X-i). \tag{22.393}$$

EqBCiCCbs

Mais

```
sage: f(x)=1/(x**2+1)
sage: f.integrate(x)
x |--> arctan(x)
```

Si nous acceptons de passer aux fonctions trigonométriques (inverses), la primitive prend un tour très différent et bien réel. Ces deux visions de l'univers sont bien entendu[26] compatibles. En effet, afin de tomber juste, nous allons prendre la primitive

$$f(x) = \frac{i}{2}\ln(ix-1) - \frac{i}{2}\ln(ix+1) \tag{22.394}$$

au lieu de (22.393). Il s'agit seulement de multiplier l'intérieur des logarithmes, ce qui ne donne qu'une constante de différence. Ensuite nous passons à la forme trigonométrique des nombres complexes : $ix-1 = \sqrt{x^2+1}e^{i\arctan(-x)}$ et $ix+1 = \sqrt{x^2+1}e^{i\arctan(x)}$. Avec un peu de calcul,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\Big(\arctan(-x) - \arctan(x)\Big) = \arctan(x). \tag{22.395}$$

22.16 Rappel sur les intégrales usuelles

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{22.396}$$

L'intégrale de f sur le segment $[a,b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$ est le nombre égal à l'aire de la surface située entre le graphe de f et l'axe des x, comme indiqué à la figure 22.5.

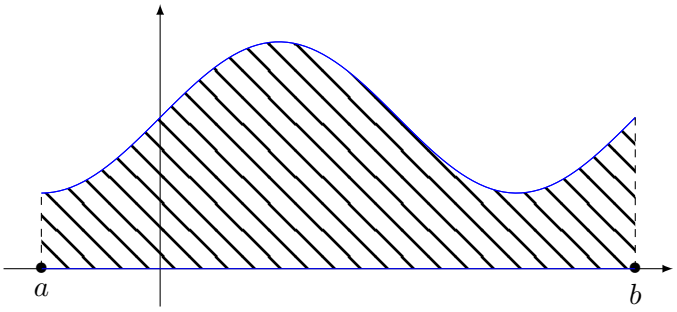


FIGURE 22.5 : L'intégrale de f entre a et b représente la surface sous la fonction.

LabelFigKKLooMbjxdI

Définition 22.103.
Si f est une fonction de une variable à valeurs réelles, une ***primitive*** *de f est une fonction F telle que $F' = f$.*

Toute fonction continue admet une primitive.

Théorème 22.104 (Théorème fondamental du caclul intégral)**.**
Si f est une fonction positive et continue, et si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{22.397}$$

[26] Si on croit que la mathématique est cohérente.

Remarque 22.105.
Si f est une fonction continue par morceaux, l'intégrale de f se calcule comme la somme des intégrales de ses morceaux. Plus précisément si nous avons $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et si f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout i, alors nous posons

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx. \tag{22.398}$$

Sur chacun des morceaux, l'intégrale se calcule normalement en passant par une primitive.

22.17 Intégrales le long de chemins

22.17.1 Circulation d'un champ de vecteur

Définition 22.106.
Soit $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs et un chemin $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$. On appelle ***circulation*** *de F le long du chemin σ le scalaire*

$$\int_a^b F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t)dt. \tag{22.399}$$

EqDeffvkZwh

Il existe de nombreuses notations pour cela ; entre autres :

$$\int_\sigma F = \int_\sigma F \cdot ds. \tag{22.400}$$

En physique, la circulation de la force le long d'un chemin est le travail de la force.

Exemple 22.107.
À la surface de la Terre, le champ de gravitation est donné par

$$G(x,y,z) = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22.401}$$

Si nous considérons un mobile qui monte à vitesse constante jusqu'à la hauteur h, c'est-à-dire le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \tag{22.402}$$

avec $t \in [0,h]$. Le travail de la gravitation est alors donné par

$$W = \int_0^h G\big(\sigma(t)\big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mg \int_0^h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mgh. \tag{22.403}$$

Cela est bien le résultat usuel de l'énergie potentielle. Nous allons voir bientôt que nous nommons la fonction mgh énergie *potentielle* précisément parce que la force dérive de ce potentiel. △

Exemple 22.108.
Soit le chemin

$$\begin{aligned} \sigma\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22.404}$$

et le champ de vecteurs

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{22.405}$$

La circulation de ce champ de vecteur le long de l'hélice σ est

$$\begin{aligned}\int_\sigma F\cdot ds &= \int_0^{2\pi}(F\circ\sigma)(t)\cdot\sigma'(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\\ t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\\ 1\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{2\pi}tdt\\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}\\ &= 2\pi^2.\end{aligned}\tag{22.406}$$

△

Proposition 22.109.
La circulation d'un champ de vecteurs le long d'un chemin ne dépend pas du paramétrage. En d'autres termes, si σ_1 et σ_2 sont deux chemins équivalents, alors

$$\int_{\sigma_1}F=\int_{\sigma_2}F.\tag{22.407}$$

Démonstration. Soient deux chemins $\sigma_1\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ et $\sigma_2\colon[c,d]\to\mathbb{R}^3$ équivalents, c'est-à-dire tels que

$$\sigma_1(t)=\sigma_2\big(\varphi(t)\big)\tag{22.408}$$

où $\varphi\colon[a,b]\to[c,d]$ strictement croissante. En utilisant le fait que $\sigma_1'(t)=\varphi'(t)\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1}F\cdot ds &= \int_a^b F\big(\sigma_1(t)\big)\cdot\sigma_1'(t)dt\\ &= \int_a^b F\Big(\sigma_2\big(\varphi(t)\big)\Big)\cdot\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt\\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}F\big(\sigma_2(s)\big)\cdot\sigma_2(s)ds\\ &= \int_c^d F\big(\sigma_2(s)\big)\cdot\sigma_2'(s)ds\\ &= \int_{\sigma_2}F\cdot ds.\end{aligned}\tag{22.409}$$

où nous avons effectué le changement de variables $s=\varphi(t)$, $ds=\varphi'(t)dt$. □

Remarque 22.110.
Si σ_2 est le chemin opposé de σ, alors

$$\int_{\sigma_2}F=-\int_{\sigma_1}F.\tag{22.410}$$

22.18 Circulation d'un champ conservatif

Si nous avons une fonction scalaire $V\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, nous pouvons construire un champ de vecteur en prenant le gradient :

$$F(x)=\nabla V(x).\tag{22.411}$$

On dit que le champ de vecteur F **dérive** de V, et on dit que V est le **potentiel** de F. Nous posons la définition suivante :

Définition 22.111.
*Un champ de vecteurs $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est un champ **conservatif** si il existe une fonction $V\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que*

$$F(x)=\nabla V(x).\tag{22.412}$$

Nous disons aussi parfois que le champ F dérive d'un potentiel *ou bien qu'il s'agit d'un* champ de gradient.

Les champs de vecteurs conservatifs sont particulièrement importants parce que presque toutes les forces connues en physiques dérivent d'un potentiel. Nous verrons que la terminologie « conservatif » provient du fait que les forces de ce type conservent l'énergie associée.

Proposition 22.112.
Considérons une fonction $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *(que nous appellerons* potentiel*) et le champ de vecteur qui en dérive :*

$$F = \nabla V. \tag{22.413}$$

Alors

$$\int_\sigma F \cdot ds = V\big(\sigma(b)\big) - V\big(\sigma(a)\big). \tag{22.414}$$

Autrement dit, le travail nécessaire pour déplacer un objet d'un point à un autre dans un champ de force conservatif vaut la différence de potentiel entre le point de départ et le point d'arrivée.

Démonstration. Par définition,

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t)dt. \tag{22.415}$$

Eqintpardefvec

Nous pouvons transformer l'intégrante de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t) &= \nabla V\big(\sigma(t)\big) \cdot \sigma'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}\big(\sigma(t)\big)\sigma_x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}\big(\sigma(t)\big)\sigma_y'(t) + \frac{\partial V}{\partial z}\big(\sigma(t)\big)\sigma_z'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big[V\big(\sigma(t)\big)\Big] \end{aligned} \tag{22.416}$$

où nous avons posé

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{pmatrix} \tag{22.417}$$

et utilisé à l'envers la formule de dérivation de fonction composée pour

$$\frac{d}{dt}\Big[V\big(\sigma(t)\big)\Big] = \Big((V \circ \sigma)(t)\Big)'. \tag{22.418}$$

En remettant ces expressions dans l'intégrale (22.415),

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b \frac{d}{dt}\Big[V\big(\sigma(t)\big)\Big]dt = V\big(\sigma(b)\big) - V\big(\sigma(a)\big). \tag{22.419}$$

□

Exemple 22.113.
Nous savons que le champ de gravitation dérive d'un potentiel. À la surface de la Terre, le potentiel de gravitation vu par une masse m est donné par la fonction $V(x, y, z) = mgz$. Si nous voulons soulever cette masse d'une hauteur h, cela demandera toujours une énergie mgh, quel que soit le chemin suivi : en ligne droite vertical, en diagonal, en hélice, … △

Exemple 22.114.
À plus grande échelle, le champ de gravitation est encore un champ qui dérive d'un potentiel. En coordonnées sphériques,

$$V(\rho, \theta, \varphi) = k\frac{m}{\rho} \tag{22.420}$$

Lorsqu'un satellite a une orbite de rayon R autour la Terre, il reste sur la sphère $\rho = R$. Donc il reste sur une surface sur laquelle V est constante. Il n'y a donc pas de travail de la force de gravitation ! C'est pour cela qu'un satellite peut tourner pendant des siècles sans apport énergétique. △

Exemple 22.115.
Soit le champ de vecteurs

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \tag{22.421}$$

et le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^4/4 \\ \sin^3(t\frac{\pi}{2}). \end{pmatrix} \tag{22.422}$$

Nous voulons calculer la circulation de F le long du chemin σ entre $t=0$ et $t=1$.

La première chose à voir est que $F=\nabla V$ avec $V(x,y)=xy$. Donc la circulation sera donnée par

$$\int_\sigma F\cdot ds=V\big(\sigma(1)\big)-V\big(\sigma(0)\big)=V\big(\frac{1}{4},1\big)-V(0,0)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}. \tag{22.423}$$

Nous n'avons pas réellement calculé l'intégrale. △

22.19 Intégration de fonction à deux variables

22.19.1 Intégration sur un domaine rectangulaire

PgRapIntMultFubiniRect

Soit une fonction positive

$$\begin{aligned} f\colon [a,b]\times[c,d]&\to\mathbb{R}^+\\ (x,y)&\mapsto f(x,y). \end{aligned} \tag{22.424}$$

L'intégrale de f sur le rectangle $[a,b]\times[c,d]$ est le volume sous le graphe de la fonction. C'est-à-dire le volume de l'ensemble

$$\{(x,y,z)\text{ tel que }(x,y)\in[a,b]\times[c,d],z\leqslant f(x,y)\}. \tag{22.425}$$

Théorème 22.116 (Théorème de Fubini)**.**
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathcal{R}=[a,b]\times[c,d]$. Alors

$$\int_{\mathcal{R}}f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy. \tag{22.426}$$

En pratique, nous utilisons le théorème de Fubini pour calculer les intégrales sur des rectangles.

Exemple 22.117.
Nous voudrions intégrer la fonction $f(x,y)=4+x^2+y^2$ sur le rectangle de la figure 22.6.

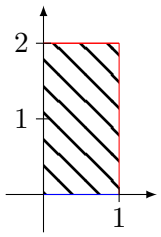


FIGURE 22.6 : Intégration sur un rectangle

LabelFigVNBGooSqMsGU

L'ensemble sur lequel nous intégrons est donné par le produit cartésien d'intervalles $E=[0,1]\times[0,2]$. Le théorème de Fubini montre que nous pouvons intégrer séparément sur l'intervalle horizontal et vertical :

$$\int_{E=[0,1]\times[0,2]}f=\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,2]}(4-x^2-y^2)dy\right)dx. \tag{22.427}$$

Ces intégrales sont maintenant des intégrales usuelles qui s'effectuent en calculant des primitives :

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^2(4-x^2-y^2)dy\,dx&=\int_0^1\left[4y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2dx\\ &=\int_0^1(8-2x^2-\frac{8}{3})dx\\ &=\left[\frac{16x}{3}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1\\ &=\frac{14}{3}. \end{aligned} \tag{22.428}$$

Avec Sage, on peut faire comme ceci :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=4-x**2-y**2
sage: f.integrate(y,0,2).integrate(x,0,1)
(x, y) |--> 14/3
```

△

22.19.2 Intégration sur un domaine non rectangulaire

PgRapIntMultFubiniTri

Nous voulons maintenant intégrer la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ sur le triangle de la figure 22.7.

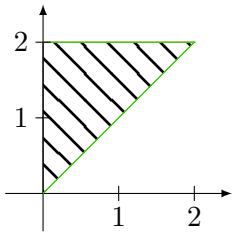


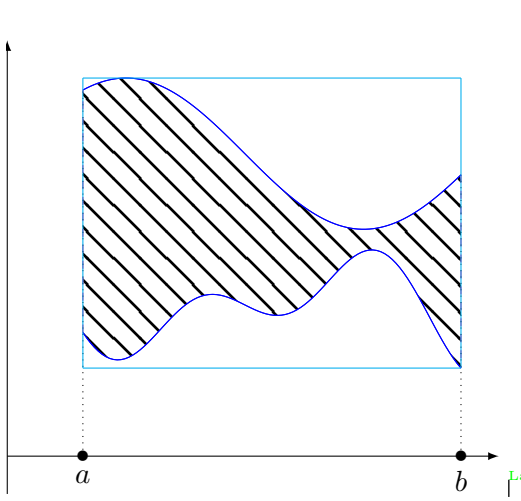
FIGURE 22.7 : Intégration sur un triangle

LabelFigCURGooXvruWV

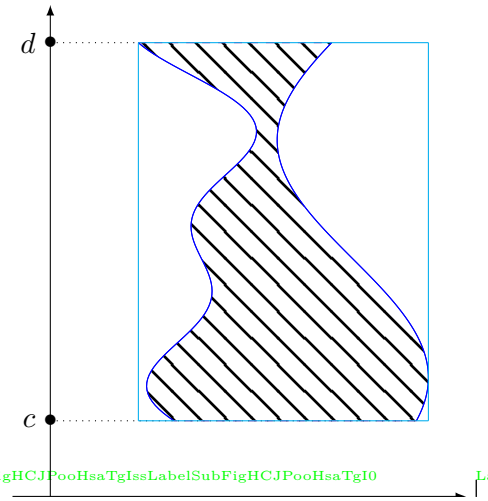
Étant donné que y varie de 0 à 2 et que *pour chaque* y, la variable x varie de 0 à y, nous écrivons l'intégrale sur le triangle sous la forme :

$$\int_{\text{triangle}}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^y(x^2+y^2)dx\right)dy. \tag{22.429}$$

Il existe principalement deux types de domaines non rectangulaires : les « horizontaux » et les « verticaux », voir figure 22.8.



(a) Un domaine horizontal.



(b) Un domaine vertical.

LabelFigHCJPooHsaTgIssLabelSubFigHCJPooHsaTgI0 LabelFigHCJPooHsaTgIssLa

FIGURE 22.8 : Deux types de surfaces. Nous avons tracé un rectangle qui contient chacune des deux surfaces. L'intégrale sur un domaine sera l'intégrale sur le rectangle de la fonction qui vaut zéro en dehors du domaine.

LabelFigHCJPooHsaTgI

Les surfaces horizontales sont de la forme

$$D=\{(x,y)\text{ tel que }x\in[a,b],\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\} \tag{22.430}$$

où φ_1 et φ_2 sont les deux fonctions qui bornent le domaine. Le domaine D est la région comprise entre les graphes de φ_1 et φ_2. Pour un tel domaine nous avons

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{22.431}$$

Les surfaces verticales sont de la forme

$$D = \{(x,y) \text{ tel que } y \in [c,d], \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\} \tag{22.432}$$

où φ_1 et φ_2 sont les deux fonctions qui bornent le domaine. Le domaine D est la région comprise entre les graphes de φ_1 et φ_2. Dans ces cas nous avons

$$\int_D f = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{22.433}$$

Proposition 22.118.
L'aire du domaine D vaut l'intégrale de la fonction $f(x,y) = 1$ sur D :

$$Aire(D) = \int_D dxdy. \tag{22.434}$$

Démonstration. Supposons que le domaine soit du type « horizontal ». En utilisant le théorème de Fubini avec $f(x,y) = 1$ nous avons

$$\int_D dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right] dx = \int_a^b \big[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big]. \tag{22.435}$$

Cela représente l'aire sous φ_2 moins l'aire sous φ_1, et par conséquent l'aire contenue entre les deux. □

Exemple 22.119.
Cherchons la surface du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dessinée à la figure 22.9.

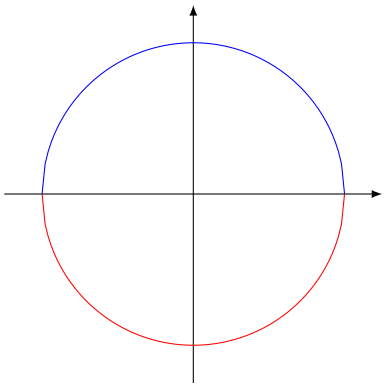


FIGURE 22.9 : En bleu, la fonction $\sqrt{r^2 - x^2}$ et en rouge, la fonction $-\sqrt{r^2 - x^2}$.LabelFigCMMAooQegASg

Le domaine est donné par $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ et $x \in [-r,r]$ où $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ et $\varphi_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. L'aire est donc donnée par

$$A = \int_{-r}^{r} \big[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big]dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}. \tag{22.436}$$

Nous effectuons le premier changement de variables $x = ru$, donc $dx = rdu$. En ce qui concerne les bornes, si $x = 0$, alors $u = 0$ et si $x = r$, alors $u = 1$. L'intégrale à calculer devient

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{r^2 - r^2u^2}rdu = 4r^2\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}du. \tag{22.437}$$

Cette dernière intégrale se calcule en posant

$$\begin{aligned} u &= \sin(t) \quad du = \cos(t)dt \\ u &= 0 \qquad\quad t = 0 \\ u &= 1 \qquad\quad t = \pi/2. \end{aligned} \tag{22.438}$$

Nous avons

$$A = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt. \tag{22.439}$$

En utilisant la formule $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, nous avons

$$A = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \pi r^2. \tag{22.440}$$

△

22.19.3 Changement de variables

Nous n'allons pas parler de changements de variables maintenant parce que les principaux exemples sont les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques qui requièrent les fonctions trigonométriques. Ce sera pour la section 20.16.

22.20 Les intégrales triples

Les intégrales triples fonctionnent exactement de la même manière que les intégrales doubles. Il s'agit de déterminer sur quelle domaine les variables varient et d'intégrer successivement par rapport à x, y et z. Il est autorisé de permuter l'ordre d'intégration[27] à condition d'adapter les domaines d'intégration.

Exemple 22.120.
Soit le domaine parallélépipédique rectangle

$$R = [0,1] \times [1,2] \times [0,4]. \tag{22.441}$$

Pour intégrer la fonction $f(x,y,z) = x^2 y\sin(z)$ sur R, nous faisons

$$\begin{aligned} I &= \int_R x^2 y\sin(z)\,dxdydz \\ &= \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^4 x^2 y\sin(z)dz \\ &= \int_0^1 dx \int_1^2 x^2 y(1-\cos(4))dy \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}(1-\cos(4))x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\big(1-\cos(4)\big). \end{aligned} \tag{22.442}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y,z)=x**2*y*sin(z)
sage: f.integrate(x,0,1).integrate(y,1,2).integrate(z,0,4)
(x, y, z) |--> -1/2*cos(4) + 1/2
```

△

Exemple 22.121.
Soit D la région délimitée par le plan $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ et la surface d'équation

$$z = x^2 + y^2. \tag{22.443}$$

Cherchons à calculer $\int_D x\,dx\,dy\,dz$. Ici, un dessin indique que le volume considéré est $z \geqslant x^2 + y^2$. Il y a plusieurs façons de décrire cet ensemble. Une est celle-ci :

$$\begin{aligned} &z\colon 0 \to 2 \\ &x\colon 0 \to \sqrt{z} \\ &y\colon 0 \to \sqrt{z-x^2}. \end{aligned} \tag{22.444}$$

[27] En toute rigueur, cela n'est pas vrai, mais nous ne considérons seulement des cas où cela est autorisé.

Cela revient à dire que z peut prendre toutes les valeurs de 0 à 2, puis que pour chaque z, la variable x peut aller de 0 à $\sqrt{z}$, mais que pour chaque z et x fixés, la variable y ne peut pas dépasser $\sqrt{z-x^2}$. En suivant cette méthode, l'intégrale à calculer est

$$\int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_0^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)dy. \tag{22.445}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y,z)=x
sage: assume(z>0)
sage: assume(z-x**2>0)
sage: f.integrate(y,0,sqrt(z-x**2)).integrate(x,0,sqrt(z)).integrate(z,0,2)
(x, y, z) |--> 8/15*sqrt(2)
```

Notez qu'il a fallu aider Sage en lui indiquant que $z > 0$ et $z - x^2 > 0$.

Un autre paramétrage serait

$$\begin{aligned} x&\colon 0 \to \sqrt{2} \\ y&\colon 0 \to \sqrt{2-x^2} \\ z&\colon x^2+y^2 \to 2. \end{aligned} \tag{22.446}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y,z)=x
sage: assume(2-x**2>0)
sage: f.integrate(y,0,sqrt(z-x**2)).integrate(x,0,sqrt(z)).integrate(z,0,2)
(x, y, z) |--> 8/15*sqrt(2)
```

Écrivons le détail de cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^2 x dz \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx\, x \left[(2-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}x(2-x^2)^{3/2}dx. \end{aligned} \tag{22.447}$$

Ici nous effectuons le changement de variable $u = x^2$, $du = 2xdx$. Ne pas oublier de changer les bornes de l'intégrale :

$$I = \frac{1}{3}\int_0^2 (2-u)^{3/2}du. \tag{22.448}$$

Le changement de variable $t = 2 - u$, $dt = -du$ fait venir (attention aux bornes !!)

$$I = -\frac{1}{3}\int_2^0 t^{3/2}dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_0^2 = \frac{8}{15}\sqrt{2}. \tag{22.449}$$

△

22.20.1 Volume

Parmi le nombreuses interprétations géométriques de l'intégrale triple, notons celle-ci :

Proposition 22.122.
Soit $D \subset \mathbb{R}^3$. Le volume de D est donné par

$$Vol(D) = \int_D dxdydz. \tag{22.450}$$

C'est-à-dire l'intégrale de la fonction $f(x,y,z) = 1$ sur D.

Suivant les points de vue, cette proposition peut être considérée comme une *définition* du volume.

ExemVolSphCart

Exemple 22.123.
Calculons le volume de la sphère de rayon R. Le domaine de variation des variables x, y et z pour la sphère est

$$\begin{aligned} x&: -R \to R \\ y&: -\sqrt{R^2-x^2} \to \sqrt{R^2-x^2} \\ z&: -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \to \sqrt{R^2-x^2-y^2}. \end{aligned} \tag{22.451}$$

Par conséquent nous devons calculer l'intégrale

$$V = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz. \tag{22.452}$$

La première intégrale est simple :

$$V = 2\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dy. \tag{22.453}$$

Afin de simplifier la notation, nous posons $a = R^2 - x^2$. Ceci n'est pas un changement de variables : juste une notation provisoire le temps d'effectuer l'intégration sur y. Étudions donc

$$I = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \sqrt{a-y^2}dy, \tag{22.454}$$

ce qui est la surface du demi-disque de rayon $\sqrt{a}$. Nous avons donc

$$I = \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2-x^2), \tag{22.455}$$

et

$$V = 2\int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2}(R^2-x^2)dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{22.456}$$

△

Exemple 22.124.
Nous pouvons calculer le volume de la sphère en utilisant les coordonnées sphériques. Les bornes des variables pour la sphère de rayon R sont

$$\begin{aligned} \rho&: 0 \to R \\ \theta&: 0 \to \pi \\ \varphi&: 0 \to 2\pi. \end{aligned} \tag{22.457}$$

En n'oubliant pas le jacobien $\rho^2\sin(\theta)$, l'intégrale à calculer est

$$V = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho^2\sin(\theta)d\theta \tag{22.458}$$

L'intégrale sur φ fait juste une multiplication par 2π. Celle sur ρ vaut

$$\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3}{3}. \tag{22.459}$$

L'intégrale sur θ donne

$$\int_0^{\pi} \sin(\theta)d\theta = [-\cos(\theta)]_0^{\pi} = 2. \tag{22.460}$$

Le tout fait par conséquent

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{22.461}$$

Sans contestes, le passage aux coordonnées sphériques a considérablement simplifié le calcul par rapport à celui de l'exemple 22.123. △

22.21 Un petit peu plus formel

22.21.1 Intégration sur un domaine non rectangulaire

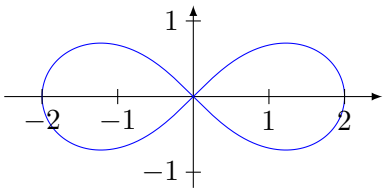


FIGURE 22.10 : Intégrer sur des domaines plus complexes. LabelFigPONXooXYjEot

La méthode de Fubini ne fonctionne plus sur un domaine non rectangulaire tel que celui de la figure 22.10. Nous allons donc utiliser une astuce. Considérons le domaine

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a < x < b \text{ et } \alpha(x) < y < \beta(x)\} \tag{22.462}$$

représenté sur la figure 22.10. Nous considérons la fonction

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22.463}$$

Ensuite intégrons $\tilde{f}$ sur un rectangle qui englobe la surface à intégrer à l'aide de Fubini. Étant donné que $\tilde{f} = f$ sur la surface et que $\tilde{f}$ est nulle en dehors, nous avons

$$\int_E f = \int_E \tilde{f} = \int_{\text{rectangle}} \tilde{f} = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx. \tag{22.464}$$

Dans le cas de l'intégrale de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le triangle de la figure 22.7, nous avons

$$\int_{\text{triangle}} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^y (x^2+y^2)dx \right) dy. \tag{22.465}$$

Remarque 22.125.
Le nombre $\int_D f(x,y)dxdy$ ne dépend pas du choix du rectangle englobant D.

En pratique, nous calculons l'intégrale en utilisant une extension du théorème de Fubini :

Théorème 22.126.
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue où D est un domaine de type vertical ou horizontal.

(1) Si D est vertical, alors

$$\int_D f = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx. \tag{22.466}$$

(2) Si D est horizontal, alors

$$\int_D f = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy. \tag{22.467}$$

22.21.1.1 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont données par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} g\colon]0,\infty[\times]0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r,\theta) &\mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \end{aligned} \tag{22.468}$$

où D est la demi-droite $y = 0$, $x \geqslant 0$. Le fait que les coordonnées polaires ne soient pas un difféomorphisme sur tout $\mathbb{R}^2$ n'est pas un problème pour l'intégration parce que le manque de difféomorphisme est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. Le jacobien est donné par

$$Jg = \det \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = r. \tag{22.469}$$

22.21.1.2 Coordonnées sphériques

SubSubCoordSpJxhMwm

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi & \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & \text{avec} \quad \begin{array}{l} r\in]0,\infty[\\ \theta\in]0,2\pi[\\ \phi\in]0,\pi[. \end{array} \\ z = r\cos\varphi & \end{cases} \tag{22.470}$$

OMEqChmVarSpherique

Le jacobien associé est $Jg(r,\theta,\varphi) = -r^2\sin\varphi$. Rappelons que ce qui rentre dans l'intégrale est la valeur absolue du jacobien.

Si nous voulons calculer le volume de la sphère de rayon R, nous écrivons donc

$$\int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} r^2\sin(\phi)d\phi = 4\pi R = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{22.471}$$

Ici, la valeur absolue n'est pas importante parce que lorsque $\phi\in]0,\pi,[$, le sinus de ϕ est positif.

Des petits malins pourraient remarquer que le changement de variable (22.470) est encore un paramétrage de $\mathbb{R}^3$ si on intervertit le domaine des angles :

$$\begin{aligned} \theta&\colon 0\to\pi \\ \phi&\colon 0\to 2\pi, \end{aligned} \tag{22.472}$$

alors nous paramétrons encore parfaitement bien la sphère, mais hélas

$$\int_0^R dr\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi} r^2\sin(\phi)d\phi = 0. \tag{22.473}$$

EqOMVolumeIncorrectSphere

Pourquoi ces « nouvelles » coordonnées sphériques sont-elles mauvaises ? Il y a que quand l'angle ϕ parcours $]0,2\pi[$, son sinus n'est plus toujours positif, donc la *valeur absolue* du jacobien n'est plus $r^2\sin(\phi)$, mais $r^2\sin(\phi)$ pour les ϕ entre 0 et π, puis $-r^2\sin(\phi)$ pour ϕ entre π et 2π. Donc l'intégrale (22.473) n'est pas correcte. Il faut la remplacer par

$$\int_0^R dr\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\pi} r^2\sin(\phi)d\phi - \int_0^R dr\int_0^{\pi} d\theta\int_{\pi}^{2\pi} r^2\sin(\phi)d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{22.474}$$

22.22 Aire et primitive

Soient $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $x\in\mathbb{R}$. Pour chaque $a\in\mathbb{R}$, nous pouvons considérer le nombre $F(x)$ défini par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{22.475}$$

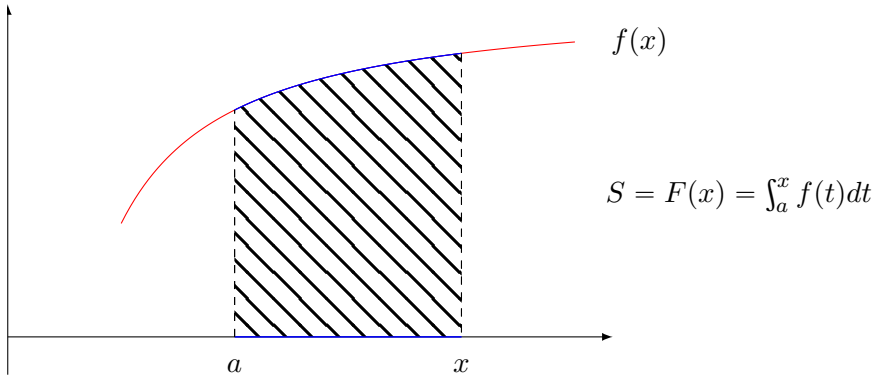


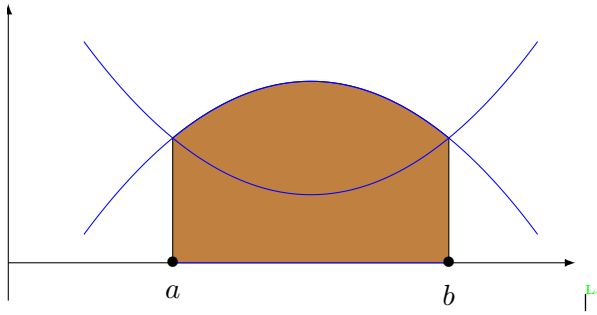
FIGURE 22.11 : Surface sous une courbe

LabelFigVSZRooRWgUGu

La fonction F ainsi définie a deux importantes propriétés :

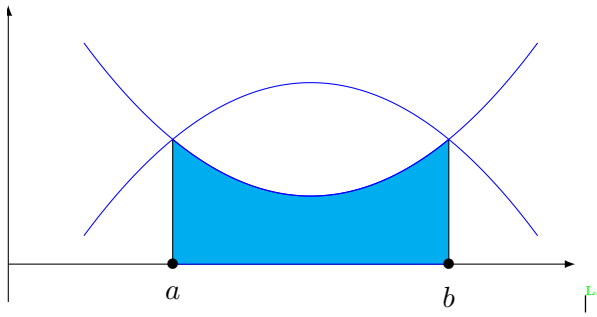
(1) C'est une primitive de f,

(2) Elle donne la surface en dessous de f entre les points a et x, voir la figure 22.11.



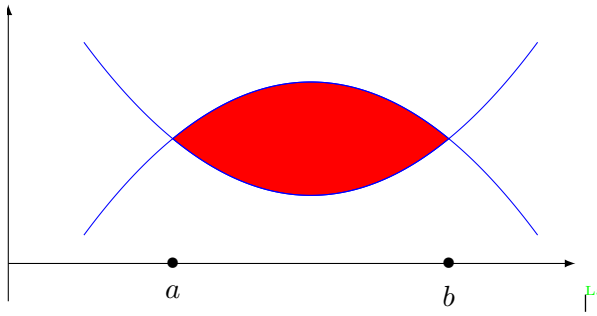
LabelFigQOBAooZZZOrlssLabelSubFigQOBAooZZZOrl0

(a) La grande surface.



LabelFigQOBAooZZZOrlssLabelSubFigQOBAooZZZOrl1

(b) La surface à soustraire.



LabelFigQOBAooZZZOrlssLabelSubFigQOBAooZZZOrl2

(c) La surface entre les deux fonctions.

FIGURE 22.12 : Le calcul de la surface comprise entre deux fonctions. LabelFigQOBAooZZZOrl

Notons que tant que f est positive, la surface est croissante.
La manière de calculer la surface comprise entre deux fonctions est dessinée à la figure 22.12.
La surface entre les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ se calcule comme suit.

(1) On calcule les intersections entre $y1$ et y_2. Notons a et b les ordonnées obtenues.

(2) La surface demandée est la différence entre la surface sous la fonction y_1 (la plus grande) et la surface sous la fonction y_2 (la plus petite), donc

$$S = \int_a^b y_1 - \int_a^b y_1. \tag{22.476}$$

22.22.1 Longueur d'arc de courbe

La longueur de l'arc de courbe de la fonction $y = f(x)$ entre les abscisses x_0 et x_1 est donné par la formule

$$l(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt. \tag{22.477}$$ EqLongArcCourbe

Lorsque la courbe est donnée sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{(22.478a)} \\ y = y(t), & \text{(22.478b)} \end{cases}$$

alors la formule devient

$$l(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}dt, \tag{22.479}$$

EqLongArcParam

où $\dot{x}(t)=x'(t)$.

22.22.2 Aire de révolution

Pour savoir l'aire engendrée par la ligne $y=f(x)$ entre a et b autour de l'axe Ox, on utilise la formule

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}f(x)dx. \tag{22.480}$$

22.22.3 Taylor avec reste intégral

THOooDGCJooXKmFTT

Théorème 22.127 (Taylor, reste intégral)**.**
Soit une fonction $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Alors pour tout $N\leqslant n$ nous avons

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{1}{N!}\int_a^b(b-t)^Nf^{(N+1)}(t)dt. \tag{22.481}$$

EQooSCKCooXcKzCc

Démonstration. Notons que dans l'énoncé, n est fixé ; nous faisons une récurrence sur N. Ça ne change pas grand chose, mais il faut être conscient de ce qui est exactement dans l'hypothèse du théorème et ce qui est dans l'hypothèse de récurrence.

Bref, n est fixé, la fonction f est de classe C^{n+1} et nous vérifions d'abord la formule avec $N=1$. À droite dans (22.481) nous avons

$$f(a)+f'(a)(b-a)+\int_a^b(b-t)f''(t)dt. \tag{22.482}$$

EQooETPRooJHcQXb

Nous évaluons l'intégrale à part en faisant une intégration par parties[28]. Il s'agit de poser

$$u=b-t \tag{22.483a}$$
$$v'=f'', \tag{22.483b}$$

de déduire

$$u'=-1 \tag{22.484a}$$
$$v=f' \tag{22.484b}$$

et d'écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b(b-t)f''(t)dt&=[(b-t)f'(t)]_a^b-\int_a^b(-)f'(t)dt &(22.485a)\\ &=-(b-a)f'(a)+\int_a^bf'(t)dt &(22.485b)\\ &=-(b-a)f'(a)+f(b)-f(a). &(22.485c)\end{aligned}$$

Dans le calcul nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul intégral 16.290. En remettant ça dans (22.482) nous trouvons $f(b)$ comme il se doit.

En ce qui concerne la récurrence, nous devons calculer

$$f(a)+\sum_{k=1}^{N+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{1}{(N+1)!}\int_a^b(b-t)^{N+1}f^{(N+2)}(t)dt. \tag{22.486}$$

EQooKQWZooGBxtlZ

Ici encore, il s'agit de faire une intégration par partie, et sortir de la somme le terme $k=N+1$. L'intégration par partie donne

$$\int_a^b(b-t)^{N+1}f^{(N+2)}(t)dt=-(b-a)^{N+1}f^{(N+1)}(a)+(N+1)\int_a^b(b-t)^Nf^{(N+1)}(t)dt. \tag{22.487}$$

En remettant tout ensemble, il y a encore deux termes qui se simplifient, et des termes qui se remettent pour former la formule de récurrence. Bref, on obtient que (22.486) se réduit bien à $f(b)$. □

[28] Proposition 19.18.

Cette formule avec reste intégral sert par exemple à prouver un encadrement pour $\ln(2)$, voir la proposition 22.131.

PROPooWGWKooYydpFg

Proposition 22.128 (Formule de Taylor avec reste intégral[682]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^{m+1} sur un ouvert U contenant $a \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $k \leqslant m$ et pour tout $x \in U$ nous avons

$$f(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l + \frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt \tag{22.488a}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l + \frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt \tag{22.488b}$$

$$\tag{22.488c}$$

Démonstration. Nous faisons par récurrence sur k. Nous commençons par voir la formule pour $k = 0$. La formule se réduit à

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \tag{22.489}$$

qui est correcte par le théorème 16.290 sous la forme (16.911).

La vraie récurrence maintenant. Nous supposons donc avoir la formule

$$f(x) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l + \frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt \tag{22.490}$$

EQooJGVGooZBKDyM

valide pour un certain $k \leqslant m$, et nous allons prouver la formule pour $k+1$. L'idée est d'effectuer l'intégrale dans (22.490) par partie (proposition 19.18) en posant

$$\begin{aligned} u &= f^{(k+1)} & dv &= (x-t)^k \\ du &= f^{(k+2)}dt & v &= -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}. \end{aligned} \tag{22.491}$$

Nous avons

$$\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k = \left[-f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}f^{(k+2)}(t)dt \tag{22.492a}$$

$$= f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{k+1}(x-t)^{k+1}dt. \tag{22.492b}$$

En remettant dans (22.490), nous trouvons la réponse. □

THOooFKZZooAgecfp

Théorème 22.129 (Formule de Taylor, reste intégral[113]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^{m+1} sur un ouvert convexe U. Soient $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$. Alors

$$f(a+h) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leqslant m}} \frac{h^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(a) + (m+1)\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^m(\partial^\alpha f)(a+th)dt. \tag{22.493}$$

Démonstration. Étant donné que U est connexe et que a et $a+h$ sont dans U, nous pouvons poser

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a+th). \end{aligned} \tag{22.494}$$

Cela est une fonction de classe C^{m+1} parce que f l'est (théorème 12.336). Nous appliquons à la fonction g la formule du corolaire 14.334 :

$$g'(t) = h \cdot (\nabla f)(a+th). \tag{22.495}$$

EQooQDLSooGbraPQ

(1) **Une récurrence pour $g^{(k)}$** Par $h \cdot \nabla$ nous entendons l'opérateur $h \cdot \nabla = h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n$. Nous prouvons maintenant par récurrence que

$$g^{(k)}(t) = \big[(h \cdot \nabla)^k f\big](a+th). \tag{22.496}$$

En ce qui concerne le cas $k = 1$, c'est une réécriture de la formule (22.495) :

$$g'(t) = h \cdot (\nabla f)(a + th) = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(a + th) \\ \vdots \\ (\partial_n f)(a + th) \end{pmatrix} \tag{22.497a}$$

$$= \sum_i h_i (\partial_i f)(a + th) \tag{22.497b}$$

$$= \sum_i (h_i \partial_i f)(a + th) \qquad \text{cf. justif} \tag{22.497c}$$

$$= \big(\sum_i h_i \partial_i f\big)(a + th) \qquad \text{cf. justif.} \tag{22.497d}$$

$$= \big((h \cdot \nabla) f\big)(a + th). \tag{22.497e}$$

Justifications.

- Pour (22.497c). Dans un cas il s'agit de calculer $(\partial_i f)(a + th)$ et de multiplier le résultat par h_i, et dans l'autre cas, de considérer la fonction $(h_i \partial_i f)$ et de l'appliquer à $a + th$.
- Pour (22.497d). Avant, on calculait $(h_i \partial_i f)(a+th)$ et on sommait sur i, et maintenant on applique la fonction $\sum_i h_i \partial_i f$ à $a + th$.

Nous y allons maintenant pour la récurrence. Nous posons

$$s(t) = \big((h \cdot \nabla)^k f\big)(a + th), \tag{22.498}$$

et nous essayons de calculer $s'(t)$. Nous avons

$$s'(t) = h \cdot \Big(\nabla (h \cdot \nabla)^k f\Big)(a + th) \tag{22.499a}$$

$$= \sum_i h_i \, \mathtt{proj}_i \Big[(\nabla (h \cdot \nabla)^k f)(a + th)\Big] \tag{22.499b}$$

$$= \sum_i h_i \big(\partial_i (h \cdot \nabla)^k f\big)(a + th) \tag{22.499c}$$

$$= \Big((h \cdot \nabla)^{k+1} f\Big)(a + th). \tag{22.499d}$$

(2) **Expression pour $g^{(k)}$** En mettant les bouts ensemble, nous avons

$$g^{(k)}(t) = (h \cdot \nabla)^k f(a + th). \tag{22.500}$$

Nous prouvons à présent que

$$(h \cdot \nabla)^k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha. \tag{22.501}$$

Pour cela nous nous souvenons du théorème multinomial 3.178. Il s'applique parce que f est de classe C^{m+1}, ce qui permet de permuter les dérivées[29]. Les « variables » $h_i \partial_i$ sont donc commutatives. D'abord nous avons

$$(h \cdot \nabla)^k = \big(\sum_i h_i \partial_i\big)^k = (h_1 \partial_1 + \ldots + h_n \partial_n)^k, \tag{22.502}$$

et ensuite nous appliquons le théorème multinomial avec $x_i = h_i \partial_i$.

En ce qui concerne g, nous avons

$$g^{(k)}(t) = (h \cdot \nabla)^k f(a + th) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} (h^\alpha \partial^\alpha f)(a + th). \tag{22.503}$$

[29] Proposition 14.394.

Nous savons que $g(1)=f(a+h)$ et $g(0)=f(a)$. Nous écrivons donc un développement de Taylor pour $g(1)$ autour de $t=0$. Il s'agit d'utiliser la proposition 22.128.

$$g(1)=\sum_{l=0}^{m}\frac{g^l(0)}{l!}1^l+\frac{1}{m!}\int_0^1 g^{(m+1)}t(t)(1-t)^m dt \tag{22.504a}$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=l}}\frac{l!}{\alpha!}(h^\alpha\partial^\alpha f)(a)+\frac{1}{m!}\int_0^1\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=m+1}}\frac{(m+1)!}{\alpha!}(h^\alpha\partial^\alpha f)(a+th)(1-t)^{m+1}dt \tag{22.504b}$$

$$=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\leqslant m}}\frac{1}{\alpha!}h^\alpha(\partial^\alpha f)(a)+(m+1)\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=m+1}}\int_0^1\frac{h^\alpha}{\alpha!}(1-t)^m(\partial^\alpha f)(a+th). \tag{22.504c}$$

□

PROPooJFSRooGJcLyv

Proposition 22.130 (Taylor à l'ordre $m=1$[1])**.**
Soit une fonction $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert convexe U. Soient $a\in U$ et $h\in\mathbb{R}^n$ tel que $a+h\in U$. Alors

$$f(a+h)=h\cdot(\nabla f)(a)+h\cdot Q(a,h)h \tag{22.505}$$

où $Q(a,h)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est l'opérateur linéaire dont les éléments de matrice sont donnés par

$$Q(a,h)_{kl}=\int_0^1(1-t)(\partial_{kl}f)(a+th)dt. \tag{22.506}$$

Démonstration. Nous commençons par écrire la formule Taylor avec reste intégral du théorème 22.129 avec $m=1$:

$$f(a+h)=\sum_k h_k(\partial_k f)(a)+2\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|=2}}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-t)(\partial^\alpha f)(a+th)dt \tag{22.507a}$$

$$=h\cdot(\nabla f)(a)+\frac{1}{2}\sum_{k,l}2h_kh_l\int_0^1(1-t)(\partial_{kl}f)(a+th)dt \qquad \text{cf. justif} \tag{22.507b}$$

SUBEQooJLEYooPhiCji

$$=h\cdot(\nabla f)(a)+\sum_l h_lQ(a,h)h \tag{22.507c}$$

$$=h\cdot(\nabla f)(a)+h\cdot Q(a,h)h \tag{22.507d}$$

(22.507e)

Justification pour (22.507b). Nous avons utilisé la formule du lemme 3.179 ainsi que le fait que $h^{e_k+e_l}=h_kh_l$. □

22.22.4 Approximation de ln(2)

PROPooHOMYooFclkCU

Proposition 22.131 (Approximation de ln(2)[683])**.**
Pour tout n nous avons

$$\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}. \tag{22.508}$$

Démonstration. Nous écrivons la formule de Taylor avec reste intégral du théorème 22.127 pour la fonction $f=\ln$ et pour $a=1$ et $b=x$. Cela donne :

$$\ln(x)=\ln(1)+\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k+\frac{1}{N!}\int_1^x(x-t)^N\ln^{(N+1)}(t)dt. \tag{22.509}$$

Sachant que la dérivée du logarithme[30] est $1/x$ et faisant une petite récurrence, pour $k\geqslant 1$ nous avons

$$\ln^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}. \tag{22.510}$$

[30] Voir la proposition 17.105.

En remplaçant,

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k + \int_1^x \frac{(-1)^N(x-t)^N}{t^{N+1}}dt. \tag{22.511}$$

C'est le moment de poser $x = 2$ et de faire les simplifications qui s'imposent,

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \int_1^2 \frac{(-1)^N(2-t)^N}{t^{N+1}}dt. \tag{22.512}$$

Nous déplaçons la somme à gauche, et nous prenons la valeur absolue des deux côtés :

$$|\ln(2) - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}| = |\int_1^2 \frac{(-1)^N(2-t)^N}{t^{N+1}}dt| \tag{22.513a}$$

$$\leqslant \int_1^2 \frac{(2-t)^N}{t^{N+1}}dt \tag{22.513b}$$

SUBEQooZSXEooVchIpd

$$\leqslant \int_1^2 (2-t)^N dt. \tag{22.513c}$$

SUBEQooHGZIooCIhoVt

Justifications :

- Pour 22.513b. Majoration en rentrant la valeur absolue dans l'intégrale, suppression de $(-1)^N$, et le fait que pour $t \in [1,2]$, $2-t \geqslant 0$.
- Pour 22.513c. Majoration en supprimant purement et simplement le dénominateur $t^N + 1 \geqslant 1$.

Ais-je vraiment besoin de vous dire que la dernière intégrale se calcule en posant le changement de variables[31] $u = 2 - t$? Le résultat est que

$$\int_1^2 (2-t)^N dt = \frac{1}{N+1}. \tag{22.514}$$

□

EXooYMEEooMGpUNM

Exemple 22.132 ([1]).
La convergence de l'encadrement (22.131) n'est pas terrible. Pour avoir une erreur de $\frac{1}{10}$, il faut

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{n+1}, \tag{22.515}$$

ce qui demande $n = 9$. Ça reste jouable, même pour les jeunes d'aujourd'hui. Écrivons 9 termes :

$$|\ln(2) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}| \leqslant \frac{1}{10}. \tag{22.516}$$

En calculant[32],

$$|\ln(2) - \frac{1879}{2520}| \leqslant \frac{1}{10}. \tag{22.517}$$

Voici donc un bel encadrement

$$\frac{1879}{2520} - \frac{1}{10} \leqslant \ln(2) \leqslant \frac{1879}{2520} + \frac{1}{10}. \tag{22.518}$$

Pour avoir quelque chose avec des virgules, d'abord un peu de calcul mental donne

$$\frac{1879}{2520} \simeq 0.745634920634921. \tag{22.519}$$

Donc en majorant et minorant, disons, la troisième décimale[33], on n'est pas moins précis que le $\frac{1}{10}$. On a

$$0.744 - \frac{1}{10} \leqslant \ln(2) \leqslant 0.746 + \frac{1}{10}. \tag{22.520}$$

Bref, on retient l'approximation

$$0.644 \leqslant \ln(2) \leqslant 0.846. \tag{22.521}$$

Pour la quantité de travail, avouez que ce n'est pas terrible comme résultat. Eh oui ; le calcul numérique c'est tout un métier ; il existe des méthodes nettement plus efficaces que ce que nous venons de faire. △

[31] Proposition 19.23.
[32] Moi j'ai utilisé Sage, mais si tu es au tableau, débrouille-toi.
[33] Notez ici que nous utilisons le fait que la division euclidienne, elle, donne un encadrement pour les fractions. Pensez-y.

22.23 Constructions plus naïves de l'intégrale dans le cas réel

Les sections 16.2 et 16.8 ont donné une construction très complète de la mesure de Lebesgue, et nous avons défini la théorie de l'intégration sur un espace mesuré quelconque dans la définition 16.169.

Dans cette section nous allons donner différentes choses plus rapides qui servent souvent de définition dans les cours moins avancés.

22.23.1 Mesure de Lebesgue, version rapide

Nous construisons à présent la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Un **pavé** dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]; \tag{22.522}$$

le volume d'un tel pavé est défini par $\text{Vol}(B) = \prod_i (b_i - a_i)$. Soit maintenant $A \subset \mathbb{R}^n$. La **mesure externe** de A est le nombre

$$m^*(A) = \inf\{ \sum_{B \in \mathcal{F}} \text{Vol}(B) \text{ où } \mathcal{F} \text{ est un ensemble dénombrable de pavés dont l'union recouvre } A.\} \tag{22.523}$$

DefKTzOlyH

Définition 22.133.
*Nous disons que A est **mesurable** au sens de Lebesgue si pour tout ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ nous avons l'égalité*

$$m^*(S) = m^*(A \cap S) + m^*(S \setminus A). \tag{22.524}$$

Dans ce cas nous disons que la mesure de Lebesgue de A est $m(A) = m^*(A)$.

PropNCMToWI

Proposition 22.134.
Deux fonctions continues égales presque partout pour la mesure de Lebesgue[34] *sont égales.*

Démonstration. Soient f et g deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in D$. La fonction $h = f - g$ est alors presque partout nulle et nous devons prouver qu'elle est nulle sur tout D. La fonction h est continue ; si $h(a) \neq 0$ pour un certain $a \in D$ alors h est non nulle sur un ouvert autour de a par continuité et donc est non nulle sur un ensemble de mesure non nulle. □

22.23.2 Pavés et subdivisions

Définition 22.135.
*Nous appelons **pavé** de $\mathbb{R}^p$ toute partie de $\mathbb{R}^p$ obtenue comme produit de p intervalles de $\mathbb{R}$. Plus explicitement, une partie R est un pavé de $\mathbb{R}^p$ si il s'écrit sous la forme*

$$R = \left\{ (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \,\middle|\, x_i \in \mathcal{I}_i, i = 1, \ldots, p \right\},$$

où $\mathcal{I}_i$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \ldots, p$.

On appelle pavé fermé de $\mathbb{R}^p$ le produit de p intervalles fermés

$$R = \prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i].$$

On définit de même le pavé ouvert

$$S = \prod_{i=1}^{p}]a_i, b_i[.$$

Un pavé $R = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{I}_i$ est dit borné si tous les intervalles $\mathcal{I}_i$ sont bornés dans $\mathbb{R}$. Les pavés non bornés sont des produits d'intervalles où un (ou plusieurs) des intervalles n'est pas borné. Par exemple,

$$N =]-\infty, 5] \times [0, 13].$$

L'espace $\mathbb{R}^p$, lui-même, est un pavé de $\mathbb{R}^p$.

[34] Définition 22.133.

Définition 22.136.
Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite ***pavable*** *si il existe une famille finie de pavés R_j, $j = 1, \dots, n$, et deux à deux disjoints tels que*

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} R_j.$$

Un exemple d'ensemble pavable dans $\mathbb{R}^2$ est donné à la figure 22.13. Il existe beaucoup d'ensembles dans $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas pavables, par exemple les ellipses.

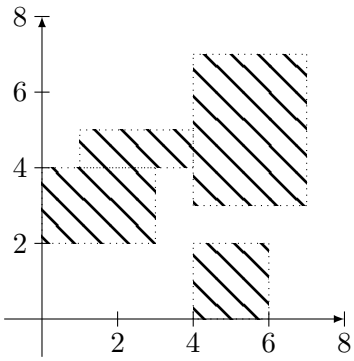


FIGURE 22.13 : Un ensemble pavable.

LabelFigPolirettangolo

Le complémentaire d'un pavé est un ensemble pavable et, en particulier, tout complémentaire d'un pavé borné est une réunion de pavés non bornés. Toute union finie et toute intersection d'ensemble pavables est pavable.

Définition 22.137.
Soit R un pavé borné de $\mathbb{R}^p$, pour fixer les idées on peut penser $R = \prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i]$. On appelle ***longueur*** *de l'i-ème arrête de R le nombre $b_i - a_i$. La* ***mesure p-dimensionnelle de*** *R, $m(R)$, est le produit des longueurs*

$$m(R) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i).$$

Exemple 22.138.
Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $R = [-1, 1] \times [3, 4] \times [0, 2]$ est un pavé fermé de mesure

$$m(R) = (1 + 1) \cdot (4 - 3) \cdot (2 - 0) = 4.$$

Il s'agit du volume usuel du parallélépipède rectangle. △

Exemple 22.139.
L'ensemble $R =]-1, 1[\times [3, 4] \times [0, 2]$ est un pavé de $\mathbb{R}^3$. Il n'est ni fermé ni ouvert, sa mesure est encore 4. △

Si R est un pavé non borné on peut encore définir sa mesure. La notion de mesure se généralise en deux étapes. D'abord on dit que la longueur d'une arête non bornée est ∞. Ensuite, on adopte la convention $0 \cdot \infty = 0$. Il faut remarquer que avec cette généralisation tout point et toute droite dans $\mathbb{R}^2$ ont mesure nulle.

Afin de définir les intégrales, nous allons intensivement faire appel à la notion de subdivision d'intervalles, voir définition 23.2 et la discussion qui suit.

Lorsqu'on considère un pavé borné $R = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{I}_i$ de $\mathbb{R}^p$, on note $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $\mathcal{I}_i$. La notion de subdivision de généralise au cas des pavés.

Définition 22.140.
Soit R un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^p$, pour fixer les idées on peut penser à $R = \prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i]$. On appelle ***subdivision*** *finie de R les éléments de l'ensemble $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{S}_i$,*

$$\mathcal{S} = \left\{ (Y_1, \dots, Y_p) \,\middle|\, Y_i = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i} \in \mathcal{S}_i,\ i = 1, \dots, p \right\}.$$

On peut définir de même l'ensemble des subdivisions d'un pavé non borné.

Souvent, une subdivision d'un pavé $R = \prod_{i=1}^{p} \mathcal{I}_i$ sera noté $\sigma = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i}$. Dans cette notation, on sous-entend que pour chaque i fixé, les nombres $y_{i,j}$ (il y en a n_i) forment une subdivision de l'intervalle $\mathcal{I}_i$. Afin de vous familiariser avec ces notations, repérez bien tous les éléments de la figure 22.14.

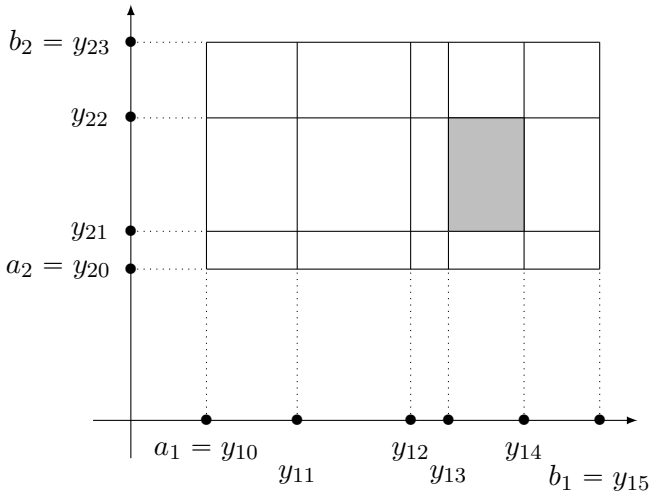


FIGURE 22.14 : Une cellule d'une subdivision d'un pavé de $\mathbb{R}^2$. La cellule grisée est $R_{(4,2)}$. LabelFigUneCellule

Définition 22.141.
*Si σ est une subdivision d'un pavé R, un **raffinement** de σ est une subdivision de R obtenue en fixant plus de points dans chaque intervalle.*

La subdivision σ de R détermine $n_1 n_2 \dots n_p$ pavés fermés de la forme

$$R_{(k_1,\dots,k_p)} = \{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p \,\big|\, y_{i,k_{i-1}} \leqslant x_i \leqslant y_{i,k_i}\},$$

où k_i est dans $\{1,\dots,n_i\}$ et i dans $\{1,\dots,p\}$. On les appelles **cellules** de σ. On remarque que les cellules de σ sont toujours deux à deux disjointes (sauf au plus sur leurs bords).

meas_sous

Lemme 22.142.
Soit R un pavé borné de $\mathbb{R}^p$ et soit $\sigma = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i}$ une subdivision de R. On a

$$m(R) = \sum_{(k_1,\dots,k_p)\in K} m(R_{(k_1,\dots,k_p)}),$$

où $K = \{1,\dots,n_1\} \times \{1,\dots,n_2\} \times \dots \times \{1,\dots,n_p\}$.

Le lemme 22.142 suggère de définir la mesure d'un ensemble borné pavable $P = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ comme la somme des mesures des pavés disjoints R_j, $j = 1,\dots,n$.

Définition 22.143.
*Une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est dite **application en escalier** sur $\mathbb{R}^p$ si*

- *f est une application bornée,*
- *il existe une subdivision σ de $\mathbb{R}^p$ telle que la restriction de f est une application constante sur toute cellule R_k de σ*

$$f_{|_{R_k}} = C_k, \qquad C_k \in \mathbb{R},$$

*Une telle subdivision σ est dite **associée** à f.*

Exemple 22.144.
La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in [0,3] \times [-1,2], \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22.525}$$

est une application en escalier. Exercice : donner une subdivision de $\mathbb{R}^2$ associée à cette fonction. △

Exemple 22.145.
La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m^2+n^2}, & \text{si } (x,y) \in [m,m+1]\times[n,n+1], \quad m,\, n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{22.526}$$

est une application en escalier. Observez que, dans ce cas, il n'existe pas une subdivision finie de $\mathbb{R}^2$ associée à f. △

Remarque 22.146.
Si la subdivision σ est associée à f alors tout raffinement de σ (c'est-à-dire, toute subdivision obtenue en fixant plus de points dans chaque intervalle) a la même propriété.

Si f et g sont deux applications en escalier sur R et σ_f et σ_g sont des subdivisions de R associées respectivement à f et g, alors on peut construire une troisième subdivision de R qui est associée à f et à g en même temps. Soient $\sigma_f = (Y_1,\dots,Y_p)$ et $\sigma_g = (Z_1,\dots,Z_p)$, où $Y_i = (y_{i,j})_{j=1}^{m_i}$ et $Z_i = (z_{i,j})_{j=1}^{n_i}$ sont des subdivisions de l'intervalle $[a_i,b_i]$, pour $i = 1,\dots,p$. La subdivision de $[a_i,b_i]$ obtenue par l'union de Y_i et Z_i est encore une subdivision finie, qu'on appellera $\bar{Y}_i$. La subdivision $\bar{\sigma} = (\bar{Y}_1,\dots,\bar{Y}_p)$ de R est un raffinement de σ_f et de σ_g, donc elle est associée à la fois à f et à g.

Cela nous permet de prouver que si f et g sont des applications en escalier, alors $f+g$, fg, $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\}$ et $|f|$ sont des applications en escalier.

22.23.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 22.147.
*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le **support** de f est la fermeture de l'ensemble des points x tels que $f(x) \neq 0$.*

Définition 22.148.
*Une application en escalier f est dite **intégrable** si son support est compact.*

Soit f une application en escalier sur $\mathbb{R}^p$. Soit σ une subdivision de $\mathbb{R}^p$ associée à f et appelons R_k les cellules de σ, avec $k = (k_1,\dots,k_p)$ dans $K = \{1,\dots,n_1\}\times\{1,\dots,n_2\}\times\ldots\times\{1,\dots,n_p\}$. Alors

$$f_{|_{R_k}} = C_k, \qquad C_k \in \mathbb{R}.$$

Définition 22.149.
*On définit l'**intégrale** de f sur $\mathbb{R}^p$ par*

$$\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV = \sum_{k\in K} C_k m(R_k).$$

L'intégrale ainsi définie est un nombre réel. La proposition suivante nous dit que l'intégrale est « bien définie », au sens que sa valeur ne dépend pas de la subdivision associée à f qu'on utilise dans le calcul.

Proposition 22.150.
Soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^p$. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $\mathbb{R}^p$ associées à f. L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision choisie.

On ne donne pas une preuve complète de cette proposition. En fait elle est une conséquence de la formule de réduction introduite dans la suite de ce chapitre.

22.23.4 Intégrales partielles

Soit f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ une fonction continue, nulle hors du pavé borné R. Posons $R = \prod_{i=1}^p [a_i,b_i]$, pour fixer les idées. Pour chaque i dans $\{1,\dots,p\}$ fixé, on peut associer à f la fonction F_i de $p-1$ variables définie par

$$F_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_p) = \int_{a_i}^{b_i} f(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_p)\,dy.$$

La fonction F_i est l'intégrale partielle de f par rapport à la i-ème variable. En particulier, si $f(x_1,\dots,x_p) = g(x_i)h(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_p)$ on obtient

$$F_i = \int_{a_i}^{b_i} g(y)h(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_p)\,dy = h\cdot\int_{a_i}^{b_i} g\,dy.$$

La fonction d'une seule variable qu'on obtient à partir de f en fixant $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$ et qui associe à x_i la valeur $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$, est appelée x_i-ème section de f en $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$.

Exemple 22.151.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x+3y & \text{si } (x,y) \in [9,10] \times]\pi, 5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22.527}$$

Les intégrales partielles de f sont

$$F_1(y) = \int_9^{10} x+3y\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3xy\right]_{x=9}^{x=10} = \frac{19}{2} + 3y,$$

$$F_2(x) = \int_\pi^5 x+3y\,dy = \left[xy + \frac{3y^2}{2}\right]_{y=\pi}^{y=5} = x(5-\pi) + \frac{3}{2}(25-\pi^2).$$

△

22.23.5 Réduction d'une intégrale multiple

Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un pavé fermé et borné de $\mathbb{R}^2$ et soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^2$ telle que le support de f soit contenu dans R. On considère la subdivision σ de R définie par les subdivisions

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m = b,$$

$$c = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n = d.$$

Les cellules de σ sont

$$R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \qquad i = 0, \dots, m-1, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

La mesure de R est la somme des mesures des $R_{i,j}$

$$\begin{aligned} m(R) = & \sum_{(i,j) \in \{0,\dots,m-1\} \times \{0,\dots,n-1\}} m(R_{i,j}) = \\ & = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} - y_i) = \\ & = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) = \\ & = (b-a) \cdot (d-c). \end{aligned} \tag{22.528}$$

Si f est constante sur chaque cellule de σ on peut écrire f de la forme suivante

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\, \chi_{R_{i,j}}$$

où les $C_{i,j}$ sont des constantes réelles et $\chi_{R_{i,j}}$ est la **fonction caractéristique** de $R_{i,j}$

$$\chi_{R_{i,j}}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \in R_{i,j}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22.529}$$

Comme (x,y) est dans $R_{i,j}$ si et seulement si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et $y \in [y_j, y_{j+1}]$, on vérifie que la fonction $\chi_{R_{i,j}}$ est égal au produit des fonctions caractéristiques des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ et $[y_j, y_{j+1}]$

$$\chi_{R_{i,j}}(x,y) = \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y).$$

On peut donc écrire la fonction f de la façon suivante

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\, \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y).$$

Comme on suppose que le support de f est une partie de R, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,dV = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\, m(R_{i,j}) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\,(x_{i+1}-x_i)\cdot(y_{j+1}-y_j). \tag{22.530}$$

Cette intégrale peut être réduite à la composition de deux intégrales partielles. Il suffit de remarquer que la valeur de l'intégrale de la fonction caractéristique d'un intervalle est la longueur de l'intervalle,

$$\begin{aligned} C_{i,j}(x_{i+1}-x_i)\cdot(y_{j+1}-y_j) &= \\ &= C_{i,j}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dy\right) = \\ &= C_{i,j}\left(\int_{a}^{b} \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{c}^{d} \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dy\right), \end{aligned} \tag{22.531}$$

et utiliser les propriétés de linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f\,dV &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\left(\int_{a}^{b} \chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{c}^{d} \chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dy\right) = \\ &= \int_c^d\int_a^b \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\,\chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\cdot\chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dxdy = \\ &= \int_c^d\int_a^b f\,dxdy. \end{aligned} \tag{22.532}$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f\,dV &= \int_a^b\int_c^d \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j}\,\chi_{[x_i,x_{i+1}]}(x)\cdot\chi_{[y_j,y_{j+1}]}(y)\,dxdy = \\ &= \int_a^b\int_c^d f\,dxdy. \end{aligned} \tag{22.533}$$

En général, on prouve la proposition suivante

Proposition 22.152.
Soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et soit R un pavé borné dans $\mathbb{R}^p$ qui contient le support de f. Comme d'habitude, pour fixer les idées nous écrivons $R = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} f(x_1,\ldots,x_p)\,dV &= \int_{a_p}^{b_p}\int_{a_{p-1}}^{b_{p-1}}\cdots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p = \\ &= \int_{a_{s_p}}^{b_{s_p}}\int_{a_{s_{p-1}}}^{b_{s_{p-1}}}\cdots\int_{a_{s_1}}^{b_{s_1}} f(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p, \end{aligned} \tag{22.534}$$

pour toute permutation $(s_1,\ldots,s_p)$ de l'ensemble $\{1,\ldots,p\}$.

22.23.6 Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions en escalier intégrables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, et soient a et b dans $\mathbb{R}$.

Linéarité de l'intégrale :

- Additivité : $f+g$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}^p}(f+g)\,dV = \int_{\mathbb{R}^p} f\,dV + \int_{\mathbb{R}^p} g\,dV,$$

- Homogénéité : λf est intégrable pour tout réel λ

$$\int_{\mathbb{R}^p}\lambda f\,dV = \lambda\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV,$$

Monotonie Si $f \leqslant g$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV \leqslant \int_{\mathbb{R}^p} g\,dV,$$

Inégalité fondamentale

$$\left|\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^p} |f|\,dV.$$

Cette dernière inégalité s'obtient de la façon suivante :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV\right| = \left|\sum_{k\in K} C_k m(R_k)\right| \leqslant \sum_{k\in K} |C_k| m(R_k) = \int_{\mathbb{R}^p} |f|\,dV.$$

Inégalité de Čebičeff Si f est une application en escalier alors pour tout $a > 0$ dans $\mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p \,:\, |f(x)| \geqslant a\}$ est pavable et borné, et l'inégalité suivante est satisfaite

$$m\left(\{x \in \mathbb{R}^p \,:\, |f(x)| \geqslant a\}\right) \leqslant \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}^p} |f|\,dV.$$

22.23.7 Intégrales multiples, cas général

Nous voulons généraliser la définition d'intégrale multiple au cas des domaines non pavables et de fonctions qui ne sont pas en escalier. Il y a plusieurs méthodes de le faire et ici on ne considère qu'une seule, introduite par Riemann.

Définition 22.153.
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *Pour toute application en escalier intégrable f_* telle que $f_* \leqslant f$, l'intégrale de f_* est dit une **somme inférieure** de f.*
- *Pour toute application en escalier intégrable f^* telle que $f^* \geqslant f$, l'intégrale de f^* est dit une **somme supérieure** de f.*

Soient $\sum_* f$ et $\sum^* f$ les ensembles des sommes inférieures et supérieures de f. Grâce à la propriété de monotonie de l'intégrale on sait que si a est dans $\sum_* f$ et b est dans $\sum^* f$ alors $a \leqslant b$.

Définition 22.154.
La fonction f est intégrable (au sens de Riemann) si $\sum_* f$ et $\sum^* f$ ne sont pas vides et

$$\inf \Sigma^* f = I = \sup \Sigma_* f.$$

Dans ce cas, la valeur I est appelée intégrale de f sur $\mathbb{R}^p$.

Remarque 22.155.
Toute fonction intégrable est bornée et à support compact. En effet, si le support de la fonction n'est pas compact alors soit $\sum_* f$ soit $\sum^* f$ doit être vide !

L'intégrale qu'on vient de définir possède toutes les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier. Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Il y a des cas où l'intégrabilité d'une fonction n'est pas évidente. Cependant, dans la plupart des exercices et des exemples de ce cours, nous nous aidons avec le critère suivant

Proposition 22.156.
Toute fonction continue à support compact est intégrable.

Cette proposition n'est à priori pas étonnante, vu qu'une fonction continue sur un support compact est bornée (théorème de Weierstrass 9.215).

22.23.8 Réduction d'une intégrale multiple

On n'utilise jamais la définition pour calculer la valeur d'une intégrale multiple. La méthode plus efficace, en pratique, est de réduire l'intégrale à la composition de plusieurs intégrales d'une variable.

fub

Théorème 22.157 (de Fubini)**.**
Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout x dans $\mathbb{R}$ la section $f(x, \cdot\,)$ est intégrable par rapport à y, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

De même, si pour tout y dans $\mathbb{R}$ la section $f(\,\cdot\,, y)$ est intégrable par rapport à x, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

ThoSectionINte

En général, on ne peut pas dire que les sections d'une fonction intégrable sont intégrables, donc il faut vraiment se souvenir des hypothèses du théorème 22.157. En dimension plus haute, on a le même résultat

Théorème 22.158.
Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $(p-1)$-uple $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$ dans $\mathbb{R}^{p-1}$ la section $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot\,, x_{i+1}, \dots, x_p)$ est intégrable par rapport à x_i, alors

$$\int_{\mathbb{R}^p} f\,dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{p-1}} f\,dV \right) dx_i.$$

Si f est une fonction positive et intégrable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on peut interpréter l'intégrale de f comme le volume du solide au-dessous du graphe de f. Avec cette interprétation, l'intégrale partielle par rapport à x pour $y = y_0$ fixé est l'aire de la tranche qu'on obtient en coupant le solide par le plan $y = y_0$.

Exemple 22.159.
Le premier exemple à faire est celui d'une fonction en escalier intégrable et positive. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in R_1 = \,]-1,3] \times [4,5] \\ 3 & \text{si } (x,y) \in R_2 = \,]13,15[\times [0,2[\\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{22.535}$$

L'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ est $1 \cdot m(R_1) + 3 \cdot m(R_2) = 16$. On voit tout de suite qu'il s'agit de la somme du volume des deux parallélépipèdes de hauteurs respectives 1 et 3 et bases R_1 et R_2. △

Exemple 22.160.
On veut calculer le volume du solide S, borné par le paraboloïde elliptique $x^2 + 2y^2 + z = 16$ et le plan $x = 2$, $x = 0$, $y = 2$ $y = 0$, $z = 0$. On observe que la portion de paraboloïde elliptique qui nous intéresse est le graphe de la fonction $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ pour (x,y) dans $R = [0,2] \times [0,2]$. La fonction f est continue ainsi que ses sections, donc on peut appliquer le théorème 22.157 et décomposer l'intégrale double en deux intégrales simples :

$$\begin{aligned} &\int_R 16 - x^2 - 2y^2\,dV = \int_0^2 \int_0^2 f(x,y)\,dxdy = \\ &= \int_0^2 \left[(16 - 2y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} dy = \\ &= \left[\left(32 - \frac{8}{3} \right) y - \frac{4y^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} = 64 - \frac{16+32}{3} = 48. \end{aligned} \tag{22.536}$$

Vérifiez, comme exercice, qu'on obtient le même résultat en intégrant d'abord par rapport à y et puis par rapport à x. △

Exemple 22.161.
Dans les hypothèses du théorème 22.157 l'ordre des intégrations partielles ne change pas la valeur de l'intégrale. En fait, si les calculs sont faits par des êtres humains l'ordre d'intégration peut faire une certaine différence comme dans cet exemple. On veut évaluer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dV$$

où

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin(xy) & \text{si } (x,y) \in [1,2] \times [0,\pi] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22.537}$$

Les deux sections de $f(x,y) = y\sin(xy)$ sont continues. Si on intègre d'abord par rapport à y on obtient

$$-\int_1^2 \frac{\pi\cos(\pi x)}{x}dx + \int_1^2 \frac{\sin(\pi x)}{x^2}dx,$$

qui n'est pas du tout immédiat, alors que, si on intègre d'abord par rapport à x on obtient

$$\int_0^\pi \cos y - \cos(2y)\,dy.$$

△

22.23.9 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$

On veut évaluer l'intégrale de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ sur son domaine, la boule unité $B((0,0),1)$. La théorie introduite jusqu'ici n'est pas suffisante pour résoudre ce problème, parce que $B((0,0),1)$ n'est pas pavable. Les parties bornées de $\mathbb{R}^p$ sur lesquelles on peut intégrer des fonctions sont dites mesurables (au sens de Riemann) parce que, comme on verra dans la suite, la mesure d'une partie de $\mathbb{R}^p$ est l'intégrale (si il existe) de sa fonction caractéristique.

On peut dire qu'une partie de $\mathbb{R}^p$ est mesurable si son bord est «assez régulier». Dans $\mathbb{R}^2$ il est suffisant que le bord de A soit une réunion finie de courbes paramétrées continues. En particulier, on est très souvent dans un des deux cas suivants

Régions du premier type A est borné et contenu entre les graphes de deux fonctions continues de x

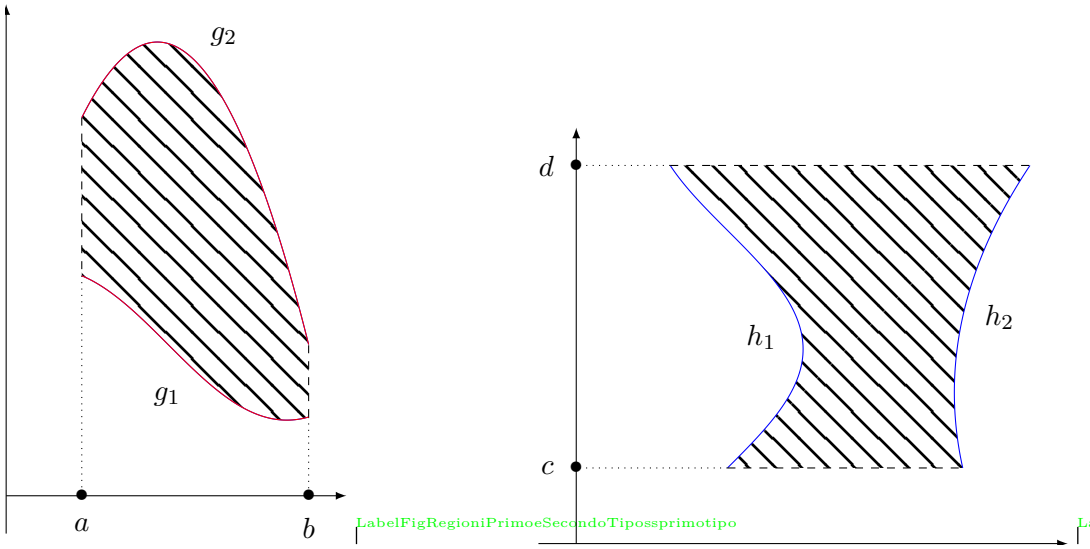
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leqslant x \leqslant b,\, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\},$$

avec g_1 et g_2 continues.

Régions du deuxième type A est borné et contenu entre les graphes de deux fonctions continues de y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \leqslant y \leqslant d,\, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\},$$

avec h_1 et h_2 continues.



(a) Une region du premier type

(b) Une region du deuxième type

FIGURE 22.15 : Régions du premier et du deuxième type

Exemple 22.162.
Il y a des régions qui sont des deux types au même temps, comme les boules centrées à l'origine, le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,a)$ et $(b,0)$, ou la région C délimité par les courbes $y = 2x$ et $y = x^2$. Cette dernière admet les représentations suivantes

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\, x^2 \leqslant y \leqslant 2x\},$$

et

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant y \leqslant 1,\, y/2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\}.$$

△

Définition 22.163.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le support A est une région du premier ou du deuxième type. On définit la fonction $\bar{f}$ comme

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & si\ (x,y) \in A, \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{22.538}$$

*La fonction f est dite **intégrable** si $\bar{f}$ est intégrable, et la valeur de son intégrale est*

$$\int_A f\,dV = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}\,dV.$$

Une fonction continue définie sur une région du premier ou du deuxième type est toujours intégrable.

Pour fixer les idées on suppose ici que A est du premier type et contenue dans le pavé borné $R = [a,b] \times [c,d]$. En suivant la définition on obtient

$$\begin{aligned} \int_A f\,dV &= \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}\,dV \\ &= \int_a^b \int_c^d \bar{f}\,dydx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} \bar{f}\,dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \bar{f}\,dy + \int_{g_2(x)}^d \bar{f}\,dy \right) dx \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\,dydx. \end{aligned} \tag{22.539}$$

De même, si A est du deuxième type on obtient

$$\int_A f\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\,dxdy. \tag{22.540}$$

Exemple 22.164.
On peut maintenant résoudre notre problème de départ, évaluer l'intégrale de la fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ sur $B((0,0),1)$. Nous choisissons de décrire la boule unité de $\mathbb{R}^2$ comme une région du premier type : $B((0,0),1) = \{(x,y) \,:\, x \in [-1,1],\ -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$.

$$I = \int_B \sqrt{1-x^2}\,dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dydx \tag{22.541}$$

La première intégrale à effectuer, par rapport à y, est l'intégrale d'une fonction constante. Ne pas oublier que l'on intègre $\sqrt{1-x^2}$ par rapport à y ; c'est bien une constante et l'intégrale consiste seulement à multiplier par y :

$$I = \int_{-1}^1 \left[y\sqrt{1-x^2} \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_{-1}^1 (1-x^2)dx. \tag{22.542}$$

Cela est à nouveau une intégrale simple à effectuer. Le résultat est

$$2\int_{-1}^1 (1-x^2)dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{8}{3}. \tag{22.543}$$

△

Remarque 22.165.
Toutes les techniques d'intégration à une variable restent valables. Par exemple, lorsqu'une des intégrales est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à zéro, l'intégrale vaut zéro.

NORMooDSNXooFhyHkx

22.166.
Par le lemme 16.177 nous savons que la mesure d'une région bornée de $\mathbb{R}^2$ est l'intégrale de sa fonction caractéristique, si elle existe.

La mesure d'une région bornée de $\mathbb{R}^2$ est dite son **aire**, et celle d'une région bornée de $\mathbb{R}^3$ est son **volume**. Voir aussi la remarque 23.10.

exint

Exemple 22.167.
On veut calculer l'aire de la région de la figure 22.16 définie par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1, x^3 - 1 \leqslant y \leqslant x\}.$$

On considère l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_A \, dV = \int_0^1 \int_{x^3+1}^{x} 1 \, dy \, dx = \int_0^1 -x^3 + x + 1 \, dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}.$$

△

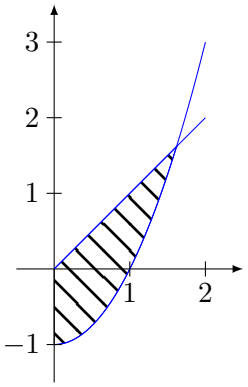


FIGURE 22.16 : La région de l'exemple 22.167. Dans l'exemple, l'image est coupée en $x = 1$. labelfigExampleIntegration

Exemple 22.168.
Parfois la région sur laquelle on veut intégrer peut être décrite indifféremment de deux façons, mais la fonction à intégrer nous force a choisir un ordre particulier. Vérifiez que la fonction $f(x, y) = \sin(y^2)$ sur la région triangulaire de sommets $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ doit être intégrée d'abord par rapport à x. △

Si une région bornée n'est pas de premier ou de deuxième type on peut normalement la découper en morceaux plus faciles à décrire. On utilise alors la propriété suivante.

Lemme 22.169.
Soit A un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ et soient B_1 et B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ et $B_1 \cup B_2 = A$. Alors, pour toute fonction f intégrable sur A (et en particulier pour sa fonction caractéristique) on a

$$\int_A f \, dV = \int_{B_1} f \, dV + \int_{B_2} f \, dV.$$

exint2

Exemple 22.170.
La région D que nous voyons sur la figure 22.17 est bornée par la parabole $y^2 = 2x + 6$ et la droite $y = x - 1$. La région D est une région du deuxième type. Nous pouvons aussi la décrire comme l'union de deux régions du premier type D_1 et D_2,

$$D_1 = \{(x, y) \, : \, -3 \leqslant x \leqslant -1, \, -\sqrt{2x+6} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x+6}\},$$

et

$$D_2 = \{(x, y) \, : \, -3 \leqslant x \leqslant -1, \, x - 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x+6}\}.$$

△

22.23.10 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$

Dans ces notes nous n'avons pas l'ambition de traiter d'une façon rigoureuse l'étude des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^3$. Comme dans la section précédente on se limitera à considérer des cas particuliers.

primotipo_solida

Définition 22.171.
*Soit E une région de $\mathbb{R}^3$. On dit que E est une **région solide de premier type** si E est contenue entre les graphes de deux fonctions continues de x et y.*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, | \, (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2, u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}.$$

Le sous-ensemble de A de $\mathbb{R}^2$ qui apparaît dans la définition 22.171 est la projection (ou l'ombre) de E sur le plan x-y.

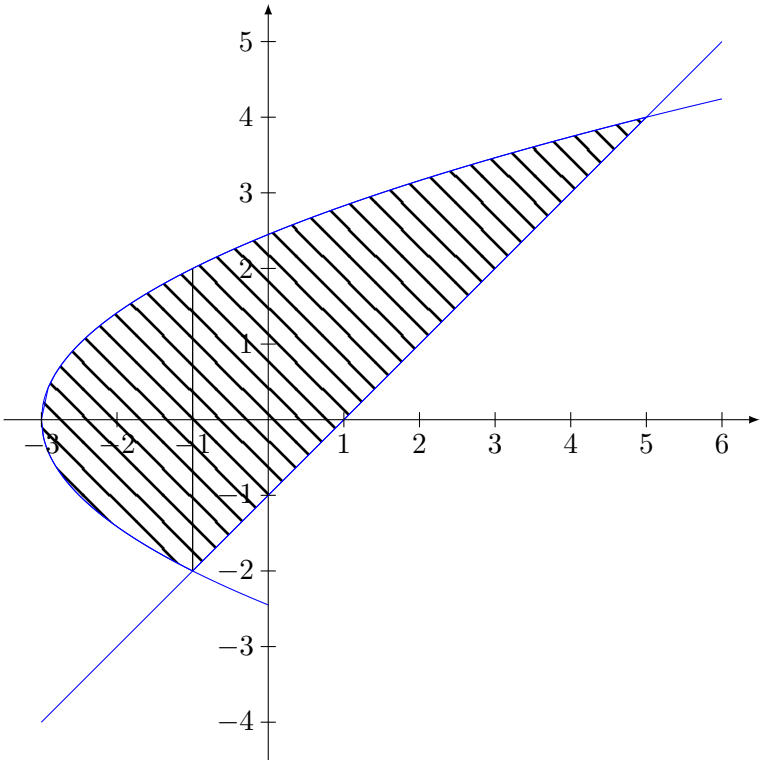


FIGURE 22.17 : La région D de l'exemple 22.170 LabelFigExampleIntegrationdeux

cornet

Exemple 22.172.
La région E donnée par une portion de sphère collée à un cône est une région solide de premier type

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \overline{B\big((0,0),1\big)}, \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}\}. \tag{22.544}$$

L'ombre de E est la boule unité de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z$ est un cône posé sur sa pointe tandis que l'ensemble $z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$ est la demi-sphère. L'ensemble E contient les points entre les deux, voir la figure 22.18.

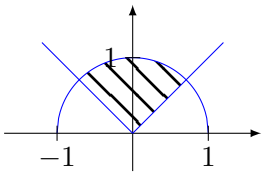


FIGURE 22.18 : Il faut voir ça en trois dimensions. LabelFigCornetGlace

△

Si la fonction f, à intégrer sur E, et ses sections sont intégrables alors on peut réduire l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y,z)\,dV &= \int_A \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dV = \\ &= \int_A \big(F(x,y,u_2(x,y)) - F(x,y,u_1(x,y))\big)\,dV,\end{aligned} \tag{22.545}$$

où F est une primitive de f par rapport à la variable z, c'est-à-dire en considérant x et y comme des constantes. Il faut ensuite évaluer la partie qui reste comme dans la section précédente. Comme le calcul des aires dans $\mathbb{R}^2$, le calcul des volumes dans $\mathbb{R}^3$ est fait par des intégrales. En fait le **volume** d'une région solide dans $\mathbb{R}^3$ est sa mesure.

Définition 22.173.
La mesure d'une région de $\mathbb{R}^3$ est l'intégrale de sa fonction caractéristique.

Soit E une région solide du premier type, nous pouvons évaluer son volume par l'intégrale

$$\int_A (u_2(x,y) - u_1(x,y))\, dV.$$

Parfois c'est plus intéressant de calculer le volume avec la formule de réduction contraire : l'intégrale double d'abord et puis l'intégrale simple par rapport à z. On parle alors de calcul de volume « par tranche ».

Exemple 22.174.
On veut calculer le volume de la boule de rayon a, centrée à l'origine $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2\}$. On peut décrire B par

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D_a, -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\},$$

où D_a est le disque de rayon a centré en $(0,0)$, donc le volume B sera

$$2\int_{D_a} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dV.$$

Cette intégrale est un peu ennuyeuse à calculer. On peut simplifier le calcul en observant que pour $\bar{z}$ fixé dans l'intervalle $[-a,a]$ la section de la boule au niveau $\bar{z}$ est un disque de rayon $\sqrt{a^2-z^2}$. L'aire d'un tel disque est $\pi(a^2+z^2)$. Si on réduit l'intégrale de volume de la façon

$$\int_B 1\, dV = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-z^2}\, dz,$$

on obtient tout de suite la valeur cherchée : le volume de B est $4/3\pi a^3$. △

Exemple 22.175.
On calcule l'intégrale de $f(x,y,z) = z$ sur la pyramide P bornée par les plans $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $x+y+z/2=1$. On remarque tout de suite que les plans $x+y+z=1$, $x+y+z/2=1$ se coupent en la droite $x+y=1$, $z=0$ (on se souvient qu'*une* droite dans $\mathbb{R}^3$, c'est *deux* équations). Cela veut dire que la projection de P sur le plan x-y est le triangle T borné par les droites $x=z=0$, $y=z=0$ et $x+y=1$, $z=0$. On décrit donc P par

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in T,\, 1-2x-2y \leqslant z \leqslant 1-x-y\}$$

et T par

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant 1-x\},$$

donc l'intégrale de f sur P est

$$\int_P f(x,y,z)\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{1-2x-2y}^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = -\frac{1}{24}.$$

Notez que lorsque x et y sont entre 0 et 1, nous avons bien $1-2x-2y < 1-x-y$, d'où le fait que nous mettons $1-2x-2y$ dans la borne inférieure de l'intégrale. △

De façon analogue on définit les régions solides du deuxième et du troisième type.

22.23.11 Intégrales de fonctions non bornées sur des ensembles non bornés

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, une fonction positive. Nous notons $E_r = E \cap B(0,r)$. On dit qu'elle est **intégrable** sur $E \subset \mathbb{R}^n$ si

(1) Pour chaque $r > 0$, la fonction $f_r(x) = f(x)\mathbb{1}_{f<r}$ est intégrable sur E_r ;

(2) la limite $\lim_{r\to\infty} \int_{E_r} f_r$ est finie.

Dans ce cas, on pose

$$\int_E f = \lim_{r\to\infty} \int_{E_r} f_r. \tag{22.546}$$

ThoFnTestIntnnBorn

Théorème 22.176.
Soit E mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Si f est mesurable et si il existe $g\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ intégrable sur E telle que $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in E$, alors f est intégrable sur E.

Réciproquement, si f est intégrable sur E, alors f est mesurable.

LemTHBSEs

Lemme 22.177.
Si f est une fonction sur $[a,\infty[$, alors nous avons la formule

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^\infty f(x)dx \tag{22.547}$$

au sens où si un des deux membres existe, alors l'autre existe et est égal.

Démonstration. Supposons que le membre de gauche existe. Cela signifie que la fonction

$$\psi(x)=\int_a^x f \tag{22.548}$$

est bornée. Soit M, un majorant. Pour toute fonction simple φ dominée f, on a $\int\varphi\leqslant M$, donc l'ensemble sur lequel on prend le supremum pour calculer $\int_a^\infty f$ est majoré par M et possède donc un supremum. Nous avons donc

$$\int_a^\infty f\leqslant\lim_{b\to\infty}\int_a^b f. \tag{22.549}$$

□

22.23.12 Lemme de Morse

LemNQAmCLo

Lemme 22.178 (Lemme de Morse)**.**
Soit $f\in C^3(\mathcal{U},\mathbb{R})$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Nous supposons que

(1) $df_0=0$

(2) La matrice $H_{kl}=(\partial_{kl}f)(0)$ est non dégénérée et de signature $(p,n-p)$.

Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que

(1) $\varphi(0)=0$,

(2) si $\varphi(x)=u$ alors

$$f(x)-f(0)=u_1^2+\cdots+u_p^2-u_{p+1}^2-\ldots-u_n^2. \tag{22.550}$$

Une autre façon de dire est qu'il existe un C^1-difféomorphisme local ψ tel que

$$(f\circ\psi)(x)-f(0)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_n^2. \tag{22.551}$$

Démonstration. Nous utilisons le théorème de Taylor avec reste intégral sous la forme de la proposition 22.130 avec $a=0$:

$$f(x)=x\cdot(\nabla f)(0)+x\cdot Q(x)x \tag{22.552}$$

avec

$$Q(x)_{kl}=\int_0^1(1-t)(\partial_{kl}f)(tx)dt. \tag{22.553}$$

Par hypothèse sur $df_0=0$, le premier terme est nul. En ce qui concerne Q, nous avons

$$Q(0)_{kl}=\int_0^1(1-t)(\partial_{kl}f)(0)=\frac{1}{2}H_{kl}. \tag{22.554}$$

Étant donné que f est de classe C^2, le théorème de Schwaz 14.381 dit que H est une matrice symétrique. Elle est également inversible par hypothèse.

À partir de là, le lemme 19.147 donne un voisinage V de $Q(0)$ dans l'ensemble S_n des matrices symétriques et une application ϕ de classe C^1

$$\phi\colon V\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \tag{22.555}$$

telle que pour tout $A\in V$,

$$\phi(A)^tQ(0)\phi(A)=A. \tag{22.556}$$

Si on pose $M=\phi\circ Q$, et si x est dans un voisinage de zéro, Q étant continue nous avons $Q(x)\in V$ et donc

$$Q(x)=M(x)^tQ(0)M(x). \tag{22.557}$$

Notons que l'application $M\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est de classe C^1 parce que Q et ϕ le sont.

Nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= x \cdot Q(x)x && (22.558a)\\
&= x \cdot M(x)^t Q(0) M(x) x && (22.558b)\\
&= M(x)x \cdot Q(0)M(x)x && \text{cf. justif} \quad (22.558c)\\
&= y(x) \cdot Q(0)y(x) && \text{cf. justif} \quad (22.558d)\\
& && (22.558e)
\end{aligned}$$

SUBEQooPDUKooHDpkHu
SUBEQooEJGYooRHWmzV

Justifications.

- Pour 22.558c. Voir la proposition 10.188 et le blabla 10.189.
- Pour 22.558d. Nous notons $y(x) = M(x)x = (\phi \circ Q)(x)x$, qui est encore une fonction de classe C^1 parce que la multiplication est une application C^∞.

D'un autre côté le théorème de Sylvester 10.252 nous donne une matrice inversible P telle que

$$Q(0) = P^t \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & \\ & -\mathbb{1}_{n-p} \end{pmatrix} P. \tag{22.559}$$

Et nous posons enfin $u = \varphi(x) = Py(x)$ qui est toujours de classe C^1 et qui donne

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= y \cdot Q(0)y && (22.560a)\\
&= y \cdot P^t \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} Py && (22.560b)\\
&= u \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} u && (22.560c)\\
&= u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2. && (22.560d)
\end{aligned}$$

Nous devons maintenant montrer que, quitte à réduire son domaine à un ouvert plus petit, φ est un C^1-difféomorphisme. Dans la chaine qui donne φ, seule l'application

$$\begin{aligned} g\colon U \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto M(x)x \end{aligned} \tag{22.561}$$

est sujette à caution. Nous allons appliquer le théorème d'inversion locale. Nous savons que g est de classe C^1 et donc différentiable ; calculons la différentielle en utilisant la formule (14.698) :

$$dg_0(x) = \frac{d}{dt}\Big[g(tx)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[tM(tx)x\Big]_{t=0} = M(0)x. \tag{22.562}$$

Note que nous avons utilisé la règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit, mais le second terme s'est annulé. Donc $dg_0 = M(0) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et g est localement un C^1-difféomorphisme.

Il suffit de restreindre φ au domaine sur lequel g est un C^1-difféomorphisme pour que φ devienne lui-même un C^1-difféomorphisme.

□

Définition 22.179.
*Un point a est un **point critique** de la fonction différentiable f si $df_a = 0$.*

Corolaire 22.180 ([684]).
Les points critiques non dégénérés d'une fonction C^3 sont isolés.

Démonstration. Soit a un point critique non dégénéré. Par le lemme de Morse 22.178, il existe un C^1-difféomorphisme ψ et un entier p tel que

$$(f \circ \psi)(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 + f(a) \tag{22.563}$$

sur un voisinage $\mathcal{U}$ de a. Vue la formule générale $df_x(u) = \nabla f(x) \cdot u$, si x est un point critique de f, alors $\nabla f(x) = 0$. Dans notre cas, les points critiques de $f \circ \psi$ dans $\mathcal{U}$ doivent vérifier $x_i = 0$ pour tout i, et donc $x = a$.

Nous devons nous assurer que la fonction f elle-même n'a pas de points critiques dans $\mathcal{U}$. Pour cela nous utilisons la formule générale de dérivation de fonction composée :

$$\nabla(f\circ\psi)(x)=\sum_k\frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g(x)\big)\nabla g_k(x). \tag{22.564}$$

Si $\psi(x)$ est un point critique de f, alors le membre de droite est le vecteur nul parce que tous les $\partial_k f\big(\psi(x)\big)$ sont nuls. Par conséquent le membre de gauche est également nul, et x est un point critique de $f\circ\psi$. Or nous venons de voir que $f\circ\psi$ n'a pas de points critiques dans $\mathcal{U}$.

Donc f n'a pas de points critiques dans un voisinage d'un point critique non dégénéré. □

22.24 Autres intégrales sympathiques

22.24.1 Intégrale de Wallis

LEMooMGUVooIIQSmC

Lemme 22.181 ([685, 1]).
Nous définissons les fonctions I_n par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} I_0(x)=x & \text{(22.565a)}\\ I_1(x)=\cos(x) & \text{(22.565b)}\\ I_n(x)=\dfrac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n}-\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}(x). & \text{(22.565c)}\end{cases}$$

Pour chaque n, la fonction I_n est une primitive de $\sin^n(x)$.

De même en définissant EQooWJMIooSgBbJx

$$\begin{cases} I_0(x)=x & \text{(22.566a)}\\ I_1(x)=\sin(x) & \text{(22.566b)}\\ I_n(x)=\dfrac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}(x), & \text{(22.566c)}\end{cases}$$

nous avons des primitives de $\cos^n(x)$.

Démonstration. Nous faisons par récurrence. Les cas $n=0$ et $n=1$ sont immédiats. Pour I_n c'est pas trop compliqué non plus : il suffit de dériver en supposant que $I'_{n-2}(x)=\sin^{n-2}(x)$. Voici le calcul :

$$\begin{aligned} I'_n(x)&=\frac{1}{n}\big(-\sin^n(x)+\cos(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\big)-\frac{n-1}{n}\sin^{n-2}(x) && \text{(22.567a)}\\ &=\frac{1}{n}\sin^{n-2}(x)\big(-\sin^2(x)+(n-1)\cos^2(x)\big)-\frac{n-1}{n}\sin^{n-2}(x) && \text{(22.567b)}\\ &=\frac{1}{n}\sin^{n-2}(x)\big(-\sin^2(x)+(n-1)\cos^2(x)-n+1\big) && \text{(22.567c)}\\ &=\frac{1}{n}\sin^{n-2}(x)\big(n\cos^2(x)-n\big) && \text{(22.567d)}\\ &=\frac{1}{n}\sin^{n-2}(x)n\sin^2(x) && \text{(22.567e)}\\ &=\sin^n(x). && \text{(22.567f)}\end{aligned}$$

Nous avons prouvé que la dérivée de $I_n(x)$ est bien $\sin^n(x)$.

La formule (22.566) se démontre de la même façon. □

LEMooUOIBooLyMDft

Lemme 22.182 ([686, 687]).
Nous posons

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)dt. \tag{22.568}$$

Alors :

(1) une formule de récurrence :

$$W_n=\frac{n-1}{n}W_{n-2}, \tag{22.569}$$ EQooILMZooBUsJpk

(2) et une formule un peu explicite :

$$W_{2n}=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}. \tag{22.570}$$ EQooUYIDooEpUCnP

Démonstration. Le nombre W_n est seulement la seconde intégrale du lemme 22.181, évaluée entre 0 et $\pi/2$. En partant donc de (22.566), nous avons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx = \left[\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}(x)dx. \tag{22.571}$$

Le terme aux bords disparaît grâce aux valeurs trigonométriques remarquables[35]. Il reste immédiatement

$$W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}. \tag{22.572}$$

À partir de là, nous démontrons (22.570) par récurrence. D'abord pour $n = 0$, c'est l'égalité $W_0 = \pi/2$ qui est correcte parce que

$$\int_0^{\pi/2}\cos^0(x)dx = \int_0^{\pi/2} 1dx. \tag{22.573}$$

Pour la récurrence elle-même,

$$W_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}W_{2n} \tag{22.574a}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \tag{22.574b}$$

$$\text{… pas mal de petits calculs …} \tag{22.574c}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!2^{n+1}\big)^2}\frac{\pi}{2}. \tag{22.574d}$$

Voilà. □

Maintenant, la suite (W_n) se divise en ses termes pairs et ses termes impairs. Pour les pairs, nous avons une formule assez explicite donnée par le lemme 22.182. Pour les termes impairs, nous n'avons rien. Dans tous les cas, nous avons la formule de récurrence

$$W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2} \tag{22.575}$$

qui ne sert à rien pour déduire des choses sur les termes impairs à partir de ce que l'on sait des termes pairs.

Sommes-nous perdus ? Non. La situation se débloque grâce au lemme suivant.

LEMooZFBVooQsOuOx

Lemme 22.183.
La suite donnée par

$$W_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(x)dx \tag{22.576}$$

est décroissante.

Démonstration. Vu que l'intégrale est sur $[0, \pi/2]$, le nombre $\cos(x)$ prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Nous avons donc

$$\cos^{n+1}(x) \leqslant \cos^n(x). \tag{22.577}$$

Les intégrales suivent les mêmes inégalités. □

Ce lemme permet de relancer le jeu parce que les termes impairs sont coincés entre les termes pairs, qui décroissent. Les termes impairs doivent donc décroître à la même vitesse. Le lemme suivant met cela en musique.

LEMooAXTEooLBXQuM

Lemme 22.184.
Nous posons

$$W_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(x)dx \tag{22.578}$$

La fonction $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *définie par* $W_n = \alpha(n)W_{n-1}$ *vérifie* $\lim_{n\to\infty}\alpha(n) = 1$.

[35] Par exemple la proposition 20.24(11).

Démonstration. Parce que nous en aurons besoin, nous triturons d'abord un peu la formule de récurrence (22.569). D'abord nous l'inversons un peu pour avoir

$$W_n = \frac{n+2}{n} W_{n+2}, \tag{22.579}$$

et ensuite nous écrivons

$$W_{n-1} = \frac{n+1}{n} W_{n+1}. \tag{22.580}$$

EQooYINNooBUKUYB

Ne vous posez pas de questions, ça va être utile. Le fait que la suite soit décroissante (lemme 22.183) nous permet d'écrire

$$W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}. \tag{22.581}$$

En y remplaçant W_n par $\alpha(n)W_{n+1}$ et W_{n-1} par (22.580),

$$W_{n+1} \leqslant \alpha(n) W_{n+1} \leqslant \frac{n+1}{n} W_{n+1}. \tag{22.582}$$

Nous simplifions par W_{n+1} et nous trouvons l'encadrement, valable pour tout n :

$$1 \leqslant \alpha(n) \leqslant \frac{n+1}{n}. \tag{22.583}$$

Nous en déduisons par la règle de l'étau que $\alpha(n) \to 1$. □

LEMooWQZAooOXAPQO

Lemme 22.185.
Soit

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx. \tag{22.584}$$

Encore plusieurs choses à dire.

(1) Pour tout n nous avons

$$nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}. \tag{22.585}$$

EQooLOLFooMIwMXN

(2) Nous avons l'équivalence de suites[36]

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{22.586}$$

Démonstration. En deux parties

(1) **La suite constante** Nous posons $K_n = nW_nW_{n-1}$. Grâce aux formules de récurrence (22.569) que nous écrivons sous la forme

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \tag{22.587a}$$

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}, \tag{22.587b}$$

nous avons

$$K_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n} W_{n-1}W_{n-2} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = K_{n-1}. \tag{22.588}$$

Nous avons montré que $K_{n+1} = K_{n-1}$.

Il nous reste à prouver que $K_1 = K_2 = \frac{\pi}{2}$. Pour cela nous avons immédiatement $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ainsi que

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = 1. \tag{22.589}$$

Pour W_2, il ne faut pas calculer d'intégrales, mais seulement utiliser la formule (22.570). Nous trouvons vite $W_2 = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$K_1 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2} \tag{22.590}$$

et

$$K_2 = 2W_2W_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{22.591}$$

[36] Définition 11.33.

(2) **L'équivalence de suites** Soit la fonction α définie par $W_n = \alpha(n)W_{n-1}$. Le lemme 22.184 nous dit que $\alpha(n) \to 1$. Nous l'utilisons dans (22.585) :

$$\frac{\pi}{2} = nW_nW_{n-1} = n\alpha(n)W_{n-1}^2. \tag{22.592}$$

Donc

$$W_{n-1}^2 = \frac{\pi}{2n\alpha(n)}, \tag{22.593}$$

et

$$W_{n-1}\sqrt{\frac{1}{\alpha(n)}}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{22.594}$$

Vu que le coefficient $\sqrt{1/\alpha(n)}$ tend vers 1 pour $n \to 1$, nous avons l'équivalence demandée.

□

22.24.2 Formule de Stirling

LEMooDXJOooOGFcIv

Lemme 22.186 ([688]).
Si $n \in \mathbb{N}$ nous avons la formule

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} \tag{22.595}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser astucieusement le développement de la proposition 17.114. Nous avons d'une part

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \tag{22.596}$$

et d'autre part,

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}. \tag{22.597}$$

Cela permet de calculer, en utilisant l'associativité de la série[37] EQooYVXHooNDetVx

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln(1+t) - \ln(1-t) \tag{22.598a}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \frac{x^k}{k}\right) \tag{22.598b}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{22.598c}$$

SUBEQooIIOBooXYoHkK

parce que tous les termes pairs s'annulent, tandis que les termes impairs sont doublés. Notez que la somme dans (22.598c) commence à $k = 0$, contrairement aux autres qui commencent à 1.

Et là c'est l'astuce : on écrit l'égalité (22.598) avec le t qu'il faut pour que

$$\frac{1+t}{1-t} = 1 + \frac{1}{n}. \tag{22.599}$$

Nous posons donc $t = \frac{1}{2n+1}$ nous avons

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}, \tag{22.600}$$

ce qu'il fallait. □

LemCEoBqrP

Lemme 22.187 (Formule de Stirling[689, 690, 686, 688, 691]).
Nous avons l'équivalence de suites[38]

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}. \tag{22.601}$$

[37] Proposition 12.173.
[38] Définition 11.33.

Démonstration. Nous posons

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \tag{22.602}$$

et $b_n = \ln(a_n)$.

(1) **Une formule pour $b_n - b_{n+1}$** Nous faisons un beau calcul qui utilise les formules de la proposition 17.98 ainsi que $\ln(e) = 1$: SUBEQSooZTABooBukFGM

$$b_n - b_{n+1} = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \tag{22.603a}$$
$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}}\frac{1}{e}\right) \tag{22.603b}$$
$$= \ln\left((\frac{n+1}{n})^{n+1/2}\right) - 1 \tag{22.603c}$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n}) - 1. \tag{22.603d}$$

(2) **La suite (b_n) est décroissante** Nous écrivons l'égalité (22.603) en utilisant le lemme 22.186 :

$$b_n - b_{n+1} = (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1 \tag{22.604a}$$
$$= \frac{1}{2}(2n+1)2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} - 1 \tag{22.604b}$$
$$= (2n+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} \tag{22.604c}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}. \tag{22.604d}$$

Notez que le terme $k = 0$ s'est simplifié avec le -1. Vu que le tout est une somme de termes positifs, nous avons

$$b_n - b_{n+1} > 0 \tag{22.605}$$

et la suite est décroissante.

(3) **Majoration pour $b_n - b_{n+1}$** Vu que $\frac{1}{2k+1} < 1$, nous pouvons majorer :

$$b_n - b_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^k. \tag{22.606}$$

Nous remarquons que cela est une série géométrique déjà traitée dans la proposition 12.186. Nous faisons un peu de calcul en partant de

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \tag{22.607}$$

avec $q = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Après quelques simplifications,

$$b_n - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{n(n+1)} \tag{22.608}$$

(4) **Le coup de la somme télescopique** Nous avons

$$b_1 - b_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n). \tag{22.609}$$

Chacun de ces termes est majoré ; nous avons donc

$$b_1 - b_n < \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m(m+1)} \leqslant \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{4} \tag{22.610}$$

grâce au lemme 12.189 pour la dernière somme.

(5) **La suite b_n est bornée vers le bas**

Vu que $b_1 = 1 - \frac{\ln(2)}{2}$, nous avons

$$b_n > b_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \tag{22.611}$$

En utilisant la majoration de l'exemple 22.132 nous trouvons

$$0.327 \leqslant b_n \leqslant 0.427. \tag{22.612}$$

Cet encadrement n'est pas très important. Le point est que la suite (b_n) soit bornée vers le bas ; savoir que la borne est strictement positive n'est pas indispensable.

(6) **Une limite pour (a_n)** La suite (b_n) est décroissante et bornée vers le bas, donc elle est convergente par le lemme 11.36. Vu que l'exponentielle est une fonction continue[39], la suite $a_n = e^{b_n}$ est également convergente.

Vu que $\lim_{n\to\infty} b_n > 0$, nous avons $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} > 1$.

L'important est que nous sachions que (a_n) est une suite convergente. Nous notons L sa limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = L. \tag{22.613}$$

Ou encore :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{L\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1. \tag{22.614}$$

Autrement dit, en posant

$$n! = \alpha(n) L\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{22.615}$$

EQyiBooFVCCooIbGpsW

nous avons $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 1$.

(7) **Introduction de Wallis** Nous avons déjà parlé dans le lemme 22.182 du nombre

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}. \tag{22.616}$$

Le lemme 22.185 implique que la suite $I_n = W_{2n}$ est équivalente à $\sqrt{\pi/4n}$.

Cela étant dit, nous faisons un gros calcul en remplaçant les factorielles dans W_{2n} par la formule (22.615). Après pas mal de calculs[40], nous trouvons

$$I_n = \frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\pi}{2n}. \tag{22.617}$$

Nous avons donc

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{\pi}{\sqrt{n}}\frac{1}{2L}. \tag{22.618}$$

Il existe donc une fonction $\beta(n)$ avec $\beta(n) \to 1$ telle que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} = \beta(n)\frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{\pi}{\sqrt{n}}\frac{1}{2L}. \tag{22.619}$$

En simplifiant par $1/\sqrt{n}$,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \beta(n)\frac{\alpha(2n)}{\alpha(n)^2}\frac{\pi}{2L}. \tag{22.620}$$

Nous prenons à présent la limite $n \to \infty$ en nous rappelant que α et β donnent 1. Après simplifications, nous trouvons

$$L = \sqrt{\pi}. \tag{22.621}$$

(8) **La fin** Nous introduisons la valeur $L = \sqrt{\pi}$ dans l'expression (22.615) de la factorielle :

$$n! = \alpha(n)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{22.622}$$

[39] Parce qu'elle est dérivable, voir par exemple le théorème 17.88.

[40] Si vous êtes en manque de papier de brouillon, c'est le moment de vous inquiéter.

La dernière équation est exactement ce qui signifie l'équivalence de suite demandée. □

22.188.
J'ai déjà dit du mal de la formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$ dans (20.14). La formule de Stirling est plus intéressante parce qu'elle lie (réellement) les nombres e et π. Mais elle fait aussi intervenir le nombre $\sqrt{2}$, et la fonction factorielle.

La formule de Stirling est également nettement moins triviale à démontrer : la formule d'Euler ne fait intervenir de non trivial que les définitions et propriétés des fonctions trigonométriques. Toutes ces propriétés sont également utilisées pour prouver la formule de Stirling.

22.24.3 La fonction sinus cardinal, intégrale de Dirichlet

Définition 22.189.
La fonction ***sinus cardinal*** *est*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t} & sinon. \end{cases} \tag{22.623}$$

Elle sert à plein de choses. Entre autres, le lemme 22.192 montrera que la fonction $x \mapsto |\sin(x)/x|$ a une intégrale sur $\mathbb{R}$ qui vaut ∞. Cela nous permettra de donner un exemple d'une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ (lemme 31.8).

22.190.
Le but que nous nous fixons maintenant est de prouver que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{22.624}$$

Un adage dit que si un théorème est trop long, c'est qu'il n'a pas assez de lemmes. Nous allons faire plein de lemmes.

LEMooMJFBooAjtNjV

Lemme 22.191.
La fonction sinus cardinal est continue.

Démonstration. Elle est continue en zéro parce que le lemme 20.259 nous donne

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1. \tag{22.625}$$

□

Nous commençons par une mauvaise nouvelle.

LEMooEEWSooZwLSAP

Lemme 22.192 ([1])**.**
Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} |\frac{\sin(x)}{x}| dx = \infty. \tag{22.626}$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$ tel que sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta]$, nous ayons $\sin(x) > 0.9$[41] .

Les intervalles $I_k = [\frac{\pi}{2} - \delta + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \delta + 2k\pi]$ sont disjoints et la fonction que nous intégrons est partout positive. Nous découpons

$$\mathbb{R} = C + \bigcup_{k=0}^{\infty} [\frac{\pi}{2} - \delta + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \delta + 2k\pi] \tag{22.627}$$

où C est le complémentaire qu'il faut pour faire $\mathbb{R}$.

La σ-additivité de l'intégrale de Lebesgue (proposition 16.213) nous indique que

$$\int_{\mathbb{R}} |\frac{\sin(x)}{x}| = \int_C |\frac{\sin(x)}{x}| + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_k} |\frac{\sin(x)}{x}| dx \tag{22.628}$$

[41] Ça existe par une astucieuse combinaison du théorème 11.92 des valeurs intermédiaires, de la valeur remarquable $\sin(\pi/2) = 1$ (de (20.46)) et du fait que sin est continue (proposition 20.1).

Vu que tous les termes sont positifs, nous obtenons une majoration en en supprimant un. Allons-y : SUBEQSooSRAYooEOBwiC

$$\int_{\mathbb{R}} |\frac{\sin(x)}{x}|dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_k} |\frac{\sin(x)}{x}|dx \tag{22.629a}$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} 0.9 \int_{I_k} \frac{1}{x}dx \tag{22.629b}$$

$$\geqslant 0.9 \sum_{k=0}^{\infty} 2\delta \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\delta+2k\pi} \tag{22.629c}$$ SUBEQooKMURooYuInCo

$$\geqslant 1.8\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi(k+1)} \tag{22.629d}$$ SUBEQooJCQOooYoUCps

$$= \frac{1.8\delta}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}. \tag{22.629e}$$

Justifications :

- Pour (22.629c), nous avons majoré $\frac{1}{x}$ par $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\delta+2k\pi}$ sur I_k.
- Pour (22.629d), nous avons dit que $\frac{\pi}{2}+\delta < 2\pi$.

La dernière somme dans (22.629) diverge.

Donc la fonction sinus cardinal n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. □

La mauvaise nouvelle suivante en est un corolaire immédiat.

LEMooBEQRooHaugKj

Lemme 22.193.
La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,\infty[$ au sens de Lebesgue.

Démonstration. Le lemme 22.192 nous dit que $\int_0^\infty |f| = \infty$. Dans ce cas, $\int_0^\infty f$ n'existe pas par le lemme 16.190. □

Donc l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ n'existe pas parce que la définition de l'intégrale de Lebesgue ne permet pas de profiter des compensations qui arrivent entre les valeurs positives et négatives.

Nous définissons donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{22.630}$$ EQooWAQIooTEQPbI

Pour chaque b, l'intégrale existe sans problèmes (fonction continue sur le compact $[0,b]$), et les compensations se font. Il n'est pas pas sans espoir que la limite (22.630) existe et vaille un nombre fini.

LEMooTFVZooRAmjUN

Lemme 22.194 ([692]).
La limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt \tag{22.631}$$

existe dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Découpage**

Nous découpons l'intervalle $[0,b]$ en morceaux du type $[k\pi,(k+1)\pi]$ et un morceau restant lorsque b n'est pas un multiple de π :

$$[0,b] = \bigcup_{k=0}^{N(b)-1} [k\pi,(k+1)\pi] \cup [N(b)\pi,b] \tag{22.632}$$

où $N(b)$ est un entier bien choisi[42]. En tout cas $\lim_{b\to\infty} N(b) = \infty$.

[42] Il me semble que le traitement de ce terme manque dans [692].

(2) **Majoration 1**

Pour chaque $b \in \mathbb{R}^+$ nous avons

$$\int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{k=0}^{N(b)} \int_{[k\pi,(k+1)\pi]} \frac{\sin(t)}{t}dt + \int_{[(N(b)+1)\pi,b]} \frac{\sin(t)}{t} \tag{22.633}$$

Dans le dernier terme, nous majorons $|\sin(t)| \leqslant 1$ et $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{(N(b)+1)\pi}$. Cela donne

$$\left| \int_{[(N(b)+1)\pi,b]} \frac{\sin(t)}{t} \right| \leqslant \frac{b-(N(b)+1)\pi}{(N(b)+1)\pi} \leqslant \frac{1}{N(b)+1} \tag{22.634}$$

où nous avons encore majoré $b \leqslant (N(b)+2)\pi$.

(3) **Majoration 2**

En ce qui concerne les autres termes, sur l'intervalle $[k\pi,(k+1)\pi]$, nous avons $\sin(t) = (-1)^k|\sin(t)|$. Nous avons alors

$$\int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{k=0}^{N(b)} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt + \alpha(b) \tag{22.635}$$

EQooHZPRooFuwRWQ

où $|\alpha(b)| \leqslant \frac{1}{N(b)+1}$; l'important est que $\lim_{b\to\infty} \alpha(b) = 0$.

(4) **Une suite alternée**

L'inégalité (22.635) nous incite à étudier la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ en ayant posé

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt. \tag{22.636}$$

Nous montrons à présent que la suite (a_k) vérifie les conditions du critère des séries alternées 12.190.

D'abord, $a_{k+1} \leqslant a_k$. En effet en utilisant le changement de variables[43] $u = t - \pi$,

$$a_{k+1} = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u+\pi)|}{u+\pi}du = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+\pi}du < a_k. \tag{22.637}$$

Nous avons utilisé le fait que $|\sin(u+\pi)| = |\sin(u)|$ pour tout u.

De plus, vu que $|\sin(t)| \leqslant 1$ et que $t \in [k\pi,(k+1)\pi]$, nous avons

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{k\pi} = \frac{(k+1)\pi - k\pi}{k\pi} = \frac{1}{k}. \tag{22.638}$$

Donc $a_k \leqslant \frac{1}{k} \to 0$.

Le critère des séries alternées 12.190 nous dit que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k < \infty. \tag{22.639}$$

(5) **Conclusion** Nous repartons de (22.635) :

$$\int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{k=0}^{N(b)} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt + \alpha(b). \tag{22.640}$$

Cette égalité est valable pour tout $b \in \mathbb{R}^+$. Le passage à la limite $b \to 0$ à droite donne un nombre fini ; donc à gauche aussi, et nous avons prouvé que

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt < \infty. \tag{22.641}$$

□

[43] Le théorème 16.284 est toujours bon à citer.

Notre tâche n'est donc pas sans espoir. Au moins l'intégrale que nous cherchons à évaluer est finie.

LEMooARPIooDPSGwR

Lemme 22.195.
Soit $x \in]0,\infty[$. L'intégrale

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt \tag{22.642}$$

existe au sens de Lebesgue usuel.

Démonstration. Vu qu'en $t = 0$ nous avons $\frac{\sin(t)}{t} = 1$, il n'y a pas de problèmes de ce côté. Lorsque $t > 1$ nous avons la majoration

$$|e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}| \leqslant |e^{-tx}|. \tag{22.643}$$

Lorsque t est assez grand, le lemme 17.119 nous donne aussi la majoration

$$|e^{-tx}| \leqslant \frac{1}{t^2}. \tag{22.644}$$

La proposition 16.303(2) implique que $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} < \infty$. Et les majorations font que la proposition 16.178 nous donne le résultat. □

LEMooRDCSooBrWmep

Lemme 22.196 ([692]).
Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\arctan(x) + C \tag{22.645}$$

pour tout $x > 0$.

Démonstration. En permutant dérivée et intégrale, nous allons prouver que $I'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(1) **Permuter** Nous posons

$$f(x,t) = e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}, \tag{22.646}$$

et nous vérifions les hypothèses du théorème 19.42.

(1a) Pour chaque $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[0,\infty[$, c'est le lemme 22.195.

(1b) Pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable.

(1c) Nous avons la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx} \sin(t) \tag{22.647}$$

qui vérifie

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leqslant e^{-tx}, \tag{22.648}$$

alors que la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0,\infty[$.

Nous pouvons donc dériver sous l'intégrale et obtenir

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt} \sin(t) dt. \tag{22.649}$$

(2) **Quelques intégrations par partie** Nous posons

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sin(t) dt. \tag{22.650}$$

Cette intégrale est une intégrale de Lebesgue toute simple. En effet, posons provisoirement $s(t) = e^{-xt} \sin(t)$. La partie positive de s vérifie $s_+(t) \leqslant e^{-xt}$ et la partie négative vérifie $s_-(t) > -e^{-xt}$. Les deux ont une intégrale qui converge. La définition 16.188 dit alors que J est une intégrale tout à fait propre. Elle serait d'ailleurs mieux écrite sous la forme

$$J(x) = \int_{[0,\infty]} e^{-xt} \sin(t) dt. \tag{22.651}$$

Bref. Tout ça pour dire que nous avons tout à fait le droit de la faire par parties[44], en deux fois.

D'abord en posant $u = e^{-xt}$ et $v' = \sin(t)$ nous avons

$$J(x) = \left[-e^{-xt}\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty (-)xe^{-xt}(x)\cos(t)dt = 1 - x\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt. \tag{22.652}$$

Nous faisons l'intégrale encore par parties en posant $u = e^{-xt}$ et $v' = \cos(t)$:

$$\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt = \left[e^{-xt}\sin(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-x)e^{-xt}\sin(t)dt = xJ(x). \tag{22.653}$$

Donc

$$\begin{aligned} J(x) &= 1 - x\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt && \text{(22.654a)}\\ &= 1 - x\int_0^\infty e^{-xt}\cos(t)dt && \text{(22.654b)}\\ &= 1 - x\Big(\underbrace{x\int_0^\infty e^{-xt}\sin(t)dt}_{J(x)}\Big) && \text{(22.654c)}\\ &= 1 - x^2J(x). && \text{(22.654d)} \end{aligned}$$

Voilà qui prouve que $J(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et donc que

$$F'(x) = -J(x) = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{22.655}$$

(3) **Et enfin**

Le théorème 20.44(2) nous dit que la dérivée de la fonction arctan est précisément $1/(1+x)$. Donc F et arctan ont la même dérivée (au signe près). Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = -\arctan(x) + C \tag{22.656}$$

pour tout $x > 0$.

□

LEMooEOYHooVIMCCa

Lemme 22.197.
Nous avons

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \tag{22.657}$$

pour tout $x > 0$.

Démonstration. Le but de ce lemme est de fixer la constante laissée arbitraire dans le lemme 22.196. Nous savons qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = -\arctan(x) + C. \tag{22.658}$$

EQooTZGXooUxfAiT

Le but est de prendre la limite $x \to \infty$ des deux côtés.

Par le lemme 20.260, nous avons $|\frac{\sin(t)}{t}| \leqslant 1$ sur $[0, \infty[$. Donc

$$F(x) \leqslant \int_0^\infty e^{-xt}dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{x}. \tag{22.659}$$

Vu que $F(x) \leqslant \frac{1}{x}$ pour tout x, nous avons certainement $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

D'autre part,

$$\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}. \tag{22.660}$$

En passant à la limite dans (22.658), nous avons

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C, \tag{22.661}$$

et donc $C = \pi/2$. □

[44] Proposition 19.18.

Nous avons maintenant la formule

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \tag{22.662}$$

qui est valable pour tout $x > 0$.

Notre but sera de prendre la limite $x \to 0$ des deux côtés. Vu que arctan est continue, le membre de droite ne pose pas de problèmes et donne $\pi/2$. Pour le membre de gauche, il faut encore permuter une limite et une intégrale.

Pour la suite, nous allons étudier[692]

$$\int_0^\infty (1 - e^{-xt}) \frac{\sin(t)}{t} dt. \tag{22.663}$$

Cette intégrale n'existe pas au sens de Lebesgue et est définie par

$$L(x) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b (1 - e^{-xt}) \frac{\sin(t)}{t} dt. \tag{22.664}$$

Rien n'indique cependant pour l'instant que cette limite existe.

LEMooZGODooLaBuHo

Lemme 22.198 ([692]).
Soit $x > 0$. Nous posons

$$L_k(x) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (1 - e^{-tx}) \frac{|\sin(t)|}{t} dt. \tag{22.665}$$

EQooJXWMooRbbCtt

La suite $(L_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait le critère des séries alternées[45]*, c'est-à-dire que cette suite est positive, décroissante à limite nulle.*

Démonstration. Notons que chacune des intégrales $L_k(x)$ est sans problèmes : fonction continue sur un compact. Trois éléments à prouver.

(1) **Positive** Vu que dans toute notre histoire, $x, t > 0$, nous avons $1 - e^{-tx} > 0$ et donc toute la fonction intégrée est positive.

(2) **Tend vers zéro** Vu que $1 - e^{-tx} < 1$, nous avons

$$L_k(x) \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{t} dt \leqslant \pi \frac{1}{k\pi} = \frac{1}{k}. \tag{22.666}$$

EQooCGAQooDSyblu

Donc $\lim_{k \to \infty} L_k(x) = 0$.

(3) **Décroissante** Nous devons à présent prouver que $L_k(x)$ est décroissante en k lorsque x est fixé.

Nous avons $L_{k+1}(0) = L_k(0)$ pour tout k. Nous allons montrer que $L'_{k+1}(x) < L'_k(x)$ pour tout $x > 0$. De cette façon nous aurons bien $L_{k+1}(x) < L_k(x)$ pour tout k et x.

En permutant (encore) intégrale et dérivée,

$$\begin{aligned}
L'_{k+1}(x) &= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-tx} |\sin(t)| dt && \text{(22.667a)} \\
&= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-(u+\pi)x} |\sin(u+\pi)| && \text{(22.667b)} \\
&= e^{-\pi x} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-ux} |\sin(u)| du && \text{(22.667c)} \\
&= e^{-\pi x} L'_k(x). && \text{(22.667d)}
\end{aligned}$$

EQooAGGCooSoPHnz
SUBEQooEWZSooQtZBYJ
SUBEQooYGDQooLWqvvg

Justifications :

- Pour (22.667a), permuter dérivée et intégrale ; je ne donne pas tout le détail. Ça a déjà été fait.
- Pour (22.667b), nous avons fait le changement de variables $u = t - \pi$.
- Pour (22.667c), nous avons utilisé le fait que $|\sin(u+\pi)| = |\sin(u)|$ ainsi que $e^{-(u+\pi)x} = e^{-ux} e^{-\pi x}$ par (14.1211).

[45] Théorème 12.190.

Nous avons donc prouvé que

$$L'_{k+1}(x) = e^{-\pi x} L'_k(x) < L'_k(x). \tag{22.668}$$

□

LEMooSWFDooGLfwoD

Lemme 22.199.
Pour chaque $x > 0$, nous avons la limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k(x) < \infty. \tag{22.669}$$

Démonstration. Nous fixons (provisoirement) b et nous découpons l'intervalle d'intégration comme

$$[0, b] = \bigcup_{k=1}^{N} [k\pi, (k+1)\pi] \cup \big[(N+1)\pi, b\big] \tag{22.670}$$

où N est une fonction de b ; quelque chose comme $N(b)$ est le plus grand entier tel que $\big(N(b)+1\big)\pi \leqslant b$. Sur chacun des intervalles nous avons $\sin(t) = (-1)^k |\sin(t)|$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\int_0^b (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{N(b)} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (1 - e^{-tx}) \frac{|\sin(t)|}{t} dt \\ + \int_{(N+1)\pi}^{b} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt\end{aligned} \tag{22.671}$$

EQooGBEDooSeuyMN

Le premier terme est $\sum_{k=0}^{N(b)} (-1)^k L_k(x)$, dont nous savons que la limite $b \to \infty$ existe parce que $L_k(x)$ vérifie le critère des séries alternées (lemme 22.198). En ce qui concerne le second terme,

$$\Big| \int_{(N+1)\pi}^{b} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} \Big| < \frac{b - (N+1)\pi}{(N+1)\pi} < \frac{1}{N(b)+1}. \tag{22.672}$$

La dernière inégalité est le fait que $N(b)$ est choisi pour avoir $b - \big(N(b)+1\big)\pi < \pi$.

Les deux termes de (22.671) ont donc une limite lorsque $b \to \infty$. Nous pouvons donc passer à la limite en sommant les deux limites :

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k(x). \tag{22.673}$$

Cette égalité est valable pour chaque $x > 0$.

Le fait que la limite soit finie est dans le critère des séries alternées. Pour chaque x, la suite $L_k(x)$ vérifie ce critère par le lemme 22.198. □

LEMooNZVSooDbZCZx

Lemme 22.200.
Nous avons

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = 0. \tag{22.674}$$

Démonstration. La définition de l'intégrale ainsi que le lemme 22.199 nous ont déjà donné

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b (1 - e^{-tx}) \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k(x) \tag{22.675}$$

ainsi que l'assurance que le tout est un nombre réel fini[46].

(1) **Majoration pour la série alternée**

[46] De toutes façons, il n'existe pas de nombres réels infinis, mais vous voyez ce que je veux dire.

Nous majorons un peu. Pour $x>0$ et $N\in\mathbb{N}$ nous avons SUBEQSQooLIGNooNAzpmi

$$|\sum_{k=0}^{N}(-1)^kL_k(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{N}|L_k(x)| \tag{22.676a}$$
$$=\sum_{k=0}^{N}|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\sin(t)|}{t}dt| \tag{22.676b}$$ EQooIIVVooJvHFhS
$$\leqslant\sum_{k=0}^{N}\int_{k\pi}^{(N+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\sin(t)|}{t}dt \tag{22.676c}$$
$$=\int_{0}^{(N+1)\pi}(1-e^{-tx})\frac{|\sin(t)|}{t}dt \tag{22.676d}$$
$$\leqslant\int_{0}^{(N+1)\pi}tx\frac{|\sin(t)|}{t}dt \tag{22.676e}$$ SUBEQooZPVVooTBZzdl
$$\leqslant\int_{0}^{(N+1)\pi}xdt \tag{22.676f}$$
$$=x(N+1)\pi. \tag{22.676g}$$

Justifications :

- Pour (22.676b) c'est la définition (22.665).
- Pour (22.676e), c'est le fait que $0\leqslant 1-e^{-u}\leqslant u$ pour tout $u\geqslant 0$ ainsi que la sous-additivité de l'intégrale de la proposition 16.196.

(2) **Majoration pour l'intégrale**
Nous fixons $N\in\mathbb{N}$, et nous avons : SUBEQSooSBSJooMAkJPh

$$|\lim_{b\to\infty}\int_0^b(1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt|=|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kL_k(x)| \tag{22.677a}$$
$$=|\sum_{k=0}^{N}(-1)^kL_k(x)+\sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^kL_k(x)| \tag{22.677b}$$
$$\leqslant|\sum_{k=0}^{N}(-1)^kL_k(x)|+|\sum_{k=N+1}^{\infty}(-1)^kL_k(x)| \tag{22.677c}$$
$$\leqslant|\sum_{k=0}^{N}(-1)^kL_k(x)|+L_{N+1}(x) \tag{22.677d}$$ SUBEQooYFWDooYKhYtd
$$\leqslant|\sum_{k=0}^{N}(-1)^kL_k(x)|+\frac{1}{N+1} \tag{22.677e}$$ SUBEQooDDRGooNDfxqQ
(22.677f)

Justifications :

- Pour (22.677d) c'est le reste du critère des séries alternées, théorème 12.190(3).
- Pour (22.677e) c'est la majoration (22.666) déjà faite.

(3) **Les deux ensemble** Pour chaque N et pour chaque $x>0$ nous avons, en mettant (22.676) au bout de (22.677) :

$$|\int_0^{\infty}(1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt|\leqslant x(N+1)\pi+\frac{1}{N+1}. \tag{22.678}$$

En prenant la limite $x\to 0$ nous trouvons

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{\infty}(1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt\leqslant\frac{1}{N+1} \tag{22.679}$$

pour tout N. Donc cette limite est nulle :

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{\infty}(1-e^{-tx})\frac{\sin(t)}{t}dt=0. \tag{22.680}$$

□

Maintenant que nous avons fait plein de lemmes, nous pouvons énoncer notre résultat principal, et le démontrer facilement.

Théorème 22.201 (Intégrale de Dirichlet[692])**.**
Nous avons

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}. \tag{22.681}$$

Nous avons écrit $\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin(t)}{t}dt$ et non $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$ parce que cette dernière intégrale n'existe pas vraiment au sens de Lebesgue, voir le lemme 22.193. Dans la suite nous écrirons cependant $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$, en gardant en tête que cela n'est défini que via la limite.

Démonstration. Nous nommons D la valeur que nous cherchons. Le lemme 22.194 nous assure que

$$D=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin(t)}{t}<\infty. \tag{22.682}$$

Le lemme 22.197 nous donne, quant à lui,

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt=-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}. \tag{22.683}$$

Vu que les deux limites existent, on peut permuter somme et limite[47] :

$$D+\arctan(x)-\frac{\pi}{2}=\lim_{b\to\infty}\Big(\int_0^b\frac{\sin(t)}{t}+\int_0^b e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt\Big) \tag{22.684a}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^b(1-e^{-xt})\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{22.684b}$$

SUBEQooXIUNooPZnCPb

Pour (22.684b), nous avons des fonctions bornées sur un intervalle borné $]0,b[$, donc il n'y a pas de mal à sommer les intégrales.

Donc pour tout $x>0$, nous avons

$$D+\arctan(x)-\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty(1-e^{-xt})\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{22.685}$$

Nous passons à la limite $x\to 0$ en utilisant le lemme 22.200 et le fait que $\arctan(0)=0$ (lemme 20.49) :

$$D-\frac{\pi}{2}=0, \tag{22.686}$$

c'est-à-dire que résultat annoncé. □

[47] C'est une phrase un peu grandiloquente pour dire que $\lim_{b\to a}f(b)-\lim_{b\to a}g(b)=\lim_{b\to a}(f(b)-g(b))$. Ici nous avons $a=\infty$ et les fonctions f et g sont celles définies par les intégrales.

Chapitre 23

Arcs paramétrés

La structure de ce chapitre, comme beaucoup de choses dans le Frido, est fortement liée au choix de présenter toutes les matières dans l'ordre mathématiquement logique. Nous devons donc le placer après la trigonométrie ; les propriétés principales des fonctions trigonométriques étant dans la proposition 20.24, et c'est la proposition 20.64 qui nous permet de dire que $\big(\cos(t),\sin(t)\big)$ décrit le cercle.

Et enfin nous n'avons pas encore calculé la circonférence du cercle, et pour cause : nous n'avons pas encore donné de définition à la longueur d'un chemin dans $\mathbb{R}^2$. C'est pourquoi ce chapitre va aller droit à la longueur avant de donner des exemples.

23.1 Définitions

SecDeExCPar

Définition 23.1.
Un ***arc paramétré*** *dans $\mathbb{R}^p$ est un couple (I,γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et γ est une application continue de I dans $\mathbb{R}^p$. Nous disons que (I,γ) est un arc paramétré* ***compact*** *(ou un* ***chemin*** *dans $\mathbb{R}^p$) lorsque I est compact dans $\mathbb{R}$.*

L'intervalle I d'un arc paramétré compact est toujours de la forme $[a,b]$, étant donné que tous les intervalles compacts de $\mathbb{R}$ sont de cette forme. Un **sous arc** de (I,γ) est un arc de la forme (I_0,γ) avec $I_0\subset I$.

La définition 22.75 a déjà dit qu'un chemin dans $\mathbb{R}^n$ est une application continue $\sigma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

Si le chemin σ est dérivable, la fonction σ' est la **vitesse** du chemin σ. Si le chemin est deux fois dérivable, la fonction σ'' l'**accélération**.

L'image de σ dans $\mathbb{R}^3$ est ce qu'on appellera la **courbe**.

23.2 Longueur d'arc

SecLongArc

Nous voulons définir et étudier la notion de longueur d'un arc paramétré. Pour cela, le plus raisonnable est d'approcher l'arc par des petits segments de droites (dont les longueurs sont évidentes), et d'extraire la « meilleure » approximation.

Une des notions clefs pour la suite est celle de subdivision d'intervalles. Cette notion sera encore utilisée par la suite à propos des intégrales.

DefSubdivisionIntervalle

Définition 23.2.
Si I est un intervalle d'extrêmes a et b avec $a<b$, nous appelons ***subdivision finie*** *de I un choix de nombres t_i tels que*

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b. \tag{23.1}$$

Nous disons qu'une subdivision σ' est ***plus fine*** *que la subdivision σ si l'ensemble des points de σ est inclus dans celui des points de σ'. Dans ce cas, la subdivision σ' est un* ***raffinement*** *de σ. Nous désignons par $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des subdivisions finies de l'intervalle I.*

Dans la suite, toutes les subdivisions que nous considérons seront des subdivisions finies. Aussi nous parlerons simplement de *subdivisions* sans préciser. Nous allons souvent noter $\sigma=(t_i)_{i=1}^n$ pour désigner la subdivision formée par les nombres t_i. Il faut garder en tête que dans une subdivision, les nombres *sont ordonnés*.

DEFooDNZWooXmxhsU

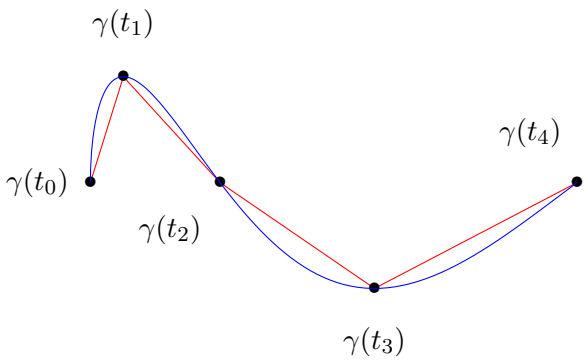


FIGURE 23.1 : La longueur d'un découpage. La somme des longueurs des segments droits est facile à calculer. LabelFigCourbeRectifiable

Définition 23.3.
Soit un arc paramétré compact (I,γ) et une subdivision $\sigma=(t_i)_{i=0}^n$ de $I=[a,b]$. À partir de γ et du découpage σ nous définissons le nombre (voir figure 23.1)

$$l_\sigma(\gamma)=\sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|. \tag{23.2}$$ Eqlsigmagammasss

On appelle ***longueur*** *de l'arc γ le nombre*

$$l(\gamma)=\sup_\sigma l_\sigma(\gamma)\in[0,\infty]. \tag{23.3}$$

Nous disons que γ est ***rectifiable*** *lorsque $l(\gamma)<\infty$.*

Lorsque nous voulons spécifier sur quel intervalle nous considérons l'arc, nous noterons $l(I,\gamma)$ au lieu de $l(\gamma)$ pour être plus précis.

Par l'inégalité triangulaire, si σ_1 est plus fine que σ, nous avons

$$l_\sigma(\gamma)\leqslant l_{\sigma_1}(\gamma), \tag{23.4}$$

Comme cela peut être vu sur la figure 23.2.

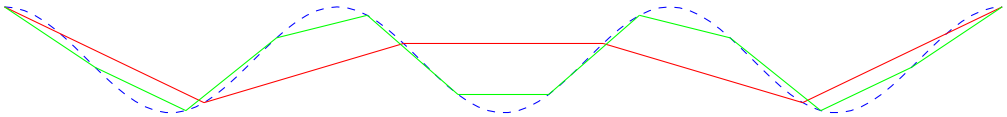


FIGURE 23.2 : Il est visible que la longueur donnée par l'approximation par des petits segments (verts) est plus longue et plus précise que celle donnée par les longs segments (rouge). LabelFigArcLongueurFinesse

PROPooCXLYooRpKDMs

Proposition 23.4.
Si P et Q sont des points de $\mathbb{R}^2$, alors le segment de droite joignant P à Q est le plus court des arcs paramétrés passant par P et Q.

Démonstration. Si γ est un arc paramétré joignant P et Q, la longueur de γ est donné par un supremum dont un des éléments est la longueur du segment de droite. □

Dans la vie réelle, il est souvent difficile et peu pratique de calculer le supremum « à la main ». C'est pourquoi nous allons travailler à exprimer la longueur d'un arc à l'aide d'une intégrale (théorème 23.9).

Lemme 23.5.
Nous avons $l(\gamma)=0$ si et seulement si $\gamma(t)$ est un vecteur constant.

Démonstration. Si l'application $\gamma(t)$ est constante, le résultat est évident. Supposons maintenant que γ ne soit pas constante. Cela signifie qu'il existe t_1 et t_2 dans I tels que $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$. Dans ce cas, si nous prenons le découpage $\sigma=\{a,t_1,t_2,b\}$, la somme (23.2) contient au moins le terme non nul $\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\|$, et donc $l_\sigma(\gamma)>0$. Par définition du supremum, nous avons alors $l(\gamma)\geqslant l_\sigma(\gamma)>0$. □

Propletautredecop

Proposition 23.6.
Soit (I,γ) un arc paramétré compact.

(1) *Si $\gamma' = (I', \gamma)$ avec $I' \subset I$, alors $l(\gamma') \leqslant l(\gamma)$.*

(2) *Soit $c \in [a, b]$, et considérons les arcs $\gamma_1 = \big([a, c], \gamma\big)$ et $\gamma_2 = \big([c, b], \gamma\big)$. Alors*

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \tag{23.5}$$

En particulier, γ est rectifiable si et seulement si γ_1 et γ_2 le sont.

Démonstration. (1) Nous notons $I = [a, b]$ et $I' = [a', b']$. Étant donné que $I' \subset I$, nous avons

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b. \tag{23.6}$$

Pour chaque subdivision $\sigma_0 : a' = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b'$ de I', nous pouvons construire une subdivision de I en « ajoutant » les points a et b, c'est-à-dire

$$\sigma : a \leqslant t_0 < \ldots < t_n \leqslant b. \tag{23.7}$$

Si nous calculons $l_\sigma(\gamma)$, nous avons tous les termes qui arrivent dans $l_{\sigma_0}(\gamma')$ plus le premier et dernier terme : $\|\gamma(t_0) - \gamma(a)\|$ et $\|\gamma(b) - \gamma(t_n)\|$. Nous avons donc

$$l_{\sigma_0}(\gamma') \leqslant l_\sigma(\gamma) \leqslant \sup_\sigma l_\sigma(\gamma) = l(\gamma). \tag{23.8}$$

Étant donné que pour toute subdivision σ_0 nous avons $l_{\sigma_0}(\gamma') \leqslant l(\gamma)$, en prenant le supremum sur les subdivisions σ_0 de I', nous avons comme annoncé

$$l(\gamma') \leqslant l(\gamma). \tag{23.9}$$

(2) Soit $\sigma = \{t_i\}$ une subdivision de $[a, b]$. Nous considérons les subdivisions σ_1 et σ_2 définies comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: \{t_i \text{ tel que } t_i < c\} \cup \{c\}, \\ \sigma_2 &: \{t_i \text{ tel que } t_i > c\} \cup \{c\}. \end{aligned} \tag{23.10}$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$l_\sigma(\gamma) \leqslant l_{\sigma\cup\{c\}}(\gamma) = l_{\sigma_1}(\gamma_1) + l_{\sigma_2}(\gamma_2) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \tag{23.11}$$

Nous avons donc

$$l(\gamma) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \tag{23.12}$$

Nous prouvons maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Étant donné que $l(\gamma_1)$ est le supremum des quantités $l_{\sigma_1}(\gamma_1)$ lorsque σ_1 parcours toutes les subdivisions possibles, il existe une partition σ_1^ε telle que (idem pour γ_2)

$$\begin{aligned} l_{\sigma_1^\varepsilon}(\gamma_1) + \frac{\varepsilon}{2} &> l(\gamma_1), \\ l_{\sigma_2^\varepsilon}(\gamma_2) + \frac{\varepsilon}{2} &> l(\gamma_2), \end{aligned} \tag{23.13}$$

où σ_1^ε est une subdivision de $[a, c]$ et σ_2^ε en est une de $[c, b]$. En faisant la somme des deux équations (23.13), nous trouvons

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) < l_{\sigma_1^\varepsilon}(\gamma_1) + l_{\sigma_2^\varepsilon}(\gamma_2) + \varepsilon = l_{\sigma_1^\varepsilon \cup \sigma_2^\varepsilon}(\gamma) \leqslant l(\gamma) + \varepsilon. \tag{23.14}$$

L'inégalité $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) < l(\gamma) + \varepsilon$ étant valable pour tout ε, nous avons

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leqslant l(\gamma). \tag{23.15}$$

Cette inégalité, combinée avec l'inégalité (23.12), donne bien $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

□

23.3 Abscisse curviligne

Définition 23.7.
Soit (I, γ) un arc rectifiable compact avec $I = [a, b]$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon [a, b] &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto l\big([a, t], \gamma\big) \end{aligned} \tag{23.16}$$

*est la **longueur d'arc** de γ.*

Cette fonction nous permet de calculer la distance (suivant la courbe) entre deux points arbitraires parce que si $a \leqslant t < u \leqslant b$, nous avons

$$l\big([t,u],\gamma\big) = \varphi(u) - \varphi(t). \tag{23.17}$$

En effet,

$$\varphi(u) - \varphi(t) = l\big([a,u],\gamma\big) - l\big([a,t],\gamma\big), \tag{23.18}$$

mais en utilisant la proposition 23.6, nous avons

$$l\big([a,u],\gamma\big) = l\big([a,t],\gamma\big) + l\big([t,u],\gamma\big). \tag{23.19}$$

Proposition 23.8.
La longueur d'arc d'un arc rectifiable compact est une fonction continue et croissante.

Démonstration. Soit (I,γ) un arc paramétré rectifiable compact avec $I = [a,b]$. Afin de montrer que φ est croissante, prenons $t \in I$ ainsi que $h > 0$ et montrons que $\varphi(t+h) \geqslant \varphi(t)$. La proposition 23.6 implique que

$$l\big([a,t+h],\gamma\big) = l\big([a,t],\gamma\big) + l\big([t,t+h],\gamma\big), \tag{23.20}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + l\big([t,t+h],\gamma\big) \geqslant \varphi(t). \tag{23.21}$$

Pour la continuité, soit t fixé dans $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Il nous faut démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si s est dans $[0,\eta]$ alors

$$|\varphi(t+s) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Étant donné que $l\big([t,b],\gamma\big)$ est le supremum des $l_\sigma\big([t,b],\gamma\big)$, il existe une subdivision σ donnée par les points $t, t_1, \cdots, t_{n-1}, b$ telle que

$$l_\sigma\big([t,b],\gamma\big) > l\big([t,b],\gamma\big) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(b) - \varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{23.22}$$

La continuité de γ implique qu'il existe un η tel que

$$s \in [0,\eta] \Rightarrow \|\gamma(t+s) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{23.23}$$

Quitte à prendre η encore plus petit, nous supposons que $t + \eta < t_1$. Soit $s \in [0,\eta]$ et considérons la subdivision de $[t,b]$ donnée par $\sigma' = \sigma \cup \{t+s\}$. Étant donné que σ' est plus fine que σ, le nombre $l_\sigma\big([t,b],\gamma\big)$ est inférieur ou égal à $l_{\sigma'}\big([t,b],\gamma\big)$. Nous avons donc les inégalités

$$\begin{aligned}
\varphi(b) - \varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant l_\sigma\big([t,b],\gamma\big) \\
&\leqslant l_{\sigma'}\big([t,b],\gamma\big) \\
&= \big\|\gamma(t+s) - \gamma(t)\big\| + l_{\sigma'\setminus\{t\}}\big([t+s,b]\gamma\big) \\
&\leqslant \|\gamma(t+s) - \gamma(t)\| + \varphi(b) - \varphi(t+s) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(b) - \varphi(t+s).
\end{aligned} \tag{23.24}$$

Au final, nous avons trouvé que

$$\varphi(t+s) - \varphi(t) \leqslant \varepsilon, \tag{23.25}$$

ce qui prouve que φ est continue au point t. □

En guise de paramètre sur un arc, nous pouvons utiliser la longueur d'arc elle-même. En effet si (I,γ) est un arc de longueur l, nous pouvons donner le même arc avec le couple $\big([0,l],g\big)$ où g est la fonction qui au réel s fait correspondre l'élément $\gamma\big(\varphi^{-1}(s)\big)$ de $\mathbb{R}^n$. Dire

$$P = (\gamma \circ \varphi^{-1})(s) \tag{23.26}$$

revient à dire que le point P est le point sur la courbe sur lequel on tombe après avoir marché une distance s sur la courbe.

Nous allons revenir sur ce « changement de paramètre » plus tard, en particulier dans la section 23.7.

23.3.1 Formule intégrale de la longueur

Nous pouvons voir un chemin γ comme étant la trajectoire d'une particule en fonction du temps. Sa vitesse à l'instant t est le vecteur $\gamma'(t)$, tandis que sa vitesse *scalaire* est le nombre $\|\gamma'(t)\|$. Une question naturelle est de savoir quelle est la longueur de la trajectoire parcourue entre $t=a$ et $t=b$.

Si nous prenons un petit intervalle de temps dt, nous pouvons supposer que le mobile avance à la vitesse constante $\|\gamma'(t)\|$. Cela ferait un trajet parcouru de longueur $\|\gamma'(t)\|dt$. Nous nous attendons donc à une formule de la forme suivante pour la longueur de γ :

$$l(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt. \tag{23.27}$$

EqDefLongueurChemin

Plus explicitement, si $\gamma(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, alors nous aurions la formule

$$l(\gamma)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt. \tag{23.28}$$

ThoLongueurIntegrale

Théorème 23.9.
Soit (I,γ) un arc paramétré compact de classe $\mathcal{C}^1$. Alors γ est rectifiable et

$$l(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt=\int_\gamma 1, \tag{23.29}$$

EqLongGammalInt

où $I=[a,b]$.

Démonstration. L'égalité avec l'intégrale le long de γ de la fonction 1 est simplement la définition 22.40 de l'intégrale curviligne.

Si $\sigma=\{t_i\}$ est une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, alors

$$\begin{aligned} l_\sigma(\gamma)&=\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|\\ &=\sum_{i=1}^n \|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\gamma'(t)dt\|\\ &\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\gamma'(t)\|dt\\ &=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt. \end{aligned} \tag{23.30}$$

Cela prouve déjà que

$$l(\gamma)=\sup_\sigma l_\sigma(\gamma)\leqslant\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt. \tag{23.31}$$

Eq_0208lsigsigammintifp

Nous devons maintenant prouver l'inégalité inverse.

Notons φ l'abscisse curviligne $\varphi(t)=l\big([a,t],\gamma\big)$. Cette dernière vérifie

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)=l\big([t,t+h],\gamma\big)\geqslant\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|, \tag{23.32}$$

et en particulier

$$\left\|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right\|\leqslant\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}. \tag{23.33}$$

Eq_0208intervpvpintfrach

D'autre part, en utilisant (23.31) sur le segment $[t,t+h]$, nous avons

$$\varphi(t+h)-\varphi(t)=l\big([t,t+h],\gamma\big)\leqslant\int_t^{t+h}\|\gamma'(u)\|du. \tag{23.34}$$

Cela nous permet de continuer l'inéquation (23.33) en

$$\left\|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right\|\leqslant\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\leqslant\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|\gamma'(u)\|du. \tag{23.35}$$

Prenons la limite $h \to 0$. À gauche nous reconnaissons la formule de la dérivée, et nous obtenons $\|\gamma'(t)\|$; au centre nous avons $\varphi'(t)$ et à droite, si $n(u)$ représente une primitive de la fonction $u \mapsto \|\gamma'(u)\|$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{n(t+h)-n(t)}{h} = n'(t) = \|\gamma'(t)\|. \tag{23.36}$$

Au final,

$$\|\gamma'(t)\| \leqslant \varphi'(t) \leqslant \|\gamma'(t)\|, \tag{23.37}$$

c'est-à-dire $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ et donc par le théorème fondamental du calcul intégral 16.290,

$$\varphi(t) - \varphi(a) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \tag{23.38}$$

Par construction de la longueur d'arc, $\varphi(a) = 0$ et en posant $t = b$ nous obtenons la relation recherchée :

$$l(\gamma) = \varphi(b) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du. \tag{23.39}$$

□

RemLongIntUn

Remarque 23.10.
Cela est cohérent avec 22.166, mais il faut garder en tête que $l(\gamma)$ n'est pas la mesure de Lebesgue de l'image de γ dans $\mathbb{R}^2$. Cette dernière est nulle.

Exemple 23.11.
Soient donc a et b deux points de $\mathbb{R}^m$, et γ la droite joignant a à b, c'est-à-dire

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb \tag{23.40}$$

avec $t \in [0,1]$. Le théorème 23.9 nous enseigne que la longueur de ce chemin est

$$l\big([0,1],\gamma\big) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \| -a+b\| = \|b-a\|, \tag{23.41}$$

qui est bien la distance entre a et b. △

Exemple 23.12 (Circonférence du cercle)**.**
Nous savons que l'image de

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(R\cos(t), R\sin(t)\big) \end{aligned} \tag{23.42}$$

est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$. Et de plus cet arc est de classe C^1 (et même C^∞) par la proposition 20.1. La longueur sera, d'après la formule (23.9)

$$l_\gamma = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 2\pi R \tag{23.43}$$

grâce à la formule $\sin^2 + \cos^2 = 1$ du lemme 20.4.

Mais tout cela n'est pas satisfaisant parce que nous n'avons pas encore de valeur numérique de π.

Il y a une autre façon de faire en considérant le quart de cercle dont la longueur en fonction de π est vite calculée par

$$l_\gamma = \int_0^{\pi/2} \|\gamma'(t)\| dt = \frac{\pi R}{2}. \tag{23.44}$$

Cette même longueur est calculée en termes de fonctions plus courantes avec le chemin

$$\begin{aligned} \sigma\colon]0,1[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{R^2-t^2}}\right) \end{aligned} \tag{23.45}$$

La longueur s'exprime avec

$$l_\sigma = \int_0^1 \sqrt{\frac{R^2}{R^2+t^2}} dt. \tag{23.46}$$

EQooIIKSooRQMgWY

Notons que le changement de variables $t = R\sin(u)$ permet de retrouver l'expression $l_\sigma = \pi R/2$.

Pour avoir une approximation de π, il est loisible de calculer une approximation numérique de l'intégrale (23.46) (avec $R = 1$) et de l'égaler à $\pi/2$. △

PROPooDMSTooEOFExj

Proposition 23.13.
Soit le cercle $S = \{x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| = 1\}$. Nous considérons la bijection[1] *$\varphi\colon [0,2\pi[\to S$. Soient deux*

[1] Proposition 20.64.

points $a, b \in S$ ainsi que $\theta_a = \varphi^{-1}(a)$, $\theta_b = \varphi^{-1}(b)$. Nous supposons que $\theta_a \leqslant \theta_b$ et que $\widehat{a(0,0)b} = \theta$[2].

Nous considérons le chemin

$$\begin{aligned}\gamma\colon [\theta_a, \theta_b] &\to S\\ t &\mapsto \big(R\cos(t), R\sin(t)\big).\end{aligned} \tag{23.47}$$

Alors $l(\gamma) = R\theta$[3].

Démonstration. Vu que $\|a\| = \|b\| = R$, la définition de l'angle $\widehat{aob}$ dit que

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\frac{a}{R} = \frac{b}{R}. \tag{23.48}$$

En substituant $a = R\big(\cos(\theta_a), \sin(\theta_b)\big)$ et $b = R\big(\cos(\theta_b), \sin(\theta_b)\big)$ et en faisant une petite multiplication matrice par vecteur :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta_a) - \sin(\theta)\sin(\theta_a)\\ \sin(\theta)\cos(\theta_a) + \cos(\theta)\sin(\theta_a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_b)\\ \sin(\theta_b).\end{pmatrix} \tag{23.49}$$

En utilisant les formules de trigonométrie du lemme 20.16, il vient

$$\begin{cases}\cos(\theta + \theta_a) = \cos(\theta_b) & \text{(23.50a)}\\ \sin(\theta + \theta_a) = \sin(\theta_b). & \text{(23.50b)}\end{cases}$$

La proposition 20.28 nous enseigne alors que $\theta_b = \theta + \theta_a + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Vu que θ_a et θ_b sont entre 0 et 2π, il est obligatoire que $k = 0$ et donc que $\theta_b = \theta_a + \theta$.

Enfin nous calculons la longueur de γ avec le théorème 23.9 qui permet de réduire la longueur à une intégrale : $l(\gamma) = \int_{\theta_a}^{\theta_a+\theta} \|\gamma'(t)\|dt$.

Dans notre cas, $\gamma'(t) = R\big(-\sin(t), \cos(t)\big)$ et donc $\|\gamma'(t)\| = R$. Donc

$$l(\gamma) = \int_{\theta_a}^{\theta_a+\theta} \|\gamma'(t)\|dt = R\theta, \tag{23.51}$$

comme annoncé. □

Exemple 23.14.
Considérons l'arc de cercle de rayon R interceptée par l'angle θ présenté sur la figure 23.3.

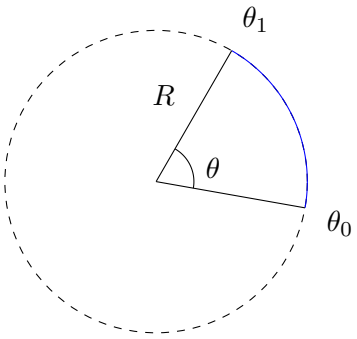


FIGURE 23.3 : Quelle est la longueur de la partie bleue de ce cercle de rayon R ? LabelFigAMDUooZZUOqa

Par définition, cette longueur sera

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}dt = R(\theta_1 - \theta_0). \tag{23.52}$$

Le radian comme unité de mesure d'angle est donc l'unité parfaite : elle est la longueur d'arc interceptée (si le rayon est $R = 1$). △

Une conséquence à peine indirecte de ce que nous venons de voir à propos de longueur d'arc de cercle est la proposition suivante[4].

[2] Angle, définition 20.169
[3] Longueur d'arc, définition 23.3.
[4] À mon avis il y a moyen de prouver ça avec un développement limité, mais je ne sais pas trop comment majorer l'erreur sans accepter que x soit arbitrairement proche de y. Si vous savez comment faire, écrivez-moi.

PROPooYMMKooSUBtoo

Proposition 23.15.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|. \tag{23.53}$$

Démonstration. Évacuons tout de suite la différence entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$: ils sont isométriques. Si vous n'êtes pas convaincu que tout se passe bien, vous pouvez récrire toute la démonstration en écrivant systématiquement $\big(\cos(x), \sin(x)\big)$ au lieu de e^{ix}. Cela serait au passage un bon exercice pour voir que les formules de dérivation fonctionnent bien.

Nous considérons les points e^{ix} et e^{iy} dans $\mathbb{C}$ et deux chemins différents les joignant. Le premier est le segment de droite

$$\begin{aligned} \sigma_1 \colon [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto te^{ix} + (1-t)e^{iy}. \end{aligned} \tag{23.54}$$

Le second est l'arc de cercle

$$\begin{aligned} \sigma_1 \colon [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{i\big(tx+(1-t)y\big)}. \end{aligned} \tag{23.55}$$

Nous avons $\sigma_1'(t) = e^{ix} - e^{iy}$ qui ne dépend pas de t, et donc la longueur est facile à calculer à partir de la formule intégrale du théorème 23.9 :

$$l(\sigma_1) = \int_0^1 |\sigma_1'(t)| = |e^{ix} - e^{iy}|. \tag{23.56}$$

En ce qui concerne le second chemin,

$$\sigma_2'(t) = (x-y)e^{i\big(tx+(1-t)y\big)}. \tag{23.57}$$

Nous avons[5] $|\sigma_2'(t)| = |x - y|$ qui ne dépend pas non plus de t. Donc

$$l(\sigma_2) = |x - y|. \tag{23.58}$$

Étant donné la proposition 23.4 qui dit que le chemin le plus court est le segment de droite,

$$l(\sigma_1) < l(\sigma_2) \tag{23.59}$$

et donc le résultat annoncé. □

23.16.
Si on veut savoir la longueur d'une courbe donnée sous la forme d'une fonction $y = y(x)$, un chemin qui trace la courbe est évidemment donné par

$$\gamma(t) = (t, y(t)), \tag{23.60}$$

et le vecteur tangent au chemin est $\gamma'(t) = (1, y'(t))$. Donc

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + y'(t)^2}, \tag{23.61}$$

et

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}. \tag{23.62}$$ EqLongFonction

Exemple 23.17.
La longueur de l'hélice

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ \sqrt{5}t \end{pmatrix} \tag{23.63}$$

pour $t \in [0, 4\pi]$ est donnée par

$$l(\sigma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 5}dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{9} = 12\pi. \tag{23.64}$$

△

[5] Si vous voulez citer des résultats, lemme 20.13 et proposition 11.102.

Définition 23.18.
Soit $\sigma_1\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$, un chemin et $\sigma_2\colon [c,d]\to\mathbb{R}^3$, un autre chemin. On dit que ces chemins sont ***équivalents*** *si il existe une fonction $\varphi\colon [a,b]\to[c,d]$ strictement croissante telle que $\sigma_1(t)=\sigma_2\big(\varphi(t)\big)$.*

Deux chemins équivalents parcourent la même courbe dans le même sens. Ils ne le parcourent toutefois pas à la même vitesse. On dit que les chemins sont **opposés** si la fonction φ de la définition est strictement décroissante. Dans ce cas, ils ont la même image, mais parcourue dans le sens opposés. Nous disons que deux chemins équivalents sont un **changement de paramétrage** pour la même courbe.

Dans le cas d'un paramétrage équivalente, nous avons $\varphi(a)=c$ et $\varphi(b)=d$. Les points de départ et d'arrivée des deux paramètres coïncident. Dans le cas d'un paramètre qui va dans le sens opposé par contre nous avons automatiquement $\varphi(a)=d$ et $\varphi(b)=c$.

Proposition 23.19.
La longueur d'une courbe ne dépend pas du paramètre (équivalent ou opposé) choisi.

Démonstration. Soient $\sigma_1\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ et $\sigma_2\colon [c,d]\to\mathbb{R}^3$ tels que

$$\sigma_1(t)=\sigma_2\big(\varphi(t)\big) \tag{23.65}$$

où $\varphi\colon [a,b]\to[c,d]$ est une bijection strictement monotone. Par définition on a

$$l(\sigma_1)=\int_a^b\|\sigma_1'(t)\|dt. \tag{23.66}$$

Nous pouvons exprimer la dérivée de σ_1 en termes de celle de σ_2 en dérivant la relation (23.65) :

$$\sigma_1'(t)=\varphi'(t)\sigma_2'\big(\varphi(t)\big). \tag{23.67}$$

En ce qui concerne la norme,

$$\|\sigma_1'(t)\|=|\varphi'(t)|\|\sigma_2'(t)\|. \tag{23.68}$$

Notez dans cette relation que $\varphi'(t)$ est un nombre (et non un vecteur). Étant donné que nous avons supposé que φ était monotone, soit elle est monotone croissante et $\|\varphi'(t)\|=\varphi'(t)$ pour tout t, soit elle est monotone décroissante et $\|\varphi'(t)\|=' \varphi(t)$ pour tout t.

Considérons d'abord le premier cas, c'est-à-dire $\|\varphi'(t)\|=\varphi'(t)$. Nous posons $s=\varphi(t)$, $ds=\varphi'(t)dt$. En remplaçant cela dans la formule de la longueur est

$$\begin{aligned}
l(\sigma_1)&=\int_a^b\varphi'(t)\|\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)\|dt\\
&=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\|\sigma_2'(s)\|ds\\
&=\int_c^d\|\sigma_2'(s)\|ds\\
&=l(\sigma_2).
\end{aligned} \tag{23.69}$$

Si nous considérons maintenant un paramétrage strictement décroissante. Dans ce cas, $\varphi'(t)\leqslant 0$ et $\|\varphi'(t)\|=-\varphi'(t)$. Nous posons encore une fois $s=\varphi(t)$, $ds=\varphi'(t)ds$. Ici il ne faut pas oublier que $\varphi(a)=d$ et $\varphi(b)=c$. Le calcul est à part cela le même en faisant attention au singe :

$$\begin{aligned}
l(\sigma_1)&=\int_a^b\varphi'(t)\|\sigma_2'\big(\varphi(t)\big)\|dt\\
&=-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\|\sigma_2'(s)\|ds\\
&=-\int_d^c\|\sigma_2'(s)\|ds\\
&=\int_c^d\|\sigma_2'(s)\|ds\\
&=l(\sigma_2).
\end{aligned} \tag{23.70}$$

Nous avons changé le signe en changeant l'ordre des bornes. □

23.4 Suite du chapitre

Le grand avantage des arcs paramétrés par rapports aux graphes de fonctions est qu'un arc paramétré peut « faire des retours en arrière », ou bien des auto intersections. Outre les deux exemples typiques de la la figure 23.4, un exemple classique est la droite verticale. Les fonctions $y = ax + b$ permettent de décrire toutes les droites, sauf les droites verticales. Dans le cadre des courbes paramétrées, les droites verticales et horizontales sont sur pied d'égalité. Quelques exemples classiques :

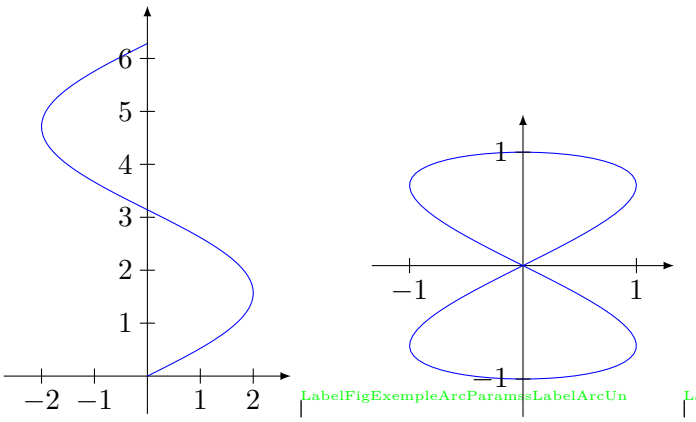
Droite horizontale Une droite horizontale à la hauteur a est donnée par la courbe paramétrée $\gamma(t) = (t, a)$, avec $t \in I = \mathbb{R}$.

Droite verticale Une droite verticale à la distance b de l'origine est donnée par la courbe paramétrée $\gamma(t) = (b, t)$, avec $t \in I = \mathbb{R}$.

PgGrqFnGamma

Graphe d'une fonction Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donné par l'arc $\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)$.

Un cercle Le cercle de rayon R est donné par l'arc $\gamma(t) = \big(R\cos(t), R\sin(t)\big)$.



LabelFigExempleArcParamssLabelArcUn LabelFigExempleArcParamssLabelArcDeux

(a) $\gamma(t) = (2\sin(t), t)$, avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (b) $\gamma(t) = (sin(2t), sin(t))$ avec $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$

FIGURE 23.4 : Des exemples d'arcs paramétrées. Ceux ne sont pas des graphes.

LabelFigExempleArcParam

Remarque 23.20.
Afin d'alléger la notation, nous allons le plus souvent désigner l'arc (I, γ) simplement par la fonction γ. Il est cependant toujours *très* important de savoir sur quel intervalle nous considérons le chemin. Cela dépendra le plus souvent du contexte, et nous indiquerons l'intervalle I explicitement lorsqu'une ambigüité est à craindre.

Par exemple, lorsque nous considérons le cercle $\gamma(t) = \big(R\cos(t), R\sin(t)\big)$, le plus souvent l'intervalle de variation de t sera $I = [0, 2\pi]$. Par contre, si nous considérons la droite $\gamma(t) = (t, 2t)$, l'intervalle de variation de t sera naturellement $I = \mathbb{R}$.

23.5 Autres exemples

Exemple 23.21.
Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Le chemin

$$\sigma(t) = x_0 + tv \tag{23.71}$$

est une droite. Sa vitesse est $\sigma'(t) = v$. △

Exemple 23.22.
La courbe

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{23.72}$$

avec $t \in [0, 2\pi[$ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Notez que si on prend $t \in [0, 4\pi[$, nous avons un *autre* chemin ; c'est le même cercle unité, mais parcouru *deux* fois. Même si le « dessin » (le graphe) des deux est le même, le chemin n'est pas le même.

Le chemin

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \end{pmatrix} \tag{23.73}$$

est le cercle unité parcouru une fois dans le sens inverse. Encore une fois le « dessin » est le même, mais le chemin n'est pas le même. △

Exemple 23.23.
Le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \tag{23.74}$$

est un chemin dont l'image est la parabole d'équation $y = x^2$. △

L'importance de la dérivée du chemin réside en le fait qu'elle donne la tangente. En effet le vecteur $\sigma'(t)$ est tangent au graphe de σ au point $\sigma(t)$.

CorKBEMooRvYAcJ

Corolaire 23.24.
La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon.

Démonstration. Nous savons que pour un cercle,

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \tag{23.75}$$

Un point général du cercle a pour abscisse $x = R\cos(\theta)$. En remplaçant nous trouvons le coefficient directeur suivant pour la tangente :

$$y'\big(R\cos(\theta)\big) = -\frac{1}{\tan(\theta)}. \tag{23.76}$$

Par conséquent une droite perpendiculaire à la tangente aurait comme coefficient directeur le nombre $\tan(\theta)$. Or cela est bien le coefficient directeur du rayon qui joint le point $(0,0)$ au point $\big(R\cos(\theta), R\sin(\theta)\big)$. □

Exemple 23.25.
Pour le cercle,

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \tag{23.77}$$

la dérivée est donnée par

$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t). \end{pmatrix} \tag{23.78}$$

Le produit scalaire $\sigma(t) \cdot \sigma'(t)$ est nul. Le vecteur $\sigma'(t)$ est donc bien tangent (corolaire 23.24). △

Exemple 23.26.
Le courbe donnée par le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \tag{23.79}$$

est une hélice. Sa vitesse est

$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23.80}$$

Notez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$. △

Remarque 23.27.
Lorsqu'on parle d'une courbe dans l'espace, l'intervalle sur lequel on considère la variation du paramètre est une donné fondamentale. Elle fait partie intégrante de la définition de la courbe.

23.6 Élément de longueur

23.6.1 Élément de longueur : cartésiennes

Étant donné que la longueur d'arc d'une courbe paramétrée (I, γ) est donnée par l'intégrale de $\|\gamma'(t)\|$, il est naturel d'appeler le nombre $\|\gamma'(t)\|\,dt$, **l'élément de longueur** de la courbe γ au point $\gamma(t)$.

En coordonnées cartésiennes dans le plan, une courbe paramétrée est donnée par

$$\gamma(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big), \tag{23.81}$$

et l'élément de longueur est

$$\|x'(t)\|\,dt = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}\,dt. \tag{23.82}$$ EqElLongCart

23.6.2 Élément de longueur : polaires (1)

En coordonnées polaires, une courbe est donnée par

$$\gamma(t) = \big(\rho(t), \theta(t)\big), \tag{23.83}$$

et le passage aux cartésiennes se fait via les formules

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\big(\theta(t)\big) & \text{(23.84a)} \\ y(t) = \rho(t)\sin\big(\theta(t)\big). & \text{(23.84b)} \end{cases}$$

L'élément de longueur se trouve directement en remplaçant $x(t)$ et $y(t)$ dans la formule (23.82). Les dérivées sont données par

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\sin\theta(t) \\ y'(t) &= \rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\theta'(t)\cos\theta(t), \end{aligned} \tag{23.85}$$

et un calcul montre que

$$\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 = \big(\rho'(t)\big)^2 + \big(\rho(t)\big)^2\big(\theta'(t)\big)^2. \tag{23.86}$$ EqElLongEnPolaires

Nous reviendrons plus en détail sur le concept de changement de paramétrage (ici, les polaires) à la section 23.7.

23.6.3 Élément de longueur : polaires (2)

Parfois on utilise θ comme paramètre. L'équation de la courbe est alors donnée en coordonnées polaires sous la forme

$$\rho(\theta) = f(\theta), \tag{23.87}$$ Eqgenereformepolaire

où f est une fonction réelle et il faut comprendre que nous parlons de la courbe $\big(\rho(\theta), \theta\big)$ en coordonnées polaires. En coordonnées cartésiennes, cette courbe est donnée par EqPolaireSemiGen

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(t) & \text{(23.88a)} \\ y(t) = \rho(t)\sin(t) & \text{(23.88b)} \end{cases}$$

avec t qui parcourt le plus souvent l'intervalle $[0, 2\pi]$. Notez qu'il se peut que le domaine ne soit pas toujours $[0, 2\pi]$; cela peut dépendre des circonstances. Quoi qu'il en soit, la donnée du domaine fait partie de la donnée d'une courbe, et il ne peut donc pas y avoir d'équivoques à ce niveau.

Nous utilisons à nouveau la formule (23.82) en y mettant les valeurs (23.88) :

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t)\cos(t) - \rho(t)\sin(t) & \text{(23.89a)} \\ y'(t) = \rho'(t)\sin(t) + \rho(t)\cos(t), & \text{(23.89b)} \end{cases}$$

et

$$\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 = \rho'(t)^2 + \rho(t)^2. \tag{23.90}$$ EqElemOngFOldeux

Remarque 23.28.
N'oubliez pas, en utilisant ces formules, que ce qui rentre dans l'intégrale est la *racine carré* de $(x')^2 + (y')^2$.

ExempleLongCercle

Exemple 23.29.
Calculons la circonférence du cercle. En coordonnées polaires, le graphe du cercle correspond à l'équation

$$\big(\rho(t), \theta(t)\big) = (R, t) \tag{23.91}$$

où R est constante (le rayon du cercle) et t va de 0 à 2π. En substituant dans l'équation (23.86), l'élément de longueur à intégrer est seulement

$$\sqrt{R^2} = R \tag{23.92}$$

parce que $\rho'(t) = 0$ et $\theta'(t) = 1$. La longueur du cercle est alors directement donnée par

$$l = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R. \tag{23.93}$$

Nous pouvions aussi faire le calcul en coordonnées cartésiennes. Alors la courbe est donnée par les équations

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(t) \\ y(t) &= R\sin(t) \end{aligned} \tag{23.94}$$

et $t \in [0, 2\pi]$. La circonférence du cercle est alors

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R. \tag{23.95}$$

△

Remarque 23.30.
Il faut bien comprendre que quand on parle de courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes on pense à une courbe dont le paramètre est, par exemple, t et les équations de la courbe sont $(x(t), y(t))$. Cela ne veut pas dire que x ou y soit le paramètre. Le cas où x ou y est le paramètre est un cas particulier qui est possible seulement pour certaines courbes et notamment pour les graphes. Le cercle de rayon 1 n'est pas un graphe, donc si on veut utiliser x ou y comme paramètre il faut d'abord découper la courbe en deux morceaux, par exemple, la moitié inférieure ($y < 0$) et la moitié supérieure ($y > 0$).

ExCycloLong

Exemple 23.31.
Une **cycloïde** est une courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) & \text{(23.96a)} \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) & \text{(23.96b)} \end{cases}$$

avec $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Comme montré sur la figure 23.5, la cycloïde donne lieu à un graphe périodique. Il est possible de montrer (le faire) que le premier arc correspond à $t \in [0, 2\pi]$. Nous voulons donc calculer la longueur de l'arc sur cet intervalle.

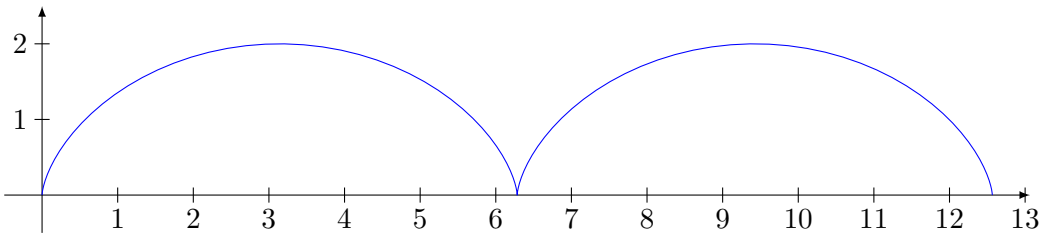


FIGURE 23.5 : La cycloïde de paramètre $a = 1$ entre 0 et 4π.

LabelFigCycloideA

Nous avons $x'(t) = a(1 - \cos(t))$ et $y'(t) = a\sin(t)$, de telle façon que

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = a\sqrt{2 - 2\cos(t)} = a\sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|. \tag{23.97}$$

Eq_0508dlcycloide

La longueur est donc donnée par

$$\int_0^{2\pi} 2a|\sin\frac{t}{2}|dt = 4a\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 8a. \tag{23.98}$$

△

Exemple 23.32.
La **cardioïde** est la courbe donnée par

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta)). \tag{23.99}$$

EqCardioide

avec $\theta \in [-\pi, \pi]$. Le nom de cette courbe provient de son graphe illustré à la figure 23.6.

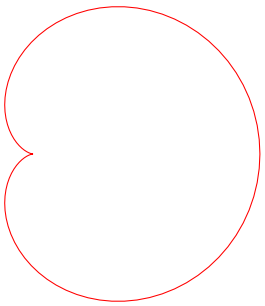


FIGURE 23.6 : Une cardioïde, $\rho = 1 + \cos(\theta)$. LabelFigCardioid

L'équation (23.99) est donnée sous la forme (23.87), c'est-à-dire que $\theta(t) = t$ et $\theta'(t) = 1$, et par conséquent l'élément de longueur est donné par

$$\begin{aligned}(\rho')^2 + (\rho)^2 &= \big(-a\sin(\theta)\big)^2 + a^2\big(1+\cos(\theta)\big)^2 \\ &= a^2\sin^2(\theta) + a^2\big(1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\big) \\ &= a^2\big(1+1+2\cos(\theta)\big) \\ &= 2a^2\big(1+\cos(\theta)\big) \\ &= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}.\end{aligned} \tag{23.100}$$

La longueur d'arc est donc donnée par

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)2dt = 8a. \tag{23.101}$$

△

23.6.4 Approximation de la longueur par des cordes

Définition 23.33 (Point régulier, birégulier[693])**.**
Soit un arc paramétré (I,γ). Un point $t \in I$ est dit ***régulier*** *si $\gamma'(t) \neq 0$, et il est dit* ***critique*** *si $\gamma'(t) = 0$. Le point $t \in I$ est dit* ***birégulier*** *si les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants et non nuls.*

Par extension, nous dirons également que le point $\gamma(t)$ lui-même est régulier, critique ou birégulier. Un arc est dit régulier *lorsque tous ses points sont réguliers.*

Note : dans le lemme 23.71 et ses dépendances, nous utilisons effectivement que l'arc γ est de classe C^2.

Nous savons que la longueur d'une courbe est donnée par le supremum sur toutes les subdivisions de la longueur des cordes correspondantes. De plus l'inégalité triangulaire nous enseigne que plus la subdivision est fine, plus la longueur sera grande. Il est donc naturel de penser que sur un petit intervalle, la longueur de la courbe ne doit pas être très différente de la longueur de la corde correspondante.

La proposition suivante est un énoncé précis et quantitatif de ce fait.

Proposition 23.34.
Soit (I,γ) un arc de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$ un point régulier (c'est-à-dire $\gamma'(t_0) \neq 0$). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un $\delta > 0$ tel que on trouve $t, t' \in I \cap (t_0, \delta)$ tels que

$$\left|\int_t^{t'} \|\gamma'(u)\|du - \|\gamma(t) - \gamma(t')\|\right| \leqslant 2\varepsilon|t - t'|. \tag{23.102}$$

Intuitivement, cette proposition signifie qu'au voisinage de t_0, la longueur d'arc est équivalente à celle de la corde.

Démonstration. Par la continuité de γ' (parce que γ est $\mathcal{C}^1$), pour tout ε, il existe un δ tel que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \big\|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)\big\| \leqslant \varepsilon. \tag{23.103}$$

Nous considérons la fonction

$$u \mapsto \gamma(u) - \gamma(t_0) - (u - t_0)\gamma'(t_0), \tag{23.104}$$

dont la dérivée (par rapport à u) est

$$\gamma'(u) - \gamma'(t_0). \tag{23.105}$$

Nous y appliquons la formule des accroissements finis entre t et t' choisis dans $I \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Il existe un u entre t et t' tel que

$$\begin{aligned}\big\|\gamma(t) - \gamma(t_0) - (t - t_0)\gamma'(t_0) - \gamma(t') + \gamma(t_0) + (t' - t_0)\gamma'(t_0)\big\| \\ &= |t - t'|\|\gamma'(u) - \gamma'(t_0)\| \\ &\leqslant \varepsilon|t - t'|.\end{aligned} \tag{23.106}$$

En simplifiant ce qui peut être simplifié dans le membre de gauche, nous trouvons

$$\big\|\gamma(t) - \gamma(t') - (t - t')\gamma'(t_0)\big\| \leqslant \varepsilon|t - t'|. \tag{23.107}$$

Le membre de gauche peut être minoré en utilisant la proposition 9.233 :

$$\Big|\|\gamma(t) - \gamma(t')\| - \|(t - t')\gamma'(t_0)\|\Big| \leqslant \varepsilon|t - t'|. \tag{23.108}$$

D'autre part, les inégalités (9.263) montrent que

$$-\|\gamma'(u) - \gamma'(t_0)\| \leqslant \|\gamma'(u)\| - \|\gamma'(t_0)\| \leqslant \|\gamma'(u) - \gamma'(t_0)\|. \tag{23.109}$$

Si de plus u est compris entre t et t', ces inégalités sont encore coincées entre $-\varepsilon$ et ε. En intégrant (23.109) par rapport à u entre t et t', nous obtenons

$$\left|\int_t^{t'} \big\|\gamma'(u)\big\| - (t - t')\big\|\gamma'(t_0)\big\|\right| \leqslant \varepsilon|t - t'|. \tag{23.110}$$

Afin d'alléger les notations pour la ligne suivante, nous notons A le nombre positif $\int_t^{t'} \|\gamma'(u)\|du$. Nous avons

$$\begin{aligned}\Big|A - \|\gamma(t) - \gamma(t')\|\Big| &= \Big|A - |t - t'|\,\|\gamma'(t_0)\| + |t - t'|\,\|\gamma'(t_0)\| - \|\gamma(t) - \gamma(t')\|\Big| \\ &\leqslant \Big|A - |t - t'|\,\|\gamma'(t_0)\|\Big| + \Big||t - t'|\,\|\gamma'(t_0)\| - \|\gamma(t) - \gamma(t')\|\Big|.\end{aligned} \tag{23.111}$$

L'équation (23.108) montre que le second terme est plus petit ou égal à $\varepsilon|t - t'|$. En ce qui concerne le premier terme, étant donné que A est positif,

$$\Big|A - |t - t'|\,\|\gamma'(t_0)\|\Big| \leqslant \Big|A - (t - t')\,\|\gamma'(t_0)\|\Big| \leqslant \varepsilon|t - t'|. \tag{23.112}$$

Au final, l'inéquation (23.111) donne

$$\Big|A - \|\gamma(t) - \gamma(t')\|\Big| \leqslant 2\varepsilon\,|t - t'|, \tag{23.113}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

23.7 Arc géométrique

Définition 23.35.
Soient (I, γ) et (J, g) deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$. On dit qu'il sont ***équivalents*** *si il existe une bijection $\theta\colon I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$, d'inverse de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $g = \gamma \circ \theta$. Nous notons $\gamma \sim g$ lorsque γ et g sont équivalents (les ensembles I et J sont sous-entendus).*

Le passage d'un paramétrage (I, γ) à une autre (J, g) se fait selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle\theta}\uparrow & \nearrow_{g} & \\ J & & \end{array} \tag{23.114}$$

Proposition 23.36.
La relation donnée dans la définition 23.35 est une relation d'équivalence.

Démonstration. Les trois points d'une relation d'équivalence se vérifient en utilisant le fait que θ est inversible, et que l'inverse θ^{-1} jouit des mêmes propriétés de continuité ($\mathcal{C}^k$) que θ.

Réflexivité Nous avons $\gamma \sim \gamma$ avec $\theta = \mathrm{Id}$.

Symétrie Si $\gamma \sim g$, alors nous avons une application θ telle que $g = \gamma \circ \theta$, et donc $\gamma = g \circ \theta^{-1}$, ce qui montre que $g \sim \gamma$.

Transitivité Si $\gamma \sim g$ et $g \sim h$ avec $g = \gamma \circ \theta$ et $h = g \circ \omega$, alors $h = \gamma \circ (\theta \circ \omega)$, ce qui montre que $\gamma \sim h$.

□

Si les arcs (I, γ) et (J, g) sont équivalents, les images dans $\mathbb{R}^n$ sont identiques, et décrivent donc « le même dessin ». Nous allons préciser cette notion plus loin.

Définition 23.37.
Pour cette raison les classes d'équivalences sont appelées des ***arcs géométriques*** *(de classe $\mathcal{C}^k$).*

Si Γ est un arc géométrique, ses représentants sont dits des **paramétrages admissibles** ou, plus simplement *paramétrage*. On dit que l'application $\theta\colon J \to I$ est un **changement de variable**. Nous disons que un arc géométrique est *compact* quand ses représentants sont compacts.

LemChamVarsStriMomnot

Lemme 23.38.
Dans le cas d'un arc $\mathcal{C}^1$, les changements de variables sont strictement monotones (croissants ou décroissants).

Démonstration. Nous considérons (I, γ) et (J, g), deux paramétrages différents du même arc géométrique, et $\theta \in \mathcal{C}^1(J, I)$ le changement de variable. Nous allons noter t la variable sur I et s la variable sur J. Par définition, $\theta\big(\theta^{-1}(t)\big) = t$, et par conséquent,

$$\theta'\big(\theta^{-1}(t)\big)(\theta^{-1})'(t) = 1. \tag{23.115}$$

En particulier $\theta'\big(\theta^{-1}(t)\big)$ ne s'annule pas pour aucune valeur de t. Mais $\theta^{-1}(t)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans J, donc nous avons $\theta'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Cela signifie bien que θ est strictement monotone. En effet, θ' étant continue, elle ne peut pas changer de signe sans passer par zéro (théorème 11.92 des valeurs intermédiaires). □

ThoLongArcGeom

Théorème 23.39.
La longueur d'un arc est indépendante de son paramétrage, c'est-à-dire que les représentants d'un arc géométrique compact de classe $\mathcal{C}^1$ ont même longueur.

Démonstration. Nous utilisons les mêmes notations que celles du lemme 23.38. Nous savons déjà que le changement de variable $\theta\colon J \to I$ est strictement monotone. Supposons que θ soit croissante. En effectuant un changement de variable dans l'intégrale qui donne la longueur[6] nous avons

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_I \|\gamma'(t)\| dt \\
&= \int_J \|\gamma'\big(\theta(s)\big)\| \theta'(s) ds \\
&= \int_J \|\gamma'\big(\theta(s)\big)\theta'(s)\| ds \\
&= \int_J \| \frac{d}{ds}(\gamma \circ \theta)(s)\| ds \\
&= \int_J \|g'(s)\| ds \\
&= l(J, g).
\end{aligned} \tag{23.116}$$

□

Définition 23.40.
Nous nommons ***longueur*** *d'un arc géométrique la longueur commune de tous ses représentants. On dit que l'arc géométrique est* ***rectifiable*** *si sa longueur est $< \infty$.*

[6] Théorème 23.9.

23.7.1 Abscisse curviligne et paramétrage normal

SubSecAbsCurv

Définition 23.41.
*Soit (I,γ) un arc paramétré continu rectifiable. Nous appelons **abscisse curviligne** de γ toute application $\phi\colon I\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $t,t'\in I$ avec $t<t'$, nous ayons*

$$l\big([t,t'],\gamma\big)=\big|\phi(t')-\phi(t)\big|. \tag{23.117}$$

*Si il existe un $t_0\in I$ tel que $\phi(t_0)=0$, alors nous disons que t_0 est l'**origine** de l'abscisse ϕ.*

DEFooJJQFooEITCvG

Définition 23.42.
*Un arc paramétré (I,γ_N) continu rectifiable est dit **normal** si l'identité est une abscisse curviligne.*

LEMooLADUooBlHjuT

Lemme 23.43.
Si γ est de classe C^1 et est un paramétrage normal, alors

(1) pour tout choix de t et t' dans I avec $t<t'$, nous avons

$$l\big([t,t'],\gamma_N\big)=t'-t. \tag{23.118}$$

(2) $\|\gamma'(t)\|=1$ pour tout t.

Démonstration. Pour tout x_1,x_2 dans le domaine nous avons

$$l\big([x_1,x_2],\gamma\big)=\int_{x_1}^{x_2}\|\gamma'(t)\|dt=x_2-x_1. \tag{23.119}$$

Cela implique $\|\gamma'(t)\|=1$ pour tout t. En effet, pour fixer les idées, supposons que $\|\gamma'(t)\|>1$ en un point, par continuité, cela reste strictement supérieur à 1 sur un intervalle[7]. L'intégrale sur cet intervalle ne peut alors pas être la taille de l'intervalle. □

ExCerlceRadNorm

Exemple 23.44.
Le cercle unitaire est donné par l'arc

$$\gamma(t)=\big(\cos(t),\sin(t)\big) \tag{23.120}$$

et $t\in[0,2\pi]$. Pour tout choix de t et t' dans $[0,2\pi]$, nous avons

$$l\big([t,t'],\gamma\big)=\int_t^{t'}\sqrt{\sin^2(u)+\cos^2(u)}du=t'-t. \tag{23.121}$$

Les angles exprimés en radians forment donc un paramétrage normal du cercle de rayon 1. △

Lemme 23.45.
Pour un arc paramétré compact, la longueur d'arc est une abscisse curviligne.

Démonstration. Par définition de la longueur d'arc φ, nous avons

$$\varphi(t')-\varphi(t)=l\big([a,t'],\gamma\big)-l\big([a,t],\gamma\big)=\diamondsuit. \tag{23.122}$$

Supposons pour fixer les idées que $t'>t$. En utilisant la proposition 23.6, nous avons

$$l\big([a,t'],\gamma\big)=l\big([a,t],\gamma\big)+l\big([t,t'],\gamma\big), \tag{23.123}$$

et donc après simplification de deux termes,

$$\diamondsuit=l\big([t,t'],\gamma\big), \tag{23.124}$$

ce qui est précisément la propriété demandée pour être une abscisse curviligne. □

PropExisteChmNorm

Proposition 23.46.
Pour tout arc paramétré C^1 sans points critiques, il existe un changement de coordonnées qui rend l'arc normal.

[7] Corolaire 11.88.

Démonstration. Soit (I,γ) un arc de classe $\mathcal{C}^1$. Nous devons montrer qu'il existe un intervalle J et une application $\theta\colon J\to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ et d'inverse $\mathcal{C}^1$ tel que l'arc (J,γ_N) soit $\mathcal{C}^1$ où $\gamma_N=\gamma\circ\theta$.

Si $I=[a,b]$, nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}\phi\colon I&\to\mathbb{R}^+\\ t&\mapsto\int_a^t\|\gamma'(u)\|du.\end{aligned}\tag{23.125}$$

Étant définie par l'intégrale d'une fonction $\mathcal{C}^0$, la fonction ϕ est $\mathcal{C}^1$, et nous avons $\phi'(t)=\|\gamma'(t)\|>0$ pour tout $t\in I$. Vue comme application $\phi\colon[a,b]\to[0,l(\gamma)]$, l'application ϕ est bijective et d'inverse $\mathcal{C}^1$. Voyons cela point par point.

(1) La fonction ϕ est injective parce que strictement croissante.

(2) Elle est surjective parce que $\phi(a)=0$ et $\phi(b)=l(\gamma)$.

(3) La continuité de l'inverse est plus délicate. Soit $s\in[0,l(\gamma)]$ et $\varepsilon>0$. Pour prouver la continuité de ϕ^{-1} en s, nous devons trouver un δ tel que

$$|s-s'|<\delta\Rightarrow\left|\phi^{-1}(s)-\phi^{-1}(s')\right|<\varepsilon.\tag{23.126}$$

Étant donné que s et s' sont dans l'image de ϕ, nous considérons les uniques t et t' tels que $s=\phi(t)$ et $s'=\phi(t')$. La quantité $\phi(t)-\phi(t')$ devient

$$\int_a^t\big\|\gamma'(u)\big\|du-\int_a^{t'}\big\|\gamma'(u)\big\|du=\int_t^{t'}\big\|\gamma'(u)\big\|du.\tag{23.127}$$

D'autre part, $\phi^{-1}(s)=t$ et $\phi^{-1}(s')=t'$, donc la condition (23.127) devient

$$\Big|\int_{t'}^t\big\|\gamma'(u)\big\|du\Big|\leqslant\delta\Rightarrow|t-t'|<\varepsilon.\tag{23.128}$$

Cela revient à la continuité des fonctions définies par une intégrale.

(4) La dérivée de son inverse est donnée par[8]

$$(\phi^{-1})'(s)=\frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(s)\big)}.\tag{23.129}$$

Nous avons vu que ϕ^{-1} et ϕ' étaient continues. La fonction $(\phi^{-1})'$ étant exprimée en termes de ces deux fonctions elle est également continue.

Nous considérons l'arc paramétré (J,γ_N) avec $J=[0,l(\gamma)]$ et

$$\gamma_N(s)=(\gamma\circ\phi^{-1})(s).\tag{23.130}$$

Nous montrons maintenant que ce nouveau paramétrage est normal. Soient $0\leqslant s\leqslant s'\leqslant l(\gamma)$,

$$\begin{aligned}l\big([s,s'],g\big)&=\int_s^{s'}\big\|\gamma_N'(u)\big\|du\\&=\int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')}\big\|(\gamma_N'\circ\phi)(t)\big\|\phi'(t)dt\\&=\int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')}\big\|(\gamma_N\circ\phi)'(t)\big\|dt\\&=\int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')}\big\|\gamma'(t)\big\|dt\\&=\int_0^{\phi^{-1}(s')}\big\|\gamma'(t)\big\|\,dt-\int_0^{\phi^{-1}(s)}\big\|\gamma'(t)\big\|\,dt\\&=\phi\big(\phi^{-1}(s')\big)-\phi\big(\phi^{-1}(s)\big)\\&=s'-s,\end{aligned}\tag{23.131}$$

ce qui prouve que le paramétrage (J,γ_N) est normal. □

[8] Pour obtenir cette formule, dérivez les deux membres de l'équation $\phi\big(\phi^{-1}(s)\big)=s$.

Nous retenons que le paramétrage normal de γ est donné par (J, γ_N) avec $J = [0, l(\gamma)]$ et

$$\gamma_N(s) = (\gamma \circ \phi^{-1})(s) \tag{23.132}$$

où

$$\begin{aligned} \phi\colon I &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{aligned} \tag{23.133}$$

Notons aussi que ϕ est une fonction croissante, étant l'intégrale d'une fonction positive.

Exemple 23.47.
Trouvons les coordonnées normales pour la cycloïde donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)), & \text{(23.134a)} \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) & \text{(23.134b)} \end{cases}$$

et $t \in]0, 2\pi[$. Relire l'exemple 23.31.

D'abord nous trouvons ϕ avec la formule (23.133) avec $a = 0$. En utilisant le bout de calcul (23.97), nous avons

$$\phi(t) = 2a \int_0^t \sin \frac{u}{2} du = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right). \tag{23.135}$$

Pour trouver $\phi^{-1}(s)$, nous résolvons l'équation

$$s = \phi\big(\phi^{-1}(s)\big) \tag{23.136}$$

par rapport à $\phi^{-1}(s)$. Dans un premier temps, nous trouvons

$$1 - \frac{s}{4a} = \cos \frac{\phi^{-1}(s)}{2}, \tag{23.137}$$

donc $\frac{\phi^{-1}(s)}{2} = \arccos(\frac{4a-s}{4a})$, et finalement

$$\phi^{-1}(s) = 2 \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right). \tag{23.138}$$

Il nous reste à injecter cela dans les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ pour trouver $(\gamma_N)_x(s)$ et $(\gamma_N)_y(s)$. D'abord,

$$(\gamma_N)_x(s) = a\big[\phi^{-1}(s) - \sin\big(\phi^{-1}(s)\big)\big]. \tag{23.139}$$

Nous utilisons maintenant la formule trigonométrique $\sin(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ afin de simplifier les expressions :

$$\begin{aligned} (\gamma_N)_x &= a\Big[2 \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right) - 2 \sin\Big(\arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right)\Big) \cos\Big(\arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right)\Big)\Big] \\ &= a\Big[2 \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right) - \frac{4a - s}{2a} \sqrt{1 - \left(\frac{4a - s}{4a}\right)^2}\Big] \\ &= 2a \arccos \left(\frac{4a - s}{4a}\right) - \sqrt{8as - s^2} \frac{4a - s}{8a} \end{aligned} \tag{23.140}$$

où nous avons utilisé la formule $\sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}$. Ensuite, pour obtenir $(\gamma_N)_y$ nous devons calculer

$$(\gamma_N)_y(s) = a\big[1 - \cos\big(\phi^{-1}(s)\big)\big]. \tag{23.141}$$

Encore une fois, il est intéressant d'exprimer le cosinus en termes des angles divisés par deux : $\cos(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} (\gamma_N)_y &= a\Big[1 - \cos^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2} + \sin^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2}\Big] \\ &= a\Big[2 - 2 \cos^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2}\Big] \\ &= 2a\Big[1 - \left(\frac{4a - s}{4a}\right)^2\Big]. \end{aligned} \tag{23.142}$$

Dans ce paramétrage, $s \in]0, 8a[$. △

Exemple 23.48.
La cardioïde $\rho(\theta) = a\big(1+\cos(\theta)\big)$ avec θ entre $-\pi$ et π. Avant d'utiliser la formule (23.133), nous devons trouver l'élément de longueur de la cardioïde. Étant donné la façon dont l'équation de la cardioïde nous est donnée, l'élément de longueur est donné par[9] (23.90) :

$$\begin{aligned}\|\gamma'(u)\|^2 &= a^2\sin^2(u) + a^2(1+\cos(u))^2\\ &= 2a^2\big(1+\cos(u)\big),\end{aligned} \tag{23.143}$$

et par conséquent[10]

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^t \sqrt{2a^2\big(1+\cos(u)\big)}du\\ &= \int_0^t \sqrt{2a^2\Big(1+\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}\Big)}du\\ &= 2a\int_0^t \cos\frac{u}{2}du\\ &= 4a\sin\frac{t}{2}.\end{aligned} \tag{23.144}$$

Pour trouver l'inverse, nous résolvons $\phi\big(\phi^{-1}(s)\big) = s$ par rapport à $\phi^{-1}(s)$:

$$\begin{aligned}4a\sin\left(\frac{\phi^{-1}(s)}{2}\right) &= s,\\ \phi^{-1}(s) &= 2\arcsin\left(\frac{s}{4a}\right).\end{aligned} \tag{23.145}$$

Avant d'écrire trop brutalement $\gamma_N(s) = (\gamma\circ\phi^{-1})(s)$, il faut comprendre comment est γ. Nous avons reçu la courbe sous forme polaire, c'est-à-dire

$$\gamma(t) = \big(\gamma_r(t),\gamma_\theta(t)\big) = \Big(a\big(1+\cos(t)\big),t\Big). \tag{23.146}$$

C'est comme cela qu'il faut comprendre la donnée $\rho(\theta) = a\big(1+\cos(\theta)\big)$. Maintenant la formule $\gamma_N(s) = (\gamma\circ\phi^{-1})(s)$ devient

$$\begin{cases}(\gamma_N)_r(s) = \gamma_r\big(\phi^{-1}(s)\big) & \text{(23.147a)}\\ (\gamma_N)_\theta(s) = \gamma_\theta\big(\phi^{-1}(s)\big). & \text{(23.147b)}\end{cases}$$

Étant donné que $\gamma_\theta(t) = t$, la seconde est facile :

$$(\gamma_N)_\theta(s) = 2\arcsin\left(\frac{s}{4a}\right). \tag{23.148}$$

Pour la première,

$$(\gamma_N)_r(s) = a\big[1+\cos\big(2\arcsin\frac{s}{4a}\big)\big] = \frac{16a^2-s^2}{8a}. \tag{23.149}$$

Nous écrivons donc le nouveau paramétrage en coordonnées polaires sous la forme

$$\left(\frac{16a^2-s^2}{8a}, 2\arcsin\frac{s}{4a}\right). \tag{23.150}$$

La question qui arrive maintenant est de savoir quel intervalle parcours la nouvelle variable s. D'après le résultat de l'exemple 23.99, la longueur de la cardioïde est de $8a$ et nous avons donc $s\in[0,8a]$. Cependant, la condition d'existence de arcsin nous interdit d'avoir s plus grand que $4a$ en valeur absolue. Où est le problème ?

Le problème est que nous avons changé l'origine de notre paramètre en donnant $\phi(t)$ comme une intégrale à partir de 0 au lieu de $-\pi$. Cela se voit en regardant de quel point nous partons : en $s=0$ nous sommes sur le point $(2a,0)$ tandis qu'avec le paramètre original, c'est-à-dire $\theta\in[-\pi,\pi]$, nous avons pour $\theta=-\pi$ le point $(0,-\pi)$.

[9] Nous vous déconseillons d'étudier cette formule par cœur. Sachez cependant la retrouver assez vite.
[10] L'utilisation stricte de la formule (23.133) demanderait d'intégrer à partir de $-\pi$. Pour plus de simplicité, nous intégrons à partir de zéro, et nous verrons plus tard comment adapter l'intervalle du nouveau paramètre.

Il se passe donc que si nous commençons à parcourir la cardioïde avec $s = 0$, nous partons du milieu, et nous ne parcourons donc pas tout. Étant donné que le « premier » point de la cardioïde est le point $(0, -\pi)$, le paramètre s commence en $s = -4a$, et nous avons comme intervalle :

$$s \in [-4a, 4a], \tag{23.151}$$

ce qui est en accord avec la conditions d'existence. △

Quel enseignement tirer de cet exemple ? Lorsqu'on calcule $\phi(t)$ pour trouver les coordonnées normales, il y a deux solutions.

(1) Utiliser strictement la formule $\phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|du$, en prenant bien comme borne de départ le point de départ de le paramétrage de γ. À ce moment la coordonnée normale construite aura $[0, l(\gamma)]$ comme intervalle de variation.

(2) Faire commencer l'intervalle d'intégration en zéro (ou ailleurs). Un bon choix peut simplifier quelques calculs, mais alors il faudra bien choisir la valeur de départ de la nouvelle coordonnées pour que le « premier » point de la courbe soit correct. Dans ce cas, la longueur de l'intervalle sera quand même $l(\gamma)$. Il n'y a donc pas de problèmes pour trouver la valeur du bout de l'intervalle de variation du paramètre normal.

Dans tous les cas, il faut bien préciser l'intervalle de variation du paramètre lorsqu'on donne une courbe paramétrée.

23.7.2 Tangente à une courbe paramétrée

Définition 23.49.
*Soit (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 1$. Nous disons que la courbe admet une **tangente** en $\gamma(t_0) \in \mathbb{R}^n$ lorsque les deux conditions suivantes sont remplies*

(1) $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ pour tout t dans un voisinage de t_0 ;

(2) la direction de la droite qui passe par $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ admet une limite lorsque $t \to t_0$.

Dans ce cas, la tangente sera la droite passant par le point $\gamma(t_0)$ et dont la direction est donnée par la limite.

Dans cette définition, par **direction** d'une droite, nous entendons le vecteur de norme 1 parallèle à celle-ci sans tenir compte du signe. La tangente sera donc la droite passant par $\gamma(t_0)$ et parallèle au vecteur

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}. \tag{23.152}$$

Évidemment si nous avions écrit $\gamma(t_0) - \gamma(t)$, ça n'aurait pas changé la droite. Par abus de langage, nous parlerons souvent de « la direction u » même lorsque u n'est pas de norme 1.

Formellement, une direction est une classe d'équivalence de vecteurs pour la relation $u \sim v$ si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda v$, mais nous n'aurons pas besoin de cette précision ici.

Sans surprises, la tangente est à peu près toujours donnée par la dérivée lorsqu'elle existe. Plus précisément nous avons le

Théorème 23.50.
Soit (I, γ), un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) et $t_0 \in I$ tel que

$$\gamma'(t_0) = \gamma''(t_0) = \ldots = \gamma^{(q-1)}(t_0) = 0 \tag{23.153}$$

et

$$\gamma^{(q)}(t_0) \neq 0 \tag{23.154}$$

pour un entier $1 \leqslant q \leqslant k$. Alors γ admet une tangente en $\gamma(t_0)$ de direction $\gamma^{(q)}(t_0)$.

Démonstration. Le développement de $\gamma(t_0)$ en série de Taylor autour de t jusqu'à l'ordre q est

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)|t - t_0| + \frac{\gamma' t(t_0)}{2}|t - t_0|^2 + \cdots + \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{q!}|t - t_0|^q \\ + \varepsilon(t)|t - t_0|^q\end{aligned} \tag{23.155}$$

EqDevTaylfitzq

où ε est une application $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{t\to t_0} \varepsilon(t) = 0$. En utilisant les hypothèses, nous éliminons la majorité des termes dans le développement (23.155) :

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q. \tag{23.156}$$

La direction de la droite qui joint $\gamma(t)$ à $\gamma(t_0)$ est donc donnée par

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \frac{\frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q}{\|\frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q\|} \tag{23.157}$$

et la limite lorsque $t \to t_0$ donne $\gamma^{(q)}(t_0)$ comme direction de la tangente.

□

Lorsque le théorème s'applique, le vecteur

$$\tau = \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{\|\gamma^{(q)}(t_0)\|} \tag{23.158}$$

est appelé le **vecteur unitaire tangent** en $\gamma(t_0)$ à l'arc paramétré γ.

CorTgSoCun

Corolaire 23.51.
Si (I, γ) est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ régulier (c'est-à-dire $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t) alors l'arc admet une tangente en tout point et le vecteur unitaire de la tangente est donné par

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \tag{23.159}$$

pour tout t dans I.

CorUnitTgtaugpnorma

Corolaire 23.52.
Si $\gamma = (J, \gamma_N)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, normal, alors le vecteur unitaire de la tangente au point $\gamma_N(s)$ est donné par $\tau(s) = \gamma'_N(s)$.

Démonstration. Nous devons démontrer que dans le cas d'un paramétrage normal nous avons $\|\gamma'_N(s)\| = 1$ pour tout s. Par définition,

$$l\big([s, s'], g\big) = \int_s^{s'} \|\gamma'_N(u)\|du = s' - s. \tag{23.160}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \|\gamma'_N(u)\|du = \lim_{y\to 0} \frac{s + h - s}{h} = 1. \tag{23.161}$$

Cela implique que $\|\gamma'_N(s)\| = 1$, et donc en particulier que (J, γ_N) est un arc régulier. Le corolaire précédent montre alors que $\tau(s) = \gamma'_N(s)/\|\gamma'_N(s)\| = \gamma'_N(s)$. □

Exemple 23.53.
Considérons la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, et cherchons la tangente en $t_0 = 0$. En dérivant nous avons successivement

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (t^2, t^3) \\ \gamma'(t) &= (2t, 3t^2) \\ \gamma''(t) &= (2, 6t). \end{aligned} \tag{23.162}$$

En posant $t = 0$, nous trouvons que $\gamma'(0) = 0$ mais $\gamma''(0) = (2, 0) \neq 0$. Le théorème nous dit donc que la direction de la tangente est horizontale. Nous pouvons faire le calcul directement :

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \frac{(t^2, t^3)}{\sqrt{t^4 + t^6}} = \frac{(t^2, t^3)}{t^2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{(1, t)}{\sqrt{1 + t^2}}, \tag{23.163}$$

dont la limite $t \to 0$ est bien le vecteur horizontal $(1, 0)$.

La figure 23.7 montre quelques tangentes, c'est-à-dire quelques vecteurs dans la direction $\gamma'(t)$ (pour les $t \neq 0$, il ne faut pas aller à la dérivée seconde). Nous remarquons que de part et d'autres du sommet, les vecteurs ne sont pas dirigés dans le même sens. *En tant que vecteurs* de norme 1, ces vecteurs n'ont pas de limites quand $t \to 0$. Ce sont bien les *directions* qui ont une limite, parce que la direction ne tient pas compte du sens.

△

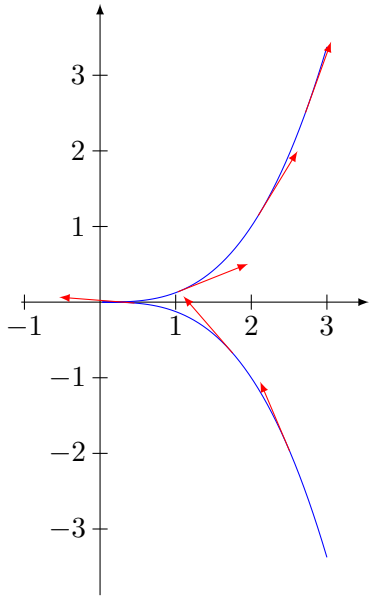


FIGURE 23.7 : Quelques tangentes de la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. LabelFigParamTangente

23.8 Un peu de topologie

La proposition 23.54 donne une sorte de théorème des valeurs intermédiaires pour le cas d'une application à valeurs dans un chemin.

PROPooJYGVooShNewy

Proposition 23.54 ([1]).
Soit une application continue et injective $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Nous posons $\Gamma = \gamma\big([0,1]\big)$ sur lequel nous considérons la topologie induite[11] *de $\mathbb{R}^n$.*

Nous supposons que $\gamma^{-1}\colon \Gamma \to [0,1]$ est continue[12]

Nous considérons un chemin $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tel que

(1) α *est continu,*

(2) $\alpha(0) = \gamma(0)$

(3) $\alpha\big([0,1]\big) \subset \Gamma$

(4) $\alpha(1) = \gamma(t_0)$ *pour un certain* $t_0 \in [0,1]$.

Alors pour tout $t \in [0,t_0]$, il existe $u \in [0,1]$ tel que $\alpha(u) = \gamma(t)$.

Démonstration. Nous commençons par montrer que l'application $\alpha\colon [0,1] \to \Gamma$ est encore continue lorsque nous voyons bien l'espace d'arrivée comme Γ muni de sa propre topologie et non comme $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle.

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Γ ; il existe un ouvert $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \Gamma$. Vu que α ne prend ses valeurs que dans Γ, nous avons $\alpha^{-1}(\Gamma \cap \mathcal{O}') = \alpha^{-1}(\mathcal{O}')$ et comme α est continue pour la topologie de $\mathbb{R}^n$, la partie $\alpha^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de $[0,1]$.

Nous considérons donc l'application

$$\gamma^{-1} \circ \alpha\colon [0,1] \to [0,1] \tag{23.164}$$

qui est continue et vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires 11.92. Les hypothèses $\alpha(0) = \gamma(0)$ et $\alpha(1) = \gamma(t_0)$ donnent

$$(\gamma^{-1} \circ \alpha)(0) = 0 \tag{23.165a}$$
$$(\gamma^{-1} \circ \alpha)(1) = t_0. \tag{23.165b}$$

Donc pour tout $t \in [0,t_0]$, il existe $u \in [0,1]$ tel que $(\gamma^{-1} \circ \alpha)(u) = t$. En appliquant γ des deux côtés, nous voyons que ce u vérifie $\alpha(u) = \gamma(t)$ comme demandé. □

[11] Définition 9.30.
[12] Je ne suis pas certain que cette hypothèse soit indispensable.

La proposition suivante dit essentiellement que la longueur d'un chemin est minoré par la longueur de son graphe.

PROPooXENVooMvkTZW

Proposition 23.55 ([1]).
Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Soit une application continue et injective $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Nous considérons maintenant un second chemin continu $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$ et $\alpha([0,1]) \subset \gamma([0,1])$.

Alors la longueur de γ minore celle de α : $l(\gamma) \leqslant l(\alpha)$.

Démonstration. Pour rappel, la longueur d'un chemin est donné par le supremum des longueurs des lignes brisées reliant des points du chemin (définition 23.3). Soit une subdivision σ de $[0,1]$ et la « longueur » correspondante pour γ :

$$l_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|. \tag{23.166}$$

Nous allons construite une subdivision de $[0,1]$ pour laquelle la longueur de α sera la même. De cette façon, le supremum pour α sera un supremum sur un ensemble plus grand que celui du supremum pour γ.

Vu que le graphe de α est contenu dans celui de γ, et que les points de départ et d'arrivée sont les mêmes, la proposition 23.54 nous donne que pour tout $t \in [0,1]$, il existe $u \in [0,1]$ tel que $\alpha(u) = \gamma(t)$.

Cela ne suffit pas à considérer une subdivision $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ de $[0,1]$ pour laquelle $\alpha(u_i) = \gamma(t_i)$ parce qu'il faut encore que les u_i soient ordonnés. Vu que α n'est pas injective, il n'y a pas de garanties de ce côté. Nous posons :

$$u_i = \min\{x \in [0,1] \text{ tel que } \alpha(x) = \gamma(t_i)\}. \tag{23.167}$$

Montrons que ce minimum existe. Ce minimum existe parce que α étant continue, l'ensemble des x sur lesquels $\alpha(x)$ a une valeur donnée est fermé (le complémentaire est ouvert par le théorème des valeurs intermédiaires). De plus cet ensemble est borné parce qu'il est inclus dans $[0,1]$. Il est donc compact et possède un minimum.

Nous prouvons à présent que $u_{i+1} \geqslant u_i$. Nous avons $\alpha(u_{i+1}) = \gamma(t_{i+1})$ et il existe u dans $[0, u_{i+1}[$ tel que$\alpha(u) = \gamma(t_i)$ (proposition 23.54). Vu que u_i est le minimum de tels u, nous avons $u_i \in [0, u_{i+1}[$. Cela prouve bien que $u_i < u_{i+1}$.

Ces $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ forment une subdivision de $[0,1]$ telle que $\alpha(u_i) = \gamma(t_i)$. La longueur associée à la subdivision (u_i) pour α est la même que celle associée à (t_i) pour γ.

Donc $l(\alpha) \geqslant l(\gamma)$. □

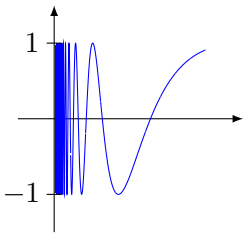


FIGURE 23.8 : La figure de la proposition 23.56.

LabelFigYWxOAkh

PROPooVXDNooPZYKPr

Proposition 23.56 ([1]).
Nous considérons la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$A_2 = \big\{\big(t, \sin(1/t)\big)\big\}_{t\in]0,1]} \tag{23.168}$$

qui est dessinée est sur la figure 23.8. Ensuite nous posons

$$A = \big\{(0,0)\big\} \cup A_2. \tag{23.169}$$

La partie A est connexe, mais pas connexe par arcs.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **A_2 est connexe** La partie A_2 est l'image de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(t, \sin(1/t)\big). \end{aligned} \tag{23.170}$$

Vu que f est continue et que son ensemble de départ est connexe, A_2 est connexe (lemme 9.296).

(2) A est connexe Soient deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ dont l'union contient A. Nous supposons que $(0,0) \in \mathcal{O}_1$. Si $\mathcal{O}_1$ contient $B\big((0,0),r\big)$, alors il contient tous les points de la forme $\big(\frac{1}{2k\pi},0\big)$ pour k assez grand. Ces points sont dans A_2.

Vu que $\mathcal{O}_1$ contient des points de A_2, il doit contenir tous les points de A_2 ; sinon les ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ contrediraient la connexité de A_2. Finalement, $A \subset \mathcal{O}_1$ et A est connexe.

(3) **Connexité par arcs : le chemin** Pour faire aller le chemin dans le bon sens, nous considérons

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1[&\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto f(1-t).\end{aligned} \tag{23.171}$$

Si A était connexe par arcs, il existerait une application continue $\alpha\colon [0,1] \to A$ telle que $\alpha(0) = \big(1,\sin(1)\big) = \gamma(0)$ et $\alpha(1) = (0,0)$.

(4) **Minoration de la longueur de α** Vu que α est continue, ses composantes le sont et vérifient le théorème des valeurs intermédiaires. Pour tout $t \in]0,1[$, il existe $u \in]0,1[$ tel que $\alpha(u) = \gamma(t)$.

Par la proposition 23.55, la longueur de α est minorée par la longueur du chemin γ entre 0 et t_0 pour tout t.

(5) **La longueur de γ** Vu que γ passe une infinité de fois par zéro et par 1, il est possible de construire une subdivision de $]0,1[$ par rapport à la quelle la longueur de γ est arbitrairement grande.

(6) **Conclusion** Donc la longueur de α est minoré par tous les nombres, arbitrairement grand. Autrement dit, la longueur de α est infinie. Mais α étant un chemin continu depuis un compact, cela est impossible.

Nous déduisons qu'un chemin continu liant $\big(1,\sin(1)\big)$ à $(0,0)$ en restant sur A est impossible.

□

23.9 Repère de Frenet

SecFrenet

Dans cette section, nous ne considérons que des courbes dans $\mathbb{R}^3$.

Proptausclataupzero

Proposition 23.57.
Soit $\gamma = (J, \gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^2$. Alors pour toute valeur de s dans J, nous avons

$$\tau(s) \cdot \tau'(s) = 0 \tag{23.172}$$

où $\tau(s) = \gamma_N'(s)$. C'est-à-dire que la dérivée seconde est perpendiculaire à la dérivée première.

Démonstration. Le paramétrage étant normal, nous avons

$$\|\gamma_N'(s)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i'(s)^2 = 1; \tag{23.173}$$

ce qui implique, en dérivant les deux membres, que

$$0 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i'(s)x_i''(s), \tag{23.174}$$

c'est-à-dire exactement $\gamma_N'(s) \cdot \gamma_N''(s) = 0$; d'où la thèse. □

Remarque 23.58.
Si nous n'utilisons pas des coordonnées normales, la proposition 23.57 n'est pas spécialement vraie. Prenons par exemple la courbe qui donne la parabole :

$$\gamma(t) = (t, t^2) \tag{23.175a}$$
$$\gamma'(t) = (1, 2t) \tag{23.175b}$$
$$\gamma''(t) = (0, 2) \tag{23.175c}$$

Nous avons $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 4t$. Par conséquent, la dérivée seconde n'est la normale à la courbe que en $t = 0$. Cela est une propriété très intéressante des coordonnées normales : la dérivée seconde d'une coordonnées normale donne un vecteur normal à la courbe, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente.

DefCourbureNormleUnit

Définition 23.59.
Soit $\gamma = (J, \gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^2$.

(1) *Le **vecteur unitaire tangent** est donné par le corolaire 23.51 : $\tau(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$.*

(2) *La **normale principale** est le vecteur $\tau'(s)$. Le **vecteur unitaire normal** est le vecteur*

$$\nu(s) = \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{\gamma_N''(s)}{\|\gamma_N''(s)\|}. \tag{23.176}$$

Nous déduirons une formule plus pratique en dehors des coordonnées normales en (23.204).

(3) *La **courbure** au point $\gamma_N(s)$ est le réel*

$$c(s) = \|\tau'(s)\| = \|\gamma_N''(s)\|. \tag{23.177}$$

Note : il y a une notion de courbure signée qui sera donnée dans la définition 23.73.

(4) *Le **rayon de courbure** est le réel*

$$R(s) = \frac{1}{c(s)} = \frac{1}{\|\gamma_N''(s)\|}. \tag{23.178}$$

Par la proposition 23.57, nous avons $\nu(s) \cdot \tau(s) = 0$. En combinant toutes les formules, nous avons les différentes expressions suivantes pour le vecteur normal unitaire :

$$\nu(s) = \frac{\gamma_N''(s)}{c(s)} = \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{\tau'(s)}{c(s)} = R(s)\tau'(s) = R(s)\gamma_N''(s). \tag{23.179}$$ Eq0908nufractauRc

Proposition 23.60.
La fonction courbure s'écrit $c = \|\gamma_N' \times \gamma_N''\|$.

Démonstration. Par la proposition 12.56 nous avons :

$$\langle \gamma_N', \gamma_N'' \rangle^2 + \|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N'\|^2 \|\gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N''\|^2 \tag{23.180}$$

parce que, le paramétrage étant normal, $\|\gamma_N'\| = 1$. Mais $\langle \gamma_N', \gamma_N'' \rangle = 0$, donc il reste $\|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N''\|^2$, d'où

$$c(s) = \|\gamma_N''(s)\| = \|\gamma_N'(s) \times \gamma_N''(s)\| \tag{23.181}$$ Eqcsnormgspgps

pour chaque s dans J. □

Définition 23.61.
*Soit s un point birégulier (c'est-à-dire $\gamma_N'(s) \neq 0$ et $\gamma_N''(s) \neq 0$) de l'arc normal $\gamma = (J, \gamma_N)$. Le **vecteur unitaire de la binormale** est le vecteur*

$$\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s) \tag{23.182}$$

Par leurs définitions, τ et ν sont unitaires, tandis que la proposition 23.57 montre qu'ils sont également orthogonaux. Les propriétés du produit vectoriel font que β est également unitaire, et simultanément orthogonal à τ et à ν.

Définition 23.62.
*Le repère orthonormal $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ est le **repère de Frenet** au point $\gamma_N(s)$.*

Lemme 23.63.
Le vecteur unitaire normal est donné par $\nu(s) = \beta(s) \times \tau(s)$.

Démonstration. Ceci est une application de la formule d'expulsion (12.153) et de l'orthonormalité de la base de Frenet :

$$\beta \times \tau = (\tau \times \nu) \times \tau = -(\nu \cdot \tau)\tau + (\tau \cdot \tau)\nu = \nu. \tag{23.183}$$

□

23.9.1 Torsion

Décomposons le vecteur $\beta'(s)$ dans la base de Frenet. Pour cela nous allons utiliser la proposition 10.169 et montrer que $\beta'(s)\cdot\tau(s)=\beta'(s)\cdot\beta(s)=0$, ce qui voudra dire que, dans la base de Frenet, les composantes de β' le long de τ et β sont nulles. Le vecteur β' sera donc colinéaire à ν.

D'abord, étant donné que la norme de $\beta(s)$ est constante par rapport à s, nous avons

$$0=\frac{d}{ds}\|\beta(s)\|^2=2\beta'(s)\cdot\beta(s). \tag{23.184}$$

Ensuite, nous dérivons la définition $\beta(s)=\tau(s)\times\nu(s)$ en utilisant la formule de Leibniz (14.499) :

$$\beta'(s)=\tau'(s)\times\nu(s)+\tau(s)\times\nu'(s). \tag{23.185}$$

Mais $\tau'(s)=\gamma_N''(s)$ tandis que $\nu(s)=\frac{\gamma_N''(s)}{\|\gamma_N''(s)\|}$, de telle sorte que $\tau'(s)\times\nu(s)=0$. Nous restons donc avec $\beta'(s)=\tau(s)\times\nu'(s)$, ce qui prouve que $\beta'(s)$ est perpendiculaire à $\tau(s)$ et donc que $\beta'(s)\cdot\tau(s)=0$.

Le vecteur $\beta'(s)$ est donc un multiple de $\nu(s)$. Nous notons $t(s)$ le facteur de proportionnalité :

$$\beta'(s)=t(s)\nu(s). \tag{23.186}$$
DefTorsion

Définition 23.64.
*Soit $\gamma=(J,\gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^3$. La **torsion** de γ au point $\gamma_N(s)$ est le réel*

$$t(s)=\|\beta'(s)\|=\|\tau(s)\times\nu'(s)\|. \tag{23.187}$$

*Lorsque $t(s)\neq0$, le réel $T(s)=\frac{1}{t(s)}$ est le **rayon de torsion** de γ en $\gamma_N(s)$.*

Étant donné que pour chaque s, l'ensemble $\{\tau(s),\nu(s),\beta(s)\}$ est une base, il est naturel de vouloir décomposer leurs dérivées dans cette base. D'abord, par définition de c et de t, nous avons

$$\begin{aligned}\tau'(s)&=c(s)\nu(s)\\ \beta'(s)&=t(s)\nu(s).\end{aligned} \tag{23.188}$$

Il reste à décomposer $\nu'(s)$. Définissons α_τ, α_ν et α_β (qui peuvent dépendre de s) par

$$\nu'(s)=\alpha_\tau\tau(s)+\alpha_\nu\nu(s)+\alpha_\beta\beta(s). \tag{23.189}$$

En vertu de la proposition 10.169, nous avons

$$\begin{aligned}\alpha_\tau&=\langle\nu'(s),\tau(s)\rangle=-\langle\nu(s),\tau'(s)\rangle=-\langle\nu(s),c(s)\nu(s)\rangle=-c(s),\\ \alpha_\nu&=\langle\nu'(s),\nu(s)\rangle=0,\\ \alpha_\beta&=\langle\nu'(s),\beta(s)\rangle=-\langle\nu(s),\beta'(s)\rangle=-t(s),\end{aligned} \tag{23.190}$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle\nu(s),\nu(s)\rangle=\|\nu(s)\|^2=1$. Si nous mettons ces résultats sous forme matricielle, nous avons les **formules de Frenet** :

$$\begin{pmatrix}\tau'(s)\\ \nu'(s)\\ \beta'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&c(s)&0\\ -c(s)&0&-t(s)\\ 0&t(s)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau(s)\\ \nu(s)\\ \beta(s)\end{pmatrix}. \tag{23.191}$$

Proposition 23.65.
Si s est un point birégulier, alors la torsion est donnée par

$$t(s)=-\frac{(\gamma_N'\times\gamma_N'')\times\gamma_N'''}{\|\gamma_N'(s)\times\gamma_N''(s)\|^2}. \tag{23.192}$$

Démonstration. Par l'équation (23.179), nous avons $\gamma_N''(s)=c(s)\nu(s)$, et par conséquent

$$\gamma_N'''(s)=c'(s)\nu(s)+c(s)\nu'(s)=c'(s)\nu(s)+c(s)\big[-c(s)\tau(s)-t(s)\beta(s)\big], \tag{23.193}$$

où nous avons utilisé la formule de Frenet pour $\nu'(s)$. Par ailleurs, sachant le corolaire 23.52 et la formule de Frenet pour τ', nous avons

$$\gamma_N'\times\gamma_N''=\tau(s)\times\tau'(s)=\tau(s)\times c(s)\nu(s)=c(s)\beta(s). \tag{23.194}$$

En combinant les deux dernières équations, et en se souvenant que la base de Frenet et orthonormale,

$$(\gamma_N'\times\gamma_N'')\cdot\gamma_N'''(s)=-c(s)^2t(s), \tag{23.195}$$

et donc, en remplaçant $c(s)$ par la formule (23.181),

$$t(s)=-\frac{(\gamma_N'\times\gamma_N'')\cdot\gamma_N'''}{\|\gamma_N'\times\gamma_N''\|^2}. \tag{23.196}$$

□

23.10 Hors des coordonnées normales

Remfougnormoupad

Remarque 23.66.
Notons que la définition de τ est donnée pour tout arc $\mathcal{C}^1$ régulier (I,γ) par $\tau(t)=\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$. La propriété $\tau=\gamma'_N$ n'est valable que lorsque le paramétrage est normal. Les autres définitions ont toutes été données dans le cas d'un paramétrage normal.

La remarque 23.66 nous incite à exprimer toute la base de Frenet en termes de γ lorsque le paramétrage n'est pas normal. Étant donné que nous pouvons toujours faire le changement de variable $\gamma(t)=\gamma_N\big(\phi(t)\big)$ (proposition 23.46), il est possible d'exprimer les vecteurs τ, ν et β ainsi que les réels c et t en fonction de γ et de ses dérivées.

Nous allons maintenant travailler à écrire les formules.

Pour plus de facilité, nous collectons les définitions. Afin d'alléger la notation, nous n'exprimons pas explicitement les dépendances en s :

Vecteur unitaire tangent Par le corolaire 23.52, τ est donné par $\tau=\gamma'_N$.

Vecteur unitaire normal Par la définition 23.59, ν est donné par $\nu=\frac{\tau'}{\|\tau'\|}$.

Vecteur unitaire de la binormale Par la définition 23.59, β est donné par $\beta=\tau\times\nu$.

Courbure Par la définition 23.59, c est donné par $c=\|\tau'\|$.

Torsion Par la définition 23.64, t est donné par $t=\|\beta'\|$.

Le schéma du changement de variable est

EqDiagUstexpR
$$\begin{array}{ccc} t\in I & \xrightarrow{\ \gamma\ } & \mathbb{R}^3 \\ \phi\big\downarrow & \nearrow_{\gamma_N} & \\ s\in J & & \end{array} \tag{23.197}$$

La difficulté ne sera pas d'éliminer γ_N de toutes les formules, mais bien de se débarrasser des fonctions ϕ qui arrivent quand nous exprimons γ_N en termes de γ, et en particulier lorsque nous voulons exprimer les dérivées de γ_N en termes de γ et de ses dérivées.

Regardons d'abord comment les dérivées de γ_N s'expriment en termes de γ. En utilisant le fait que $\gamma_N(s)=(\gamma\circ\phi^{-1})(s)$ et que $\|\gamma'_N(s)\|=1$, nous avons

EqgnNgnNnn
$$\gamma'_N(s)=\frac{\gamma'_N(s)}{\|\gamma'_N(s)\|}=\frac{(\gamma\circ\phi^{-1})'(s)}{\|(\gamma\circ\phi^{-1})'(s)\|}=\frac{\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)}{\|\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\|\,|(\phi^{-1})'(s)|}=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \tag{23.198}$$

où nous avons utilisé le fait que ϕ^{-1} étant croissante (parce que l'inverse d'une fonction croissante est croissante), $(\phi^{-1})'(s)=|(\phi^{-1})'(s)|$. Pourquoi écrivons nous $|\phi^{-1}(s)|$ et non $\|\phi^{-1}(s)\|$?

Pour la dérivée seconde, nous dérivons la relation (23.198) :

$$\gamma''_N(s)=\frac{\gamma''\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)}{\|\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\|}+\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\frac{d}{ds}\Big[\|\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\|\Big]. \tag{23.199}$$

Le petit calcul suivant va nous permettre de simplifier cette expression :

Eavpemuetfpnorm
$$(\phi^{-1})'(s)=(\phi^{-1})'\big(\phi(t)\big)=\frac{1}{\phi'(t)}=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}. \tag{23.200}$$

Donc

$$\gamma''_N(s)=\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}+\gamma'(t)\frac{d}{ds}\Big[\|\gamma'(t)\|\Big] \tag{23.201}$$

où il est entendu que $t=\phi^{-1}(s)$. Avec cette expression, nous ne nous sommes pas encore débarrassés de la fonction ϕ, mais nous allons voir que cela nous sera suffisant.

Pour le vecteur unitaire tangent $\tau(s)$, nous avons donc immédiatement

EqTauvect
$$\tau(s)=\gamma'_N(s)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \tag{23.202}$$

Ici encore il est sous-entendu que le t dans le membre de droite est lié au s du membre de gauche par $t=\phi^{-1}(s)$. Il est donc naturel de nous demander si nous avons gagné quelque chose, étant donné que la formule (23.202) contient encore la fonction ϕ.

Géométriquement, le vecteur $\tau(s)$ est le vecteur normal unitaire de la courbe au point $\gamma_N(s)$. En utilisant les relations du diagramme (23.197), nous avons en réalité $\gamma_N(s) = \gamma_N\big(\phi(t)\big) = \gamma(t)$. Le vecteur $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ représente donc le vecteur normal tangent au point $\gamma(t)$.

Pour calculer la courbure, nous devons d'abord calculer le produit vectoriel

$$\begin{aligned}\gamma'_N(s) \times \gamma''_N(s) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \times \left(\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} + \gamma'(t) \frac{d}{ds}\Big[\|\gamma'(t)\|\Big] \right) \\ &= \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3}\end{aligned} \tag{23.203}$$

eqProdvectogenge

parce que le deuxième terme dans la parenthèse est un multiple de $\gamma'(t)$, de telle sorte que son produit vectoriel avec $\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$ soit nul. En prenant la norme,

$$c(s) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \tag{23.204}$$

EqCourbureterm

Encore une fois, cette équation nous enseigne que la courbure au point $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par le membre de droite, qui ne dépend que de t.

Le vecteur unitaire binormal est donné par $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$. En utilisant (23.202) et (23.179),

$$\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s) = \gamma'_N(s) \times \frac{\gamma''_N(s)}{c(s)}. \tag{23.205}$$

Les formules (23.203) pour le produit vectoriel et (23.204) pour la courbure donnent ensuite

$$\beta(s) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \cdot \frac{1}{c(s)} = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \tag{23.206}$$

Cela donne le vecteur unitaire binormal au point $\gamma(t)$ en termes de $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$.

La torsion demande d'utiliser la dérivée troisième de γ_N. Nous avons

$$\begin{aligned}\gamma'''_N(s) &= (\gamma \circ \phi^{-1})'''(s) \\ &= \Big(\gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)\Big)'' \\ &= \Big(\gamma''\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)^2 + \gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})''(s)\Big)' \\ &= \gamma'''\big(\phi^{-1}(s)\big)(\phi^{-1})'(s)^3 + v \\ &= \frac{\gamma'''\big(\phi^{-1}(s)\big)}{\|\gamma'(t)\|^3} + v \qquad \text{par (23.200)}\end{aligned} \tag{23.207}$$

où v est un élément de $\text{Span}\{\gamma''\big(\phi^{-1}(s)\big), \gamma'\big(\phi^{-1}(s)\big)\}$. Le vecteur v est donc perpendiculaire à $\gamma' \times \gamma''$ et donc à $\gamma'_N \times \gamma''_N$ à cause de la relation (23.203) qui montre que $\gamma' \times \gamma''$ est parallèle à $\gamma'_N \times \gamma''_N$. De ce fait, lorsque nous calculons $(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma'''_N$, la partie v de γ'''_N n'entre pas en ligne de compte.

Nous avons donc le calcul suivant, en remplaçant les diverses occurrences de $\gamma'_N \times \gamma''_N$ par sa valeur (23.203) en termes de γ,

$$\begin{aligned}t(s) &= -\frac{(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma'''_N}{\|\gamma'_N \times \gamma''_N\|^2} \\ &= -\frac{(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'_N \times \gamma''_N\|^2 \, \|\gamma'(t)\|^2} \\ &= -\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.\end{aligned} \tag{23.208}$$

Dans cette expression, il est sous-entendu que tous les γ_N sont fonctions de s et tous les γ sont fonction de t où s et t sont liés par $s = \phi(t)$.

Voici un théorème qui résume ce que nous venons de faire.

THOooXOVRooRXtEuU

Théorème 23.67.
Pour tout représentant (I, γ), les éléments métriques (τ, ν, β, c, t) au point $\gamma(t)$ s'expriment en fonction de $\gamma(t)$, $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ et $\gamma'''(t)$.

Lemme 23.68.
Si γ est le graphe de la fonction y alors la courbure de γ est donnée par la formule

$$c\big(\gamma(t)\big) = \frac{|y''(t)|}{\big(1 + y'(t)^2\big)^{3/2}} \tag{23.209}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\gamma(t) = \big(t, y(t)\big) \tag{23.210a}$$
$$\gamma'(t) = \big(1, y'(t)\big) \tag{23.210b}$$
$$\gamma''(t) = \big(0, y''(t)\big). \tag{23.210c}$$

Il s'agit maintenant seulement d'utiliser la formule (23.204) en se souvenant comment on calcule un produit vectoriel[13] :

$$\gamma' \times \gamma'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & y' & 0 \\ 0 & y'' & 0 \end{vmatrix} = y''. \tag{23.211}$$

□

23.11 Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$

SecTracerParmCourbe

Nous allons maintenant voir comment les concepts introduits nous aident à effectivement tracer des courbes dans le plan. Les courbes que nous regardons sont de la forme $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, et nous supposons que ces fonctions soient suffisamment régulières (disons trois fois continument dérivables). Nous ne supposons pas que la courbe soit donnée en coordonnées normales, en particulier, $\gamma''(t)$ n'est pas le vecteur normal en $\gamma(t)$.

La notion clef qui va jouer est le **cercle osculateur** de la courbe γ au point $\gamma(t)$. Sans rentrer dans les détails, disons que c'est le cercle qui « colle » le mieux possible la courbe. Le rayon de ce cercle est le rayon de courbure :

$$R(t) = \frac{\|\gamma(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \tag{23.212}$$

En pratique, le produit vectoriel se calcule comme ceci :

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (x'y'' - x''y')e_z. \tag{23.213}$$

Le centre du cercle osculateur va se trouver quelque part sur la normale. Le vecteur normal est donné par

$$n(t) = J\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \tag{23.214}$$

où J est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$J\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}. \tag{23.215}$$

Cela nous laisse deux possibilités pour le centre du cercle osculateur : $\gamma(t)+R(t)n(t)$ ou bien $\gamma(t)-R(t)n(t)$. Il faut savoir de quel côté de la courbe est situé le centre du cercle osculateur. Il faut choisir le côté de la concavité, c'est-à-dire le côté de la dérivée seconde.

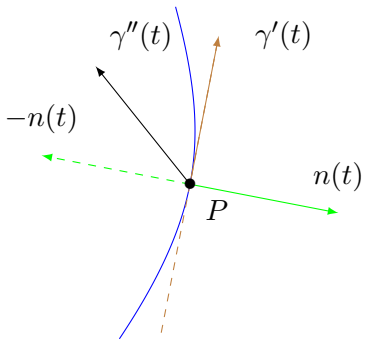


FIGURE 23.9 : De quel côté de $\gamma'(t)$ se trouvent $n(t)$ et $-n(t)$?

LabelFigQuelCote

La difficulté maintenant est de savoir qui de $n(t)$ ou $-n(t)$ est du côté de $\gamma''(t)$. Il faut savoir si $n(t)$ est du même côté de la droite tangente que $\gamma''(t)$ ou non. Par construction, si nous regardons la figure 23.9, le

[13] Définition 12.49.

vecteur $n(t)$ sera toujours à gauche de $\gamma'(t)$. Le fait que $\gamma''(t)$ soit à gauche ou à droite de $\gamma'(t)$ est donné par le signe du produit vectoriel $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$. Si ce produit vectoriel est positif, il faut choisir $-n(t)$ et si il est négatif, il faut choisir $n'(t)$.

Le truc pour obtenir le signe de $x'y'' - x''y'$ est de faire

$$\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot e_z}{\|\gamma' \times \gamma''\|}. \tag{23.216}$$

Le centre de courbure sera donc situé à la position

$$\Omega(t) = \gamma(t) - n(t) \frac{\|\gamma(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} (\gamma' \times \gamma'') \cdot e_z \tag{23.217}$$

Nous pouvons écrire cela plus explicitement en nous souvenant que $\gamma' \times \gamma'' = (x'y'' - x''y')e_z$, par conséquent $\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot e_z}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{1}{x'y'' - x''y'}$. Nous avons

$$\Omega_x(t) = x(t) - y'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \tag{23.218a}$$

$$\Omega_y(t) = y(t) + x'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \tag{23.218b}$$

Quelques exemples de cercles osculateurs sont sur la figure 23.10.

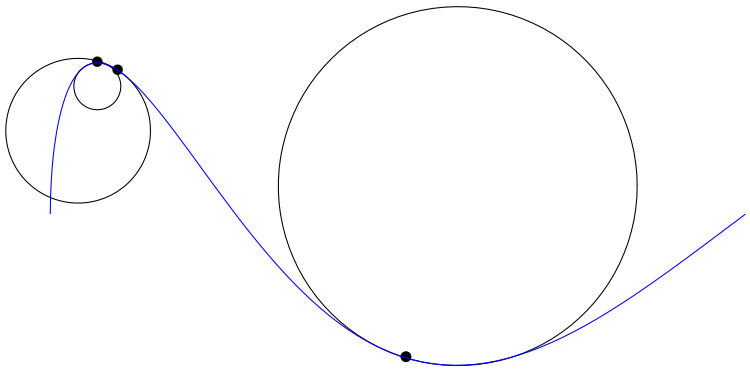


FIGURE 23.10 : Exemple de cercles osculateurs. LabelFigOsculateur

23.12 Courbes planes

Définition 23.69.
*Une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est **fermée** si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Elle est **simple** si $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ dès que $t, t' \in]a, b[$ et $t \neq t'$.*

DEFooSAZTooZGQrQG

Définition 23.70.
Nous disons qu'une courbe fermée est continue, de classe C^1, de classe C^2 ou autre condition de régularité si son extension périodique comme application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a cette régularité.

23.12.1 Angle

LEMooUECMooNBDGiR

Lemme 23.71 ([627]).
Soient des courbes régulières γ et σ de classe C^2 de l'intervalle ouvert I vers $\mathbb{R}^2$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\gamma'(t_0) \cdot \sigma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\| \|\sigma'(t_0)\|} = \cos(\theta_0) \tag{23.219a}$$

$$\frac{\gamma'(t_0) \cdot J\sigma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\| \|\sigma'(t_0)\|} = \sin(\theta_0). \tag{23.219b}$$

Alors il existe une unique fonction différentiable $\theta : I \to \mathbb{R}$

$$\frac{\gamma'(t) \cdot \sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\| \|\sigma'(t)\|} = \cos\big(\theta(t)\big) \tag{23.220a}$$

$$\frac{\gamma'(t) \cdot J\sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\| \|\sigma'(t)\|} = \sin\big(\theta(t)\big). \tag{23.220b}$$

Démonstration. Il suffit de prendre

$$f(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot \sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\|\|\sigma'(t)\|} \tag{23.221}$$

et

$$g(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot J\sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\|\|\sigma'(t)\|} \tag{23.222}$$

dans la proposition 20.63. Ces courbes sont de classe C^1 parce que γ et σ sont de classe C^2. □

23.12.2 Courbure signée

Nous avons déjà défini la courbure d'une courbe en la définition 23.59. Nous introduisons maintenant la courbure signée qui est propre à la dimension deux.

DEFooTSJXooTIyRXf

Définition 23.72.
*La **structure complexe** sur $\mathbb{R}^2$ est l'application*

$$\begin{aligned} J\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (-y,x). \end{aligned} \tag{23.223}$$

DEFooJFWEooXcIVUs

Définition 23.73.
*La **courbure signée** de la courbe $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ (I est un intervalle dans $\mathbb{R}$) est la fonction*

$$\kappa(t) = \frac{\gamma''(t) \cdot J\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{23.224}$$

EQooWOUQooXrVzGx

où J est la structure complexe de la définition 23.72.

Cette définition est motivée par le fait qu'en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, l'application J revient à l'application $z \mapsto iz$.

Si $v, w \in \mathbb{R}^2$ nous avons formellement

$$v \times w = -(v \cdot Jw)e_3. \tag{23.225}$$

En particulier pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$v \cdot Jv = 0. \tag{23.226}$$

Lemme 23.74.
Soir une courbe régulière $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $h\colon [c,d] \to [a,b]$. Si nous posons $\sigma = \gamma \circ h$ alors

$$\kappa_\sigma(u) = \operatorname{sgn}\big(h'(u)\big)\kappa_\gamma\big(h(u)\big). \tag{23.227}$$

EQooSQNMooUKGhPd

Démonstration. Nous utilisons la définition (23.224) de la courbure signée. La règle de dérivation en chaine donne :

$$\sigma'(u) = \gamma'\big(h(u)\big)h'(u) \tag{23.228a}$$

$$\sigma''(u) = \gamma''\big(h(u)\big)h'(u)^2 + \gamma'\big(h(u)\big)h''(u). \tag{23.228b}$$

La numérateur de $\kappa_\sigma(u)$ est :

$$(\gamma'' \circ h)h'^2 \cdot J(\gamma' \circ h)h' + h''(\gamma' \circ h) \cdot J(\gamma' \cdot h)h' \tag{23.229}$$

dont le second terme est nul parce que $v \cdot Jv = 0$. Il nous reste donc

$$\kappa_\sigma(u) = \frac{(h')^3}{|h'|^3}\frac{(\gamma'' \circ h) \cdot J(\gamma' \circ h)}{\|\gamma' \circ h\|^3} = \operatorname{sgn}(h')\kappa_\gamma\big(h(u)\big). \tag{23.230}$$

□

LEMooKPORooEGJCRm

Lemme 23.75 ([627]).
Si γ_N est un arc paramétré normal, alors

$$\gamma_N''(s) = \kappa(s)J\gamma_N'(s). \tag{23.231}$$

Démonstration. Vu que le paramétrage est normal, $\gamma'_N \cdot \gamma'_N = 1$, et en dérivant, $\gamma''_N \cdot \gamma'_N = 0$. Donc γ''_N est un multiple de $J\gamma'$. En tenant compte du fait que le paramétrage est normal, la courbure est

$$\kappa(s) = \gamma''_N(s) \cdot J\gamma'(s). \tag{23.232}$$

En y injectant $\gamma''(s) = \lambda(s)J\gamma'(s)$ nous trouvons

$$\kappa(s) = \lambda(s)J\gamma'(s) \cdot J\gamma'(s) = \lambda(s). \tag{23.233}$$

Donc le facteur de proportionnalité est $\kappa(s)$. □

THOooDLDVooFQnLWn

Théorème 23.76.
Soit une courbe $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2.

(1) γ est une partie de droite si et seulement si $\kappa(t) = 0$ pour tout t.

(2) γ est une partie d'un cercle de rayon $r > 0$ si et seulement si $|\kappa(s)| = \frac{1}{r}$.

Démonstration. Si γ est une droite, la dérivée seconde est nulle et la courbure est nulle. Supposons pour la réciproque que $\kappa(t) = 0$ pour tout t. Nous utilisons un paramétrage normal de γ, ce qui ne change pas que la courbure reste nulle. Nous avons par le lemme 23.75 que $\gamma''(s) = 0$ et donc l'existence de $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $\gamma(t) = at + b$.

Passons au cas du cercle. Si γ est un cercle, le paramétrage normal est

$$\gamma(t) = R\begin{pmatrix}\cos(\frac{t}{R})\\ \sin(\frac{t}{R})\end{pmatrix} \tag{23.234a}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix}-\sin(\frac{t}{R})\\ \cos(\frac{t}{R})\end{pmatrix} \tag{23.234b}$$

$$\gamma''(t) = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix}\cos(\frac{t}{R})\\ \sin(\frac{t}{R})\end{pmatrix}. \tag{23.234c}$$

Avec tout cela nous avons $\kappa(s) = \gamma''(s) \cdot J\gamma'(s) = \frac{1}{R}$.

Nous supposons enfin que $\kappa(t) = 1/R$ et que le paramétrage soit normal (encore une fois, un reparamétrage ne change pas la courbure lorsqu'elle est constante). Nous définissons la courbe

$$\begin{aligned}\beta\colon [b, c] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto \gamma(t) + RJ\gamma'(t).\end{aligned} \tag{23.235}$$

Nous avons $\beta'(t) = \gamma'(t) + RJ\gamma''(t)$. Mais par le lemme 23.75 nous avons $\gamma'' = kJ\gamma' = \frac{1}{R}J\gamma'$. Donc

$$\beta'(t) = \gamma'(t) - \gamma'(t) = 0. \tag{23.236}$$

Du coup β est constante : $\beta(t) = a$. Alors $a = \gamma(t) + RJ\gamma'(t)$ et en particulier

$$\|\gamma(t) - a\| = \|RJ\gamma'(t)\| = r. \tag{23.237}$$

Donc effectivement γ reste sur un cercle de rayon r et de centre a. □

DEFooFAENooXWgBmh

Définition 23.77 ([627]).
*La **courbure totale** de la courbe $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est le nombre*

$$K = \int_a^b \kappa(t)\|\gamma'(t)\|dt \tag{23.238}$$

EQooTIFWooQflQfd

où κ est la courbure signée définie en 23.73.

*Nous nommons aussi **nombre de tours** de γ le nombre* $\mathrm{Turn}(\gamma) = K/2\pi$.

Lemme 23.78.
La courbure signée ne change pas sous reparamétrage positif, et change de signe sous reparamétrage négatif.

Démonstration. Soit la courbe $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $h\colon [a, b] \to [c, d]$. Il s'agit d'intégrer la relation (23.227) en effectuant le changement de variables $t = h(u)$:

$$K_\gamma = \int_a^b \kappa_\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt \tag{23.239a}$$

$$= \int_c^d \underbrace{\kappa_\gamma\big(h(u)\big)}_{\kappa_\sigma(u)} \|\gamma'\big(h(u)\big)\|h'(u)du. \tag{23.239b}$$

En utilisant le fait que $\sigma'(u)=\gamma'\big(h(u)\big)h'(u)$ nous avons alors

$$K_\gamma=\int_c^d \kappa_\sigma(u)\left\|\frac{\sigma'(u)}{h'(u)}\right\|h'(u)du \tag{23.240a}$$
$$=\int_c^d \kappa_\sigma(u)\|\sigma'(u)\|\frac{h'(u)}{|h'(u)|}du \tag{23.240b}$$
$$=\operatorname{sgn}(h')K_\sigma. \tag{23.240c}$$

□

LEMDEFooLPWJooAnWZjb

Lemme-Définition 23.79 ([627]).
Soit une courbe régulière $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2 et t_0 dans l'intérieur de I. Soit $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}=\big(\cos(\theta_0),\sin(\theta_0)\big). \tag{23.241}$$

Alors il existe une unique fonction différentiable $\theta\colon I\to\mathbb{R}$ telle que $\theta(t_0)=\theta_0$ et

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\begin{pmatrix}\cos\big(\theta(t)\big)\\ \sin\big(\theta(t)\big)\end{pmatrix} \tag{23.242}$$

pour tout $t\in I$.

*Cette fonction est l'**angle** de γ déterminé par θ_0.*

Démonstration. Soit $\beta(t)=(t,0)$; alors $\beta'(t)=(1,0)$ et nous avons

$$\gamma'\cdot\beta'=\gamma'_x \tag{23.243a}$$
$$\gamma'\cdot J\beta'=\gamma'_y. \tag{23.243b}$$

Par la proposition 23.71 il existe une unique fonction $\theta\colon I\to\mathbb{R}$ telle que $\theta(t_0)=\theta_0$ et

$$\begin{cases}\cos\big(\theta(t)\big)=\dfrac{\gamma'\cdot\beta'}{\|\gamma'\|\|\beta'\|}=\dfrac{\gamma'_x}{\|\gamma'\|} & (23.244a)\\ \sin\big(\theta(t)\big)=\dfrac{\gamma'\cdot J\beta'}{\|\gamma'\|\|\beta'\|}=\dfrac{\gamma'_y}{\|\gamma'\|}. & (23.244b)\end{cases}$$

Une telle fonction est bien celle que l'on demande ici. □

LEMooWLAUooKetUiW

Lemme 23.80.
Si γ est une courbe régulière de classe C^2, alors sa courbure et son angle vérifient la relation

$$\theta'(t)=\|\gamma'(t)\|\kappa(t). \tag{23.245}$$

Démonstration. Par définition de l'angle (lemme 23.79) nous avons

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\big(\cos\theta(t),\sin\theta(t)\big). \tag{23.246}$$

Dérivant cela,

$$\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|}+\gamma'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\right)=\theta'(t)\begin{pmatrix}-\sin\big(\theta(t)\big)\\ \cos\big(\theta(t)\big)\end{pmatrix} \tag{23.247a}$$
$$=\theta'(t)J\begin{pmatrix}\cos\big(\theta(t)\big)\\ \sin\big(\theta(t)\big)\end{pmatrix} \tag{23.247b}$$
$$=\theta'(t)\frac{J\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \tag{23.247c}$$

Nous prenons le produit scalaire de cette égalité avec $J\gamma'$ en tenant compte du fait que $\gamma'\cdot J\gamma'=0$:

$$\frac{\gamma''\cdot J\gamma'}{\|\gamma'\|}=\frac{\theta'}{\|\gamma'\|}J\gamma'\cdot J\gamma'. \tag{23.248}$$

En remarquant que $Jv\cdot Jv=\|v\|^2$ nous trouvons $\theta'\|\gamma'\|=\|\gamma'\|^2\kappa_\gamma$ et donc

$$\theta'(t)=\|\gamma'(t)\|\kappa_\gamma(t), \tag{23.249}$$

ce qu'il fallait prouver. □

Ce lemme nous fournit la formule attendue pour la courbure totale.

Lemme 23.81 ([627]).
Soit une courbe régulière de classe C^2 $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$. Sa courbure totale[14] *est donnée par*

$$K=\theta(b)-\theta(a). \tag{23.250}$$

Démonstration. Il suffit de remplacer dans la définition (23.238) de la courbure totale l'intégrande par son expression du lemme 23.80 :

$$K=\int_a^b \kappa(t)\|\gamma'(t)\|dt=\int_a^b \theta'(t)dt=\theta(b)-\theta(a) \tag{23.251}$$

par le théorème 16.290. □

23.12.3 Degré, indice et homotopie

La définition de l'indice d'un chemin par rapport à un point est 28.52.

DEFooTKBUooNVcheO

Lemme-Définition 23.82.
*Soit une application continue $\phi\colon S^1\to S^1$. Un **relèvement** de ϕ est une application continue $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue telle que*

$$\phi\big(\cos(t),\sin(t)\big)=\begin{pmatrix}\cos\big(\varphi(t)\big)\\ \sin\big(\varphi(t)\big)\end{pmatrix}. \tag{23.252}$$

*Le **degré** est l'entier $\deg(\phi)$ tel que*

$$\varphi(2\pi)-\varphi(0)=2\deg(\phi)\pi. \tag{23.253}$$

Ce nombre ne dépend pas du choix du relèvement φ.

Démonstration. Soient φ_1 et φ_2, deux applications qui satisfont les contraintes. Nous avons une fonction continue $n\colon S^1\to\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)=2\pi n(t). \tag{23.254}$$

La fonction n ne pouvant prendre que des valeurs entières et étant continue, elle est constante. Par conséquent

$$\varphi_1(2\pi)-\varphi_1(0)=\varphi_2(2\pi)-\varphi_2(0), \tag{23.255}$$

ce que nous voulions. □

DEFooOCUQooUAlbLo

Définition 23.83.
Soit une courbe fermée $\gamma\colon[0,L]\to\mathbb{R}^2$ de classe C^1. Nous posons

$$\Phi_\gamma(t)=\frac{\tilde\gamma'(t)}{\|\tilde\gamma'(t)\|} \tag{23.256}$$

*où $\tilde\gamma(u)=\gamma\big(\frac{L}{2\pi}u\big)$. L'**indice de rotation** de γ est le degré de Φ_γ, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Ind}(\gamma)=\deg(\Phi_\gamma). \tag{23.257}$$

Notons que dans cette définition, Φ_γ n'est rien d'autre que le vecteur unitaire tangent à γ, ramené à $[0,2\pi]$.

PROPooXHSDooDDnlJQ

Proposition 23.84.
Pour une courbe fermée de classe[15] *C^2, l'indice de rotation est égal au nombre de tours.*

Démonstration. Soit $\gamma\colon[0,L]\to\mathbb{R}^2$ une courbe vérifiant les hypothèses. Par définition, $\mathrm{Ind}(\gamma)=\deg(\Phi_\gamma)$ où

$$\Phi_\gamma(t)=\frac{\tilde\gamma'(t)}{\|\tilde\gamma'(t)\|}=\begin{pmatrix}\cos\tilde\theta(t)\\ \sin\tilde\theta(t)\end{pmatrix} \tag{23.258}$$

EQooGTAPooDRCFPG

[14] Définition 23.77.
[15] La dérivée seconde arrive dans la définition de la courbure ; il faudrait donc supposer au moins C^2 pour avoir la continuité de la courbure.

où nous avons noté $\tilde{\theta}$ l'angle tournant[16] de $\tilde{\gamma}$ et θ celui de γ. Vu que $\tilde{\theta}$ vérifie les hypothèses de la définition 23.82 nous pouvons calculer le degré de Φ_γ par

$$\deg(\Phi_\gamma) = \frac{1}{2\pi}\big(\tilde{\theta}(2\pi) - \tilde{\theta}(0)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{\theta}'(s)ds. \tag{23.259}$$

EQooKNCJooTxTRMO

Il faut trouver le lien entre θ et $\tilde{\theta}$. Pour cela nous notons que

$$\frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} = \frac{\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}t\right)}{\|\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}\right)\|}. \tag{23.260}$$

En comparant avec (23.258) il vient

$$\tilde{\theta}(t) = \theta\big(\frac{L}{2\pi}t\big) \tag{23.261}$$

et

$$\tilde{\theta}'(s) = \frac{L}{2\pi}\theta'\left(\frac{L}{2\pi}s\right). \tag{23.262}$$

Le changement de variables $t = \frac{L}{2\pi}s$ est donc tout vu dans l'intégrale (23.259) :

$$\deg(\Phi_\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{L}{2\pi}\theta'\big(\frac{L}{2\pi}s\big)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \theta'(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa_\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt = \mathrm{Turn}(\gamma) \tag{23.263}$$

où nous avons aussi utilisé le lemme 23.80 qui donne le lien entre θ' et κ. □

Les définitions à propos d'homotopie sont 22.77 et 22.78.

LEMooTDTAooCRSYzI

Lemme 23.85 ([1]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit un chemin continu $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$. Soit une boule B contenant $\gamma\big([a,b]\big)$ ainsi que le segment joignant $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

Alors γ est homotope[17] au segment joignant $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

Démonstration. Notons $d\colon [a,b] \to \Omega$ le segment de droite joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. Nous notons aussi $l_{x,y}$ le segment joignant x à y et paramétré sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} l_{x,y}\colon [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto (1-t)x + ty. \end{aligned} \tag{23.264}$$

L'homotopie entre γ et d est alors donnée par

$$\begin{aligned} H\colon [0,1]\times[a,b] &\to \Omega \\ (s,t) &\mapsto l_{\gamma(t),d(t)}(s). \end{aligned} \tag{23.265}$$

□

LEMooQNFCooWorCxN

Lemme 23.86 ([248]).
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Tout chemin dans Ω est homotope à extrémités fixées[18] dans Ω à un chemin droit par morceaux.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme 11.22 en considérant $S \subset [a,b]$ définie en disant que $t \in S$ soit si $t = a$ soit si le chemin $\gamma\colon [a,t] \to \Omega$ est homotope à un chemin droit par morceaux à extrémités fixes.

Nous prouvons que S est inductif (définition 11.21).

(1) $\underline{a \in S}$ Le point a est dans S par définition.

(2) **Si** $\underline{t \in S}$ Supposons que $t \in [a,b[\cap S$, et cherchons $s > t$ tel que $[t,s] \subset S$. Considérons une boule $B = B\big(\gamma(t),\delta\big)$ incluse dans Ω. Vu que γ est continue, l'application $u \mapsto |\gamma(t) - \gamma(t+s)|$ est continue. Pour $s = 0$, cette fonction est nulle. Il existe $\epsilon > 0$ tel que cette fonction reste plus petite que δ, et donc tel que

$$\gamma\big([t,t+\epsilon]\big) \subset B\big(\gamma(t),\delta\big) \subset \Omega. \tag{23.266}$$

Le segment de droite $l_{\gamma(t),\gamma(t+\epsilon)}$ est donc dans Ω et la partie $\gamma\colon [t,t+\epsilon] \to \Omega$ est homotope à extrémités fixée à ce segment (lemme 23.85).

En joignant ce segment aux segments de droites homotopes à $\gamma\big([a,t]\big)$, nous avons des segments de droites homotopes à $\gamma\big([a,s]\big)$. Donc $[a,s] \subset S$.

[16] Définition 23.79.
[17] Définition 22.78.
[18] Définition 22.78.

(3) **Si $[a,t[\subset S$** Nous prouvons que $t\in S$. Nous considérons $\delta>0$ tel que $B\big(\gamma(t),\delta\big)\subset\Omega$. Nous considérons également $\epsilon>0$ tel que $t-\epsilon>a$. Par hypothèse, $t-\epsilon\in S$, et il existe une homotopie à extrémités fixées entre des segments de droites et $\gamma\colon[a,t+\epsilon]\to\Omega$. Nous complétons ces segments par le segment $l_{\gamma(t-\epsilon),\gamma(t)}$ et voilà.

Donc S est inductif, et nous en déduisons que $S=[a,b]$. □

PROPooZIAKooHqtnZj

Proposition 23.87 (Homotopie, degré et indice[627])**.**
Il y a deux résultats à ne pas confondre.

ITEMooLEHFooXEyTHY

(1) Si $\phi_i\colon S^1\to S^1$ sont homotopes, alors $\deg(\phi_1)=\deg(\phi_2)$.

(2) Si $\gamma_i\colon[0,L]\to\mathbb{R}^2$ sont homotopes, alors $\mathrm{Ind}(\gamma_1)=\mathrm{Ind}(\gamma_2)$.

Démonstration. Nous allons décomposer la preuve en deux parties.

(1) **Le degré pour les applications $S^1\to S^1$** Soient deux applications homotopes $\gamma_i\colon S^1\to S^1$. Si F est l'homotopie[19] entre γ_0 et γ_1, nous posons $\gamma_u(t)=F(u,t)$ qui est encore une courbe fermée $\gamma_u\colon S^1\to S^1$. Nous pouvons donc considérer le degré de γ_u. C'est un entier n_u qui vérifie

$$\tilde{\gamma}_u(2\pi)-\tilde{\gamma}_u(0)=2\pi n_u. \tag{23.267}$$

Le membre de gauche est une fonction continue de u ; dans le membre de droite n_u ne pouvant prendre que des valeurs entières, elle est alors constante.

(2) **Indice de rotation pour des courbes dans $\mathbb{R}^2$** Soient maintenant γ_0 et γ_1 deux courbes homotopes de $[0,L]$ dans $\mathbb{R}^2$. Par définition, $\mathrm{Ind}(\gamma_i)=\deg(\Phi_{\gamma_i})$. Prouvons alors que Φ_{γ_0} et homotope à Φ_{γ_1}. De cette façon, la première partie de la preuve conclura à

$$\mathrm{Ind}(\gamma_0)=\deg(\Phi_{\gamma_0})=\deg(\Phi_{\gamma_1})=\mathrm{Ind}(\gamma_1). \tag{23.268}$$

Nous savons que

$$\Phi_\gamma=\frac{\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}t\right)}{\|\gamma'\left(\frac{L}{2\pi}t\right)\|}, \tag{23.269}$$

donc en posant

$$\Phi_F(u,t)=\frac{\gamma'_u\left(\frac{L}{2\pi}t\right)}{\|\gamma'_u\left(\frac{L}{2\pi}t\right)\|} \tag{23.270}$$

nous avons une homotopie entre Φ_{γ_0} et Φ_{γ_1}.

□

THOooEQWOooBCRMMZ

Théorème 23.88 ([627])**.**
Pour une courbe simple fermée de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$,

(1) le nombre de tours[20] vaut ±1,

(2) la courbure totale vaut $\pm2\pi$.

Démonstration. Soit une telle courbe γ et son image Γ. Notons tout de suite que les deux points sont équivalents parce que $K=2\pi\,\mathrm{Turn}(\gamma)$.

(1) **Choix d'un point et d'une tangente**

Si ℓ est une droite dans le plan, soit p le point de Γ le plus proche de ℓ. Il n'est peut-être pas unique, mais la parallèle à ℓ passant par p est une tangente à Γ telle que tout Γ se trouve d'un seul côté de ℓ_p. Pour voir cela, il suffit de choisir un système d'axes pour lequel ℓ est l'axe $y=0$. La distance entre ℓ et les points de Γ est donnée par γ_y, et donc les extrémums sont atteints là où $\gamma'_y=0$, c'est-à-dire pour les points sur lesquels la tangente est parallèle à ℓ.

Étant donné qu'il y a (au moins) un maximum et un minimum distincts, nous pouvons choisir le point p de telle sorte que pour tout point $q\in\Gamma$, l'angle du vecteur $q-p$ soit entre α_0 et $\alpha_0+\pi$ et non entre $\alpha_0-\pi$ et α_0. Ce choix revient à choisir p de telle sorte que Γ soit d'un côté ou de l'autre de ℓ_p.

Pour simplifier les notations plus tard nous choisissons ℓ_p horizontale, de telle sorte que $\alpha_0=0$, et que Γ est au dessus de ℓ_p. Les angles des vecteurs $q-p$ pour $q\in\Gamma$ sont donc tous entre 0 et π.

[19] Définition 22.77.
[20] Nombre de tours et courbure totale, définition 23.77.

(2) **Définition de Σ**

Soit L la longueur[21] de γ et β, un paramétrage de γ telle que $\beta(0)=p$. Nous considérons le triangle

$$\mathcal{T}=\{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant L\} \tag{23.271}$$

et l'application sécante $\Sigma\colon\mathcal{T}\to S^1$ définie par

$$\Sigma(t_1,t_2)=\begin{cases}\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} & \text{si } t_1=t_2=t\\ -\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} & \text{si } t_1=0 \text{ et } t_2=L\\ \frac{\beta(t_2)-\beta(t_1)}{\|\beta(t_2)-\beta(t_1)\|} & \text{sinon.}\end{cases} \tag{23.272}$$

(3) **Continuité de Σ** Nous devons prouver les limites[22] suivantes :

$$\lim_{\substack{(t_1,t_2)\to(t,t)\\0\leqslant t_1\leqslant t\leqslant t_2\leqslant L}}\frac{\beta(t_1)-\beta(t_2)}{\|\beta(t_1)-\beta(t_2)\|}=\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} \tag{23.273a}$$

$$\lim_{\substack{(t_1,t_2)\to(0,L)\\0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant L}}\frac{\beta(t_1)-\beta(t_2)}{\|\beta(t_1)-\beta(t_2)\|}=-\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} \tag{23.273b}$$

Nous commençons par (23.273a) en multipliant et divisant par t_2-t_1 :

$$\frac{\beta(t_2)-\beta(t_1)}{\|\beta(t_2)-\beta(t_1)\|}=\frac{\beta(t_2)-\beta(t_1)}{t_2-t_1}\frac{t_2-t_1}{\|\beta(t_2)-\beta(t_1)\|}. \tag{23.274}$$

Si chacune des limites des deux facteurs existent dans $\mathbb{R}$, la limite du produit sera le produit des limites. Pour le premier facteur nous développons $\beta(t_2)$ autour de $t=t_1$ via la formulation (14.1389) :

$$\beta(t_2)=\beta(t_1)+(t_2-t_1)\beta'(t_1)+\alpha(t_2-t_1) \tag{23.275}$$

où α est une fonction vérifiant $\lim_{t\to0}\alpha(t)/t=0$. Nous avons à calculer la limite de

$$\frac{(t_2-t_1)\beta'(t_1)+\alpha(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=\beta'(t_1)+\frac{\alpha(t_2-t_1)}{t_2-t_1}. \tag{23.276}$$

Prendre la limite $(t_1,t_2)\to(t,t)$ donne bien $\beta'(t)$ parce que β est de classe C^1. En ce qui concerne la limite de la deuxième partie, nous allons la faire plus en détail pour la limite (23.273b).

La limite (23.273b). Nous prenons la prolongation périodique de β. Alors si $t_2=L-\epsilon$ nous pouvons écrire $\beta(-\epsilon)$ au lieu de $\beta(t_2)$. Nous développons $\beta(t_1)$ autour de $t=-\epsilon$ (parce que t_1 est petit) :

$$\beta(t_1)=\beta(-\epsilon)+(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+\alpha(t_1+\epsilon). \tag{23.277}$$

Après multiplication et division par $t_1+\epsilon$, la première limite à calculer est celle de

$$\frac{\beta(-\epsilon)-\beta(t_1)}{t_1+\epsilon}=-\beta'(-\epsilon)+\frac{\alpha(t_1+\epsilon)}{t_1+\epsilon}, \tag{23.278}$$

pour $(\epsilon,t_1)\to(0,0)$. Cela donne bien $-\beta'(0)$. La seconde limite à calculer est celle de

$$\frac{t_1+\epsilon}{\|\beta(-\epsilon)-\beta(t_1)\|}=\frac{t_1+\epsilon}{\|-(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)-\alpha(t_1+\epsilon)\|}=\frac{t_1+\epsilon}{\|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+\alpha(t_1+\epsilon)\|}. \tag{23.279}$$

Nous calculons la limite de l'inverse (qui, si elle est non nulle donnera la réponse en inversant à nouveau) en nous souvenant de la formule

$$\big|a-|b|\big|\leqslant|a+b|\leqslant\big|a+|b|\big|. \tag{23.280}$$

Nous avons l'encadrement

$$\frac{\big|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)-|\alpha(t_1+\epsilon)|\big|}{t_1+\epsilon}\leqslant\frac{\|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+\alpha(t_1+\epsilon)\|}{t_1+\epsilon} \tag{23.281a}$$

$$\leqslant\frac{\big|(t_1+\epsilon)\beta'(-\epsilon)+|\alpha(t_1+\epsilon)|\big|}{t_1+\epsilon} \tag{23.281b}$$

Les limites des deux extrêmes existent et valent $\beta'(0)$; la règle de l'étau 14.247 conclu.

[21] Définition 23.3.

[22] Limite au sens de la définition 9.151, en sachant qu'elle est unique par la proposition 9.154.

(4) **Deux chemins homotopes** Nous considérons dans $\mathcal{T}$ les points $A = (0,0)$, $B = (0,L)$ et $C = (L,L)$. Nous allons considérer le chemin direct de A à C et celui passant via B. Et comme ces chemins doivent être paramétrés de 0 à 2π, il faut faire un peu attention. Nous définissons les chemins

$$\sigma_i : S^1 \to S^1 \tag{23.282}$$

par

$$\sigma_1(t) = \Sigma\left(\frac{L}{2\pi}t, \frac{L}{2\pi}t\right) = \frac{\beta'(tL/2\pi)}{\|\beta'(tL/2\pi)\|} = \frac{\tilde{\beta}'(t)}{\|\tilde{\beta}'(t)\|} = \Phi_\beta \tag{23.283a}$$

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} \Sigma(0, \frac{L}{\pi}t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ \Sigma\big(\frac{L}{\pi}(t-\pi), L\big) & \text{si } \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{23.283b}$$

où nous avons repris les notations de la définition 23.83. Notons que pour σ_2, en $t = \pi$ les deux expressions donnent

$$\sigma_2(\pi) = \Sigma(0,L) = -\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|}. \tag{23.284}$$

Ce sont des chemins fermés parce que

$$\sigma_1(2\pi) = \Sigma(L,L) = \frac{\beta'(L)}{\|\beta'(L)\|} = \frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} = \Sigma(0,0) = \sigma_1(0). \tag{23.285}$$

Notons que dans toutes ces définitions et calculs, nous avons utilisé de façon assez cruciale la définition 23.70 pour définir la dérivée de β en $t = 0$.

Les chemins σ_1 et σ_2 sont homotopes par construction.

(5) **Indices et degrés** La proposition 23.87(1) nous donne $\deg(\sigma_1) = \deg(\sigma_2)$. Nous avons alors la chaine d'égalités

$$\deg(\sigma_2) = \deg(\sigma_1) = \deg(\Phi_\beta) = \mathrm{Ind}(\beta) = \mathrm{Ind}(\gamma) = \mathrm{Turn}(\gamma) \tag{23.286}$$

EQooSXOAocZVQVxc

où les justifications sont :

(5a) $\deg(\sigma_2) = \deg(\sigma_1)$ par homotopie : proposition 23.87.

(5b) $\deg(\sigma_1) = \deg(\Phi_\beta)$ parce que $\sigma_1 = \Phi_\beta$.

(5c) $\deg(\Phi_\beta = \mathrm{Ind}(\beta)$ par définition 23.83 de l'indice.

(5d) $\mathrm{Ind}(\beta) = \mathrm{Ind}(\gamma)$ par invariance de l'indice sous reparamétrage.

(5e) $\mathrm{Ind}(\gamma) = \mathrm{Turn}(\gamma)$ par la proposition 23.84.

Il nous reste à montrer que $\deg(\sigma_2) = \pm 1$.

(6) **La géométrie de σ_2** Notons que par définition les valeurs de $\sigma_2(t)$ sont les vecteurs (unitaires) joignant p aux points de Γ lorsque $0 \leqslant t \leqslant \pi$, et les vecteurs inverses pour $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$. Plus précisément nous avons, si $0 < a < \pi$:

$$\sigma_2(a) = \Sigma(0, \frac{L}{\pi}a) = \frac{\beta(\frac{L}{\pi}a) - \beta(L)}{\|\beta(\frac{L}{\pi}a) - \beta(L)\|} \tag{23.287}$$

et

$$\sigma_2(\pi + a) = \Sigma(\frac{L}{\pi}a, L) = \frac{\beta(L) - \beta(\frac{L}{\pi}a)}{\|\beta(L) - \beta(\frac{L}{\pi}a)\|}. \tag{23.288}$$

En sachant que $\beta(0) = \beta(L)$ nous avons alors

$$\sigma_2(\pi + a) = -\sigma_2(a). \tag{23.289}$$

EQooKMSRooEzWkyL

Notons aussi que le fait que γ soit une courbe simple assure que le numérateur et le dénominateur de σ_2 ne s'annulent pas autrement que pour $t = L$ ou $t = 0$.

(7) **Un relèvement pour σ_2** Ces propriétés motivent cette idée pour le relèvement de σ_2 :

$$\begin{aligned}\theta\colon [0,2\pi[&\to [0,2\pi[\\ t &\mapsto \text{l'angle du vecteur } \sigma_2(t),\end{aligned} \tag{23.290}$$

avec $\theta(2\pi)$ défini par continuité. Nous allons cependant voir, en étant plus prudent, que cette définition n'assure pas la continuité (surtout en $t=\pi$).

Soyons donc plus prudent et construisons θ petit à petit.

Étant donné que ℓ_p est tangente à Γ au point p, la droite ℓ_p est parallèle à $\beta'(0)$, et l'angle entre ℓ_p et $\beta'(0)$ est soit 0 soit π. Donc $\theta(0)$ devrait valoir soit 0 soit π.

Nous commençons par définir ceci :

$$\begin{aligned}\theta\colon [0,\pi[&\to [0,\pi]\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t) = \arccos\big(\sigma_2(t)_x\big).\end{aligned} \tag{23.291}$$

C'est le choix d'avoir ℓ_p horizontale et Γ au dessus de ℓ_p qui nous assure que pour tout $t\in[0,\pi]$, l'angle de $\sigma_2(t)$ peut être choisi entre 0 et π. De plus cette fonction est continue en tant que partie de la fonction arccos: $[-1,1]\to[0,\pi]$ qui est elle-même continue par le lemme 9.300.

Le fait que θ soit continue est assuré par le fait que σ_2 est C^∞.

(7a) **Si $\theta(0)=0$**
Cela correspond à la situation des vecteurs rouges sur la figure 23.11.
Vu que $\sigma_2(\pi)=-\sigma_2(0)$, l'angle de σ_2 en $t=\pi$ est le supplémentaire de celui en $t=0$. Mais pour $0\leqslant t<\pi$, $\theta(t)$ prend ses valeurs entre 0 et π, le seul supplémentaire de 0 à être disponible est $\theta(\pi)=\pi$ (et non $\theta(\pi)=-\pi$ par exemple). Nous définissons donc $\theta(\pi)=\pi$ pour la continuité.
En ce qui concerne les $\pi<t<2\pi$ nous savons que $\sigma_2(\pi+a)=-\sigma_2(a)$. Les angles sont donc les supplémentaires de ceux pour $0\leqslant t\leqslant\pi$. Pour assurer la continuité en $t=\pi$ nous sélectionnons la place $]\pi,2\pi]$; et nous définissons

$$\begin{aligned}\theta\colon]\pi,2\pi[&\to]\pi,2\pi]\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t).\end{aligned} \tag{23.292}$$

Le nombre $\theta(2\pi)$ est défini par continuité. Il doit valoir $\theta(2\pi)=2\pi$.
La fonction θ ainsi définie est un relèvement pour σ_2, et le degré peut être calculé :

$$\deg(\sigma_2)=\frac{1}{2\pi}\big(\theta(2\pi)-\theta(0)\big)=1. \tag{23.293}$$

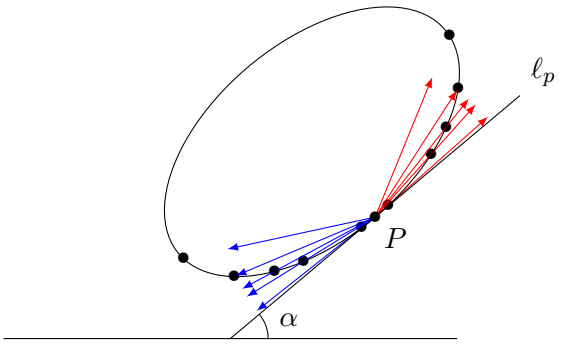


FIGURE 23.11 : Les vecteurs représenant σ_2 dans le cas où $\beta'(0)$ est dans le sens de ℓ_p ou dans le sens inverse. Pour le sport nous avons dessiné la situation avec une droite ℓ quelconque plutôt que horizontale.

(7b) **Si $\theta(0)=\pi$** Cela correspond à la situation des vecteurs bleus sur la figure 23.11.
Alors $\theta(\pi)=0$ est obligatoire parce qu'il doit être supplémentaire à $\theta(0)$. Les angles atteints par $\sigma_2(t)$ pour $t\in]\pi,2\pi[$ sont encore les complémentaires, mais cette fois la continuité en $t=\pi$ nous impose de les chercher dans $]-\pi,0]$ et nous définissons

$$\begin{aligned}\theta\colon]\pi,2\pi[&\to]-\pi,0]\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t).\end{aligned} \tag{23.294}$$

Par continuité nous devons avoir $\theta(2\pi) = \theta(\pi) - \pi$ et donc $\theta(2\pi) = -\pi$.

Le degré de σ_2 est alors

$$\deg(\sigma_2) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(2\pi) - \theta(0)\big) = -1. \tag{23.295}$$

(8) **Conclusion**

Nous avons montré que le degré de σ_2 est 1 ou -1, et en remontant les égalités (23.286) nous déduisons que $\text{Turn}(\gamma) = \pm 1$.

□

23.13 Courbes fermées planes

23.13.1 Cercle circonscrit

La proposition suivante est dans le même esprit que l'ellipse de John-Loewer[23].

PROPDEFooCWESooVbDven

Proposition-Définition 23.89 (Cercle circonscrit[694, 1])**.**
*Soit une courbe fermée simple et continue $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Soit Γ son image. Il existe un unique cercle de rayon minimum contenant Γ. Ce cercle est le **cercle circonscrit** à γ.*

Nous nommons C ce cercle circonscrit à γ. Il a les propriétés suivantes :

(1) L'intersection $C \cap \Gamma$ contient au moins deux points distincts.

(2) Tout arc de C plus long que sa moitié intersecte Γ.

Démonstration. Division de la preuve.

(1) **Existence** L'application γ étant continue, l'ensemble Γ est compact (théorème 9.298). Nous considérons l'ensemble Q des formes quadratiques de la forme

$$q_{a,r}(x) = \|a - x\|^2 - r^2 \tag{23.296}$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}$. Nous mettons sur cet ensemble la topologie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Le nombre $q_{a,r}(x)$ est continu en a, r et x. Soit A l'ensemble des formes quadratiques de cette forme et vérifiant

$$q\big(\gamma(t)\big) \leqslant 0 \tag{23.297}$$

pour tout $t \in [0,1]$.

Cet ensemble A est non vide parce que Γ est compact et donc borné ; il existe donc une boule qui contient Γ en son intérieur.

Montrons que A est fermé dans Q. Si $q_{a,r} \notin A$ alors il existe t_0 tel que $q_{a,r}\big(\gamma(t_0)\big) > 0$. Par continuité, il existe un voisinage de (a,r) dans $\mathbb{R}^3$ et donc de $q_{a,r}$ dans Q tel que $q_{a',r'}\big(\gamma(t_0)\big)$ reste strictement positif pour tout (a',r') dans ce voisinage. Le complémentaire de A dans Q est ouvert. Donc A est fermé.

Montrons que l'ensemble

$$B = \{r \geqslant 0 \text{ tel que } \exists\, a \text{ tel que } q_{a,r} \in A\} \tag{23.298}$$

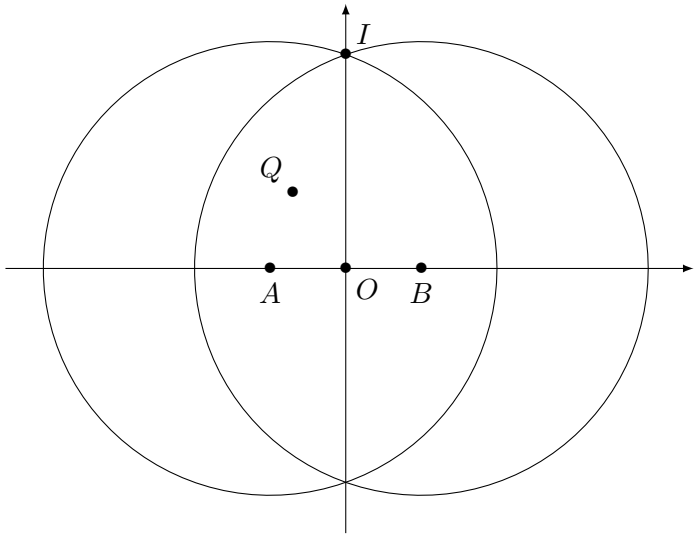
est fermé. Pour cela nous montrons que son complémentaire est ouvert. Soit $r \notin B$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$; nous allons prouver que $q_{a,r'}$ est hors de A pour tout $r' \in B(r,\epsilon)$. Nous savons que $q_{a,r'} \notin A$, c'est-à-dire qu'il existe $t_0 \in [0,1,]$ tel que $q_{a,r}\big(\gamma(t_0)\big) > 0$. Étant donné que cette expression est continue en r, il existe un voisinage $B(r,\epsilon)$ tel que $q_{ar,'}\big(\gamma(t_0)\big) > 0$ pour tout $r' \in B(r,\epsilon)$.

(2) **Unicité**

En ce qui concerne l'unicité, si Γ est contenu dans les boules $B(a,R)$ et $B(b,R)$ alors

$$\Gamma \subset B(a,R) \cap B(b,R). \tag{23.299}$$

[23] Proposition 19.151.



Nous choisissons les axes comme indiqué sur le dessin et nous montrons que l'intersection est dans le cercle de centre O et de rayon $\|OI\| < R$. Soit Q un point de l'intersection ; par symétrie il est suffisant de supposer $Q_x < 0$ et $Q_y > 0$. Vu que Q est dans le cercle de centre B et de rayon R, il doit satisfaire

$$(B_x - Q_x)^2 + Q_y^2 < R. \tag{23.300}$$

D'autre part le point I est d'abscisse $I_x = 0$ et d'ordonnée donnée par $I_y^2 = R^2 - B_x^2$.

Nous devons prouver que $Q_x^2 + Q_y^2 \leqslant I_y^2$. Il s'agit simplement de calculer

$$Q_x^2 + Q_y^2 \leqslant Q_x^2 + R^2 - B_x^2 + 2B_xQ_x - Q_x^2 = R^2 - B_x^2 + 2B_xQ_x \leqslant R^2 - B_x^2 = I_y^2 \tag{23.301}$$

parce que $B_x > 0$ et $Q_x < 0$.

Nous concluons que Γ est inclus dans un cercle de rayon plus petit que R et donc que R n'est pas minimum. D'où l'unicité.

(3) **Au moins deux intersections**

Nous nommons C le cercle circonscrit à γ, et nous écrivons, pour $p \in \Gamma$

$$r(p) = d(p, C) \tag{23.302}$$

la distance entre p et C. Cela est une fonction continue sur le compact Γ. Elle atteint donc ses bornes sur Γ.

(3a) **Impossible d'avoir zéro intersection**

Si $C \cap \Gamma = \varnothing$ alors $r(p) > 0$ pour tout p et le minimum est également strictement positif. Soit r_0 ce minimum :

$$r_0 = \min\{d(p, C) \text{ tel que } p \in \Gamma\}. \tag{23.303}$$

Alors le cercle C_2 même centre que C mais de rayon $r_0/2$ n'intersecte pas non plus Γ. En effet soient $p \in \Gamma$ et $s \in C_2$. Nous notons s' le point de C situé sur la demi-droite ps. Nous avons

$$d(p, s) \geqslant d(p, s') - \frac{r_0}{2} \geqslant d(p, C) - \frac{r_0}{2} \tag{23.304a}$$

$$\geqslant r_0 - \frac{r_0}{2} = \frac{r_0}{2} \tag{23.304b}$$

$$> 0. \tag{23.304c}$$

Cela étant valable pour tout $s \in C_2$ (et d étant continue en s sur le compact C_2), nous en déduisons que $d(p, C_2) > 0$ pour tout $p \in \Gamma$. Donc $\Gamma \cap C_2 = \varnothing$.

(3b) **Impossible d'avoir une seule intersection**

Si $C \cap \Gamma = \{q\}$ alors un choix d'axe place le centre de C en $(0, 0)$, le point q en $(1, 0)$ et fixe le rayon de C à 1. Vu que Γ ne coupe C qu'un un seul point, situé tout à droite, il devrait être possible de décaller un peu C pour le « décoller » de q tout en continuant à ne pas toucher Γ en les autres points.

C'est ce que nous allons faire maintenant.

Pour $p \in \Gamma$ nous notons $r(p)$ la distance entre p et le point de C situé sur sa gauche, c'est-à-dire, si $p = (p_x, p_y)$,

$$r(p) = \sqrt{1 - p_y^2} + p_x. \tag{23.305}$$

EQooCWRDooRzwoKi

Cela est encore une fonction continue sur Γ qui atteint son minimum valant r_0. Nous considérons maintenant le cercle C_2 de centre $(\frac{r_0}{2}, 1)$, et nous prouvons que Γ est dans C_2 (au sens dans la boule dont la frontière est C_2) et que $C_2 \cap \Gamma = \varnothing$. Donc C_2 retombe dans un cas que nous avons prouvé être impossible.

Soit $p \in \Gamma$. Si $p \in C_2$, alors $p - (r_0/2, 0) \in C$. Cela est impossible parce que la distance entre p et le point à sa gauche sur C est au moins r_0. Donc $C_2 \cap \Gamma = \varnothing$.

Le point q est dans C_2 parce que $(1, 0) \in B\big((r_0/2, 0), 1\big)$. Par continuité de C_2 et de Γ, tous les points de Γ sont dans C_2. Sinon il y aurait une intersection.

(3c) **Si on en veut plus** Nous avons fini de démontrer qu'il y a au moins deux intersections.

Pour le sport, notez que tout nombre de points d'intersection entre C et Γ est possible à partir de 2. Pour en avoir deux, prendre une ellipse, et pour en avoir plus, prendre des polynômes dont les angles sont un peu modifiés de façon à rester C^1.

(4) **Intersection avec les demi-arcs**

Supposons, en fixant encore les axes, que le cercle circonscrit soit encore centré en $(0, 0)$ et que Γ n'intersecte pas le demi-cercle $x < 0$. Alors pour tout $p \in \Gamma$ la distance entre p et ce demi-cercle est strictement positive. Il y a un minimum r_0. En décalant le centre du cercle de $r_0/2$ vers la droite, nous obtenons un nouveau cercle contenant Γ mais ne l'intersectant pas.

□

23.13.2 Description locale

DEFooVQODooJSNYLw

Définition 23.90.
Une courbe plane différentiable est ***convexe*** *si son graphe est en tout point d'un seul côté de sa tangente.*

LEMooGEVEooHxPTMO

Lemme 23.91 ([1]).
Soit une courbe simple, convexe $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ que nous supposons être de classe C^1. Nous notons Γ l'image de γ. Alors Γ est localement le graphe d'une fonction convexe (définition 19.105).

Démonstration. Soit $p \in \Gamma$ et l_p la tangente à Γ en p. Nous considérons un système d'axe centré en p de telle sorte que l_p soit l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées soit dirigé de tel manière que Γ se trouve dans la partie $y > 0$. De plus nous paramétrons γ de telle sorte à avoir $\gamma(0) = p = (0, 0)$.

Vu que $l_p \equiv y = 0$ est la tangente à Γ nous avons $\gamma_y'(0) = 0$ et $\gamma_x'(0) > 0$. Nous en déduisons que $\gamma_x'(t) > 0$ pour tout $t \in B(0, \delta)$ pour δ suffisamment petit. Nous posons alors

$$g(x) = \gamma_y\big(\gamma_x^{-1}(x)\big) \tag{23.306}$$

qui est bien définie parce que γ_x est une bijection entre $B(0, \delta)$ et son image. La fonction g est continue par le théorème de la bijection 14.52, et même dérivable par la proposition 14.215. De plus, vu la formule (14.542), la fonction g^{-1} est de classe C^1 parce que $(g^{-1})'$ est une composée d'applications continues.

(1) **Si g est C^2** Dans ce cas, g'' ne peut pas changer de signe, sinon la tangente coupe le graphe. Par positivité de g (et le fait que $g(0) = g'(0) = 0$), il n'est pas possible d'avoir $g'' < 0$ partout. Donc $g'' \geqslant 0$ partout. Cela prouve que g est convexe par la caractérisation 19.113.

(2) **Si g est seulement de classe C^1** Le graphe de g correspond au graphe de Γ. Nous montrons que g est convexe en utilisant la caractérisation de la proposition 19.118.

La tangente au graphe de g en $x = x_0$, que nous notons l_0, est la tangente à Γ en $t = \gamma_x^{-1}(x_0)$. Le graphe de g, qui est une partie de Γ se trouve donc d'un seule côté de l_0.

Nous nous restreignons g à un compact I et nous considérons la fonction

$$d_a(x) = g(x) - l_a(x) \tag{23.307}$$

qui donne la distance entre le graphe de g et la tangente à g en $x = a$. Cela est une fonction continue en x et en a. Le graphe de g est au dessus de la tangente en $x = 0$ (par construction des axes). Supposons que le graphe de g soit en dessous de la tangente en $x = x_2$. Alors nous avons, pour tout x :

$$\begin{cases} d_0(x) \geqslant 0 & \text{(23.308a)} \\ d_{x_1}(x) \leqslant 0. & \text{(23.308b)} \end{cases}$$

Nous posons

$$s(a) = \sup_{x \in I} d_a(x), \tag{23.309}$$

qui est une fonction continue par la proposition 14.35. L'application s vérifie $s(0) \geqslant 0$ et $s(x_2) \leqslant 0$. Il existe donc $m \in [0, x_2]$ tel que $s(m) = 0$. À ce moment nous avons $g(x) = l_m(x)$ pour tout $x \in I$ et donc g est une droite, et en réalité toutes les inégalités sont des égalités. La fonction g est alors bien convexe (mais pas strictement).

□

23.13.3 Enveloppe convexe

PROPooWZITooTFiWsi

Proposition 23.92 ([695, 1]).
Soit une courbe simple, fermée et convexe $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ que nous supposons être de classe C^2. Nous notons Γ l'image de γ. Alors il existe un convexe D tel que $\partial D = \Gamma$.

Démonstration. Pour $p \in \Gamma$ nous notons l_p la tangente à Γ en p et H_p le demi-plan (fermé) contenant Γ. Nous posons

EQooDYFTooCHRbsD

$$D = \bigcap_{p \in \Gamma} H_p. \tag{23.310}$$

Cet ensemble est convexe comme intersection de convexes[24] et fermé comme intersection de fermés[25]. Nous prouvons que $\Gamma = \partial D$.

L'inclusion $\Gamma \subset \partial D$ est la plus facile. Si $p \in \Gamma$ alors p est dans chacun des H_q et donc dans D. De plus tout voisinage de p contient des points en dehors de H_p, donc p n'est pas dans l'intérieur de D. Ce dernier étant fermé, un point hors de l'intérieur est sur le bord. Ergo $p \in \partial D$.

Pour l'inclusion inverse, soit $p \in \partial D$.

(1) **Il existe q tel que $p \in l_q$** Vu que D est fermé, le point p est dans D, et donc dans tous les H_q. Supposons qu'il soit dans l'intérieur de tous les H_q. Alors nous considérons la fonction

$$r(q) = \frac{d(p, l_q)}{2} \tag{23.311}$$

définie sur Γ. C'est une fonction continue[26] strictement positive définie sur le compact Γ qui possède donc un minimum strictement positif. Si r_0 est ce minimum, alors $B(p, r_0)$ est incluse à tous les H_q, ce qui ferait que p est à l'intérieur de D. Nous concluons à l'existence de $q \in \Gamma$ tel que $p \in l_q$.

(2) **Le point où ça décolle** Nous supposons que $p \notin \Gamma$, sinon ce serait trop facile. Nous paramétrons γ de telle sorte à avoir $q = \gamma(0)$ et nous posons

$$T = \{t \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } l_{\gamma(t)} = l_q\}. \tag{23.312}$$

Cela est un fermé dans $\mathbb{R}$ parce que γ est de classe C^1. Nous posons $t_0 = \inf(T^c)$ et pour tout ϵ suffisamment petit,

$$\begin{cases} l_{\gamma(t_0+\epsilon)} \neq l_q, & \text{(23.313a)} \\ l_{\gamma(t_0-\epsilon)} = l_q. & \text{(23.313b)} \end{cases}$$

La seconde est parce que si $l_{\gamma(t_0-\epsilon)} \neq l_q$ nous aurions $t_0 - \epsilon \in T^c$. Soit $r = \gamma(t_0)$; nous avons $l_r = l_q$ parce que si $l_r \neq l_q$ alors par continuité de γ' nous aurions $l_{r'} \neq l_q$ pour tout $r' \in \gamma\big(B(t_0, \delta)\big)$.

(3) **Graphe d'une fonction strictement convexe** En suivant le lemme 23.91, l'ensemble Γ est localement (autour de r) le graphe d'une fonction convexe au-dessus de l_r. Soit $g\colon B(0,\delta) \to \mathbb{R}^2$ cette fonction convexe.

Soit $\epsilon > 0$. Si $g''(x) = 0$ sur $]0, \epsilon]$ alors g' y est constante. Mais $g'(0) = 0$, ce qui signifierait que sur $[0, \epsilon]$ nous ayons $g'(x) = 0$ et donc $g(x) = 0$. Cela ferait que $l_{r'} \equiv y = 0$ pour tout r' de la forme $(x, 0)$ avec $x \in [0, \epsilon]$ (qui sont des points de Γ). Cela est en contradiction avec la définition de r. Donc il existe un point $x \in [0, \epsilon[$ tel que $g''(x) > 0$.

Rappelons que $p \in l_q$, ce qui fait que p a pour coordonnées $(p_x, 0)$. Nous restreignons δ et ϵ de telle sorte que p_x soit plus grand à la fois que ϵ et δ.

Il existe donc un intervalle $[a, b]$ avec $a, b \geqslant 0$ et $a, b < p_x$ sur lequel g est strictement convexe.

[24] Proposition 9.229.
[25] Lemme 9.6(1).
[26] L'équation de la droite l_q a des coefficients continus parce que γ est de classe C^1.

(4) **La tangente qui tue**

En particulier $g(b) > 0$, de telle sorte que le théorème des accroissements finis 14.217(1) nous donne l'existence de $m \in [0, b]$ tel que la tangente à g en $x = m$ est parallèle au segment joignant $(0, 0)$ à $(b, g(b))$. Cette tangente, que nous nommons l_m, est en dessous de la corde, par stricte convexité. En particulier, son point d'intersection avec $y = 0$ est strictement entre 0 et m.

L'ensemble D est d'un seul côté de l_m. Ce côté est forcément celui de $q = (0, 0)$ (parce que $q \in \Gamma \subset D$), et donc le points de coordonnées $(x, 0)$ avec $x > m$ ne sont pas dans D. Pas de chance, p est un point de ce type.

(5) **La contradiction** Nous avons prouvé que si $p \in \partial D \backslash \Gamma$ alors p n'est pas dans D, ce qui est impossible parce que, l'ensemble D étant fermé, nous avons $\partial D \subset D$.

□

Remarque 23.93.
Bien que cela puisse paraitre évident dès le début, nous ne démontrerons que dans la proposition 23.95 que D est l'enveloppe convexe de Γ.

CORooSXDGooJEmVcf

Corolaire 23.94.
Si $p \in \mathrm{Int}(D)$ alors toute droite passant par p intersecte Γ en exactement 2 points.

Démonstration. Vu que la partie D est bornée, toute droite passant par son intérieur coupe ∂D en au moins deux points (un dans chaque sens, et en utilisant le lemme de passage de douane 9.192).

Soit ℓ une droite passant par p et supposons qu'elle coupe Γ en trois points distincts. Alors au moins deux d'entre eux sont du même côté de p. Soient q_1 et q_2 ces points. Nous avons donc dans l'ordre $p \in \mathrm{Int}(D)$, $q_1 \in \partial D$ et $q_2 \in \partial D$.

Vu que tout Γ est d'un seul côté de ses tangentes, lesdites tangentes ne passent pas par l'intérieur de D. Ni p ni q_2 ne sont sur ℓ_{q_1}, parce que si $q_2 \in \ell_{q_1}$ alors $\ell_{q_1} = \ell$, ce qui est impossible parce que ℓ passe par $p \in \mathrm{Int}(D)$.

Or p et q_2 sont de part et d'autres de ℓ_{q_1}, ce qui est impossible parce que Γ est d'un seul côté de cette droite. □

PROPooORPooCXrIQi

Proposition 23.95.
Soit D l'ensemble défini en (23.310).

(1) $D = \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ ($\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ désigne l'enveloppe convexe de Γ)

(2) $\partial\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma) = \Gamma$.

Pour la définition d'enveloppe convexe, voir la définition 13.38.

Démonstration. L'ensemble D est un convexe contenant Γ. Donc $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma) \subset D$. L'inclusion inverse est à prouver.

Soit $x \in D$. Si $x \in \partial D$ alors $x \in \Gamma$ (proposition 23.92) et donc $x \in \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. Nous ne devons donc traiter que le cas $x \in \mathrm{Int}(D)$.

Le corolaire 23.94 nous dit que toute droite passant par x coupe Γ en exactement deux points. Soient p et q ces points. Alors $p, q \in \Gamma \subset \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. Vu que $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ est convexe, tout le segment $[p, q]$ est dans $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$, et en particulier $x \in \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$.

Nous passons à la seconde affirmation. Nous savons que $D = \mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. En prenant le bord des deux côtés, $\partial D = \partial\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$, donc $\Gamma = \partial\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$. □

LEMooUEKQooWhGyKn

Lemme 23.96 (Des tangentes parallèles[696])**.**
Une courbe fermée γ de classe C^1 est convexe si et seulement si elle ne possède pas 3 tangentes parallèles distinctes.

Démonstration. Si le graphe Γ possédait trois tangentes parallèles distinctes, une serait entre les deux autres et le graphe Γ serait de part et d'autres de cette tangente. Dans ce cas, γ n'est pas convexe.

Nous montrons maintenant que si γ n'est pas convexe, alors elle possède trois tangentes parallèles distinctes. Pour $p \in \Gamma$ tel que Γ soit des deux côtés de l_p.

Soient Γ_1 et Γ_2 les parties de Γ délimitées par l_p. Nous notons q_i le point de Γ_i le plus éloigné de la droite l_p, il existe parce que Γ est compact et que la fonction distance à l_p est continue sur Γ. Les points p, q_1 et q_2 sont distincts (sinon l_p ne couperait pas Γ en deux parties).

Montrons que $l_{q_i} /\!\!/ l_p$. Pour cela nous choisissons un système d'axe dans lequel $l_p \equiv y = 0$. Dans ce système, la distance entre $\gamma(t)$ et l_p est $\gamma_y(t)$ et les extrémums de cette fonction ont lieu aux points t tels que $\gamma_y'(t) = 0$, c'est-à-dire aux points sur lesquels la tangente est parallèle à l_p.

À quel moment avons nous utilisé le fait que la courbe soit fermée ? Au moment de dire que le point le plus éloigné devait vérifier $\gamma_y'(t) = 0$. En effet un extrémum peut ne pas vérifier cette condition si il n'est pas à l'intérieur du domaine. Dans notre cas, nous avons $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui est fermée : $\gamma(0) = \gamma(1)$. Donc en réalité nous pouvons considérer $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et tous les points du domaine sont intérieurs au domaine. L'extrémum doit donc vérifier la condition d'annulation de la dérivée. □

Exemple 23.97.
Si la courbe n'est pas fermée, alors le lemme 23.96 ne tient pas comme le montre le contre-exemple du graphe de $f(x) = x^3 - x$. Il est non convexe et pourtant ne présente que 2 tangentes parallèles (dans chaque direction). △

LEMooCSXCooIDPiKW

Lemme 23.98.
Soit γ une courbe convexe et ℓ une droite qui intersecte Γ mais qui n'est pas tangente. Alors l'intersection entre ℓ et Γ comprend au maximum 2 points.

Démonstration. Supposons que ℓ coupe Γ en trois points p, q, r (dans cet ordre). Vu que ℓ n'est pas tangente à Γ, la tangente ℓ_q est distincte de ℓ (et intersecte ℓ en l'unique point q). Les points p et r sont dans Γ et sont pourtant de deux côtés différents de ℓ_q. Contradiction avec la convexité de γ. □

La proposition suivante nous dit que si deux points de Γ ont la même tangente, alors entre ces deux points, Γ est le segment de droite les joignant.

PROPooCKTZooIPcUca

Proposition 23.99 ([1]).
Soit $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple et convexe de classe C^1. Si la tangente en $p = \gamma(s_p)$ et la tangente en $q = \gamma(s_q)$ sont identiques (pas seulement parallèles), alors soit

$$\gamma\big([s_p, s_q]\big) = [p, q] \tag{23.314}$$

soit

$$\gamma\big([s_q, L]\big) = [p, q] \tag{23.315}$$

Démonstration. Nous considérons un système d'axe dans lequel $p = (0,0)$, $\ell_p = \ell_q \equiv y = 0$ et tel que $\gamma_y(t) \geqslant 0$ pour tout t. Nous choisissons enfin un paramétrage de γ tel que $p = \gamma(0)$.

Supposons un instant que $\gamma_y\big([0, s_q]\big) = \{0\}$. Nous avons $\gamma_x(0) = p_x = 0$ et $\gamma_x(s_q) = q_x$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 implique que toutes les valeurs entre 0 et q_x sont atteintes par γ_x entre 0 et s_q. Donc tous les points du type $(t, 0)$ avec $0 \leqslant t \leqslant q_x$ sont atteints par $\gamma(t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant s_q$. De plus aucun autre point ne peut être atteint parce que γ étant simple, elle ne peut pas faire de retour en arrière.

Nous supposons donc que γ_y n'est pas identiquement nulle sur $[0, s_q]$; il existe donc un s_M avec $0 < s_M < s_q$ qui maximise γ_y sur $[0, s_q]$. La tangente à Γ en $\gamma(s_M)$ est horizontale. Les droites $y = 0$ et $y = \gamma_y(s_M)$ sont donc deux tangentes parallèles à Γ. Par le lemme des tangentes parallèles 23.96, il n'y a pas d'autres tangentes horizontales. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ la droite $y = \frac{1}{n}$ n'est tangente nulle part[27] à Γ.

Par le lemme 23.98, la droite $y = \frac{1}{n}$ ne peut intersecter Γ qu'en seulement deux points. Or le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à γ_y sachant que $\gamma_y(0) = \gamma_y(s_q) = 0$ et $\gamma_y(s_M) > 0$ nous donne a_n, b_n tels que

$$0 < a_n < s_M \tag{23.316a}$$
$$s_M < b_n < s_q \tag{23.316b}$$

et $\gamma_y(a_n) = \gamma_y(b_n) = \frac{1}{n}$. Donc la droite $y = \frac{1}{n}$ intersecte γ deux fois dans $[0, s_q]$. En conséquence de quoi $\gamma_y(t) < \frac{1}{n}$ pour tout $t \in [s_q, L]$. Cela étant valable pour tout n nous avons $\gamma_y\big([s_q, L]\big) = \{0\}$ et nous sommes ramenés essentiellement au premier cas. □

PROPooKHUQooIOUxFw

Proposition 23.100.
Soit une courbe fermée simple γ de classe C^1 et une droite ℓ. Alors il existe au moins deux points distincts q_1, q_2 tels que $\ell_{q_1} /\!\!/ \ell_{q_2} /\!\!/ \ell$ avec $\ell_{q_1} \neq \ell_{q_2}$.

[27] À part $n = 0$ et si par manque de chance, $\gamma_y(s_M)$ est un nombre de la forme $1/n$.

Démonstration. Nous considérons un système d'axes dans lequel la droite ℓ est la droite $y = 0$[28]. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} r\colon \gamma &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto p_y. \end{aligned} \tag{23.317}$$

En tant que fonction continue sur un compact, elle possède un minimum et un maximum. Les extrémums arrivent en $\gamma(s)$ avec $\gamma'_y(s) = 0$, ce qui signifie que les tangentes aux extrémums sont parallèles à ℓ. Vu que le maximum et le minimum ne peuvent pas être égaux (sinon la courbe serait horizontale et pas simple), les tangentes en ces points sont distinctes. □

Corolaire 23.101.
Soit une courbe convexe fermée simple γ de classe C^2. L'ensemble $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ est compact.

Démonstration. Nous savons que $\mathcal{C}\mathrm{onv}(\Gamma)$ n'est autre que D par la proposition 23.95. Nous savons déjà que D est fermé. Il nous suffit donc de prouver qu'il est borné (théorème de Borel-Lebesgue 11.23). Nous considérons deux droites perpendiculaires et les 4 tangentes correspondantes par la proposition 23.100. Vu que Γ est d'un seul côté de chacune de ces tangentes, elle est contenue dans le rectangle délimité par ces 4 droites. □

23.13.4 Courbure et convexité

SUBSECooNJOLooYuGRjA

À propos de paramétrage normal.

LEMooHMFSooFlhanD

Lemme 23.102.
Soit $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ une courbe simple, fermée de classe C^2 en paramétrage normal. Nous considérons sa fonction d'angle $\theta\colon [0, L] \to \mathbb{R}$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \sigma\colon [0, L] &\to S^1 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\big(\theta(t)\big) \\ \sin\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{23.318}$$

est surjective.

Démonstration. Le théorème 23.88 nous dit que si $\theta(0) = a$ alors $\theta(2\pi)$ ne peut valoir que $a + 2\pi$ ou $a - 2\pi$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors que θ prend toutes les valeurs entre a et $a + 2\pi$ ou $a - 2\pi$. □

PROPooWXUKooPOtPdj

Proposition 23.103 ([696]).
Une courbe fermée simple de classe C^2 est convexe si et seulement si sa courbure est soit toujours positive, soit toujours négative.

Démonstration. Nous considérons la courbe γ munie d'un paramétrage de vitesse 1, c'est-à-dire avec $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t. Si θ est sa fonction d'angle[29], alors nous avons $\theta' = \kappa$ par le lemme 23.80. Donc la fonction θ est monotone si et seulement si la courbure ne change pas de signe. Nous allons montrer que θ est monotone si et seulement si γ est convexe.

(1) $\Rightarrow$

Nous supposons que θ est monotone et γ non convexe. Soient $p \in \Gamma$ tel que Γ soit des deux côtés de ℓ_p, et soient les points q_1, q_2 donnés par le lemme des tangentes parallèles 23.96 tels que $\ell_p \parallel \ell_{q_1} \parallel \ell_{q_2}$. Parmi les vecteurs tangents en p, q_1 et q_2, deux au moins ont la même direction ; supposons que ce sont q_1 et q_2. C'est-à-dire que si $p = \gamma(s_0)$, $q_1 = \gamma(s_1)$ et $q_2 = \gamma(s_2)$ alors nous avons $\gamma'(s_1) = \gamma'(s_2)$ et donc aussi

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) + 2n\pi \tag{23.319}$$

pour un certain n. Mais θ est monotone et la différence entre sa première et sa dernière valeur doit valoir 2π ou -2π par le théorème 23.88. Donc n ne peut valoir que -1, 0 et 1.

Si $n = 0$ alors θ est constante sur $[s_1, s_2]$. Si $n = 1$ alors $\theta(s_1) = \theta(s_2) + 2\pi$ alors que sur toute la courbe, θ ne peut faire que 2π. Donc θ est constant sur $[0, s_1]$ et sur $[s_2, L]$ (où L est le bord de le paramétrage). Si $n = -1$, même conclusion.

[28] Pour bien faire, il faut faire la démonstration en deux parties : une qui montre le cas particulier $\ell \equiv y = 0$, et un second qui en déduit rigoureusement le cas général.
[29] Définition 23.79.

Dans tous les cas, Γ contient une ligne droite, soit de q_1 à q_2, soit de q_2 à q_1. Et dans ces cas nous avons $\ell_{q_1} = \ell_{q_2}$, ce qui est contraire à la construction de q_i.

Nous concluons que γ est convexe.

(2) $\Leftarrow$

Nous supposons que γ est convexe, mais que θ n'est pas monotone. Il existe donc $s_1 < s_0 < s_2$ tels que

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0). \tag{23.320}$$

Et vu le lemme 23.102, il existe s_3 tel que $\gamma'(s_3) = -\gamma'(s_1)$.

Donc en s_1, s_2 et s_3 nous avons trois tangentes parallèles. La proposition 23.96 est alors formelle, γ étant convexe, deux de ces tangentes doivent être identiques.

La proposition 23.99 dit qu'entre deux points dont les tangentes sont identiques, la courbe doit être un segment de droite. Or sur un segment de droite, $\kappa = 0$ et θ est constante.

- La partie $\gamma\big([s_1, s_2]\big)$ ne peut pas être droite parce que nous avions supposé l'existence d'un $s_0 \in]s_1, s_2[$ tel que $\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0)$.
- La partie $\gamma\big([s_1, s_3]\big)$ ne peut pas être droite parce que $\theta(s_3) \neq \theta(s_1)$.
- La partie $\gamma\big([s_2, s_3]\big)$ ne peut pas être droite parce que $\theta(s_2) \neq \theta(s_1)$.

Nous sommes donc devant une contradiction.

Nous en concluons que θ doit être monotone.

□

23.13.5 Théorème des quatre sommets

LEMooELIRooNDVXPh

Lemme 23.104.
Soit une droite ℓ du plan. Il existe $a, c \in \mathbb{R}^2$ avec $c \neq 0$ tels que $z \in \ell$ si et seulement si $(z - a) \cdot c = 0$.

Démonstration. Une droite est paramétrée par $\gamma(t) = p + tq$. En posant $a = p$ et $c = Jq$ nous avons la réponse. En effet nous allons montrer qu'avec ces valeurs de a et c, nous avons $z \in \Gamma$ si et seulement si $(z - a) \cdot c = 0$.

D'abord un point de γ est de la forme $z = \gamma(t) = p + tq$. Nous avons :

$$\big(\gamma(t) - a\big) \cdot c = \big(\gamma(t) - p\big) \cdot Jq = tq \cdot Jq = 0. \tag{23.321}$$

Et dans l'autre sens, si $(z - a) \cdot c = 0$ nous devons prouver que $z \in \Gamma$. Nous avons : $(z - p) \cdot Jq = 0$, ce qui fait que $z - p$ est un multiple de q. Autrement dit : $z - p = \lambda q$ ou encore $z = \alpha q + p$, qui est sur la droite Γ. □

Définition 23.105.
*Un **sommet** d'une courbe est un point d'extrémum local de la courbure.*

THOooFRBBooWKZcfY

Théorème 23.106 (Théorème des quatre sommets[112, 627])**.**
Soit un arc paramétrique $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ fermé, simple et convexe[30] de classe C^3 et T-périodique.
Alors γ possède au moins 4 points critiques sur chaque période.

Démonstration. Nous supposons que le paramétrage de γ soit normal.

Si la courbure κ est constante sur une partie ouverte de la (du paramétrage de la) courbe, alors tous les points de cette partie sont des sommets et le théorème est fait. Nous supposons que κ n'est pas constante et en particulier que Γ ne contient ni bouts de droites ni bouts de cercles (théorème 23.76).

La fonction κ étant de classe C^1 sur le compact Γ, elle admet au moins un maximum et un minimum distincts. Vu que ces points sont intérieurs, ils correspondent au changement de signe de κ'. Soient p et q ces points. Pour la simplicité nous supposons que γ est paramétré de telle sorte que $\gamma(0) = p$, et $q = \gamma(s_q)$ avec $0 < s_q < T$.

Nous supposons que p et q sont les seuls points de changement de signe de κ'.

Soit ℓ la droite passant par p et q. Tous les points du segment $[p, q]$ (qui sont dans $\mathcal{C}\text{onv}(\Gamma)$) ne peuvent pas être sur Γ (sinon nous aurions un morceau de droite). Donc certains points sont dans l'intérieur de

[30] Par la proposition 23.103 nous pouvons aussi bien demander à la courbure d'être toujours strictement positive, comme le fait [112].

$\mathcal{C}\text{onv}(\Gamma)$. Donc la droite ℓ passe par l'intérieur de $\mathcal{C}\text{onv}(\Gamma)$ et le corolaire 23.94 nous dit que la droite ℓ ne coupe Γ en seulement deux points.

Par conséquent, les ensembles $\gamma\big([0,s_q]\big)$ et $\gamma\big([s_q,T]\big)$ sont de part et d'autre de Γ. Vu qu'en ces points, κ' change de signe et qu'il ne change de signe en aucun autre points, la fonction κ' est positive d'un côté de ℓ et négative de l'autre.

D'autre part par le lemme 23.104, il existe $a\in\mathbb{R}^2$ et $c\neq 0$ tels que $z\in\ell$ si et seulement si $(z-a)\cdot c=0$. La fonction $z\mapsto (z-a)\cdot c$ est donc positive d'un côté de ℓ et négative de l'autre.

En résumé les fonctions

$$s\mapsto \kappa'(s) \tag{23.322a}$$
$$s\mapsto \big(\gamma(s)-a\big)\cdot c \tag{23.322b}$$

changent de signe en même temps et le produit a donc un signe constant. Ce produit n'est de plus pas nul parce que κ' n'est nul sur aucun intervalle (sinon κ y serait constant et Γ un segment de droite) et $\big(\gamma(s)-a\big)\cdot c$ ne s'annule pour aucun s sauf ceux qui correspondent à p et q.

Nous avons donc

$$0\neq\int_0^T \kappa'(s)\big(\gamma(s)-a\big)\cdot c\,ds \tag{23.323a}$$
$$=\underbrace{\Big[\big(\gamma(s)-a\big)\cdot c\kappa(s)\Big]_0^T}_{A=0}-\int_0^T \kappa(s)\gamma'(s)\cdot c\,ds \tag{23.323b}$$
$$=-\int_0^T \kappa(s)\big(\gamma'(s)\cdot c\big)ds \tag{23.323c}$$
$$=\int_0^T J\gamma''(s)\cdot c\,ds \tag{23.323d}$$
$$=J\int_0^T \gamma''(s)\cdot c\,ds \tag{23.323e}$$
$$=J\big[\gamma'(s)\cdot c\big]_0^T \tag{23.323f}$$
$$=0. \tag{23.323g}$$

Justifications :

- L'expression A est nulle parce que les valeurs en 0 et en T sont identiques.
- Nous utilisons le lemme 23.75 pour faire $-\kappa(s)\gamma'(s)=J\gamma''(s)$.

Le tout est une contradiction de la forme $0\neq a=0$.

Nous avons donc au moins un troisième point de changement de signe de κ'. Vu que la courbe est périodique, il en faut un nombre pair et donc un quatrième. □

L'exemple de l'ellipse montre qu'il n'y a pas lieu de chercher d'autres extrémums de κ à part les 4 déjà trouvés.

Exemple 23.107.
Nous trouvons les sommets de l'ellipse.

$$\gamma(t)=\big(a\cos(t),b\sin(t)\big) \tag{23.324a}$$
$$\gamma'(t)=\big(-a\sin(t),b\cos(t)\big) \tag{23.324b}$$
$$\gamma''(t)=-\big(a\cos(t),b\sin(t)\big) \tag{23.324c}$$
$$\tag{23.324d}$$

La courbure est

$$\kappa(t)=\frac{\gamma''\cdot J\gamma'}{\|\gamma'\|^3} \tag{23.325a}$$
$$=\frac{-1}{[a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)]^{3/2}}\begin{pmatrix}a\cos(t)\\ b\sin(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-b\cos(t)\\ -a\sin(t)\end{pmatrix} \tag{23.325b}$$
$$=\frac{ab}{[a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)]^{3/2}}. \tag{23.325c}$$

Vu que $ab > 0$, les extrémums de cela sont ceux du dénominateur et il suffit donc d'étudier les extrémums de

$$f(t) = a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t). \tag{23.326}$$

Nous avons

$$f'(t) = 2(a^2 - b^2)\cos(t)\sin(t), \tag{23.327}$$

fonction qui s'annule effectivement 4 fois sur une période. Deux maximums et deux minima. △

23.13.6 Théorème d'Urysohn

LEMooWRLRooCdubfZ

Lemme 23.108.
Soit un espace topologique X. Soit une partie D dense de $[0,1]$. Nous considérons des ouverts $\{U_s\}_{s\in D}$ de X indexés par D. Nous supposons que si $s_1 < s_2$ alors $\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$. Enfin pour tout $x \in X$ nous posons

$$A_x = \{s \in D \text{ tel que } x \in U_s\}. \tag{23.328}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} f\colon X &\to [0,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} \inf(A_x) & \text{si } x \in \bigcup_{s\in D} U_s \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{23.329}$$

est continue.

Démonstration. Dans la suite nous prenons les conventions suivantes :

$$\bigcup_{s\in\varnothing} U_s = \varnothing \tag{23.330a}$$

$$\bigcap_{s\in\varnothing} U_s = X \tag{23.330b}$$

$$\tag{23.330c}$$

Soit $t \in [0,1]$.

(1) $\{x \text{ **tel que** } f(x) < t\} = \bigcup_{s<t} U_s$ D'abord nous considérons $x \in X$ tel que $f(x) < t$, et nous prouvons que $x \in \bigcup_{\substack{s\in D\\ s<t}} U_s$. Vu que $f(x) = \inf(A_x) < t \leqslant 1$, il existe $s_0 < t$ tel que $s_0 \in A_x$. Pour ce s_0 nous avons $x \in A_{s_0}$, et donc

$$x \in U_{s_0} \subset \bigcup_{\substack{s\in D\\ s<t}} U_s. \tag{23.331}$$

Dans l'autre sens, soient $s_0 < t$ et $x \in U_{s_0}$. Nous avons $s_0 \in A_x$ et donc $f(x) \leqslant s_0 < t$.

(2) $\{x \text{ **tel que** } f(x) \leqslant t\} = \bigcup_{s>t} \bar{U}_s$ Si $t = 1$, alors $\{x \text{ tel que } f(x) \leqslant t\} = X$, et $\bigcap_{s>t} \bar{U}_s = \bigcup_{s\in\varnothing} \bar{U}_s = X$. Supposons que $t < 1$.

Soit $x \in X$ tel que $f(x) \leqslant t$. Vu que $t < 1$ et que D est dense dans $[0,1]$, il existe $s \in D$ tel que

$$s > t \geqslant f(x) = \inf(A_x). \tag{23.332}$$

Donc il existe $a \in A_x$ tel que $a \in]\inf(A_x), s[$. Vu que $a \in A_x$, nous avons $x \in U_a$, et vu que $a < s$, nous avons $\bar{U}_a \subset U_s$. Donc

$$x \in U_a \subset \bar{U}_a \subset U_s. \tag{23.333}$$

Donc $x \in U_s$ pour tout $s > t$ (dans D), et donc $x \in \bigcap_{s>t} \bar{U}_s$. Nous avons donc déjà prouvé que

$$\{x \text{ tel que } f(x) \leqslant t\} \subset \bigcap_{\substack{s\in D\\ s>t}} U_s. \tag{23.334}$$

Nous faisons à présent l'inclusion dans l'autre sens. Soit $x \in \bigcap_{\substack{s\in D\\ s>t}} \bar{U}_s$, et montrons que $f(x) \leqslant t$. Nous avons déjà traité le cas $t = 1$; nous continuous à supposer que $t < 1$.

Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour avoir $t + \epsilon < 1$. Vu que D est dense dans $[0,1]$, il existe $s_1, s_2 \in D$ tels que

$$t < s_1 < s_2 < t + \epsilon. \tag{23.335}$$

Par hypothèse $x \in \bar{U}_{s_1}$ et donc

$$x \in \bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}. \tag{23.336}$$

Cela prouve que $s_2 \in A_x$, et nous avons alors

$$f(x) = \inf(A_x) \leqslant s_2 < t + \epsilon. \tag{23.337}$$

Étant donné que ϵ est arbitrairement petit, nous avons $f(x) \leqslant t$.

(3) **$\{x$ tel que $f(x) < t\}$ est ouvert pour tout $t \in \mathbb{R}$** Nous commençons par $t \in [0,1]$. Dans ce cas nous avons vu que

$$\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = \bigcup_{\substack{s \in D \\ s < t}} U_s \tag{23.338}$$

qui est une union d'ouverts, et donc qui est ouvert.

Si $t < 0$, alors

$$\bigcup_{s<t} U_s = \bigcup_{s \in \varnothing} U_s = \varnothing, \tag{23.339}$$

est ouvert. Si $t > 1$, alors $\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = X$ parce que f prend ses valeurs dans $[0,1]$.

(4) **$\{x$ tel que $f(x) \leqslant t\}$ est fermé pour tout $t \in \mathbb{R}$** Si $t \in [0,1]$, alors nous savons déjà que

$$\{x \text{ tel que } f(x) \leqslant t\} = \bigcup_{s>t} \bar{U}_s \tag{23.340}$$

qui est fermé comme intersection de fermés (lemme 9.6(1)). Vu que f prend ses valeurs dans $[0,1]$, nous avons $\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = \varnothing$ lorsque $t < 0$ et $\{x \text{ tel que } f(x) < t\} = X$ lorsque $t > 1$.

(5) **f est contiue** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Nous avons,

$$f^{-1}\big(]a,b[\big) = \{f < b\} \setminus \{f \leqslant a\} = \{f < b\} \cap \{f \leqslant a\}^c. \tag{23.341}$$

Mais nous savons que $\{f < b\}$ est ouvert et que $\{f \leqslant a\}$ est fermé. Donc $f^{-1}\big(]a,b[\big)$ est ouvert comme intersection d'ouverts.

La proposition 9.207 dit (entre autres) que les $]a,b[$ forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$. La proposition 9.50 dit que cela suffit pour conclure à la continuité de f.

□

THOooKYYEooLFcNpg

Théorème 23.109 (Théorème d'Urysohn[248])**.**
Soit un espace topologique normal X. Soient A et B, des fermés disjoints de X. Il existe une application continue $f\colon X \to [0,1]$ telle que $f|_A = 0$ et $f|_B = 1$.

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ nous considérons $D_m = \{k/2^m\}_{k=0,\dots,2^m}$, et posons $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$.

(1) **D est dense dans $[0,1]$** Soient $x \in [0,1]$ et $\epsilon > 0$. Considérons m tel que $1/2^m < \epsilon$. Dans ce cas, il existe $s \in D_m$ tel que $|s - x| < \frac{1}{2^m} < \epsilon$.

(2) **Construction des U_s** Nous allons maintenant construire un ouvert U_s pour chaque $s \in D$. Et nous allons le faire de telle sorte d'avoir $s_1 < s_2 \Rightarrow \bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$.

(3) **Pour $s \in D_0$** Nous commençons avec les éléments de $D_0 = \{0,1\}$. D'abord nous posons

$$U_1 = B^c. \tag{23.342}$$

Vu que B est fermé, c'est un ouvert.

Pour construire U_0, nous remarquons que A est un fermé disjoint de B dans l'espace normal X. Il existe donc des ouverts U_0 et U_0' qui séparent A et B, c'est-à-dire tels que $A \subset U_0$, $B \subset U_0'$ et $U_0 \cap U_0' = \varnothing$.

Nous avons $\bar{U}_0 \subset B^c$. En effet si $a \in \bar{U}_0 \cap B$, alors $a \in B$ et donc U_0' est un voisinage ouvert de a. Ce voisinage n'intersectant pas U_0, a n'est pas dans la fermeture de U_0.

Nous avons donc bien la relation

$$\bar{U}_0 \subset B^c = U_1. \tag{23.343}$$

(4) **Récurrence** Nous avons défini U_s pour $s \in D_0$. Pour la récurrence, nous supposons que U_s est défini pour $s \in D_{m-1}$, et qu'ils vérifient la condition. Nous allons construire les U_s pour $s \in D_m$.

Remarquons que $D_{m-1} \subset D_m$. Plus précisément, les éléments de D_m qui ne sont pas dans D_{m-1} sont ceux de la forme $k/2^m$ avec k impair.

Soit donc k impair et considérons $s = k/2^m$. Par hypothèse de récurrence nous avons déjà

$$\bar{U}_{(k-1)/2^m} \subset U_{(k+1)/2^m}. \tag{23.344}$$

Le lemme 9.101 nous permet de considérer un ouvert U tel que

$$\bar{U}_{(k-1)/2^m} \subset U \subset \bar{U} \subset U_{(k+1)/2^m}. \tag{23.345}$$

Nous posons $U_{k/2^m} = U$ et nous prouvons que $\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$ dès que $s_1 < s_2$ dans D_m.

Soient $s_1 = k/2^m$ et $s_2 = l/2^m$ avec $k < l$. Il y a quatre possibilités suivant la parité de k et l.

(4a) **Si k et l sont pairs** Alors s_1 et s_2 sont dans D_{m-1} et l'hypothèse de récurrence dit $\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2}$.

(4b) **Si k est impair et l est pair** Nous notons $k = 2k' + 1$ et $l = 2l'$. Vu que $k < l$, nous avons $k' + \frac{1}{2} < l'$. Mais comme k' et l' sont entiers, nous avons $k' + 1 \leqslant l'$. Et nous sommes partis pour le calcul :

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{s_1} &= \bar{U}_{k/2^m} && && (23.346a)\\
&\subset U_{(k+1)/2^m} && \text{construction pour } k \text{ pair} && (23.346b)\\
&= U_{(k'+1)/2^{m-1}} && && (23.346c)\\
&\subset U_{l'/2^{m-1}} && \text{hyp. rec. dans } D_{m-1} && (23.346d)\\
&= U_{l/2^m} && && (23.346e)\\
&= U_{s_2}. && && (23.346f)
\end{aligned}$$

(4c) **Si k est pair et l est impair** Laissé aux bons soins de la lectrice. J'ai pas vérifié, mais [248] dit que c'est similaire. Écrivez-moi si vous voyez un problème.

(4d) **Si k et l sont impairs** Laissé aux bons soins de la lectrice. J'ai pas vérifié, mais [248] dit que c'est similaire. Écrivez-moi si vous voyez un problème.

(5) **Résumé** Nous avons posé $D_m = \{k/2^m\}_{k=0,\dots,2^m}$, et $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$. Nous avons prouvé que D est dense dans $[0,1]$, et nous avons construit, pour chaque $s \in D$ un ouvert U_s de X, de telle façon que

$$\bar{U}_{s_1} \subset U_{s_2} \tag{23.347}$$

pour tout $s_1 < s_2$. Bref, le lemme 23.108 est applicable. Nous posons donc

$$\begin{aligned}
f\colon X &\to [0,1]\\
x &\mapsto \begin{cases} \inf(A_x) & \text{si } x \in \bigcup_{s\in D} U_s\\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{23.348}$$

avec $A_x = \{s \in D \text{ tel que } x \in U_s\}$.

(6) **Ce f est ce qu'il nous fait** Si $x \in B$, alors x n'est pas dans U_1 et donc n'est dans aucun des U_s. Donc $f(x) = 1$.

Si $x \in A$, alors nous avons $x \in U_0$ (parce que $A \subset U_0$). En particulier $0 \in A_x$, et donc $f(x) = \inf(A_x) = 0$.

□

23.110.
Les fractions de la forme $a/2^b$ sont nommées **fractions dyadiques** et nous avons déjà vu qu'elles sont denses dans $\mathbb{R}$ dans le corolaire 4.65.

Chapitre 24

Géométrie hyperbolique

24.1 Inversion

LEMooNLYKooKBMdDk

Lemme-Définition 24.1.
Soit un cercle C et un point A du plan $\mathbb{R}^2$. Soit une droite passant par A et coupant C en deux points P et P' (pas spécialement distincts). Alors le nombre

$$\|AP\|\|AP'\| \tag{24.1}$$

*ne dépend pas du choix de la droite et est nommé la **puissance** du point A par rapport au cercle C.*

24.1.1 Cercles perpendiculaires

Définition 24.2.
*Deux cercles sont **perpendiculaires** lorsque leurs tangentes aux points d'intersection sont perpendiculaires.*

LEMooWMGOooAieUjD

Lemme 24.3 ([1]).
Soient deux cercles perpendiculaires C_1 et C_2. Alors

ITEMooJVYYooSrlSdA

(1) le centre de C_1 est hors de C_2.

ITEMooTQATooNWvllF

(2) Si ℓ est une droite passant par ce le centre de C_1 (nommé O) et si ℓ coupe C_2 en les deux points P et P', alors P et P' sont situés du même côté de O.

Démonstration. Nous nommons O_1 le centre de C_1 ainsi que Q et Q' les points d'intersection de C_1 avec C_2. Si ℓ_Q et $\ell_{Q'}$ sont les tangentes à C_1 en Q et Q', alors ce sont des rayons de C_2 (parce que les cercles sont perpendiculaires). Par conséquent le centre O_2 de C_2 est le point d'intersection $O_2 = \ell_Q \cap \ell_{Q'}$.

Le triangle O_1O_2Q est rectangle en Q et donc $\|O_1O_2\| > \|QO_2\|$. Or le nombre $\|QO_2\|$ est le rayon de C_2, donc O_1 est en dehors de C_2.

Ceci achève de prouver le point (1) ; nous démontrons le point (2). Les points Q et Q' sont sur le cercle C_2, donc tous les points du segment $[QQ']$ sont dans le cercle. Or le centre de C_1 doit être en dehors de C_2 ; il ne peut donc pas être dans le segment $[QQ']$, ce qui prouve que Q et Q' ne sont pas de part et d'autre de O sur la droite (OQQ'). □

PROPooYSVYooOFKxib

Proposition 24.4 ([1]).
Soit un cercle C_1 de centre O et de rayon R.

ITEMooWYIJooAAmXUl

(1) Un cercle C_2 est perpendiculaire à C_1 si et seulement si il existe une droite ℓ passant par O telle que les points d'intersection $\{P, P'\} = \ell \cap C_2$ soient situés du même côté de O et vérifient

$$\|OP\|\|OP'\| = R^2. \tag{24.2}$$

ITEMooYKZOooYZKyhF

(2) Dans ce cas, toutes les droites passant par O et coupant C_2 en deux points P, P' vérifient le fait que P et P' soient du même côté de O et $\|OP\|\|OP'\| = R^2$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le point (2). Le fait que les points P et P' soient du même côté de O est le lemme 24.3(2). Pour la relation sur les distances, soit $Q \in C_1 \cap C_2$. Vu que C_1 et C_2 sont perpendiculaires, la droite (OQ) ne coupe C_2 qu'en ce point, et la puissance de O par rapport au cercle C_2 est $\|OQ\|^2 = R^2$.

La même puissance peut être calculée via la droite ℓ :

$$\|OP\|\|OP'\|. \tag{24.3}$$

Donc $\|OP\|\|OP'\| = R^2$.

Soit un cercle C_2 passant par P et P'. Notons que P et P' ne sont pas sur C_1 parce qu'ils ne pourraient pas être alignés avec O. De plus l'un est à l'intérieur de C_1 et l'autre à l'extérieur de C_1. Les cercles C_1 et C_2 possèdent donc deux points distincts d'intersections. La puissance de O par rapport à C_2 est :

$$\|OP\|\|OP'\| = R^2 \tag{24.4}$$

parce que (OP) est une droite coupant C_2 en les points P et P'.

Soit Q un point d'intersection de C_1 et C_2, et Q' l'autre point d'intersection de C_2 avec la droite (OQ). La puissance de O par rapport à C_2 peut également être calculée à partir de cette droite (lemme 24.1) et nous avons

$$\|OQ\|\|OQ'\| = R^2, \tag{24.5}$$

mais $Q \in C_1$, donc $\|OQ\| = R$ et partant $\|OQ'\| = R$. Nous en déduisons que $Q' \in C_1$ également. Or Q' ne peut pas être l'autre point d'intersection de C_1 avec C_2 (sinon O, Q, Q' ne seraient pas alignés). Donc $Q = Q'$ et nous déduisons que la droite (OQ) est tangente à C_2.

Le rayon de C_1 est tangent à C_2. Cela signifie que C_1 est perpendiculaire à C_2. □

24.1.2 Inversion

PROPDEFooVLIWooQgpLQa

Proposition-Définition 24.5 ([629]).
Soit un cercle C de centre O dans $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique application

$$i_C \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \tag{24.6}$$

telle que

(1) $i_C(x) = x$ *pour tout* $x \in C$

ITEMooXLZCooEGAxHu

(2) i_C *échange l'intérieur et l'extérieur de* C.

ITEMooCPPUooDJIzSk

(3) i_C *laisse invariants les droites et les cercles orthogonales à* C.

*Cette application est l'**inversion** de cercle C.*

Démonstration. Soit P à l'intérieur de C, mais différent de O. Nous notons ℓ la droite (OP) et nous considérons un cercle C_2 passant par P et perpendiculaire à C (existence par la proposition 24.4). Nous avons $\ell \perp C$ (parce que ℓ est un rayon) et $C_2 \perp C$. Donc $i_C(\ell) = \ell$ et $i_C(C_2) = C_2$ par l'exigence (3). Mais comme $P \in \ell \cap C_2$ nous avons aussi

$$i_C(P) \in \ell \cap C_2. \tag{24.7}$$

Mais ℓ et C_2 se coupent en exactement deux points. Vu que $i_C(P)$ doit être hors de C (exigence (2)), avoir $i_C(P) = P$ est impossible. Nous en concluons que $i_C(P)$ doit être l'autre intersection.

Nous avons prouvé que les conditions (2) et (3) fixent l'image d'un point situé dans l'intérieur de C.

Si P est extérieur au cercle C, la même procédure fonctionne : nous considérons la droite $\ell = (OP)$ et un cercle C_2 perpendiculaire à C et passant par P. Encore une fois, ces deux objets sont fixés par i_C, et vu que $i_C(P)$ doit être à l'intérieur de C, il est fixé.

L'unicité est montrée.

En ce qui concerne l'existence, si $P \neq O$, la procédure suivante donne P' :

- Soit la droite $\ell = (OP)$.
- Soit un cercle C_2 perpendiculaire à C et passant par P.
- Le point P' est le point de l'intersection $C_2 \cap \ell$ qui n'est pas P.

Il est aisé de vérifier que poser $i_C(P) = P'$ donne une application qui vérifie toutes les propriétés. □

NORMooUBFQooCzXRJj

24.6.
Nous recopions la construction de l'inversion d'un point par rapport à un cercle. Si C_1 est un cercle de centre O et P est un point différent de O, alors la procédure suivante construit $P' = i_{C_1}(P)$:

- Soit la droite $\ell = (OP)$.

- Soit un cercle C_2 perpendiculaire à C_1 et passant par P.
- Le point P' est le point de l'intersection $C_2 \cap \ell$ qui n'est pas P.

Que se passe-t-il si ℓ et C_2 n'ont qu'une seule intersection ? Alors la droite $\ell = (OP)$ est tangente à C_2. Or de O il n'existent que deux droites tangentes à C_2, et ce sont les rayons passant par les intersections parce que les cercles sont perpendiculaires. En d'autres mots, cette situation se présente lorsque P est sur le cercle C_1. Dans ce cas, $i_{C_1}(P) = P$.

Remarque 24.7.
Lorsque nous disons qu'une inversion « conserve les droites passant par O », il y a pour sous-entendu que nous considérons la droite privée du point O, parce que de toutes façons, l'inversion n'est pas définie sur O.

Nous allons résoudre cet intéressant problème en 25.6.1, en ajoutant le point ∞ à toutes les droites.

Corolaire 24.8.
L'inversion i_C est une involution ($i_C^2 = \mathrm{Id}$).

Démonstration. Soit un cercle C de centre O et un point P. Si C_2 est un cercle perpendiculaire à C passant par P, alors nous avons vu en 24.6 que $P' = i_C(P)$ est l'autre intersection entre C_2 et la droite (OP).

Pour construire l'image de P', il faut un cercle perpendiculaire à C passant par P'. Le cercle C_2 déjà utilisé fait l'affaire. Ensuite, la droite (OP') est la même que la droite (OP). Donc l'image de P' est P. □

Soit C_1 le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon 1. Nous notons $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la dilatation de rapport R.

PROPooYHQVooVFamhr

Proposition 24.9 ([1]).
Soit C le cercle de rayon R centré en 0 ($C = \alpha(C_1)$). Alors

$$i_{\alpha(C_1)} \circ \alpha = \alpha \circ i_{C_1}. \tag{24.8}$$

Démonstration. Soit $z = re^{i\theta}$; nous devons prouver que

$$i_C\big(\alpha(z)\big) = \alpha\big(i_{C_1}(z)\big). \tag{24.9}$$

Nous avons :

$$i_C\big(\alpha(z)\big) = i_C(Rre^{i\theta}) = R^2\frac{1}{Rr}e^{i\theta} = R\frac{1}{r}e^{i\theta} = \alpha\big(\frac{1}{r}e^{i\theta}\big) = \alpha\big(i_{C_1}(z)\big). \tag{24.10}$$

□

La définition 25.70 pour l'inversion sur $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sera basée sur la proposition suivante.

PROPooEWXNooNshvHq

Proposition 24.10 ([1]).
Soit le cercle de rayon R et de centre $a \in \mathbb{C}$. Alors

$$i_C(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a. \tag{24.11}$$

EQooEQEFooHtJuie

De plus si t_a est la translation de vecteur a, nous avons la décomposition

$$i_{t_a(C_R)} = t_a \circ i_{C_R} \circ t_{-a} \tag{24.12}$$

où C_R est le cercle de rayon R centré en 0.

Démonstration. Si $z \in \mathbb{C}$ et z' est son image par i_C, alors non seulement

$$\|a - z'\|\|a - z\| = R^2, \tag{24.13}$$

mais en plus $a - z' = \lambda(a - z)$ pour un certain $\lambda > 0$. Cela est l'expression du fait que z' est sur la demi-droite qui joint a à z. Nous avons donc

$$\lambda\|a - z\|^2 = R^2 \tag{24.14}$$

et alors

$$\lambda = \frac{R^2}{(a - z)(\bar{a} - \bar{z})}. \tag{24.15}$$

En récrivant $a - z' = \alpha(a - z)$ avec cette valeur de λ nous trouvons

$$a - z' = \frac{R^2}{\overline{a - z}}, \tag{24.16}$$

ce qu'il fallait démontrer.

La décomposition demandée est une simple vérification en utilisant $i_{C_R}(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$ qui découle de la proposition 24.9. □

Avant d'aller plus loin, donnons l'équation d'un cercle dans $\mathbb{C}$. Si C est un cercle de centre ω et de rayon r, alors $z \in C$ si et seulement si $d(z,\omega) = r$. En développant, et en passant au carré sans perte d'information (les deux membres sont positifs), $z \in C$ si et seulement si

$$(z-\omega)(\bar{z}-\bar{\omega}) = r^2. \tag{24.17}$$

En développant nous pouvons aussi écrire l'équation du cercle sous la forme

$$z\bar{z} - z\omega - \bar{z}\omega = r^2 - \omega\bar{\omega}. \tag{24.18}$$

EQooWZVRooXciOsA

PROPooMIMRooTbQRVI

Proposition 24.11 ([629]).
Soit un cercle C de centre O. L'inversion

$$i_C \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \tag{24.19}$$

transforme

ITEMooNOXMooQYNPnv

(1) *les droites passant par O en elles-mêmes ;*

(2) *les cercles passant par O en des droites ne passant pas par O ;*

ITEMooRFPSooGdJdHD

(3) *les droites ne passant pas par O en des cercles passant par O ;*

(4) *les cercles ne passant pas par O en des cercles ne passant pas par O.*

Démonstration. Point par point.

(1) Une droite passant par O est une droite perpendiculaire à C. Par le point (3) de la définition 24.5, elle est invariante.

(2) Nous construisons successivement :

- Un cercle C_1 de centre O_1 et passant par O. Le but est de déterminer l'image de ce cercle.
- Le point P de C_1 tel que $[OP]$ en soit un diamètre.
- Le point $P' = i_C(P)$.
- La droite ℓ perpendiculaire à (OP) et passant par P'.

Nous montrons maintenant que $i_C(C_1 \setminus \{O\}) = \ell$. Soit $Q \in C_1 \setminus \{P, O\}$. Nous posons

$$Q' = (QO) \cap \ell. \tag{24.20}$$

Vu que $[OP]$ est un diamètre de C_1 et que $Q \in C_1$, le triangle OPQ est rectangle en Q. Et étant donné que Q' est sur ℓ nous savons que $OP'Q'$ est rectangle en P'.

De plus les angles en O de ces deux triangles sont identiques (parce que c'est l'angle formé par les droites (OQ) et (OP)) ; les triangles OPQ et $QP'Q'$ sont donc semblables et nous pouvons utiliser le théorème de Thalès[1] 14.170 :

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}. \tag{24.21}$$

Donc

$$\|OP\|\|OP'\| = \|OQ\|\|OQ'\|, \tag{24.22}$$

mais P' est l'image de P par l'inversion du cercle C, c'est-à-dire $\|OP\|\|OP'\| = R^2$. Nous en déduisons que

$$\|OQ\|\|OQ'\| = R^2, \tag{24.23}$$

c'est-à-dire que Q' est l'image de Q par i_C, et donc que

$$i_C\big(C_1 \setminus \{O\}\big) \subset \ell. \tag{24.24}$$

EQooPJBGooGeIVOO

Pour avoir l'inclusion inverse, il faut remarquer que ℓ est parallèle à la tangente à C_1 en O. Donc si $Q \in \ell$, la droite (OQ) intersecte le cercle C_1 en un point Q'. En refaisant le cheminement du résultat (24.24) à l'envers, il est loisible de prouver que $i_C(Q') = Q$ et donc que ℓ est bien incluse à l'image de C_1 par i_C.

[1] Faites bien le dessin : ce n'est pas une situation de Thalès ultra-standard de collège.

(3) Nous commençons par prouver que toutes les droites ne passant pas par O sont des images de cercles passant par O.

Nous considérons :

- une droite ℓ ne passant pas par O.
- la droite d, perpendiculaire à ℓ passant par O
- le point $P' = \ell \cap d$,
- le point $P = i_C(P')$,
- le cercle C_1 dont $[OP]$ est un diamètre.

Par tout ce que nous avons fait jusqu'à présent, la droite ℓ est l'image du cercle C_1. Or si $\|OP\| = r$ alors

$$\|OP'\| = \frac{R^2}{r}. \tag{24.25}$$

Donc quelle que soit la valeur de $\|OP'\|$ dans $]0, \infty[$, il existera un point P tel que le cercle passant par O et P ait pour image la droite perpendiculaire à (OP) passant par $i_C(P)$.

Étant donné que i_C est une involution surjective des cercles passant par O vers les droites ne passant pas par O, elle transforme également toutes les droites ne passant pas par O en un cercle passant par O.

(4) Pour cette partie, nous allons utiliser un peu de géométrie analytique dans $\mathbb{C}$[2].

(4a) **Le cas centré** Nous supposons que C est centré en 0 et de rayon, 1, ce telle sorte que $i_C(z) = 1/\bar{z}$ (proposition 24.10). Soit C_1 un cercle de centre ω et de rayon r, ne passant pas par 0, en particulier tel que $|\omega| \neq r$.
Si $z \in i_C(C_1)$ alors $i_C(z) \in C_1$ et nous avons

$$\big(i_C(z) - \omega\big)\overline{\big(i_C(z) - \omega\big)} = r^2. \tag{24.26}$$

En développant et en multipliant par $z\bar{z}$ nous trouvons

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} + z\bar{z}(r^2 - \omega\bar{\omega}) = 1. \tag{24.27}$$

EQooCWXSooUziBNr

ou, en posant $s = r^2 - \omega\bar{\omega}$,

$$z\bar{\omega} + \bar{z}\omega + sz\bar{z} = 1. \tag{24.28}$$

En comparant avec l'équation (24.18) d'un cercle, nous voyons qu'il y a de l'espoir de montrer que z est sur un cercle centré en $a = -\omega/s$. En effet, en divisant par s et en substituant a comme il faut, nous trouvons

$$-z\bar{a} - \bar{z}a + a\bar{z} = \frac{1}{s}. \tag{24.29}$$

En ce qui concerne le rayon R, il doit vérifier

$$\frac{1}{s} = R^2 - a\bar{a}, \tag{24.30}$$

ou encore

$$R = \frac{1}{s} + \frac{\omega\bar{\omega}}{s^2}. \tag{24.31}$$

Nous dévons vérifier que $R > 0$. En multipliant par s^2, il s'agit de vérifier que $s + \omega\bar{\omega} \geqslant 0$, ce qui est correct parce que $s + \omega\bar{\omega} = r^2$.
En résumé, si $z \in i(C_1)$ alors z est dans le cercle C_2 de centre $-\frac{\omega}{s}$ et de rayon R. Nous voysons que ce cercle ne passe pas par 0 par exemple directement sur l'équation (24.27) qui, pour $z = 0$ donne $0 = 1$.
Nous avons prouvé que $i(C_1) \subset C_2$. Pour prouver l'inclusion inverse, vu que i est une involution, il faut prouver $i(C_2) \subset C_1$. Pour cela nous écrivons l'équation qui donne $i(z) \in C_2$ et en développant nous devons conclure que $z \in C_1$. Nous ne le faisons pas ici.

(4b) **Le cas de rayon non unité**
Si C est un cercle quelconque, nous écrivons l'inversion du cercle C via la formule (24.11). Si $z \in i_C(C_1)$ alors $i(z) \in C_1$ et nous pouvons écrire

$$\big(i(z) - a\big)\overline{\big(i(z)} - \bar{a}\big) = R^2. \tag{24.32}$$

De là il faut déduire que z est sur un cercle ne passant pas par 0. Bons calculs…

□

[2] Principalement parce que je ne comprends pas le raisonnement fait dans [629].

Chapitre 25

Espaces projectifs

Sur les espaces projectifs : [697].

Définition 25.1.
*Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps commutatif $\mathbb{K}$. Nous définissons sur $E \setminus \{0\}$ la relation d'équivalence $u \sim v$ si et seulement si $u = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Cette relation est la relation de **colinéarité**. L'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$ est l'**espace projectif** de E et sera noté $P(E)$.*

DEFooTPPMooTDxNpg

Définition 25.2.
*Si $\dim E = 2$, l'ensemble $P(E)$ est la **droite projective**, et si $\dim E = 3$ nous parlons du **plan projectif**.*

Étant donné que tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions $n+1$ sont isomorphes à $\mathbb{K}^{n+1}$, nous noterons $P_n(\mathbb{K})$ ou P_n l'espace projectif $P(\mathbb{K}^{n+1})$.

PgNotimesjNtMoW

Exemple 25.3.
Si $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'espace projectif est l'ensemble des droites vectorielles dans le plan usuel. Il y en a une pour chaque point du type $(x, 1)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et ensuite une horizontale, passant par le point $(1, 0)$. Nous avons donc

$$P_1(\mathbb{R}) = \{(1, 0)\} \cup \{(x, 1) \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\}. \tag{25.1}$$

Le point $(1, 0)$ est dit « point à l'infini ». △

25.1 Sous-espaces projectifs

Un **sous-espace projectif** de $P(E)$ est une partie de la forme $P(F)$ où F est un sous-espace vectoriel de E.

PropuqpWVx

Proposition 25.4.
Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors

$$P(F) \cap P(G) = P(F \cap G) \tag{25.2}$$

et nous avons

$$\dim P(F) + \dim P(G) = \dim P(F + G) + \dim P(F \cap G). \tag{25.3}$$

EqNAdWfN

Démonstration. Nous avons

$$P(F) = \{[v] \text{ tel que } v \in F\} \tag{25.4}$$

où les crochets signifient la classe par rapport à la relation de colinéarité. Nous avons alors

$$P(F) \cap P(G) = \{[v] \text{ tel que } v \in F \cap G\} = P(F \cap G). \tag{25.5}$$

Cela prouve le premier point.

En ce qui concerne l'équation (25.3), en considérant $\dim P(E) = \dim E - 1$ nous devons prouver l'égalité

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G) \tag{25.6}$$

concernant les dimensions des espaces vectoriels usuelles. Si nous considérons une base de E telle que $B_1 = \{e_1, \ldots, e_{k_1}\}$ est une base de $F \cap G$, $B_2 = \{e_{k_1+1}, \ldots, e_{k_2}\}$ complète B_1 en une base de F et $B_3 = \{e_{k_2+1}, \ldots, e_n\}$ complète $B_1 \cup B_2$ en une base de G.

Nous avons alors

$$\dim F + \dim G = 2\operatorname{Card}(B_1) + \operatorname{Card}(B_2) + \operatorname{Card}(b_3) \tag{25.7a}$$
$$\dim(F+G) = \operatorname{Card}(B_1) + \operatorname{Card}(b_2) + \operatorname{Card}(B_3) \tag{25.7b}$$
$$\dim(F\cap G) = \operatorname{Card}(B_1). \tag{25.7c}$$

De là la relation (25.3) se déduit immédiatement. □

Théorème 25.5 (incidence)**.**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que

$$\dim P(F) + \dim P(G) \geqslant \dim P(E). \tag{25.8}$$

Alors $P(F)\cap P(G)\neq\varnothing$.

Démonstration. En utilisant les hypothèses et la proposition 25.4 nous avons

$$\dim P(E) + \dim P(G) = \dim P(F+G) + \dim P(F\cap G) \geqslant \dim P(E). \tag{25.9}$$

En passant aux espaces vectoriels correspondants,

$$\dim(F+G) + \dim(F\cap G) \geqslant \dim(E) + 1. \tag{25.10}$$

Mais nous avons aussi $\dim(F+G)\leqslant\dim(E)$ et par conséquent $\dim(F\cap G)\geqslant 1$. Au final, $\dim P(F\cap G)\geqslant 0$. Cela prouve que $P(F\cap G)$ contient au moins un élément (nous rappelons que lorsqu'un espace projectif contient un seul élément, sa dimension est zéro). □

Exemple 25.6.
Soient les plans $\Pi_1\equiv x=0$ et $\Pi_2\equiv y=0$. Nous avons

$$P(\Pi_1) = \{[0,y,1]\}\cup\{[0,1,0]\} \tag{25.11a}$$
$$P(\Pi_2) = \{[x,0,1]\}\cup\{[1,0,0]\} \tag{25.11b}$$

où le crochet signifie la classe pour la colinéarité. Ces deux droites projectives ont comme point d'intersection le point $[0,0,1]$. △

Définition 25.7.
*Un **hyperplan projectif** est un sous-espace projectif de $P(E)$ de la forme $P(V)$ où V est un hyperplan de E.*

DEFooBBMBooSVgTnn

Définition 25.8.
*Soit E un espace vectoriel de dimension au moins 3. Nous disons que $d\subset P(E)$ est une **droite projective** de $P(E)$ si $d=P(D)$ pour un plan vectoriel $D\subset E$.*

*Nous disons que trois points de $P(E)$ sont **alignés** lorsqu'il existe une droite projective les contenant.*

25.9.
Dans la définition 25.8 nous voyons $P(D)$ comme inclus dans $P(E)$ dès que D est un sous-espace vectoriel de E. Cela est possible parce que si la direction de $v\in D$, c'est-à-dire la classe $[v]$ est également une direction dans E.

Le lemme suivant peut paraitre idiot, mais ce qui serait surement idiot est de l'utiliser sans s'en rendre compte.

Lemme 25.10.
Deux points dans $P(E)$ sont toujours alignés.

Démonstration. Soient deux points $A,B\in P(E)$. Si $A=\pi(a)$ et $B=\pi(b)$ alors le plan D passant par a, b et 0 est vectoriel et $P(D)$ contient A et B.

Note : si a, b et 0 sont trois points alignés, alors $A=B$. Il suffit de prendre les points a, c et 0 où $c\in E$ est un point quelconque non aligné avec 0 et a. Nous avons de toutes façons $A=B=\pi(a)$. □

Lemme 25.11.
Trois points distincts A, B, C dans $P(E)$ sont alignés si et seulement si il existe trois points non alignés $a,b,c\in E$ tels que

(1) le plan passant par a, b et c est vectoriel (c'est-à-dire passe par 0),

(2) $A = \pi(a)$, $B = \pi(b)$, et $C = \pi(c)$.

Démonstration. Deux implications à montrer.

(1) **Sens direct** Soient A, B, C distincts et alignés dans $P(E)$. Alors il existe un plan vectoriel D tel que $A, B, C \in P(D)$.

La condition $A \in P(D)$ implique qu'il existe $a \in D$ tel que $A = \pi(A)$. Idem pour B et C. Les points a, b et c ainsi construits sont distincts parce que A, B et C sont distincts. Si par malheur ces trois points étaient alignés, ce n'est pas grave : il suffit de remplacer a par λa avec $\lambda \neq 0$ pour qu'ils ne le soient plus (cette manipulation ne change pas le fait que le nouveau choix de point a reste dans D parce que D est vectoriel). Nous avons donc trois points non alignés a, b et c tous contenus dans D. Le plan D répond à la question.

(2) **Sens réciproque**

Soient a, b et c non alignés dans E tels que $A = \pi(a)$, $B = \pi(b)$ et $C = \pi(c)$. Le plan D les contenant tous trois est vectoriel par hypothèse. Nous avons $A, B, C \in P(D)$ et donc A, B et C sont alignés dans $P(E)$.

□

Proposition 25.12.
Soit $H = P(V)$ un hyperplan projectif de $P(E)$ et soit m hors de H. Alors toute droite projective passant par m coupe H en un et un seul point.

Démonstration. Si $\dim E = n$ nous avons $\dim V = n - 1$. Soit $d = P(D)$ une droite projective passant par m, c'est-à-dire que D est de dimension 2 dans E. Si $D \subset V$ alors $m \in P(D) \subset P(V)$; or nous avons demandé que m soit hors de $P(V)$. Par conséquent D n'est pas inclus dans V et en particulier $\dim(D+V) = \dim(E)$.

Nous recopions la formule (25.3) pour notre cas :

$$\underbrace{\dim d}_{=1} + \underbrace{\dim H}_{=n-2} = \underbrace{\dim P(D+V)}_{=n-1} + \dim P(D \cap V). \tag{25.12}$$

Nous avons donc $\dim P(D \cap V) = 0$, ce qui signifie que l'ensemble $P(D \cap V) = P(D) \cap P(V) = d \cap H$ contient un et un seul point. □

25.2 Espace projectifs comme « complétés » d'espaces affines

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $P(E)$ la droite projective correspondante, et soit $\{e_1, e_2\}$ une base de E. Nous considérons la droite affine $d \equiv y = 1$. Nous avons la bijection

$$\begin{aligned} \phi\colon d \cup \{\infty\} &\to P(E) \\ (x,1) &\mapsto \text{la droite vectorielle passant par } (x,1) \\ \infty &\mapsto \text{la droite vectorielle passant par } (1,0). \end{aligned} \tag{25.13}$$

EqyrfDLg

Lemme 25.13.
Si nous munissons l'ensemble $d \cup \{\infty\}$ de la topologie compactifiée d'Alexandrov[1]*, la bijection (25.13) est un homéomorphisme.*

Soient maintenant les plans affines dans l'espace vectoriel E de dimension 3

$$\Pi_1 \equiv z = 0 \tag{25.14a}$$
$$\Pi_2 \equiv z = 1. \tag{25.14b}$$

Une droite (vectorielle) de E coupe Π_2 en un et un seul point, sauf si elle est contenue dans Π_1. Nous avons donc une bijection

$$\begin{aligned} \phi\colon P(E) &\to \Pi_2 \cup P(\Pi_1) \\ d &\mapsto \begin{cases} \Pi_2 \cap d & \text{si cette intersection est non vide} \\ d & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{25.15}$$

[1] Définition 9.204.

La droite projective $P(\Pi_1)$ est la droite à l'infini du plan projectif $P(E)$. Nous voyons que le plan projectif $P(E)$ peut être vu comme un plan affine (Π_2) « complété » par une droite affine $P(\Pi_1)$. Cette dernière droite est elle-même une droite affine complétée par un point à l'infini.

Nous pouvons généraliser cette démarche en considérant un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E sur le corps $\mathbb{K}$. Nous construisons $F = E \times \mathbb{K}$ et nous considérons un repère affine sur F tel que $E \equiv x_{n+1} = 0$. Nous pouvons donc identifier $\mathcal{E}$ à l'hyperplan affine d'équation $x_{n+1} = 1$ dans F.

Une droite vectorielle de F non contenue dans E coupe $\mathcal{E}$ en un unique point ; nous avons donc une bijection

$$\mathcal{E} \cup P(E) \to P(F). \tag{25.16}$$

Dans ce cadre, $P(E)$ est l'hyperplan à l'infini et nous disons que $P(E)$ est la **complétion projective** de $\mathcal{E}$.

Exemple 25.14.
Nous considérons les plans affines

$$\Pi_1 \equiv z = 0 \tag{25.17a}$$
$$\Pi_2 \equiv z = 1 \tag{25.17b}$$

et nous avons la bijection

$$P(E) = \Pi_2 \cup P(\Pi_1). \tag{25.18}$$

Un plan vectoriel D a deux possibilités : soit il coupe Π_2 en une droite, soit il est égal à Π_1. Si $D \cap \Pi_2 = d$ (d est une droite affine), alors nous avons

$$P(D) = d \cup \{\infty_D\}, \tag{25.19}$$

ce qui justifie la terminologie comme quoi $P(D)$ est une droite dans $P(E)$. △

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et le plan projectif $P(E)$. Nous avons deux types de droites projectives :

(1) D'abord nous avons la droite à l'infini, donnée[2] par $P(z = 0)$.

(2) Ensuite nous avons toutes les droites affines du plan $z = 1$. Chacune de ces droites est complétée par un point à l'infini.

ExempMyTmFp

Exemple 25.15.
Étudions un peu le second type de droites. D'abord si deux droites sont parallèles, leurs points à l'infini sont identiques. Prenons par exemple les droites $d = \{z = 1, x = 1\}$ et $d' = \{z = 1, x = 2\}$. Elles décrivent les directions des vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{25.20}$$

En normalisant, ce sont les vecteurs

$$\frac{1}{\sqrt{2+y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{5+y^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{25.21}$$

et toutes deux tendent vers le vecteur $(0, 1, 0)$ pour $y \to \infty$. △

Lemme 25.16.
Deux droites d'un plan projectif ont toujours une intersection.

Démonstration. Si les deux droites sont des droites affines non parallèles, le résultat est évident. Si elles sont parallèles, alors l'intersection est donnée par le point à l'infini comme indiqué dans l'exemple 25.15.

Supposons que d est la droite à l'infini tandis que d' est une droite affine. Dans notre représentation usuelle du plan affine, la droite à l'infini d a contient les vecteurs $(1, y, 0)$ et le point à l'infini $(0, 1, 0)$. La droite affine d' a pour équation paramétriques

$$\begin{cases} x = at + c & (25.22a) \\ y = bt + d & (25.22b) \\ z = 1. & (25.22c) \end{cases}$$

[2] Dans notre représentation usuelle du plan projectif $z = 1$.

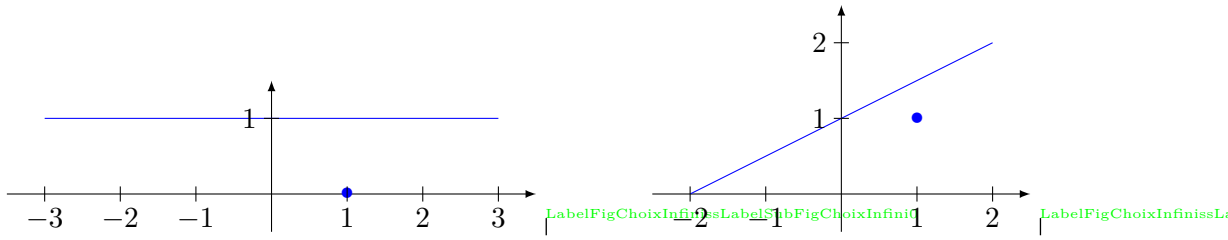
Les directions données par la droite d' sont donc

$$\frac{1}{a^2t^2+b^2t^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix}at+c\\bt+d\\1\end{pmatrix} \tag{25.23}$$

Son point à l'infini est la direction du vecteur $(a,b,0)$, qui est bien un point de la droite à l'infini (éventuellement son point à l'infini[3]). □

La plupart du temps nous considérons le plan projectif comme étant le plan affine $z=1$ de l'espace affine de dimension 3 complété par la droite affine $x=1, z=0$, elle-même complétée par le point $(0,1,0)$. Ce n'est évidemment pas la seule manière. Tout plan peut être considéré comme le plan à l'infini et pour une droite projective, tout point peut être considéré comme point à l'infini.

Sur la figure 25.1(a), le point à l'infini est la direction $(1,0)$ tandis que la direction $(1,1)$ n'a rien de spécial. À l'inverse sur la figure 25.1(b), la direction à l'infini est $(1,1)$ tandis que la direction $(1,0)$ est une direction usuelle.



(a) Ici le point à l'infini est la direction $(1,0)$.

(b) Ici le point à l'infini est la direction $(1,1)$.

FIGURE 25.1 : Deux façons de voir la droite projective. Étant donné que les points de la droite projective doivent être interprétés comme des directions (des classes d'équivalence), en réalité les deux dessins représentent les mêmes ensembles. LabelFigChoixInfini

Remarque 25.17.
Du point de vue de la topologie, si nous mettons celle de la compactification d'Alexandrov, tous les points de la droite projective sont équivalents.

Du point de vue de la géométrie différentielle, c'est la même chose. En effet nous pouvons mettre sur la droite projective un système de deux cartes en pensant aux angles. La première sur $]-a,a[$ avec par exemple $a<\pi/4$. La seconde carte serait $]a/2,\pi[$. Dans ce cas la direction $\theta=0$ semble jouer un rôle spécial, mais il n'en est rien.

Nous pouvons également considérer les cartes $]\pi/4-a,\pi/4+a[$ et $]\pi/4+a/2,5\pi/4[$. Dans ces cartes, c'est plutôt le point $\theta=\pi/4$ qui semble différent (encore qu'il soit bien centré dans une carte).

25.3 Théorème de Pappus

Théorème 25.18.
Soient deux droites d et d' dans un plan affine. Soient $A,B,C\in d$ et $A',B',C'\in d'$ tels que $AB'\parallel BA'$ et $BC'\parallel B'C$. Alors $AC'\parallel A'C$.

Démonstration. Si d et d' ne sont pas parallèles nous considérons o, le point d'intersection. Les relations de parallélisme des hypothèses impliquent qu'il existe λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{cases} A=\lambda_1 B & \text{(25.24a)}\\ B'=\lambda_1 A' & \text{(25.24b)}\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B'=\lambda_2 C' & \text{(25.25a)}\\ C=\lambda_2 B. & \text{(25.25b)}\end{cases}$$

En substituant nous trouvons

$$\begin{cases} C=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}A & \text{(25.26a)}\\ A'=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}C', & \text{(25.26b)}\end{cases}$$

[3]D'accord, aller chercher le point à l'infini de la droite à l'infini, c'est chercher loin, mais n'empêche que ça existe.

ce qui implique que $A'C \mathbin{/\!/} AC'$.

Si les droites d et d' sont parallèles, alors nous avons les translations

$$\begin{cases} B = A + x & (25.27a) \\ A' = B' + x & (25.27b) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B = C + y & (25.28a) \\ C' = B' + y, & (25.28b) \end{cases}$$

ce qui montre que

$$\begin{cases} C = A + x - y & (25.29a) \\ A' = C' + x - y, & (25.29b) \end{cases}$$

et donc que $A'C \mathbin{/\!/} AC'$. □

Le théorème suivant est une version projective.

Théorème 25.19.
Soient d et d' deux droites projectives d'un plan projectif. Soient $A, B, C \in d$ et $A', B', C' \in d'$. Alors les points $B'C \cap C'B$, $C'A \cap A'C$ et $A'B \cap B'A$ sont alignés.

Démonstration. Soient $E = B'C \cap C'B$ et $E' = C'A \cap A'C$. Ces deux points existent parce que deux droites projectives distinctes ont toujours un unique point d'intersection. Nous allons prendre EE' comme droite à l'infini et prouver que le point $A'B \cap B'A$ est dessus. Étant donné que le point d'intersection de $B'C$ et $C'B$ est à l'infini nous avons $B'C \mathbin{/\!/} C'B$ (cela est un exemple de la flexibilité de la notion de parallélisme en géométrie projective). De la même façon nous avons $C'A \mathbin{/\!/} A'C$.

Par le théorème de Pappus affine nous avons alors $A'B \mathbin{/\!/} B'A$ et par conséquent le point d'intersection est sur la droite à l'infini, c'est-à-dire sur la droite EE'. □

25.4 Homographies

25.4.1 Homographies

DEFooKWSMooXvOeEP

Définition 25.20.
Soient E et F deux espaces vectoriels avec leurs projections naturelles

$$\pi_E \colon E \setminus \{0\} \to P(E) \quad (25.30a)$$
$$\pi_F \colon F \setminus \{0\} \to P(F). \quad (25.30b)$$

*Une application $g \colon P(E) \to P(F)$ est une **homographie** si il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\bar{g} \colon E \to F$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{\bar{g}} & F \setminus \{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ P(E) & \xrightarrow[g]{} & P(F) \end{array} \quad (25.31)$$

commute, c'est-à-dire si il existe $\bar{g} \colon E \to F$ telle que

$$\pi_F\big(\bar{g}(v)\big) = g\big(\pi_E(v)\big) \quad (25.32)$$

EQooSEFWooRpiLxt

pour tout $v \in E$.

Lemme 25.21.
Si $\bar{g} \colon E \to F$ est linéaire et si $\ker \bar{g} = \{0\}$ alors l'application g définie par

$$g\big(\pi_E(v)\big) = \pi_F\big(\bar{g}(v)\big) \quad (25.33)$$

EqRIGLLW

est une homographie.

Démonstration. Nous devons simplement vérifier que l'équation (25.33) définit bien une application. Soient $v, w \in E$ tels que $\pi_E v = \pi_E w$; nous devons montrer que

$$\pi_F \bar{g} v = \pi_F \bar{g} w. \tag{25.34}$$

L'équation (25.34) sera vérifiée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{g}v = \lambda \bar{g} w$, c'est-à-dire si et seulement si $\bar{g}(v - \lambda w) = 0$. Étant donné que nous supposons que le noyau de $\bar{g}$ est réduit à $\{0\}$, l'équation (25.34) sera vérifiée si et seulement si $v = \lambda w$, ce qui signifie exactement $\pi_E(v) = \pi_E(w)$. □

La proposition suivante donne les premières propriétés des homographies.

Proposition 25.22.
Quelques propriétés des homographies.

(1) *Une homographie est bijective.*

(2) *Si deux espaces projectifs sont homographes, alors ils ont même dimension.*

(3) *L'ensemble des homographies $P(E) \to P(E)$ est un groupe (pour la composition).*

(4) *Une homographie conserve l'alignement des points.*

Démonstration. Nous considérons une homographie $g\colon P(E) \to P(F)$, et $\bar{g}$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels correspondant.

(1) Pour l'injectivité, si $g\big([v]\big) = g\big([w]\big)$ alors en utilisant la définition d'une homographie, $\pi_F \bar{g} v = \pi_F \bar{g} w$, ce qui implique que $\bar{g}v = \lambda \bar{g} w$, et donc $v = \lambda w$, ce qui signifie $[v] = [w]$.

Pour la surjectivité, un élément général de $P(F)$ prend la forme $\pi_F \bar{g} v$ pour un certain $v \in E$. Nous avons $g\big(\pi_E v\big) = \pi_F \bar{g} v$. Par conséquent l'élément $\pi_F \bar{g} v$ est bien dans l'image de g.

(2) Une homographie $P(E) \to P(F)$ n'existe que si il existe un isomorphisme $E \to F$. Les dimensions sont donc automatiquement égales.

(3) Il suffit de vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon P(E) &\to P(E) \\ \pi_F \bar{g} v &\mapsto \pi_E v \end{aligned} \tag{25.35}$$

est bien définie et donne l'inverse de g.

(4) Soient les points A, B, C alignés dans $P(E)$; ils correspondent à des directions de E qui sont données par des vecteurs situés sur la même droite affine. Autrement dit, il existe trois points $a, b, c \in E$ situés sur la même droite affine tels que $A, B, C = \pi_E(a, b, c)$. Les images par g sont données par $\pi_F \bar{g} a$, $\pi_F \bar{g} b$, et $\pi_F \bar{g} c$.

Étant donné qu'un isomorphisme d'espaces vectoriels conserve l'alignement affin, les points $\bar{g}a$, $\bar{g}b$ et $\bar{g}c$ sont alignés dans F. Cela implique que les projections par π_F sont alignés dans $P(F)$.

□

25.4.2 Le groupe projectif

Définition 25.23.
Le groupe des homographies de l'espace $P(E)$ est le ***groupe projectif****, noté* $\mathrm{PGL}(E)$.

Nous avons une surjection naturelle

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(E) &\to \mathrm{PGL}(E) \\ \bar{g} &\mapsto g \end{aligned} \tag{25.36}$$

qui s'avère être un morphisme de groupes.

Proposition 25.24.
Nous avons l'isomorphisme de groupes

$$\frac{\mathrm{GL}(E)}{\{\textit{homothéties}\}} \simeq \mathrm{PGL}(E). \tag{25.37}$$

Démonstration. Nous devons prouver que le noyau de l'application (25.36) est constitué des homothéties. Considérons un automorphisme d'espace vectoriel $f: E \to E$ dont l'homographie associée est l'identité, et prouvons que f est une homothétie. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \xrightarrow{f} & E\setminus\{0\} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} \\ P(E) & \xrightarrow[\mathrm{Id}]{} & P(E). \end{array} \tag{25.38}$$

Pour tout vecteur $v \in E$ nous avons $\pi_E(v) = \pi_E\big(f(v)\big)$. Cela implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \lambda v$. Tous les vecteurs de E sont donc des vecteurs propres de f. Cela n'est possible que si toutes les valeurs propres sont identiques, c'est-à-dire que f est une homothétie. □

25.4.3 Repères projectifs

Définition 25.25 ([698]).
*Des éléments $\{P_i\}_{i\in I}$ sont **projectivement independents** si en choisissant $v_i \in \pi^{-1}(P_i)$ nous obtenons des vecteurs $\{v_i\}_{i\in I}$ linéairement indépendants.*

DEFooPZKFooDBXtEn

Définition 25.26.
*Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Un **repère projectif** de $P(E)$ est la donnée de $n+2$ points $m_0, \dots, m_{n+1}$ tels que*

(1) les vecteurs m_i, $i \neq 0$, sont les images d'une base $\{e_i\}$ de E

(2) $m_0 = \pi_E(e_1 + e_2 + \dots + e_{n+1})$.

Note que si $m_k = \pi_E(v_k)$ $(k = 0, \dots, n+1)$, alors tout choix de $n+1$ vecteurs parmi les v_k est une base de E.

Exemple 25.27.
Un repère projectif de l'espace $P(\mathbb{R}^3)$ est par exemple les éléments $\{m_i\}_{i=1,\dots,3}$ donnés par

$$m_1 = \pi(e_1) \tag{25.39a}$$
$$m_2 = \pi(e_2) \tag{25.39b}$$
$$m_3 = \pi(e_3) \tag{25.39c}$$
$$m_0 = \pi(e_1 + e_2 + e_3). \tag{25.39d}$$

△

Exemple 25.28.
Pour $P(\mathbb{C}^2)$, un repère projectif possible est $m_1 = [1, 0]$, $m_2 = [0, 1]$, $m_0 = [1, 1]$. △

25.29.
Pourquoi voulons nous des repères projectifs ? Pourquoi demander un quatrième élément alors que trois devraient suffire ? Le fait est que si E est de dimension 3, nous voudrions pouvoir identifier E et $P(\mathbb{R}^3)$.

Plus précisément, si E est de dimension $n+1$ et possède une base $\{f_i\}_{i=1,\dots,n+1}$, il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels $E \to \mathbb{R}^{n+1}$ qui envoie cette base sur la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. La base de E étant fixée, nous pouvons donner à un point de E les coordonnées de son image dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par cet isomorphisme *qui est unique*.

Dans le cas des espaces projectifs, nous voudrions avoir une unique homographie $\phi: P(E) \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ qui permet de donner à un point $A \in P(E)$ les coordonnées de $\pi^{-1}\big(\phi(A)\big)$. Bien entendu ce dernier n'est pas un élément bien défini de $\mathbb{R}^{n+1}$ parce qu'il y a toute une droite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui se projettent sur $\phi(A)$.

L'idée d'imposer un point de plus est la bonne. Si nous imposons un point de plus, nous pouvons dire que les coordonnées de $A \in P(E)$ sont celles dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de l'élément de $\pi^{-1}\big(\phi(A)\big)$ dont la dernière coordonnée est par exemple 1.

Nous allons maintenant mettre ça en musique.

D'abord nous donnons un exemple de non unicité.

Exemple 25.30.
Soit un espace vectoriel E de dimension 2 et une base $\{b_1, b_2\}$ de E. Nous considérons également l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\{e_1, e_2\}$.

Soit une homographie $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{R}^2)$ telle que

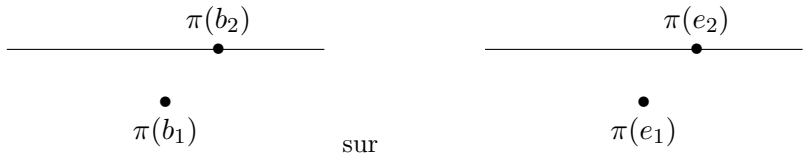
$$\phi\big(\pi(b_i)\big) = \pi(e_i) \tag{25.40}$$

EQooPMARooXGuKDD

pour $i = 1, 2$. Nous allons facilement construire une autre homographie qui vérifie les mêmes conditions.

L'idée est la suivante. L'espace $P(E)$ peut être vu comme la droite complétée $\{(x, 1)\}_{x\in\mathbb{R}} \cup \{(1, 0)\}$ et l'espace $P(\mathbb{R}^2)$ également. Une homographie respectant (25.40) doit envoyer le $(1, 0)$ de E vers le $(1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ et le $(1, 1)$ de E vers le $(1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$. Mais en ce qui concerne le reste de la droite, l'homographie peut la parcourir à la vitesse qu'elle veut.

Il faut envoyer



Soit donc une homographie $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{R}^2)$, et nous définissons

$$\begin{aligned} \phi'\colon P(E) &\to P(\mathbb{R}^2) \\ \pi(xb_1 + yb2) &\mapsto \phi\big(\pi(xb_1 + \lambda y b_2)\big) \end{aligned} \tag{25.41}$$

pour un certain $\lambda \neq 1$. En ce qui concerne le relèvement, l'application $\bar{\phi}'\colon E \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\bar{\phi}'(xb_1 + yb_2) = \bar{\phi}(xb_1 + \lambda y b_2) \tag{25.42}$$

est bien définie et vérifie

$$\pi_{\mathbb{R}^2} \circ \bar{\phi}' = \phi' \circ \pi_E. \tag{25.43}$$

Donc ϕ' est une homographie. De plus

$$\phi'\big(\pi(b_1)\big) = \phi\big(\pi(b_1)\big) \tag{25.44a}$$
$$\phi'\big(\pi(b_2)\big) = \phi\big(\pi(\lambda b_2)\big) = \phi\big(\pi(b_2)\big) \tag{25.44b}$$

parce que $\pi(\lambda b_2) = \pi(b_2)$.

Nous n'avons donc pas l'unicité. △

C'est pour rétablir cette unicité que nous demandons d'avoir un point de plus pour avoir un repère projectif. De cette façon nous aurons une unique homographie $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifiant $\phi\big(\pi_E(b_i)\big) = \pi_{\mathbb{R}^{n+1}}(e_i)$ pour tout $i = 0, \dots, n+1$.

Lemme 25.31.
Soit un espace vectoriel E de dimension $n+1$ muni de deux bases $\{e_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ et $\{f_i\}_{i=1,\dots,n+1}$. Soit un repère projectif $\{m_0, m_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ de $P(E)$.

Si $\pi(e_i) = \pi(f_i) = m_i$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$ et si

$$\pi(e_1 + \dots + e_{n+1}) = \pi(f_1 + \dots + f_{n+1}) \tag{25.45}$$

alors les deux bases sont proportionnelles : il existe λ tel que $f_i = \lambda e_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$.

Démonstration. Nous avons $\pi(e_i) = \pi(f_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$. Donc pour chaque $i = 1, \dots, n+1$ il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $e_i = \lambda f_i$. Nous devons voir que les λ_i sont en réalité tous égaux.

Pour cela nous avons aussi l'égalité pour $i = 0$:

$$\pi(e_1 + \dots + e_{n+1}) = \pi(f_1 + \dots + f_{n+1}), \tag{25.46}$$

ce qui donne un $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $e_1 + \dots + e_{n+1} = \mu(f_1 + \dots + f_{n+1})$, c'est-à-dire

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = \mu f_1 + \dots + \mu f_{n+1}. \tag{25.47}$$

Du fait que les f_i forment une base, cette égalité impose à tous les λ_i d'être égal à μ. □

THOooTXPVooJGigne

Théorème 25.32 ([699]).
Soient $P(E)$ et $P(F)$ deux espaces projectifs de dimensions n.

ITEMooRSIWooXbEnlT

(1) Une homographie $P(E) \to P(F)$ envoie un repère projectif sur un repère projectif.

ITEMooQXQXooDyIsxsh

(2) Si $(m_0, \dots, m_{n+1})$ est un repère projectif de $P(E)$, si $(m'_0, \dots, m'_{n+1})$ est un repère projectif de $P(F)$ alors il existe une unique homographie $g\colon P(E) \to P(F)$ telle que $g(m_i) = m'_i$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n+1$

Démonstration. Un point à la fois.

(1) (1)

Soit une homographie $\phi\colon P(E) \to P(F)$ et un repère projectif $\{m_0, m_1, \dots, m_{n+1}\}$ de $P(E)$. Nous posons $m'_i = \phi(m_i)$ pour tout $i = 0, \dots, n+1$. Nous devons prouver que ces m'_i forment un repère projectif de $P(F)$.

D'abord pour $i = 1, \dots, n+1$ nous avons $m'_i = \phi\big(\pi_E(e_i)\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(e_i)\big)$, mais $\{\bar{\phi}(e_i)\}_{i=1,\dots,n+1}$ est une base de F parce que $\bar{\phi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc oui : les m'_i $(i = 1, \dots, n+1)$ sont les projetés d'une base de F.

Nous posons au passage $f_i = \bar{\phi}(e_i)$. En ce qui concerne m_0 nous savons que $m_0 = \pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1})$ et

$$m'_0 = \phi\big(\pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1})\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(e_1 + \dots + e_{n+1})\big) = \pi_F(f_1 + \dots + f_{n+1}), \tag{25.48}$$

ce qui termine de montrer que $\{m'_i\}_{i=0,\dots,n+1}$ est un repère projectif de $P(F)$.

(2) (2)

Soient un repère projectif $(m_0, \dots, m_{n+1})$ de $P(E)$ et un repère projectif $(m'_0, \dots, m'_{n+1})$ de $P(F)$. Nous choisissons des bases $\{e_i\}$ de E et $\{f_i\}$ de F telles que

$$m_i = \pi_E(e_i) \tag{25.49a}$$
$$m'_i = \pi_F(f_i) \tag{25.49b}$$

pour $i = 1, \dots, n+1$ et

$$m_0 = \pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1}) \tag{25.50a}$$
$$m'_0 = \pi_F(f_1 + \dots + f_{n+1}). \tag{25.50b}$$

Nous considérons un isomorphisme d'espace vectoriel $\bar{\phi}\colon E \to F$ tel que $\bar{\phi}(e_i) = f_i$ pour tout i, et nous voulons définir $\phi\colon P(E) \to P(F)$ par

EQooRMYIooKcPZwD

$$\phi\big(\pi_E(v)\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(v)\big). \tag{25.51}$$

Cela est bien défini parce que si $\pi_E(v) = \pi_E(w)$ alors $w = \lambda v$ et

$$\pi_F\big(\bar{\phi}(\lambda v)\big) = \pi_F\big(\lambda\bar{\phi}(v)\big) = \pi_F\big(\bar{\phi}(v)\big). \tag{25.52}$$

L'application définie par (25.51) est une homographie qui envoie m_i sur m'_i pour tout $i = 0, \dots, n+1$. Ceci prouve la partie « existence » du point (2).

Pour l'unicité, soient des homographies

$$\phi_1\colon P(E) \to P(F) \tag{25.53a}$$
$$\phi_2\colon P(E) \to P(F) \tag{25.53b}$$

telles que $\phi_1(m_i) = \phi_2(m_i)$ pour tout $i = 0, \dots, n+1$. Soit aussi une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ de E adaptée au repère projectif, c'est-à-dire $m_i = \pi_E(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n+1$ et $\pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1}) = m_0$. Nous considérons aussi les isomorphismes d'espaces vectoriels $\bar{\phi}_1$ et $\bar{\phi}_2$. Avec tout ce beau monde nous avons

$$\phi_1(m_i) = \pi_E\big(\bar{\phi}_1(e_i)\big) \tag{25.54a}$$
$$\phi_2(m_i) = \pi_E\big(\bar{\phi}_2(e_i)\big). \tag{25.54b}$$

Mais nous savons que $\phi_1(m_i) = \phi_2(m_i)$, donc nous savons que $\pi_E\big(\bar{\phi}_1(e_i)\big) = \pi_E\big(\bar{\phi}_2(e_i)\big)$, ce qui nous fait conclure que

$$\bar{\phi}_1(e_i) = \lambda_i\bar{\phi}_2(e_i) \tag{25.55}$$

pour certaines constantes $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Le même raisonnement appliqué à m_0 nous donne un $\mu \in \mathbb{K}$ tel que

$$\bar{\phi}_1(e_1) + \ldots + \bar{\phi}_1(e_{n+1}) = \mu\big(\bar{\phi}_2(e_1) + \ldots + \bar{\phi}_2(e_{n+1})\big). \tag{25.56}$$

En mettant l'un dans l'autre :

$$\lambda_1\bar{\phi}_2(e_1) + \ldots + \lambda_{n+1}\bar{\phi}_2(e_{n+1}) = \mu\big(\bar{\phi}_2(e_1) + \ldots + \bar{\phi}_2(e_{n+1})\big). \tag{25.57}$$

Sachant que $\{\bar{\phi}_2(e_i)\}_{i=1,\ldots,n+1}$ est une base de F et nous souvenant de l'unicité de la décomposition d'un élément dans une base[4], nous en déduisons que tous les λ_i doivent être égaux à μ. Donc pour tout $v \in E$ nous avons $\bar{\phi}_1(v) = \lambda\bar{\phi}_2(v)$.

Cela a pour conséquence que $\phi_1 = \phi_2$.

□

25.33.
Si nous avons une droite projective, trois points sont nécessaires pour créer un repère et donc pour construire une homographie de la droite sur elle-même. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $P(E)$ la droite projective qui lui est associée. Soit une homographie $f\colon P(E) \to P(E)$ et $\bar{f}\colon E \to E$, l'isomorphisme d'espaces vectoriels associé (par $f \circ \pi_E = \pi_E \circ \bar{f}$). Si $\{e_1, e_2\}$ est une base de E alors l'application $\bar{f}$ a une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2, \mathbb{K}) \tag{25.58}$$

avec $\det A \neq 0$ parce que $\bar{f}$ est un isomorphisme.

La plupart des points de $P(E)$ sont représentés par des points de la forme $(z, 1)$. Nous voudrions savoir quelle est la direction représentée par le point $\bar{f}(z, 1)$; c'est-à-dire que nous voudrions savoir $f([z, 1])$ sous la forme $[z', 1]$ (si possible). Nous avons

$$\bar{f}(z, 1) = (a_{11}z + a_{12}, a_{21}z + a_{22}). \tag{25.59}$$

Nous posons $\lambda = a_{21}z + a_{22}$ et nous avons

$$\bar{f}(z, 1) = \lambda\left(\frac{a_{11}z + a_{12}}{\lambda}, 1\right). \tag{25.60}$$

Il y a plusieurs possibilités suivant les valeurs de λ et de z.

(1) Si $\lambda = 0$ c'est que nous avons $\bar{f}(z, 1) = (a_{11}z + a_{12}, 0)$. L'application f envoie donc le point $(z : 1)$ sur le point à l'infini.

(2) Si $\lambda \neq 0$, alors f envoie le point $(z : 1)$ vers un autre point « normal ».

(3) Si le point de départ est le point à l'infini alors $\bar{f}(1, 0) = (a_{11}, a_{21})$. Cela peut être le point à l'infini ou non selon les valeurs des a_{ij}.

Dans tous les cas si nous posons

$$\begin{cases} \varphi_f(z) = \dfrac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}} & \text{(25.61a)} \\ \varphi_f(\infty) = \dfrac{a_{11}}{a_{21}} & \text{(25.61b)} \end{cases}$$

alors nous avons

$$\bar{f}(z, 1) = \big(\varphi_f(z), 1\big). \tag{25.62}$$

Si nous prenons la convention que $\frac{1}{0} = \infty$ et que $(\infty, 0)$ est le point à l'infini, alors cette application φ_f donne bien toutes les valeurs de f, y compris les cas à l'infini.

LEMooXNKOooBKhzyt

Lemme 25.34 ([700]).
Trois points distincts d'une droite projective forment un repère projectif.

[4] Proposition 6.8.

Démonstration. Soit une droite projective $d = P(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{K}$. Soient trois points distincts A, B et C de d. Nous avons $a, b, c \in E$ tels que $A = \pi(a)$, $B = \pi(b)$ et $C = \pi(c)$. Vu que $A \neq B$, les vecteurs a et b ne sont pas proportionnels et la partie $\{a, b\}$ est libre dans E. Autrement dit, c'est une base[5].

Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $c = \alpha a + \beta b$. De plus α et β ne sont pas nuls parce que $C \neq A$ et $C \neq B$. En prenant $a' = \alpha a$, $b' = \beta b$ et $c' = c$ nous avons : $A = \pi(a')$, $B = \pi(b')$, $C = \pi(c')$ en même temps que $\{a', b'\}$ est une base de E et $c' = a' + b'$. Donc A, B, C est un repère projectif de $d = P(E)$. □

CORooRFCZooGZiQBJ

Corolaire 25.35 ([701]).
Soient E et F des espaces vectoriels de dimension 2. Soient A_i $(i = 1, 2, 3)$ des points distincts sur $P(E)$ et B_i distincts sur $P(F)$. Alors il existe une unique homographie $P(E) \to P(F)$ portant A_i sur B_i pour tout $i = 1, 2, 3$.

Démonstration. Il s'agit de mettre en conjonction le lemme 25.34 qui dit que les A_i forment un repère projectif de $P(E)$ (idem : les B_i forment un repère projectif de $P(F)$) et le théorème 25.32(2) qui dit que l'une va sur l'autre part une unique homographie. □

25.4.4 Identifications $P(\mathbb{K}^2)$ vers $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$

Pour rappel, une droite projective est l'espace projectif modelé sur un espace vectoriel de dimension deux (définition 25.8).

NORMooUQRUooOMIzJD

25.36.
Nous allons faire un usage assez intense de bijections entre $P(\mathbb{K}^2)$ et $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. Une possible est

$$\begin{aligned} \varphi_0 \colon P(\mathbb{K}^2) &\to \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ [k_1, k_2] &\mapsto \begin{cases} \frac{k_1}{k_2} & \text{si } k_2 \neq 0 \\ \infty & \text{si } k_2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{25.63}$$

EQooSIJDooTHPYMb

Notons que nous utilisons ici le fait que $\mathbb{K}$ soit commutatif, sinon il aurait fallu choisir $k_1 k_2^{-1}$ ou $k_2^{-1} k_1$ au lieu d'écrire gentiment k_1/k_2.

CORooFJSCooNOeAel

Corolaire 25.37.
Soit une bijection $\varphi \colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$. Les points $\{\varphi^{-1}(\infty), \varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1)\}$ forment un repère projectif de $P(\mathbb{K}^2)$.

Démonstration. Il s'agit seulement d'une application du lemme 25.34.

Juste pour l'amusement, nous allons le prouver explicitement pour la bijection $\varphi = \varphi_0$ donnée en (25.63). Un repère projectif est la définition 25.26. Nous avons

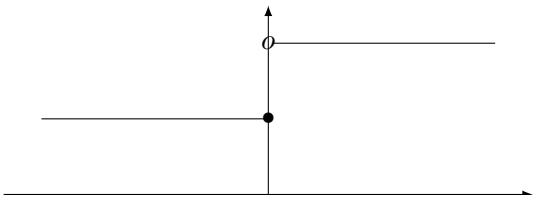
$$\varphi_0^{-1}(\infty) = [1, 0] = \pi_{\mathbb{K}^2}\big((1, 0)\big) \tag{25.64a}$$
$$\varphi_0^{-1}(0) = [0, 1] = \pi_{\mathbb{K}^2}\big((0, 1)\big) \tag{25.64b}$$
$$\varphi_0^{-1}(1) = [1, 1] = \pi_{\mathbb{K}^2}\big((1, 1)\big) \tag{25.64c}$$

Les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment un base de $\mathbb{K}^2$ et nous avons bien $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$. Donc le tout vérifie bien la définition d'un repère projectif. □

D'autre part, comme il est plus agréable de travailler avec $\hat{\mathbb{K}}$ qu'avec $P(\mathbb{K}^2)$ nous avons envie de voir $\hat{\mathbb{K}}$ comme un espace projectif (qu'il n'est pas). Il y a cependant nombre d'autres identifications possibles. En voici un autre :

$$\begin{aligned} \varphi_1 \colon P(\mathbb{K}^2) &\to \hat{\mathbb{K}} \\ [k_1, k_2] &\mapsto \begin{cases} \frac{k_2}{k_1} & \text{si } k_1 \neq 0 \\ \infty & \text{si } k_1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{25.65}$$

Vous en voulez une plus compliquée ? En voici une pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, basée sur le dessin suivant :



[5] Il convient de citer ici la proposition 6.20.

La bijection associée est :

$$\begin{aligned}\varphi_d\colon P(\mathbb{R}^2) &\to \hat{\mathbb{R}}\\ [k_1,k_2] &\mapsto \begin{cases}\frac{k_1}{k_2} & \text{si } k_1k_2\leqslant 0\\ 2\frac{k_1}{k_2} & \text{si } k_1k_2>0\\ \infty & \text{si } k_2=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{25.66}$$

EQooMIGCooAtXPaS

Pour mettre un peu d'ordre dans toutes ces identifications possibles, nous introduisons une classe.

DEFooMLQUooGwvQMh

Définition 25.38.
Pour une bijection $\varphi\colon P(\mathbb{K}^2)\to\hat{\mathbb{K}}$ nous définissons

$$A(\varphi)=\left\{\varphi_a\colon P(\mathbb{K}^2)\to\hat{\mathbb{K}}\text{ tel que }\varphi_a^{-1}\circ\varphi\text{ soit une homographie }\right\} \tag{25.67}$$

Les classes sont assez larges parce que pour toute homographie $\phi\colon P(\mathbb{K}^2)\to P(\mathbb{K}^2)$, nous avons $\varphi\circ\phi^{-1}\in A(\varphi)$. Mieux, nous avons le lemme suivant.

Lemme 25.39.
L'application

$$\begin{aligned}\psi\colon A(\varphi)&\to \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^2)\\ \varphi_a&\mapsto\varphi_a^{-1}\circ\varphi\end{aligned} \tag{25.68}$$

est une bijection.

Démonstration. Pour rappel, $\mathrm{PGL}(E)$ est le groupe des homographies de E, voir la définition 25.23.

(1) **Surjectif** Si $\phi\in\mathrm{PGL}(\mathbb{K}^2)$ nous avons $\phi=\psi(\varphi\circ\phi^{-1})$.

(2) **Injectif** Si $\psi(\varphi_a)=\psi(\varphi_b)$ alors

$$\varphi_a^{-1}\circ\varphi=\varphi_b^{-1}\circ\varphi, \tag{25.69}$$

d'où nous déduisons $\varphi_a^{-1}=\varphi_b^{-1}$ parce que φ est une bijection.

□

25.4.5 Birapport

25.40.
Tout le monde semble définir le birapport en identifiant $P(\mathbb{K}^2)$ à $\hat{\mathbb{K}}=\mathbb{K}\cup\{\infty\}$. Bien entendu, personne ne semble s'être attribué la mission d'expliciter la dépendance du birapport en le choix de l'identification. Je le fais à la définition 25.42.

Mais cette définition dépend du choix d'identification $\varphi\colon P(\mathbb{K}^2)\to\hat{\mathbb{K}}$, comme le montre l'exemple 25.44. J'ai donc défini des classes d'identifications possibles $A(\varphi)$ en 25.38. Et je démontre la proposition 25.45 que si $\varphi_a\in A(\varphi)$ alors les birapports construits à partir de φ et φ_a sont identiques.

Question : pourquoi personne ne semble faire ce travail ? En quoi l'identification φ_0 que tout le monde utilise est plus canonique qu'une autre ? Est-ce que l'on peut décrire simplement les classes $A(\varphi)$? Le groupe qui conserve le birapport associé à φ est-il isomorphe au groupe qui conserve le birapport associé à φ' ? Quels que soient φ et φ' ?

Suis-je la seule personne au monde à m'être demandé si le birapport était un objet canonique ?

25.41.
Une utilisation très intéressante du birapport dans la vidéo « The Cross-Ratio » de numberphile : https://www.youtube.com/watch?v=ffvojZONF_A

DEFooBFSKooDwzwmO

Proposition-Définition 25.42.
Soit une droite projective $d=P(E)$ et trois points distincts A, B et C sur cette droite. Soit une bijection $\varphi\colon P(\mathbb{K}^2)\to\hat{\mathbb{K}}$. Si X est un point de d alors nous nommons le ***birapport*** *de X par rapport à A, B et C l'élément de $\hat{\mathbb{K}}$ donné par*

$$[A,B,C,X]_\varphi=(\varphi\circ\phi)(X) \tag{25.70}$$

où $\phi\colon d\to P(\mathbb{K}^2)$ est l'unique homographie telle que

SUBEQooYWMSooYlFKQv

$$\phi(A)=\varphi^{-1}(\infty) \tag{25.71a}$$
$$\phi(B)=\varphi^{-1}(0) \tag{25.71b}$$
$$\phi(C)=\varphi^{-1}(1). \tag{25.71c}$$

Démonstration. Nous devons prouver qu'il existe effectivement une unique homographie vérifiant les conditions (25.71).

(1) A, B, C **est un repère projectif de** $P(E)$ Voir le lemme 25.34.

(2) $\varphi^{-1}(\infty), \varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1)$ **est un repère projectif de** $P(\mathbb{K}^2)$ Lemme 25.34 ou corolaire 25.37 au choix.

(3) **Conclusion** Le théorème 25.32(2) nous donne existence et unicité d'une homographie $P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ envoyant le premier repère sur le second.

□

Remarque 25.43.
La majorité des sources ne parlent pas de la dependence du birapport en le choix de φ parce que tout le monde ne semble ne considérer que $\varphi = \varphi_0$ définie en (25.63). Il est cependant naturel de se demander si la définition dépend effectivement du choix de φ. La réponse est oui : ça dépend du choix.

EXooYCOYooWFSfUv

Exemple 25.44 (Une autre identification qui ne va pas bien)**.**
Nous montrons que l'identification $\varphi_d \colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$ donnée en (25.66) ne donne pas lieu au même birapport que celui de φ_0.

Nous travaillons le birapport sur la droite projective la plus simple : $P(\mathbb{K}^2)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Prenons pour la simplicité $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$ et $C = [1, 1]$. Alors l'homographie demandée dans la définition de $[.,.,.,.]_{\varphi_0}$ est $\phi_0 = \mathrm{Id}$. Par conséquent,

$$\big[A, B, C, [k_1, k_2]\big]_{\varphi_0} = (\varphi_0 \circ \phi_0)[k_1, k_2] = \varphi_0[k_1, k_2] = \frac{k_1}{k_2}. \tag{25.72}$$

En ce qui concerne le birapport défini par φ_d nous avons

$$\varphi_d^{-1}(\infty) = [1, 0] \tag{25.73a}$$
$$\varphi_d^{-1}(0) = [0, 1] \tag{25.73b}$$
$$\varphi_d^{-1}(1) = [1, 2], \tag{25.73c}$$

de telle sorte que nous cherchons une homographie $\phi_d \colon P(\mathbb{K}^2) \to P(\mathbb{K}^2)$ telle que

$$\phi_d[1, 0] = [1, 0] \tag{25.74a}$$
$$\phi_d[0, 1] = [0, 1] \tag{25.74b}$$
$$\phi_d[1, 1] = [1, 2] \tag{25.74c}$$

L'homographie $\phi_d[k_1, k_2] = [k_1, 2k_2]$ convient et nous avons

$$\big[A, B, C, D, [k_1, k_2]\big]_{\varphi_d} = (\varphi_d \circ \phi_d)[k_1, k_2] = \varphi_d[k_1, 2k_2] = \frac{k_1}{2k_2} \tag{25.75}$$

dès que $k_1 k_2 < 0$. Nous avons donc bien trouvé

$$[A, B, C, X]_{\varphi_0} \neq [A, B, C, X]_{\varphi_d}. \tag{25.76}$$

△

Le birapport n'est pas un objet tout à fait canonique parce qu'il dépend effectivement du choix de l'identification entre $P(\mathbb{K}^2)$ et $\hat{\mathbb{K}}$.

PROPooTFMQooIOQGvs

Proposition 25.45.
Soit une bijection $\varphi \colon P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$. Si $\varphi_a \in A(\varphi)$[6] alors les birapports construits sur φ et φ_a coïncident.

Démonstration. Soient trois points distincts $A, B, C \in P(E)$, et $X \in P(E)$. Nous avons

$$[A, B, C, X]_{\varphi} = (\varphi \circ \phi)(X) \tag{25.77}$$

où $\phi \colon P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ est l'unique homographie telle que

$$\phi(A) = \varphi^{-1}(\infty) \tag{25.78a}$$
$$\phi(B) = \varphi^{-1}(0) \tag{25.78b}$$
$$\phi(C) = \varphi^{-1}(1). \tag{25.78c}$$

[6] $A(\varphi)$ définie en 25.38.

Et

$$[A,B,C,X]_{\varphi_a} = (\varphi_a \circ \phi_a)(X) \tag{25.79}$$

où $\phi_a : P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ est l'unique homographie telle que

$$\phi_a(A) = \varphi_a^{-1}(\infty) \tag{25.80a}$$
$$\phi_a(B) = \varphi_a^{-1}(0) \tag{25.80b}$$
$$\phi_a(C) = \varphi_a^{-1}(1). \tag{25.80c}$$

Il est facile de voir que $\phi_a = \varphi_a^{-1} \circ \varphi\phi$. En effet, cela est une homographie parce que $\varphi_a \in A(\varphi)$, et parce que la composée d'homographies est une homographie. De plus,

$$(\varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(A) = (\varphi_a^{-1} \circ \varphi)\phi^{-1}(\infty) = \varphi_a(\infty) \tag{25.81a}$$
$$(\varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(B) = (\varphi_a^{-1} \circ \varphi)\phi^{-1}(0) = \varphi_a(0) \tag{25.81b}$$
$$(\varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(C) = (\varphi_a^{-1} \circ \varphi)\phi^{-1}(1) = \varphi_a(1). \tag{25.81c}$$

Au final nous avons :

$$[A,B,C,X]_{\varphi_a} = (\varphi_a \circ \varphi_a^{-1} \circ \varphi \circ \phi)(X) = (\varphi \circ \phi)(X) = [A,B,C,X]_{\varphi}. \tag{25.82}$$

□

Remarque 25.46.
Tout le monde semble ne considérer que l'identification usuelle $\varphi_0 : P(\mathbb{K}^2) \to \hat{\mathbb{K}}$ donnée par $\varphi_0[k_1,k_2] = k_1/k_2$. Toute la discussion concernant la dépendance du birapport en le choix de l'identification (y compris la définition des classes $A(\varphi)$) peut être sautée en disant qu'on ne considéra que φ_0.

Et c'est ce que nous allons faire : sauf avis contraire, nous utiliserons le birapport associé à l'identification φ_0.

LEMooCOFTooVGKdVO

Lemme 25.47 ([699])**.**
Nous avons

$$[A,B,C,X]_{\varphi} = \begin{cases} \infty & \text{si et seulement si } X = A \\ 0 & \text{si et seulement si } X = B \\ 1 & \text{si et seulement si } X = C. \end{cases} \tag{25.83}$$

Démonstration. Par définition $[A,B,C,X]_{\varphi} = \varphi \circ \phi(X)$. Nous avons donc équivalence entre les affirmations suivantes :

- $[A,B,C,X]_{\varphi} = \infty$
- $(\varphi \circ \phi)(X) = \infty$
- $\phi(X) = \varphi^{-1}(\infty)$
- $\phi(X) = \phi(A)$
- $A = X$

parce que ϕ et φ sont des bijections.

Le même raisonnement tient pour les deux autres. □

PROPooKQZRooVCXPLW

Proposition 25.48.
Autres petites propriétés faciles … Soit une droite projective $d = P(E)$ et trois points distincts $A, B, C \in d$.

ITEMooOIPZooQFFYIn

(1) Les points A, B, C et X sont distincts si et seulement si $[A,B,C,X] \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.

ITEMooBEBEooVfiJXY

(2) Pour tout $k \in \hat{\mathbb{K}}$, il existe un unique $X \in d$ tel que $[A,B,C,X] = k$.

Démonstration. Notons pour le point (1) que l'énoncé demande déjà que A, B et C soient distincts. Sinon le birapport n'est pas défini.

(1) **(1)**

Les points A, B et C sont distincts par hypothèse. Vu le lemme 25.47, pour que X soit distincts de A, B et C il faut et il suffit que le birapport ne soit ni ∞ ni 1 ni 0. Donc $\mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.

(2) **(2)**

Nous avons $[A, B, C, X] = \phi(X)$ où $\phi\colon P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$ est une homographie et donc une bijection par la proposition 25.22(1). Donc oui, pour tout éléments de $P(\mathbb{K}^2)$ il existe un unique élément de $P(E)$ dont le birapport par rapport à A, B et C soit cet élément.

Notons encore une fois que nous avons identifié $P(\mathbb{K}^2)$ à $\hat{\mathbb{K}}$ par la bijection (25.63). □

PROPooMGYDooHqSoJs

Proposition 25.49 ([699]).
Nous considérons deux droites projectives d et d' ainsi que 4 points sur chacune. Nous les nommons $A_1, A_2, A_3, A_4 \in d$ et $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \in d'$. Nous supposons que A_1, A_2, A_3 sont distincts et que A'_1, A'_2, A'_3 également. Alors il y a équivalence entre

ITEMooIDKBooXHnNDi

(1) Il existe une homographie $\phi\colon d \to d'$ telle que $\phi(A_i) = A'_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$,

ITEMooCDWAooIckJwT

(2) égalité des birapports :

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = [A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]. \tag{25.84}$$

Dans ce cas, l'homographie est unique.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois parties évidentes.

(1) **(1) implique (2)**

Nous avons une homographie $\mu'\colon d' \to \hat{\mathbb{K}}$ telle que $\mu'(A'_1) = \infty$, $\mu'(A'_2) = 0$ et $\mu'(A'_3) = 1$. En composant[7] avec l'homographie $\phi\colon d \to d'$ de l'hypothèse nous avons une homographie $\mu' \circ \phi\colon d \to \hat{\mathbb{K}}$ qui vérifie

$$(\mu' \circ \phi)(A_1) = \mu'(A'_1) = \infty \tag{25.85a}$$
$$(\mu' \circ \phi)(A_2) = \mu'(A'_2) = 0 \tag{25.85b}$$
$$(\mu' \circ \phi)(A_3) = \mu'(A'_3) = 1, \tag{25.85c}$$

ce qui signifie que $\mu' \circ \phi$ est l'homographie qui définie le birapport sur d. Par conséquent

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = (\mu' \circ \phi)(A_4) = \mu'(A'_4) = [A'_1, A'_2, A'_3, A'_4]. \tag{25.86}$$

(2) **(2) implique (1)**

La partie $\{A_1, A_2, A_3\}$ est un repère projectif de d par le lemme 25.34. Idem pour $\{A'_1, A'_2, A'_3\}$. Nous considérons les homographies $\mu\colon d \to \hat{\mathbb{K}}$ et $\mu'\colon d' \to \hat{\mathbb{K}}$ définissant les birapports par rapport à ces repères. Ces homographies vérifient, en utilisant l'hypothèse :

$$\mu(A_4) = [A_1, A_2, A_3, A_4] = [A'_1, A'_2, A'_3, A'_4] = \mu'(A'_4). \tag{25.87}$$

Et de plus

$$\mu(A_1) = [A_1, A_2, A_3, A_1] = \infty = \mu'(A'_1) \tag{25.88a}$$
$$\mu(A_2) = [A_1, A_2, A_3, A_2] = 0 = \mu'(A'_2) \tag{25.88b}$$
$$\mu(A_3) = [A_1, A_2, A_3, A_3] = 1 = \mu'(A'_3). \tag{25.88c}$$

Autrement dit : $\mu(A_i) = \mu'(A'_i)$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$. Nous nous inspirons de ce diagramme :

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{\ \phi\ } & d' \\ & {\scriptstyle\mu}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mu'} & \\ & \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \end{array} \tag{25.89}$$

La composée $\phi = \mu'^{-1} \circ \mu$ vérifie

$$(\mu'^{-1} \circ \mu)(A_i) = A'_i \tag{25.90}$$

pour tout i, et est une homographie.

[7] Proposition 25.22(3), la composition est encore une homographie.

(3) **Unicité**

Le fait qu'une homographie vérifiant $\phi(A_i) = A'_i$ pour $i = 1, 2, 3$ soit unique découle du fait qu'il existe une unique homographie portant un repère projectif sur un autre. A fortiori la condition $\phi(A_4) = A'_4$ ne retire rien à l'unicité.

□

Théorème 25.50 ([699]).
Une bijection entre deux droites projectives est une homographie si et seulement si elle conserve le birapport.

Démonstration. Chacun des deux sens séparément.

(1) $\Rightarrow$

Soit une homographie $\phi: d \to d'$ entre deux droites projectives. Nous devons prouver que pour tout choix 4 points A, B, C, X dans d (dont A, B et C sont distincts) nous avons

$$[A, B, C, X] = [\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(X)]. \tag{25.91}$$

Nous nommons $\mu: d \to \hat{\mathbb{K}}$ l'homographie qui donne le birapport sur d par rapport à A, B et C, et $\mu': d' \to \hat{\mathbb{K}}$ celle qui donne le birapport sur d' par rapport à $\phi(A)$, $\phi(B)$, $\phi(C)$. Voici un diagramme de la situation :

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{\phi} & d' \\ & {\scriptstyle\mu}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mu'} & \\ & \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \end{array} \tag{25.92}$$

Nous prouvons maintenant que $\mu' = \mu \circ \phi^{-1}$. En effet :

$$(\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(A)\big) = \mu(A) = \infty \tag{25.93a}$$
$$(\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(B)\big) = \mu(B) = 0 \tag{25.93b}$$
$$(\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(C)\big) = \mu(C) = 1. \tag{25.93c}$$

Par conséquent le birapport à droite dans (25.91) peut se calculer à l'aide de $\mu \circ \phi^{-1}$:

$$[\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(X)] = \mu'\big(\phi(X)\big) = (\mu \circ \phi^{-1})\big(\phi(X)\big) = \mu(X) = [A, B, C, X]. \tag{25.94}$$

La première implication est prouvée.

(2) $\Leftarrow$

Soit une bijection $f: d \to d'$ conservant le birapport, ainsi que trois points distincts A, B et C dans d. Vu que f est une bijection les points $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont distincts dans d'. Par le lemme 25.34 et le théorème 25.32(2), il existe une unique homographie $\phi: d \to d'$ telle que $\phi(A) = f(a)$, $\phi(B) = f(B)$ et $\phi(C) = f(C)$. Pour tout $X \in d$ nous avons

$$\begin{aligned} [f(A), f(B), f(C), f(X)] &= [A, B, C, X] && \text{(25.95a)} \\ &= [\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(X)] && \text{(25.95b)} \\ &= [f(A), f(B), f(C), \phi(X)]. && \text{(25.95c)} \end{aligned}$$

Justifications :

- (25.95a) parce que f conserve le birapport par hypothèse.
- (25.95b) parce que ϕ conserve le birapport étant une homographie (c'est le premier sens du présent théorème)

Nous nommons $\mu': d' \to \hat{\mathbb{K}}$ l'homographie donnant le birapport par rapport aux points $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$. Alors le résultat (25.95) se lit

$$\mu'\big(f(X)\big) = \mu'\big(\phi(X)\big). \tag{25.96}$$

Mais comme μ' est une bijection (proposition 25.22(1)) cela implique $f(X) = \phi(X)$. Vu que nous avons fait ce raisonnement pour un X quelconque dans d nous avons $f = \phi$, ce qui prouve que f est une homographie.

□

Lemme 25.51.
Soient a, b, c distincts sur la droite projective $D = P(E)$. Soient $x, y \in E$ tels que $\pi_E(x) = a$, $\pi_E(y) = b$, $\pi_E(x + y) = c$. Alors

$$d = \pi_E(\lambda x + \mu y) \tag{25.97}$$

si et seulement si

$$[a, b, c, d] = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu). \tag{25.98}$$

Démonstration. Étant donné que a et b sont distincts, les vecteurs x et y forment une base de E. Soit $f\colon E \to \mathbb{K}^2$ un isomorphisme qui envoie (x, y) sur e_1, e_2 où e_i sont les vecteurs de base de $\mathbb{K}^2$. Ensuite nous considérons $g\colon P(E) \to P(\mathbb{K}^2)$, l'homographie associée à f. Par définition $g\big(\pi_E z\big) = \pi_{\mathbb{K}^2}\big(f(z)\big)$. Par f nous avons

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{25.99}$$

Donc par g nous avons

$$a \mapsto \infty \quad b \mapsto 0. \tag{25.100}$$

Nous avons aussi $f(\lambda x + \mu y) = (\lambda, \mu)$ et

$$\begin{aligned} g(c) &= g\big(\pi_E(x + y)\big) && \text{(25.101a)} \\ &= \pi_F f(x + y) && \text{(25.101b)} \\ &= \pi_F(f(x) + f(y)) && \text{(25.101c)} \\ &= \pi_F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{(25.101d)} \\ &= 1. && \text{(25.101e)} \end{aligned}$$

La dernière égalité est le fait que la direction $(1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ est représentée par le point $x = 1$ sur la droite $y = 1$ qui est notre « représentation » de la droite affine. L'application g a donc toutes les propriétés qu'il faut pour être l'application qui définit le birapport. Nous avons donc bien $g(d) = [a, b, c, d]$.

D'une part si $d = \pi_E(\lambda x + \mu y)$ alors

$$g(d) = \pi_{\mathbb{K}^2} f(\lambda x + \mu y) = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu). \tag{25.102}$$

Dans l'autre sens si $[a, b, c, d] = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu)$ alors supposons que $g(d) = \pi_{\mathbb{K}^2}(\lambda, \mu)$ avec $d = \pi_E(v)$ alors

$$g\pi_E v = \pi_{\mathbb{K}^2} f(v), \tag{25.103}$$

ce qui implique $f(v) = \alpha(\lambda, \mu)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}$. Par conséquent $v = \alpha(\lambda x + \mu y)$ et $d = \pi_E(\lambda x + \mu y)$. □

25.5 Coordonnées homogènes

Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et une base $\{e_0, \dots, e_n\}$ de E. Soit $M \in P(E)$ et $u \in E$ un élément engendrant M. Au point M nous voudrions associer les coordonnées $(x_0, \dots, x_n)$ de u dans E. Notons que toutes les coordonnées de u ne sont jamais nulles en même temps parce que u doit indiquer une direction. Nous savons par ailleurs que les coordonnées $(x_0, \dots, x_n)$ indiquent le même point de $P(E)$ que les coordonnées $(x'_0, \dots, x'_n)$ si et seulement si $x_i = \lambda x_i$.

DEFooLWMHooMWxAFq

Définition 25.52.
*La classe d'équivalence de $(x_0, \dots, x_n)$ est la **coordonnée homogène** de M. Nous la notons $(x_0 : \dots : x_n)$.*

Si nous avons une base $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ nous associons à $M \in P(E)$ les coordonnées $(X : Y : T)$. Mais si on prend la base $\{2e_1, e_2, \dots, e_n\}$, les coordonnées du même point deviennent $(X/2 : Y : T)$ alors que du point de vue de l'espace projectif, rien n'a été changé : la classe de e_1 est la même que celle de $2e_1$. Les coordonnées homogènes[8] ne sont donc pas intrinsèques.

[8] Définition 25.52.

25.5.1 Curiosité : matrice de translation

Si E est un espace vectoriel, l'espace projectif $P(E)$ est l'ensemble des classes d'équivalence dans E pour la relation $v \sim \lambda v$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Il se fait que l'étude de $\mathbb{R}^3$ peut être fait à partir de $\mathbb{R}^4$ en considérant les coordonnées homogènes sur $P(\mathbb{R}^4)$. Plus précisément, nous considérons

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^3 &\to P(\mathbb{R}^4)\\ (x,y,z) &\mapsto \big[(x,y,z,1)\big].\end{aligned} \tag{25.104}$$

Cela est injectif mais pas surjectif parce que les éléments de la forme $[(x,y,z,0)]$ ne sont pas atteints. Ces éléments sont alors dits « à l'infini » .

Nous aurions pu placer $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ de nombreuses autres manières ; chacune aurait donné une notion différente de « point à l'infini ».

Nous allons maintenant montrer une petite curiosité qui a une grande importance en informatique, lors de la manipulation d'objets 3D. Nous considérons la bijection

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^4\\ (x,y,z) &\mapsto (x,y,z,1).\end{aligned} \tag{25.105}$$

Soit l'opérateur de translation $T_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. En considérant la matrice

$$T_a^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 1 & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25.106}$$

nous avons

$$T_a = \varphi^{-1} \circ T_a^h \circ \varphi. \tag{25.107}$$

Autrement dit, ce passage de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^4$ permet de voir les translations comme des matrices, et c'est bien pratique.

Si $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une rotation, la matrice correspondante sur $\mathbb{R}^4$ est

$$R^h = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25.108}$$

Elle se combine assez bien avec une translation parce que le produit donne

$$T_a^h R^h = \begin{pmatrix} & R & & \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{25.109}$$

C'est-à-dire que la translation et la rotation restent assez visible dans la matrice composée.

Note : pour la composition $R^h T_a^h$, c'est beaucoup moins vrai.

25.5.2 Dualité

Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Une forme linéaire non nulle est un élément de E^*, mais aussi un représentant d'un élément de $P(E^*)$.

Le noyau d'une forme linéaire ω est un hyperplan. Le noyau de la forme linéaire $\lambda\omega$ étant le même hyperplan, l'hyperplan est donné par toute la classe de ω dans $P(E^*)$. Nous avons donc une bijection

$$P(E^*) \leftrightarrow \{\text{hyperplans vectoriels de } E\}. \tag{25.110}$$

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ à partir de laquelle nous construisons la base duale $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ de l'espace dual E^*. À un élément $m \in P(E^*)$ nous associons la droite

$$H_m = \{(X:Y:T) \text{ tel que } m(X,Y,T) = 0\} \tag{25.111}$$

dans $P(E)$. Si les coordonnées homogènes de m étaient $(u:v:w)$ alors l'équation de la droite H_m est

$$uX + vY + wT = 0. \tag{25.112}$$

Exercice

En effet si $\omega \in E^*$ est un représentant de m alors $\omega = \lambda(ue_1^* + ve_2^* + we_3^*)$ et l'équation (25.112) est indépendante de λ ainsi que du choix du représentant dans E du point $(X : Y : T)$ dans $P(E)$.

Si les points m_1 et m_2 sont distincts dans $P(E^*)$, ils donnent deux droites $m_1(X, Y, T) = 0$ et $m_2(X, Y, T) = 0$. Les points de la droite qui joint m_1 à m_2 dans $P(E^*)$ sont de la forme $\lambda m_1 + \mu m_2$ et ils sont associés à l'équation

$$\lambda m_1(X, Y, T) + \mu m_2(X, Y, T) = 0 \tag{25.113}$$

qui sont encore des droites dans $P(E)$. Toutes ces droites passent par le point d'intersection des droits associées à m_1 et m_2. Nous avons donc

$$\bigcap_{\lambda,\mu} H_{\lambda m_1 + \mu m_2} = H_{m_1} \cap H_{m_2}. \tag{25.114}$$

Lemme 25.53.
L'application

$$\begin{aligned} P(E^*) &\to \{\textit{droites dans } P(E)\} \\ m &\mapsto H_m \end{aligned} \tag{25.115}$$

est une bijection.

Démonstration. Une droite dans $P(E)$ est donnée en coordonnées homogènes par une équation $aX + bY + cT = 0$. Cette droite est décrite par le point $(a : b : c)$ dans $P(E^*)$. Ce dernier correspond à la direction de la forme $ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$. Cela prouve que l'application est surjective.

Pour l'injectivité, si $m_1 \neq m_2$ dans $P(E^*)$, les formes ω_1 et ω_2 associées dans E^* ne sont pas multiples l'une de l'autre. Donc les équations

$$a_1X + b_1Y + z_1T = 0 \tag{25.116}$$

et

$$a_2X + b_2Y + z_2T = 0 \tag{25.117}$$

n'ont pas de solutions communes et décrivent donc des droites distinctes. □

LemjXywjH

Lemme 25.54.
Trois points distincts m_1, m_2 et m_3 dans $P(E^*)$ sont alignés si et seulement si les droites H_{m_1}, H_{m_2} et H_{m_3} sont distinctes et concourantes.

Démonstration. Supposons avoir trois points alignés, c'est-à-dire

$$m_3 = m_1 + \mu(m_2 - m_1). \tag{25.118}$$

EqXyfbmF

Soit $X : Y : T$ le point d'intersection de H_{m_1} avec H_{m_2}. Alors $m_1(X, Y, T) = m_2(X, Y, T) = 0$. En tenant compte de (25.118) nous avons alors évidemment $m_3(X, Y, T) = 0$.

Supposons maintenant que les trois droites H_{m_i} soient concourantes. Nous avons donc un point $(X : Y : T)$ dans $P(E)$ tel que $m_i(X, Y, T) = 0$. Si m_i est la classe de $a_ie_1^* + b_ie_2^* + c_ie_3^*$ alors nous avons le système

$$\begin{cases} a_1X + b_1Y + c_1T = 0 & \text{(25.119a)} \\ a_2X + b_2Y + c_2T = 0 & \text{(25.119b)} \\ a_3X + b_3Y + c_3T = 0. & \text{(25.119c)} \end{cases}$$

Afin que cela ait une solution non triviale nous devons avoir

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{25.120}$$

c'est-à-dire que les points (a_i, b_i, c_i) soient alignés. □

En tenant compte de ce qui a été dit, une droite dans $P(E^*)$ est constituée de points qui fournissent des droites concourantes dans $P(E)$. Donc une droite de $P(E^*)$ se caractérise par un point de $P(E)$ (l'intersection) de la façon suivante. Un point $M_d \in P(E)$ donne lieu à un **faisceau de droites** passant par M_d. Chacune de ces droites donne lieu à un point de $P(E^*)$ et tous ces points sont alignés. Nous avons ainsi construit la droite d dans $P(E^*)$ correspondante au point M_d de $P(E)$.

25.5.3 Polynômes

Soit l'espace projectif de dimension n avec ses coordonnées homogènes $(X_0 : \dots : X_n)$. Nous considérons l'espace affine $H \equiv X_n = 1$ dans l'espace vectoriel E de dimension $n+1$. Nous considérons pour H un repère affine ayant pour origine le point $(0, \dots, 0, 1)$. Considérons un polynôme homogène P sur le corps $\mathbb{K}$. L'équation

$$P(X_0, \dots, X_n) = 0 \tag{25.121}$$

sur l'espace vectoriel E descend immédiatement à l'espace projectif : étant donné que P est homogène nous avons $P(u) = 0$ si et seulement si $P(\lambda u) = 0$.

Nous essayons de décrire l'ensemble A des points de $P(E)$ satisfaisant $P(X_0, \dots, X_n) = 0$. Nous savons que les éléments de $P(E)$ ont chacun un représentant soit dans H soit sur la droite à l'infini. Ceux de A ayant un représentant dans H sont d'équation

$$Q(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0 \tag{25.122}$$

où Q est le polynôme donné par $Q(x_0, \dots, x_{n-1}) = P(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)$. Les points de A ayant un représentant sur la droite à l'infini s'obtiennent par l'équation

$$R(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0 \tag{25.123}$$

où R est le polynôme donné par $R(x_0, \dots, x_{n-1}) = P(x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Exemple 25.55.
Nous considérons la conique projective

$$X^2 - XT - Y^2 - T^2 = 0. \tag{25.124}$$ EqpLeQIN

Elle est décomposée en deux parties : une dans l'espace affine « normale » et une à l'infini. La première s'obtient en posant $T = 1$ dans (25.124) :

$$x^2 - x - y^2 - 1 = 0. \tag{25.125}$$ EqdGHzgJ

L'autre est obtenue en posant $T = 0$:

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{25.126}$$

La partie à l'infini est donc composée de deux points : $(1 : 1 : 0)$ et $(1 : -1 : 0)$.

Le graphique de l'équation (25.125) est donné à la figure 25.2. Nous y voyons que les asymptotes sont effectivement données par les directions $(1, 1)$ et $(1, -1)$ dans le plan.

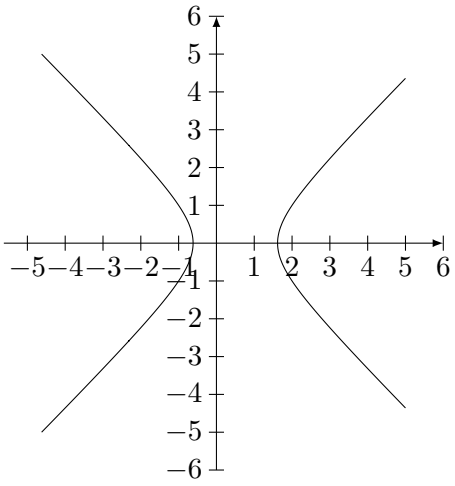


FIGURE 25.2 : Le graphique de $x^2 - x - y^2 - 1 = 0$. LabelFigProjPoly

△

Nous pouvons tenter de faire l'exercice inverse : considérer une conique dans $\mathbb{R}^2$, la voir comme une partie d'une conique dans l'espace projectif et trouver les points à l'infini qui la complètent.

Exemple 25.56.
La droite projective usuelle est donnée par la droite affine $y - 1 = 0$. L'homogénéisation donne $y - z = 0$ et par conséquent la partie à l'infini est donnée par $y = 0$, c'est-à-dire la direction $(1, 0)$ comme il se doit. △

Exemple 25.57.
Prenons la conique

$$x^2 + xy + y^3 - 2 = 0. \tag{25.127}$$

D'abord nous homogénéisons cette équation pour la voir dans $\mathbb{R}^3$:

$$x^2z + xyz + y^3 - 2z^3 = 0. \tag{25.128}$$

Les points à l'infini sont ceux qui correspondent à $z = 0$, c'est-à-dire la droite donnée en coordonnées homogènes par $(1 : 0 : 0)$. △

25.6 La sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$

DEFooSZGNooTzFYbh

Définition 25.58.
*La **sphère de Riemann** est l'espace projectif modelé sur $\mathbb{C}^2$: en vertu des notations données à la page 1971, c'est*

$$P_1(\mathbb{C}) = P(\mathbb{C}^2). \tag{25.129}$$

L'ensemble $P_1(\mathbb{C})$ est le quotient $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence de $\mathbb{C}$-colinéarité dans $\mathbb{C}^2$.

LEMooKWZDooEIraSJ

Lemme 25.59.
L'application

$$\begin{aligned}\varphi_0 \colon P_1(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ [z_1, z_2] &\mapsto \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} & si\ z_2 \neq 0 \\ \infty & si\ z_2 = 0 \end{cases}\end{aligned} \tag{25.130}$$

EQooKJIZooZihzuV

est une bijection qui respecte la conjugaison complexe : $\varphi_0\big([z_1, z_2]^*\big) = \varphi_0\big([z_1, z_2]\big)^*$.

Démonstration. Notons d'abord que la définition a un sens parce que si un représentant que $[z_1, z_2]$ est de la forme $(z, 0)$ alors ils sont tous de cette forme. L'affirmation « $z_1 \neq 0$ dans $[z_1, z_2]$ » a donc un sens.

(1) **Injectif** Supposons $\varphi_0\big([z_1, z_2]\big) = \varphi_0\big([t_1, t_2]\big)$.
Si les deux membres sont égaux à ∞ alors nous avons $z_2 = t_2 = 0$, et alors avec $\lambda = z_1/t_1$ nous avons $(z_1, z_2) = \lambda(t_1, t_2)$, ce qui prouve que $[z_1, z_2] = [t_1, t_2]$.
Si les deux membres sont égaux à zéro alors $z_1 = t_1 = 0$ et le même raisonnement tient.
Sinon nous avons $z_1/z_2 = t_1/t_2$ où tous les nombres sont non nuls. Cela donne

$$z_2 = \frac{t_2}{t_1} z_1, \tag{25.131}$$

et donc

$$\frac{t_1}{z_1}(z_1, z_2) = (t_1, t_2), \tag{25.132}$$

qui montre qu'au niveau des classes, $[z_1, z_2] = [t_1, t_2]$.

(2) **Surjectif**
Nous avons

$$\infty = \varphi_0\big([1, 0]\big) \tag{25.133}$$

et si $z \neq \infty$ nous avons $z = \varphi_0\big([z, 1]\big)$.

□

25.6.1 Éléments de géométrie dans $P_1(\mathbb{C})$

SUBSECooQPRLooAjMNqp

Étant donné que nous sommes partis pour faire de la géométrie dans $\mathbb{C}$ et même dans $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, autant nous armer des équations de cercles et de droites dans $\mathbb{C}$, ainsi que de quelques notions adjacentes.

Remarque 25.60.
La définition 25.2 parle de plan et de droites projectives. Ici nous ne sommes pas dans ce cadre parce que nous travaillons sur $P_1(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ n'est certainement pas un espace de dimension 3. Les droites dont nous allons parler ne sont pas des droites projectives avec leur point à l'infini.

25.6.1.1 Équation complexe d'une droite

L'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ est $d \equiv ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et a, b non nuls en même temps. En posant $z = x + iy$ nous voulons exprimer l'équation en termes de z au lieu de x et y. Nous avons[702]

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \tag{25.134}$$

et nous pouvons écrire $d \equiv a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) = 2c$, ou encore $d \equiv (a - bi)z + (a + ib)\bar{z} = 2c$. En posant $\omega = a + bi \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$ nous avons l'équation

$$\bar{\omega}z + \omega z = k. \tag{25.135}$$

EQooPRCPooVvrHME

DEFooAQSMooWNOzAI

Définition 25.61.
*Une **droite** est une partie de $\hat{\mathbb{C}}$ de la forme*

$$d(\omega, k) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k\} \cup \{\infty\} \tag{25.136}$$

avec $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

Dans $\hat{\mathbb{C}}$, toutes les droites contiennent le point ∞.

PROBooZHHTooIFNwxR

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 25.62
La proposition 24.11 montre que toute inversion transforme un cercle-droite en un cercle-droite, nonobstant d'accepter de prolonger toute droite par ∞.

Est-ce que l'on peut dire que toutes les droites contiennent le point ∞ ?

En donnant ∞ à toutes les droites et à aucun cercle, la proposition 24.11 fonctionne partout en posant $i_C(O) = \infty$ et $i_C(\infty) = O$.

De plus en pensant à la projection stéréographique, ce serait logique : quelle que soit la direction dans laquelle un point s'éloigne de $z = 0$, son image par l'inverse de la projection stéréographique s'approche du pôle nord.

25.6.1.2 Équation complexe d'un cercle

Un cercle de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon r a pour équation $|z - \omega| = r$, et nous avons les équivalences suivantes :

$$|z - \omega| = r \Leftrightarrow |z - \omega|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = r^2 \Leftrightarrow r\bar{r} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2. \tag{25.137}$$

Donc un cercle de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$ a pour équation

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2. \tag{25.138}$$

EQooDIFBooKRZZei

DEFooAUDJooVqLDhe

Définition 25.63.
*Un **cercle** dans $\hat{\mathbb{C}}$ est une partie de la forme*

$$C(\omega, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2\} \tag{25.139}$$

avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$.

Dans la sphère de Riemann, aucun cercle ne contient le point ∞.

Exemple 25.64.
Trouvons le centre et le rayon du cercle d'équation

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = kz\bar{z} \tag{25.140}$$

avec $k \neq 0$. En divisant par k et en posant $\sigma = \omega/k$ nous avons :

$$z\bar{z} - \bar{\sigma}z - \sigma\bar{z} = 0. \tag{25.141}$$

Cela est un cercle de centre σ et de rayon $|\sigma|$. En effet si $z \in \mathbb{C}$ vérifie cette équation,

$$|z - \sigma|^2 = (z - \sigma)(\bar{z} - \bar{\sigma}) = \underbrace{z\bar{z} - \bar{\sigma}z - \sigma\bar{z}}_{=0} + |\sigma|^2 = |\sigma|^2, \tag{25.142}$$

c'est-à-dire que tous les points de $\mathbb{C}$ qui vérifient l'équation donnée sont à la distance $|\sigma|$ de σ. En particulier $z = 0$ est sur le cercle. △

25.6.1.3 Cercle-droite

Une chose de bien avec les équations complexes, c'est que nous pouvons écrire les droites et les cercles avec le même type d'équations.

LEMooHKHOooHpBuBZ

Lemme-Définition 25.65 ([702]).
*Un **cercle-droite** est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que*

$$az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k \tag{25.143}$$

EQooUJAKooEVONqs

avec $a, k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$.

(1) Si $a = 0$, cela est une droite ;

(2) si $a \neq 0$, cela est un cercle.

(3) Un cercle-droite peut être l'ensemble vide.

Démonstration. Si $a = 0$ alors nous tombons tout de suite sur l'équation (25.135). Si $a \neq 0$ alors nous pouvons diviser par a, poser $\sigma = \omega/a$ et $l = k/a$ pour obtenir

$$z\bar{z} - \bar{\sigma}z - \sigma\bar{z} = l, \tag{25.144}$$

EQooNBILooArHPCG

qui est l'équation (25.138) d'un cercle … ou pas tout à fait. En effet, (25.144) serait l'équation du cercle de centre σ et de rayon r donné par $l = r^2 - |\sigma|^2$, c'est) dire

$$r^2 = l + |\sigma|^2, \tag{25.145}$$

alors que rien n'assure que le nombre $l + |\sigma|^2$ soit positif. Dans le cas où c'est positif, nous avons bien un cercle. Sinon c'est l'ensemble vide. □

REMooBMAEooHDvNID

Remarque 25.66.
Lorsque nous parlons de cercle-droite, nous parlons de partie de $\mathbb{C}$ et non de $\hat{\mathbb{C}}$ parce que l'équation (25.143) a du mal à traiter le cas $z = \infty$. À cause du fait que nous avons décider de donner le point ∞ à toutes les droites, la fusion des notions de droites et de cercles n'est pas totale ; en tout cas pas en une seule équation.

EXooKFBIooOJKjGL

Exemple 25.67 ([702]).
Soit le cercle de centre $\omega = ir$ et de rayon r. Quelle que soit la valeur de $r > 0$, ce cercle passe par le point 0 et l'axe réel lui est tangent. L'équation de ce cercle est :

$$z\bar{r} + irz - ir\bar{z} = 0. \tag{25.146}$$

Vu que $ir \neq 0$ nous pouvons diviser et obtenir

$$\frac{z\bar{z}}{ir} + z - \bar{z} = 0. \tag{25.147}$$

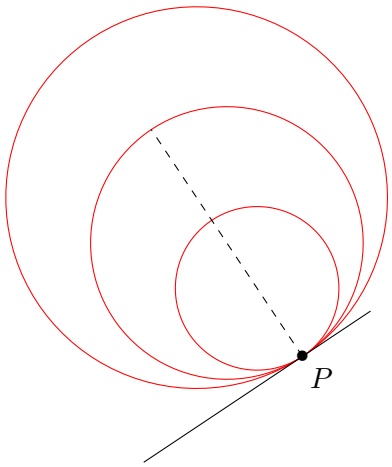
En faisant tendre r vers ∞ nous obtenons $z - \bar{z} = 0$, c'est-à-dire l'équation de la droite réelle.

Cela explique pourquoi il est souvent dit qu'une droite est un cercle dont le rayon est à l'infini. △

NORMooCXVJooMTMqEU

25.68.
Notons que l'exemple 25.67 est générique : prenez une droite ℓ, un point P sur ℓ, et considérez un cercle dont le centre est situé sur la perpendiculaire à ℓ passant par P, et dont le rayon est tel que le cercle passe par P. En prenant $|\omega - P| \to \infty$, l'équation du cercle devient celle de la droite ℓ.

Cela est particulièrement pratique lorsque nous travaillons dans $\hat{\mathbb{C}}$ parce nous y avons une notion précise du point à l'infini. Notons que (peut-être contre-intuitivement), il existe un seul point à l'infini dans $\hat{\mathbb{C}}$. Et ce point est le centre de tous les cercles que l'on veut transformer en droites. Cela pose évidemment la question de savoir comment on définit précisément un cercle dont le centre est réellement ∞.



25.6.1.4 Rotation-homothétie

Définition 25.69.
*Une **rotation-homothétie** est une application $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de la forme $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Le nom provient du fait que si λ est réel, alors $z \mapsto \lambda z$ est une vraie homothétie, et si $\lambda = e^{i\theta}$ alors $z \mapsto e^{i\theta}z$ est une vraie rotation. Pour une valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ générique, l'application $z \mapsto \lambda z$ est une composée des deux.

25.6.1.5 Application linéaire

SSUBSooRBCWooSCIQEL

Nous nous en voudrions de ne pas parler d'applications linéaires lorsque nous parlons de géométrie sur $\hat{\mathbb{C}}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Lorsque nous parlons de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \alpha z + \beta, \end{aligned} \tag{25.148}$$

nous entendons implicitement que $f(\infty) = \infty$.

25.6.1.6 Inversion

SSUBSooPOUNooTPilbE

L'inversion d'un cercle de $\mathbb{R}^2$ est définie par la proposition 24.5. De nombreuses propriétés y sont décrites, y compris son écriture complexe dans la proposition 24.10. Tout cela était du temps de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{C}$, mais maintenant nous sommes dans $\hat{\mathbb{C}}$ et nous voulons plus.

DEFooIUTZooWRaXts

Définition 25.70 ([702]).
*Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}^*$. L'**inversion** de centre ω et de **puissance** R^2 est l'application*

$$\begin{aligned} i\colon \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \begin{cases} \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\omega}} + \omega & si\ z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \\ \infty & si\ z = \omega \\ \omega & si\ z = \infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{25.149}$$

Notons que grâce aux conventions type $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$, nous pouvons nous contenter de la première formule pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$, et nous n'avons en réalité pas besoin de décrire $i(\infty)$ et $i(\omega)$ séparément.

Exemple 25.71.
L'inversion de cercle de centre 0 et de rayon 1 est l'application $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, que l'on prolonge avec $0 \mapsto \infty$ et $\infty \mapsto 0$. △

25.6.2 Homographies

La notion d'homographie est la définition 25.20. Pour une homographie $\phi\colon P_1(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{C})$ nous avons un isomorphisme d'espace vectoriel $\bar{\phi}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Vue la bijection (25.130), nous voulons plutôt travailler avec $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui est un ensemble avec lequel nous sommes plus familier. Nous allons donc travailler avec

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \\ &\tilde{\phi} = \varphi_0 \circ \phi \circ \varphi_0^{-1}. \end{aligned} \tag{25.150}$$

PROPooTZJBooPpowOo

Proposition 25.72.
L'application $\phi = \varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varphi_0$ est une homographie de $P(\mathbb{C}^2)$ si et seulement si l'application $\tilde{\phi}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ est de la forme

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{25.151}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

Par convention nous posons $z/0 = \infty$ dès que $z \neq 0$; en particulier $\tilde{\phi}(\infty) = a/c$ et $\tilde{\phi}(-d/c) = \infty$.

Démonstration. Nous séparons la condition suffisante de la condition nécessaire.

(1) $\Rightarrow$ La condition $\pi \circ \bar{\phi} = \phi \circ \pi$ (de (25.32)) nous dit que

$$\big[\bar{\phi}(z_1, z_2)\big] = \phi\big([z_1, z_2]\big), \tag{25.152}$$

et comme $\bar{\phi}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel nous avons $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - cb \neq 0$ pour lesquels

$$\bar{\phi}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}. \tag{25.153}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors nous avons

$$\tilde{\phi}(z) = (\varphi_0 \circ \phi)[z, 1] = \varphi_0\Big(\big[\bar{\phi}(z, 1)\big]\Big) = \varphi_0\big([az + b, cz + d]\big) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{25.154}$$

EQooNWVZooUClOSd

Il est important de comprendre que cette formule fonctionne pour tout $z \in \mathbb{C}$. En effet nous pourrions avoir un doute sur $z = -d/c$. D'abord si $c = 0$ alors $d \neq 0$ et ce problème n'existe pas : le dénominateur est toujours non nul. Nous avons donc seulement un doute lorsque $c \neq 0$. Dans ce cas,

$$\tilde{\phi}(-d/c) = \frac{-\frac{ad}{c} + b}{0}. \tag{25.155}$$

Mais $c \neq 0$, donc le numérateur est non nul. Or lorsque $z \neq 0$ nous avons posé $z/0 = \infty$, donc dans notre cas,

$$\tilde{\phi}(-d/c) = \infty \tag{25.156}$$

automatiquement, et cela est encodé dans la formule (25.154).

Il nous reste à déterminer $\tilde{\phi}(\infty)$. Nous avons :

$$\tilde{\phi}(\infty) = (\varphi_0 \circ \phi)\big([1, 0]\big) = \varphi_0\big[\bar{\phi}(1, 1)\big] = \varphi_0\big([a, c]\big) = \begin{cases} a/c & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{si } c = 0 \end{cases} \tag{25.157}$$

où la distinction entre les deux cas n'est pas fondamentale parce que si $c = 0$ alors $a \neq 0$ et $a/c = \infty$.

(2) $\Leftarrow$

En notant $Z = [z_1, z_2]$ (pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) nous avons

$$\phi\big([z_1, z_2]\big) = \varphi^{-1}\left(\frac{a\varphi_0(Z) + b}{c\varphi_0(Z) + d}\right) = \big[a\varphi_0(Z) + b, c\varphi_0(Z) + d\big]. \tag{25.158}$$

Nous définissons $\bar{\phi}$ par son action sur les vecteurs de base : $\bar{\phi}(1, 0) = (a, c)$ et $\bar{\phi}(0, 1) = (b, d)$. Nous avons bien l'isomorphisme d'espace vectoriel $\bar{\phi}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dont nous avons besoin pour la définition 25.20. D'abord le fait que $ad - cb$ soit non nul assure que le $\bar{\phi}$ ainsi défini est bien bijectif[9]. Et de plus ce $\bar{\phi}$ vérifie la condition

$$\begin{aligned} \pi\big(\bar{\phi}(z_1, z_2)\big) &= \pi\big((az_1, cz_1) + (bz_2, dz_2)\big) && \text{(25.159a)} \\ &= [az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2] && \text{(25.159b)} \\ &= \big[a\varphi_0(Z) + b, c\varphi_0(Z) + d\big] && \text{(25.159c)} \\ &= \phi\big(\pi(z_1, z_2)\big). && \text{(25.159d)} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la notion de classe pour diviser par z_2 et faire apparaitre $\varphi_0(Z)$.

[9] Si vous n'en êtes pas convaincu, écrivez la matrice de l'application qui envoie $(1, 0)$ sur (a, c) et $(0, 1)$ sur (b, d), et demandez-vous sous quelle condition elle est inversible.

□

Remarque 25.73.
En prenant les conventions relativement claires $\infty \times a = \infty$ (pour $a \neq 0$) et $\infty \pm a = \infty$ (avec $a \neq \infty$), alors tout est dans la formule

$$\bar{\phi}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{25.160}$$

avec $ad - cb \neq 0$. Il n'y a pas besoin de traiter séparément le cas $z = \infty$ ou $z = -d/c$.

DEFooAMQHooPFUgIa

Définition 25.74.
*Nous aimons tellement l'identification $\varphi_0 \colon P(\mathbb{C}^2) \to \hat{\mathbb{C}}$ que nous allons parler d'**homographie** sur $\hat{\mathbb{C}}$ pour les applications $\tilde{\phi}$ de la forme*

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{25.161}$$

avec $ad - cb \neq 0$.

NORMooCVYKooYvjIeE

25.75.
La proposition 25.72 nous indique que les homographies de $\hat{\mathbb{C}}$ sont de la forme $\phi = \varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varphi_0$ pour une homographie $\phi \colon P(\mathbb{C}^2) \to P(\mathbb{C}^2)$.

PROPooSQFOooRginjJ

Proposition 25.76 ([702]).
L'application $h \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ associée à une homographie est soit linéaire, soit de la forme $h = l_1 \circ \iota \circ l_2$ où l_i sont linéaires et ι est l'application $z \mapsto 1/z$.

Démonstration. Commençons par une remarque : lorsque nous parlons d'une application linéaire, c'est au sens de la note 25.6.1.5 qui explique qu'une application linéaire sur $\mathbb{C}$ est automatiquement prolongée à $\hat{\mathbb{C}}$ par $f(\infty) = \infty$.

Soit donc l'application

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{25.162}$$

Si $c = 0$, alors c'est une application linéaire et la preuve est terminée. Nous supposons que $c \neq 0$. Nous posons

$$l_2(z) = cz + d, \tag{25.163}$$

et ensuite $l_1(z) = \alpha z + \beta$ avec α et β à déterminer. Un peu de calcul :

$$(l_1 \circ \iota \circ l_2)(z) = l_1\left(\frac{1}{cz+d}\right) = \frac{\alpha + \beta cz + \beta d}{cz+d}, \tag{25.164}$$

et en imposant que cela soit égal à $\frac{az+b}{cz+d}$ nous trouvons $\beta = a/c$ et $\alpha = b - ad/c$. Il est vite vérifié que ces choix donnent le bon résultat. □

NORMooMMKOooQlzjqJ

25.77.
Vu que les applications linéaires sont des composées d'une translation et d'une rotation-homothétie, et que l'application i est une composée d'une inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$ et d'une réflexion $z \mapsto \bar{z}$, toutes les homographies sont des composées des éléments suivants :

- inversion[10] $z \mapsto 1/\bar{z}$, prolongée par $i(\infty) = 0$ et $i(0) = \infty$;
- réflexion $z \mapsto \bar{z}$;
- translation $z \mapsto z + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$;
- rotation-homothétie $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Toutes ces opérations sont prolongées à $\hat{\mathbb{C}}$ par $1/\infty = 0$, $\lambda \cdot \infty = \omega$ (si $\lambda \neq 0$) et $\infty + \lambda = \infty$. Nous ne définissons pas $0 \cdot \infty$ et $\infty - \infty$.

Certes nous pouvons construire des homographies à partir d'ingrédients dont la conjugaison complexe. Il ne faudrait cependant pas déduire que cette conjugaison est une homographie.

LEMooGDDJooBpJlUf

Lemme 25.78.
La conjugaison complexe n'est pas une homographie.

[10] Oui, c'est l'inversion de la géométrie hyperbolique, voir 25.6.1.6.

Démonstration. Si elle l'était nous aurions des nombres $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et

$$\frac{az + b}{cz + d} = \bar{z} \tag{25.165}$$

EQooJMAZooVcJIAP

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En posant $z = 0$ nous avons déjà $b/d = 0$, c'est-à-dire $b = 0$. Avec $z = 1$ nous trouvons alors $a/(c+d) = 1$, c'est-à-dire

$$a = c + d. \tag{25.166}$$

(1) **Si** $ci + d \neq 0$

Dans ce cas nous pouvons évaluer (25.165) en $z = i$ et avoir $a = -ci + d$. Mais comme nous avions déjà $a = c + d$ nous déduisons $c = 0$. Nous restons donc avec

$$\frac{a}{d} z = \bar{z} \tag{25.167}$$

pour tout z. En prenant $z = 1$ puis $z = i$, il est vite remarqué que cela n'est pas possible.

(2) **Si** $ci + d = 0$

Nous rappelons que $ad \neq 0$. Nous écrivons l'équation avec $z = -i$ pour trouver

$$\frac{-ai}{-ci + d} = i, \tag{25.168}$$

qui donne immédiatement $a = ci - d$. Nous avons donc les trois équations

$$\begin{cases} c = id & \text{(25.169a)} \\ a = ci - d & \text{(25.169b)} \\ a = c + d. & \text{(25.169c)} \end{cases}$$

Une tentative de résolution tombe rapidement sur une impossibilité (en substituant la première dans les deux autres et en comparant les deux valeurs de a par exemple).

□

La proposition suivante ressemble à s'y méprendre à la proposition 24.11, mais elle diffère en deux points. D'abord elle ne traite que de l'inversion par rapport à l'origine, mais surtout, elle traite le point $z = \infty$. C'est un avantage de travailler sur $\hat{\mathbb{C}}$ plutôt que sur $\mathbb{R}^2$.

PROPooEAKXooUIqWEv

Proposition 25.79 (Inversion de cercles et de droites)**.**
L'inversion dans $\hat{\mathbb{C}}$ envoie

(1) une droite passant par 0 sur elle-même

(2) une droite ne passant pas par 0 sur un cercle passant par 0.

(3) un cercle ne passant pas par 0 en un cercle ne passant pas par 0.

(4) un cercle passant par 0 en une droite ne passant pas par 0.

Démonstration. Décomposition en tous les cas possibles.

(1) **Droite passant par 0**

La façon la plus simple de traiter la droite passant par 0 est de l'écrire sous forme paramétrique :

$$z(t) = te^{i\theta} \tag{25.170}$$

pour θ fixé et $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En appliquant l'inversion :

$$\iota\big(z(t)\big) = \frac{1}{(te^{i\theta})^*} = \frac{1}{t} e^{i\theta}. \tag{25.171}$$

Notons que les cas particuliers fonctionnent : pour $t = 0$ nous avons le point ∞ et pour $t = \infty$ nous avons 0.

(2) **Droite ne passant pas par 0**

Une droite ne passant par par $z = 0$ est un ensemble de la forme

$$d(\omega, k) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k\} \cup \{\infty\} \tag{25.172}$$

avec $k \neq 0$. Étant donné que ι est une bijection et même une involution nous avons $z \in \iota\big(d(\omega, k)\big)$ si et seulement si $\tau(z) \in d(\omega, k)$. L'équation est donc, pour $z \neq 0$:

$$\frac{\bar{\omega}}{z} + \frac{\omega}{\bar{z}} = k. \tag{25.173}$$

Et comme $z \neq 0$ nous pouvons multiplier par $z\bar{z}$ pour trouver $\bar{z}\bar{\omega} + z\omega = kz\bar{z}$. Donc

$$\iota\big(d(\omega, k)\big) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \bar{z}\bar{\omega} + z\omega = kz\bar{z}\} \cup \{0\}. \tag{25.174}$$

Dans l'ensemble, nous pouvons renommer z et $\bar{z}$ pour avoir une forme plus symétrique. De plus il se fait que $z = 0$ vérifie l'équation donnée ; nous pouvons donc lever la condition $z \in \mathbb{C}^*$ et ne plus ajouter $\{0\}$ à côté :

$$\iota\big(d(\omega, k)\big) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \bar{\omega}z + \omega\bar{z} = kz\bar{z}\}. \tag{25.175}$$

Cela est l'équation d'un cercle passant par l'origine (définition 25.63).

(3) **Cercle ne passant pas par 0**

Nous considérons le cercle $C(\omega, r)$ avec $r^2 \neq |\omega|^2$. Il ne contient ni ∞ ni 0 et nous avons alors

$$\iota\big(C(\omega, r)\big) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \frac{1}{z\bar{z}} - \bar{\omega}\frac{1}{\bar{z}} - \omega\frac{1}{z} = r^2 - |\omega|^2\}. \tag{25.176}$$

Vu que z n'est jamais nul nous pouvons multiplier l'équation par $z\bar{z}$:

$$\iota\big(C(\omega, r)\big) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \big(|\omega|^2 - r^2\big)z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = -1\}. \tag{25.177}$$

Le coefficient $|\omega|^2 - r^2$ est non nul par hypothèse et cet ensemble est un cercle par le lemme 25.65. Il ne passe manifestement pas par $z = 0$.

(4) **Cercle passant par 0**

Le cercle passe par 0, et donc son image par ∞. Nous écrivons alors

$$\iota\big(C(\omega, |\omega|)\big) = \iota\big(C(\omega, |\omega|) \setminus \{0\}\big) \cup \{\infty\}. \tag{25.178}$$

Nous avons

$$C(\omega, |\omega|) \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = 0\}, \tag{25.179}$$

et un calcul usuel donne

$$\iota\big(C(\omega, |\omega|) \setminus \{0\}\big) = \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } 1 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = 0\}, \tag{25.180}$$

et donc

$$\iota\big(C(\omega, |\omega|)\big) = d(\omega, 1), \tag{25.181}$$

en nous souvenant que le point ∞ est contenu dans $d(\omega, 1)$.

□

PROPooYFJBooAWxFIs

Proposition 25.80.
Une homographie conserve l'ensemble des droites et cercles de $\hat{\mathbb{C}}$.

Attention : cela ne veut pas dire qu'une homographie transforme une droite en une droite et un cercle en un cercle. Ça veut dire qu'une homographie transforme une droite en une droite ou un cercle et un cercle en une droite ou un cercle.

Démonstration. Nous savons par la proposition 24.11 et 25.77 que les homographies se décomposent en inversion, réflexion, translation et rotation-homothétie.

À part pour l'inversion, tout est clair comment ça fonctionne hein. En ce qui concerne l'inversion, nous avons la proposition 25.79 qui donne déjà toutes les réponses.

□

25.81.
Les homographies préservent les angles, c'est l'objet du théorème suivant. Il ne faudrait cependant pas croire que si A, B et C sont trois points distincts, l'angle entre $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ est le même que celui entre $\overline{f(A)f(C)}$ et $\overline{f(B)f(C)}$ dès que f est une homographie. Cela serait préserver les angles globalement, c'est-à-dire préserver les angles lorsque les points sont déplacés par f.

Nous allons regarder les angles locaux, c'est-à-dire lorsque les points sont déplacés par df.

Définition 25.82.
Nous disons qu'une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ préserve localement les angles non orientés lorsque

$$\cos\big(df_a(u), df_a(v)\big) = \cos(u, v) \tag{25.182}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^2$ et $u, v \in \mathbb{R}^2$. Ici il est mieux de penser à $u, v \in T_a\mathbb{R}^2$ pour qui sait les espaces tangents en géométrie différentielle.

Voir la définition de l'angle 20.58.

Théorème 25.83.
Les homographies de $P(\mathbb{C}^2)$ préservent localement les angles non orientés.

Démonstration. En ce qui concerne les translations, dilatations et rotations, les choses sont claires. Vérifions pour l'inversion, qu'il faut interpréter dans $\mathbb{R}^2$. Pour $z = x + iy$ nous avons

$$\iota(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{25.183}$$

Nous devons donc étudier la fonction

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x}{r^2}, -\frac{y}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{25.184}$$

où nous avons posé $r^2 = x^2 + y^2$ pour simplifier les notations.

Soient deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ et un point $a \in \mathbb{R}^2$. Nous devons prouver que

$$\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{dF_a(u) \cdot dF_a(v)}{\|dF_a(u)\|\|dF_a(v)\|}. \tag{25.185}$$

EQooRXSJopFnLVLC

Pour cela, nous pourrions calculer dF_a et passer en coordonnées polaires[699] mais nous préférons faire les calculs à la dure parce que nous avons Sage avec nous.

Nous notons A la matrice de dF en $a = (x, y)$ et nous avons

$$Au \cdot Av = A^tAu \cdot v \tag{25.186}$$

ainsi que $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{A^tAu \cdot u}$, de telle sorte qu'il devienne urgent de calculer A^tA. Voici le calcul :

```
var('y')

# les fonctions coordonnées
F1(x,y)=x/(x**2+y**2)
F2(x,y)=-y/(x**2+y**2)

# La matrice différentielle :
A=matrix( [  [F1.diff(x).simplify_full(),F1.diff(y).simplify_full()],[F2.↩
    diff(x).simplify_full(),F2.diff(y).simplify_full()]   ] )

# Quelqu'un peut expliquer pourquoi ceci ne fonctionne pas ?
# A=matrix( [  [F1.diff(x),F1.diff(y)],[F2.diff(x),F2.diff(y)]   ] ).↩
    simplify_full()

# A^tA
S=A.transpose()*A
S=S.simplify_full()      # Mais ça, ça marche !!
print(S)
```

tex/sage/sageSnip009.sage

Le résultat est que

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^4} \end{pmatrix} = \frac{1}{r^4}\,\mathrm{Id}\,. \tag{25.187}$$

La vérification de (25.185) est alors immédiate. □

25.6.3 Birapport

Nous introduisons maintenant quelque chose qui s'appelle le « birapport » et qui n'est à priori pas du tout lié au birapport défini en 25.42.

DEFooQYHVooMZwQMB

Définition 25.84 (Birapport dans $\hat{\mathbb{C}}$[629])**.**
*Soient $a, b, c, x \in \hat{\mathbb{C}}$ où a, b et c sont distincts. Le **birapport** de ces quatre nombres est l'élément de $\hat{\mathbb{C}}$ donné par, si $a, b, c \neq \infty$:*

EQooQJWZooOXKslb

$$[a, b, c, x] = \frac{(a-c)(b-x)}{(b-c)(a-x)}, \tag{25.188}$$

et

SUBEQooNSQNooYUhuzB

$$[\infty, b, c, x] = \frac{b-x}{b-c} \tag{25.189a}$$

$$[a, \infty, c, x] = \frac{a-c}{a-x} \tag{25.189b}$$

$$[a, b, \infty, x] = \frac{b-x}{a-x} \tag{25.189c}$$

25.85.
Notons la « logique » des cas particuliers. Pour le premier, si $a \to \infty$ tandis que les autres restent dans $\mathbb{C}$ alors $a - c$ et $a - x$ deviennent du même ordre de grandeur et se simplifient. Il reste les deux autres parties de la fraction.

C'est cette même logique qui, partant de $[a, b, \infty, x] = \frac{b-x}{a-x}$ donne

$$[a, b, \infty, \infty] = 1 \tag{25.190}$$

comme il se doit si nous avons l'intention de ressembler au lemme 25.47.

L'objet « birapport » introduit ici est évidemment lié au birapport sur $P(\mathbb{C}^2)$ défini plus haut. Le lien est la proposition suivante.

PROPooLKQQooEOrjwC

Proposition 25.86.
Soit l'application $\varphi_0 \colon P(\mathbb{C}^2) \to \hat{\mathbb{C}}$ définie en 25.36. Si $A, B, C, X \in P(\mathbb{C}^2)$ alors

EQooEOZZooMRHJfH

$$[A, B, C, X]_{\varphi_0} = [\varphi_0(A), \varphi_0(B), \varphi_0(C), \varphi_0(X)]. \tag{25.191}$$

Cela est une égalité dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Nous écrivons $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$ avec $a_1, a_2, b_2, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Par définition $[A, B, C, X]_{\varphi_0} = (\varphi_0 \circ \phi)(X)$ où $\phi \colon P(\mathbb{C}^2) \to P(\mathbb{C}^2)$ est l'unique homographie telle que

SUBEQSooTFWTooRnijrY

$$\phi[a_1, a_2] = [1, 0] \tag{25.192a}$$

$$\phi[b_1, b_2] = [0, 1] \tag{25.192b}$$

$$\phi[c_1, c_2] = [1, 1] \tag{25.192c}$$

Une des difficultés de cette preuve va être de calculer ce ϕ. D'abord nous pouvons introduire $\tilde{\phi} = \varphi_0 \circ \phi \circ \varphi_0^{-1}$ qui est obligatoirement (proposition 25.72) de la forme

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \tag{25.193}$$

Nous allons imposer les relations (25.192) pour déterminer les coefficients α, β, γ et δ.

D'abord

$$(\varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \varphi_0)\big([a_1, a_2]\big) = (\varphi_0^{-1} \circ \tilde{\phi})(a_1/a_2) \tag{25.194a}$$

$$= \varphi_0^{-1}\left(\frac{\alpha\frac{a_1}{a_2} + \beta}{\gamma\frac{a_1}{a_2} + \delta}\right) \tag{25.194b}$$

$$= \big[\alpha\frac{a_1}{a_2} + \beta, \gamma\frac{a_1}{a_2} + \delta\big]. \tag{25.194c}$$

Égaler cela à $[1,0]$ donne

$$\begin{cases} \alpha\frac{a_1}{a_2}+\beta\neq 0 & (25.195a)\\ \gamma\frac{a_1}{a_2}+\delta=0. & (25.195b)\end{cases}$$

Donc nous avons déjà

$$\tilde{\phi}(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma(z-\frac{a_1}{a_2})}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma\big(z-\varphi_0(A)\big)}. \tag{25.196}$$

En y imposant la contrainte $(\varphi_0^{-1}\circ\tilde{\phi}\circ\varphi_0)([b_1,b_2])=[0,1]$ nous trouvons les contraintes

$$\begin{cases} \gamma\big(\varphi_0(B)-\varphi_0(A)\big)\neq 0 & (25.197a)\\ \beta=-\alpha\varphi_0(B). & (25.197b)\end{cases}$$

Nous avons décidé d'écrire $\varphi_0(A)$ au lieu de a_1/a_2 à la fois pour un soucis de simplification d'écriture et dans le but de ressembler à (25.191). En substituant :

$$\tilde{\phi}(z)=\frac{\alpha\big(z-\varphi_0(B)\big)}{\gamma\big(z-\varphi_0(A)\big)}. \tag{25.198}$$

La condition pour $[c_1,c_2]$ donne

$$\big[\alpha\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big),\gamma\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big)\big]=[1,1], \tag{25.199}$$

ce qui donne

$$\alpha\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big)=\gamma\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big). \tag{25.200}$$

Nous avons alors

$$\gamma=\alpha\frac{\varphi_0(C)-\varphi_0(B)}{\varphi_0(C)-\varphi_0(A)}, \tag{25.201}$$

et les α se simplifient dans la formule pour $\tilde{\phi}$:

$$\tilde{\phi}(z)=\frac{\big(z-\varphi_0(B)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big)}{\big(z-\varphi_0(A)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big)}. \tag{25.202}$$

Par la proposition 25.72, l'application $\varphi_0^{-1}\circ\tilde{\phi}\circ\varphi_0$ est une homographie. Nous pouvons donc calmement calculer le birapport $[A,B,C,X]_{\varphi_0}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}[A,B,C,X]_{\varphi_0}&=(\varphi_0\circ\phi)(X) && (25.203a)\\ &=(\varphi_0\circ\varphi_0^{-1}\circ\tilde{\phi}\circ\varphi_0)(X) && (25.203b)\\ &=\tilde{\phi}\big(\varphi_0(X)\big) && (25.203c)\\ &=\frac{\big(\varphi_0(X)-\varphi_0(B)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(A)\big)}{\big(\varphi_0(X)-\varphi_0(A)\big)\big(\varphi_0(C)-\varphi_0(B)\big)} && (25.203d)\\ &=[\varphi_0(A),\varphi_0(B),\varphi_0(C),\varphi_0(A)]. && (25.203e)\end{aligned}$$

□

PROPooQGPFooReNaGq

Proposition 25.87.
Les homographies de $\hat{\mathbb{C}}$ conservent le birapport.

Démonstration. Ici le mot « homographie » réfère à la définition 25.74 et le birapport à 25.84. Soient $a,b,c,x\in\hat{\mathbb{C}}$ et une homographie $\tilde{\phi}\colon\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une homographie $\phi\colon P(\mathbb{C}^2)\to P(\mathbb{C}^2)$ telle que $\tilde{\phi}=\varphi_0\circ\phi\varphi_0^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned}\big[\tilde{\phi}(a),\tilde{\phi}(b),\tilde{\phi}(c),\tilde{\phi}(x)\big]&=\big[(\phi\circ\varphi_0^{-1})(a),(\phi\circ\varphi_0^{-1})(b),(\phi\circ\varphi_0^{-1})(c),(\phi\circ\varphi_0^{-1})(x),\big]_{\varphi_0} && (25.204a)\\ &=\big[\varphi_0^{-1}(a),\varphi_0^{-1}(b),\varphi_0^{-1}(c),\varphi_0^{-1}(x),\big]_{\varphi_0} && (25.204b)\\ &=[a,b,c,x]. && (25.204c)\end{aligned}$$

Justifications :

- Identification des birapports sur $P(\mathbb{C}^2)$ et sur $\hat{\mathbb{C}}$, proposition 25.86.

- Invariance du birapport sur les homographies (dans $P(\mathbb{C}^2)$), proposition 25.49.

□

PROPooSGCJooLnOLCx

Proposition 25.88.
Soient des points a, b, c, x dans $\hat{\mathbb{C}}$ avec a, b, c distincts. Ils sont alignés ou cocycliques si et seulement si $[a, b, c, x] \in \hat{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Nous allons faire plusieurs cas. Mais dans tous les cas vous pouvez relire la définition des angles orientés 20.159 et la partie sur les angles dans les nombres complexes 20.11.12.

(1) **Tous les points sont distincts et dans $\mathbb{C}$**

D'une part, nous savons que le nombre complexe $re^{i\theta}$ est réel si et seulement si $\theta \in [0]_\pi$, et d'autre part l'argument du birapport (25.188) est

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] + [\overrightarrow{xb}, \overrightarrow{xa}]. \tag{25.205}$$

Le birapport est réel si et seulement si

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] \in [0]_\pi. \tag{25.206}$$

À gauche nous avons une classe modulo 2π et à droite une classe modulo π. L'égalité signifie qu'il y a un représentant du membre de gauche qui appartient au membre de droite. Si vous aimez faire très attention à ce que signifient les notations, voici trois manières d'écrire la condition, par ordre croissant de précision :

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] = [0]_\pi, \tag{25.207a}$$

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] \in [0]_\pi, \tag{25.207b}$$

$$[\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}] - [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}] \subset [0]_\pi. \tag{25.207c}$$

SUBEQooEAGIooIKdPQV

Nous avons donc que le birapport est réel si et seulement si la condition (25.207c) est vérifiée. D'après le théorème 20.167, cette dernière condition est équivalente à dire que les points a, b, c et x sont alignés.

(2) **Pas quatre points distincts, dans $\mathbb{C}$**

Nous supposons encore que a, b, c et x sont dans $\mathbb{C}$. Mais nous supposons que x est un de a, b ou c. Vu que par hypothèse a, b et c sont distincts, c'est le seul cas à considérer dans la catégorie des 4 points non distincts.

Trois points sont toujours alignés ou cocycliques[11]. Donc nous devons seulement montrer que dans ce cas le birapport est toujours dans $\hat{\mathbb{R}}$. Par définition,

- Si $x = a$ alors $[a, b, c, x] = \infty$,
- Si $x = b$ alors $[a, b, c, x] = 0$,
- Si $a = c$ alors $[a, b, c, x] = 1$.

Dans tous les cas de figure le birapport est dans $\hat{\mathbb{R}}$.

À ce niveau de la preuve nous devons encore vérifier les cas où a, b, c ou x valent ∞. Si l'un de a, b ou c est ∞ et si x l'est aussi, alors, comme ∞ est aligné avec tout, nous avons seulement une droite passant par deux points. Il nous faut donc seulement regarder les cas où un seul des 4 points est ∞.

(1) **Si $a = \infty$** Le birapport est alors (par (25.189a))

$$[\infty, b, c, x] = \frac{b - x}{a - x}, \tag{25.208}$$

qui est un nombre à priori complexe dont le dénominateur est supposé non nul parce que le cas $a = x$ est déjà traité. L'argument de ce nombre est dans la classe de l'angle orienté

$$\arg\left(\frac{b - x}{a - x}\right) \in [\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}]. \tag{25.209}$$

Le birapport est réel si et seulement si le membre de gauche est dans $[0]_\pi$. Et cela est justement le cas où le membre de droite donne des points alignés.

Les cas $b = \infty$, $c = \infty$ et $x = \infty$ se traitent de la même manière. □

[11] Si ils ne sont pas alignés, prendre la médiatrice du segment $[a, b]$ et celle de $[b, c]$, et l'intersection vous donnera le centre d'un cercle passant par a, b et c.

25.6.4 Division harmonique

Définition 25.89.
*Nous disons que les éléments a, b, c et x de $\hat{\mathbb{C}}$ sont en **division harmonique** lorsque* $[a,b,c,x]=-1$.

NORMooUWYDooAZTTWu

25.90.
Une chose qui sera utile par la suite est de remarquer que $[a,b,c,\infty]=-1$ lorsque $c=\frac{a+b}{2}$.

Nous allons maintenant voir comment, pour $a,b,c\in\mathbb{C}$ donnés nous pouvons construire x tels que a,b,c,x soient en division harmonique. Vu que trois points sont soit cocycliques soit alignés nous divisons la construction en deux parties.

Notons que si nous trouvons une construction qui donne un point x vérifiant $[a,b,c,x]=-1$ alors nous prouvons au passage que la construction ne dépend pas des choix intermédiaires parce que il n'existe qu'un unique x tel que $[a,b,c,x]=-1$ lorsque a,b,c sont donnés.

LEMooAEDTooKsUoPw

Lemme 25.91 ([703, 704])**.**
Soient a,b,c cocycliques dans $\mathbb{C}$. Nous nommons $\mathcal{C}$ le cercle contenant a, b et c ainsi que T_a et T_b les tangentes à $\mathcal{C}$ en a et b. Soit $m=T_a\cap T_b$ et la droite $L=(mc)$. Alors le point

$$x=(mc)\cap\mathcal{C} \tag{25.210}$$

vérifie $[a,b,c,x]=-1$.

Si $m=\infty$ (arrive lorsque $T_a\parallel T_b$) alors en guise de L nous prenons la parallèle à T_a passant par c.

Démonstration. Nous séparons les cas suivant que $m=\infty$ ou non.

(1) $\underline{m=\infty}$

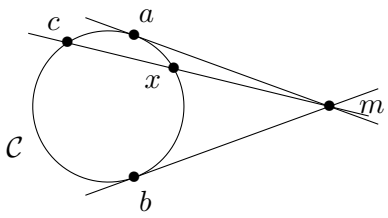
Les tangentes à $\mathcal{C}$ en a et en b sont parallèles, c'est-à-dire que ces points sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$. Les homographies préservent le birapport (proposition 25.87), et les rotations, dilatations et translations sont des homographies (voir 25.77).

Nous pouvons donc nous ramener au cas où $\mathcal{C}$ est centré en 0 et de rayon 1 avec $a=i$ et $b=-i$. Dans ce cas, $c=e^{i\theta}$. Vu que x est donné par l'intersection entre le cercle et la droite horizontale passant par c nous avons $x=e^{i(\pi-\theta)}$. Le birapport se calcule explicitement :

$$[a,b,c,x]=\frac{(i-e^{i\theta})(-i-e^{i(\pi-\theta)})}{(-i-e^{i\theta})(i-e^{i(\pi-\theta)})}=-1. \tag{25.211}$$

(2) $\underline{m\neq\infty}$

Nous sommes dans la situation suivante où à une translation près nous supposons $x=0$:



Nous allons prouver que dans ce cas, $[a,b,c,x]=-1$. Pour cela nous considérons l'inversion de centre x (qui est $x=0$ par translation). Soit $\tilde{\phi}$ cette homographie. Elle conserve le birapport, il nous allons voir que calculer $[\tilde{\phi}(a),\tilde{\phi}(b),\tilde{\phi}(c),\tilde{\phi}(x)]$ se révèle être plus facile[12].

Nous nommons $A=(am)$, $B=(bm)$, $C=(cm)$ et $\mathcal{C}$, le cercle. Nous allons maintenant faire intensément usage de la proposition 25.79. Nous avons :

- $\tilde{\phi}(A)$ est un cercle passant par 0.
- $\tilde{\phi}(B)$ est un cercle passant par 0.
- $\tilde{\phi}(C)$ est la droite C.
- $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$ est une droite ne passant pas par 0.

[12] Si vous n'avez peur d'aucun calculs, il suffit de poser $a=e^{i\theta}$, $b=e^{-i\theta}$ et $c=e^{i\sigma}$ et vous êtes théoriquement capable de calculer les coordonnées de tous les points, y compris de x en termes de θ et σ. Ensuite le calcul du birapport est explicite.

Les droites A et B se coupent en m et en ∞ (qui sont des points distincts). Donc les cercles $\tilde{\phi}(A)$ et $\tilde{\phi}(B)$ se coupent en 0 et $\tilde{\phi}(m)$, aucun de ces deux points n'est sur la droite $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$.

Par tangence, la droite A et le cercle $\mathcal{C}$ se coupent en un seul point (a). Donc $\tilde{\phi}(A)$ coupe $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$ en un seul point, $\tilde{\phi}(a)$. Idem pour le cercle $\tilde{\phi}(B)$.

Nous avons donc que les cercles $\tilde{\phi}(A)$ et $\tilde{\phi}(B)$ sont tangents à la droite $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$ et se coupent en exactement deux points distincts (qui sont donc du même côté de la droite).

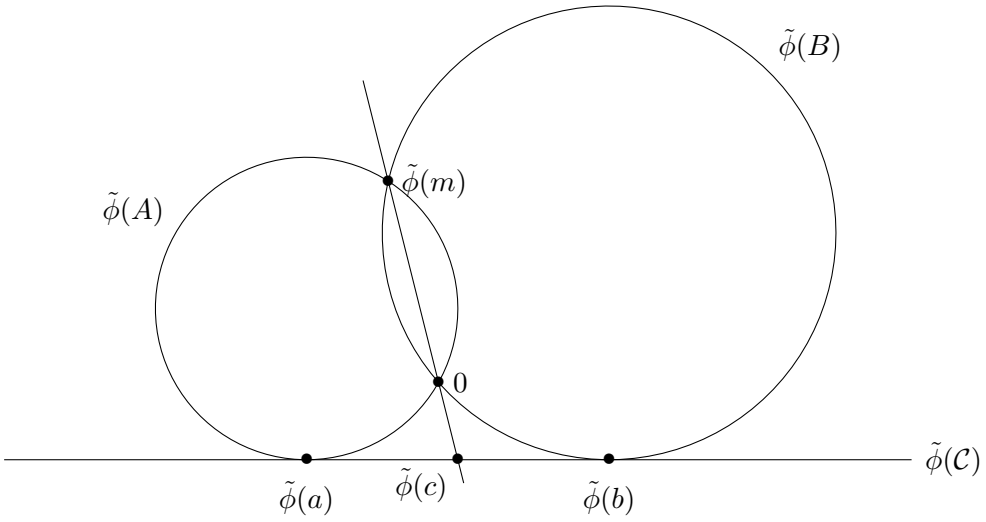
Nous nous intéressons à la droite $\tilde{\phi}(C)$. C'est une droite parce que c'est l'image d'une droite passant par 0. Elle passe par 0, par $\tilde{\phi}(c)$ et $\tilde{\phi}(m)$. Le fait qu'elle passe par 0 et $\tilde{\phi}(m)$ fait que c'est la droite passant par les deux intersections des cercles. Vu que $c \in \mathcal{C} \cap C$, le point d'intersection $\tilde{\phi}(C) \cap \tilde{\phi}(\mathcal{C})$ est $\tilde{\phi}(c)$.

Quelle est la puissance du point $\tilde{\phi}(c)$ par rapport au cercle $\tilde{\phi}(A)$? En la calculant avec la droite $\tilde{\phi}(C)$, qui intersecte les deux cercles aux points déjà étudiés, la puissance est :

$$k = d\big(\tilde{\phi}(c), 0\big) \times d\big(\tilde{\phi}(c), \tilde{\phi}(m)\big). \tag{25.212}$$

Vu que ces points sont également sur le cercle $\tilde{\phi}(B)$, la puissance de $\tilde{\phi}(c)$ par rapport à ce second point est la même.

Tout cela justifie le dessin suivant[13] :



Mais la droite passant par $\tilde{\phi}(a)$ et $\tilde{\phi}(c)$ (qui est tangente au cercle) permet également de calculer cette puissance :

$$k = d\big(\tilde{\phi}(a), \tilde{\phi}(c)\big). \tag{25.213}$$

Idem pour la puissance par rapport à l'autre cercle :

$$k = d\big(\tilde{\phi}(b), \tilde{\phi}(c)\big). \tag{25.214}$$

Nous en déduisons que $\tilde{\phi}(c)$ est le milieu entre $\tilde{\phi}(a)$ et $\tilde{\phi}(b)$.

Du coup

$$\big[\tilde{\phi}(a), \tilde{\phi}(b), \tilde{\phi}(c), \tilde{\phi}(x)\big] = \big[\tilde{\phi}(a), \tilde{\phi}(b), \tilde{\phi}(c), \infty\big] = -1 \tag{25.215}$$

en vertu de ce que nous avons raconté en 25.90.

□

LEMooYBTHooABWkeo

Lemme 25.92 ([704]).
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ colinéaires. Soit m un point hors de cette droite. Nous considérons une droite issue de c coupant $[ma]$ en p et $[mb]$ en q.

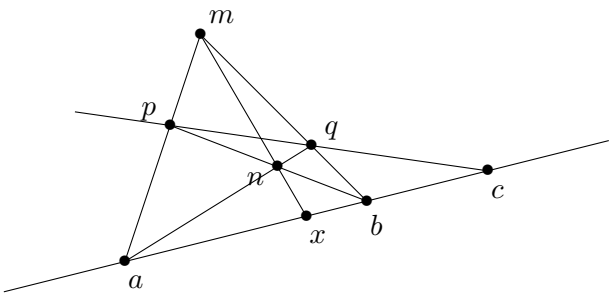
Nous construisons $n = (aq) \cap (pb)$ et finalement $x = (mn) \cap (ab)$.

À la fin nous avons

$$[a, b, c, x] = -1. \tag{25.216}$$

[13] Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire à la preuve, est-ce que vous savez si les deux cercles ont le même rayon ? Et si par hasard la droite $\big(\tilde{\phi}(m)\tilde{\phi}(c)\big)$ n'arrive pas perpendiculairement à $\tilde{\phi}(\mathcal{C})$?

Démonstration. Commençons par un dessin de la situation :



Les points a, b et m ne sont pas alignés, et nous pouvons les utiliser comme repère barycentrique (voir 13.51 pour savoir en deux mots ce que c'est). Nous nommons (α,β,γ) les coordonnées de n dans ce système, c'est-à-dire que

$$\alpha\overrightarrow{na}+\beta\overrightarrow{nb}+\gamma\overrightarrow{nm}=0. \tag{25.217}$$

Dans notre contexte, nous pouvons voir le vecteur $\overrightarrow{st}$ comme une façon d'écrire le nombre $t-s$. Par la proposition 13.58 nous savons les coordonnées barycentriques de p, x et q en regardant le triangle acb. Voici les coordonnées et les relations qu'elles signifient : SUBEQSooKKIXooZbWyHe

$$n=(\alpha,\beta,\gamma), \qquad \alpha\overrightarrow{na}+\beta\overrightarrow{nb}+\gamma\overrightarrow{nm}=0 \tag{25.218a}$$
$$p=(\alpha,0,\gamma), \qquad \alpha\overrightarrow{pa}+\gamma\overrightarrow{pm}=0 \tag{25.218b}$$
$$q=(0,\beta,\gamma), \qquad \beta\overrightarrow{qb}+\gamma\overrightarrow{qm}=0 \tag{25.218c}$$
$$x=(\alpha,\beta,0). \qquad \alpha\overrightarrow{xa}+\beta\overrightarrow{xb}=0. \tag{25.218d}$$

SUBEQooRUUDooDGsMoq

Nous voudrions maintenant voir les coordonnées de c. Nous posons $c=(\lambda,\mu,\sigma)$:

$$\lambda\overrightarrow{ca}+\mu\overrightarrow{cb}+\sigma\overrightarrow{cm}=0. \tag{25.219}$$

EQooZKBSooZQzqrV

Mais a, b et c sont alignés, donc $\overrightarrow{ca}$ et $\overrightarrow{cb}$ sont colinéaires, alors que $\overrightarrow{cm}$ n'est pas aligné avec les deux autres. L'annulation (25.219) demande donc l'annulation séparément

$$\begin{cases} \sigma\overrightarrow{cm}=0 & \text{(25.220a)}\\ \lambda\overrightarrow{ca}+\mu\overrightarrow{cb}=0. & \text{(25.220b)} \end{cases}$$

SUBEQooOTAOooQLndsd

Nous en déduisons que $\sigma=0$ et aussi que λ et μ ne sont pas nuls. Nous posons arbitrairement $\lambda=1$ parce que les coordonnées barycentriques sont définies à coefficient multiplicatif près.

Nous imposons à présent le fait que p, q et c sont alignés. Pour cela nous devons faire apparaitre les vecteurs $\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{pc}$, $\overrightarrow{pc}$. Vu le dessin et les relations disponibles (25.218) le mieux est d'utiliser les relations de Chasles (proposition 13.5) pour faire $\overrightarrow{ca}=\overrightarrow{cp}+\overrightarrow{pa}$ et $\overrightarrow{cb}=\overrightarrow{cq}+\overrightarrow{qb}$. La relation (25.220b) devient :

$$\overrightarrow{cp}+\overrightarrow{pa}+\mu(\overrightarrow{cq}+\overrightarrow{qb})=0. \tag{25.221}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{cp}$ et $\overrightarrow{cq}$ sont alignés, donc nous les écrivons ensemble. Les vecteurs $\overrightarrow{pa}$ et $\overrightarrow{qb}$ se transforment en utilisant les relations (25.218) :

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{pm}-\mu\frac{\gamma}{\beta}\overrightarrow{qm}. \tag{25.222}$$

Enfin nous voulons faire la somme du terme $\overrightarrow{pm}$ avec le terme $\overrightarrow{qm}$. D'abord on change le signe :

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{pm}+\frac{\mu\gamma}{\beta}\overrightarrow{mq} \tag{25.223}$$

ensuite nous écrivons

$$\frac{\mu\gamma}{\beta}=\frac{\mu\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}, \tag{25.224}$$

et

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}(\overrightarrow{pm}+\overrightarrow{mq})+\left(\frac{\mu\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\overrightarrow{mq}=0. \tag{25.225}$$

Tout cela pour

$$\overrightarrow{cp}+\mu\overrightarrow{cq}-\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{pq}+\left(\frac{\mu\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\overrightarrow{mq}=0. \tag{25.226}$$

Le dernier terme n'est pas colinéaire aux deux premiers et s'annule donc séparément :

$$\frac{\mu\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0. \tag{25.227}$$

Cela donne $\mu = -\beta/\alpha$.

Au final nous avons

$$\overrightarrow{ca} - \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{cb} = 0 \tag{25.228}$$

et donc

$$\alpha\overrightarrow{ca} - \beta\overrightarrow{cb} = 0, \tag{25.229}$$

EQooWKBWooEWhDiM

ce qui donne les coordonnées $(\alpha, -\beta, 0)$ pour le point c.

Vu que nous somme dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$, ce que nous notons $\overrightarrow{AB}$ n'est rien d'autre que la différence $B - A$ dans $\mathbb{C}$[14]. La relation (25.229) signifie donc

$$\alpha(a - c) = \beta(b - c). \tag{25.230}$$

Nous avons alors :

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{25.231}$$

Par ailleurs, la relation (25.218d) à propos des coordonnées de x donne

$$\frac{a - x}{b - x} = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{25.232}$$

En égalisant les deux valeurs de β/α nous trouvons :

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{x - a}{b - x}, \tag{25.233}$$

ce qui donne (via un petit jeu de signes)

$$\frac{(c - a)(x - b)}{(c - b)(x - a)} = -1. \tag{25.234}$$

C'est cela que nous voulions. □

25.6.5 Groupe circulaire

Nous avons vu que les homographies préservent l'ensemble des cercles et droites. Nous pouvons nous demander quel est le groupe maximum préservant l'ensemble des cercles et droites.

Définition 25.93.
*Le **groupe circulaire** de $\mathbb{C}$ est le groupe de transformations de $\hat{\mathbb{C}}$ engendré*[15] *par les homographies*[16] *et la conjugaison complexe. Le groupe circulaire de l'espace projectif est l'ensemble des applications de la forme $\varphi_0^{-1} \circ f \circ \varphi_0$ où f est un élément du groupe circulaire de $\mathbb{C}$.*

Vu le lemme 25.78, la conjugaison complexe n'est pas une homographie. Donc cette définition n'est pas stupide : le groupe circulaire est strictement plus grand que le groupe des homographies.

LEMooOPOMooWZLSeH

Lemme 25.94.
Soit une application $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fixant 1 et 0 et préservant les divisions harmoniques (c'est-à-dire tel que son prolongement à $\hat{\mathbb{C}}$ donné par $\alpha(\infty) = \infty$ préserve les divisions harmoniques). Alors α est un automorphisme de corps[17].

Démonstration. Nous savons que si $a, b, c \in \mathbb{C}$ nous avons $c = (a + b)/2$ si et seulement si $[a, b, c, \infty] = -1$. Vu que α préserve les divisions harmoniques nous avons équivalence entre les affirmations suivantes :

$$c = \frac{a + b}{2} \tag{25.235a}$$

$$[a, b, c, \infty] = -1 \tag{25.235b}$$

$$[\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c), \alpha(\infty)] = -1 \tag{25.235c}$$

$$\frac{\alpha(a) + \alpha(b)}{2} = \alpha(c). \tag{25.235d}$$

[14] Les mauvaise langues diront que tout le chapitre sur les espaces affines, et surtout la partie sur les barycentres ne sont rien d'autres que le snobisme d'écrire $\overrightarrow{xy}$ au lieu de $y - x$. C'est aussi une facilité d'écriture.
[15] Définition 2.141.
[16] Homographie de $\hat{\mathbb{C}}$: définition 25.74.
[17] Définition 1.106.

Donc α préserve les milieux : pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\alpha(a)+\alpha(b)}{2}. \tag{25.236}$$

En particulier, cette relation avec $b = 0$ donne (parce que $\alpha(0) = 0$) : $\alpha(a/2) = \alpha(a)/2$. Nous avons au final, en utilisant cela en conjonction avec (25.236) :

$$\frac{\alpha(a)+\alpha(b)}{2} = \alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\alpha(a+b)}{2}. \tag{25.237}$$

Cela démontre déjà que

$$\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b). \tag{25.238}$$

En particulier $\alpha(-a) = \alpha(0-a) = \alpha(0) - \alpha(a) = -\alpha(a)$.

Nous passons maintenant à la démonstration du fait que $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$. Pour tout a différent de 0 et ± 1 nous avons

$$[a, -a, a^2, 1] = \frac{(a-a^2)(-a-1)}{(-a-a^2)(a-1)} = -1. \tag{25.239}$$

Et en prenant $\alpha(a)$ en guise de a nous avons aussi

$$[\alpha(a), -\alpha(a), \alpha(a)^2, \alpha(1)] = -1. \tag{25.240}$$

Vu que α préserve les divisions harmoniques, l'équation (25.239) donne aussi

$$\big[\alpha(a), \alpha(-a), \alpha(a^2), \alpha(1)\big] = -1, \tag{25.241}$$

c'est-à-dire

$$\big[\alpha(a), -\alpha(a), \alpha(a^2), 1\big] = -1. \tag{25.242}$$

Comparant (25.240) avec (25.242) et en tenant compte de l'unicité du birapport[18] nous avons

$$\alpha(a^2) = \alpha(a)^2. \tag{25.243}$$

Avec cela nous pouvons y aller en remarquant que

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \tag{25.244}$$

Nous appliquons α à cette dernière équations en tenant compte de ce que nous savons déjà

$$\alpha(ab) = \left(\frac{\alpha(a)+\alpha(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha(a)-\alpha(b)}{2}\right)^2 = \alpha(a)\alpha(b). \tag{25.245}$$

□

Théorème 25.95 ([704, 705])**.**
Le groupe circulaire de $\mathbb{C}$ est le groupe des bijections $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ préservant l'ensemble des cercles-droites.

Démonstration. L'inclusion dans un sens est facile : les homographies conservent l'ensemble des cercles et droites par la proposition 25.80. Et la conjugaison complexe aussi.

Soit une bijection $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ préservant les cercles-droites. Nous supposons dans un premier temps que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(\infty) = \infty$.

(1) **Pour f vérifiant $f(0, 1, \infty) = 0, 1, \infty$**

Si $\mathcal{C}$ est un cercle alors $f(\mathcal{C})$ est un cercle ou une droite, mais vu que $\mathcal{C}$ ne contient pas ∞, l'ensemble $f(\mathcal{C})$ ne le contient pas non plus. Donc f transforme un cercle en un cercle et une droite en une droite.

(1a) **f préserve les divisions harmoniques**

Soient a, b, c, x dans $\hat{\mathbb{C}}$ tels que $[a, b, c, x] = -1$. Nous allons prouver que $[f(a), f(b), f(c), f(x)] = -1$.

[18] C'est-à-dire que si trois éléments du birapport sont donnés, le quatrième est fixé. C'est une variation sur la thème de la proposition 25.48(2).

Si a, b et c sont colinéaires, nous suivons la construction du lemme 25.92. Soit m hors de la droite (ab) et une droite D passant par c et coupant $[ma]$ en p et $[mb]$ en q. Nous posons $n = (pb) \cap (qa)$. Alors $x = (mn) \cap (ac)$.

L'application f est une bijection qui respecte les intersectons, les tangences, les cercles et les droites). Le point $f(m)$ est hors de la droite $\big(f(a)f(b)\big)$. La droite $f(D)$ passe par $f(c)$ et coupe les segments $[f(m)f(a)]$ en $f(p)$ et $[f(m)f(b)]$ en $f(q)$. Alors nous avons

$$f(n) = \big(f(p)f(b)\big) \cap \big(f(q)f(a)\big) \tag{25.246}$$

et aussi

$$f(x) = \big(f(m)f(n)\big) \cap \big(f(a)f(c)\big) \tag{25.247}$$

Donc $f(x)$ se construit à partir de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ en suivant la même construction que x à partir de a, b et c. Nous en concluons que $[f(a), f(b), f(c), f(x)] = -1$.

Si a, b et c sont cocycliques, le même raisonnement, en suivant le lemme 25.91 nous donne le même résultat.

(1b) **f est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$**

C'est le lemme 25.94.

(1c) **Et enfin ...**

Notre application f est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ qui fixe $\mathbb{R}$ parce qu'elle laisse invariante les droites dans $\mathbb{C}$. Donc la proposition 8.6 nous dit que f est soit l'identité soit la conjugaison complexe. Dans les deux cas, f est dans le groupe circulaire.

(2) **Pour f plus générale**

Nous ne supposons plus que f fixe 0, 1 et ∞. En tout cas les nombres $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(\infty)$ sont distincts parce que f est une bijection. Nous pouvons considérer une homographie[19] $\phi\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ telle que $\phi(1) = f^{-1}(1)$, $\phi(0) = f^{-1}(0)$ et $\phi(\infty) = f^{-1}(\infty)$. Dans ce cas l'application

$$g = f \circ \phi \tag{25.248}$$

vérifie $g(1) = 1$, $g(0) = 1$ et $g(\infty) = \infty$ tout en continuant à transformer un cercle-droite en un cercle-droite. Donc $f \circ \phi$ est soit l'identité soit la conjugaison complexe. Avec ça, l'application

$$f = g \circ \phi^{-1} \tag{25.249}$$

est la composée d'une homographie avec soit l'identité soit la conjugaison complexe. Elle est donc dans le groupe circulaire.

□

25.6.6 Action du groupe modulaire

Le **demi-plan de Poincaré** est l'ensemble

$$P = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Im(z) > 0\}. \tag{25.250}$$

Le **groupe modulaire** est le quotient de groupes

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}_2}. \tag{25.251}$$

Ce sont donc les matrices au signe près de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{25.252}$$

où a, b, c et d sont entiers tels que $ad - cb = 1$.

[19] Attention : ici nous parlons d'homographies de $\hat{\mathbb{C}}$, pas de $P(\mathbb{C}^2)$. L'existence d'une telle application demande de composer le corolaire 25.35 avec l'application φ_0 et la définition 25.74 et 25.75.

ThoItqXCm

Théorème 25.96 ([706]).
Le groupe modulaire agit fidèlement (définition 5.17) sur le demi-plan de Poincaré par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{25.253}$$

EqVXwdR

L'ensemble $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$D_1 = \{z \in P \text{ tel que } |z| > 1, -\frac{1}{2} \leqslant \Re(z) < \frac{1}{2}\} \tag{25.254a}$$

$$D_2 = \{z \in P \text{ tel que } |z| = 1, -\frac{1}{2} \leqslant \Re(z) \leqslant 0\} \tag{25.254b}$$

est un domaine fondamental (définition 5.24) de cette action.

De plus si nous notons

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25.255}$$

alors pour tout $z \in P$, il existe $A \in \text{gr}(S,T)$ telle que $A * z \in D$.

Démonstration. Nous divisions la preuve en plusieurs étapes.

(1) **Bien définie**

D'abord il faut remarquer que l'action (25.253) est bien définie par rapport au quotient : $A * z = (-A) * z$. La vérification est immédiate.

(2) **Interne**

Montrons que si $A \in \text{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et $z \in P$ alors $A * z \in P$. Nous avons

$$A * z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{a|z|c + azd + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}, \tag{25.256}$$

et donc en décomposant $z = \Re(z) + i\Im(z)$,

$$\Im(A*z) = \Im\left(\frac{azd+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\Im(z) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} \tag{25.257}$$

où nous avons tenu compte de $ad - bc = 1$. Donc l'action respecte la (stricte) positivité de la partie imaginaire.

(3) **Action**

Nous vérifions maintenant que la formule donne bien une action : $A * (B * z) = (AB) * z$. Cela est un bon calcul :

$$A * (B * z) = A * \left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) \tag{25.258a}$$

$$= \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + d} \tag{25.258b}$$

$$= \frac{a(a'z+b') + b(c'z+d')}{c(a'z+b') + d(c'z+d')} \tag{25.258c}$$

$$= \frac{(aa'+bc')z + (ab'+bd')}{(ca'+dc')z + (cb'+dd')} \tag{25.258d}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} * z \tag{25.258e}$$

$$= (AB) * z. \tag{25.258f}$$

(4) **Fidèle**

Soit $A \in \text{PSL}(2,\mathbb{Z})$ tel que pour tout $z \in P$ nous ayons

$$\frac{az+b}{cz+d} = z. \tag{25.259}$$

Alors nous avons

$$cz^2 + (d-a)z + b = 0. \tag{25.260}$$

Cela est donc un polynôme en z qui s'annule sur un ouvert[20] (le demi-plan de Poincaré). Il doit donc être identiquement nul, donc $c = b = a - d = 0$. Si vous n'y croyez pas, écrivez pour $z = \epsilon i$ (avec $\epsilon > 0$) :

$$-c\epsilon^2 + \epsilon(d-a)i + b = 0 \tag{25.261}$$

pour tout ϵ. Le fait d'avoir $c\epsilon^2 = b$ pour tout ϵ implique que $c = b = 0$. Donc A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \tag{25.262}$$

avec la contrainte supplémentaire que $ad = 1$, les nombres a et b étant entiers. Nous avons donc soit $a = d = 1$ soit $a = d = -1$. Étant donné le quotient par $\mathbb{Z}_2$, ces deux possibilités donnent le même élément de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$.

(5) **Les orbites intersectent D**

Soit $z \in P$. Nous devons trouver $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ tel que $A * z \in D$. Nous savons déjà que

$$\Im(A * z) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}. \tag{25.263}$$

Nous notons $\mathcal{O}_z$ l'orbite de z sous le groupe modulaire et nous posons

$$I_z = \{\Im(u) \text{ tel que } u \in \mathcal{O}_z\} = \{\Im(A * z) \text{ tel que } A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\}, \tag{25.264}$$

l'ensemble des parties imaginaires des éléments de l'orbite de z. Nous allons montrer que cet ensemble est borné vers le haut en montrant que la quantité $|cz + d|$ ne peut, à z donné, prendre qu'un nombre fini de valeurs plus grandes que $\Im(z)$[21]. Nous cherchons donc les couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d| < 1$.

Nous avons $\Im(cz + d) = c\Im(z)$, donc $|cz + d| \geqslant |c\Im(z)|$, mais il n'y a qu'un nombre fini de $c \in \mathbb{Z}$ tels que $|c\Im(z)| < 1$. De la même façon, pour la partie réelle nous avons

$$\Re(cz + d) = c\Re(z) + d, \tag{25.265}$$

et pour chaque c, il n'y a qu'un nombre fini de $d \in \mathbb{Z}$ qui laissent cette quantité plus petite que 1 (en valeur absolue).

Donc I_z possède un maximum. Soit $A_1 \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ tel que $\Im(A_1 * z) = \max I_z$. Nous notons $z_1 = A_1 * z$, et que nous n'avons à priori pas l'unicité. Nous allons maintenant agir sur z_1 avec l'élément

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25.266}$$

pour ramener z_1 dans le domaine D. Si $u \in P$ nous avons $T * u = u + 1$ et donc

$$T^n * u = u + n. \tag{25.267}$$

Vu que D est de largeur 1, il existe un n (éventuellement négatif) tel que

$$\Re(T^n * z_1) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[. \tag{25.268}$$

Notons qu'ici le fait d'être ouvert d'un côté et fermé de l'autre joue de façon essentielle (pour l'unicité aussi). Nous notons $z_2 = T^n * z_1$.

Supposons un instant que $|z_2| < 1$. Nous considérons l'élément

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25.269}$$

qui fait

$$\Im(S * z) = \frac{\Im z}{|z|^2}. \tag{25.270}$$

[20] On ne peut pas dire que $b = 0$ simplement en justifiant qu'on l'obtient en posant $z = 0$ parce que $z = 0$ n'est pas dans le demi-plan de Poincaré.

[21] Bien que cela ne soit pas indispensable pour la preuve, remarquons que I_z ne comprend qu'une quantité au plus dénombrable de valeurs. Le fait que, à z donné, la quantité $|cz + d|^2$ puisse être rendue aussi grande que l'on veut est évident. Donc I_z est borné vers le bas par zéro (qui n'est pas atteint, mais qui est une valeur d'adhérence).

Donc si $|z_2| < 1$ alors $\Im(S * z_2) > \Im(z_2)$, ce qui contredit la maximalité de $\Im(z_2)$ dans I_z. Nous en déduisons que $|z_2| \geqslant 1$.

Si $|z_2| > 1$, alors $z_2 \in D_1$ et c'est bon. Si $|z_2| = 1$, alors il faut encore un peu travailler. Si $z_2 \pm 1$ est à l'intérieur du disque, alors en agissant avec T ou T^{-1} nous retrouvons la même contradiction que précédemment. En écrivant $z_2 = e^{i\theta}$, nous devons donc avoir $2\cos(\theta) \leqslant 1$ ou encore $|\Re(z_2)| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc si $\Re(z_2) \leqslant 0$ alors $z_2 \in D_2$.

Le dernier cas à traiter est $\Re(z_2) \in]0, \frac{1}{2}]$, c'est-à-dire $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas l'action avec S ramène l'angle dans la bonne zone parce que $S * z = -\frac{1}{z}$ et donc $S * (\rho e^{-i\theta}) = -\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$.

(6) **Unicité**

Nous voulons à présent montrer que si $z \in D$, alors $A * z$ n'est plus dans D (sauf si $A = \pm\mathbb{1}$). Nous supposons que $z \in D$ et $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ soient tels que $A * z \in D$, et nous prouvons qu'alors soit nous arrivons à une contradiction soit nous arrivons à $A = \mathbb{1}$. Pour cela nous allons décomposer en de nombreux cas.

(6a) Nous commençons par $\Im(A * z) \geqslant \Im(z)$. Dans ce cas nous avons $|cz + d| \leqslant 1$ et en particulier $|c||\Im(z)| \leqslant 1$. Étant donné que le point de D qui a la partie imaginaire la plus petite est $-\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}i$, nous trouvons $|c| \leqslant 2/\sqrt{3}$. Vu que c doit être entier, nous avons trois cas : $c = -1, 0, 1$.

(6a.i) Soit $c = 0$. Alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et la condition de déterminant est $ad = 1$, ce qui signifie $a = d = 1$ (la possibilité $a = b = -1$ est « éliminée » le quotient par $\mathbb{Z}_2$ définissant $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$). La matrice A doit alors être de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25.271}$$

et $A * z = z + b$. Si $z \in D$, alors le seul $z + b$ à être (peut-être) encore dans D est $b = 0$, mais alors A est l'identité.

(6a.ii) Soit $c = 1$. Alors la condition $|cz + d| \leqslant 1$ nous donne trois possibilités[22] : $d = -1, 0, 1$.

A. Si $d = -1$, alors nous devons avoir $|z - 1| \leqslant 1$. Il est instructif de faire un dessin, mais le point d'intersection entre les cercles $|z| = 1$ et $|z - 1| = 1$ est le point $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, qui n'est pas dans D. Bref, il n'y a pas de points dans D vérifiant $|z - 1| \leqslant 1$.

B. Si $d = 1$, alors (et c'est maintenant que la dissymétrie de D intervient) nous avons le point

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{25.272}$$

qui est dans D et qui vérifie $|z + 1| \leqslant 1$. Voyons à quoi ressemble la matrice A dans ce cas. Son déterminant est $a - b = 1$. Nous écrivons donc

$$A = \begin{pmatrix} b+1 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25.273}$$

et en tenant compte du fait que $z\bar{z} = |z + 1| = 1$, nous calculons

$$A * z = \frac{(b+1)z + b}{z+1} \tag{25.274a}$$

$$= \frac{(bz + z + b)(\bar{z} + 1)}{|z+1|^2} \tag{25.274b}$$

$$= z + b + 1. \tag{25.274c}$$

La seule façon de ne pas quitter D est d'avoir $b = -1$, mais alors nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{25.275}$$

et $A * z = z$. Donc au final z est quand même le seul de son orbite à être dans D. Notons au passage cette très intéressante propriété du point

$$z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \tag{25.276}$$

[22] Je ne rigolais pas quand je disais qu'on allait avoir de nombreux cas.

C'est un point de qui vérifie $z_0 = A * z_0$ pour un élément non trivial A de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. L'existence d'un tel élément est ce qui va nous coûter un peu de sueur pour prouver que $PSL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par S et T.

C. Le cas $d = 0$ nous fait écrire $1 = \det A = -b$, donc $b = -1$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25.277}$$

Nous avons alors $A * z = a - \frac{1}{z}$. De plus la condition $|z| \leqslant 1$ revient à $|z = 1|$. Pour les nombres complexes de module 1, l'opération $z \to -1/z$ est la symétrie autour de l'axe des imaginaires purs. Le seul à ne pas sortir de D est le fameux $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, qui revient sur lui-même avec $a = -1$.

Nous passons à la possibilité $c = -1$. Dans ce cas la matrice est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & d \end{pmatrix}, \tag{25.278}$$

et nous revenons au cas $c = 1$ en prenant $-A$ au lieu de A.

(6b) Nous passons au cas $\Im(A * z) < \Im(z)$. Nous récrivons cette condition avec

$$\Im(A * z) < \Im\big(A^{-1} * (A * z)\big). \tag{25.279}$$

Si nous supposons que z et A sont tels que z et $A * z$ soient tous deux dans D, alors $z' = A * z$ est un élément de D tel que

$$\Im(z') < \Im(A^{-1} * z'). \tag{25.280}$$

Or nous avons vu qu'aucun élément de D vérifiant cette condition n'existait sans être trivial (celui qui ne bouge pas). Pour cela il suffit d'appliquer tout ce que nous venons de dire avec A^{-1} au lieu de A.

(7) **Quelques conclusions**

Après avoir passé tous les cas en revue, le fameux point $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ est l'unique point de D à accepter une matrice non triviale $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ telle que $z_0 = A * z_0$.

Nous remarquons aussi que tous les points de P sont ramenés dans D par une matrice obtenue comme produit de T, S, T^{-1} et S^{-1}.

□

CorJQwgNp

Corolaire 25.97 ([707]).
Les matrices S et T génèrent le groupe modulaire au sens où toute matrice de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ *s'écrit comme*

$$T^{m_1} S^{p_1} \dots T^{m_k} S^{p_k} \tag{25.281}$$

pour un certain k et des nombres $m_i, p_i \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{gr}(S,T)$.

Démonstration. Soit z, un point de D autre que z_0. Alors si $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est non trivial nous avons $A * z$ hors de D. Du coup, comme vu dans la démonstration du théorème 25.96, il existe $B \in \mathrm{gr}(S,T)$ tel que $B * (A * z) \in D$. Vu que D ne contient qu'un seul point de chaque orbite, nous avons

$$B * A * z = z, \tag{25.282}$$

et donc $BA = \pm\mathbb{1}$, ce qui prouve que[23] $A = B^{-1}$, c'est-à-dire que $A \in \mathrm{gr}(S,T)$. □

[23] Dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, nous n'avons pas besoin de mettre $\pm$ parce qu'il est compris dans la définition.

Chapitre 26

Analyse vectorielle

26.1 Le théorème de Green

Soit un champ de vecteurs

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix}F_1(x,y,z)\\F_2(x,y,z)\\F_2(x,y,z)\end{pmatrix}\tag{26.1}$$

et un chemin $\sigma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ donné par

$$\sigma(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}.\tag{26.2}$$

Nous avons défini la circulation de F le long de σ par

$$\begin{aligned}\int_\sigma F\cdot d\sigma&=\int_a^b F\big(\sigma(t)\big)\cdot\sigma'(t)dt\\&=\int_a^b\Big[F_1\big(\sigma(t)\big)x'(t)+F_2\big(\sigma(t)\big)y'(y)+F_3\big(\sigma(t)\big)z'(t)\Big]dt\\&=\int_\sigma F_1dx+F_2dy+F_3dz.\end{aligned}\tag{26.3}$$

La dernière ligne est juste une notation compacte[1]. Elle sert à se souvenir qu'on va mettre x' à côté de F_1, y' à côté de F_2 et z' à côté de F_3. L'avantage de cette notation est qu'on peut écrire d'autres combinaisons.

Si f et g sont deux fonctions sur $\mathbb{R}^3$, nous pouvons écrire

$$\int_\sigma f dy+gdz.\tag{26.4}$$

Cela signifie

$$\int_a^b\Big[f\big(\sigma(t)\big)y'(t)+g\big(\sigma(t)\big)z'(t)\Big]dt.\tag{26.5}$$

Soit D une région du plan et σ, son contour que nous prenons, par convention[2], dans l'orientation trigonométrique, comme indiqué sur la figure 26.1. Nous supposons également que le domaine D n'a pas de trous intérieurs.

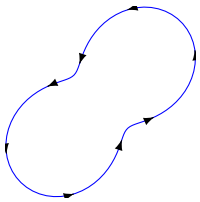


FIGURE 26.1 : Un contour avec son orientation. LabelFigVDFMooHMmFZr

Nous notons par $\sigma=\partial D$ le bord de D, c'est-à-dire le contour dont nous venons de parler.

[1] Il y aurait beaucoup de choses à dire là-dessus, mais la vie est trop courte pour parler de formes différentielles, et c'est dommage.

[2] Il y aurait beaucoup de choses à dire sur ça aussi, mais…

Théorème 26.1 (Théorème de Green)**.**
Soient $P, Q\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \tag{26.6}$$ EqThoGreen

Pour rappel, l'intégrale du membre de gauche signifie

$$\int_a^b \Big[P\big(\sigma(t)\big)\sigma'_x(t) + Q\big(\sigma(t)\big)\sigma'_y(t) \Big] dt. \tag{26.7}$$

Ce n'est d'ailleurs rien d'autre que l'intégrale du champ de vecteurs $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Corolaire 26.2.
L'aire du domaine D est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx). \tag{26.8}$$

Démonstration. L'intégrale $\int_{\partial D}(x dy - y dx)$ se traite avec le théorème de Green où l'on pose $P = -y$ et $Q = x$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} -y dx + x dy &= \int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_D 2 \, dx dy. \end{aligned} \tag{26.9}$$

La dernière ligne est bien le double de la surface. □

Exemple 26.3.
Calculons (encore une fois) l'aire du disque de rayon R. Il s'agit de calculer l'intégrale

$$I = \frac{1}{2} \int_\sigma (x dt - y dx) \tag{26.10}$$

où σ est le cercle donné par

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \tag{26.11}$$

Le calcul est

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{R\cos(\theta)}_{x} \underbrace{R\cos(\theta)}_{y'} - \underbrace{R\sin(\theta)}_{y} \underbrace{(-R\sin(\theta))}_{x'} \, d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi R^2. \end{aligned} \tag{26.12}$$

△

Exemple 26.4.
Calculons l'aire de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \tag{26.13}$$

dont le bord est donné par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) & \text{(26.14a)} \\ y(t) = b\sin(t). & \text{(26.14b)} \end{cases}$$

Le terme $x dy$ devient $a\cos(t) b\cos(t) = ab\cos^2(t)$ et le terme $y dx$ devient $b\sin(t)(-a\sin(t)) = -ab\sin^2(t)$. L'intégrale qui donne la surface est donc

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab = \pi ab. \tag{26.15}$$

△

Le théorème de Green peut être mis sous une autre forme.

ThoGreenVecto

Théorème 26.5 (Théorème de Green, forme vectorielle)**.**
Si G est un champ de vecteurs sur D, nous avons

$$\int_{\partial D} G \cdot d\sigma = \int_D (\nabla \times G) \cdot dS \tag{26.16}$$

EqGreenVecto

où le second membre est le flux de $\nabla \times G$ sur la surface D.

Démonstration. Analysons le membre de droite. Nous savons que D est une surface dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le vecteur normal à la surface est donc simplement le vecteur (constant) e_z. Le produit scalaire $(\nabla \times F) \cdot dS$ est donc $(\nabla \times F) \cdot e_z$ et se réduit à la troisième composante du rotationnel, c'est-à-dire

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \tag{26.17}$$

Cela est bien le membre de droite de l'équation (26.6). Le membre de gauche de cette dernière est bien le membre de gauche de (26.16). □

ExempleGreenSqL

Exemple 26.6.

Soit le champ de vecteurs $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y+x \end{pmatrix}$, et soit à calculer

$$\int_D \nabla \times F \cdot dS \tag{26.18}$$

où D est la région comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = x$ pour $x \geqslant 0$ (voir la figure 26.2).

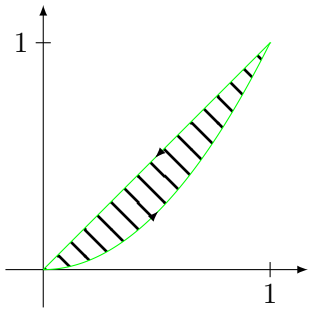


FIGURE 26.2 : Le contour d'intégration pour l'exemple 26.6.

LabelFigLLVMooWOkvAB

Nous pouvons calculer cette intégrale directement en calculant le rotationnel de F :

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-2xy \end{pmatrix}. \tag{26.19}$$

Par conséquent l'intégrale à effectuer est

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (1-2xy)dy = \frac{1}{12}. \tag{26.20}$$

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=1-2*x*y
sage: f.integrate(y,x**2,x).integrate(x,0,1)
(x, y) |--> 1/12
```

L'autre façon de calculer l'intégrale est d'utiliser le théorème de Green et de calculer la circulation de F le long de ∂D :

$$I = \int_{\partial D} F \cdot \sigma. \tag{26.21}$$

Le chemin $\sigma = \partial D$ est composé de la parabole $y = x^2$ et du segment de droite $x = y$. Attention : il faut respecter l'orientation. Nous avons

$$\sigma_1(t) = (t, t^2) \tag{26.22}$$

et

$$\sigma_2(t) = (1 - t, 1 - t). \tag{26.23}$$

Notez bien que le second chemin est $(1 - t, 1 - t)$ et non (t, t) parce qu'il faut le parcourir dans le bon sens (voir le dessin).

Commençons par le premier chemin :

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (t, t^2) \\ \sigma_1'(t) &= (1, 2t) \\ F\big(\sigma_1(t)\big) &= \begin{pmatrix} t^5 \\ t + t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{26.24}$$

et par conséquent

$$F\big(\sigma_1(t)\big) \cdot \sigma_1'(t) = t^5 + 2t^2 + 2t^3, \tag{26.25}$$

et le premier morceau de la circulation vaut

$$\int_{\sigma_1} F \cdot d\sigma_1 = \int_0^1 t^5 + 2t^2 + 2t^3 = \frac{4}{3}. \tag{26.26}$$

Pour le second chemin :

$$\begin{aligned} \sigma_2(t) &= (1 - t, 1 - t) \\ \sigma_2'(t) &= (-1, -1) \\ F\big(\sigma_2(t)\big) &= \begin{pmatrix} (1 - t)^3 \\ 2(1 - t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{26.27}$$

Par conséquent

$$F\big(\sigma_2(t)\big) \cdot \sigma_2(t) = -(1 - t)^2 - 2(1 - t). \tag{26.28}$$

Le second morceau de la circulation est par conséquent

$$\int_0^1 -(1 - t)^2 - 2(1 - t)dt = -\frac{5}{4}. \tag{26.29}$$

La circulation de F le long de σ est donc égale à

$$\frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}. \tag{26.30}$$

Comme prévu, nous obtenons le même résultat. △

26.2 Théorème de la divergence dans le plan

26.2.1 La convention de sens de parcours

Soient D, un domaine dans le plan et un paramétrage

$$\begin{aligned} \sigma\colon [a, b] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{26.31}$$

un paramétrage du bord ∂D de D. La normale à σ est perpendiculaire à la tangente, donc la normale extérieure de norme 1 vaut

$$n = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}} \quad \text{ou} \quad n = -\frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}}. \tag{26.32}$$

Comment faire le choix ?

Nous prenons comme convention que le sens *du chemin* doit être tel que le vecteur normal extérieur soit

$$n = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}}. \tag{26.33}$$

Donc si le chemin σ donne lieu à un vecteur n pointant vers l'intérieur, il faut utiliser le chemin qui va dans le sens contraire : $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$.

Les vecteurs tangents et normaux d'un contour sont dessinés sur la figure 26.3.

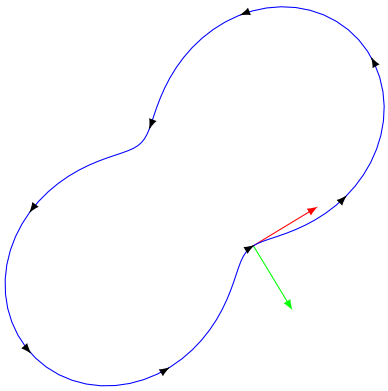


FIGURE 26.3 : Le champ de vecteurs tangents est dessiné en rouge tandis qu'en vert nous avons le champ de vecteurs normaux extérieurs. LabelFigDDCTooYscVzA

26.2.2 Théorème de la divergence

Théorème 26.7 (Théorème de la divergence)**.**
Soit F un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Le flux de F à travers le bord de D est égal à l'intégrale de la divergence de F sur D. En formule :

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \nabla \cdot F \, dxdy. \tag{26.34}$$

Démonstration. Tant $F \cdot n$ que $\nabla \cdot F$ sont des fonctions. Le membre de gauche est donc l'intégrale d'une fonction sur un chemin et le membre de droite est l'intégrale d'une fonction sur une surface. Notre convention de sens de parcours du chemin permet d'écrire le produit scalaire $F \cdot n$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F \cdot n &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\sigma'\|}(F_x y' - F_y x') \\ &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'. \end{aligned} \tag{26.35}$$

Par conséquent, la *fonction*

$$F \cdot n \tag{26.36}$$

est la même que la *fonction*

$$\frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'. \tag{26.37}$$

L'intégrale de cette dernière fonction sur le chemin σ est

$$\begin{aligned} I &= \int_\sigma F \cdot n \\ &= \int_\sigma \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma' \\ &= \int_a^b \frac{1}{\|\sigma'(t)\|} \begin{pmatrix} -F_y\big(\sigma(t)\big) \\ F_x\big(\sigma(t)\big) \end{pmatrix} \cdot \sigma'(t)\|\sigma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'(t) dt. \end{aligned} \tag{26.38}$$

Cette dernière intégrale est la circulation du champ de vecteurs $\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}$ sur le chemin σ. Le théorème de Green 26.5 nous enseigne que la circulation le long d'un chemin est égale au flux du rotationnel à travers la surface. Par conséquent,

$$I = \int_D \left(\nabla \times \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \right) \cdot dS = \int_D \nabla \cdot F \, dxdy \tag{26.39}$$

□

26.3 Théorème de Stokes

Nous nous mettons maintenant dans $\mathbb{R}^3$, et nous y considérons une surface paramétrée S donc le bord est ∂S.

THOooIRYTooFEyxif

Théorème 26.8 (Théorème de Stokes)**.**
Alors le flux du rotationnel de F à travers S est égal à la circulation de F le long du bord. En formule :

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot d\sigma. \tag{26.40}$$

Nous pouvons nous donner une idée du pourquoi ce théorème est vrai. D'abord, si la surface est plate, cela est exactement le théorème de Green 26.5. Supposons maintenant que le bord reste plat, mais que la surface se déforme un petit peu. Le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26.41}$$

est tout autant le bord du disque plat de rayon 1 que celui de la demi-sphère

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}. \tag{26.42}$$

Le champ de vecteur que nous considérons est $G = \nabla \times F$. Il a un certain flux à travers le disque plat, et ce plus est égal à la circulation de F sur σ. Quel est le flux de G à travers la demi-sphère ? Étant donné que $\nabla \cdot G = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$, le champ de vecteurs G est incompressible, de telle façon que tout ce qui rentre dans la demi-sphère doit en sortir. Le flux de G à travers la demi-sphère doit par conséquent être égal à celui à travers le disque plat.

Exemple 26.9.
Soit C l'intersection entre le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et le plan $x + y + z = 1$. Calculer la circulation de

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} \tag{26.43}$$

le long de C.

Au lieu de calculer directement

$$\int_C F \cdot d\sigma, \tag{26.44}$$

nous allons calculer

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS \tag{26.45}$$

où S est une surface dont C est le bord. Cette intégrale est à calculer avec la formule (22.294).

La première chose à faire est de trouver une surface dont le bord est C et en trouver un paramétrage ϕ. Le plus simple est de prendre le graphe du plan sur le cercle $x^2 + y^2 + 1$. Un paramétrage de cette surface est simplement

$$\begin{aligned} \phi\colon D &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{26.46}$$

où D est le disque de rayon 1. Étant donné que cela paramètre le plan $x+y+z-1 = 0$, le vecteur normal est $n = e_x + e_y + z_z$. Nous pouvons cependant calculer ce vecteur normal en suivant la recette usuelle. D'abord les vecteurs tangents sont

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{26.47}$$

Et le vecteur normal est donné par le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} n &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= e_x + e_y + e_z. \end{aligned} \tag{26.48}$$

Ensuite, le rotationnel de F est donné par

$$\nabla \times F = 3(x^2 + y^2)e_z. \tag{26.49}$$

Par conséquent,

$$\nabla \times F \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = 3(x^2 + y^2). \tag{26.50}$$

L'intégrale à calculer est donc

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times F \cdot dS &= \int_D (\nabla \times F)\big(\phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dxdy \\ &= 3\int_D (x^2 + y^2)dxdy. \end{aligned} \tag{26.51}$$

Cette dernière intégrale est l'intégrale d'une fonction sur le disque de rayon 1. Elle s'effectue en passant aux coordonnées polaires :

$$3\int_D (x^2 + y^2)dxdy = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2)r\,dr = \frac{3\pi}{2}. \tag{26.52}$$

△

26.4 Théorème de Gauss

Soit V une partie de $\mathbb{R}^3$ délimitée par une surface S sur laquelle nous considérons la normale extérieure. Soit F un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème 26.10 (Théorème de la divergence ou de Gauss)**.**
Le flux d'un champ de vecteur F à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence sur le volume correspondant :

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \int_V \nabla \cdot F\,dxdydz. \tag{26.53}$$

Ce théorème signifie que la quantité de fluide qui s'accumule dans le volume (le flux est ce qui rentre moins ce qui sort) est égale à l'intégrale de $\nabla \cdot F$ sur le volume, alors que nous savons que, localement, la quantité $\nabla \cdot F(x,y,z)$ est la quantité de fluide qui s'accumule au point (x,y,z).

Remarque 26.11.
Ce théorème ne fonctionne qu'avec des surfaces fermées. Essayer de l'appliquer au calcul de flux à travers des surfaces ouvertes n'a pas de sens parce qu'une surface ouverte ne délimite pas un volume.

26.12.
La formule de la divergence peut être utilisée comme intégration par partie. Si u est une fonction et F un champ de vecteurs, $\nabla(uF) = \nabla(u) \cdot F + u\nabla \cdot F$ et alors

$$\int_{\partial V} uF \cdot n = \int_V \nabla(uF) = \int_V u\nabla \cdot F + \int_V F \cdot \nabla u \tag{26.54}$$

où n est le champ de vecteurs normal extérieur à V. En remettant les termes dans un ordre qui ressemble plus à l'intégration par partie :

$$\int_V F \cdot \nabla u = \int_{\partial V} uF \cdot n - \int_V u\nabla F. \tag{26.55}$$

EQooRUCKooUUrgxl

Exemple 26.13.
Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \tag{26.56}$$

à travers la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. Nous utilisons le théorème de la divergence

$$\int_S F \cdot n \, dS = \int_B \nabla \cdot F \, dxdydz \tag{26.57}$$

où S est la sphère et B est la boule (la sphère pleine). La divergence de F se calcule :

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2 + 2x + 2y. \tag{26.58}$$

L'intégrale est donc en trois termes :

$$\begin{aligned} \int_B 2 = 2\text{Volume(B)} = \frac{8\pi}{3} \\ \int_B y \, dxdydz = 0 \\ \int_B z \, dxdydz = 0. \end{aligned} \tag{26.59}$$

△

Dans certains cas le théorème de Gauss permet de simplifier le calcul de l'intégrale d'une fonction sur une surface.

Exemple 26.14.
Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_{\partial B} (x^2 + y + z) dS, \tag{26.60}$$

c'est-à-dire l'intégrale de la fonction $x^2 + y + z$ sur la sphère. Le vecteur normal à la sphère est

$$n = xe_x + ye_y + ze_z. \tag{26.61}$$

Étant donné que nous sommes sur la sphère de rayon 1, ce vecteur est même normé. La fonction que nous regardons n'est rien d'autre que $F \cdot n$ avec

$$F = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{26.62}$$

Nous pouvons donc simplement intégrer $\nabla \cdot F$ sur toute la boule :

$$I = \int_B \nabla \cdot F \, dxdydz = \int_B 1 \, dxdudz = \frac{4\pi}{3}. \tag{26.63}$$

△

26.5 Coordonnées curvilignes

26.5.1 Base locale

Nous connaissons déjà les coordonnées sphériques et cylindriques sur $\mathbb{R}^3$. Ce sont des systèmes « un peu courbes ». Il en existe bien entendu de nombreux autres (sinon ce ne serait pas drôle), et nous allons faire une étude un peu générale de ces systèmes de **coordonnées curvilignes**. Des coordonnées curvilignes sur $\mathbb{R}^3$ est n'importe quel[3] système qui permet de repérer un point de $\mathbb{R}^3$ à partir de trois nombres.

Il s'agit donc d'un ensemble de trois applications

$$x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}. \tag{26.64}$$

[3]Nous n'entrons pas dans les détails de régularité.

Les coordonnées cylindriques sont

$$\begin{cases} x_1(r,\theta,z) = r\cos\theta & \text{(26.65a)} \\ x_2(r,\theta,z) = r\sin\theta & \text{(26.65b)} \\ x_3(r,\theta,z) = z & \text{(26.65c)} \end{cases}$$

Soit donc un système général $q = (q_1, q_2, q_3)$ et

$$M(q) = \begin{pmatrix} x_1(q) \\ x_2(q) \\ x_3(q) \end{pmatrix}. \tag{26.66}$$

Si nous fixons q_2 et q_3 et que nous laissons varier q_1, nous obtenons une courbe[4] dont nous pouvons considérer le vecteur vitesse, c'est-à-dire le vecteur tangent. En chaque point nous avons ainsi trois vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial q_i}(q). \tag{26.67}$$

Nous disons que le système de coordonnées curviligne est **orthogonal** si ces trois vecteurs sont orthogonaux. Dans la suite nous supposerons que c'est toujours le cas.

Nous posons

$$h_i = \left\| \frac{\partial M}{\partial q_i} \right\| \tag{26.68}$$

et nous considérons les trois vecteurs normés

$$e_i = h_i^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_i}. \tag{26.69}$$ EqDefeihMq

Les trois vecteurs $\{e_1, e_2, e_3\}$ forment une base orthonormée dite **base locale**. Ce sont des vecteurs liés[5] au point M.

26.5.2 Importance de l'orthogonalité

Nous avons dit que nous nous restreignons au cas où les vecteurs e_i sont orthogonaux. En termes de produits scalaires, cela signifie

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}. \tag{26.70}$$

Nous en étudions maintenant quelques conséquences. L'équation (26.69) peut s'écrire plus explicitement sous la forme

$$e_i = \sum_k h_i^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} 1_k. \tag{26.71}$$

Notez que pour chaque k et i, la quantité $h_i^{-1}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}$ est un simple nombre. Nous allons les mettre dans une matrice :

$$A_{ki} = h_i^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}. \tag{26.72}$$

Cela nous donne le changement de base

$$e_i = \sum_k A_{ki} 1_k. \tag{26.73}$$ EqChmBaseeisAkiAk

Le produit $e_i \cdot e_j$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= \sum_{kl} A_{ki} A_{lj} \underbrace{1_k \cdot 1_l}_{=\delta_{kl}} \\ &= \sum_{kl} A_{ki} A_{lj} \delta_{kl} \\ &= \sum_k A_{ki} A_{kj} \\ &= \sum_k (A^T)_{ik} A_{kj}. \end{aligned} \tag{26.74}$$

[4] Dans le cas des sphériques, c'est une demi-droite horizontale d'angle q_2 et de hauteur q_3.

[5] En géométrie différentielle on dira que ce sont des éléments de l'espace tangent, mais c'est une toute autre histoire.

Or cela doit valoir δ_{ij}. Par conséquent

$$A^T = A^{-1}. \tag{26.75}$$

Le fait que les coordonnées curvilignes considérées soient orthogonales s'exprime donc par la fait que la matrice de changement de base est une matrice orthogonale.

Cette circonstance nous permet d'inverser le changement de base (26.73) en multipliant cette équation par $(A^{-1})_{il}$ des deux côtés et en faisant la somme sur i :

$$\sum_i (A^{-1})_{il} e_i = \sum_{kl} \underbrace{A_{ki}(A^{-1})_{il}}_{=\delta_{kl}} 1_k, \tag{26.76}$$

par conséquent

$$\sum_i (A^T)_{il} e_i = 1_l, \tag{26.77}$$

et

$$1_l = \sum_i A_{li} e_i = \sum_i h_i^{-1} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} e_i. \tag{26.78}$$ EqChamvarunIAei

Armés de cette importante formule, nous pouvons exprimer les quantités que nous connaissons dans la base canonique en termes de la base locale.

Une autre conséquence du fait que e_1, e_2 et e_3 est une base orthonormée est que, éventuellement en réordonnant les vecteurs, on a

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned} \tag{26.79}$$

Ces trois relations s'écrivent en une seule avec

$$e_i \times e_j = \sum_k \epsilon_{ijk} e_k \tag{26.80}$$

où

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i,j,k \text{ ne sont pas tous différents} \\ 1 & \text{si } ijk \text{ se ramène à 123 par un nombre pair de transpositions} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ se ramène à 123 par un nombre impair de transpositions} \end{cases} \tag{26.81}$$

est le **symbole de Levi-Civita**. La formule du produit vectoriel peut également être utilisée à l'envers sous la forme

$$e_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk}\, e_i \times e_j. \tag{26.82}$$ Eqkeitimesej

Le symbole de Levi-Civita possède de nombreuses formules. En voici certaines, facilement démontrables en considérant tous les cas :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \delta_{kl}|\epsilon_{ijk}|. \tag{26.83}$$

Grâce aux symboles de Levi-Civita, le produit mixte des vecteurs de base a une belle forme :

$$e_l \cdot (e_i \times e_j) = \sum_k \epsilon_{ijk} e_l \times e_k = \sum_k \epsilon_{ijk}\delta_{lk} = \epsilon_{ijl}. \tag{26.84}$$ EqProdMixteepsilonCiviv

26.5.3 Coordonnées polaires

Les coordonnées curvilignes polaires sont données par

$$M(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}, \tag{26.85}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{26.86}$$

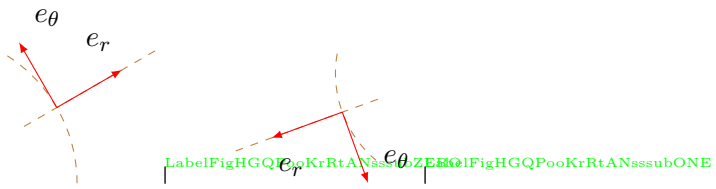
Nous avons les normes $h_r = 1$ et $h_\theta = r$, et donc les vecteurs de la base locale en (r,θ) sont

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta)e_x + \sin(\theta)e_y \tag{26.87}$$

ainsi que

$$e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = -\sin(\theta)e_x + \cos(\theta)e_y. \tag{26.88}$$

Ces vecteurs sont représentés à la figure 26.4. Notez qu'il y en a une paire différente en chaque point.



(a) Base locale. (b) Base locale.

FIGURE 26.4 : En brun, les lignes que le point suivrait si on ne variait qu'une coordonnées polaires à la fois. Les vecteurs rouges sont les vecteurs e_r et e_θ. LabelFigHGQPooKrRtAN

26.5.4 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont les mêmes que les coordonnées polaires à part qu'il faut écrire

$$M(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \tag{26.89}$$

et nous avons le vecteur de base supplémentaire

$$e_z = \frac{\partial M}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{26.90}$$

parce que $h_z = 1$.

26.5.5 Coordonnées sphériques

Les coordonnées curvilignes sphériques sont données par

$$M(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{26.91}$$

dont les dérivées sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \rho} &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\rho\sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{26.92}$$

Les normes de ces vecteurs sont $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ et $h_\varphi = \rho\sin(\theta)$. Les vecteurs de la base locale en (ρ,θ,φ) sont donc

$$\begin{aligned} e_\rho &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ e_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{26.93}$$

26.5.6 Gradient en coordonnées curvilignes

Soit $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ une fonction sur $\mathbb{R}^3$. Nous pouvons la composer avec les coordonnées curvilignes q pour obtenir la fonction

$$\tilde{f}(q_1,q_2,q_3) = f\big(x_1(q),x_2(q),x_3(q)\big). \tag{26.94}$$

Nous disons que $\tilde{f}$ est l'expression de f dans les coordonnées q. Nous savons déjà comment calculer le gradient de f en coordonnées cartésiennes :

$$F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix}. \tag{26.95}$$

Cela est un vecteur lié au point (x,y,z). Notre objectif de bonheur dans la vie serait d'exprimer les coordonnées de ce vecteur dans la base $\{e_1,e_2,e_3\}$. En d'autres termes, nous voudrions trouver les nombres $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ et $\tilde{F}_3$ tels que

$$F(x,y,z)=F\big(x(q),y(q),z(q)\big)=\tilde{F}_1e_1+\tilde{F}_2e_2+\tilde{F}_3e_3. \tag{26.96}$$

Ces nombres seront des fonctions de (q_1,q_2,q_3).

Par définition,

$$\nabla f=\sum_l\frac{\partial f}{\partial x_l}1_l. \tag{26.97}$$

En remplaçant 1_l par sa valeur en termes des e_i par la formule (26.78),

$$\begin{aligned}\nabla f&=\sum_l\frac{\partial f}{\partial x_l}1_l\\&=\sum_l\frac{\partial f}{\partial x_l}\sum_i h_i^{-1}\frac{\partial x_l}{\partial q_i}e_i\\&=\sum_{il}\frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial q_i}e_i\\&=\sum_i\frac{1}{h_i}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q_i}e_i.\end{aligned} \tag{26.98}$$

Plus explicitement,

$$\nabla f\big(x(q),y(q),z(q)\big)=\sum_i\frac{1}{h_i(q)}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q_i}(q)e_i \tag{26.99}$$

EqGradientenCurviligne

où

$$h_i(q)=\left\|\frac{\partial M}{\partial q_i}(q)\right\|. \tag{26.100}$$

Le plus souvent nous n'allons pas noter explicitement la dépendance de h_i en q.

26.5.6.1 Coordonnées sphériques

Nous pouvons exprimer le gradient d'une fonction en coordonnées sphériques en utilisant la formule (26.99) :

$$\nabla\tilde{f}(\rho,\theta,\varphi)=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho}e_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{\rho\sin(\theta)}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\varphi}e_\varphi. \tag{26.101}$$

EqGradientSpherique

Cette expression peut paraitre peu pratique parce que les vecteurs e_ρ, e_θ et e_φ eux-mêmes changent en chaque point. Elle est effectivement peu adaptée au dessin, mais elle est très pratique pour des fonctions ayant des symétries.

Exemple 26.15.
Le potentiel de la gravitation est la fonction

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{26.102}$$

En coordonnées sphériques elle s'écrit

$$\tilde{V}(\rho,\theta,\varphi)=\frac{1}{\rho}. \tag{26.103}$$

En voilà une fonction qu'elle est facile à dériver, contrairement à V ! En suivant la formule (26.101), nous avons immédiatement

$$\nabla\tilde{V}=-\frac{1}{\rho^2}e_\rho. \tag{26.104}$$

Nous voyons immédiatement que cela est un champ de vecteurs dont la norme diminue comme le carré de la distance à l'origine et qui est en permanence dirigé vers l'origine. △

26.5.7 Divergence en coordonnées curvilignes

Nous savons que

$$\nabla \tilde{f} = \sum_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_j} e_j. \tag{26.105}$$

Nous pouvons en particulier considérer la fonction $f(q) = q_i$. De la même manière que nous avions noté x_i la fonction $x \mapsto x_i$, nous notons q_i la fonction $q \mapsto q_i$. Le gradient de cette fonction est donné par

$$\nabla q_i = \sum_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} e_j, \tag{26.106}$$

mais $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$, donc

$$\nabla q_i = \frac{e_i}{h_i}, \tag{26.107}$$

ou encore

$$e_i = h_i \nabla q_i. \tag{26.108}$$

Cela n'est pas étonnant : la direction dans laquelle la coordonnées q_i varie le plus est le vecteur e_i qui donne la tangente à la courbe obtenue lorsque *seul* q_i varie.

Commençons par calculer la divergence de e_i. En utilisant la formule (26.82),

$$\nabla \cdot e_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \nabla \cdot (e_i \times e_j). \tag{26.109}$$

Nous avons, en utilisant les règles de Leibniz de la proposition 14.534,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (e_i \times e_j) &= \nabla \cdot (h_i \nabla q_i \times h_j \nabla q_j) \\
&= \nabla(h_i h_j) \cdot \big(\nabla q_i \times \nabla q_j\big) + h_i h_j \nabla \cdot \big(\nabla q_i \times \nabla q_j\big) \\
&= \nabla(h_i h_j) \cdot \big(\nabla q_i \times \nabla q_j\big) \\
&\quad + h_i h_j \nabla q_j \cdot \big(\underbrace{\nabla \times \nabla q_i}_{=0}\big) \\
&\quad + h_i h_j \nabla q_i \cdot \big(\underbrace{\nabla \times \nabla q_j}_{=0}\big)
\end{aligned} \tag{26.110}$$

Cela nous fait

$$\nabla \cdot e_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \frac{\nabla(h_i h_j)}{h_i h_j} \cdot (e_i \times e_j). \tag{26.111}$$

parce que $\nabla q_i = h_i^{-1} e_i$. Nous pouvons développer le gradient qui intervient :

$$\nabla(h_i h_j) = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial}{\partial q_l} (h_i h_j) e_l. \tag{26.112}$$

Nous voyons donc arriver le produit mixte $e_l \cdot (e_i \times e_j)$. En utilisant la formule (26.84), cela s'exprime directement sous la forme ϵ_{ijl}.

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot e_k &= \frac{1}{2} \sum_{ijl} \frac{1}{h_i h_j h_l} \frac{\partial}{\partial q_l} (h_i h_j) \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ijl} \delta_{kl} |\epsilon_{ijk}| \frac{\partial}{\partial q_l} (h_i h_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{|\epsilon_{ijk}|}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial q_k} (h_i h_j).
\end{aligned} \tag{26.113}$$

EqFragradekdvj

Par exemple,

$$\nabla \cdot e_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3). \tag{26.114}$$

Nous devons maintenant chercher le gradient d'un champ général

$$F(q) = \sum_k F_k(q) e_k. \tag{26.115}$$

La première chose à faire est d'utiliser la formule de Leibniz :

$$\nabla \cdot F = \sum_k \nabla F_k(q) \cdot e_k + \sum_k F_k(q) \nabla \cdot e_k. \tag{26.116}$$

Afin d'alléger les notations, nous allons nous concentrer sur le terme numéro k et ne pas écrire la somme. Si i et j sont les nombres tels que $\epsilon_{ijk} = 1$, alors ce que la formule (26.113) signifie, c'est que

$$\nabla \cdot e_k = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_k}(h_i h_j). \tag{26.117}$$

Nous savons déjà par la formule (26.99) que

$$\nabla F_k = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial F_k}{\partial q_l} e_l, \tag{26.118}$$

par conséquent

$$\nabla F_k \cdot e_k = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial F_k}{\partial q_l} \delta_{kl} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial F_k}{\partial q_k}. \tag{26.119}$$

Pour obtenir cela nous avons utilisé le fait que $e_l \cdot e_k = \delta_{lk}$. Le terme numéro k de la somme (26.116) est donc

$$\frac{1}{h_k} \frac{\partial F_k}{\partial q_k} + \frac{F_k}{h_k h_i h_j} \frac{\partial (h_i h_j)}{\partial q_k} = \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial (F_k h_i h_j)}{\partial q_k} \tag{26.120}$$

où il est entendu que i et j représentent les nombres tels que $\epsilon_{ijk} = 1$.

Au final, nous avons

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{ijk} |\epsilon_{ijk}| \frac{\partial (F_k h_i h_j)}{\partial q_k}. \tag{26.121}$$

Ici, la somme sur i et j consiste seulement à sélectionner les termes tels que i et j ne sont pas k. En écrivant la somme explicitement,

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3 h_1 h_2) \right]. \tag{26.122}$$

26.5.7.1 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, nous avons déjà vu que $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$. La divergence est donc donnée par

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r F_z) \right]. \tag{26.123}$$

Par exemple si

$$F(r, \theta, z) = r e_\theta + e_z, \tag{26.124}$$

nous avons

$$(\nabla \cdot F)(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(r) + \frac{\partial}{\partial z}(r) \right] = 0. \tag{26.125}$$

Cela est logique parce que $r e_\theta$ est à peu près le champ dont nous avons parlé dans l'exemple (14.531), qui était à divergence nulle. En réalité, le champ dont on parlait dans cet exemple était exactement $-e_\theta$. Le champ e_z est également à divergence nulle parce qu'il est constant.

26.5.7.2 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, nous avons $h_\rho = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\varphi = r \sin\theta$, donc

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \sin\theta F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho F_\varphi) \right]. \tag{26.126}$$

si $F(\rho, \theta, \varphi) = F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi$.

26.5.8 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Le **laplacien** de f est donné par

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f). \tag{26.127}$$

En utilisant les formules données, nous avons

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{26.128}$$

Dans cette expression, la fonction f est donnée comme fonction de q_1, q_2 et q_3.

En coordonnées cylindriques, cela s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned} \tag{26.129}$$

Dans cette expression, f est fonction de r, θ et z.

En coordonnées sphériques, cela devient

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right]. \tag{26.130}$$ EqLaplaceSphe

Dans cette expression, f est fonction de ρ, θ et φ.

26.5.9 Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales

Nous voulons calculer le rotationnel de $F(q) = \sum_k F_k(q)e_k$. Pour cela nous commençons par écrire $e_k = h_k \nabla q_k$ et nous utilisons la formule de la proposition 14.534(3) avec $F_k h_k$ en guise de f :

$$\begin{aligned}\nabla \times F_k e_k &= \nabla \times (F_k h_k \nabla q_k)\\ &= F_k h_k \underbrace{\nabla \times (\nabla q_k)}_{=0} + \nabla(F_k h_k) \times \nabla q_k\\ &= \frac{1}{h_k}\nabla(F_k h_k) \times e_k.\end{aligned} \tag{26.131}$$

Nous utilisons à présent la formule (26.99) du gradient et le formule $e_j \times e_k = \sum_l \epsilon_{jkl} e_l$:

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_k e_k) &= \sum_j \frac{1}{h_j h_k}\frac{\partial}{\partial q_j}(F_k h_k) e_j \times e_k\\ &= \sum_{jl} \frac{1}{h_j h_k}\epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial q_j}(F_k h_k) e_l.\end{aligned} \tag{26.132}$$

Le rotationnel s'écrit donc

$$\nabla \times F = \sum_{jkl} \frac{1}{h_j h_k}\epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial q_j}(F_k h_k) e_l. \tag{26.133}$$

Devant e_1 par exemple nous avons seulement les termes $j = 2$, $k = 3$ et $j = 3$, $k = 2$. Étant donné que $\epsilon_{231} = 1$ et $\epsilon_{321} = -1$, le coefficient de e_1 sera simplement

$$\frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2 h_2)\right). \tag{26.134}$$

La formule complète devient

$$\begin{aligned}\nabla \times \sum_k F_k e_k = &\frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2 h_2)\right) e_1\\ &+ \frac{1}{h_1 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(F_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(F_3 h_3)\right) e_2\\ &+ \frac{1}{h_2 h_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(F_1 h_1)\right) e_3.\end{aligned} \tag{26.135}$$

26.5.9.1 Coordonnées cylindriques

En utilisant $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z) = &\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (F_\theta r)}{\partial z}\right) e_r \\ &+ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) e_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_z.\end{aligned} \tag{26.136}$$

EqRotationnelCylin

26.5.9.2 Coordonnées sphériques

En utilisant $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ et $h_\varphi = \rho \sin\theta$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi) = &\frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial (F_\varphi) \sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right) e_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial (F_\varphi \rho \sin\theta)}{\partial \rho}\right) e_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_\theta \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_\varphi.\end{aligned} \tag{26.137}$$

Note : dans le premier terme, il y a une simplification par ρ.

26.6 Les formules

26.6.1 Coordonnées polaires

Les vecteurs de base :

$$e_r = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} = \cos(\theta)e_x + \sin(\theta)e_y \tag{26.138a}$$

$$e_\theta = \begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = -\sin(\theta)e_x + \cos(\theta)e_y. \tag{26.138b}$$

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(r,\theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)e_\theta. \tag{26.139}$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta)\right]. \tag{26.140}$$

EqgRxJKd

Le rotationnel :

$$\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta) = \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_z. \tag{26.141}$$

EqtBnqCw

Notons que le rotationnel n'existe pas vraiment en deux dimensions. Ici nous avons vu le champ $F(r,\theta)$ comme un champ dans $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de z et n'ayant pas de composante z. Le résultat est un rotationnel qui est dirigé selon l'axe z.

26.6.2 Coordonnées cylindriques

Les vecteurs de base : idem qu'en coordonnées polaires, et on ajoute e_z sans modifications.

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(r,\theta,z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta,z)e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta,z)e_\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(r,\theta,z)e_z. \tag{26.142}$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right]. \tag{26.143}$$

Le rotationnel :

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z) = &\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (F_\theta r)}{\partial z}\right) e_r \\ &+ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) e_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) e_z.\end{aligned} \tag{26.144}$$

Note : les formules concernant les coordonnées polaires se réduisent de celles-ci en enlevant toutes les références à z.

26.6.3 Coordonnées sphériques

Les vecteurs de base :

$$\begin{aligned}e_r = \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\varphi)\\ \cos(\theta)\sin(\varphi)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix}, \\ e_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{26.145}$$

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} r_\varphi. \tag{26.146}$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \sin\theta F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin\theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho F_\varphi)\right]. \tag{26.147}$$

Le rotationnel :

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi) = &\frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial (F_\varphi)\sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right) e_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho \sin\theta}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial (F_\varphi \rho \sin\theta)}{\partial \rho}\right) e_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_\theta \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right) e_\varphi.\end{aligned} \tag{26.148}$$

Chapitre 27

Espaces de Hilbert

27.1 Espaces de Hilbert

PROPooQFTSooPFfbCc

Proposition 27.1 ([708]).
Soient des espaces vectoriels normés X et Y ainsi qu'une forme sesquilinéaire $\phi\colon X\times Y\to\mathbb{C}$. L'espace $X\times Y$ est muni de la topologie produit[1]*. Il y a équivalence des faits suivants.*

ITEMooWMFBooOWPzgP
(1) *ϕ est continue.*

ITEMooSFQZooHNcWwH
(2) *ϕ est continue en $(0,0)$*

ITEMooWSWQooSYzOol
(3) $\sup\{|\phi(x,y)|$ *tel que* $\|x\|,\|y\|\leqslant 1\}<\infty$.

ITEMooRKHQooMVXlYD
(4) *Il existe $C\geqslant 0$ telle que*
$$|\phi(x,y)|\leqslant C\|x\|\|y\| \tag{27.1}$$
pour tout $(x,y)\in X\times Y$.

ITEMooLWDCooLIGVDs
(5) *ϕ est bornée*

Dans le cas où ϕ vérifie ces propriétés, alors nous posons
$$\mathcal{A}=\{|\phi(x,y)|\text{ tel que }\|(x,y)\|\leqslant 1\} \tag{27.2}$$
et
$$\mathcal{B}=\{\beta\geqslant 0\text{ tel que }|\phi(x,y)|\leqslant\beta\|x\|\|y\|,\forall x,y\} \tag{27.3}$$
et nous avons
$$\|\phi\|=\sup(\mathcal{A})=\min(\mathcal{B}). \tag{27.4}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Une application est continue si et seulement si elle est continue en tout point (théorème 9.286).

(2) **(2) ⇒ (3)** Pour rappel, nous avons mis sur $X\times Y$ la topologie produit. Le lemme 9.306 nous indique que cette topologie est la même que la topologie de la norme produit.

Bref, nous supposons que ϕ est continue en $(0,0)$ et nous prouvons que
$$\sup\{|\phi(x,y)|\text{ tel que }\|x\|,\|y\|\leqslant 1\}<\infty. \tag{27.5}$$
Nous y allons par contradiction. Supposons que pour n dans $\mathbb{N}$ il existe $(x_n,y_n)\in X\times Y$ tels que $\|x_n\|,\|y_n\|\leqslant 1$ et $|\phi(x_n,y_n)>n^2|$. En posant $v_n=x_n/n$ et $w_n=y_n/n$, nous avons
$$\|v_n\|\leqslant\frac{\|x_n\|}{n}\leqslant\frac{1}{n}, \tag{27.6}$$
et la même chose pour $\|w_n\|$. Nous avons $(v_n,w_n)\xrightarrow{X\times Y}(0,0)$ et donc, par continuité de ϕ en $(0,0)$ nous avons $\phi(v_n,w_n)\xrightarrow{\mathbb{C}}\phi(0,0)=0$. Mais
$$|\phi(v_n,w_n)|=\frac{1}{n^2}|\phi(x_n,y_n)|\geqslant\frac{1}{n^2}n^2=1. \tag{27.7}$$
Donc nous n'avons pas $|\phi(v_n,w_n)|\to 0$.

[1] Quand on ne précise pas, un produit est toujours muni de la topologie produit 9.66.

(3) **(3) ⇒ (4)** Nous notons

$$M = \sup\{|\phi(x,y)| \text{ tel que } \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} < \infty, \tag{27.8}$$

et nous allons prouver que $|\phi(x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\|$.

Si $x = 0$ ou si $y = 0$, c'est évident ; nous supposons donc que x et y sont tous deux non nuls. Nous posons $v = x/\|x\|$ et $w = y/\|y\|$. Nous avons alors

$$|\phi(x,y)| = \|x\|\|y\||\phi(v,w)| \leqslant \|x\|\|y\|M. \tag{27.9}$$

(4) **(4) ⇒ (5)** La norme de ϕ est le nombre

$$\|\phi\| = \sup_{\substack{(x,y)\in X\times Y\\ \|(x,y)\|=1}} |\phi(x,y)|, \tag{27.10}$$

que nous devons prouver être fini. Les éléments (x,y) sur lesquels porte le supremum vérifient

$$1 = \|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \tag{27.11}$$

et donc vérifient $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. En utilisant (4), nous avons donc

$$\|\phi\| = \sup_{\|(x,y)\|=1} |\phi(x,y)| \leqslant \sup_{\|(x,y)\|=1} C\|x\|\|y\| \leqslant C. \tag{27.12}$$

(5) **(5) ⇒ (1)** Il nous reste à prouver que si ϕ est bornée, alors elle est continue. Soit une suite convergente $(x_n, y_n) \xrightarrow{X\times Y} (x,y)$. Nous allons prouver que $\phi(x_n,y_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} \phi(x,y)$. Ce sont les majorations usuelles :

$$\begin{aligned}
|\phi(x_n,y_n) - \phi(x,y)| &\leqslant |\phi(x_n,y_n) - \phi(x_n,y)| + |\phi(x_n,y) - \phi(x,y)| && \text{(27.13a)}\\
&= |\phi(x_n, y_n - y)| + |\phi(x_n - x, y)| && \text{(27.13b)}\\
&\leqslant \|\phi\|\|x_n\|\|y_n - y\| + \|\phi\|\|x_n - x\|\|y\| && \text{(27.13c)}\\
&\to 0. && \text{(27.13d)}
\end{aligned}$$

Enfin nous supposons que toutes ces conditions équivalentes, et nous prouvons que $\|\phi\| = \sup(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{B})$.

(1) $\|\phi\| = \sup(\mathcal{A})$ En posant

$$\mathcal{C} = \{|\phi(x,y)| \text{ tel que } \|(x,y)\| = 1\}, \tag{27.14}$$

nous avons, par définition, $\|\phi\| = \sup(\mathcal{C})$. Étant donné que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, nous avons $\sup(\mathcal{C}) \leqslant \sup(\mathcal{A})$. Faisons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $|\phi(x,y)| \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\|(x,y)\| \leqslant 1$. En posant $v = x/\|x\|$ et $w = y/\|y\|$ nous avons $|\phi(v,w)| \in \mathcal{C}$ et surtout $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. Donc

$$|\phi(v,w)| = \frac{1}{\|x\|\|y\|}|\phi(x,y)| \geqslant |\phi(x,y)|. \tag{27.15}$$

Donc tout élément de $\mathcal{C}$ est majoré par un élément de $\mathcal{A}$. Donc $\sup(\mathcal{A}) \geqslant \sup(\mathcal{C})$.

(2) $\|\phi\| \in \mathcal{B}$ Soit $(x,y) \in X \times Y$. Étant donné que $\|x/\|x\|\| = 1$ nous avons

$$\left|\phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| \leqslant \sup_{\|(v,w)\|=1} |\phi(v,w)| = \|\phi\|. \tag{27.16}$$

En multipliant les deux côtés par $\|x\|\|y\|$ nous trouvons

$$|\phi(x,y)| \leqslant \|\phi\|\|x\|\|y\|, \tag{27.17}$$

et donc $\|\phi\| \in \mathcal{B}$.

(3) $\|\phi\|$ **minore** $\mathcal{B}$

Nous montrons que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, nous avons $\alpha \leqslant \beta$. En effet si $\alpha \in \mathcal{A}$, alors $\alpha = |\phi(x,y)|$ pour un certain $(x,y) \in X \times Y$ vérifiant $\|(x,y)\| = 1$. Mais $\beta \in \mathcal{B}$ signifie que $|\phi(x,y)| \leqslant \beta\|x\|\|y\|$. Nous avons donc

$$\alpha = |\phi(x,y)| \leqslant \beta\|x\|\|y\| \leqslant \beta \tag{27.18}$$

parce que $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$.

□

DefORuBdBN

Définition 27.2.
*Un espace **préhilbertien** est*

- *soit un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire*[2],
- *soit un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien*[3].

*Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien qui est complet*[4] *pour la norme induite par son produit (scalaire ou hermitien), c'est-à-dire tel que*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{27.19}$$

pour tout élément x.

Dans les deux cas nous considérons la topologie métrique dérivant du produit.

Dans les cas de dimension finie, les espaces vectoriels normés sont automatiquement complets par la proposition 9.366.

La différence entre un espace de Hilbert et un espace de Banach est que dans le cas d'un espace de Hilbert, nous demandons que la norme dérive d'un produit scalaire.

PropTdupIG

Proposition 27.3.
Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert réel, alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle. \tag{27.20}$$

Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle. \tag{27.21}$$

EqrbBkK

Dans les deux cas nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{27.22}$$

Dans un espace vectoriel de dimension infinie, tous les opérateurs linéaires ne sont pas continus.

Exemple 27.4.
Soit un espace vectoriel V engendré par la base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et l'application linéaire $T\colon V \to V$ donnée par

$$Te_k = ke_k. \tag{27.23}$$

Nous allons montrer que l'image inverse de la boule unité ouverte $\mathcal{O}$ n'est pas ouverte. En effet si (ϵ_k) est une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro, les vecteurs

$$a_k = \left(\frac{1}{k} + \epsilon_k\right) e_k \tag{27.24}$$

sont hors de $T^{-1}\mathcal{O}$ parce que

$$Ta_k = (1 + k\epsilon_k)e_k. \tag{27.25}$$

Mais la suite (a_k) converge vers 0 qui fait partie de $T^{-1}\mathcal{O}$. Donc le complémentaire de $T^{-1}\mathcal{O}$ n'est pas fermé, ce qui prouve que $T^{-1}\mathcal{O}$ n'est pas ouvert. △

PROPooMSAYooONHLYq

Proposition 27.5 ([1])**.**
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ tel qu'il existe une bijection linéaire isométrique $\Phi\colon \mathscr{H} \to E$. Alors en posant

$$\langle \alpha, \beta\rangle_E = \langle \Phi^{-1}(\alpha), \Phi^{-1}(\beta)\rangle_{\mathscr{H}}, \tag{27.26}$$

l'espace E devient un espace de Hilbert.

[2] Définition 10.163.
[3] Définition 10.174.
[4] Définition 9.333.

Démonstration. Le fait que $\langle .,. \rangle_E$ soit un produit scalaire (hermitien) lorsque $\langle .,. \rangle_{\mathscr{H}}$ l'est est une conséquence de la linéarité de Φ. Il donne la norme parce que

$$\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{\langle \Phi^{-1}(\alpha), \Phi^{-1}(\alpha) \rangle} = \| \Phi^{-1}(\alpha) \| = \| \alpha \| \tag{27.27}$$

parce que Φ^{-1} est une isométrie.

Pour voir que E est complet, soit une suite (α_k) de τ-Cauchy dans E. Nous devons prouver qu'elle converge. Nous posons $x_k = \Phi^{-1}(\alpha_k)$.

Commençons par voir que (x_k) est τ-Cauchy dans $\mathscr{H}$. Soit un voisinage V de 0 dans $\mathscr{H}$. Nous posons $U = \Phi(V)$. Vu que (α_k) est τ-Cauchy, il existe $N > 0$ tel que $\alpha_k - \alpha_l \in U$ dès que $k, l > N$. Du coup, si $k, l > N$ nous avons aussi $x_k - x_l = \Phi^{-1}(\alpha_k - \alpha_l) \subset \Phi^{-1}(U) = V$. Cela prouve que (x_k) est τ-Cauchy.

Vu que $\mathscr{H}$ est complet, il existe $x \in \mathscr{H}$ tel que $x_k \xrightarrow{\mathscr{H}} x$. Montrons que $\alpha_k \xrightarrow{E} \Phi(x)$.

Soit $\epsilon > 0$ et $N > 0$ tel que $\| x_k - x \| < \epsilon$ dès que $k \geqslant N$. Alors nous avons aussi

$$\| \alpha_k - \Phi(x) \| = \| \Phi(x_k) - \Phi(x) \| = \| \Phi(x_k - x) \| = \| x_k - x \| < \epsilon \tag{27.28}$$

où nous avons utilisé le fait que Φ était linéaire et une isométrie. □

27.1.1 Sous-espace vectoriel fermé ???

Nous verrons que beaucoup de résultats demandent un sous-espace vectoriel *fermé*. Une question légitime est : est-ce qu'il existe des sous-espaces vectoriels qui ne soient pas fermés ? En dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels sont fermés[5], mais cela n'est pas vrai en dimension infinie.

Soit en effet une partie libre infinie $A = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. L'ensemble $\mathrm{Span}(A)$ des combinaisons linéaires d'éléments de A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, mais il n'est pas fermé.

En effet, supposons pour simplifier les notations que $\| v_i \| = 1$ pour tout i. Alors nous considérons la combinaison

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v_k \tag{27.29}$$

où les α_k sont suffisamment décroissants pour assurer les convergences[6]. Le vecteur a n'est pas dans $\mathrm{Span}(A)$, mais la suite $a_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ est dans $\mathrm{Span}(A)$ et converge vers a : $a_n \xrightarrow{\mathscr{H}} a$. En effet,

$$\| a_n - a \| = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k v_k \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{27.30}$$

Vous voulez des détails sur la dernière limite ? Vu que la somme $\sum_k |\alpha_k|$ converge, la suite des sommes de queues de suites[7] converge vers zéro :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| = 0. \tag{27.31}$$

27.2 Théorème de la projection

Voir la version plus simple dans 20.112.

ThoProjOrthuzcYkz

Théorème 27.6 (Projection sur partie fermée convexe[709, 710])**.**
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, $x \in \mathscr{H}$, et C un sous-ensemble fermé convexe de $\mathscr{H}$.

(1) Les deux conditions suivantes sur $y \in \mathscr{H}$ sont équivalentes :

ETsfYCSItemi

(1a) $\| x - y \| = \inf\{ \| x - z \| \text{ tel que } z \in C \}$,

ETsfYCSItemii

(1b) pour tout $z \in C$, $\mathrm{Re}\langle x - y, z - y \rangle \leqslant 0$.

(2) Il existe un unique $y \in \mathscr{H}$, noté $y = \texttt{proj}_C(x)$ vérifiant ces conditions.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un élément dans C vérifiant la première condition. Ensuite nous verrons l'équivalence.

Nous nommons d l'infimum en question de la première condition.

[5] Proposition 9.250.
[6] Par exemple $\alpha_k = 1/k^2$ si les v_k sont orthonormaux.
[7] On se comprend hein.

Existence Soit (y_n) une suite dans C telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \inf\{\|z - y\| \text{ tel que } z \in C\} = d. \tag{27.32}$$

Nous allons montrer que cette suite peut être choisie de Cauchy. Elle convergera donc dans $\mathscr{H}$ parce que ce dernier est complet. Mais C étant supposé fermé dans $\mathscr{H}$, la limite appartiendra à C. Soient $r, s \in \mathbb{N}$. D'abord nous avons

$$\|y_r - y_s\|^2 = \langle y_r - y_s + x - x, y_r - y_s + x - x\rangle \tag{27.33a}$$
$$= \|y_r - x\|^2 + \|y_s - x\|^2 - 2\langle y_r - x, y_s - x\rangle. \tag{27.33b}$$

Ensuite,

$$4\left\|\frac{y_r + y_s}{2} - x\right\|^2 = \langle y_r + y_s - 2x, y_r - y_s - 2x\rangle \tag{27.34a}$$
$$= \|y_r - x\|^2 + \|y_s - x\|^2 + 2\langle y_r - x, y_s - x\rangle. \tag{27.34b}$$

Si nous égalisons les valeurs de $2\langle y_r - x, y_s - x\rangle$ nous trouvons

$$\|y_r - y_s\|^2 = -4\left\|\frac{y_r + y_s}{2} - x\right\|^2 + 2\|y_r - x\|^2 + 2\|y_s - x\|^2. \tag{27.35}$$ EqiqCyUa

La distance infimum étant d, nous pouvons choisir y_n de telle façon à avoir

$$\|y_n - x\| \leqslant d + \frac{1}{n}. \tag{27.36}$$

D'autre part étant donné que C est convexe, $(y_r + y_s)/2$ est dans C et nous avons

$$\left\|\frac{y_r + y_s}{2} - x\right\| \geqslant d. \tag{27.37}$$

En mettant ces majorations dans (27.35) nous trouvons

$$\|y_r - y_s\|^2 \leqslant -4d + 2\left(d + \frac{1}{r}\right) + 2\left(d + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}. \tag{27.38}$$

La suite (y_n) est donc de Cauchy et la limite est un élément de C. Prouvons que cet élément y réalise l'infimum. Pour cela nous avons les inégalités

$$d \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x - y_n\| + \|y_n - y\|. \tag{27.39}$$

En prenant le limite $n \to \infty$ nous trouvons

$$d \leqslant \|x - y\| \leqslant d. \tag{27.40}$$

Unicité Même preuve que pour le théorème en dimension finie 14.151.

(1a)⇒ (1b) Même preuve que pour le théorème en dimension finie 14.151.

(1b)⇒ (1a) Même preuve que pour le théorème en dimension finie 14.151.

□ PropAXJpCe

Proposition 27.7.
Soit C une partie convexe et fermée de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Alors pour tout $x_1, x_2 \in \mathscr{H}$ nous avons

$$\|\texttt{proj}_C(x_1) - \texttt{proj}_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\|. \tag{27.41}$$

En particulier la projection est une application continue.

Démonstration. Nous posons $y_1 = \texttt{proj}_C(x_1)$ et $y_2 = \texttt{proj}_C(x_2)$. Par la partie (1b) du théorème 27.6, nous avons, pour tout $z, z' \in C$ les inégalités

$$\text{Re}\langle x_1 - y_1, z - y_1\rangle \leqslant 0 \tag{27.42a}$$
$$\text{Re}\langle x_2 - y_2, z' - y_2\rangle \leqslant 0. \tag{27.42b}$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$ et en sommant nous trouvons

$$\operatorname{Re}\langle (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2), y_2 - y_1\rangle \leqslant 0. \tag{27.43}$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\|^2 &= \operatorname{Re}\|y_1 - y_2\| \\ &= \operatorname{Re}\langle y_1 - y_2, (y_1 - x_1) + x_1 - x_2 + (x_2 - y_2)\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \operatorname{Re}\langle y_2 - y_1, (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2)\rangle \\ &\leqslant \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \\ &\leqslant \big\|\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle\big\| \\ &\leqslant \|y_1 - y_2\|\|x_1 - x_2\|.\end{aligned} \tag{27.44}$$

En simplifiant par $\|y_1 - y_2\|$[8] nous trouvons le résultat

$$\|y_1 - y_2\| \leqslant \|x_1 - x_2\|. \tag{27.45}$$

□

ThoMXwOjb

Théorème 27.8 (Projection orthogonale)**.**
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et K, un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$ et $x \in \mathscr{H}$. L'élément $y = \texttt{proj}_K(x)$ est l'unique élément de K tel que

$$x - y \in K^\perp. \tag{27.46}$$

De plus l'application $x \mapsto \texttt{proj}_K(x)$ est linéaire, continue et de norme 1.

L'élément y ainsi défini est la **projection orthogonale** de x sur K et sera noté $\texttt{proj}_K(f)$.

Démonstration. La continuité de la projection est donnée par la proposition 27.7.

Soit z un élément de K tel que $\langle z - x, a\rangle = 0$ pour tout $a \in K$. Nous avons

$$\|x - a\|^2 = \|z - x\|^2 + \|a - z\|^2 + 2\underbrace{\langle z - x, a - z\rangle}_{=0} \tag{27.47a}$$

$$\geqslant \|z - x\|^2. \tag{27.47b}$$

Le produit scalaire est nul parce que $a - z \in K$. La distance $\|z - x\|$ est donc bien la plus petite distance entre x et les éléments de K.

Dans l'autre sens, nous supposons que $y \in K$ minimise la distance à x dans K. Par hypothèse pour tout a et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la différence

$$\|(y + \lambda a) - x\|^2 - \|y - x\|^2 \tag{27.48}$$

est positive. En développant les produits scalaires nous trouvons la conditions suivante

$$\lambda^2\|a\|^2 + 2\lambda\langle a, y - x\rangle \geqslant 0 \tag{27.49}$$

qui doit être vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En tant que polynôme du second degré en λ, cela n'aura pas deux racines réelles distinctes uniquement si $\langle a, y - x\rangle = 0$.

Nous montrons maintenant la linéarité de la projection orthogonale. Soient $x_1, x_2 \in \mathscr{H}$. L'élément $y = \texttt{proj}_K x_1 + \texttt{proj}_K x_2$ satisfait à la condition d'orthogonalité : pour tout $z \in K$,

$$\langle x_1 + x_2 - \texttt{proj}_K x_1 - \texttt{proj}_K x_2, z\rangle = \langle x_1 - \texttt{proj}_K x_1, z\rangle + \langle x_2 - \texttt{proj}_K x_2, z\rangle = 0. \tag{27.50}$$

Étant donné que K est un sous-espace vectoriel, la condition de minimalité est automatiquement vérifiée (seconde partie du théorème 27.6).

En ce qui concerne la norme opérateur de $\texttt{proj}_K$, la décomposition de $x \in \mathscr{H}$ en composantes dans K et $K^\perp$ est

$$x = x + (x - \texttt{proj}_K x). \tag{27.51}$$

Étant deux parties orthogonales nous avons

$$\|\texttt{proj}_K x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - \texttt{proj}_K x\|^2. \tag{27.52}$$

En prenant $\|x\| = 1$ nous trouvons $\|\texttt{proj}_K x\|^2 \leqslant 1$ et par conséquent $\|\texttt{proj}_K\| \leqslant 1$. Mais d'autre part en prenant $x \in K$ nous avons automatiquement $\|\texttt{proj}_K\| \geqslant 1$. □

[8] Si c'est nul, alors la preuve est évidente.

Proposition 27.9.
Soit $\mathscr{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ et K l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est positive, alors $\texttt{proj}_K f$ est positive (presque partout).

Démonstration. L'ensemble $A = \{\texttt{proj}_K f < 0\}$ est dans $\mathcal{F}$. En effet

$$A = (\texttt{proj}_K f)^{-1}\big(]-\infty, 0[\big) \tag{27.53}$$

alors que, par construction, $\texttt{proj}_K f$ est $\mathcal{F}$-mesurable. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est alors $\mathcal{F}$-mesurable (c'est-à-dire $1_A \in K$) et nous avons

$$0 \leqslant \int_\Omega f \mathbb{1}_A = \int_\Omega \texttt{proj}_K f \mathbb{1}_A \leqslant 0. \tag{27.54}$$

Étant donné que nous avons supposé $f \geqslant 0$ nous avons alors $\mu(A) = 0$. D'où le fait que $\texttt{proj}_K f$ est presque partout positive. □

27.3 Systèmes orthogonaux et bases

Dans cette partie nous noterons $\mathbb{K}$ le corps de base de l'espace $\mathscr{H}$. Seuls deux cas sont envisagés : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour chaque $x \in \mathscr{H}$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi_y : \mathscr{H} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned} \tag{27.55}$$

EQooMWZAooZUFKOs

Ce sont des applications continues.

27.3.1 Orthogonal d'une partie

DEFooXUXQooMmDnhW

Définition 27.10.
*Soit une partie A de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. L'**orthogonal** de A est l'ensemble*

$$A^\perp = \{v \in \mathscr{H} \text{ tel que } \langle v, x \rangle = 0 \forall x \in A\}. \tag{27.56}$$

PropdpaMpH

Proposition 27.11.
Si $\mathscr{H}$ est un préhilbert et si $A \subset \mathscr{H}$, alors l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$.

Démonstration. L'application Φ_x définie en (27.55) est continue pour chaque $x \in \mathscr{H}$ et par conséquent l'ensemble $\ker \Phi_x = \Phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé. L'ensemble

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker \Phi_x \tag{27.57}$$

est donc fermé. □

ThowZyaiz

Théorème 27.12.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de $\mathscr{H}$. Alors

(1) Nous avons la décomposition

$$\mathscr{H} = F \oplus F^\perp. \tag{27.58}$$

EqoXIvrG

ItemThowZyaizii

(2) La projection sur F par rapport à la somme directe (27.58) est la projection $\texttt{proj}_F$ du théorème de projection.

(3) La décomposition (27.58) est topologique.

Proposition 27.13.
Si F est un sous-espace de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ alors on a $F^{\perp\perp} = \bar{F}$.

Démonstration. Nous savons par la proposition 27.11 que $F^\perp$ est fermé, par conséquent le théorème 27.12 donne la somme directe

$$\mathscr{H} = F^\perp \oplus F^{\perp\perp}. \tag{27.59}$$

Mais $\bar{F}$ étant également fermé nous avons la somme directe

$$\mathscr{H} = \bar{F} \oplus (\bar{F})^\perp. \tag{27.60}$$

Montrons que $(\bar{F})^\perp = F^\perp$. En effet si $x \in F^\perp$ et si $y \in \bar{F}$, alors il existe une suite y_n dans F qui converge vers y. Pour chaque n nous avons $\langle x, y_n \rangle = 0$ et donc $\langle x, y \rangle = 0$ par continuité du produit scalaire.

Nous avons donc

$$\mathscr{H} = F^\perp \oplus F^{\perp\perp} = \bar{F} \oplus F^\perp. \tag{27.61}$$

Mais $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$ (prendre une suite). Les espaces $\bar{F}$ et $F^{\perp\perp}$ étant tous deux des supplémentaires de $F^\perp$, nous déduisons qu'ils doivent être égaux. □

PropqiWonByiBmc

Proposition 27.14.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$. Alors F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. Nous savons que

$$\mathscr{H} = F^\perp \oplus \bar{F}. \tag{27.62}$$

Donc nous avons $\mathscr{H} = \bar{F}$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$. □

Pour vérifier si un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense, il suffit donc de montrer que son orthogonal est réduit à zéro.

27.3.2 Dual, théorème de représentation de Riesz

LemjYVcHE

Lemme 27.15.
L'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathscr{H} &\to \mathcal{L}(\mathscr{H}, \mathbb{K}) \\ y &\mapsto \Phi_y \end{aligned} \tag{27.63}$$

est une isométrie : nous avons $\|\Phi_y\| = \|y\|$.

De plus pour chaque y, l'application Φ_y est continue.

Démonstration. En utilisant la définition de la norme opérateur et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\Phi_y\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Phi_y(x)\| = \sup |\langle x, y \rangle| \leqslant \sup \|x\|\|y\| = \|y\|. \tag{27.64}$$

Par conséquent $\|\Phi_y\| \leqslant \|y\|$. Mais d'autre part le fait que $\Phi_y(y) = \|y\|^2$ montre que $\|\Phi_y\| \geqslant \|y\|$.

En ce qui concerne la continuité de Φ_y, elle est garantie par le fait que c'est une application linéaire bornée via la proposition 12.98. □

Définition 27.16.
*Le **dual** de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est l'ensemble*

$$\mathscr{H}' = \{f\colon \mathscr{H} \to \mathbb{K} \text{ linéaire et continue}\}. \tag{27.65}$$

Notons que dans le contexte des espaces de Hilbert nous demandons la continuité des éléments du dual parce qu'elle n'est pas automatique par la linéarité dans les cas de dimension infinie. En principe nous devrions préciser dual *topologique*, mais nous ne le ferons pas systématiquement lorsque le contexte parle clairement de topologie (ce qui est le cas lorsqu'on parle d'espaces de Hilbert). De temps en temps le dual *algébrique* d'un espace est noté E^* ; dans ce cas la continuité n'est pas demandée.

ThoQgTovL

Théorème 27.17 (Théorème de représentation de Riesz, thème 21)**.**
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'application

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathscr{H} &\to \mathscr{H}' \\ y &\mapsto \Phi_y \end{aligned} \tag{27.66}$$

est une bijection isométrique.

Démonstration. Nous savons du lemme 27.15 que Φ est une isométrie. Nous devons seulement montrer que Φ est surjective. L'application nulle est dans l'image de Φ. Soit $f \in \mathscr{H}'$ non nulle. Par continuité nous savons que $F = \ker(f)$ est fermé, donc

$$\mathscr{H} = \ker(f) \oplus (\ker f)^{\perp} \tag{27.67}$$

EQooFUCWooUnYcZG

par le théorème 27.12.

(1) **Une base adaptée**

Nous considérons une base de $\mathscr{H}$ adaptée à la décomposition 27.67, c'est-à-dire

- $(u_s)_{s\in S}$ une base de $\ker f$,
- $(v_t)_{t\in T}$ une base de $(\ker f)^{\perp}$.

(2) $(\ker f)^{\perp} \cap \ker(f) = \{0\}$

Si $v \in (\ker f)^{\perp}$ alors pour tout $w \in \ker(f)$ nous avons $\langle v, w\rangle = 0$. En particulier si v lui-même est dans $\ker(f)$ alors $\langle v, v\rangle = 0$ et $v = 0$.

(3) **Une base encore plus adaptée** Si v est non nul dans $(\ker f)^{\perp}$, alors $f(v) \neq 0$ (sinon il serait dans l'intersection entre $\ker(f)$ et $(\ker f)^{\perp}$). Mais $f(v) \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ implique que $f(\mathbb{K}v) = \mathbb{K}$, c'est-à-dire que $\{f(v)\}$ est une base de $\text{Image}(f)$ (l'image de f est $\mathbb{K}$).

Le théorème du rang (théorème 6.53) assure alors que

$$\{v\} \cup \{u_s\}_{s\in S} \tag{27.68}$$

est une base de $\mathscr{H}$ avec $v \in (\ker f)^{\perp}$ et $u_s \in \ker f$. Nous choisissons v pour avoir $\|v\| = 1$.

(4) **Existence**

Nous pouvons maintenant prouver l'existence de y tel que $\Phi_y = f$. Prouvons qu'en posant $y = \overline{f(v)}v$ nous avons $\Phi_y = f$. Pour cela, un peu de calcul :

$$\Phi_y(v) = \langle v, y\rangle = f(v)\langle v, v\rangle = f(v) \tag{27.69a}$$
$$\Phi_y(u_s) = \langle u_s, y\rangle = 0. \tag{27.69b}$$

Par conséquent Φ_y et f coïncident sur une base de $\mathscr{H}$.

(5) **Unicité**

En ce qui concerne l'unicité, d'abord si $\Phi_y = f$ alors nous devons avoir $y \in (\ker f)^{\perp}$ et par conséquent $y = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons alors

$$\Phi_y(v) = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}. \tag{27.70}$$

Pour que cela soit égal à $f(v)$, nous fixons $\lambda = \overline{f(v)}$.

□

Notons que nous avons réellement utilisé le théorème du rang pour l'unicité. Si nous ne demandions pas l'unicité, alors nous n'avions pas besoin du fait que $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$, et nous aurons donc pu parler de formes plus générales à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

27.3.3 Séparabilité

DEFooSFOJooGICSbT

Définition 27.18.
*Un espace topologique est **séparable** si il possède une partie dénombrable dense.*

DEFooQVPHooJaSWyF

Définition 27.19 ([711]).
*Si E est un espace vectoriel normé nous disons que Δ est une partie **totale** de E si* $\text{Span}(\Delta)$ *est dense dans E. Attention : nous rappelons que* $\text{Span}(\Delta)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires* finies *d'éléments de Δ.*

PROPooZMWHooVwvNBY

Proposition 27.20.
Un espace vectoriel normé est séparable si et seulement si il possède une partie totale dénombrable.

Démonstration. Si Δ est une partie dénombrable de E, alors le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\Delta$ est dénombrable, et sa fermeture est la même que celle de $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\Delta$. □

Définition 27.21.
*Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{H}$ indicée par un ensemble quelconque I est un **système orthonormé** si*

(1) $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$,

(2) $u_i \perp u_j$ pour tout $i \neq j$.

Notons que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé dénombrable alors en utilisant les formules de la proposition 27.3, nous avons

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2. \tag{27.71}$$

Exemple 27.22.
Dans l'ensemble $L^2(a,b)$ avec $b-a=L$ l'ensemble des fonctions

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp(\frac{2\pi}{L} int) \tag{27.72}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$ forme un système orthonormé. En effet

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \exp(\frac{2\pi}{L} int) \exp(-\frac{2\pi}{L} int) = 1 \tag{27.73}$$

et

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{\frac{2\pi}{L}(n-m)t} dt = 0. \tag{27.74}$$

Dans cette intégrale nous utilisons le fait que $b = a + (b-a)$ pour simplifier les expressions en cours de calcul.

La famille (27.72) est le **système trigonométrique** de $L^2(a,b)$. On en parle aussi dans [671]. △

Proposition 27.23.
Une partie orthonormée est libre.

Démonstration. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de $\mathscr{H}$ et une combinaison linéaire *finie* nulle :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k = 0. \tag{27.75}$$

Nous développons la somme en utilisant les formules de la proposition 27.3 :

$$0 = \| \sum_k a_k u_k \|^2 = \sum_k |a_k|^2 \|u_k\|^2 + 2 \sum_{k<l} \langle a_k u_k, a_l u_l \rangle. \tag{27.76}$$

La famille étant orthonormée, les choses se simplifient en

$$\sum_k |a_k|^2 = 0, \tag{27.77}$$

ce qui signifie que $a_k = 0$ pour tout k. □

Avant de continuer nous devons définir comment nous calculons des sommes sur des ensembles quelconques. Si I est un ensemble et si pour chaque $i \in I$ nous avons un nombre réel positif a_i, alors nous définissons

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{j\in J} a_j. \tag{27.78}$$

Cela est discuté dans la section 12.11.

Proposition 27.24 (Inégalités de Bessel)**.**
Soit $\mathscr{H}$ un préhilbert. Si $(u_i)_{i\in I}$ est un système orthonormé et si $x \in \mathscr{H}$, alors

$$\sum_{i\in I} \big|\langle x, u_i \rangle\big|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{27.79}$$

Démonstration. Les éléments de la somme étant des réels positifs, la proposition 12.144 fonctionne pour décrire les sommes.

Posons $c_i(x) = \langle x, u_i \rangle$. Pour toute partie finie $J \subset I$ nous avons

$$0 \leqslant \Big\| x - \sum_{j\in J} c_j(x)u_j \Big\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\sum_j \langle x, c_j(x)u_j\rangle + \sum_j |c_j(x)|^2. \tag{27.80}$$

Mais en tenant compte du fait que

$$\langle x, c_j(x)u_j\rangle = \overline{c_j(x)}\langle x, u_j\rangle = |c_j(x)|^2, \tag{27.81}$$

nous restons avec

$$\|x - \sum_{j\in J} c_j(x)u_j\| = \|x\|^2 - \sum_{j\in J} |c_j(x)|^2. \tag{27.82}$$ EqyxXWEA

Finalement,

$$\sum_{j\in J} |c_j(x)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{27.83}$$

Ayant cette inégalité pour toute partie finie de I, nous l'avons encore pour le supremum. □

PROPooWTOZooYZdlml

Proposition 27.25.
Soit $\mathscr{H}$ un préhilbert et une famille orthonormée $(u_i)_{i\in I}$. Si

$$x = \sum_{i\in I} \xi_i u_i \tag{27.84}$$ EqitrzXi

alors $\xi_i = \langle x, u_i\rangle$.

Démonstration. Nous appliquons l'application Φ_{u_k} du théorème de représentation de Riesz[9] à l'équation (27.84).

Si I est dénombrable, alors permuter Φ_{u_k} avec la somme consiste à invoquer la continuité, et permuter la limite des sommes partielles avec Φ_{u_k} (l'application Φ_{u_k} est continue parce qu'isométrique).

Sinon, il faut utiliser la proposition 12.159. Il faut donc montrer que la famille $\Phi_{u_k}\big(\xi_i u_i\big)$ est sommable. Cela est fort vrai parce que cette famille ne contient en réalité qu'en seul élément non nul, celui avec $i = k$, qui vaut ξ_k. Au final nous avons :

$$\langle x, u_k\rangle = \sum_{i\in I} \Phi_{u_k}(\xi_i u_i) = \xi_k. \tag{27.85}$$

□

27.3.4 Base hilbertienne

DEFooADQXooFoIhTG

Définition 27.26.
*Une **base orthonormée** est une famille dénombrable orthonormée et totale*[10]*. Cela sera souvent aussi appelé une **base hilbertienne**.*

27.27.
Cette définition demande quelques remarques.

(1) La notion de base hilbertienne n'est pas la même notion de base qu'en algèbre. En effet pour avoir une base algébrique d'un espace vectoriel, nous demandons que les éléments soient des combinaisons linéaires *finies* des éléments de la base, tandis qu'ici en demandant que la partie soit totale nous demandons simplement que les combinaisons linéaires finies soient denses.

(2) Nous allons voir qu'un espace de Hilbert est généré par les sommes *infinies* de vecteurs d'une base hilbertienne avec des coefficients qui forment une suite dans ℓ^2.

(3) Nous ne demandons pas que la famille soit libre ? La belle affaire. Une famille orthogonale est toujours libre, proposition 27.23.

(4) Nous verrons dans la proposition 27.36 que toute base hilbertienne est maximale (définition 27.32), c'est-à-dire que si $\langle x, b\rangle = 0$ pour tout b dans la base, alors $x = 0$.

[9] Théorème 27.17.
[10] Définition 27.19

LEMooHWOBooQJKdTD

Lemme 27.28 ([712]).
Si $\mathcal{E}$ est une base hilbertienne[11] *de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et si $x \in \mathscr{H}$ alors l'ensemble*

$$\{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } \langle x, e\rangle \neq 0\} \tag{27.86}$$

est au plus dénombrable.

Démonstration. Notons qu'ici, $\mathscr{H}$ n'est pas supposé séparable. Nous savons par l'inégalité de Bessel (27.79) que

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} |\langle x, e\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{27.87}$$

Donc si $\epsilon > 0$ est donné, l'ensemble $\{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } |\langle x, e\rangle| > \epsilon\}$ est fini. Or

$$\{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } \langle x, e\rangle \neq 0\} = \{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } |\langle x, e\rangle| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{e \in \mathcal{E} \text{ tel que } |\langle x, e\rangle| > \frac{1}{n}\}. \tag{27.88}$$

Bref, cet ensemble est une union dénombrable d'ensembles finis. Il est donc dénombrable. □

Remarque 27.29.
Le lemme 27.28 ne signifie pas que la base $\mathcal{E}$ doive être dénombrable. Il signifie seulement que pour chaque x séparément, seule une partie dénombrable de $\mathcal{E}$ est nécessaire.

CORooFROTooNupAQs

Corolaire 27.30 ([712]).
Si un espace de Hilbert possède une base hilbertienne dénombrable, alors toutes ses bases hilbertiennes sont dénombrables.

Démonstration. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases hilbertiennes de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$, en supposant que $\mathcal{E}$ soit dénombrable. Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ nous avons $\langle f, e\rangle \neq 0$ pour au moins un $e \in \mathcal{E}$, sinon en vertu de la décomposition (27.84) de f dans la base $\mathcal{E}$, nous aurions $f = 0$. Nous avons donc

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{e\in\mathcal{E}} \{f \in \mathcal{F} \text{ tel que } \langle f, e\rangle \neq 0\}, \tag{27.89}$$

EQooKRTFooNABXnH

alors que le lemme 27.28 indique que chacun des ensembles de l'union est au plus dénombrable. La partie $\mathcal{F}$ est donc une union dénombrable d'ensemble dénombrables. Elle est dénombrable. □

Remarque 27.31.
En travaillant un peu plus sur la notion de cardinalité, le corolaire 27.30 indique que toutes les bases hilbertiennes ont même cardinalité. En effet en laissant tomber l'hypothèse de dénombrabilité sur $\mathcal{E}$, l'inclusion (27.89) donne que $\mathcal{F}$ est une union de $\text{Card}(\mathcal{E})$ ensembles dénombrables et est alors de cardinalité $\text{Card}(\mathcal{E})$.

DEFooRFATooDRKWoJ

Définition 27.32.
*Une partie orthonormale B est **maximale** si le seul $x \in \mathscr{H}$ vérifiant $\langle x, b\rangle = 0$ pour tout $b \in B$ est $x = 0$.*

LEMooXIECooCAQeJN

Lemme 27.33 ([1, 713]).
Tout espace de Hilbert possède une partie orthonormale maximale.

Démonstration. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{O}$, l'ensemble de parties orthonormales de $\mathscr{H}$, ordonné[12] par l'inclusion. Cet ensemble est inductif. En effet soit une partie totalement ordonnée $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{O}$: chaque A_i est une partie orthonormale de $\mathscr{H}$, et de plus pour $i, j \in I$ nous avons soit $A_i \subset A_j$ soit $A_j \subset A_i$. Nous pouvons considérer

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i. \tag{27.90}$$

Cela est encore une partie orthonormée de $\mathscr{H}$ parce que si $x, y \in A$, alors il existe $i, j \in I$ tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$. Vu que $\{A_i\}_{i\in I}$ est totalement ordonné nous supposons pour fixer les idées que $A_i \subset A_j$. Alors x et y sont dans A_j qui est une partie orthonormée ; nous en déduisons que $\langle x, y\rangle = 0$ et donc que A est une partie orthonormée. C'est-à-dire : $A \in \mathcal{O}$. Par ailleurs, A est un majorant de $\{A_i\}_{i\in I}$ pour l'inclusion parce que $A_i \subset A$ pour tout i.

Nous avons prouvé que $\mathcal{O}$ est un ensemble inductif. Le lemme de Zorn 1.42 nous dit alors que $\mathcal{O}$ possède un élément maximum. Cet élément est une partie orthonormale incluse dans aucune autre partie orthonormale. C'est-à-dire qu'il est une partie orthonormale maximale au sens de la définition 27.32. □

[11] Définition 27.26.
[12] Définition 1.23.

PROPooENTIooIplRAS

Proposition 27.34 ([713]).
Si un espace de Hilbert possède une partie orthonormale maximale dénombrable, alors toutes les parties orthonormales sont dénombrables (ou finies).

Démonstration. Soit B une partie orthonormale maximale, et A une partie orthonormale. Pour chaque $b \in B$ nous notons

$$A(b) = \{a \in A \text{ tel que } \langle a, b\rangle \neq 0\} \cup \{0\}. \tag{27.91}$$

Un élément de A qui ne serait dans aucun des $A(b)$ serait perpendiculaire à tous les éléments de B, et serait donc l'élément nul. Mais l'élément nul est dans tous les $A(b)$; donc nous avons

$$A \subset \bigcup_{b\in B} A(b). \tag{27.92}$$

Or par l'inégalité de Bessel, l'ensemble $A(b)$ est dénombrable. Par conséquent A est inclus dans une union dénombrable d'ensembles dénombrables ; A est dénombrable. □

Le fait que tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne est vrai. Nous allons démontrer ce résultat d'abord pour les espaces séparables et ensuite, indépendamment, en général. Si vous vous la sentez de maîtriser la proposition 27.36, vous pouvez sauter la 27.35.

PROPooDRFBooWTcunC

Proposition 27.35.
Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.

Démonstration. Vu que nous supposons avoir un espace de Hilbert séparable, il possède une partie totale dénombrable par la proposition 27.20. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle partie. Quitte à supprimer les v_i qui sont combinaisons linéaires des précédents, nous pouvons supposer que cette partie est libre. Nous considérons l'espace vectoriel

$$F_n = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}. \tag{27.93}$$

Sur F_n nous pouvons appliquer un procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée $\{u_1, \dots, u_n\}$ de F_n au sens usuel. En considérant F_{n+1} et en recommençant, les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ ne changent pas, mais nous obtenons un vecteur u_{n+1}.

Nous construisons ainsi une suite (u_n) qui est alors orthonormée au sens des espaces de Hilbert. Nous devons encore prouver qu'il s'agit d'un ensemble total. Cela est simplement dû au fait que tout élément de $\text{Span}\{v_n\}$ est contenu dans $\text{Span}\{u_n\}$ parce que Span ne considère que des combinaisons linéaires finies. □

PROPooLDXFooRaxBsI

Proposition 27.36 ([713]).
À propos de parties orthonormales maximales.

ITEMooVUFXooDrVwum

(1) *Une partie d'un espace de Hilbert est orthonormale maximale*[13] *si et seulement si elle est une base hilbertienne.*

ITEMooZFENooQnSlrv

(2) *Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit une partie orthonormale maximale B et la fermeture de son espace engendré : $F = \overline{\text{Span}(B)}$. Pour que B soit une base, nous devons démontrer que $F = \mathscr{H}$. Pour cela nous considérons $x \in \mathscr{H}$ et nous utilisons le théorème de projection orthogonale 27.8 pour mentionner le fait que

$$x - \texttt{proj}_F(x) \perp F \tag{27.94}$$

Cela dit que $x - \texttt{proj}_F(x)$ est un vecteur orthogonal en particulier à tous les éléments de B ; par maximalité nous avons $x - \texttt{proj}_F(x) = 0$, c'est-à-dire $x = \texttt{proj}_F(x)$ ou encore $x \in F$. Cela prouve que $F = \mathscr{H}$.

Note : pour être pointilleux, nous aurions dû travailler non avec $x - \texttt{proj}_F(x)$, mais avec le vecteur normalisé à 1.

En ce qui concerne le second point, nous invoquons le lemme 27.33 pour dire que tout espace de Hilbert possède une partie orthonormale maximale. Ensuite la première partie de cette proposition nous dit que cette dernière est une base hilbertienne. □

PROPooEYRSooCRPjdK

Proposition 27.37 (Unicité de la décomposition dans une base hilbertienne[1]).
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ muni d'une base hilbertienne $\{u_i\}_{i\in I}$. Alors :

[13] Définition 27.32.

(1) *Si*

$$\sum_{i\in I} a_i u_i = 0, \tag{27.95}$$

alors $a_i = 0$ pour tout $i \in I$.

(2) *Si $\sum_{i\in I} a_i u_i = \sum_{i\in I} b_i u_i$, alors $a_i = b_i$ pour tout i dans I.*

Démonstration. Supposons que $\sum_i a_i u_i = 0$. La proposition 27.25 nous dit alors que

$$a_j = \langle \sum_i a_i u_i, u_j \rangle = \langle 0, u_j \rangle = 0. \tag{27.96}$$

Pour la même raison, si

$$x = \sum_{i\in I} a_i u_i = \sum_{i\in I} b_i u_i, \tag{27.97}$$

alors, pour chaque $i \in I$, nous avons $a_i = \langle x, u_i \rangle$ et $b_i = \langle x, u_i \rangle$, c'est-à-dire $a_i = b_i$. □

Voici un petit résumé de ce que nous avons vu en termes de dénombrabilité et séparabilité.

THOooMKNFooVrCNGA

Théorème 27.38.
Pour un espace de Hilbert, les choses suivantes sont équivalentes.

ITEMooSJKVooFIIbwg

(1) *L'espace est séparable*[14].

ITEMooQIZLooYdtYqF

(2) *L'espace possède au moins une base hilbertienne*[15] *dénombrable.*

ITEMooHYSXooOubwUy

(3) *Toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.*

ITEMooMZICooNBAVum

(4) *Toute partie libre est dénombrable.*

Démonstration. Plein de résultats à citer …

(1) **(1) implique (2)**
est la proposition 27.35.

(2) **(2) implique (3)**
est la proposition 27.30.

(3) **(3) implique (4)**
Le procédé de Gram-Schmidt met en bijection une partie libre avec une partie orthonormale (qui engendre le même espace, mais c'est une autre affaire). Or lorsque l'espace de Hilbert possède une base dénombrable, toutes les parties orthonormales sont dénombrables par la proposition 27.34.

(4) **(4) implique (1)** La proposition 27.36(2) dit que tout espace de Hilbert possède des bases hilbertiennes. Une telle base est forcément une partie libre parce que toute famille orthonormale est libre (proposition 27.23), et donc dénombrable par hypothèse. À ce point nous avons montré que notre espace de Hilbert possédait une base hilbertienne dénombrable. Cela implique qu'il est séparable par la proposition 27.20.

□

RemfdJcQF

Remarque 27.39.
À mon avis il doit exister un théorème de complétion de base hilbertienne disant que si on a une famille orthonormée, alors elle se prolonge en base. Utilisant cela, nous trouvons une nouvelle démonstration de la proposition 27.24 en disant que la somme sur la « partie de base » est plus petite que la somme sur la « base complète ».

27.40.
Vu que nous n'avons l'intention de ne travailler qu'avec des espaces de Hilbert séparables et que toutes leurs bases sont dénombrables, nous n'allons travailler qu'avec des bases dénombrables, et donc des systèmes orthonormés dénombrables. Nous allons conventionnellement les indicer par $\mathbb{N}$.

[14] Définition 27.18.
[15] Définition 27.26.

La proposition suivante explique que la notion de projection est compatible avec la décomposition d'un vecteur dans un système orthonormé.

Proposition 27.41.
Soit $(u_k)_{k\geqslant 1}$ un système orthonormé d'un préhilbert $\mathscr{H}$. Soient

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k \tag{27.98}$$

et

$$F = \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}. \tag{27.99}$$

Alors

$$\texttt{proj}_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k. \tag{27.100}$$

Démonstration. Nous allons dans un premier temps montrer que

$$y = x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k \tag{27.101}$$

est dans $F^\perp$. Pour cela nous calculons

$$\langle x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k, u_j \rangle = \langle \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k u_k, u_j \rangle = 0 \tag{27.102}$$

où nous avons utilisé la continuité du produit scalaire pour permuter la somme (infinie) et le produit. Étant donné que $y \in F^\perp$ nous avons $\texttt{proj}_F y = 0$ par le point (2) du théorème 27.12.

D'autre part $\texttt{proj}_F y$ peut être calculé selon

$$\texttt{proj}_F y = \texttt{proj}_F x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \texttt{proj}_F u_k \tag{27.103}$$

tandis que $\texttt{proj}_F u_k = u_k$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant n$. Par conséquent l'annulation de $\texttt{proj}_F y$ donne

$$\texttt{proj}_F x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k, \tag{27.104}$$

donc le résultat. □

ThooRArDp

Théorème 27.42 (Meilleure approximation)**.**
Soit $\{u_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Alors pour tout $x \in \mathscr{H}$ et pour tout J fini dans I et pour toute famille de nombres complexes $(a_j)_{j\in J}$ nous avons

$$\| \sum_{j\in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x \| \leqslant \| \sum_{j\in J} a_j u_j - x \|. \tag{27.105}$$

Ce théorème exprime le fait que les nombres $\langle x, u_i \rangle$ sont les meilleurs coefficients à mettre devant les u_i pour approximer x.

Corolaire 27.43.
Soit $\{u_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée de $\mathscr{H}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$ et pour toutes parties finies J, K de I avec $J \subset K$ nous avons

$$\| \sum_{j\in K} \langle x, u_j \rangle u_j - x \| \leqslant \| \sum_{j\in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x \|. \tag{27.106}$$

Ce corolaire exprime le fait que plus on prend de termes de la forme $\langle , u_i \rangle u_i$, mieux c'est.

PropzaKXHq

Proposition 27.44.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et (u_n) un système orthonormé dans $\mathscr{H}$. Si $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans ℓ^2 alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n \tag{27.107}$$

converge dans $\mathscr{H}$.

Autrement dit l'application

$$\begin{aligned} S\colon \mathscr{H} &\to \ell^2 \\ x &\mapsto \big(\langle x, u_n\rangle\big)_{n\geqslant 1} \end{aligned} \tag{27.108}$$

est surjective.

Démonstration. Nous allons montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n u_n$ est de Cauchy, c'est-à-dire que la limite

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{k=n}^{n+p}\xi_k u_k\Big\| = 0 \tag{27.109}$$

est uniforme en p. Cela est un corolaire de la formule (27.71) parce que

$$\Big\|\sum_{k=n}^{n+p}\xi_k u_k\Big\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p}|\xi_k|^2. \tag{27.110}$$

Mais si (ξ_n) est dans ℓ^2, pour tout ϵ, il existe N tel que si $n > N$ alors le membre de droite est inférieur à ϵ indépendamment de p. □

27.3.5 Décomposition dans une base hilbertienne

Étant donné une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, nous notons

$$c_k(x) = \langle x, u_k\rangle. \tag{27.111}$$

Dans le théorème suivant (et d'ailleurs partout), les sommes sur I sont prises au sens de la définition 12.140.

ThoyAjoqP

Théorème 27.45 (Décomposition dans une base orthogonale)**.**
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable $\{u_i\}_{i\in I}$ une base orthonormée (I est un ensemble dénombrable quelconque).

ItemQGwoIxi

(1) Pour tout $x\in\mathscr{H}$ nous avons

EqPUPTXJ

$$x = \sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle u_i \tag{27.112}$$

où la somme est prise au sens de la définition 12.140. En particulier, la somme converge de façon commutative.

(2) Si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille orthonormée qui satisfait la décomposition (27.112) pour tout $x\in\mathscr{H}$ alors $\{e_i\}$ est une base hilbertienne.

(3) Nous avons l'identité de ***Plancherel***

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, u_i\rangle|^2. \tag{27.113}$$

Le point (5) nous indiquera que cette égalité est en fait suffisante pour dire que nous avons une base.

(4) Nous avons l'identité de ***Parseval***

EqHZxitKt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, u_i\rangle\overline{\langle y, u_i\rangle}. \tag{27.114}$$

ItemQGwoIx

(5) Si $\{u_i\}$ est une famille de vecteurs unitaires vérifiant l'identité de Plancherel, alors c'est une base hilbertienne.

(6) Si $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne, la suite $n\mapsto|\langle x, u_n\rangle|$ appartient à $\ell^2(I)$.

Démonstration. (1) Étant donné que le système $\{u_i\}_{i\in I}$ est total, nous pouvons considérer une suite de combinaisons linéaires finies des u_i qui converge vers x. Nous écrivons

$$x_n = \sum_{x\in J_n}a_{n,k}u_j \tag{27.115}$$

et $x_n \to x$ dans $\mathscr{H}$. Les ensembles J_n sont des sous-ensembles finis de I. Nous pouvons les choisir de telle sorte que $J_n \subset J_{n+1}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$. Ce choix correspond à éventuellement prendre $a_{n,j} = 0$ pour toutes les valeurs de j « en trop ».

Soit $\epsilon > 0$ et N tel que $\|x_n - x\| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Nous allons montrer que pour tout J fini tel que $J_N \subset J$ nous avons $\| \sum_{j\in J} \langle x, u_j\rangle u_j - x\| < \epsilon$. Étant donné que

$$\sum_{j\in J_N} \langle x, u_j\rangle u_j = \sum_{j\in J} a_j u_j \tag{27.116}$$

avec

$$a_j = \begin{cases} \langle x, u_j\rangle & \text{si } j \in J_N \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{27.117}$$

le théorème de meilleure approximation 27.42 nous enseigne que

$$\| \sum_{j\in J} \langle x, u_j\rangle u_j - x\| \leqslant \| \sum_{j\in J_N} \langle x, u_j\rangle u_j - x\| < \epsilon \tag{27.118}$$

par conséquent la somme $\sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i$ converge vers x au sens général, et en particulier commutativement.

Les sommes étant commutatives (en particulier $x = \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i$), et les bases hilbertiennes étant dénombrables, nous ne perdons aucune généralité en ne considérant que des bases indexées par $\mathbb{N}$.

(2) Nous devons montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires finies est dense dans $\mathscr{H}$. Par hypothèse, pour tout ϵ, il existe un ensemble fini J tel que

$$\| \sum_{j\in J} \langle x, u_j\rangle u_j - x\| < \epsilon. \tag{27.119}$$

Cela prouve la densité dont nous avions besoin.

(3) La norme étant une fonction continue, elle commute avec les sommes infinies, de telle sorte que l'égalité de Plancherel donne

$$\|x\|^2 = \| \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i\|^2. \tag{27.120}$$

Le système des u_i étant orthonormé,

$$\|x\|^2 = \| \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2. \tag{27.121}$$

(4) Au tour de Parseval. Nous commençons par prouver que la somme du membre de droite converge. En utilisant l'inégalité $|zz'| \leqslant |z|^2 + |z'|^2$ (valable pour $z, z' \in \mathbb{C}$) et Plancherel, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle \overline{\langle y, u_i\rangle}| &\leqslant \sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2 + |\langle y, u_i\rangle|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned} \tag{27.122}$$

Nous en déduisons que la famille $\langle x, u_i\rangle\overline{\langle y, u_i\rangle}$ est (commutativement) sommable en utilisant la proposition 12.155. Par ailleurs nous savons que

$$x = \sum_{i\in I} c_i(x) u_i \tag{27.123a}$$

$$y = \sum_{i\in I} c_i(y) u_i, \tag{27.123b}$$

et le produit scalaire étant une forme bilinéaire continue,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \langle c_i(x)u_i, \overline{c_j(y)u_j}\rangle \tag{27.124a}$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_i(x)\overline{c_j(y)}\delta_{ij} \tag{27.124b}$$

$$= \sum_{i\in I} c_i(x)\overline{c_i(y)}. \tag{27.124c}$$

(5) Nous utilisons l'égalité de Plancherel avec $x = u_j$:

$$\|u_j\|^2 = \|u_j\|^2 + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} |\langle u_j, u_i\rangle|^2. \tag{27.125}$$

Par conséquent $\langle u_j, u_i\rangle = 0$ dès que $i \neq j$. Cela prouve que le système $\{u_i\}_{i\in I}$ est orthonormé.

Nous devons encore prouver que le système est total. Pour cela nous repartons de l'équation (27.82) que nous avions déduites dans la démonstration de l'inégalité de Bessel :

$$\|x - \sum_{j\in J} c_j(x)u_j\| = \|x\|^2 - \sum_{j\in J} |c_j(x)|^2. \tag{27.126}$$

Par hypothèse le membre de droite peut être rendu aussi petit que l'on veut en prenant J grand (mais fini) dans I. Le membre de gauche indique alors que le système $\{u_i\}_{i\in I}$ est total.

(6) L'identité de Plancherel signifie entre autres que si $x \in \mathscr{H}$ alors $\sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2$ converge. Du coup la suite $(\langle x, u_i\rangle)_{i\in I}$ est dans $\ell^2(I)$.

□

Remarque 27.46.
Nous avons décidé d'indexer les bases hilbertiennes par $\mathbb{N}$; cela est légitime parce que les sommes sont commutatives. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'en pratique l'ensemble naturel avec lequel on indexe une base est parfois $\mathbb{Z}$. Un tel cas est donné par la base trigonométrique de L^2. Indexer cette dernière par $\mathbb{N}$ plutôt que par $\mathbb{Z}$ serait une contorsion inutile.

Remarque 27.47.
L'égalité de Parseval est la raison pour laquelle les physiciens écrivent souvent

$$\mathrm{Id} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n\rangle\langle u_n| \tag{27.127}$$

dans les livres de mécanique quantique par exemple. Dans certains[714], nous lisons même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq|q\rangle\langle q| = \hat{I}. \tag{27.128}$$

Notons que ces personnes travaillent avec un espace de Hilbert dont la base n'est pas dénombrable. Pour dire que la physique, ça n'utilise pas des mathématiques pour rire !

Remarque 27.48.
Par définition une base orthonormée est donc une partie dénombrable dont l'espace vectoriel engendré est dense. Un espace de Hilbert possédant une base orthonormée est donc séparable. C'est ce fait qui nous pousse à ne considérer que des espaces de Hilbert séparables ; nous n'allons donc pas étudier ce qu'il se passerait par exemple en considérant l'espace vectoriel librement engendré par les éléments de $\mathbb{R}$.

Exemple 27.49.
L'identité de Parseval (27.114), dans le cas de l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π signifie qu'en posant

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}, \tag{27.129}$$

nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(s)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2. \tag{27.130}$$

EqMIuCSfx

△

CorQETwUdF

Corolaire 27.50.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et (u_n) une base orthonormée. L'application

$$\begin{aligned} S\colon \mathscr{H} &\to \ell^2 \\ x &\mapsto \big(\langle x, u_n\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned} \tag{27.131}$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

De plus l'isomorphisme réciproque est

$$\begin{aligned} S^{-1}\colon \ell^2 &\to \mathscr{H} \\ (\xi_n) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n. \end{aligned} \tag{27.132}$$

Démonstration. Nous devons prouver que l'application est bijective et qu'elle vérifie

$$S(x) \cdot S(y) = \langle x, y \rangle \tag{27.133}$$

où le point dénote le produit dans ℓ^2.

Pour la surjectivité, si $(\xi_n) \in \ell^2$ alors nous savons que la somme $\sum_n \xi_n u_n$ converge par la proposition 27.44 et par conséquent (ξ_n) est l'image par S de ce vecteur de $\mathscr{H}$.

Pour l'injectivité, si $S(x) = S(y)$ alors

$$x = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n = \sum_n \langle y, u_n \rangle u_n = y \tag{27.134}$$

en utilisant la décomposition (27.112).

Le fait que S soit une isométrie est contenu dans Parseval. □

PROPooPVQIooPcEFSe

Proposition 27.51 ([1]).
Soit un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$, un sous-espace vectoriel fermé V et une base orthonormée $\{b_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{H}$. En posant $v_i = \texttt{proj}_V(b_i)$ alors

$$C = \overline{\text{Span}\{b_i - v_i\}} \tag{27.135}$$

est l'orthogonal de V.

Démonstration. Juste pour rappel, lorsque nous écrivons $v_i = \texttt{proj}_V(b_i)$, nous parlons de la projection orthogonale du théorème 27.8. Donc tous les vecteurs $b_i - v_i$ sont dans $V^\perp$. En passant aux limites, $C \subset V^\perp$.

Soit $x \in V^\perp$ que nous décomposons dans la base $\{b_i\}_{i\in I}$ comme $x = \sum_{i\in I} x_i b_i$. Posons $c_i = b_i - v_i = b_i - \texttt{proj}_V(b_i)$. Alors d'une part

$$0 = \texttt{proj}_V(x) = \sum_i x_i \texttt{proj}_V(b_i) = \sum_i x_i (b_i - c_i). \tag{27.136}$$

Nous avons utilisé la continuité de $\texttt{proj}_V$ pour permuter avec la somme. D'autre part,

$$x = \sum_i x_i b_i = \sum_i x_i (b_i - c_i + c_i) = \underbrace{\sum_i x_i (b_i - c_i)}_{=0} + \sum_i x_i c_i \in C. \tag{27.137}$$

Notons que pour la dernière appartenance, il est important de prendre la fermeture pour définir C. □

Proposition 27.52 ([1, 715]).
Toute partie orthonormée d'un espace de Hilbert séparable se prolonge en une base hilbertienne.

Démonstration. Soit une partie orthonormée $\{u_i\}_{i\in I}$ de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Nous mentionnons que cette partie est libre et donc, par le théorème 27.38, dénombrable[16]. Montrons pour commencer que la partie $V = \overline{\text{Span}\{u_i\}_{i\in I}}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$.

(1) **Vectoriel** Soit $v, w \in V$ et $\epsilon > 0$. Il existe $a \in \text{Span}\{u_i\}$ tel que $\|a - v\| < \epsilon$ et $b \in \text{Span}\{u_i\}$ tel que $\|b - w\| < \epsilon$. Dans ce cas,

$$\|v + w - (a + b)\| \leqslant 2\epsilon. \tag{27.138}$$

Cela prouve que $v + w \in V$. Nous procédons de même pour λv.

(2) **Fermé** Par construction.

L'orthogonal[17] de V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$, et nous pouvons donc en considérer une base hilbertienne $C = \{c_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Nous prétendons que $C \cup U$ est une base hilbertienne[18] de $\mathscr{H}$.

[16] Avec un peu de mauvaise foi, vous pouvez quand même dire que cela n'implique pas que I lui-même soit dénombrable, mais vous pouvez le supposer pour fixer les idées.

[17] Voir la définition 27.10 et la proposition 27.51.

[18] Définition 27.26.

(1) $C \cup U$ **est libre** Bing ! Il ne faut pas le démontrer : ça ne fait pas partie de la définition d'une base hilbertienne.

(2) $C \cup U$ **est générateur** Bang ! Il ne faut pas le démontrer : ça ne fait pas partie de la définition d'une base hilbertienne.

(3) $C \cup U$ **est orthogonal** Ah, voilà quelque chose à démontrer. Nous devons vérifier que les produits sont nuls. Soient $u, v \in U$ et $a, b \in C$. Nous avons :

- $\langle u, v \rangle = 0$ par hypothèse.
- $\langle u, a \rangle = 0$ parce que les éléments de C sont orthogonaux à V et que $u_i \in V$.
- $\langle a, b \rangle = 0$ parce que C est une base hilbertienne de $V^\perp$.

(4) $C \cup U$ **est dénombrable**

L'ensemble C est dénombrable parce que c'est une base hilbertienne. Quant à $\{u_i\}_{i\in I}$, nous avons déjà mentionné le fait qu'il doive être dénombrable. L'union deux parties dénombrables est dénombrable.

(5) $C \cup U$ **est total**

Nous devons prouver que $\overline{\text{Span}(C \cup U)} = \mathscr{H}$ parce qu'il y a bien la fermeture qui intervient dans la définition 27.19. Pour cela nous utilisons la proposition 27.14. Si $x \in \mathscr{H}$ alors nous avons

$$x = \texttt{proj}_V(x) + \big(x - \texttt{proj}_V(x)\big) = \sum_{i\in I} x_i u_i + \sum_{\alpha\in A} x_\alpha c_\alpha \tag{27.139}$$

pour des coefficients x_i et x_α. Notons que I et A sont deux ensembles différents. Aucun des x_α n'est un des x_i, ni inversement. Supposons que $x \in \text{Span}(C \cup U)^\perp$; alors

$$0 = \langle x, u_j \rangle = \sum_{i\in I} x_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=\delta_{ij}} + \sum_{\alpha\in A} \underbrace{\langle c_\alpha, u_j \rangle}_{=0} = x_j. \tag{27.140}$$

Donc $x_j = 0$. En faisant de même avec $0 = \langle x, c_\beta \rangle = x_\beta$ nous déduisons $x = 0$.

□

PROPooZQIAooUEWLtg

Proposition 27.53 ([1]).
Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert séparable de base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in I}$, alors $\mathscr{H}'$ est un espace de Hilbert séparable dont une base hilbertienne est donnée par les formes

$$\begin{aligned} \alpha_i \colon \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ e_j &\mapsto \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{27.141}$$

Démonstration. C'est la proposition 27.5 qui fait tout. □

27.3.6 Digression sur les normes opérateurs

subsecaeSywF

Le théorème 27.45 nous indique que si $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne, alors pour tout $x \in \mathscr{H}$ nous avons

$$\texttt{proj}_{u_i}(x) = \langle x, u_i \rangle u_i, \tag{27.142}$$

et donc

$$\sum_{i\in I} \texttt{proj}_{u_i} x = x. \tag{27.143}$$

Nous ne pouvons cependant pas conclure que

$$\sum_{i\in I} \texttt{proj}_{u_i} = \text{Id} \tag{27.144}$$

EqyKDzNl

au sens de la norme opérateur de la définition 12.76. En effet en prenant $I = \mathbb{N}$, l'égalité (27.144) demanderait d'avoir

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{N} \texttt{proj}_{u_i} - \text{Id} \right\|_\infty = 0, \tag{27.145}$$

or pour tout N, le vecteur u_{N+1} réalise

$$\sum_{i=1}^{N} \mathtt{proj}_{u_i}(u_{N+1}) - u_{N+1} = -u_{N+1}. \tag{27.146}$$

Par conséquent pour tout N nous avons

$$\sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{N} \mathtt{proj}_{u_i} x - x \right\| \geqslant 1. \tag{27.147}$$

Nous ne pouvons donc pas dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathtt{proj}_{u_i} = \mathrm{Id} \tag{27.148}$$

au sens de la norme opérateur.

Nous avons cependant la convergence au sens faible.

Proposition 27.54.
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Au sens de la topologie faible sur l'espace des opérateurs nous avons

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathit{proj}_{u_i} = \mathrm{Id}\,. \tag{27.149}$$

Démonstration. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathscr{H}$, en vertu de la décomposition (27.112) nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} \mathtt{proj}_{u_i}(x) - x = \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle x, u_i\rangle u_i. \tag{27.150}$$

Par l'orthonormalité de la base nous avons

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \|\langle x, u_i\rangle u_i\| = \sum_{i=N+1}^{\infty} |\langle x, u_i\rangle|, \tag{27.151}$$

dont la limite $N \to \infty$ est zéro étant donné que la suite $i \mapsto |\langle x, u_i\rangle|$ est dans $\ell^2(\mathbb{R})$ par le théorème 27.45. □

27.3.7 Applications linéaires et continuité

Nous avons déjà vu dans l'exemple 12.99 que la fonction

$$\begin{aligned} f\colon H &\to H \\ e_k &\mapsto k e_k \end{aligned} \tag{27.152}$$

EqCJVooIOuXdN

n'était pas continue en zéro alors qu'elle est linéaire. Nous allons maintenant voir qu'elle est un contre-exemple à la proposition 14.326. Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \frac{d}{dt}\Big[f(x + te_j)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_k k(x_k + t\delta_{jk})e_k\Big]_{t=0} = je_j. \tag{27.153}$$

où nous avons permuté la somme et la dérivée en considérant la suite de fonctions $f_k(t) = k(x_k + tu_k)e_k$. Donc $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x)$ existe et est continue sur un voisinage de $x = 0$ (c'est même constant). Nous savons pourtant que la fonction f n'est pas différentiable en zéro parce que non continue.

L'endroit qui coince dans la preuve de la proposition 14.326 est l'introduction des « contres-termes » dans l'équation (14.905). En effet les contre-termes à ajouter seraient

$$l(x) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(a + s(x - a)\big)\Big]_{t=0} \tag{27.154}$$

qui ici serait

$$l\big(\sum_k x_k e_k\big) = \frac{d}{dt}\Big[f\big(t\sum_k x_k e_k\big)\Big]_{t=0} = \sum_k x_k e_k, \tag{27.155}$$

dont la convergence est plus que douteuse.

Notons que les dérivées directionnelles n'existent pas toutes, loin s'en faut : si $u \in H$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \frac{d}{dt}\Big[f(x + tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_k k(x_k + tu_k)e_k\Big]_{t=0} = \sum_k k u_k e_k \tag{27.156}$$

EQooWNLOooJNRUMO

La convergence de la dernière somme n'est pas garantie pour tout u.

Exemple 27.55.
Soit un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. L'application

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathscr{H} &\to \mathbb{C}\\ e_i &\mapsto 1\end{aligned} \tag{27.157}$$

n'est pas continue.

Nous considérons les vecteurs $y_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et nous posons $x_n = y_n/\|y_n\|$. Nous avons

$$\|y_n\|^2 = \langle y_n, y_n\rangle = \sum_{i,j}^{n}\langle e_i, e_j\rangle = n, \tag{27.158}$$

donc $\|y_n\| = \sqrt{n}$, et

$$\phi(x_n) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \tag{27.159}$$

L'application ϕ n'est donc pas bornée et pas continue non plus. △

PROPooWHZKooEXEIrV

Proposition 27.56.
Soient deux espaces de Hilbert séparables[19] $\mathscr{H}_1$ *et* $\mathscr{H}_2$*. Soit une base orthonormée* $\{e_i\}_{i\in I}$ *où* I *est dénombrable. Si* $\Phi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *est une bijection linéaire continue, alors*

$$\Phi\big(\sum_{i\in I} x_i e_i\big) = \sum_{i\in I} x_i \Phi(e_i). \tag{27.160}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Vu que $\sum_{i\in I} x_i e_i$ est une somme convergente[20], il existe une partie finie J de I telle que pour tout K fini contenant J,

$$\|\sum_{j\in K} x_j e_j - x\| < \epsilon. \tag{27.161}$$

Vu que Φ est une isométrie linéaire, nous avons

$$\|\sum_{j\in K} x_j \Phi(e_j) - \Phi(x)\| < \epsilon, \tag{27.162}$$

et donc bien l'égalité

$$\sum_{i\in I} x_i \Phi(e_i) = \Phi(x). \tag{27.163}$$

□

La proposition suivante donne une formule pour l'inverse du Φ du théorème de représentation de Riesz 27.17 lorsque nous avons une base hilbertienne.

Proposition 27.57.
Soit un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$*. Si* $\phi \in \mathscr{H}'$*, alors*

$$\Phi^{-1}(\phi) = \sum_{i\in I} \phi(e_i) e_i \tag{27.164}$$

EQooRLJEooTaUtWx

dès que $\{e_i\}_{i\in I}$ *est une base hilbertienne de* $\mathscr{H}$*.*

Démonstration. Nous considérons la base des $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{H}'$. Remarquez au passage que $\alpha_i = \Phi_{e_i}$. Nous avons $\phi = \sum_{i\in I}\phi_i\alpha_i$ pour certains $\phi_i \in \mathbb{C}$ (qui valent $\phi_i = \phi(e_i)$, ça a son importance pour la suite). En utilisant la proposition 27.56 pour permuter Φ et la somme nous avons le calcul suivant :

$$\phi = \sum_{i\in I}\phi_i\alpha_i = \sum_{i\in I}\phi_i\Phi(e_i) = \sum_{i\in I}\Phi(\phi_i e_i) = \Phi\big(\sum_{i\in I}\phi_i e_i\big) = \Phi(\sum_{i\in I}\phi(e_i)e_i). \tag{27.165}$$

En résulté :

$$\phi = \Phi(\sum_{i\in I}\phi(e_i)e_i), \tag{27.166}$$

et donc la formule (27.164). □

[19] Donc à base dénombrable, voir 27.38.
[20] Définition 12.140.

27.4 Théorème de Kochen-Specker

Le théorème suivant est central en mécanique quantique. La démonstration provient de [716] et de Wikipédia. Nous allons démontrer complètement le théorème seulement pour les espaces de Hilbert de dimension plus grande ou égale à 4.

THOooRHHPooQbcDAe

Théorème 27.58 (Kochen-Specker[716]).
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert de dimension plus grande ou égale à 3. Une fonction v sur l'ensemble des opérateurs de $\mathscr{H}$ ne peut pas satisfaire aux conditions suivantes :

(1) Si A et B sont compatibles, alors $v(A+B)=v(A)+v(B)$,

(2) Si A et B sont compatibles, alors $v(AB)=v(A)v(B)$.

*Ici nous disons que deux opérateurs sont **compatibles** lorsqu'ils possèdent une base hilbertienne commune de vecteurs propres.*

Démonstration. Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Nous notons $\texttt{proj}_i$ l'opérateur de projection sur l'espace (fermé) engendré par u_i. Ce sont des opérateurs compatibles deux à deux parce que la base $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base commune de vecteurs propres[21].

D'abord nous devons avoir $v(\mathbb{1})=1$. En effet pour tout opérateur A, nous avons

$$v(A)=v(A\mathbb{1})=v(A)v(\mathbb{1}). \tag{27.167}$$

Pour peu que $v(A)\neq 0$, cela nous fait $v(\mathbb{1})=1$.

En vertu du théorème 27.45, un vecteur $x\in\mathscr{H}$ se décompose en $x=\sum_n\langle x,u_n\rangle u_n$, et nous avons

$$\texttt{proj}_i\, x=\langle x,u_i\rangle u_i. \tag{27.168}$$

EqFEvXvq

En effet le théorème de la projection orthogonale 27.8 nous enseigne que $\texttt{proj}_i\, x$ serait l'unique vecteur de la forme λu_i tel que $\lambda u_i - x\perp u_i$. Il est facile de vérifier que le vecteur proposé par (27.168) vérifie cette propriété.

Une conséquence est que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\texttt{proj}_i\right)(x)=x. \tag{27.169}$$

Par conséquent, par hypothèse du théorème nous devons avoir

$$\sum_i v(\texttt{proj}_i)=v(\mathbb{1})=1. \tag{27.170}$$

EqUeZHJH

Étant donné que les projections sont idempotentes,

$$v(\texttt{proj}_i)=v(\texttt{proj}_i^2)=v(\texttt{proj}_i)^2 \tag{27.171}$$

et donc $v(\texttt{proj}_i)$ doit valoir zéro ou un. Mais la relation (27.170) donne une forte contrainte sur le choix de 0 et de 1. En effet, parmi les $v(\texttt{proj}_i)$, un et un seul doit valoir 1, les autres doivent valoir 0.

Refaisant le raisonnement pour une autre base orthonormale hilbertienne, nous trouvons que les valeurs de v sur les opérateurs de projection sur les différentes directions doivent être choisies de telle façon que tout choix de base hilbertienne orthogonale contienne exactement un 1 et le reste de zéros.

Nous voudrions maintenant insister sur un point. Le problème de déterminer de façon cohérente les valeurs 0 ou 1 pour tous les $v(\texttt{proj}_i)$ revient à attacher 0 ou 1 à tous les *rayons* de $\mathscr{H}$ de façon que toute base orthogonale de $\mathscr{H}$ contienne exactement un 1. Un rayon est une direction, c'est-à-dire une classe d'équivalence $x\sim\lambda x$. Si nous décidons de nommer « blanc » les rayons attachés à la valeur 0 et « noirs » ceux attachés à la valeur 1, le problème se réduit à colorer la boule unité de façon compatible.

Soit $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthogonale de $\mathscr{H}$ numérotée de telle sorte que $v(u_0)=1$ et $v(u_k)=0$ pour $k\neq 0$. Nous allons maintenant nous particulariser au cas de dimension supérieure ou égale à 4. Si R est une rotation dans le plan $\text{Span}\{u_0,u_1,u_2,u_3\}$, alors l'ensemble

$$\{Ru_0,Ru_1,Ru_2,Ru_3,u_k\}_{k\geqslant 4} \tag{27.172}$$

est encore une base orthogonale de $\mathscr{H}$ et nous avons encore $v(u_k)=0$ pour $k\geqslant 4$. Par conséquent un et un seul des vecteurs Ru_0, Ru_1, Ru_2 ou Ru_3 est colorié en noir ; les trois autres étant blancs. Le problème

[21] Pour les besoins de la physique, nous remarquons que ces opérateurs sont des opérateurs hermitiens qui commutent, mais ça ne joue pas ici.

est maintenant complètement réduit à la dimension 4. Note : pour réduire à la dimension 3, on procède de même, mais pour conclure, il faut travailler plus.

Nous allons construire 9 bases orthogonales de $\mathbb{R}^4$ à partir de 18 vecteurs, chacun arrivant dans exactement deux des bases. Ils sont donnés dans le tableau suivant :

0	1	0	0	0	0	1	1	1	−1	1	−1	−1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	−1
0	0	0	1	0	0	1	−1	1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	−1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	−1
1	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	−1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	−1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
−1	0	0	−1	0	0	0	−1	1	1	−1	0	−1	0	0	−1	1	1

Chaque case de ce table représente un rayon de $\mathbb{R}^4$; il y en a 18 différents, chacun écrit deux fois. Une simple vérification montre que chaque colonne est un système orthogonal. La preuve du théorème de Kochen-Specker revient à montrer que nous ne pouvons pas colorier ce tableau de façon cohérente. En effet, étant donné que chaque vecteur est écrit deux fois, le tableau doit contenir un nombre pair de cases blanches et un nombre pair de cases noires.

Par ailleurs chaque colonne étant un système orthogonal, chaque colonne contient exactement une case noire ; il y a donc exactement neuf cases noires dans le tableau, ce qui est impossible.

□

27.5 Théorème de Lax-Milgram

DEFooUNOKooCitMjL

Définition 27.59.
*Une forme bilinéaire $a\colon V\times V\to\mathbb{R}$ sur un espace vectoriel normé V est **coercitive** si il existe $\alpha>0$ tel que $a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2$ pour tout $u\in V$.*

THOooLLUXooHyqmVL

Théorème 27.60 (Lax-Milgram[717])**.**
Soit un espace de Hilbert réel V muni de différentes choses.

(1) L'application linéaire $L\colon V\to\mathbb{R}$ qui est bornée sur V. Nous notons $\|L\|$ sa norme.

(2) La forme bilinéaire continue a sur $V\times V$.

(3) La forme a est coercitive[22].

Alors

(1) Il existe $M>0$ tel que $|a(u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|$ pour tout $u,v\in V$.

(2) Le problème qui consiste à chercher $u\in V$ tel que $a(u,v)=L(v)$ pour tout $v\in V$ admet une unique solution. De plus cette solution vérifie l'inégalité

$$\|u\|\leqslant\frac{\|L\|}{\alpha}\tag{27.173}$$

EQooUAYSooKYyQBU

Démonstration. Évacuons deux points faciles avant de commencer les choses sérieuses. D'abord L est continue par la proposition 12.98. Ensuite, l'existence du M est donnée par la proposition 27.1.

Maintenant nous commençons.

(1) **Reformulation en équation linéaire** La forme L est continue et donc dans le dual V' ; le théorème de Riesz 27.17 nous donne donc $f\in V$ tel que

$$L(v)=\langle f,v\rangle\tag{27.174}$$

pour tout $v\in V$. De plus si $w\in V$ est fixé, l'application $b_w\colon v\mapsto a(w,v)$ est linéaire et bornée parce que

$$\|b_w\|=\sup_{\|v\|=1}|b_w(v)|=\sup_{\|v\|=1}|a(w,v)|\leqslant M\|w\|\|v\|=M\|w\|.\tag{27.175}$$

Encore une fois, b_w étant continue et linéaire, elle est dans V' et Riesz nous fournit un élément $A(w)\in V$ tel que

$$b_w(v)=\langle A(w),v\rangle\tag{27.176}$$

[22] Définition 27.59.

pour tout $v \in V$.

Le problème variationnel $a(u,v) = L(v)$ est équivalent à $\langle A(u), v\rangle = \langle f, v\rangle$. L'ensemble des solutions de cette dernière est égal à l'ensemble des solutions de l'équation

$$A(u) = f. \tag{27.177}$$

(2) **A est linéaire**

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $w, z \in V$. Nous avons pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned}\langle A(\alpha w + \beta z), v\rangle &= a(\alpha w + \beta z, v) && (27.178a)\\ &= \alpha a(w,v) + \beta a(z,v) && (27.178b)\\ &= \alpha\langle A(w), v\rangle + \beta\langle A(z), v\rangle && (27.178c)\\ &= \langle \alpha A(w) + \beta A(z), v\rangle. && (27.178d)\end{aligned}$$

Étant donné que nous avons égalité pour tout $v \in V$ nous en déduisons que $A(\alpha w + \beta z) = \alpha A(w) + \beta A(z)$, ce qui signifie que A est linéaire.

(3) **Une autre propriété de A** Nous déduisons une majoration de $\|A(v)\|^2$ lorsque ce n'est pas nul. Pour ce faire,

$$\begin{aligned}\|A(v)\|^2 &= \langle A(v), A(v)\rangle && (27.179a)\\ &= a(v, A(v)) && (27.179b)\\ &\leqslant M\|v\|\|A(v)\|. && (27.179c)\end{aligned}$$

En simplifiant, $\|A(v)\| \leqslant M\|v\|$. Et donc

$$\|A(v)\|^2 \leqslant M^2\|v\|^2. \tag{27.180}$$

(4) **Une contraction**

Nous allons choisir une valeur de $\rho > 0$ telle que l'application

$$T\colon w \mapsto w - \rho\big(A(w) - f\big) \tag{27.181}$$

soit une contraction[23]. Nous avons $T(w) - T(w') = w - w' - \rho\big(A(w - w')\big)$ et donc

$$\begin{aligned}\|T(w) - T(w')\|^2 &= \|w - w'\|^2 + \rho^2\|A(w - w')\|^2 - 2\rho\langle A(w - w'), w - w'\rangle && (27.182a)\\ &= \|w - w'\|^2 + \rho^2\|A(w - w')\|^2 - 2\rho a(w - w', w - w'). && (27.182b)\end{aligned}$$

Vu que le dernier terme arrive avec un signe moins, pour majorer l'expression, il faut minorer ce terme, c'est-à-dire utiliser $a(w - w', w - w') \geqslant \alpha\|w - w - w'\|$. Et en même temps nous utilisons (27.180) pour le second terme. Au final pour pouvons factoriser $\|w - w'\|$ et

$$\|T(w) - T(w')\| \leqslant \|w - w'\|\big(1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha\big). \tag{27.183}$$

Pout que T soit contractante, il faut $0 < P(x) < 1$ avec $P(x) = M^2x^2 - 2\alpha x + 1$. Le minimum de ce polynôme est obtenu en $x = \frac{\alpha}{M^2}$ (la formule du $x_{min} = -b/2a$) et vaut $1 - \frac{\alpha^2}{M^2} < 1$. Vu que par ailleurs $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$, et que ce polynôme passe par au moins une valeur strictement inférieure à 1, nous savons qu'il existe un x tel que $0 < P(x) < 1$. En donnant à ρ cette valeur, l'application T est une contraction.

(5) **Point fixe et conclusion** L'ensemble des solutions du problème (27.177) est égal à l'ensemble des points fixes de $T(v) = v - \rho\big(A(v) - f\big)$.

L'application $T\colon V \to V$ est contractante et V est métrique et complet. Ergo le théorème de point fixe de Picard 19.60 s'applique et il existe un unique point fixe $u \in V$ pour l'application T. Ce point fixe est l'unique solution de notre problème initial.

(6) **La majoration**

Nous savons que pour tout $v \in V$, la relation $a(u,v) = L(v)$ est vérifiée. En particulier pour $v = u$ nous avons

$$a(u,u) = L(u). \tag{27.184}$$

[23] Définition 19.59.

D'un côté nous utilisons $a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2$ et de l'autre, $L(u) \leqslant \|L\|\|u\|$:

$$\alpha\|u\|^2 \leqslant \|L\|\|u\| \tag{27.185}$$

et donc

$$\|u\| \leqslant \frac{\|L\|}{\alpha}. \tag{27.186}$$

Notons que $L(u)$ et $a(u,u)$ sont positifs.

□

EXooTTBDooUNhBOc

Exemple 27.61 ([718]).
La borne $\|u\| \leqslant \|L\|/\alpha$ est optimale au sens où il existe des cas d'égalité. En effet nous pouvons considérer

$$a(u,v) = s\langle u,v\rangle \tag{27.187}$$

et

$$L(v) = \langle f,v\rangle \tag{27.188}$$

pour un certain $s > 0$ et $f \in V$. L'application L n'est autre que Φ_f dont nous avons abondamment parlé autour du théorème de représentation de Riesz 27.17. Le lemme 27.15 nous apprend que L est une application bornée (et donc continue) de norme $\|L\|_{V'} = \|f\|_V$.

L'application $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ est continue par la proposition 12.109. Elle est coercive parce que

$$a(u,u) = s\|u\|^2. \tag{27.189}$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 27.60 sont réunies et il existe un unique élément $u \in V$ tel que $a(u,v) = L(v)$ pour tout v. Cet élément n'est autre que

$$u = \frac{1}{s}f. \tag{27.190}$$

Nous avons alors $\|u\| = \frac{1}{s}\|f\|$.

Mais s est la constante de coercivité de a et $\|f\|$ est la norme de L. Cette dernière affirmation est contenue dans le fait que Φ est une isométrique dans le lemme 27.15. En reprenant les notations du théorème, nous avons l'égalité

$$\|u\| = \frac{\|L\|}{\alpha}, \tag{27.191}$$

ce qui signifie que l'inégalité du théorème est dans un certain sens optimale. △

PROPooFEOZooTNPcBJ

Proposition 27.62.
Soit un espace de Hilbert réel V et une application $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ coercive et continue.

L'application $\phi\colon V' \to V$ qui à L fait correspondre l'unique solution u de $a(u,v) = L(v)$ est

(1) bien définie,

(2) linéaire,

(3) continue.

Démonstration. Le fait que ϕ soit bien définie est le théorème de Lax-Milgram 27.60.

L'application ϕ dont nous parlons ici est une application entre deux espaces normés. Soient $L_1, L_2 \in V'$; nous définissons $u_1 = \phi(L_1)$ et $u_2 = \phi(L_2)$. Nous avons

$$a(u_1,v) = L_1(v) \tag{27.192a}$$
$$a(u_2,v) = L_2(v) \tag{27.192b}$$

pour tout $v \in V$. Par bilinéarité de a nous avons aussi

$$a(u_1+u_2,v) = (L_1+L_2)(v). \tag{27.193}$$

Vu que $L_1 + L_2$ est également bornée, $u_1 + u_2 = \phi(L_1 + L_2)$. Pour le même type de raisons, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$a(\lambda u,v) = (\lambda L)(v), \tag{27.194}$$

c'est-à-dire que $\phi(\lambda L) = \lambda\phi(L)$.

Donc ϕ est linéaire. Pour la continuité, il suffit de s'assurer que ϕ est bornée. Pour cela nous utilisons la majoration (27.173) et la définition de la norme d'une application linéaire :

$$\|\phi\| = \sup_{\|L\|=1} \|\phi(L)\| \leqslant \sup_{\|L\|=1} \frac{1}{\alpha}\|L\| = \frac{1}{\alpha}. \tag{27.195}$$

Donc ϕ est bornée et par voie de conséquence continue (proposition 12.98). □

Un problème est bien posé au sens de Hadamard si la solution est unique et dépend continument des données ; nous ne rentrerons pas plus dans les détails pour l'instant : nous en reparlerons dans la définition 35.14 mais sachez qu'il existe en fin de compte autant de Hadamard qu'il y a de contextes dans lequel le mot « problème » a un sens.

Ce que dit la proposition 27.62 est que, a étant donné, le problème qui consiste à résoudre $a(u,v) = L(v)$ est bien posé au sens de Hadamard, au moins par rapport à L.

Théorème 27.63 (Lax-Milgram version symétrique[717])**.**
Nous considérons les mêmes hypothèses que celles du théorème de Lax-Milgram, c'est-à-dire un espace de Hilbert réel V muni de différentes choses.

(1) L'application linéaire $L\colon V \to \mathbb{R}$ qui est bornée sur V. Nous notons C sa norme.

(2) La forme bilinéaire continue a sur $V \times V$. Nous considérons $M > 0$ tel que $|a(u,v)| \leqslant M\|u\|\|v\|$ pour tout $u, v \in V$.

(3) La forme a est coercitive.

Nous supposons de plus que a est symétrique.

Alors un élément $u \in V$ est tel que $a(u,w) = l(w)$ pour tout $w \in V$ si et seulement si il minimise la ***fonctionnelle d'énergie***

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - l(w). \tag{27.196}$$

Démonstration. Nous séparons les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Soit u, un élément vérifiant $a(u,w) = l(w)$ pour tout $w \in V$. Soit aussi un élément quelconque $w \in V$, et montrons que $J(u+w) \geqslant J(u)$ (tout élément de V peut être écrit sous la forme $u+w$). Nous avons :

$$J(u+w) = \frac{1}{2}\big(a(u,u) + a(u,w) + a(w,u) + a(w,w)\big) - l(u) - l(w) \tag{27.197a}$$

$$= J(u) + \underbrace{a(u,w) - l(w)}_{=0} + \frac{1}{2}a(w,w) \tag{27.197b}$$

$$= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \tag{27.197c}$$

Vu que a est coercive, le second terme est positif et nous avons

$$J(u+w) \geqslant J(u), \tag{27.198}$$

ce qu'il fallait.

(2) $\Leftarrow$
Soit $u \in V$, un élément minimisant la fonctionnelle J. Nous fixons $w \in V$ et considérons la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(\epsilon) = J(u + \epsilon w). \tag{27.199}$$

En développant un peu et en regroupant les termes,

$$g(\epsilon) = J(u) + \epsilon\big(a(u,w) - l(w)\big) + \frac{\epsilon^2}{2}a(w,w). \tag{27.200}$$

EQooHGDOooUMCRda

Cela est une fonction éminemment continue et dérivable ; en réalité c'est un bête polynôme de degré deux. Vu que u minimise J, pour tout $\epsilon \neq 0$ nous avons $g(\epsilon) \geqslant g(0)$ ou encore : $\epsilon = 0$ est minimum local (et même global) de g. Le polynôme (27.200) prend son minimum en $\epsilon = 0$ si et seulement si

$$a(u,w) - l(w) = 0. \tag{27.201}$$

Vous ne me croyez pas ? Faites $g'(\epsilon) = 0$ ou bien reprenez la formule du $-b/2a$ pour le sommet d'une parabole, en tenant compte que $a(w,w) \neq 0$. Notons qu'ici encore le fait que a soit coercive joue parce que c'est cela qui nous permet d'affirmer que la parabole a un minimum et non un maximum.

□

Chapitre 28

Analyse complexe

ChapICHIooXbLccl

28.1 Fonctions holomorphes

La dérivée complexe est discutée à la section 14.32, et la définition d'une fonction holomorphe est 14.339.

28.1.1 Équations de Cauchy-Riemann

Notons que la formule (14.955) donne un **développement limité** pour les fonctions holomorphes. Si f est holomorphe en z_0 alors si z est dans un voisinage de z_0, il existe une fonction $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\lim_{t\to 0} s(t)/t = 0$ et

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + s(|z - z_0|). \tag{28.1}$$ EqptwBEC

28.1 (Quelque (abus de) notations)**.**
Nous utilisons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy. \end{aligned} \tag{28.2}$$

Nous notons

$$\partial_x f = \partial_1(f \circ \varphi) \tag{28.3a}$$
$$\partial_y f = \partial_2(f \circ \varphi). \tag{28.3b}$$

Avec ces définitions, nous introduisons les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{28.4a}$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{28.4b}$$ SUBEQooNYQKooYdLQzB

La raison de ces définitions est d'avoir l'égalité

$$f'(z_0) = (\partial_z f)(z_0) \tag{28.5}$$

que nous verrons dans la proposition 28.3.

Si f est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable représentée par la fonction $F = P + iQ$, les équations de Cauchy-Riemann signifient que $\Delta P = \Delta Q = 0$, c'est-à-dire que les composantes de la fonction f sont harmoniques[1].

PropkwIQwg

Proposition 28.2 ([1])**.**
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Nous considérons une application $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrivant sous la forme $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ où $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des applications réelles.

Nous avons équivalence entre :

ITEMooEFBVooGFENJw

(1) f est $\mathbb{C}$-dérivable.

ITEMooXHZPooTqtLXc

(2) f est différentiable et sa différentielle est une similitude[2] (définition 14.342).

[1] Une fonction u est harmonique si $\Delta u = 0$.
[2] En réalité ce qui est une similitude, c'est la matrice de $\varphi \circ df_{z_0} \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

ITEMooTFRIooWrkkvG

(3) f est différentiable et vérifie EqmblExI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & (28.6a) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & (28.6b) \end{cases}$$

ITEMooHKAFooDFdgni

(4) f est différentiable et $\partial_{\bar{z}} f = 0$.

Si ces conditions sont remplies, nous avons

$$df_{z_0}(z) = \big(\partial_x u + i\partial_x v\big)(x_0, y_0)z \tag{28.7}$$ EQooYVAJooCidHxX

Les équations (28.6) *sont les équations de* ***Cauchy-Riemann****.*

Démonstration. En plusieurs étapes.

(1) **(1) ⇔ (2)** C'est la proposition 14.346.

(2) **(2) ⇒ (3)** Par hypothèse f est différentiable. Nous allons calculer $df_{z_0}(z)$. Nous notons $z_0 = x_0 + iy_0$ et nous utilisons une des formules du lemme 14.273 : SUBEQSooCFAXooSQOMUu

$$\begin{aligned} df_{z_0}(x+iy) &= \frac{d}{dt}\left[u(x_0+tx, y_0+ty) + iv(x_0+tx, y_0+ty)\right]_{t=0} && (28.8a) \\ &= x(\partial_x u)(x_0,y_0) + y(\partial_y u)(x_0,y_0) \\ &\quad + ix(\partial_x v)(x_0,y_0) + iy(\partial_y v)(x_0,y_0) && (28.8b) \\ &= x\big((\partial_x u)(x_0,y_0) + i(\partial_x v)(x_0,y_0)\big) \\ &\quad + iy\big((\partial_y v)(x_0,y_0) - i(\partial_y u)(x_0,y_0)\big) && (28.8c) \end{aligned}$$ SUBEQooQSLGooFbyYcq

Étant donné que la différentielle est linéaire, les coefficients de x et de iy doivent être égaux :

$$(\partial_x u)(x_0,y_0) + i(\partial_x v)(x_0,y_0) = (\partial_y v)(x_0,y_0) - i(\partial_y u)(x_0,y_0). \tag{28.9}$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires, nous trouvons les relations (28.6).

Maintenant que nous savons que les deux coefficients dans (28.8c) sont identiques nous avons

$$df_{z_0}(z) = (\partial_x u + u\partial_x v)(x_0,y_0)z, \tag{28.10}$$

c'est-à-dire que nous avons prouvé (28.7) au passage.

(3) **(3) ⇒ (4)** Il suffit de vérifier en utilisant la définition 28.4b, et en remplaçant $\partial_y u$ et $\partial_y v$ par ce qu'on peut d'après (28.6) :

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}(u+iv) &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u+iv) && (28.11a) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v + i\partial_y u - \partial_y v) && (28.11b) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_x v - \partial_x u) && (28.11c) \\ &= 0. && (28.11d) \end{aligned}$$

(4) **(4) ⇒ (1)** Nous démontrons (4) ⇒ (2). Nous avons déjà montré que (2) implique (1). Nous posons $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ et nous allons calculer $df_{z_0}(x+iy)$ en reprenant le calcul déjà fait dans (28.8). Pour alléger les notations, nous notons

$$\begin{aligned} \alpha &= (\partial_x u)(x_0,y_0) \quad \beta = (\partial_x v)(x_0,y_0) \\ \gamma &= (\partial_y u)(x_0,y_0) \quad \delta = (\partial_y v)(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{28.12}$$

Nous avons :

$$df_{z_0}(x+iy) = x(\alpha+i\beta) + iy(\delta - i\gamma) = \alpha x + \gamma y + i(\beta x + \delta y). \tag{28.13}$$

Donc

$$(\varphi \circ df_{z_0} \circ \varphi^{-1})(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha x + \gamma y \\ \beta x + \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{28.14}$$

Par ailleurs, l'hypothèse $\partial_{\bar{z}} = 0$ donne les équations (28.6), c'est-à-dire $\delta = \alpha$ et $\gamma = -\beta$. La matrice de $(\varphi \circ df_{z_0} \circ \varphi^{-1})$ est donc $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ qui est une similitude

□

PROPooKXEQooBPjWAH

Proposition 28.3 ([1]).
Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 nous avons

$$f'(z_0) = (\partial_z f)(z_0). \tag{28.15}$$

Démonstration. La proposition 14.346 dit déjà que $f'(z_0)z = (df_{z_0})(z)$. Nous devons montrer que $(\partial_z f)(z_0)z = (df_{z_0})(z)$. Pour cela nous calculons un peu en utilisant la définition de ∂_z et les relations (28.6) :

$$\begin{aligned}(\partial_z f)(z_0) &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u+iv)(x_0,y_0) && (28.16a)\\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_y u + \partial_y v)(x_0,y_0) && (28.16b)\\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_x v + i\partial_x v + \partial_x u)(x_0,y_0) && (28.16c)\\ &= (\partial_x u + i\partial_x v)(x_0,y_0). && (28.16d)\end{aligned}$$

L'équation (28.7) nous permet de terminer :

$$(\partial_z f)(z_0) = (\partial_x u + i\partial_x v)(x_0,y_0) = df_{z_0} \tag{28.17}$$

au sens où df_{z_0} est l'opérateur sur $\mathbb{C}$ qui consiste à multiplier par ce qui est à gauche. □

PROPooAGGMooIVQFQB

Proposition 28.4 (Cauchy-Riemann en coordonnées polaires[1, 719]).
Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que nous supposons être $\mathbb{C}$-dérivable dans un voisinage de $r_0 e^{i\theta_0}$ (r_0 et θ_0 sont des réels). Nous posons

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ r,\theta &\mapsto f(re^{i\theta}).\end{aligned} \tag{28.18}$$

Alors

ITEMooRTYYooSTgTAQ

(1) La fonction $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles dans les deux directions en (r_0,θ_0).

ITEMooDHXTooBjxwjY

(2) Les dérivées partielles de $\tilde{f}$ sont liées par la relation

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}(r_0,\theta_0) = ir_0\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r_0,\theta_0). \tag{28.19}$$

ITEMooUUXTooZoDMHI

(3) La fonction $\tilde{f}$ est de classe C^∞.

Démonstration. Nous considérons les fonctions réelles u et v donnant les parties réelles et imaginaires de f :

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{28.20}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r_0,\theta_0) = &\frac{\partial u}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\cos(\theta_0)\\ &+\frac{\partial u}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\sin(\theta_0)\\ &+i\frac{\partial v}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\cos(\theta_0)\\ &+i\frac{\partial v}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)\sin(\theta_0)\end{aligned} \tag{28.21}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}(r_0,\theta_0) = &-\frac{\partial u}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\sin(\theta_0)\\ &+\frac{\partial u}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\cos(\theta_0)\\ &-\frac{\partial v}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\sin(\theta_0)\\ &+i\frac{\partial v}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0)\big)r_0\cos(\theta_0).\end{aligned} \tag{28.22}$$

Nous exprimons tout en termes de $\partial_y v$ et $\partial_x v$ en utilisant les équations de Cauchy-Riemann de la proposition 28.2 ainsi que la formule $\cos(\theta)+i\sin(\theta)=e^{i\theta}$ du lemme 20.13. Pour simplifier les notations, nous notons $a_0=\big(r_0\cos(\theta_0),r_0\sin(\theta_0)\big)\in\mathbb{R}^2$. Après quelques calculs :

$$(\partial_r\tilde{f})(r_0,\theta_0)=e^{i\theta_0}\frac{\partial v}{\partial y}\big(r_0\cos(\theta_0),r_0\sin(\theta_0)\big)+ie^{i\theta_0}\frac{\partial v}{\partial x}\big(r_0\cos(\theta_0),r_0\sin(\theta_0)\big) \tag{28.23a}$$

$$=e^{i\theta_0}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(a_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a_0)\right), \tag{28.23b}$$

et

$$(\partial_\theta\tilde{f})(r_0,\theta_0)=r_0e^{i\theta_0}\left(i\frac{\partial v}{\partial y}(a_0)-\frac{\partial v}{\partial x}(a_0)\right) \tag{28.24}$$

En comparant les deux, nous trouvons

$$(\partial_\theta\tilde{f})(r_0,\theta_0)=r_0i(\partial_r\tilde{f})(r_0,\theta_0). \tag{28.25}$$

□

PROPooCHUEooYsGcQK

Proposition 28.5.
Si $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est holomorphe, alors nous avons

$$df_{z_0}=(\partial_z f)(z_0) \tag{28.26}$$

au sens où l'opérateur linéaire $df_{z_0}\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est l'opération de multiplication par le nombre complexe $(\partial_z f)(z_0)$.

Démonstration. Soit $f(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y)$ une fonction holomorphe[3]. Les fonctions réelles f_1 et f_2 sont assujetties aux équations de Cauchy-Riemann de la proposition 28.2 :

$$\begin{cases}\partial_x f_1=\partial_y f_2 & (28.27a)\\ \partial_x f_2=-\partial_y f_1. & (28.27b)\end{cases}$$

Nous avons, en recourant à un petit abus de notation entre $f_i\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $f_i\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$:

$$df_{z_0}(u)=\frac{d}{dt}\Big[f(z_0+tu)\Big]_{t=0} \tag{28.28a}$$

$$=\frac{d}{dt}\Big[f_1(z_0+tu)+if_2(z_0+tu)\Big]_{t=0} \tag{28.28b}$$

$$=\partial_x f_1u_1+\partial_y f_1u_2+i\big(\partial_x f_2u_1+\partial_y f_2u_2\big) \tag{28.28c}$$

$$=\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \tag{28.28d}$$

$$=\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1\\ -\partial_y f_1 & \partial_x f_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}. \tag{28.28e}$$

En utilisant le lemme 14.343 nous reconnaissons la matrice de multiplication par le nombre $\partial_x f_1-i\partial_y f_1$. Or justement,

$$\partial_z f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)f=\frac{1}{2}\big(\partial_x f_1+i\partial_x f_2-i\partial_y f_1+\partial_y f_2\big), \tag{28.29}$$

qui se réduit à $\partial_x f_1-i\partial_y f_1$ lorsque nous y appliquons les équations de Cauchy-Riemann. □

28.1.2 Intégrale sur un chemin dans $\mathbb{C}$

DEFooBPLJooZwsmxi

Définition 28.6.
Si nous avons une application $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$ et une fonction $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, nous définissons

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b(f\circ\gamma)(t)\gamma'(t)dt \tag{28.30}$$

pour tous les couples (f,γ) pour lesquels le membre de droite a un sens.

[3] Définition 14.339.

28.7.
Vous noterez que cette définition n'est pas exactement la même que celle 22.40 d'une intégrale curviligne en analyse réelle. Cette dernière demande de prendre la norme de γ', alors qu'ici nous la gardons telle quelle. D'ailleurs, gardez en tête que γ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$. Donc $\gamma'(t)$ peut très bien être un nombre complexe.

PROPooCUBTooZDcdHX

Proposition-Définition 28.8 (Intégrale sur un chemin C^1 par morceaux)**.**
Soit un chemin C^1 par morceaux $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$. Nous considérons deux subdivisions $a=t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ et $a=u_1<u_2<\ldots<u_m=b$ telles que γ soit de classe C^1 sur les intervalles $]t_i,t_{i+1}[$ et $]u_j,u_{j+1}[$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\gamma\colon]t_i,t_{i+1}[\to\mathbb{C}} f=\sum_{j=1}^{m-1}\int_{\gamma\colon]u_j,u_{j+1}[\to\mathbb{C}} f. \tag{28.31}$$

Cette valeur est notée

$$\int_\gamma f. \tag{28.32}$$

THOooMFFMooBvJdFK

Théorème 28.9 (Théorème fondamental du calcul intégral version holomorphe[1, 720])**.**
Soit un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$. Soit une fonction holomorphe $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ et un chemin C^1 $\gamma\colon[a,b]\to\Omega$. Alors

$$\int_\gamma f'(z)dz=f\big(\gamma(b)\big)-f\big(\gamma(a)\big). \tag{28.33}$$

Démonstration. Un petit calcul :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f'(z)dz&=\int_a^b (f'\circ\gamma)(t)\gamma'(t)dt && && (28.34a)\\ &=\int_a^b (f\circ\gamma)'(t) && \text{prop. 14.348} && (28.34b)\\ &=(f\circ\gamma)(b)-(f\circ\gamma)(a) && \text{théo. 16.290.} && (28.34c)\end{aligned}$$

□

28.1.3 Intégrales sur des chemins fermés

LemtpEOmi

Lemme 28.10.
Si g est une fonction continue dans un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$ et si g admet une primitive complexe sur Ω alors

$$\int_\gamma g(z)dz=0 \tag{28.35}$$

pour tout chemin fermé γ de classe C^1 contenu dans Ω.

Démonstration. Il s'agit du théorème fondamental 28.9 avec $\gamma(1)=\gamma(0)$. □

LemwbwbUR

Lemme 28.11 (Goursat[621])**.**
Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω, holomorphe sur Ω moins éventuellement un point (nommé $z_1\in\Omega$). Soit T, un triangle[4] fermé inclus dans Ω. Alors nous avons

$$\int_{\partial T} f(z)dz=0. \tag{28.36}$$

Démonstration. Nous notons $\gamma=\partial T$. Dans la suite nous allons définir une suite de triangles $T^{(n)}$ et nous noterons $\gamma_n=\partial T^{(n)}$ avec une orientation que nous allons expliquer. Pour commencer nous posons $T^{(0)}=T$ et $\gamma_0=\partial T^{(0)}$.

Nous considérons le cas $z_1\notin T$, et nous posons

$$c=l(\gamma)^{-2}\Big|\int_\gamma f\Big|. \tag{28.37}$$

Notre objectif est de montrer que $c=0$. Soit A,B,C les trois sommets du triangle ; nous divisons le triangle de la façon suivante. D'abord nous considérons les points A',B',C' respectivement milieux de BC, AC et

[4] Nous considérons ici le triangle « plein ».

AB. En traçant le triangle $A'B'C'$, nous construisons quatre triangles que nous nommons $T_i^{(0)}$. Le théorème de Thalès[5] assure que le périmètre de chacun des quatre triangles est la moitié du périmètre du grand triangle T.

Sur T nous choisissons l'orientation ABC. De façon à être « compatible », nous choisissons les orientations $AC'B'$, $BA'C'$ et $A'CB'$. La somme de ces trois triangles donne T plus le triangle $A'C'B'$. Par conséquent nous choisissons sur le triangle central l'orientation (inverse) $A'B'C'$ de façon à avoir

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial T_i^{(0)}} f. \tag{28.38}$$

Cela implique que pour au moins un des quatre triangles (disons $T_k^{(0)}$ pour fixer les idées) nous ayons

$$\int_{\partial T_k^{(0)}} f \geqslant \frac{1}{4} \int_{\partial T^{(0)}} f \tag{28.39}$$

Nous notons $T^{(1)}$ ce triangle. Comme noté précédemment nous avons

$$l(\partial T^{(1)}) = \frac{1}{2} l(\partial T^{(0)}), \tag{28.40}$$

et donc

$$l(\gamma_1)^{-2} |\int_{\gamma_1} f| = 4 l(\gamma_0)^{-2} |\int_{\gamma_1} f| \geqslant 4 l(\gamma_0)^{-2} \frac{1}{4} |\int_{\gamma_0} f| = c. \tag{28.41}$$

En répétant le procédé nous construisons une suite de triangles $T^{(n)}$ qui satisfont toujours

$$l(\partial T^{(n)}) = \frac{1}{2^n} l(\partial T^{(0)}). \tag{28.42}$$

Ces triangles forment une suite de fermés emboités dont le diamètre tend vers zéro. Leur intersection contient donc exactement un point (lemme 19.154) que nous nommons z_0 (et qui appartient évidemment à Ω). Étant donné que f est holomorphe nous utilisons le développement limité (28.1) autour de z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + s(|z - z_0|)(z - z_0) \tag{28.43}$$

avec $\lim_{t \to 0} s(t) = 0$. Nous posons $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ et nous considérons $\epsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon |z - z_0| \tag{28.44}$$

pour tout $|z - z_0| < \alpha$. Le α à choisir pour obtenir cet effet est celui qui donne $s(|z - z_0|) < \epsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $l(\gamma_n) < \alpha$ pour tout $n > N$. D'autre part, deux points dans un triangle sont toujours à distance moindre que la longueur d'un côté, donc pour tout $z \in T^{(n)}$ nous avons $|z - z_0| < \alpha$ et par conséquent pour tout z dans $T^{(n)}$ nous avons

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon |z - z_0|. \tag{28.45}$$

Notons que la fonction g est une dérivée : c'est la dérivée de la fonction

$$G(z) = z f(z_0) + \frac{1}{2} f'(z_0)(z - z_0)^2. \tag{28.46}$$

Par conséquent nous avons

$$\int_{\gamma_n} g = 0 \tag{28.47}$$

par le lemme 28.10. Nous avons donc

$$\begin{aligned} |\int_{\gamma_n} f| &= |\int_{\gamma_n} (f - g)| && \text{(28.48a)} \\ &\leqslant l(\gamma_n) \max\{|f(z) - g(z)| \text{ tel que } z \in T^{(n)}\} && \text{(28.48b)} \\ &\leqslant \epsilon l(\gamma_n)^2, && \text{(28.48c)} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$c \leqslant l(\gamma_n)^{-2} |\int_{\gamma_n} f| \leqslant \epsilon, \tag{28.49}$$

[5] Théorème 14.170.

ce qui signifie que $c = 0$ parce que ϵ est arbitraire. Nous avons donc prouvé le lemme de Goursat dans le cas où le point de non holomorphie z_1 est en dehors de T.

Si z_1 est sur un côté, disons sur le côté AB, alors nous considérons un vecteur $v \in \mathbb{C}$ tel que $T_\epsilon = T + \epsilon v$ ne contienne z_1 pour aucun ϵ. Le vecteur $v = z_1 - C$ fait par exemple l'affaire. En vertu du point précédent nous avons

$$\int_{\partial T_\epsilon} f = 0 \tag{28.50}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Étant donné que la fonction f est continue (y compris en z_1), l'intégrale sur ∂T est également nulle.

Si maintenant le point z_1 est à l'intérieur de T nous décomposons T en trois triangles ayant z_1 comme sommet commun. Si nous considérons les orientations Az_1C, ABz_1 et BCz_1, alors nous avons

$$\int_T f = \int_{Az_1C} f + \int_{ABz_1} f + \int_{BCz_1} f, \tag{28.51}$$

alors que par le point précédent les trois intégrales du membre de droite sont nulles. □

PrpopwQSbJg

Proposition 28.12 ([621])**.**
Soient Ω un ouvert étoilé et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point z_1 où f est seulement continue. Alors si γ est un chemin fermé dans Ω, nous avons

$$\int_\gamma f = 0. \tag{28.52}$$

PropRZCKeO

Proposition 28.13.
Si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors f est $\mathbb{C}$-dérivable et nous pouvons dériver terme à terme dans la boule ouverte $B(0, R)$.

Démonstration. Cela est exactement la proposition[6] 17.50. □

28.1.4 Homotopie entre applications

DEFooPJKLooCvgxsu

Définition 28.14 (homotopie entre applications)**.**
*Soient des espaces topologiques X et Y. Deux applications continues $f_1, f_2 \colon X \to Y$ sont **homotopes** si il existe une application continue $H \colon [0,1] \times X \to Y$ telle que pour tout $x \in X$ nous avons*

$$H(0, x) = f_1(x) \tag{28.53a}$$
$$H(1, x) = f_2(x). \tag{28.53b}$$

LEMooMGFZooGOaGY1

Lemme 28.15.
La relation « être homotope à[7] » est une relation d'équivalence sur $C(X, Y)$.

Démonstration. Pour obtenir $f \sim f$, il suffit de prendre $H(s, x) = f(x)$.

Si $f \sim g$, nous considérons l'homotopie $H \colon [0,1] \times X \to Y$. Alors l'application

$$\begin{aligned} M \colon [0,1] \times X &\to Y \\ (t, x) &\mapsto H(1 - t, x) \end{aligned} \tag{28.54}$$

est une homotopie pour $g \sim f$.

Si $f \sim g$ et $g \sim f$, nous avons les applications continues H et M telles que

$$H(0, x) = f(x) \qquad H(1, x) = g(x) \tag{28.55a}$$
$$M(0, x) = g(x) \qquad M(1, x) = h(x). \tag{28.55b}$$

L'application

$$\begin{aligned} S \colon [0,1] \times X &\to Y \\ (t, x) &\mapsto \begin{cases} H(2t, x) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ M(2t - 1, x) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned} \tag{28.56}$$

Nous vérifions que S est continue en vérifiant la valeur en $t = 1/2$. De plus

$$S(0, x) = H(0, x) = f(x) \tag{28.57}$$

[6] Je ne suis pas convaincu que ça s'applique à $\mathbb{C}$.
[7] Définition 28.14.

et

$$S(1,x) = M(2-1,x) = M(1,x) = h(x). \tag{28.58}$$

□

LEMooMJKEooCaVhjD

Lemme 28.16 ([1]).
Soient des espaces topologiques X et Y. Si Y est connexe par arcs, alors toutes les applications constantes $X \to Y$ sont homotopes.

Démonstration. Soient les applications constantes $u(x) = u_0$ et $v(x) = v_0$. Étant donné que Y est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma\colon [0,1] \to Y$ telle que $\gamma(0) = u_0$ et $\gamma(1) = v_0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} H\colon [0,1] \times X &\to Y \\ (t,x) &\mapsto \gamma(t) \end{aligned} \tag{28.59}$$

est une homotopie entre les applications u et v. □

PROPooNABDooFtKukO

Proposition 28.17 ([248]).
Soit un compact K de $\mathbb{R}^n$. Deux applications $f, g\colon K \to \mathbb{C}^*$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si f/g est homotope à la fonction

$$\begin{aligned} u\colon K &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto 1. \end{aligned} \tag{28.60}$$

Démonstration. Supposons que $H\colon [0,1]\times K \to \mathbb{C}^*$ est une homotopie entre f et g. Dans ce cas, l'application

$$\begin{aligned} M\colon [0,1] \times K &\to \mathbb{C}^* \\ (t,x) &\mapsto \frac{H(t,x)}{g(x)} \end{aligned} \tag{28.61}$$

est une homotopie entre f/g et u. En effet

$$M(0,x) = \frac{H(0,x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{28.62}$$

et

$$M(1,x) = \frac{H(1,x)}{g(x)} = 1 = u(x). \tag{28.63}$$

Dans l'autre sens, si H est une homotopie entre f/g et u, alors l'application $M(t,x) = H(t,x)g(x)$ est une homotopie entre f et g. □

28.1.5 Intégrale et homotopie

LEMooOFCEooIsuchR

Lemme 28.18 ([248]).
Soit un rectangle fermé $R \subset \mathbb{R}^2$. Si l'application $H\colon R \to \Omega$ est continue, alors pour toute fonction continue $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ nous avons

$$\int_{\partial H} f = 0 \tag{28.64}$$

où ∂H désigne la frontière de $H(R)$ dans $\mathbb{C}$, et l'intégrale est celle de la définition 28.8.

Démonstration. La frontière ∂H peut être décomposée en 4 parties de classe C^1 :

(1)

$$\begin{aligned} \alpha_1\colon [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto H(t,a), \end{aligned} \tag{28.65}$$

(2)

$$\begin{aligned} \alpha_2\colon [a,b] &\to \Omega \\ t &\mapsto H(1,t) \end{aligned} \tag{28.66}$$

(3)

$$\begin{aligned} \alpha_3\colon [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto H(1-t,b) \end{aligned} \tag{28.67}$$

(4)

$$\begin{aligned}\alpha_4\colon [a,b] &\to \Omega\\ t &\mapsto H\big(0,b+a-t\big).\end{aligned} \tag{28.68}$$

Étudions les diverses parties α_i.

(1) **Pour α_2** Première observation : $\alpha_2 = \gamma_1$.

(2) **Pour α_4** Nous avons $\alpha_4 = \gamma_0(b+a-t)$ et donc

$$\int_{\alpha_4} f = \int_a^b (f\circ\alpha_4)(t)\alpha_4'(t) = -\int_a^b (f\circ\gamma_0)(b+a-t)\gamma_0'(b+a-t). \tag{28.69}$$

EQooFWIQooJALDnQ

Nous utilisons le changement de variables[8]

$$\begin{aligned}\phi\colon [a,b] &\to [a,b]\\ t &\mapsto b+a-t.\end{aligned} \tag{28.70}$$

Le jacobien $|J_\phi|$ est égal à 1 et donc nous continuons (28.69) de la façon suivante :

$$\int_{\alpha_4} f = -\int_a^b (f\circ\gamma_0)\big(\phi(t)\big)\gamma'\big(\phi(t)\big)dt \tag{28.71a}$$

$$= -\int_a^b (f\circ\gamma_0)(t)\gamma_0'(t)dt \tag{28.71b}$$

$$= -\int_{\gamma_0} f. \tag{28.71c}$$

(3) **Lien entre α_1 et α_3** Il y a deux possibilités : soit γ_1 et γ_2 sont des lacets, soit ce sont des chemins normaux.

(3a) **Si ils sont des lacets** Alors pour tout s, l'application

$$\begin{aligned}\Gamma_s\colon [a,b] &\to C\\ t &\mapsto H(s,t)\end{aligned} \tag{28.72}$$

est un lacet. En particulier $H(s,a) = H(s,b)$. Donc $\alpha_3(t) = H(1-t,b) = \alpha_1(1-t)$. Dans ce cas nous avons

$$\int_{\alpha_3} f = \int_a^b f\big(\alpha_3 t\big)\alpha_3'(t) \tag{28.73a}$$

$$= \int_a^b f\big(\alpha_1(1-t)\big)(-)\alpha_1'(1-t) \tag{28.73b}$$

$$= -\int_a^b (f\circ\alpha_1)(t)dt \qquad \text{chm. var. } \phi(t) = 1-t \tag{28.73c}$$

$$= -\int_{\alpha_1} f. \tag{28.73d}$$

Nous avons alors le calcul

$$0 = \int_{\partial H} f = \int_{\alpha_1} f + \int_{\gamma_1} f + \underbrace{\int_{\alpha_3} f}_{-\int_{\alpha_1} f} - \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f. \tag{28.74}$$

Le lemme est prouvé.

(3b) **Si γ_0 et γ_1 sont des chemins** Dans ce cas nous avons une homotopie à extrémités fixées. Donc α_1 et α_3 sont des chemins constants, et les intégrales dessus sont nulles et

$$0 = \int_{\partial H} f = \underbrace{\int_{\alpha_1} f}_{=0} + \int_{\gamma_1} f + \underbrace{\int_{\alpha_3} f}_{=0} - \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f. \tag{28.75}$$

[8] Théorème 16.284(3).

Et le lemme est prouvé.

□

THOooVTFXooBgvVyD

Théorème 28.19 (Cauchy, version homotopique[248, 721]).
Soit un ouvert Ω dans $\mathbb{C}$. Soit une fonction holomorphe $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit respectée :

(1) Les chemins $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ sont homotopes à extrémités fixées.

ITEMooESDVooFgVarr

(2) Les lacets $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ sont homotopes.

Alors

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f. \tag{28.76}$$

Démonstration. Considérons l'homotopie $H\colon [0,1]\times[a,b] \to \Omega$. Étant donné que $[0,1]\times[a,b]$ est un rectangle dans $\mathbb{R}^2$, le lemme 28.18 nous indique que

$$\int_{\partial H} f = 0. \tag{28.77}$$

□

CorGZXzuZR

Corolaire 28.20 ([721]).
Soient $a \in \mathbb{C}$ ainsi que deux chemins γ_1 et γ_2 homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Alors $\operatorname{Ind}(\gamma_1, a) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, a)$.

28.1.6 Théorème de Tietze (espace normal)

LEMooCLVAooTaNGJk

Lemme 28.21 ([248]).
Soit un espace topologique normal[9] *X. Soient $M \in \mathbb{R}^+$ et A fermé dans X, et une application continue $f\colon A \to [-M, M]$.*

Il existe une application continue $g\colon X \to [-M/3, M/3]$ telle que pour tout $x \in A$,

$$|f(x) - g(x)| < \frac{2M}{3}, \tag{28.78}$$

Démonstration. Nous divisons A en trois parties :

$$A_- = f^{-1}\big([-M, -M/3]\big), \tag{28.79a}$$
$$A_+ = f^{-1}\big([M/3, M/3]\big), \tag{28.79b}$$
$$A_0 = f^{-1}\big([-M/3, M/3]\big). \tag{28.79c}$$

Les parties A_+ et A_- sont fermées parce que f est continue. D'autre part, X est normal, de telle sorte que le théorème d'Urysohn 23.109 s'applique.

Nous considérons donc une application continue $g_1\colon X \to [0,1]$ telle que $g_1^{-1}(A_-) = \{0\}$ et $g_1^{-1}(A_+) = \{1\}$. Nous posons alors

$$g(x) = \left(\frac{2M}{3}\right) g_1(x) - \frac{M}{3}. \tag{28.80}$$

Vérification des propriétés de g.

(1) **g est continue** Parce que g_1 est continue.

(2) **g prend ses valeurs dans $[-M/3, M/3]$** Parce que g_1 prend ses valeurs dans $[0,1]$ et que $t \mapsto (2M/3)t - M/3$ est croissante.

(3) **$|f(x) - g(x)|$ sur A** Si $x \in A_-$, alors $g_1(x) = 0$ et donc $g(x) = -M/3$. Donc

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - M/3| \leqslant 2M/3 \tag{28.81}$$

EQooEUOKooELRJjc

parce que $f(x) \in [-M/3, M/3]$.

Si $x \in A_+$, alors $g_1(x) = 1$ et donc $g(x) = M/3$. Même fin de raisonnement qu'en (28.81).

Si $x \in A_0$, alors $f(x) \in [-M/3, M/3]$ et $g(x) \in [-M/3, M/3]$ et donc encore $|f(x) - g(x)| \leqslant 2M/3$.

□

[9] Définition 9.98.

LEMooSKSNooEdgFcR

Lemme 28.22 ([248]).
Soient un espace topologique normal X ainsi qu'un fermé A dans X. Nous considérons une fonction continue $f\colon A\to[-M,M]$.

Il existe une application $g\colon X\to[-M,M]$ continue prolongeant f.

Démonstration. Nous allons commencer par construire une suite d'applications $g_i\colon X\to\mathbb{R}$ telles que
ITEMooGAIVooQYBCZj

(1) Pour tout $x\in A$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{r}ng_i(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n M \tag{28.82}$$

ITEMooOLNAooEJPdbV

(2) Pour tout $x\in X$ et pour tout i,

$$|g_i(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{M}{2}. \tag{28.83}$$

Nous commençons par construire g_1 à partir du lemme 28.21 appliqué à la fonction f. Nous avons donc une application $g_1\colon X\to[-M/3,M/3]$ telle que

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2M}{3} \tag{28.84}$$

EQooGXUIooWnATPw

pour tout $x\in A$. Vu que g_1 prend ses valeurs dans $[-M/3,M/3]$, elle vérifie la condition (2). De plus (28.84) montre que la condition (1) est vérifiée pour $n=1$.

Et c'est parti pour la récurrence. Nous supposons avoir des applications g_i pour $i=1,\dots,k$ qui vérifient la condition (2), et telles que la condition (1) est satisfaite pour $n=1,\dots,k$. Nous allons maintenant construire g_{k+1}.

Nous posons

$$\begin{aligned}h_k\colon A&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto f(x)-\sum_{i=1}^{k}g_i(x).\end{aligned} \tag{28.85}$$

Par hypothèse de récurrence, la fonction h_k ne prend pas n'importe quelles valeurs dans $\mathbb{R}$, mais

$$h_k\colon A\to\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^k M,\left(\frac{2}{3}\right)^k M\right]. \tag{28.86}$$

Nous construisons g_{k+1} à partir de ce h_k et du lemme 28.21. Nous avons donc

$$g_{k+1}\colon X\to\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M\right] \tag{28.87}$$

vérifiant

$$|h_k(x)-g_{k+1}(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}M. \tag{28.88}$$

La condition (1) est donc maintenant vérifiée jusqu'à $n=k+1$. Nous vérifions la condition (2) pour $i=k+1$. Simple calcul :

$$|g_{k+1}(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M=\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\frac{M}{2}. \tag{28.89}$$

Et voilà pour la définition des applications g_i.

Vu que $2/3<1$, la série $\sum_{i=1}^{\infty}\|g_i\|_\infty$ converge normalement (définition 12.131). Notons g la somme. Le lemme 12.164 donne alors la convergence uniforme $g_i\xrightarrow{unif}g$, et le théorème 14.409 nous assure que g est continue sur X.

En ce qui concerne la norme de g, nous avons, en utilisant la formule (12.516) avec $q=2/3$,

$$\|g\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{M}{2}\leqslant M. \tag{28.90}$$

Donc $|g(x)|\leqslant M$ pour tout $x\in X$.

Enfin nous vérifions que g prolonge f. Soit $x \in A$. Prenez la limite $n \to \infty$ dans l'inégalité

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n M. \tag{28.91}$$

Nous trouvons que $|f(x) - g(x)| = 0$. □

THOooXKGWooFUYlux

Théorème 28.23 (Théorème de Tietze)**.**
Soit une partie fermée A de l'espace normal X. Si la fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle se prolonge en une fonction continue $g\colon X \to \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous supposons dans un premier temps que f prenne ses valeurs dans $]-M, M[$. À fortiori, elle prend ses valeurs dans $[-M, M]$ et le lemme 28.22 dit qu'il existe un prolongement continu $g\colon X \to [-M, M]$. Nous allons construire à partir de là un prolongement continu $h\colon X \to]-M, M[$ de f.

Nous posons

$$B = g^{-1}\big(\{-M, M\}\big). \tag{28.92}$$

Étant donné que $f(A) \subset]-M, M[$, nous avons $B \cap A = \varnothing$. De plus A est fermé par hypothèse et B est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{-M, M\}$ par l'application continue g. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'Urysohn 23.109.

Nous considérons donc une application $g_1\colon X \to [0, 1]$ telle que $g_1 = 0$ sur B et $g_1 = 1$ sur A. Enfin nous posons $h = gg_1$. Cette application prend ses valeurs dans $]-M, M[$, est continue et si $x \in A$ nous avons

$$h(x) = g(x)g_1(x) = f(x) \times 1 = f(x). \tag{28.93}$$

Ceci règle la question si f prend ses valeurs dans $]-M, M[$.

Nous considérons à présent le cas général $f\colon A \to \mathbb{R}$. Soit un homéomorphisme $\phi\colon \mathbb{R} \to]-M, M[$ (par exemple via la proposition 14.204). Nous considérons

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon A &\to]-M, M[\\ x &\mapsto (\phi \circ f)(x). \end{aligned} \tag{28.94}$$

Nous lui appliquons le premier cas pour avoir une fonction $\tilde{g}\colon X \to]-M, M[$ qui prolonge $\tilde{f}$. Il suffit maintenant de poser

$$\begin{aligned} g\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\phi^{-1} \circ \tilde{g})(x). \end{aligned} \tag{28.95}$$

Cela est une application continue et si $x \in A$, nous avons

$$g(x) = (\phi^{-1} \circ \tilde{g})(x) = (\phi^{-1} \circ \tilde{f})(x) = (\phi^{-1} \circ \phi \circ f)(x) = f(x). \tag{28.96}$$

□

Corolaire 28.24.
Soit un fermé A dans un espace normal X. Si $f\colon A \to \mathbb{C}$ est continue, alors elle se prolonge en une fonction continue $g\colon X \to \mathbb{C}$.

Démonstration. Les parties réelles et imaginaires de f sont continues. Il suffit de leur appliquer le théorème de Tietze 28.23. □

28.2 Logarithme complexe

28.2.1 La fonction argument

Nous savons la définition 20.5 de l'exponentielle complexe.

Définition 28.25.
*Un **logarithme** de $\alpha \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation $e^z = \alpha$.*

Notons bien que cela définit *un* logarithme, et non *le* logarithme.

LEMooUMESooJVzeDb

Lemme 28.26.
Si z_1 et z_2 sont des logarithmes de α alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + 2ik\pi$.

Démonstration. Nous commençons par déterminer les logarithmes de $\alpha = 1$. Nous avons besoin de $e^{a+bi} = 1$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Nous avons

$$e^a e^{bi} = 1, \tag{28.97}$$

et en prenant la norme nous trouvons $|e^a| = 1$, ce qui donne $a = 0$. Ensuite $e^{bi} = 1$, qui signifie $b = 2k\pi$. Les logarithmes de 1 sont donc les nombres de la forme $2ik\pi$.

Soient maintenant z_1 et z_2 des logarithmes de α. Alors $e^{z_1} = e^{z_2}$, donc[10] $e^{z_1 - z_2} = 1$, ce qui signifie que $z_1 - z_2$ est un logarithme de 1. Donc il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 - z_2 = 2ik\pi$. □

Remarque 28.27.
Jusqu'ici nous n'avons pas donné de conditions donnant l'existence d'un logarithme. Nous avons seulement supposé des existences et donné des propriétés sur ces hypothétiques objets.

Définition 28.28 ([722]).
*Si $z \in \mathbb{C}^*$ nous définissons la **valeur principale** de son argument le nombre $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que*

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{28.98}$$

Nous le notons $\arg(z)$.

NORMooOGHNooYriCBH

28.29.
Il ne faut pas se ruer sur $\arg(x + iy) = \arctan(y/x)$. Pour rappel, la fonction arctan a été définie dans le théorème 20.44, et elle prend ses valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$. La formule $v(x, y) = \arctan(y/x)$ n'est donc valable que pour $x > 0$. Les valeurs sont :

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ -\pi + \arctan(y/x) & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases} \tag{28.99}$$

EQooPJVFooSEKTny

Pour $x > 0$ nous avons $\arg(x + iy) = \arctan(y/x)$ parce que justement la fonction arctan prend ses valeurs en particulier entre $-\pi$ et π. Pour $x < 0$ et $y > 0$ nous avons $\arg(x + iy) = \pi + \arctan(y/x)$ (dans ce cas, $\arctan(y/x) < 0$) et si $x < 0$, $y < 0$ nous avons $\arg(x + iy) = -\pi + \arctan(y/x)$.

NORMooMRBEooVtTcIA

28.30 (Les dérivées partielles de la fonction argument)**.**
Vu que nous en aurons besoin plusieurs fois, nous calculons maintenant les dérivées partielles de la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \arg(x + iy). \end{aligned} \tag{28.100}$$

Nous commençons par la dérivée $\partial_x \varphi(x, y)$. Et il y a de nombreux cas à séparer.

(1) $\underline{x > 0}$

Nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\arctan(y/(x + \epsilon)) - \arctan(y/x)}{\epsilon}, \tag{28.101}$$

qui n'est autre que la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(y/x)$. Nous pouvons la calculer facilement avec le théorème 20.44(2) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{28.102}$$

(2) $\underline{x < 0}$

Nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\pm\pi + \arctan(y/(x + \epsilon)) - \big(\pm\pi + \arctan(y/x)\big)}{\epsilon} \tag{28.103}$$

où les signes $\pm$ dépendent du signe de y. De toutes façons, les termes en π se simplifient et le calcul est le même que celui du cas $x > 0$. Encore une fois nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{28.104}$$

[10] C'est facile de dire « donc ». Il faut surtout citer la proposition 20.7(2).

(3) $\underline{x = 0}$

Nous devons calculer

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arg(\epsilon + iy) - \arg(iy)}{\epsilon}. \tag{28.105}$$

Il y a quatre cas d'après les signes de ϵ (séparer limite à gauche et à droite) et y.

Si $\epsilon > 0$ et $y > 0$ alors nous avons à faire le calcul

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\arctan(y/\epsilon) - \pi/2}{\epsilon} \tag{28.106}$$

qui se traite par la règle de L'Hôpital. Cela donne $-1/y$.

Les trois autres cas ne se distinguent que par des constantes au numérateur, lesquelles disparaissent en appliquant la règle de L'Hôpital[11]. Au final,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,y) = -\frac{1}{y}. \tag{28.107}$$

Nous avons calculé jusqu'ici :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \tag{28.108}$$

EQooAOJPooQryUBR

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En particulier vous avez noté que cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nous calculons à présent la dérivée partielle par rapport à y :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arg(x + iy + i\epsilon) - \arg(x + iy)}{\epsilon}. \tag{28.109}$$

(1) $\underline{x > 0}$

Nous avons à calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arctan\frac{y+\epsilon}{x} - \arctan\frac{y}{x}}{\epsilon}, \tag{28.110}$$

qui n'est autre que la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan\frac{t}{x}$ en $t = y$. Résultat :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{28.111}$$

(2) $\underline{x < 0 \text{ et } y \neq 0}$

Le calcul à faire est :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\pm\pi + \arctan\frac{y+\epsilon}{x} - \left(\pm\pi + \arctan\frac{y}{x}\right)}{\epsilon} \tag{28.112}$$

Une chose importante à remarquer est que dans le calcul de la limite nous pouvons supposer que y et $y + \epsilon$ aient le même signe, quelle que soit la valeur et le signe de ϵ (assez petit). C'est pour cela que les deux termes $\pm\pi$ arrivent avec le même signe des deux côtés de la différence, et se simplifient. Nous tombons sur une limite déjà faite et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{28.113}$$

(3) $\underline{x < 0 \text{ et } y = 0}$

Vu que $x < 0$ nous avons $\arg(x) = \pi$ et nous devons calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\arg(x + i\epsilon) - \pi}{\epsilon}. \tag{28.114}$$

La limite $\epsilon \to 0^+$ est classique et donne $1/x$.

Mais la limite $\epsilon \to 0^-$ n'existe pas :

$$\lim_{\epsilon\to 0^-} \frac{-\pi + \arctan(\epsilon/x) - \pi}{\epsilon} \tag{28.115}$$

[11] Nonobstant le fait que ces constantes se mettent bien pour avoir un vrai cas d'indétermination 0/0, sinon la règle de L'Hôpital ne s'applique pas.

n'existe pas.

Donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) \tag{28.116}$$

n'existe pas pour $x<0$.

(4) $\underline{x=0 \text{ et } y\neq 0}$

Le calcul est immédiat

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\arg(iy+i\epsilon)-\arg(iy)}{\epsilon}=0, \tag{28.117}$$

donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,y)=0. \tag{28.118}$$

En ce qui concerne la continuité, nous avons que $\partial_y\varphi$ est continue partout sauf sur la demi-droite $\{(x,0) \text{ tel que } x\leqslant 0\}$ où elle n'existe pas.

28.2.2 Une définition possible du logarithme

DEFooWDYNooYIXVMC

Définition 28.31.
Nous définissons la fonction ***logarithme*** *par*

$$\begin{aligned}\ln\colon \mathbb{C}^*&\to\mathbb{C}\\ z&\mapsto \ln\big(|z|\big)+i\arg(z)\end{aligned} \tag{28.119}$$

où le ln *à droite est le logarithme usuel sur* $\mathbb{R}^+$.

Remarque 28.32.
Cette fonction généralise le logarithme déjà vu sur $]0,\infty[\subset\mathbb{R}$. En effet pour des valeurs de z dans cette partie nous avons $\arg(z)=0$ et $|z|=z$.

Lemme 28.33.
Le nombre $\ln(z)$ *est un logarithme de* z.

Démonstration. Nous avons

$$e^{\ln(z)}=e^{\ln|z|}e^{i\arg(z)}=|z|e^{i\arg(z)}=z. \tag{28.120}$$

Nous avons utilisé le fait que $e^{\ln(x)}=x$ pour $x\in\mathbb{R}^+$ et $|z|e^{i\arg(z)}=z$ par définition de la fonction arg. □

Notons que si on avait pris d'autres conventions pour définir arg, nous aurions eu d'autres définitions possibles de ln.

Exemple 28.34.
Nous avons

$$\ln(-1)=\ln(1)+i\arg(-1). \tag{28.121}$$

Mais $\ln(1)=0$ et $\arg(-1)=\pi$ (et non $-\pi$), donc

$$\ln(-1)=i\pi. \tag{28.122}$$

C'est cette définition du logarithme qui est prise par Sage, et c'est cela qui lui permet de donner la primitive de $1/x$ comme $\ln(x)$ et non $\ln(|x|)$, parce que Sage connaît les logarithmes de nombres réels négatifs :

```
1
2
3  SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
4  Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
5  Type "help()" for help.
6
7 sage: ln(-1)
8 I*pi
9 sage: f(x)=1/x
```

```
sage: f.integrate(x)
x |--> log(x)
```

tex/sage/sageSnip010.sage

△

Nous avons jusqu'ici défini une fonction sur $\mathbb{C}^*$ qui fait correspondre à chaque nombre complexe un de ses logarithmes. Il reste quelques questions à régler :

- Est-ce que cette fonction est continue ? Holomorphe ? (réponses : non et non)
- Si non, est-ce qu'il y avait moyen de trouver une définition plus efficace ? (réponse : non)

LEMooMUOIooCnoWwq

Lemme 28.35.
La fonction ln *n'est pas continue sur* $]-\infty,0]$.

Démonstration. Attention à bien comprendre l'énoncé. La fonction

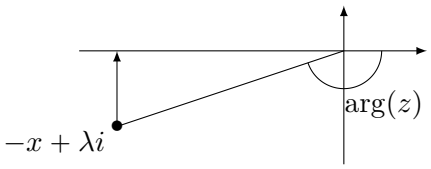
$$\begin{aligned} f\colon]-\infty,0[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned} \tag{28.123}$$

est continue. D'ailleurs c'est $\ln(x) = \ln(|x|) + i\pi$. Ce dont il est question dans l'énoncé, c'est de la fonction ln vue comme fonction sur $\mathbb{C}^*$.

Soit $x > 0$ dans $\mathbb{R}$; nous avons

$$\ln(-x) = \ln(x) + i\pi. \tag{28.124}$$

Cependant $\lim_{\substack{\lambda\to 0^-\\ \lambda\in\mathbb{R}}} \ln(-x+\lambda i)$ va valoir $\ln(|x|) - i\pi$. En effet lorsque $\lambda < 0$ est petit, l'argument de $-x+\lambda i$ se rapproche de $-\pi$ (et non de π).



Donc

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0^-\\ \lambda\in\mathbb{R}}} \ln(-x+\lambda i) = \lim \ln(|x+\lambda i|) + i\arg(-x+\lambda i) = \ln(|x|) - i\pi. \tag{28.125}$$

Nous n'avons donc pas continuité de la fonction logarithme comme fonction sur $\mathbb{C}^*$. □

THOooWUXOooYKvLbJ

Théorème 28.36.
La restriction

$$\ln\colon \mathbb{C}\setminus]-\infty,0] \to \mathbb{C} \tag{28.126}$$

est holomorphe.

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 14.346 et considérer la fonction

$$\begin{aligned} F\colon S &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \big(\ln(|x+iy|), \arg(x+iy)\big) \end{aligned} \tag{28.127}$$

où $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \text{ tel que } x \leqslant 0\}$. Nous devons vérifier que F est différentiable et que sa différentielle en un point de S est une similitude.

Nous posons

$$u(x,y) = \ln\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \tag{28.128}$$

et

$$v(x,y) = \arg(x+iy). \tag{28.129}$$

Les dérivées partielles de u ne sont pas très compliquées :

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: u(x,y)=ln(sqrt(x**2+y**2))
sage: u.diff(x)
(x, y) |--> x/(x^2 + y^2)
```

tex/sage/sageSnip011.sage

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{28.130a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{28.130b}$$

Pour celles de v par contre, il faut se poser des questions, par exemples résister à la tentation d'écrire $v(x,y) = \arctan(y/x)$ et lire 28.29.

Nous avons déjà calculé les dérivées partielles de v dans 28.30, et nous avons vu qu'elles étaient continues sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite.

Vu que les dérivées partielles sont continues, le théorème 14.325 nous dit que F est différentiable. La matrice de la différentielle est alors la matrice des dérivées partielles

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \tag{28.131}$$

qui a la forme requise (14.948) pour que la proposition 14.346 nous assure que ln soit $\mathbb{C}$-dérivable, c'est-à-dire holomorphe. □

28.2.3 Pas plus de continuité

Bon. La fonction logarithme que nous avons définie est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ privé d'une demi-droite

$$U = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leqslant 0\}. \tag{28.132}$$

EQooDOELooBQoPyG

Et elle n'est pas continue sur U ; elle y est cependant continue « par le haut ». Pouvons-nous faire mieux ? Nous allons maintenant prouver quelques résultats d'impossibilité de faire mieux que holomorphe partout sauf une partie pas si petite que ça.

Proposition 28.37.
Il n'existe pas de fonctions continues $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Démonstration. Pour tout z, le nombre $f(z)$ est un logarithme de z. Or $\ln(z)$ en est également un. Donc par le lemme 28.26

$$f(z) = \ln(z) + 2ik(z)\pi \tag{28.133}$$

pour une certaine fonction $k\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{Z}$. Sur le domaine d'holomorphie de ln, les fonctions ln et f étant continues, la fonction k l'est aussi. Mais une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est constante (son domaine est connexe).

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$f(z) = \ln(z) + 2ik\pi \tag{28.134}$$

au moins pour tout $z \in \mathbb{C}^* \setminus U$. Une telle fonction ne peut pas être continue sur U parce que ln ne l'est pas. □

Ok. Pas continue sur tout $\mathbb{C}$. Mais continue sur un peu plus que $\mathbb{C}$ privé de toute une demi-droite ? La proposition suivante répond que bof.

Proposition 28.38.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $S(0,r)$ (le cercle centré en 0 et de rayon $r > 0$). Il n'existe pas de fonction continue $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Démonstration. Encore une fois, pour tout $z \in \Omega$ nous avons

$$f(z) = \ln(z) + 2i\pi k(z) \tag{28.135}$$

pour une certaine fonction $k\colon \Omega \to \mathbb{Z}$. Nous considérons la demi-droite U de (28.132). Sur $\Omega \setminus U$, la fonction ln est continue et k doit également l'être. Donc k est constante sur les composantes connexes de $\Omega \setminus U$.

Vu que $S(0,r)$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules centrées en des points de $S(0,r)$. En prenant le minimum des rayons de ces boules, nous voyons que Ω contient une couronne

$$\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } r - \delta \leqslant |z| \leqslant r + \delta\}. \tag{28.136}$$

Soit le point $x_0 = -r$. C'est un point de Ω contenu dans U. Nous allons prouver que $B(x_0,\delta) \setminus U$ est dans une seule composante connexe de Ω.

Soit un point $z_1 \in B(x_0,\delta)$ situé au-dessus de U, et z_2 un point de $B(x_0,\delta)$ situé en dessous de U. Le cercle $S(0,r)$ coupe $B(x_0,\delta)$ en deux points : un au-dessus et un en-dessous de U. On peut lier z_1 au point de « sortie » supérieur de $S(0,r)$ en restant dans $B(x_0,\delta)$; ce point est ensuite relié en suivant le cercle au point d'entrée inférieur du cercle dans $B(x_0,\delta)$. Ce dernier point est lié à z_2 par un chemin restant dans la boule.

Tout cela pour dire que z_1 et z_2 sont dans la même composante connexe de Ω et que $k(z_1) = k(z_2)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$f(z) = \ln(z) + 2ik\pi \tag{28.137}$$

sur $B(x_0,\delta) \setminus U$. Une telle fonction f ne peut pas être continue. □

28.2.4 Pas d'unicité : autres déterminations de l'argument

NORMooFCDOooFDzAjp

28.39.
Nous avons pris la fonction d'argument $\arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi,\pi]$. Il y en a évidemment beaucoup d'autres de possibles. Par exemple pour $\alpha \in \mathbb{R}$ nous pouvons considérer

$$\arg_{\alpha^+}\colon \mathbb{C} \to]\alpha, \alpha + 2\pi] \tag{28.138}$$

EQooNKKDooOuJxXc

ou

$$\arg_{\alpha^-}\colon \mathbb{C} \to [\alpha, \alpha + 2\pi[. \tag{28.139}$$

En posant

$$\ln_{\alpha^\pm}(z) = \ln(|z|) + i \arg_{\alpha^\pm}(z) \tag{28.140}$$

nous avons une fonction réciproque de l'exponentielle définie sur $\mathbb{C}^*$ et holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ privé d'une demi-droite D_α (dépendante de la valeur de α).

La différence entre $\ln_{\alpha^+}$ et $\ln_{\alpha^-}$ est seulement la valeur sur la demi-droite de non-holomorphie. L'une sera semicontinue d'un côté et l'autre, de l'autre côté.

Remarque 28.40.
La fonction $\arg_{0^-}$ a déjà été utilisée en 20.5.2 pour écrire un inverse de la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,2\pi[&\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned} \tag{28.141}$$

Définition 28.41 ([674]).
*Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Nous disons que la fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une **détermination** sur Ω si elle est continue et vérifie*

$$e^{f(z)} = z \tag{28.142}$$

pour tout $z \in \Omega$.

Les différents résultats vus jusqu'ici montrent qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 28.42.
*La **détermination principale** du logarithme est la restriction de notre logarithme 28.31*

$$\begin{aligned} \ln\colon \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \ln(|z|) + i \arg(z) \end{aligned} \tag{28.143}$$

à l'ouvert $\mathbb{C}^* \setminus U$ où U est la demi-droite $\operatorname{Re}(z) \leqslant 0$, $\operatorname{Im}(z) = 0$ de $\mathbb{C}$.

REMooFBLLooDnkmjR

Remarque 28.43.
Beaucoup de sources[723] ne définissent pas $\ln_{\alpha^\pm}$ sur la droite D_α. C'est-à-dire qu'ils notent $\ln_\alpha$ notre fonction $\ln_{\alpha^+}$ restreinte à $\mathbb{C}^* \setminus D_\alpha$. Dans ce cas, les fonctions $\ln_{\alpha^+}$ et $\ln_{\alpha^-}$ sont identiques[12].

Cette remarque est importante parce que certains vont vous dire « le logarithme n'est pas défini sur la demi-droite » ; de leur point de vue, la fonction que nous avons définie est une prolongation (non continue) à U du logarithme, qui est continu.

(1) Certaines personnes pourraient vous dire que notre logarithme « n'est pas bien défini parce que si on fait le tour dans un sens ou dans l'autre nous n'obtenons pas la même valeur pour $\ln(z)$ lorsque z est sur U ». Et cela avec des arguments aussi forts que « 2π et 0, c'est le même point ».

Nous préférons être bien clairs[13] sur ce point : notre fonction ln est parfaitement définie sur $\mathbb{C}^*$ et 2π n'est pas la même chose que zéro. En particulier $\arg(e^{2i\pi}) = 0$ et $\arg(e^{-i\pi}) = \pi$ et non $-\pi$.

(2) Il n'en reste pas moins que Sage donne $\ln(-1) = i\pi$ et que nous avons choisi de faire de même, parce que le Frido n'est pas un cours d'agrégation, mais un texte qui donne quelques éléments de mathématique dans le but d'utiliser Sage efficacement.

(3) Tout ceci pour dire que si vous utilisez ce livre pour l'agrégation, vous devriez sérieusement considérer l'option de ne pas donner du logarithme la définition donnée ici, mais bien sa restriction.

En fait notre logarithme est maximum pour la propriété « être une réciproque de l'exponentielle » alors que beaucoup de monde préfère avoir une fonction maximale pour la propriété « être réciproque de l'exponentielle tout en étant continue ».

De toutes les fonctions ayant le droit de vouloir être appelée « logarithme », celle que nous avons choisie (un peu arbitrairement) pour s'appeler « logarithme » et accaparer de la notation « ln » est $\ln_{\pi^+}$. Elle est d'une certaine manière celle qui arrive le plus naturellement.

En effet si nous pensons au logarithme népérien $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que nous voulons prolonger sur $\mathbb{R}$, nous devons poser

$$\ln(-x) = \ln(-1) + \ln(x) \tag{28.144}$$

pour $x > 0$. Que peut valoir $\ln(-1)$? Il doit vérifier $e^{\ln(-1)} = -1$. La première valeur qui nous tombe sous la main est $\ln(-1) = \pi$. Bien entendu, d'autres possibilités existent, comme $\ln(-1) = 2017\pi$ par exemple.

28.2.5 Pas d'unicité : développement en série

Pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$ nous pouvons écrire un développement en série de la réciproque de l'exponentielle autour de z_0. La fonction ainsi définie est holomorphe sur la boule $B(z_0, |z_0|)$ et diverge en dehors de cette boule.

Voilà encore une fonction « logarithme » pour chaque point de $\mathbb{C}^*$. Nous nommons $\ln_{z_0}$ la fonction

$$\ln_{z_0}\colon B(z_0, |z_0|) \to \mathbb{C} \tag{28.145}$$

donnée par la série.

En général nous n'avons pas $\ln_{z_1} = \ln_{z_2}$ sur l'intersection des disques de convergence. Si c'était le cas, de proche en proche nous pourrions construire une fonction continue réciproque du logarithme sur $\mathbb{C}^*$, ce qui est impossible.

28.2.6 Pas d'unicité : laquelle choisir ?

Bon. Pour chaque demi-droite D nous avons une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^* \setminus D$. Et pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$ nous en avons une sur $B(z_0, |z_0|)$.

En pratique, quel logarithme choisir ? Cela dépend du problème.

Si vous avez besoin ou envie de travailler avec des séries entières, le mieux est de choisir une détermination donnée par un développement autour d'un point bien choisi par rapport à votre problème.

Si vous avez surtout besoin d'holomorphie, et que vous en avez besoin sur un grand domaine, vous devriez choisir une détermination sur un des ensembles $\mathbb{C}^* \setminus D_\alpha$ en choisissant α de telle sorte que la demi-droite maudite ne passe pas par la zone sur laquelle vous travaillez.

Dans tous les cas, vous devez préciser très explicitement la détermination choisie. Dans ce texte, sauf mention du contraire, nous utiliserons la détermination principale, et même son extension (non continue) à $\mathbb{C}^*$. Lorsque nous aurions besoin d'holomorphie, nous préciserons que nous considérons la restriction.

[12] Cela n'est pas tout à fait évident ; vous devriez y penser.
[13] Est-ce qu'il faut vraiment un pluriel ici ?

28.2.7 Logarithme comme primitive

Tout le monde sait[14] que le logarithme $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$. Qu'en est-il dans le cas complexe ? Tout d'abord précisons que nous ne comptons pas encore parler d'intégrale sur $\mathbb{C}$, mais seulement d'intégrales sur $\mathbb{R}$ d'une fonction à valeur complexes.

PROPooNIJVooKueuYJ

Proposition 28.44.
Si $z \in \mathbb{C}$ alors

$$\int \frac{1}{x+z}dx = \ln(x+z) \tag{28.146}$$

EQooAHYXooTPGXDS

Démonstration. Il est important de comprendre que la formule (28.146) est un abus de notation pour dire que si nous considérons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto \ln(x+z)\end{aligned} \tag{28.147}$$

alors nous avons $\varphi'(x) = \frac{1}{x+z}$. Ici la dérivation est une dérivation sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale est une intégrale sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire « composante par composantes ». La fonction φ se décompose en partie réelle et imaginaire qui sont à dériver séparément :

$$\varphi(x) = \ln(|x+z|) + i\arg(x+z). \tag{28.148}$$

(1) **Si z est imaginaire pur**

Nous posons $z = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. D'abord nous avons

$$\frac{1}{x+\lambda i} = \frac{x}{x^2+\lambda^2} - i\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}. \tag{28.149}$$

La partie réelle de $\varphi(x)$ est

$$\varphi_1(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+\lambda^2}\right), \tag{28.150}$$

dont la dérivée est

$$\varphi_1'(x) = \frac{x}{x^2+\lambda^2}, \tag{28.151}$$

qui correspond bien à la partie réelle de $\frac{1}{x+\lambda i}$.

En ce qui concerne la partie imaginaire, $\varphi_2(x) = \arg(x+\lambda i)$, et sa dérivée n'est rien d'autre que la dérivée partielle par rapport à x de la fonction argument, déjà calculée en (28.108) :

$$\varphi_2'(x) = \frac{-\lambda}{x^2+\lambda}. \tag{28.152}$$

Cela est bien la partie imaginaire de $\frac{1}{x+\lambda i}$.

Notons que nous n'avons pas de problèmes sur la demi-droite des réels négatifs parce que nous ne considérons au final que la dérivée partielle par rapport à x de la fonction argument, laquelle existe et est continue, même sur cette partie.

(2) **Pour z quelconque**

Soit $z = s + \lambda i$ avec $s, \lambda \in \mathbb{R}$. En posant $\varphi_0(x) = \ln(x+\lambda i)$ nous avons $\varphi(x) = \varphi_0(x+s)$ et donc

$$\varphi'(x) = \varphi_0'(x+s) = \frac{1}{x+s+\lambda i} = \frac{1}{x+z}. \tag{28.153}$$

Tout va bien.

□

EXooAKEDooZgjocX

Exemple 28.45.
Un petit calcul d'intégrale, que nous avions déjà faite dans l'exemple 22.100 (avec la méthode de Rothstein-Trager). En passant par une décomposition en fractions simples :

$$\int \frac{1}{x^3+x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1/2}{x-i} - \frac{1/2}{x+i}\right) \tag{28.154a}$$

$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x-i) - \frac{1}{2}\ln(x+i) \tag{28.154b}$$

$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1). \tag{28.154c}$$

SUBEQooRNQLooScfSlG

[14] Proposition 17.97.

Attention aux justifications. Il n'est pas vrai en général dans le cas de nombres complexes a et b que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. En effet, pour la partie réelle, ça passe parce que $|ab| = |a||b|$. Mais en ce qui concerne la partie imaginaire,

$$\arg(ab) \neq \arg(a) + \arg(b) \tag{28.155}$$

lorsque la somme dépasse les bornes de $]-\pi, \pi]$. Le passage à (28.154c) fonctionne parce que dans le cas particulier des nombres $x + i$ et $x - i$, les arguments se somment à zéro : $\arg(x + i) + \arg(x - i) = 0$. △

28.2.8 Logarithme sur un chemin

DEFooBBGFooCEdsFR

Définition 28.46 (logarithme continu)**.**
Soient un espace topologique X, et une application $f\colon X \to \mathbb{C}^*$. Nous disons que $g\colon X \to \mathbb{C}^*$ est un ***logarithme*** *de f si pour tout $x \in X$ nous avons*

$$f(x) = \exp\big(g(x)\big). \tag{28.156}$$

DEFooOCDGooGyvvWi

Définition 28.47 (Détermination du logarithme)**.**
Soit un chemin[15] *$\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}^*$. Nous disons qu'une application $g\colon \gamma\big([a, b]\big) \to \mathbb{C}^*$ est une* ***détermination du logarithme*** *sur γ si*

$$\exp\big((g \circ \gamma)(t)\big) = \gamma(t) \tag{28.157}$$

pour tout $t \in [a, b]$.

THOooUPANooMiECqe

Théorème 28.48.
Tout chemin dans $\mathbb{C}^*$ admet une détermination continue du logarithme[16]*, et si l est une détermination sur le chemin γ, nous avons*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = l\big(\gamma(b)\big) - l\big(\gamma(a)\big). \tag{28.158}$$

Le théorème de Borsuk parle de lien entre logarithme continu et homotopie de fonctions à la fonction constante. Il s'applique donc bien de concert avec la proposition 28.17 qui dit que si f et g sont homotopes, alors f/g est homotope à une constante.

THOooTCUMooEByCKg

Théorème 28.49 (Théorème de Borsuk[248])**.**
Soient un compact K de $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'une application continue $f\colon K \to \mathbb{C}^*$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ITEMooKZYDooKoEEbl

(1) f admet un logarithme continu[17]*.*

ITEMooXVNXooVAHklr

(2) f est homotope à l'application constante $u\colon K \to \mathbb{C}^*$, $u(z) = 1$.

ITEMooQDHXooObjxLA

(3) f admet une extension continue $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **(1) ⇒ (3)** Soit un logarithme continu $g\colon K \to \mathbb{C}$ de f. Vu que K est fermé, le théorème de Tietze 28.23 dit que g possède une extension continue $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto \exp\big(\tilde{g}(x)\big). \end{aligned} \tag{28.159}$$

L'application $\tilde{f}$ est continue parce que exp et $\tilde{g}$ le sont. Elle est une extension de f parce que si $x \in K$, nous avons

$$\tilde{f}(x) = \exp\big(\tilde{g}(x)\big) = \exp\big(g(x)\big) = f(x) \tag{28.160}$$

parce que $\tilde{g}(x) = g(x)$ et g est un inverse de exp.

(2) **(3) ⇒ (2)** Soit une extension continue $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$ de f. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous posons

$$\begin{aligned} H\colon [0, 1] \times K &\to \mathbb{C}^* \\ (t, x) &\mapsto \tilde{f}\big((1 - t)x + tx_0\big). \end{aligned} \tag{28.161}$$

[15] Définition 22.75.
[16] Définition 28.47.
[17] Définition 28.46.

L'application H est continue, et pour $x \in K$ elle vérifie $H(0,x) = \tilde{f}(x) = f(x)$ ainsi que $H(1,x) = \tilde{f}(x_0)$.

Donc f homotope à l'application constante $\tilde{f}(x_0)$. Vu que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, toutes les applications constantes sont homotopes[18]. Donc f est homotope à $\tilde{f}(x_0)$ qui est homotope à u. L'homotopie étant une relation d'équivalence[19], f est homotope à u.

(3) **(2) ⇒ (1)** Nous considérons l'homotopie $H\colon [0,1]\times K \to \mathbb{C}^*$ entre f et u. En particulier pour tout $x \in K$ nous avons $H(0,x) = f(x)$ et $H(1,x) = 1$.

La partie $[0,1]\times K$ est compacte[20] et $|H|$ y est continue. Donc elle atteint ses bornes. Mais elle prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$; donc

$$\inf_{x,t} |H(x,t)| > 0. \tag{28.162}$$

Et d'ailleurs cet infimum est un minimum. Nous considérons la norme suivante sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$:

$$\|(t,x)\|_\infty = \max\big(|t|,|x|\big). \tag{28.163}$$

Toutes les normes étant équivalentes[21] sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, nous pouvons caractériser la compacité, la continuité et tout ça en termes de cette norme. L'application H est uniformément continue[22]. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|(t,x)-(s,y)\|_\infty < \eta$ alors $\|H(t,x)-H(s,y)\| < \epsilon$.

Soient un entier $n > \frac{1}{\eta} + 1$, $x \in K$ et $k \in \{0,\dots,n\}$. Nous avons

$$\big\|(\frac{k}{n},x) - (\frac{k+1}{n},x)\big\|_\infty = \big\|(-\frac{1}{n},0)\big\| = \frac{1}{n} < \eta. \tag{28.164}$$

Nous avons donc également

$$\big|H(\frac{k}{n},x) - H(\frac{k+1}{n},x)\big| < \epsilon. \tag{28.165}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} F_k\colon K &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto H\big(\frac{k}{n},x\big). \end{aligned} \tag{28.166}$$

Cette application est continue sur K et pour tout $x \in K$ nous avons [SUBEQSooLJIJooYkxyMO]

$$\big|\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)} - 1\big| = \big|\frac{F_k(x) - F_{k+1}(x)}{F_{k+1}(x)}\big| \tag{28.167a}$$

$$= \big|\frac{H(\frac{k}{n},x) - H(\frac{k+1}{n},x)}{H(\frac{k+1}{n},x)}\big| \tag{28.167b}$$

$$< \frac{\epsilon}{|H(\frac{k+1}{n},x)|}. \tag{28.167c}$$

Pour rappel, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel qu'en posant $n > \frac{1}{\eta} + 1$ nous avons (28.167). Nous choisissons ϵ tel que $0 < \epsilon < \inf_{(t,x)} |H(t,x)|$, de telle sorte à avoir

$$\big|\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)} - 1\big| < \frac{\epsilon}{|H(\frac{k+1}{n},x)|} < 1. \tag{28.168}$$

La fonction $\ln\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est continue sur $B(1,1)$[23]. Donc la fonction

$$\begin{aligned} h_k\colon K &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto \ln\left(\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)}\right) \end{aligned} \tag{28.169}$$

est continue. Nous posons

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{F_k}{F_{k+1}}\right), \tag{28.170}$$

[18] Lemme 28.16.
[19] Lemme 28.15.
[20] Théorème 9.388.
[21] Équivalence de normes, théorème 12.70.
[22] Théorème de Heine 14.80.
[23] Le logarithme est celui défini en 28.31 et sa continuité est le théorème 28.36.

qui est également continue sur K. Cette fonction g est un logarithme continu de f sur K parce que[24]

$$\exp\big(g(x)\big) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(\frac{f_k(x)}{F_{k+1}(x)}\Big)\right) \tag{28.171a}$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\ln\big(\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)}\big)\right) \tag{28.171b}$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)} \tag{28.171c}$$
$$= \frac{F_0(x)}{F_n(x)} \tag{28.171d}$$
$$= \frac{H(0,x)}{H(1,x)} \tag{28.171e}$$
$$= \frac{f(x)}{1} \tag{28.171f}$$
$$= f(x). \tag{28.171g}$$

□

CORooXOOZooUJMKxu

Corolaire 28.50 ([248]).
Soit un compact convexe K de $\mathbb{R}^n$. Toute application continue $K \to \mathbb{C}^*$ admet un logarithme continu.

Démonstration. Soit une application continue $f\colon K \to \mathbb{C}^*$. Soit $x_0 \in K$. Vu que K est convexe, f est homotope à la fonction constante $f(x_0)$. Par arc-connexité de $\mathbb{C}^*$, l'application f est alors homotope à la fonction constante 1.

Le théorème de Borsuk 28.49 nous dit alors que f admet un logarithme continu. □

LEMooJNPTooScfSvA

Lemme 28.51.
Si K est compact dans $\mathbb{C}$, alors la partie $\mathbb{C} \setminus K$ possède exactement une composante connexe non bornée.

Démonstration. La partie K étant compacte, elle est bornée. Il existe donc $r > 0$ tel que $K \subset B(0,r)$. Soit $A = \mathbb{C} \setminus B(0,r)$. Cela est une partie connexe de $\mathbb{C}$ et est donc contenue dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Il y a donc existence d'une composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$.

Pour l'unicité, les autres composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ sont contenues dans $B(0,r)$ et sont donc bornées. □

28.2.9 Lacets, indice et homotopie

DEFooLFBNooGlvJmp

Proposition-Définition 28.52 ([724]).
*Soit γ un chemin fermé[25] dans $\mathbb{C}$ que nous supposons continu et C^1 par morceaux[26]. L'**indice** de la courbe γ est la fonction*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_\gamma\colon \mathbb{C} \setminus \gamma &\to \mathbb{Z} \\ z &\mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z}. \end{aligned} \tag{28.172}$$

Alors :

ITEMooHYHMooWcaJxP

(1) La fonction Ind_γ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$.

(2) Elle est continue sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

(3) La fonction indice est constante sur chaque composante connexe[27] de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

(4) Elle est nulle sur les composantes non bornées de $\mathbb{C} \setminus \gamma$[28].

Démonstration. Point par point.

[24] Dans le calcul suivant, nous utilisons entre autres la formule $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ de la proposition 20.7(2).
[25] Par abus de langage, nous désignerons par γ à la fois le chemin et son image.
[26] Définition 22.37
[27] Définition 9.120.
[28] Elle a une seule telle composante par le lemme 28.51, mais ce n'est pas important ici.

(1) **Prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$**

Explicitons l'intégrale sur $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt. \tag{28.173}$$

Note. Comme γ n'est peut-être pas dérivable en certains points, en réalité nous n'avons pas une intégrale entre a et b, mais une somme d'intégrales entre a_i et b_i avec $a_0=a$ et $b_n=b$. Nous nommons S l'ensemble de ces points.

Nous allons calculer l'exponentielle de ce qui est dans l'intégrale en posant

$$\begin{aligned}\varphi\colon [a,b]&\to\mathbb{C}\\ u&\mapsto\exp\left(\int_a^u\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt\right).\end{aligned} \tag{28.174}$$

Nous savons par le lien entre primitive et intégrale (proposition 16.289) que la dérivée de $x\mapsto\int_0^x f$ est f elle-même. Nous pouvons donc facilement dériver φ :

$$\varphi'(u)=\frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z_0}\exp\left(\int_a^u\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt\right)=\frac{\gamma'(u)\varphi(u)}{\gamma(u)-z_0}. \tag{28.175}$$

EQooHEAWooCWnNLZ

Cette égalité est vraie pour tout $u\in[a,b]$ sauf en un nombre fini de points (les points de S). Nous considérons maintenant

$$\begin{aligned}f\colon [a,b]&\to\mathbb{C}\\ t&\mapsto\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z_0},\end{aligned} \tag{28.176}$$

et nous dérivons :

$$f'(t)=\frac{\varphi'(t)\big(\gamma(t)-z_0\big)-\varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2} \tag{28.177a}$$

$$=\frac{\varphi'(t)}{\gamma(t)-z_0}-\frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2}. \tag{28.177b}$$

Nous y injectons l'expression (28.175) de φ' :

$$f'(t)=\frac{\gamma'(t)\varphi(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2}-\frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{\big(\gamma(t)-z_0\big)^2}=0. \tag{28.178}$$

Comme f est continue[29] sur $[a,b]$ et de dérivée nulle partout sauf sur S, elle est constante sur $[a,b]$. Nous avons donc $f(t)=f(a)$ pour tout t, c'est-à-dire

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z_0}=\frac{1}{\gamma(a)-z_0}. \tag{28.179}$$

Nous pouvons isoler de là une valeur pour $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=\frac{\gamma(t)-z_0}{\gamma(a)-z_0}. \tag{28.180}$$

C'est le moment de calculer $\varphi(b)$. Dans le calcul suivant, nous utilisons $\gamma(a)=\gamma(b)$:

$$\varphi(b)=\frac{\gamma(b)-z_0}{\gamma(a)-z_0}=\frac{\gamma(b)-z_0}{\gamma(b)-z_0}=1. \tag{28.181}$$

Nous avons prouvé que

$$\exp\left(\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt\right)=1. \tag{28.182}$$

Pour qu'une exponentielle soit égale à 1, il faut que ce qui se trouve dedans soit égal à $2ik\pi$ pour un certain k. Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que

$$\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt=2i\pi k. \tag{28.183}$$

Pour cette valeur de k nous avons $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)=k$.

(2) **Une borne pour $|\gamma'|$** L'application γ est C^1 par morceaux[30]. La restriction $\gamma'\colon[a_i,b_i]\to\mathbb{C}$ est

[29] Fait important : nous utilisons la continuité de f, pas de l'indice. Nous n'avons pas encore démontré que l'indice est une fonction continue.

[30] Nous utilisons ici crucialement le fait que les morceaux sont fermés.

continue sur un compact et est donc bornée. Pour chaque i nous avons donc une borne M_i pour $|\gamma' j|$. En nommant M le maximum des ces bornes M_i nous avons $\gamma'(t) < M$ pour tout $t \in [a,b]$.

(3) **L'indice est ponctuellement continu** Nous utilisons le théorème 19.38 avec l'application

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] \times \mathbb{C} \setminus \gamma &\to \mathbb{C} \\ (t,z) &\mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}. \end{aligned} \tag{28.184}$$

Sauf que non. Il ne va pas être possible de majorer cette fonction uniformément en z, comme il le faudrait pour remplir la condition (3). La raison est que quand z s'approche de γ, le dénominateur n'est pas contrôlé.

Nous allons donc restreindre le domaine de f. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Vu que γ est continue et que $[a,b]$ est compact, la fonction $t \mapsto 1/(\gamma(t)-z_0)$ atteint une borne inférieure. Disons que cette borne est atteinte pour $t = t_0$. Nous considérons $r < d\big(z_0, \gamma(t_0)\big)$ et nous prenons une borne M pour $|\gamma'|$. Nous avons alors, pour tout t que

$$\frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-z_0|} < \frac{M}{r}. \tag{28.185}$$

Le z_0 étant fixé, la fonction constante M/r majore f uniformément en t. La théorème de continuité sous l'intégrale 19.38 dit alors que l'indice est continue en z_0.

(4) **Continuité globale** La fonction indice étant continue en chaque point de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, elle est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma$ (théorème 9.286).

(5) **Sur les composantes connexes** Soit une composante connexe C de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. L'application Ind_γ est continue et à valeurs entières sur C. La proposition 9.294 dit alors que l'indice est constant sur C.

(6) **Nulle sur la non bornée** En majorant $|\gamma'|$ par M, nous avons

$$|\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-z_0|} \leqslant \frac{M}{2\pi} \int_a^b \frac{dt}{|\gamma(t)-z_0|}. \tag{28.186}$$

Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que $\epsilon M(b-a)/2\pi < 1$. Vu que γ est bornée, il existe $R > 0$ tel que $\gamma(t) \in B(0,R)$ pour tout t. Nous considérons r assez grand pour que $r - R > 1/\epsilon$.

Comme nous étudions Ind_γ sur une composante non bornée, nous considérons $|z_0| > r$. Avec ça nous avons $|\gamma(t) - z_0| > r - R$ et donc

$$|\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)| \leqslant \frac{M}{2\pi} \int_a^b \epsilon dt = \frac{M(b-a)}{2\pi}\epsilon < 1. \tag{28.187}$$

La dernière inégalité est un choix de ϵ fait au départ.

Étant donné que $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$, nous avons forcément $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 0$. Et comme l'indice est constant sur les composantes connexe, il est nul partout.

□

PROPooXWULooFZgHfL

Proposition 28.53.
Soit $p \in \mathbb{C}$. Soit un chemin $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$. Quelques hypothèses :

(1) Il existe une demi-droite D d'origine p et tel que $\gamma^{-1}(D)$ est fini.

(2) Le chemin γ traverse D en tout point de $\gamma^{-1}(D)$.

(3) Soit n^+ le nombre de points de $\gamma^{-1}(D)$ où γ traverse positivement D et n^- idem négativement.

Alors

$$\operatorname{Ind}(\gamma, p) = n^+ - n^-. \tag{28.188}$$

PROPooEKFHooOWcIMk

Proposition 28.54 ([248]).
Soient $p \in \mathbb{C}$ ainsi que deux chemins $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$. Si γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. Alors

$$\operatorname{Ind}(\gamma_1, p) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, p). \tag{28.189}$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}\setminus\{p\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z-p}. \end{aligned} \tag{28.190}$$

La partie $\mathbb{C}\setminus\{p\}$ est ouverte. Le théorème 28.19 d'invariance de l'intégrale par homotopie nous indique que

$$\mathrm{Ind}(\gamma_1,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f=\mathrm{Ind}(\gamma_2,p). \tag{28.191}$$

□

DefECnFJQp

Définition 28.55.
*Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets en $x_0\in X$ (un espace topologique), une **équivalence d'homotopie** est une application $f\colon [0,1]\times[0,1]\to X$ telle que*

(1) $f(0,t)=\gamma_1(t)$ pour tout t ;

(2) $f(1,t)=\gamma_2(t)$ pour tout t ;

(3) pour chaque $t\in[0,1]$, l'application $s\mapsto f(s,t)$ est continue ;

(4) pour chaque $s\in[0,1]$, l'application $t\mapsto f(s,t)$ est un lacet basé en x_0.

LEMooMEICooOOGzdf

Lemme 28.56.
Si γ est un cercle de centre $z_0\in\mathbb{C}$ et de rayon r, alors

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\begin{cases} 1i & \text{si } z\in B(z_0,r)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{28.192}$$

Démonstration. La seconde ligne provient directement de la proposition 28.52. Pour la première, le cercle γ se paramètre par

$$\gamma(\theta)=z_0+re^{i\theta}. \tag{28.193}$$

Nous commençons par calculer $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$. Il vaut

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\omega}{\omega-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=1. \tag{28.194}$$

Nous considérons maintenant un point $p\in B(z_0,r)$ et nous calculons $\mathrm{Ind}_\gamma(p)$. D'abord si σ est le cercle $\sigma(t)=\gamma(t)+p-z_0=re^{it}+p$ de rayon r centré en p, nous avons

$$\mathrm{Ind}_\sigma(p)=1 \tag{28.195}$$

par ce que nous venons de voir.

Ensuite les chemins σ et γ sont homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$. En effet nous posons

$$H(u,t)=(1-u)\gamma(t)+u\sigma(t). \tag{28.196}$$

Nous avons

$$H(u,t)-p=(1-u)z_0+re^{it}+(u-1)p=(1-u)(z_0-p)+re^{it}. \tag{28.197}$$

En termes de modules, nous avons d'une part

$$|(1-u)(z_0-p)|\leqslant|z_0-p|<r \tag{28.198}$$

et $|re^{it}|=r$. Donc la somme des deux ne peut pas faire zéro. Nous avons donc bien $H(u,t)\neq p$ pour tout $u\in[0,1]$ et pour tout $t\in[0,2\pi]$.

Les chemins γ et σ étant homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$, la proposition 28.54 dit que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(p)=\mathrm{Ind}_\sigma(p)=1. \tag{28.199}$$

□

PROPooGAOIooFTOuli

Proposition 28.57 ([248]).
Soit un intervalle $J \subset \mathbb{R}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*) &\to \mathbb{Z} \\ \gamma &\mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, 0) \end{aligned} \tag{28.200}$$

où $\mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*)$ est l'ensemble des lacets $J \to \mathbb{C}^*$ sur lequel nous considérons la loi de groupe multiplicatif tandis que nous considérons la loi additive sur $\mathbb{Z}$. Nous avons :

ITEMooKCRIooSEyhlp

(1) ψ est effectivement à valeurs dans $\mathbb{Z}$,

(2) ψ est un morphisme de groupes surjectif.

ITEMooZFXTooDCXTVU

(3) Le noyau de ψ est

$$\ker(\psi) = \{\textit{lacets homotopes dans } \mathbb{C}^* \textit{ à un lacet constant}\}. \tag{28.201}$$

Démonstration. Pour (1), c'est la proposition 28.52(1).

Soient deux lacets γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}^*$. Le théorème 28.48 nous permet de considérer des logarithmes continus $l_i\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ le long de γ_i. L'application $l_1 + l_2$ est une détermination du logarithme le long de $\gamma_1\gamma_2$ parce que[31]

$$\exp\big(l_1(t) + l_2(t)\big) = \exp\big(l_1(t)\big)\exp\big(l_2(t)\big) = \gamma_1(t)\gamma_2(t). \tag{28.202}$$

(1) **Morphisme** Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(\gamma_1\gamma_2, 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b f\big((\gamma_1\gamma_2)(t)\big)(\gamma_1\gamma_2)'(t)dt && \text{(28.203a)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1\gamma_2}\frac{dz}{z} && \text{(28.203b)} \\ &= (l_1 + l_2)(b) - (l_1 + l_2)(a) && \text{(28.203c)} \\ &= \big(l_1(b) - l_1(a)\big) + \big(l_2(b) - l_1(a)\big) && \text{(28.203d)} \\ &= \mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) + \mathrm{Ind}(\gamma_2, 0). && \text{(28.203e)} \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que $\psi(\gamma_1\gamma_2) = \psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2)$, et donc que ψ est un morphisme.

(2) **Surjection** Nous considérons le lacet

$$\begin{aligned} \gamma\colon [a,b] &\to \mathbb{C}^* \\ t &\mapsto \exp\big(2i\pi kt(b-a)\big), \end{aligned} \tag{28.204}$$

et nous montrons que $\psi(\gamma) = k$. D'abord nous remarquons que

$$\gamma'(t) = \gamma(t)\frac{2i\pi k}{(b-a)}, \tag{28.205}$$

et ensuite nous calculons :

$$\begin{aligned} \psi(\gamma) &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)dt && \text{(28.206a)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\int_a^b}\gamma(t)\frac{2\pi ik}{(b-a)}\gamma(t)dt && \text{(28.206b)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{2i\pi k}{(b-a)}dt && \text{(28.206c)} \\ &= k. && \text{(28.206d)} \end{aligned}$$

(3) **Noyau** Notons pour la simplicité

$$\mathcal{H} = \{\text{lacets homotopes dans } \mathbb{C}^* \text{ à un lacet constant}\}. \tag{28.207}$$

[31] Nous ne nous lasserons jamais de citer la proposition 20.7(2).

Nous notons u le chemin constant $u(t)=1$. Nous avons $\psi(u)=0$ parce que, en notant $f(z)=1/z$,

$$\mathrm{Ind}(u,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_u f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 f\big(u(t)\big)u'(t)dt=0 \tag{28.208}$$

parce que $u'(t)=0$ pour tout t. Nous avons donc $u\in\ker(\psi)$. Si $\gamma\in\mathcal{H}$, alors, utilisant le théorème de Cauchy homotopique 28.19(2), nous avons $\mathrm{Ind}(\gamma,0)=\mathrm{Ind}(u,0)=0$. Donc $\mathcal{H}\subset\ker(\psi)$.

Soient $\gamma\in\ker(\psi)$ et une détermination continue l du logarithme le long de γ. Nous avons

$$0=\psi(\gamma)=l(b)-l(a). \tag{28.209}$$

Nous posons

$$\begin{aligned}H\colon [0,1]\times[a,b]&\to\mathbb{C}^*\\ (s,t)&\mapsto\exp\big(sl(a)+(1-s)l(t)\big).\end{aligned} \tag{28.210}$$

Cette application continue vérifie $H(0,t)=e^{l(t)}=\gamma(t)$ et $H(1,t)=e^{l(a)}=\gamma(a)$. Donc elle est une homotopie entre γ et le chemin constant $\gamma(a)$. Encore par Cauchy homotopique, $\psi(\gamma)=0$ parce que ψ est nul sur les chemins constants.

□

LEMooCTIBooNRAyZH

Lemme 28.58 ([1]).
Si γ est un lacet dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$, alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma,p)=\mathrm{Ind}(\gamma-p,0) \tag{28.211}$$

PROPooPRIIooKWCHBZ

Proposition 28.59 ([248]).
Soient $p\in\mathbb{C}$ ainsi que deux lacets γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$. Si

$$\mathrm{Ind}(\gamma_1,p)=\mathrm{Ind}(\gamma_2,p), \tag{28.212}$$

alors γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$.

Démonstration. Vu que γ_1 ne passe pas par p, nous pouvons considérer le chemin

$$\begin{aligned}\gamma\colon [a,b]&\to\mathbb{C}^*\\ t&\mapsto\frac{\gamma_0(t)-p}{\gamma_1(t)-p}.\end{aligned} \tag{28.213}$$

En posant $\sigma_i(t)=\gamma_i(t)-p$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\gamma,0)&=\mathrm{Ind}(\sigma_0\sigma_1^{-1},0) && && (28.214a)\\ &=\mathrm{Ind}(\sigma_0,0)+\mathrm{Ind}(\sigma_1^{-1},0) && \text{prop. 28.57} && (28.214b)\\ &=\mathrm{Ind}(\sigma_0,0)-\mathrm{Ind}(\sigma_1,0) && && (28.214c)\\ &=\mathrm{Ind}(\gamma_0,p)-\mathrm{Ind}(\gamma_1,p) && \text{lem. 28.58} && (28.214d)\\ &=0. && && (28.214e)\end{aligned}$$

Vu que l'indice de γ est nul, ce chemin est homotope dans $\mathbb{C}^*$ au chemin constant u par la proposition 28.57(3). Soit une homotopie $H\colon[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{C}^*$ entre γ et u. Et nous posons

$$\begin{aligned}S\colon [0,1]\times[a,b]&\to\mathbb{C}^*\\ (s,t)&\mapsto\big(\gamma_1(t)-p\big)H(s,t).\end{aligned} \tag{28.215}$$

Cette application est une homotopie entre

$$t\mapsto S(0,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)H(0,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)\gamma(t)=\gamma_1(t)-p \tag{28.216}$$

et

$$t\mapsto S(1,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)H(1,t)=\big(\gamma_2(t)-p\big)u(t)=\gamma_2(t)-p. \tag{28.217}$$

Donc $S+p$ est une homotopie entre γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}\setminus\{p\}$. □

PROPooCFMFooXjlhfV

Proposition 28.60 ([248]).
Soit un espace topologique X localement connexe par arcs. Soit une application continue $f\colon X\to\mathbb{C}^*$. Il y a équivalence entre

(1) f admet un logarithme continu.

(2) Pour tout lacet γ dans X, nous avons $\mathrm{Ind}(f\circ\gamma,0)=0$.

28.2.10 Théorème de Cauchy et analycité

Cette sous-section veut prouver le théorème de Cauchy.

ThoUHztQe

Théorème 28.61 (Formule de Cauchy)**.**
Soient Ω ouvert dans $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset \Omega$. Alors pour tout $z \in B(z_0, r)$ nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega. \tag{28.218}$$

EqPzUABM

Démonstration. Soit $z \in B(z_0, r)$. Considérons la fonction

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{f(\omega)-f(z)}{\omega-z} & \text{si } \omega \neq z \\ f'(z) & \text{si } \omega = z. \end{cases} \tag{28.219}$$

Cette fonction est holomorphe sur $B(z_0, r) \setminus \{z\}$ et continue en z. Elle vérifie donc la proposition 28.12 et nous avons

$$\int_\gamma g = 0 \tag{28.220}$$

où γ est le cercle de centre z_0 et de rayon r. Nous avons donc

$$0 = \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} - \int_\gamma \frac{f(z)}{\omega - z}, \tag{28.221}$$

et ayant déjà calculé la seconde intégrale dans l'exemple 28.56 nous en déduisons

$$\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = 2\pi i f(z), \tag{28.222}$$

ce qu'il fallait. □

ThomcPOdd

Théorème 28.62.
Soient Ω ouvert dans $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur Ω. Soient encore $z_0 \in \Omega$ et r_0 tels que $B(z_0, r_0) \subset \Omega$. Alors :

ITEMooYWSOooHJtxGr

(1) Sur $B(z_0, r_0)$, la fonction f s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{28.223}$$

(2) Nous avons

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega \tag{28.224}$$

EQooPWNDooMyETjy

où $\gamma = \partial B(z_0, r)$ avec $|z - z_0| < r < r_0$.

ItemMRRTooMChmuZ

(3) En particulier f est infiniment dérivable.

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $|z - z_0| < r < r_0$. La formule de Cauchy (théorème 28.61) nous dit que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \tag{28.225}$$

où $\gamma = \partial B(z_0, r)$. Nous pouvons paramétrer ce chemin par $\omega = z_0 + re^{i\theta}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} rie^{i\theta} d\theta \tag{28.226a}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta}(z - z_0)/r} d\theta. \tag{28.226b}$$

Nous pouvons développer l'intégrante en puissance de $(z - z_0)$ en utilisant la formule 17.511. Ici le rôle de x est tenu par

$$e^{-i\theta}(z - z_0)/r \tag{28.227}$$

dont le module est bien plus petit que 1, par hypothèse sur r. Nous avons donc

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}r^{-n}(z-z_0)^n d\theta. \tag{28.228}$$

L'art est maintenant de permuter la somme et l'intégrale. Pour cela nous remarquons que ce qui se trouve dans la somme est majoré en module par

$$M\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n \tag{28.229}$$

EqbvkTLD

où M est le maximum de $|f|$ sur γ. La borne (28.229) ne dépend pas de θ ; par conséquent la convergence de la somme est uniforme en θ par le critère de Weierstrass (théorème 14.411). Le théorème 17.1 s'applique[32] et nous pouvons permuter la somme avec l'intégrale.

Ce que nous trouvons est que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{28.230}$$

où

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}r^{-n}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}. \tag{28.231}$$

Cette formule est valable pour $|z-z_0|<r$. Sur cette boule, la fonction est donc une série entière. La proposition 17.213 nous permet donc d'affirmer que f est partout infiniment continument dérivable (parce que en chaque point on a un voisinage sur lequel c'est vrai), et d'identifier les coefficients (qui, eux, ne sont valables que localement) sous la forme

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{28.232}$$

□

PROPooRKVVooNmfHkz

Proposition 28.63 (Estimation de Cauchy[3])**.**
Soit une application continue $f\colon\overline{B(z_0,R)}\to\mathbb{C}$ holomorphe sur $B(z_0,R)$. Alors pour tout $0<r<R$ et pour tout $z\in\overline{B(z_0,r)}$ nous avons

ITEMooIEFKooRFFhtK

(1)

$$|f(z)|\leqslant\sup_{|w-z_0|=R}|f(w)|, \tag{28.233}$$

ITEMooFUKTooMiubnY

(2)

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{k!}{(R-r)^k}\sup_{|w-z_0|=R}|f(w)|, \tag{28.234}$$

ITEMooTFMEooUOLYIV

(3)

$$|f^{(k)}(z_0)|=\frac{k!}{R^k}\sup_{|w-z_0|=R}|f(w)|. \tag{28.235}$$

Démonstration. Les formules (1) et (3) étant des cas particuliers de (2), nous prouvons tout de suite (2). Nous partons donc de (28.224) sous la forme

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{k+1}}d\omega. \tag{28.236}$$

En guise de chemin γ, nous prenons

$$\begin{aligned}\gamma\colon[0,2\pi]&\to\mathbb{C}\\ \theta&\mapsto z_0+Re^{i\theta}.\end{aligned} \tag{28.237}$$

Nous avons :

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z_0+Re^{i\theta})|}{|z_0+Re^{i\theta}-z|^{k+1}}Rd\theta \tag{28.238a}$$

$$\leqslant\frac{k!R}{2\pi(R-r)^{k+1}}\int_0^{2\pi}|f(z_0+Re^{i\theta})|d\omega \tag{28.238b}$$

[32] Étant donné que nous savions déjà que la somme était une fonction intégrable, nous sommes loin d'avoir utilisé toute la puissance du théorème.

À partir de là, il fait noter que

$$\frac{R}{(R-r)^{k+1}} \geqslant \frac{1}{(R-r)^k} \tag{28.239}$$

parce que $R \geqslant R-r$. Et en majorant $|f(z_0+Re^{i\theta})|$ par $\sup_{|z_0-w|=R}|f(w)|$ nous trouvons

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k!}{(R-r)^k} \sup_{|z_0-w|=R} |f(w)|, \tag{28.240}$$

comme attendu. □

CORooJISDooFgwOPh

Corolaire 28.64.
Soit une application $f\colon B_{\mathbb{C}}(0,R) \to \mathbb{C}$ ainsi que des (a_n) dans $\mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{28.241}$$

EQooWLEQooOsLGfP

pour tout $z \in B(0,r)$.

Alors $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Démonstration. En posant $z=0$ à droite dans (28.241) nous trouvons tout de suite $f(0)=a_0$. En ce qui concerne a_1, nous passons par la proposition 17.213[33] nous dit que sur $B(0,r)$, l'application f est de classe C^∞ et que

$$df_z(u) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} u. \tag{28.242}$$

Notez que dans le théorème 17.212, il est dit $\alpha_n(x-x_0)^{n-1}$ qui est l'application linéaire qui à $u \in \mathbb{C}$ fait correspondre $\alpha_n(x-x_0,\dots,x-x_0,u)$. Dans notre cas, ce qui joue le rôle de α_n est l'application $(z_1,\dots,z_n) \mapsto a_n z_1,\dots,z_n$.

Ce qui nous dit la relation (14.949), c'est que, si f est différentiable[34], le lien entre dérivée et différentielle est que la différentielle est l'application qui consiste à multiplier par la dérivée. Bref, nous avons

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{28.243}$$

En posant $z=0$ nous trouvons bien $f'(0)=a_1$. □

CorwfHtJu

Corolaire 28.65.
Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω telle que pour toute boule $B(a,r)$ contenue dans Ω, nous ayons

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi. \tag{28.244}$$

Alors f est holomorphe.

Démonstration. Il suffit de recopier la démonstration du théorème 28.62 pour savoir que f se développe en série de puissances et est donc en particulier dérivable. □

Le fait qu'une fonction holomorphe soit C^∞ comme dit dans la proposition 28.62 permet de démonter un résultat de dérivation sous l'intégrale, qui dépend de pouvoir majorer la différentielle.

PROPooZCLYooUaSMWA

Proposition 28.66.
Soit une fonction continue $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous supposons que pour tout t, la fonction $z \mapsto g(t,z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable (définition 14.338) et différentiable. Soit B compact dans $\mathbb{R}$ et la fonction

$$G(z) = \int_B g(t,z)dt. \tag{28.245}$$

que nous supposons exister pour tout z.

Alors

$$G'(z) = \int_B g'(t,z)dt \tag{28.246}$$

où le prime réfère à la $\mathbb{C}$-dérivée par rapport à la variable z à t fixé.

[33] Qui infiniment plus général que ce dont nous avons besoin, mais qui fait quand même bien le boulot.
[34] C'est le cas de notre f, comme nous venons de le dire.

Démonstration. Nous fixons $z \in \mathbb{C}$ et nous considérons la suite de fonctions

$$g_i(t) = \frac{g(t, z+\epsilon_i) - g(t,z)}{\epsilon_i} \tag{28.247}$$

où ϵ_i est une suite de nombres complexes tendant vers zéro ($\epsilon_i \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$). Si la limite existe et ne dépend pas de la suite choisie, alors $\lim_{i\to\infty} g_i(t) = g'(t,z)$. Et vu que g est supposée dérivable, c'est le cas.

Nous avons aussi, par linéarité de l'intégrale :

$$G'(z) = \lim_{i\to\infty} \int_B g_i(t)dt. \tag{28.248}$$

La difficulté est de permuter la limite et l'intégrale. Pour cela nous allons utiliser la convergence dominée de Lebesgue (théorème 16.209). Afin de majorer $|g_i(t)|$ par une fonction intégrable en t (uniformément en i), nous exploitons le théorème des accroissements finis, théorème 12.357. En notant dg la différentielle de g par rapport à z à t fixé, pour chaque t et chaque i nous avons

$$|g(t, z+\epsilon_i) - g(t,z)| \leqslant \sup_{\xi\in[z,z+\epsilon_i]} \|dg_\xi\|\|\epsilon_i\|. \tag{28.249}$$

Vu que z est fixé et que ξ est dans le compact $[z, z+\epsilon_i]$ et que dg est continue (parce que la $\mathbb{C}$-dérivabilité implique la continuité de la différentielle parce que nous avons l'analycité par le théorème 28.62), nous pouvons majorer $\|dg_\xi\|$ par une constante $M_i(z)$ qui dépend à priori de i et de z.

Heureusement, nous pouvons prendre a fortiori le supremum sur $\overline{B(z,|\epsilon_i|)}$ (qui est tout autant compact) et supposer que $|\epsilon_i|$ est strictement décroissante ; de toutes façons, il y a un maximum parce que $|\epsilon_i| \to 0$. Dans ce cas, il suffit de prendre le supremum de $\|dg_\xi\|$ pour $\xi \in \overline{B(z,|\epsilon_1|)}$ et ça contente tout le monde.

Quoi qu'il en soit nous avons une constante $M(z)$ telle que

$$|g(t, z+\epsilon_i) - g(t,z)| \leqslant M(z)\|\epsilon_i\| \tag{28.250}$$

et donc $|g_i(t)| \leqslant M(z)$. La constante (par rapport à t) $M(z)$ est évidemment intégrable sur le compact B et nous pouvons permuter la limite avec l'intégrale :

$$G'(z) = \lim_{i\to\infty} \int_B g_i(t)dt = \int_B \lim_{i\to\infty} g_i(t)dt = \int_B g'(t,z)dt. \tag{28.251}$$

□

PropZOkfmO

Proposition 28.67.
Une fonction continue f est holomorphe si et seulement si la 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte.

Démonstration. Si f est holomorphe, alors nous avons vu que f était différentiable et que $df_z = f(z)dz$ par la formule 14.961.

Dans le sens inverse, supposons que $f(z)dz$ est localement exacte, et soit F telle que $dF = f(z)dz$. Ce que nous allons faire est montrer que la dérivée de F existe et vaut f. En effet, la définition de la différentielle nous dit que

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z) - dF_z(h)}{h} \right| = 0. \tag{28.252}$$

La limite vaut évidemment encore zéro si nous enlevons les modules :

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z) - f(z)h}{h} \tag{28.253a}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z). \tag{28.253b}$$

Donc $F' = f$. Cela montre que F est $\mathbb{C}$-dérivable et donc holomorphe. En conséquence du théorème 28.62, la fonction F est infiniment dérivable et f l'est alors aussi. La fonction f est donc holomorphe[35]. □

[35] Dire que la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe est un raisonnement classique.

28.2.11 Théorème de Brouwer en dimension 2

Pour d'autres versions du théorème de Brouwer, voir la sous-section 22.5.1.

ThoLVViheK

Théorème 28.68 (Brouwer en dimension 2[112])**.**
Soit $\mathcal{B} = \overline{B(0,1)}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$. Alors toute application continue de $\mathcal{B}$ dans elle-même admet un point fixe.

Démonstration. Supposons que la fonction $f \in C^0(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ n'admette pas de points fixes sur $\mathcal{B} = \overline{B(0,1)}$. Pour $x \in \mathcal{B}$ nous notons $g(x)$ l'intersection entre $\partial\mathcal{B}$ et la demi-droite allant de $f(x)$ vers x. C'est bien parce que f n'a pas de points fixes que g est bien définie.

En reprenant le même début de la preuve de la proposition 22.30 nous savons que la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \overline{B(0,1)} &\to \partial B(0,1) \\ x &\mapsto \lambda(x)\big(x - f(x)\big) + f(x) \end{aligned} \tag{28.254}$$

est continue. De plus $g(x) = x$ sur $\partial B(0,1)$. Nous allons montrer qu'une telle fonction[36] ne peut pas exister.

Pour $s \in [0,1]$ nous paramétrons le cercle $\partial B(0,s)$ par

$$\begin{aligned} x_s\colon [0,1] &\to \partial B(0,s) \\ t &\mapsto \big(s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t)\big). \end{aligned} \tag{28.255}$$

Ensuite nous considérons les chemins

$$\begin{aligned} \gamma_s\colon [0,1] &\to \partial B(0,1) \\ t &\mapsto g \circ x_s(t). \end{aligned} \tag{28.256}$$

L'application γ_s est continue et $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$. Les chemins γ_s sont des lacets ; nous nous intéressons maintenant à l'indice au point 0 de γ_0 et γ_1. D'une part $\gamma_0(t) = g(0)$ (lacet constant) et $\gamma_1(t) = e^{2i\pi t}$ (parce que $g(x) = x$ sur le bord). Nous avons donc, en utilisant l'indice de la définition 28.52,

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)}dt = 0, \tag{28.257}$$

alors que

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}}dt = 1. \tag{28.258}$$

Nous considérons l'homotopie

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1]\times[0,1] &\to \overline{B(0,1)} \\ (s,t) &\mapsto \gamma_s(t) = (g\circ x_s)(t). \end{aligned} \tag{28.259}$$

Nous avons $g(0) \neq 0$ parce que g prend ses valeurs sur le bord. Vu que c'est une équivalence d'homotopie[37] entre γ_1 et γ_2, les indices devraient être égaux par le corolaire 28.20. □

28.2.12 Principe des zéros isolés

LEMooYYZQooClmOgG

Lemme 28.69.
Si f est une fonction holomorphe[38] sur le compact K, alors il existe un polynôme P_f et une fonction holomorphe h_f ne s'annulant pas sur K telles que $f = h_f P_f$.

Démonstration. Soit une fonction f vérifiant les conditions. Si f est identiquement nulle, alors il suffit de prendre $P_f = 0$ et c'est fait. Nous supposons donc que f n'est pas identiquement nulle.

(1) **Quantité finie de racines**

D'abord f ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois sur K. Sinon, on pourrait considérer une suite des racines[39] de f dans K. Vu qu'une suite dans un compact contient une sous-suite convergente (théorème 9.213), la fonction f aurait un point d'accumulation de racines. Alors le principe des zéros isolés (théorème 19.164) nous donne un ouvert sur lequel f est nulle et donc le corolaire 19.165 nous dit que f est identiquement nulle.

[36] Qui est nommée *rétraction* de la sphère sur elle-même.
[37] Définition 28.55
[38] Définition 14.341.
[39] Notez l'utilisation de la proposition 1.176 que je vous invite à ne pas considérer comme une trivialité absolue.

(2) **Autour d'une racine**

Bref, la fonction f possède un nombre fini de racines sur K. Soit z_0 l'une d'elles.

Par le théorème 28.62(1), nous avons, sur un voisinage de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{28.260}$$

En particulier, $0 = f(z_0) = a_0$. Donc $a_0 = 0$. Soit k, le plus petit naturel pour lequel $a_k \neq 0$. Nous avons

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \tag{28.261}$$

avec $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n$.. Vu que $a_k \neq 0$ nous avons $g(z_0) \neq 0$. Montrons à présent que g est holomorphe sur un voisinage de z_0. Vu que la série définissant g est une sous-série d'une série convergente sur un voisinage, elle converge sur un voisinage et la proposition 28.13 nous dit que g est $\mathbb{C}$-dérivable. C'est-à-dire holomorphe par définition.

(3) **Autour de toutes les racines**

Soient (z_i) les racines (en nombre fini). Pour chaque i nous avons une boule $B(z_i, r_i)$ sur laquelle $f = P_i g_i$ où P_i est un polynôme de la forme $(z - z_i)^k$ et g_i est holomorphe sur $B(z_i, r_i)$. Nous définissons la fonction suivante :

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{\prod_k P_k(z)} & \text{si } z \neq z_i \\ \dfrac{g_i}{\prod_{k \neq i} P_k(z)} & \text{si } z = z_i. \end{cases} \tag{28.262}$$

Cette fonction ne s'annule jamais. Mais est-elle holomorphe ?

Si $z \neq z_i$ (sous-entendu : pour tout i), alors sur un voisinage, $h = f / \prod P_k$ qui est un quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc holomorphe sur ce voisinage par le lemme 14.350.

Pour les autres notons que pour tout $z \in B(z_i, r_i)$,

$$h = \frac{g_i}{\prod_{k \neq i} P_k}. \tag{28.263}$$

Cela est encore un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas[40].

(4) **La réponse**

Nous avons, pour tout $z \in K$:

$$f(z) = h(z) \prod_k P_k(z). \tag{28.264}$$

□

Afin de détendre l'atmosphère, nous allons laisser tomber l'analyse quelques instants et prouver un résultat d'algèbre.

PROPooVWRPooGQMenV

Proposition 28.70 ([1, 725]).
L'anneau des fonctions holomorphes sur un compact[41] donné de $\mathbb{C}$ est principal[42].

Démonstration. Nous nommons A l'ensemble des fonctions holomorphes sur le compact K, et J un idéal de A.

(1) *A est un anneau*

Le point délicat de la définition 1.100 est le fait que la somme et le produit d'éléments de A sont des éléments de A parce que les résultats type « la somme de deux fonctions holomorphes est holomorphes sont valides sur des ouverts alors que nous sommes ici sur un compact. Soient f et g dans A ; nous nommons Ω_f et Ω_g des ouverts contenant K tels que f est holomorphe sur Ω_f et g sur Ω_g.

L'ensemble $\Omega_f \cap \Omega_g$ est un ouvert (intersection d'ouverts) contenant K et sur lequel f et g sont holomorphes. Donc $f + g$ et fg y sont holomorphes.

[40] Nous avons choisi les r_i de telle sorte que les boules ne s'intersectent pas.
[41] Être holomorphe sur un compact signifie qu'il existe une extension holomorphe à un ouvert contenant le compact.
[42] Définition 3.37

(2) **Engendré par des polynômes**

Pour chaque $f \in J$ nous écrivons $f = P_f h_f$ en vertu de la décomposition donnée par le lemme 28.69. Vu que h_f ne s'annule pas, $1/h_f$ est encore holomorphe sur K et nous déduisons que $P_f = f/h_f$ est dans J. La partie

$$S = \{P_f \text{ tel que } f \in J\} \tag{28.265}$$

est génératrice de J parce que, par construction, tous les éléments de J sont des produits d'éléments de S par des fonctions holomorphes sur K (donc, des éléments de A). Mais tous les éléments de S sont dans J, donc $(S) = J$.

(3) **Un polynôme pour tous les engendrer**

Soit M, l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par S. Attention : J est l'idéal de A engendré par S. Mais l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par S est peut-être autre chose. Vu que $\mathbb{C}$ est un corps, le lemme 3.266 dit que $\mathbb{C}[X]$ est principal. Donc M est un idéal principal de $\mathbb{C}[X]$ et nous avons un polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$M = \mathbb{C}[X]p. \tag{28.266}$$

Si vous avez compris le chausse trappe, vous saurez pourquoi il faut écrire $M = \mathbb{C}[X]p$ et non utiliser l'écriture plus simple « $M = (p)$ ».

(4) $A\mathbb{C}[X] = A$

L'inclusion $A \subset A\mathbb{C}[X]$ est dûe au fait que $1 \in \mathbb{C}[X]$, et l'autre inclusion est le fait que $\mathbb{C}[X] \subset A$ alors que A est un anneau.

(5) **Suite des opérations**

Nous avons :

$$J = AS \subset A\mathbb{C}[X]p. \tag{28.267}$$

Voilà une inclusion de montrée. Reste à faire l'autre.

Vu que $p \in J$ nous avons aussi $Ap \subset J$. Et donc

$$A\mathbb{C}[X]p = Ap \subset J. \tag{28.268}$$

Avec ces deux inclusions, $J = A\mathbb{C}[X]p = Ap$. Donc J est engendré par un seul élément et est principal.

□

28.2.13 Prolongement de fonctions holomorphes

PropDRnYkKP

Proposition 28.71.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ ($a \in \Omega$). Nous supposons qu'il existe $r > 0$ tel que f est bornée sur $B(a, r) \cap \Omega$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

Le théorème de prolongement de Riemann 28.94 donnera plus d'informations.

Démonstration. Nous définissons la fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a. \end{cases} \tag{28.269}$$

Sur $\Omega \setminus \{a\}$, la fonction g est holomorphe (produit de fonctions holomorphes), et elle est continue en a. Par conséquent elle est holomorphe sur Ω. Nous la développons en série entière sur une boule $B(a, r)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{28.270}$$

Nous avons $g(a) = c_0 = 0$. Nous posons

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z-a)^n. \tag{28.271}$$

Si $z \neq a$, alors $\varphi(z) = f(a)$ parce que $\varphi(z) = g(z)/(z-a)$. Mais φ est continue en a, et donc holomorphe en a.

La fonction φ est par conséquent un prolongement holomorphe de f en a. □

28.2.14 Théorème de Runge

Le théorème que nous allons prouver n'est en réalité qu'une partie de ce qui est usuellement appelle le théorème de Runge.

ThoMvMCci

Théorème 28.72 (Théorème de Runge)**.**
Soit K, un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\complement K$ soit connexe. Si $a \in \complement K$ alors la fonction

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{z-a} \tag{28.272}$$

est limite uniforme de polynômes sur K.

Démonstration. Nous considérons $P(K)$, l'adhérence des polynômes sur K pour la norme uniforme (sur K). Nous devons montrer que pour tout $a \in \complement K$, la fonction φ_a est dans $P(K)$. Pour cela nous considérons l'ensemble

$$A = \{a \in \complement K \text{ tel que } \varphi_a \in P(K)\} \tag{28.273}$$

et nous allons montrer qu'il est à la fois non vide, ouvert et fermé dans le connexe $\complement K$.

Je répète : nous allons prouver l'ouverture et la fermeture *pour la topologie de* $\complement K$. Nous n'allons pas prouver que A est un ouvert de $\mathbb{C}$. Ce qui sera par conséquent prouvé est que $A = \complement K$.

(1) **Non vide** Soit $R = \sup_{z\in K} |z|$ et $a \in \complement K$ tel que $|a| > R$. Nous avons

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{z}{a}-1} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{a^{k+1}}. \tag{28.274}$$

Ici la convergence de la série et sa limite sont assurées par le fait que $|z/a| < 1$ par choix de R et a. La suite de polynômes

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{a^{k+1}} \tag{28.275}$$

converge uniformément sur $B(0,R)$ et en particulier sur K. Donc $P_n \to \varphi_a$.

(2) **Fermé**

Nous allons montrer que la fermeture de A (dans $\complement K$) est incluse dans A, et donc qu'elle est égale à A et donc que A est fermé. Par le lemme 9.37, la fermeture de A dans $\complement K$ est l'ensemble $\bar{A} \cap \complement K$ où $\bar{A}$ est la fermeture de A au sens usuel.

Bref, soit $a \in \bar{A} \cap \complement K$, et montrons que $\varphi_a \in \overline{P(K)}$. Vu que $P(K)$ est déjà une fermeture, nous aurons en fait $\varphi_a \in P(K)$ et donc $a \in A$, ce qui signifierait que $\bar{A} \cap \complement A = A$ et donc que A est fermé.

Au travail.

Soit $(a_n) \in A$ une suite convergente vers a. Soit aussi $d = d(a,K)$; on a $d > 0$ parce que K est compact et a est hors de K alors le complémentaire de K est ouvert. Nous choisissons en plus la suite a_n pour avoir $|a_n - a| < \frac{d}{2}$; au pire on prend la queue de suite. Soit $z \in K$; nous avons

$$|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| = \left|\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{(z-a_n)(z-a)}\right|. \tag{28.276}$$

EqYHWQhJ

Vu que $a_n \in B(a, \frac{d}{2})$ et que $z \in K$ et $d = d(a,K)$ nous avons $|a_n - z| \geqslant \frac{d}{2}$; et aussi $|a - z| \geqslant \frac{d}{2}$. Nous pouvons donc majorer (28.276) par

$$|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| \leqslant 2\frac{|a_n - a|}{d^2}. \tag{28.277}$$

Donc nous avons

$$\|\varphi_a - \varphi_{a_n}\|_K \leqslant 2\frac{|a_n - a|}{d^2} \to 0 \tag{28.278}$$

où la norme $\|.\|_K$ est la norme supremum sur K. Donc $a \in \overline{P(K)} = P(K)$ et A est fermé.

(3) **Ouvert** Vu que K est compact, il est fermé et donc $\complement K$ est ouvert. Par conséquent, ainsi que précisé dans l'exemple 9.44, les ouverts de $\complement K$ sont les ouverts de $\mathbb{C}$ contenus dans $\complement K$. Afin de prouver que A est ouvert, nous prenons $a \in A$ et nous cherchons une boule (au sens de $\mathbb{C}$) autour de a qui serait incluse dans A.

Soit donc $h \in \mathbb{C}$ « petit » dans un sens que nous allons préciser plus tard. Encore une fois nous posons $d = d(a, K)$. Nous avons

$$\varphi_{a+h}(z) = \frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{h}{z-a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(z-a)^{k+1}}. \tag{28.279}$$

Déjà ici nous demandons $h < \sup_{z\in K} |z-a|$. Puisque $|z-a| > d$, nous avons alors

$$|\varphi_{a+h}(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{d^{k+1}} < \infty. \tag{28.280}$$

Cela pour dire que la somme à droite de (28.279) converge bien pourvu que h soit bien petit. Nous pouvons donc poursuivre :

$$\varphi_{a+h}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \varphi_a(z)^{k+1}. \tag{28.281}$$

Nous montrons maintenant que la convergence de la somme (28.281) est en réalité uniforme en z. En effet

$$\Big|\varphi_{a+h}(z) - \sum_{k=0}^{N} h^k \varphi_a(z)^{k+1}\Big| = \Big|\sum_{k=N+1}^{\infty} h^k \varphi_a(z)^{k+1}\Big| \tag{28.282a}$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |h|^k |\varphi_a(z)|^{k+1}. \tag{28.282b}$$

Étant donné que φ_a est continue sur le compact K, elle y est majorée en module ; on peut même être plus précis :

$$|\varphi_a(z)| = \frac{1}{|z-a|} \leqslant \frac{1}{d}. \tag{28.283}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\Big|\varphi_{a+h}(z) - \sum_{k=0}^{N} h^k \varphi_a(z)^{k+1}\Big| \leqslant \frac{1}{d} \sum_{k=N+1}^{\infty} \Big|\frac{h}{d}\Big|^k. \tag{28.284}$$

Étant donné que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} |h/d|^k$ converge, la limite $N \to \infty$ est nulle et nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \|\varphi_{a+h} - \sum_{k=0}^{N} h^k \varphi_a^{k+1}\|_K = 0. \tag{28.285}$$

Pour avoir $\varphi_{a+h} \in P(K)$, il faut encore savoir si les fonctions φ_a^k sont dans $P(K)$ pour tout k. Dans ce cas pour chaque N la somme sera encore dans $P(K)$ et φ_{a+h} sera limite uniforme d'éléments de $P(K)$.

Par hypothèse, $\varphi_a \in P(K)$; soit P_n une suite de polynômes qui converge uniformément vers φ_a. Nous allons montrer qu'alors la suite de polynômes P_n^k converge uniformément vers φ_a^k. Soit n tel que $\|P_n - \varphi_a\|_K \leqslant \epsilon$ et utilisons le produit remarquable

$$a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i} \tag{28.286}$$

pour obtenir

$$|P_n(z)^k - \varphi_a(z)^k| \leqslant |P_n(z) - \varphi_a(z)| \sum_{i=0}^{k-1} |P_n(z)^i \varphi_a(z)^{k-1-i}|. \tag{28.287}$$

Vu que P_n et φ_a sont continues sur le compact K, on peut majorer la somme par une constante M, et il restera

$$|P_n(z)^k - \varphi_a(z)^k| \leqslant M|P_n(z) - \varphi_a(z)|, \tag{28.288}$$

ou encore

$$\|P_n^k - \varphi_a^k\| \leqslant M\epsilon. \tag{28.289}$$

Cela prouve que $\varphi_a^k \in P(K)$ et donc que φ_{a+h} est limite uniforme (sur K) d'éléments de $P(K)$ et donc fait partie de $P(K)$ lui aussi.

Ceci achève de prouver que A est ouvert dans $\complement K$.

(4) **Conclusion**

L'ensemble A est non vide, ouvert et fermé dans $\complement K$, donc il est égal à $\complement K$. Le théorème est ainsi démontré.

□

28.3 Intégrales de fonctions holomorphes

Nous commençons par le lemme technique.

LemNAnweA

Lemme 28.73 ([621]).
Soit f une fonction holomorphe sur $B(z_0, r_0)$. Pour tout $z \in B(z_0, r)$ (avec $r < r_0$) nous avons

$$|f'(z)| \leqslant \frac{r}{\big(r - |z - z_0|\big)^2} \max\big\{f(z_0 + re^{i\theta})\big\}_{\theta\in\mathbb{R}}. \tag{28.290}$$

Démonstration. Par translation nous pouvons supposer que $z_0 = 0$. Étant donné que f est holomorphe, elle admet un développement en séries entières

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{28.291}$$

et nous notons $M = \max\{f(z) \text{ tel que } z \in \overline{B(0,r)}\}$. Nous avons $r^n|a_n| \leqslant M$. Par conséquent

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| && \text{(28.292a)}\\ &\leqslant \frac{1}{r}\sum r^n |a_n| n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} && \text{(28.292b)}\\ &< \frac{M}{r}\sum n\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}. && \text{(28.292c)} \end{aligned}$$

À ce point nous devons utiliser la série de l'exemple 17.164. Nous avons alors

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{r}\frac{1}{\left(1 - \frac{|z|}{r}\right)^2} = \frac{Mr}{(r - |z|)^2}. \tag{28.293}$$

□

28.3.1 Holomorphie sous l'intégrale

28.74.
Notez une grande différence entre les théorèmes 28.75 et 19.42 : la condition (19.161) demande de contrôler l'intégrabilité de la dérivée de f, alors que la condition (28.295) demande de contrôler l'intégrabilité de f elle-même. Oh oui, on voudrait faire de l'analyse, mais ces fonctions holomorphes … tellement déloyal !!

ThopCLOVN

Théorème 28.75 (Holomorphie sous l'intégrale[621]).
Soit un espace mesuré (Ω, μ), un ouvert A dans $\mathbb{C}$ et une fonction $f\colon A \times \Omega \to \mathbb{C}$. Nous voulons étudier la fonction

$$F(z) = \int_\Omega f(z, \omega) d\mu(\omega) \tag{28.294}$$

pour tout $z \in A$. Nous supposons que

ITEMooMWCTooJgLVKa

(1) *la fonction $f(., \omega)$ est holomorphe sur A pour chaque ω.*

ITEMooAJHBooCFqhfq

(2) *La fonction $f(z, .)$ est mesurable sur (Ω, μ).*

ITEMooPNFYooXRzWby

(3) *Pour tout compact $K \subset A$, il existe une fonction $g_K\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $|f(z, \omega)| \leqslant g_K(\omega)$ et telle que*

$$\int_\Omega g_K(\omega) d\mu(\omega) \tag{28.295}$$

EQooYILMooAJBQof

existe.

Alors la fonction F est holomorphe et

$$F'(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(z,\omega)d\mu(\omega). \tag{28.296}$$

Démonstration. Soient $z_0 \in A$ et $r > 0$ tels que $K = \overline{B(z_0,r)} \subset A$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f_\omega \colon \overline{B(z_0,r)} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z,\omega). \end{aligned} \tag{28.297}$$

Étant donné que $\overline{B(z_0,r)}$ est compacte, la fonction $|f_\omega|$ est majorée par un nombre que nous notons $f_K(\omega)$ qui est indépendant de z (pour autant que $z \in K$). Nous désignons par $S(z_0,r)$ la frontière de la boule $B(z_0,r)$. Étant donné que la majoration est valable sur $\overline{B(z_0,r)}$, nous avons en particulier

$$|f_\omega(z)| \leqslant f_K(\omega) \tag{28.298}$$

pour tout $z \in S$. En utilisant la lemme 28.73 nous avons

$$|f'_\omega(z)| \leqslant \frac{r}{(r-|z-z_0|)^2} \max\{f(z_0+re^{i\theta})\}_{\theta\in\mathbb{R}} \tag{28.299a}$$

$$\leqslant \frac{rf_K(\omega)}{(r-|z-z_0|)^2}. \tag{28.299b}$$

Cette majoration est valable pour tout $z \in B(z_0,r)$. Si nous supposons de plus que $z \in B(z_0,r/2)$ nous avons

$$|f'(z)| \leqslant \frac{rf_K(\omega)}{\left(r-\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4}{r}f_K(\omega). \tag{28.300}$$

Étant donné que la boule $B(z_0,r/2)$ est convexe, la fonction f_ω est lipschitzienne et pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < r/2$ nous avons

$$\left|\frac{f_\omega(z_0+h)-f_\omega(z_0)}{h}\right| \leqslant \frac{4f_K(\omega)}{r}. \tag{28.301}$$

Soit maintenant une suite (h_n) qui converge vers 0 dans $\mathbb{C}$. Nous considérons la suite de fonctions correspondantes

$$g_n(\omega) = \frac{f(z_0+h_n,\omega)-f(z_0,\omega)}{h_n}. \tag{28.302}$$

Cette suite de fonctions vérifie la convergence ponctuelle

$$g_n(\omega) \to \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,\omega). \tag{28.303}$$

De plus g_n est une fonction (de ω) dominée par $\frac{4f_K}{r}$ qui est intégrable. Par conséquent le théorème de la convergence dominée[43] nous indique que

$$\int_\Omega g_n(\omega)d\mu(\omega) \to \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,\omega)d\mu(\omega), \tag{28.304}$$

tandis que

$$F'(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{F(z_0+h_n)-F(z_0)}{h_n} = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n(\omega)d\mu(\omega). \tag{28.305}$$

□

PROPooSQXZooBzIrji

Proposition 28.76.
Soit une application holomorphe $g\colon B_{\mathbb{C}}(t_0,t)\times B_{\mathbb{C}^n}(\lambda_0,r)\to\mathbb{C}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} h\colon B(t_0,r)\times B(\lambda_0,r) &\to \mathbb{C} \\ (t,\lambda) &\mapsto \int_{t_0}^{t} g(s,\lambda)ds \end{aligned} \tag{28.306}$$

EQooWETSooSAtcgJ

est holomorphe.

Note : dans (28.306), l'intégrale est l'intégrale sur le chemin du segment de droite liant t_0 à t dans $\mathbb{C}$.

[43] Lebesgue, théorème 16.209.

28.77.
Dans le corolaire suivant, l'intégrale sur $\partial B(z,r)$ est une intégrale sur un chemin.

CorNxTjEj

Corolaire 28.78.
Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant la fermeture de la boule $B(z_0,r)$, alors pour tout z dans $B(z_0,\rho)$ ($\rho<r$) les dérivées de f s'expriment par la formule suivante :

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi. \tag{28.307}$$

EQooBPIQooNhQTtR

Démonstration. Nous faisons par récurrence.

(1) **Pour la dérivée première** Soit $\rho<r$. Nous utilisons le théorème 28.61 pour écrire

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi. \tag{28.308}$$

Ensuite nous dérivons sous l'intégrale en appliquant le théorème 28.75 à la fonction

$$\begin{aligned} g\colon B(z_0,\rho)\times\partial B(z_0,r)&\to\mathbb{C}\\ (z,\xi)&\mapsto\frac{f(\xi)}{\xi-z}. \end{aligned} \tag{28.309}$$

Étant donné que f est holomorphe, la fonction g est continue et donc bornée sur tout compact $K\subset A$ par une constante M (qui dépend du compact choisi). D'autre part, nous avons toujours $|\xi-z|>r-\rho$ et donc

$$|g(z,\xi)|\leqslant\frac{M}{r-\rho}. \tag{28.310}$$

La fonction constante $g_K=\frac{M}{r-\rho}$ est évidemment intégrable. Le théorème conclut que f est holomorphe (cela, nous le savions déjà[44]), et

$$f'(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi. \tag{28.311}$$

(2) **Les dérivées suivantes** Pour la récurrence[726] nous supposons que

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2i\pi}\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi, \tag{28.312}$$

et nous tentons de calculer $f^{(k+1)}(z)$. Pour cela nous paramétrons l'intégrale de façon très usuelle :

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it}-z)}ire^{it}dt. \tag{28.313}$$

Nous permettons de permuter la $\mathbb{C}$-dérivation (par rapport à z) et l'intégrale en vertu de la proposition 28.66 appliquée à la fonction

$$g(t,z)=\frac{f(re^{it})}{(re^{it}-z)^{k+1}}ire^{it}. \tag{28.314}$$

Cela donne

$$f^{(k+1)}(z)=\frac{k!}{2i\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{it})ire^{it}\frac{k+1}{(re^{it}-z)^{k+1}}dt=\frac{(k+1)!}{2i\pi}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+2}}d\xi. \tag{28.315}$$

□

THOooSULFooHTLRPE

Théorème 28.79.
Si f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(z_0,R)$ alors

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{28.316}$$

et cette série converge uniformément sur tout compact.

[44] Et cela fournit une preuve alternative à la réciproque du théorème de Cauchy : une fonction continue qui vérifie la formule de Cauchy est holomorphe.

Démonstration. Sans perte de généralité nous supposons que $z_0 = 0$. La formule de Cauchy (théorème 28.61) fournit, pour $z \in B(0,R)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{1-(z/\xi)}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{28.317}$$

En particulier notons que $z \in B(0,R)$ alors que ξ est sur le bord de cette boule ouverte. Donc $|\xi| > |z|$ pour tous les ξ et z qui interviennent. Nous utilisons la série géométrique

$$\frac{1}{1-(z/\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi}\right)^n. \tag{28.318}$$

(1) **Permuter une intégrale et une somme** En utilisant la mesure de comptage[45] sur $\mathbb{N}$ (qui est σ-finie), nous pouvons écrire

$$\int_{\partial B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi = \int_{\partial B}\left(\int_{\mathbb{N}} g(\xi,n)dm(n)\right)d\xi \tag{28.319}$$

où

$$\begin{aligned} g\colon \partial B \times \mathbb{N} &\to \mathbb{C} \\ (\xi,n) &\mapsto \frac{z^n f(\xi)}{\xi^{n+1}}. \end{aligned} \tag{28.320}$$

Nous allons permuter les intégrales en utilisant le théorème de Fubini, selon la procédure décrite en 16.308. Nous commençons par l'intégrale sur $\mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{N}}|g(n,\xi)| = |\frac{f(\xi)}{\xi}|\sum_{n\in\mathbb{N}}|\frac{z}{\xi}|^n = \frac{1}{R}|f(\xi)|\frac{1}{1-|z|/R}. \tag{28.321}$$

Ici nous avons utilisé $|\xi| = R$. Notons que z est fixé depuis longtemps à l'intérieur de la boule de rayon R de telle sorte que $|z/\xi|$ est une constante strictement inférieure à 1.

L'intégrale sur $\xi \in \partial B$ n'a pas à être effectuée explicitement : nous nous contentons de prouver qu'elle est finie. La fonction f est continue sur le compact ∂B. Cela parce que B est une boule fermée dans l'ouvert Ω sur lequel f est continue. Au final l'expression à droite de (28.321) est bornée sur le compact ∂B et son intégrale donne un nombre fini.

Tout ceci pour invoquer le corolaire 16.306 qui nous indique que $g \in L^1(\mathbb{N}\times\partial B)$.

Une fois g intégrable sur l'espace produit $\mathbb{N}\times\partial B$, nous pouvons utiliser Fubini 16.307 pour permuter les intégrales.

Une fois la somme et l'intégrale permutées, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\partial B}\frac{z^n f(\xi)}{\xi^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\right)z^n. \tag{28.322}$$

Nous devons maintenant montrer que ce qui se trouve dans la grande parenthèse vaut $f^{(n)}(0)/n!$. Cela est immédiat en comparant avec la formule (28.307).

□

Proposition 28.80 (Morera [727]).
Soit Ω ouvert dans $\mathbb{C}$ et f continue. Si

$$\int_{\partial T} f = 0 \tag{28.323}$$

pour tout triangle (plein) T contenu dans Ω, alors f est holomorphe sur Ω.

Démonstration. Il est suffisant de prouver que f est holomorphe sur toute boule ouverte $B(a,r)$ incluse dans Ω. Nous posons, pour tout $z \in B(a,r)$,

$$F(z) = \int_{[a,z]} f, \tag{28.324}$$

[45] Définition 16.266.

et nous considérons le chemin triangulaire $a \to z \to z+h \to a$ où $h \in \mathbb{C}$ est choisi assez petit pour que $z+h \in B(a,r)$. L'intégrale sur le triangle étant nulle, nous avons

$$0 = \int_{a\to z} f + \int_{z\to z+h} f + \int_{z+h\to a} f, \tag{28.325}$$

c'est-à-dire

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z\to z+h} f. \tag{28.326}$$

En paramétrant le chemin par $z+th$ avec $t \in [0,1]$, et en tenant compte de la remarque 22.44,

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} \tag{28.327a}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h dt, \tag{28.327b}$$

ce qui prouve que F est dérivable et $F' = f$. Par définition (14.339), F est holomorphe, et donc C^∞ par le théorème 28.62. Du coup f est également C^∞ et donc en particulier holomorphe. □

28.3.2 Mesure de Radon

Soit un compact K de $\mathbb{C}$. Le lemme 14.399 nous dit que $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ est complet. Mais cela n'est pas vraiment utile pour l'instant. Je dis ça juste pour le garder dans un coin de la tête.

DEFooTLRKooGbKkAj

Définition 28.81.
*Une **mesure de Radon** sur un compact K de $\mathbb{C}$ est une forme linéaire continue sur $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$. Si μ est une mesure de Radon, on définit la **transformée de Cauchy** de μ par*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}\colon \mathbb{C}\setminus K &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto -\frac{1}{\pi}\mu(f_z) \end{aligned} \tag{28.328}$$

où, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus K$ nous avons défini la fonction f_z par

$$\begin{aligned} f_z\colon K &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \frac{1}{\xi - z}. \end{aligned} \tag{28.329}$$

EQooNHTLooWkIofe

28.82.
Les fonctions f_z sont définies pour $z \in \mathbb{C}\setminus K$, et elles sont définies sur K. Donc il n'y a pas de danger que $\xi = z$ dans le dénominateur de (28.329). De plus si f_z est définie (c'est-à-dire si $z \in \mathbb{C}\setminus K$), alors f_{z+h} est également définie tant que $h \in \mathbb{C}$ n'est pas trop grand parce que $\mathbb{C}\setminus K$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

ThoJVNTzn

Théorème 28.83.
Si μ est une mesure de Radon[46] sur K alors $\hat{\mu}$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable[47] sur $\Omega = \mathbb{C}\setminus K$ et nous avons

$$\hat{\mu}^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi}\mu\left(\frac{1}{(\xi - z)^{n+1}}\right). \tag{28.330}$$

Démonstration. Calculons la dérivée complexe de $\hat{\mu}$. Si la limite existe, nous avons

$$\hat{\mu}'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{\hat{\mu}(z+h)-\hat{\mu}(z)}{h}. \tag{28.331}$$

Nous allons nous concentrer sur ce qui est dans la limite pour montrer qu'elle existe, et pour calculer la valeur. Nous avons

$$\frac{\hat{\mu}(z+h)-\hat{\mu}(z)}{h} = -\frac{1}{\pi}\frac{\mu(f_{z+h})-\mu(f_z)}{h} \tag{28.332a}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\mu\left(\frac{f_{z+h}-f_z}{h}\right) \qquad \mu \text{ est linéaire} \tag{28.332b}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\mu\left(\frac{1}{(\xi - z - h)(\xi - z)}\right) \tag{28.332c}$$

[46] Définition 28.81.
[47] Définition 14.338.

où la dernière ligne est un abus de notations pour dire que μ est appliquée à la fonction $\xi \mapsto 1/(\xi-z-h)(\xi-z)$.

Histoire d'éviter de regretables abus de notations, nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned}\phi_{z,h}\colon K &\to \mathbb{C}\\ \xi &\mapsto \frac{1}{(\xi-z-h)(\xi-z)},\end{aligned} \tag{28.333}$$

ainsi que la famille

$$\begin{aligned}f_{z,n}\colon K &\to \mathbb{C}\\ \xi &\mapsto \frac{1}{(\xi-z)^n}.\end{aligned} \tag{28.334}$$

Ce que nous avons montré est que

$$\frac{\hat{\mu}(z+h)-\hat{\mu}(z)}{h} = -\frac{1}{\pi}\mu(\phi_{z,h}). \tag{28.335}$$

De plus nous avons la convergence

$$\phi_{z,h} \xrightarrow{\left(C(K),\|.\|_\infty\right)} f_{z,2} \tag{28.336}$$

lorsque $h \to 0$. Vu que μ est continue, nous pouvons permuter la limite avec μ et avoir :

$$\hat{\mu}'(z) = \lim_{h\to 0}\mu(\phi_{z,h}) = -\frac{1}{\pi}\mu(f_{z,2}). \tag{28.337}$$

Cela prouve le résultat pour $n=1$.

Pour le reste, vous faites une récurrence[48]. □

Cette théorie permet de fournir une démonstration plus technologique du corolaire 28.78.

Lemme 28.84.
Si f est holomorphe sur Ω et si B est une boule fermée dans Ω alors pour tout $z \in \mathrm{Int}(B)$ nous avons

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi. \tag{28.338}$$

Démonstration. Appliquer le théorème 28.83 à la mesure de Radon

$$\mu(\phi) = \int_{\partial B}\phi(\xi)d\xi. \tag{28.339}$$

□

Tout ce petit monde à propos de la mesure de Radon permet également de redémontrer que

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\right) = f^{(n)}(0)/n!, \tag{28.340}$$

comme nous l'avons déjà fait autour de l'équation (28.322). Nous utilisons le théorème de Radon 28.83 à la mesure

$$\mu(\phi) = \int_{\partial B}\phi(\xi)d\xi. \tag{28.341}$$

La transformée de Cauchy est

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi}\mu\left(\frac{1}{\xi-z}\right) = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial B}\frac{1}{\xi-z}d\xi, \tag{28.342}$$

et le théorème assure que

$$\hat{\mu}^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi}\mu\left(\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}\right) = -\frac{n!}{\pi}\int_{\partial B}\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi. \tag{28.343}$$

En comparant la formule (28.342) avec la formule de Cauchy nous voyons que $\hat{\mu}(z) = -2if(z)$. Par conséquent

$$f^{(n)}(z) = -\frac{1}{2i}\hat{\mu}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi, \tag{28.344}$$

et

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{1}{\xi^{n+1}}d\xi. \tag{28.345}$$

[48] Je n'ai pas vérifié. Faites-le et écrivez-moi pour me dire si c'est bon.

28.4 Conditions équivalentes à l'holomorphie

Nous nous proposons de lister les conditions que nous avons vues être équivalentes à l'holomorphie.

THOooOGOCooUalFaG

Théorème 28.85.
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Les conditions suivantes sont équivalentes.

ItemOtPcTb
(1) *f est holomorphe.*

ItemHWRnxx
(2) *Pour tout triangle (plein) T contenu dans Ω, $\int_T f = 0$.*

ItempBBPVv
(3) *f est $\mathbb{C}$-dérivable.*

ItemmLhzbB
(4) *f est C^∞*

ItemCCrSrLj
(5) *$\partial_{\bar{z}} f = 0$; ce sont les équations de Cauchy-Riemann.*

ItemEvxRSn
(6) *La 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte.*

ItemVSCHtY
(7) *Pour toute boule $B(a,r)$ contenue dans Ω nous avons*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{28.346}$$

La fonction f est holomorphe en z_0 si et seulement si il existe un voisinage $B(z_0, r)$ de z_0 et des nombres a_k tels que sur la boule,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{28.347}$$

Dans ce cas, f est holomorphe sur toute la boule.

Démonstration. (1) implique (2) est le lemme de Goursat 28.11. (2) implique (1) est le théorème de Morera 28.80.

(3) est la définition de l'holomorphie, définition 14.339.

(4) implique (1) est un a fortiori sur la définition. (1) implique (4) est contenu dans le théorème de développement en série entière 28.62.

L'équivalence entre (5) et l'holomorphie est le théorème 28.2.

L'équivalence entre (6) et (1) est la proposition 28.67.

L'équivalence entre (1) et (7) est d'une part le théorème 28.62 et d'autre part le corolaire 28.65.

En ce qui concerne la dernière affirmation, si f est holomorphe en z_0, alors le théorème 28.62(1) donne la série. Si au contraire nous avons la série, la proposition 28.13 nous donne le résultat grâce au point (3). □

28.5 Limites, séries et dérivée

PROPooKHBHooAIsbCG

Proposition 28.86 ([728]).
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Soit une suite (f_n) de fonctions holomorphes sur Ω. Nous supposons que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction f.

Alors

(1) *f est holomorphe.*

(2) *Pour tout $k \geqslant 1$ nous avons $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformément sur tout compact.*

PROPooMIDPooUgSXRp

Proposition 28.87 ([1]).
Soit une suite $(f_n\colon \Omega \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformément[49]*, la fonction*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{28.348}$$

est holomorphe sur Ω.

De plus

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z). \tag{28.349}$$

[49] Convergence uniforme, définition 12.132.

28.6 Singularités, pôles et méromorphe

DEFooKWDUooVPvtpy

Définition 28.88.
*Si f est holomorphe[50] sur un ouvert Ω, alors une **singularité** de f est un point isolé du bord de Ω.*

*(1) La singularité est **effaçable** si la fonction f s'y prolonge en une fonction holomorphe.*

*(2) La singularité a est **isolée** si f est holomorphe sur $B(a,r)\setminus\{a\}$.*

DEFooUIJTooUJPiDG

Définition 28.89 (pôle d'une fonction[1, 729])**.**
*Soient un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ ainsi que $a\in\Omega$. La fonction $f\colon \Omega\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$ a un **pôle d'ordre** n en a si il existe $r>0$ et une fonction holomorphe $g\colon B(a,r)\to\mathbb{C}$ telle que*

(1) $g(a)\neq 0$

(2) pour tout $z\in B(a,r)\setminus\{a\}$ nous avons

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^n}. \tag{28.350}$$

Lemme 28.90.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous notons U_n l'ensemble des racines n^e de l'unité[51] dans $\mathbb{C}$. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}\setminus \mathrm{U}_n &\to \mathbb{C}\\ z&\mapsto \frac{1}{z^n-1} \end{aligned} \tag{28.351}$$

est holomorphe et possède un pôle d'ordre 1 en chaque point de U_n.

Démonstration. Le fait que f soit holomorphe est simplement le fait que sur le domaine, le dénominateur est un bête polynôme qui ne s'annule pas.

Nous énumérons $\mathrm{U}_n=\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$. Prouvons que ξ_k est un pôle d'ordre 1 de f. La première égalité du lemme 21.20 donne $z^n-1=\prod_i(z-\xi_i)$. D'abord nous considérons $r>0$ tel que $B(\xi_k,r)\cap\mathrm{U}_n=\{\xi_k\}$.

Nous posons

$$\begin{aligned} g_k\colon B(\xi_k,r)\setminus\{\xi_k\}&\to\mathbb{C}\\ z&\mapsto\frac{1}{\prod_{i\neq k}(z-\xi_i)}. \end{aligned} \tag{28.352}$$

Cela est bien une fonction holomorphe et nous avons

$$f(z)=\frac{g_k(z)}{(z-\xi_k)}. \tag{28.353}$$

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 28.91
Je ne suis pas certain que la proposition suivante soit vraie. Écrivez-moi si vous avez un avis.

PROPooKXXSooGzbmeo

Proposition 28.92.
La fonction

$$z\mapsto\begin{cases}\frac{\sin(z)}{z} & si\ z\neq 0\\ 1 & si\ z=0\end{cases} \tag{28.354}$$

est continue sur un voisinage de zéro dans $\mathbb{C}$.

PROPooQJDCooYwmkRS

Proposition 28.93.
Une singularité de f est un pôle si et seulement si

$$\lim_{z\to Z} f(z)=\infty. \tag{28.355}$$

Le théorème suivant complète la proposition 28.71.

[50] Définition 14.339.
[51] Voir la définition 21.1 et le lemme 21.2.

ThoTLQOEwW

Théorème 28.94 (Prolongement de Riemann[730]).
Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un point $a \in \Omega$ et une fonction holomorphe $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$. Nous supposons que a est une singularité[52] *de f. Les points suivants sont équivalents.*

ITEMooMLXJooMfuifN

(1) la singularité a est effaçable[53] *;*

ITEMooBWPEooEltHAa

(2) f possède un prolongement continu en a ;

ITEMooEAUOooIWcxHS

(3) il existe un voisinage épointé de a sur lequel f est bornée ;

ITEMooETRWooDTTpxs

(4) $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(1) implique (2)** La fonction f admet même un prolongement holomorphe.

(2) **(2) implique (3)** Soit un prolongement continu $\tilde{f} : B(a,r) \to \mathbb{C}$ de f. La restriction $\tilde{f} : \overline{B(a,r/2)} \to \mathbb{C}$ est continue sur un compact et donc bornée[54] tout en étant égale à f sur $B(a,r/2) \setminus \{a\}$.

(3) **(3) implique (4)** Nous supposons que $f : B(a,r) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ est bornée. Disons $|f(z)| < A$. Alors pour tout $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$ nous avons

$$|(z-a)f(z)| \leqslant A|z-a| \tag{28.356}$$

Or $\lim_{z\to a} A(z-a)$ existe et vaut zéro. Donc $\lim_{z\to a} |(z-a)f(z)|$ existe et vaut également zéro.

(4) **(4) implique (1) si $a = 0$**

Nous commençons par supposer que $a = 0$, et nous posons $D = B(0,r) \setminus \{0\}$. La fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe et vérifie $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$.

Nous considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} g : B(0,r) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ z^2 f(z) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{28.357}$$

La fonction g est holomorphe sur D parce que f l'est. Voyons que g est dérivable en zéro. Pour tout z sur un voisinage,

$$\frac{g(z)-g(0)}{z} = \frac{z^2 f(z)}{z} = zf(z). \tag{28.358}$$

Or par hypothèse $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ donc $g'(0) = 0$, et g est holomorphe en 0 (c'est la définition 14.339 d'une fonction holomorphe). Bref, g est holomorphe sur $B(0,r)$.

Nous pouvons donc développer g en série entière[55] dans un voisinage $B(0,r)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{28.359}$$

En utilisant le 28.64, $a_0 = g(0) = 0$ et $a_1 = g'(0) = 0$. Donc en réalité

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \tag{28.360}$$

Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{28.361}$$

[52] Singularité et singularité effaçable : définition 28.88.
[53] Définition 28.88.
[54] Théorème 9.215.
[55] Théorème 28.62.

avec $b_n = a_{n+2}$. Le lemme 17.17 dit que son rayon de convergence est le même que celui de g. Donc la fonction

$$\begin{aligned} h\colon B(0,r) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2} \end{aligned} \tag{28.362}$$

est holomorphe.

Par ailleurs, sur la partie D (qui ne contient pas $z=0$) nous pouvons écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} \tag{28.363}$$

et donc

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}. \tag{28.364}$$

Autrement dit $f = h$ sur D, et h en est un prolongement holomorphe.

(5) **(3) implique (4)**

Nous posons $g(z) = f(z+a)$. Nous avons

$$\lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0} zf(z+a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0. \tag{28.365}$$

Le changement de variable dans la limite est le lemme 9.251. Donc le premier cas s'applique à g et nous avons un prolongement holomorphe $\tilde{g}\colon B(0,r) \to \mathbb{C}$ de g. La fonction donnée par $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z-a)$ prolonge f.

□

DEFooRMLGooGzRfgn

Définition 28.95 (Fonction méromorphe[731])**.**
*Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\{p_i\}$ une suite de points dans $\mathcal{U}$ sans points d'accumulation (éventuellement il y a un nombre fini de p_i). Si la fonction f est holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus\{p_i\}$ et si chaque p_i est un point régulier ou un pôle de f, alors nous disons que f est **méromorphe** sur $\mathcal{U}$.*

LEMooCSAFooTYasYM

Lemme 28.96.
Soient $0 < a < b < \infty$. Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{n}{t}y(t) & \text{(28.366a)} \\ y(a) = y_a & \text{(28.366b)} \end{cases}$$

pour la fonction $y\colon]a,b[\to \mathbb{R}$.

L'unique solution est

$$y(t) = \frac{y_a}{a^n}t^n. \tag{28.367}$$

EQooKPYIooMHPIBP

Note : $a \neq 0$ de toutes façons, donc pas de problèmes.

Démonstration. En termes du théorème de Cauchy-Lipschitz 19.65, nous avons $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ avec

$$\begin{aligned} f\colon]a,b[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t,y) &\mapsto \frac{n}{t}y. \end{aligned} \tag{28.368}$$

Cette fonction f est lipschitzienne et tout ce qu'on veut parce que $t=0$ est hors de son domaine ; la régularité de f peut être étudiée sur le compact $[a/2, b]$.

Un calcul direct vérifie que la solution proposée (28.367) est bien une solution. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit qu'elle est unique. □

28.97.
Vous voulez savoir comment on trouve la solution $y(t) = Kt^n$? Allez, on vous la fait un peu détendue, sans trop regarder les détails. D'abord,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{n}{t}. \tag{28.369}$$

Nous intégrons des deux côtés :

$$\int_a^x \frac{y'(t)}{y(t)}dt = n[\ln(t)]_a^x. \tag{28.370}$$

EQooWCQRooKqifVj

À gauche nous posons $u(t) = \ln\big(y(t)\big)$ et nous avons

$$\int_a^x \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \int_a^x u'(t)dt = [u(t)]_a^x = \ln\big(y(x)\big) - \ln\big(y(a)\big). \tag{28.371}$$

Nous mettons ça à la place du membre de gauche de (28.370), nous mettons toutes les constantes dans un L (en ne nous posant aucune question sur le fait que ce soit positif, nul, que ça peut rentrer dans un logarithme ou non) et :

$$\ln\big(y(x)\big) = n\ln(x) + L = \ln\big(Kx^n\big). \tag{28.372}$$

où $K = e^L$. Et voila.

LEMooCESMooJRqFvG

Lemme 28.98 ([1])**.**
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est méromorphe sur tout compact de Ω, alors f est méromorphe sur Ω.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. En prenant une suite exhaustive[56] de compacts pour $\mathbb{C}$ et en prenant les intersections avec Ω, il existe un compact K tel que $z_0 \in \mathrm{Int}(K) \subset \Omega$. Vu que f est méromorphe sur K, le point z_0 n'est pas un point d'accumulation des pôles de f. Cela étant valable pour tout $z_0 \in \Omega$, nous en déduisons que f n'a pas de points d'accumulation de pôles. Donc f est méromorphe. □

PropPUZTQKl

Proposition 28.99 ([3])**.**
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions méromorphes telles que pour tout compact K de Ω il existe $N_K \geqslant 0$ tel que

(1) f_n n'a pas de pôle[57] dans K dès que $n \geqslant N_K$;

(2) la série $\sum_{n\geqslant N_K} f_n$ converge uniformément sur K.

Alors

ITEMooZKACooLKHmaj

(1) La fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{28.373}$$

est méromorphe[58] sur Ω et ses pôles sont dans l'union de ceux des f_n.

ITEMooRRCWooHXgpoc

(2) Nous pouvons permuter la somme et la dérivée :

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z) \tag{28.374}$$

pour tout z en dehors des pôles.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit un compact K dans Ω. Les applications $(f_n)_{n\geqslant N_K}$ sont holomorphes sur K. Donc l'application

$$g_K(z) = \sum_{n\geqslant N_K} f_n(z) \tag{28.375}$$

est holomorphe comme limite uniforme de fonctions holomorphes (proposition 28.87).

La somme finie

$$h_K(z) = \sum_{n=0}^{N_K-1} f_n(z) \tag{28.376}$$

est méromorphe. Donc la somme

$$f(z) = h_K(z) + g_K(z) \tag{28.377}$$

est méromorphe sur K et ses pôles sont parmi les pôles des $(f_n)_{n\leqslant N_K}$. Elle est donc méromorphe sur Ω par le lemme 28.98.

[56] Lemme 9.379.
[57] Définition 28.89.
[58] Définition 28.95.

(2) **Pour (2)** Nous notons P l'ensemble de tous les pôles des f_n. C'est un ensemble sans point d'accumulation. Donc $\Omega \setminus P$ est encore un ouvert. Soit un compact K dans $\Omega \setminus P$. La fonction

$$\begin{aligned} g\colon K &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n \geqslant N_K} f_n(z) \end{aligned} \tag{28.378}$$

est holomorphe comme précédemment. Par la proposition 28.87, elle vérifie

$$g'(z) = \sum_{n \geqslant N_K} f_n'(z). \tag{28.379}$$

En tant que somme finie, la fonction $h(z) = \sum_{n=0}^{N_K - 1} f_n$ est également holomorphe sur K. Au final la série complète $f(z) = g(z) + h(z)$ est holomorphe sur K et peut être dérivée terme à terme :

$$f'(z) = g'(z) + h'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z). \tag{28.380}$$ EQooFYIBooSzXGVj

Le tout étant valable pour tout compact dans l'ouvert $\Omega \setminus P$, la fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus P$ et la formule (28.380) est valable sur $\Omega \setminus P$.

□

28.7 Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne

Le théorème 28.105 peut être vu soit comme un dénombrement de solutions d'une certaine équation diophantienne, soit comme partition d'un entier en parts fixées. Avant de nous lancer dans sa démonstration, nous prouvons un certain nombre de lemmes qui vont traiter des aspects combinatoires de la preuve.

Soit $n, N \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{N}^N$. Nous considérons les ensembles suivants :

$$V_n(N) = \{x \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N} x_i = n\}, \tag{28.381a}$$

$$W_n(a, N) = \{y \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } y \cdot a = n\}, \tag{28.381b}$$

$$V_n(N)_a = \{x \in V_n(N) \text{ tel que } a_i \mid x_i \, \forall i = 1, \dots, N\}. \tag{28.381c}$$

L'ensemble $V_n(N)$ avait déjà été rencontré en (17.67).

LEMooLKCAooCeDnSj

Lemme 28.100.
L'application

$$\begin{aligned} \psi\colon W_n(a, N) &\to V_n(N)_a \\ (y_1, \dots, y_N) &\mapsto (y_1 a_1, \dots, y_N a_N) \end{aligned} \tag{28.382}$$

(1) est bien définie, c'est-à-dire qu'elle prend effectivement ses valeurs dans $V_n(N)_a$,

(2) est une bijection.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Bien définie** Soit $y \in W_n(a, N)$. Nous avons $\psi(y)_i = a_i y_i$. Le nombre a_i divise donc bien $\psi(y)_i$ et $\sum_{i=1}^{N} \psi(y)_i = n$.

(2) **Injective** Si $\psi(y) = \psi(y')$, alors pour tout i nous avons $y_i a_i = y_i' a_i$, et donc $y_i = y_i'$. La fonction ψ est donc bien injective.

(3) **Surjective** Soit $x \in V_n(N)_a$. Vu que $a_i \mid x_i$, il existe $y_i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i = a_i y_i$. On vérifie que $y \in W_n(a, N)$ et que $\psi(y) = x$.

□

LEMooOPXHooHzoHrm

Lemme 28.101.
Pour $i = 1, \dots, N$, nous posons

$$\begin{aligned} b_i \colon \mathbb{N}^N &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \mid x_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{28.383}$$

Nous avons

$$\sum_{x \in V_n(N)} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) = \operatorname{Card}\big(W_n(a,N)\big). \tag{28.384}$$

Démonstration. Nous décomposons la somme en $V_n(N)_a$ et son complémentaire dans $V_n(N)$:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V_n(N)} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) &= \sum_{x \in V_n(N)_a} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) + \sum_{x \in V_n(N) \setminus V_n(N)_a} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) && \text{(28.385a)} \\ &= \sum_{x \in V_n(N)_a} 1 + \sum_{x \in V_n(N) \setminus V_n(N)_a} 0 && \text{(28.385b)} \\ &= \operatorname{Card}\big(V_n(N)_a\big) && \text{(28.385c)} \\ &= \operatorname{Card}\big(W_n(N,a)\big) && \text{(28.385d)} \end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (28.385b). Si $x \in V_n(N)_a$, alors $a_i \mid x_i$ pour tout i, et donc $b_i(x) = 1$ pour tout i. Si au contraire $x \in V_n(N) \setminus V_n(N)_a$, il existe un i tel que a_i ne divise pas x_i et donc tel que $b_i(x) = 0$.
- Pour (28.385d). Les deux ensembles sont en bijection par le lemme 28.100.

□

LEMooRJOKooPJGVTr

Lemme 28.102.
Soit $s \geqslant 1$. La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{ns} \tag{28.386}$$

a un rayon de convergence égal à 1. Pour $z \in B(0,1)$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{ns} = \frac{1}{1-z^s}. \tag{28.387}$$

Démonstration. Pour un $z \in \mathbb{C}$ fixé, nous avons $z^{ns} = (z^s)^n$[59]. Nous appelons donc la proposition 12.186 avec $q = z^s$.

Si $|z| < 1$, alors $|z^s| < 1$ et la proposition 12.186 nous dit que la série converge. Si au contraire $|z| > 1$, alors $|z^s| > 1$ et la série diverge.

Le corolaire 17.19 conclut que le rayon de convergence est bien 1.

La valeur (28.387) est également une partie de la proposition 12.186. □

LEMooVMLEooCzPuKy

Lemme 28.103.
Si $a, b \in \mathbb{C}$, si $N \in \mathbb{N}$ et si $p \in \mathbb{N}$ avec $p < N$, nous posons

$$a_n = a\frac{(n+N-1)!}{n!} \tag{28.388}$$

et

$$b_n = b\frac{(n+p-1)!}{n!}. \tag{28.389}$$

Nous avons $a_n \sim a_n + b_n$.

[59] Vu qu'ici n et s sont entiers, c'est pas profond ça. Il ne faut pas invoquer la proposition générale 14.447.

Démonstration. Nous posons $\alpha(n) = (a_n + b_n)/a_n$ et nous prouvons que $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 1$. Pour ce faire,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}\frac{(n+p-1)!}{n!}\frac{n!}{(n+N-1)!} \tag{28.390a}$$

$$= \frac{b}{a}\frac{(n+p-1)!}{(n+N-1)!} \tag{28.390b}$$

$$= \frac{b}{a}\frac{(n+p-1)!}{(n+p-1)!\prod_{k=n+p}^{n+N-1} k} \tag{28.390c}$$

$$= \frac{b}{a}\prod_{k=n+p}^{n+N-1}\frac{1}{k} \tag{28.390d}$$

$$\leqslant \frac{b}{a}\frac{1}{n+p}, \tag{28.390e}$$

et nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 0, \tag{28.391}$$

de telle sorte que $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 1$. □

LEMooTGHHooZHZsgE

Lemme 28.104.
Si $N \in \mathbb{N}$, nous avons équivalence des suites

$$\frac{(n+N-1)!}{n!} \sim n^{N-1}. \tag{28.392}$$

Démonstration. Sachez que dans $\prod_{i=a}^{b}$, il y a $b-a+1$ facteurs, et non $b-a$ comme on pourrait naïvement le croire. Cela dit, nous avons le calcul

$$\frac{(n+N-1)!}{n!n^{N-1}} = \left(\prod_{k=n+1}^{n+N-1} k\right)\frac{1}{n^{N-1}} \tag{28.393a}$$

$$= \prod_{k=n+1}^{n+N-1}\frac{k}{n} \tag{28.393b}$$

$$= \prod_{k=1}^{N-1}\frac{n+k}{n}. \tag{28.393c}$$

Donc la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+N-1)!}{n!n^{N-1}} = 1. \tag{28.394}$$

□

THOooQDYWooCOiUMb

Théorème 28.105 ([1, 121, 502, 732, 112])**.**
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}^N$ tel que $\operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_N) = 1$. *Nous posons*

$$W_n(a, N) = \{y \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } y \cdot a = n\}. \tag{28.395}$$

Nous avons alors[60]

$$\operatorname{Card}\big(W_n(a,N)\big) \sim \frac{1}{\prod_{k=1}^{N} a_k}\frac{n^{N-1}}{(N-1)!}. \tag{28.396}$$

Démonstration. Pour chaque $i = 1, \ldots, N$, nous considérons la série entière

$$s_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{ka_i}. \tag{28.397}$$

dont le rayon de convergence vaut 1 par le lemme 28.102. Nous nous apprêtons à faire le produit de Cauchy multiple de la proposition 17.31 ; nous posons donc

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i | k \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \tag{28.398}$$

[60] Équivalence de suites, définition 11.33.

et nous écrivons toutes les séries s_i sous la forme

$$s_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{ik} z^k. \tag{28.399}$$

La proposition 17.31 nous assure que si $|z| < 1$, le produit $\prod_{i=1}^{N} s_i(z)$ peut être écrit sous la forme de la série entière [SUBEQooYESHooChEKGm]

$$\prod_{i=1}^{N} s_i(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{x \in V_s(N)} \prod_{i=1}^{N} b_{ix_i} \right) z^s \tag{28.400a}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{x \in V_s(N)} \prod_{i=1}^{N} b_i(x) \right) z^s \tag{28.400b}$$ [SUBEQooEEHKooPSrpiT]

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \text{Card}\left(W_s(a,N)\right) z^s \tag{28.400c}$$ [SUBEQooULBCooSTuHvv]

Justifications :

- Pour (28.400b). Notation b_i du lemme 28.101.
- Pour (28.400c). Utilisation du lemme 28.101

D'autre part, le lemme 28.102 nous permet d'écrire

$$f(z) = \prod_{i=1}^{N} s_i(z) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - z^{a_i}}. \tag{28.401}$$

Notre but sera d'écrire ce produit sous forme de série entière est d'identifier les coefficients avec ceux que l'on trouve dans (28.400c).

(1) $m_\omega = N$ **si et seulement si** $\omega^{a_i} = 1$ Nous montrons à présent que ω est un pôle d'ordre N de f si et seulement si $\omega^{a_1} = \ldots = \omega^{a_N} = 1$.

(1a) **Un polynôme** Nous considérons le polynôme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{N} (1 - X^{a_i}) = (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \prod_{\omega \in \mathrm{U}_{a_i}} (X - \omega) \tag{28.402}$$ [EQooFNSMooVDHVnJ]

où, pour la seconde égalité, nous avons utilisé le lemme 21.20. En posant $\mathrm{U} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{U}_{a_i}$ nous écrivons encore

$$P(X) = (-1)^N \prod_{\omega \in \mathrm{U}} (X - \omega)^{m_\omega} \tag{28.403}$$

où $m_\omega = \text{Card}\{i \text{ tel que } \omega \in \mathrm{U}_{a_i}\}$. Cela pour dire que, pour $|z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{(-1)^N}{\prod_{\omega \in \mathrm{U}} (z - \omega)^{m_\omega}}. \tag{28.404}$$

(1b) **Sens $\Rightarrow$** Si ω est un pôle d'ordre N, alors $N = m_\omega = \{i \text{ tel que } \omega \in \mathrm{U}_{a_i}\}$. Donc $\omega \in \mathrm{U}_{a_i}$ pour tout i, c'est-à-dire que $\omega^{a_i} = 1$ pour tout i.

(1c) **Sens $\Leftarrow$** Dans l'autre sens, si $\omega^{a_i} = 1$ pour tout i, alors $m_\omega = N$ et ω est un pôle d'ordre N.

Nous pouvons continuer.

(2) $m_\omega = N$ **si et seulement si** $\omega = 1$ Nous savons que $\omega = 1$ est un pôle d'ordre N parce que $1 \in \mathrm{U}_{a_i}$ pour tout i. Dans l'autre sens, si ω est d'ordre N, alors nous venons de voir que $\omega^{a_i} = 1$ pour tout i.

Vu que les a_i sont premiers entre eux, le théorème de Bézout 3.200 nous donne des entiers u_i tels que $\sum_{i=1}^{N} u_i a_i = 1$. Nous avons alors

$$\omega = \omega^{u \cdot a} = \prod_{i=1}^{N} (\omega^{a_i})^{u_i} = 1. \tag{28.405}$$

Donc les pôles de f différents de 1 sont d'ordre strictement inférieur à N.

(3) **Décomposition en éléments simples** Décomposons un peu l'expression de $f(z)$ en repartant de (28.402) :

$$f(z) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-z^{a_i}} \tag{28.406a}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{-\prod_{\omega\in \mathrm{U}_{a_i}}(z-\omega)} \tag{28.406b}$$

$$= (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \prod_{\omega\in \mathrm{U}_{a_i}} \frac{1}{z-\omega} \tag{28.406c}$$

$$= (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \sum_{\omega\in \mathrm{U}_{a_i}} \frac{\lambda_{\omega,i}}{z-\omega} \tag{28.406d}$$

Justifications :

- Pour (28.406b). Lemme 21.20 ; vous noterez le signe de différence.
- Pour (28.406d). Lemme 21.15 pour la décomposition en éléments simples.

(4) **Isoler le terme $\omega = 1$** Nous notons $\mathrm{U} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{U}_{a_i}$. Chaque U_{a_i} contient $\omega = 1$. L'expression (28.406d) contient donc un terme en $\frac{1}{(z-1)^N}$. Tous les autres ω de U ne sont présents que dans au maximum $N-1$ des U_{a_i}. Nous avons donc

$$f(z) = \frac{A}{(z-1)^N} + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega\in \mathrm{U}} \frac{B_{p,\omega}}{(z-\omega)^p} \tag{28.407}$$

avec $B_{p,\omega} \in \mathbb{C}$.

(5) **Une belle lampée de factorielles** Le lemme 17.53(3) permet d'écrire f avec des séries entières :

$$f(z) = \frac{A}{(N-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+N-1)!}{s!} z^s + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega\in \mathrm{U}} \frac{(-1)^p B_{p,\omega}}{(p-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+p-1)!}{s!} \frac{z^s}{\omega^{s+p+1}} \tag{28.408}$$

qui est valable pour $z \in B(0,1)$.

(6) **Ce qu'on en fait** Pour rappel, l'équation (28.400) nous dit que

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{Card}\big(W_s(a,N)\big) z^s. \tag{28.409}$$

Nous allons donc identifier le coefficient de z^n dans (28.408) avec $\mathrm{Card}\big(W_n(a,N)\big)$:

$$\mathrm{Card}\big(W_n(a,N)\big) = \frac{A}{(N-1)!} \frac{(n+N-1)!}{n!} + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega\in \mathrm{U}} \frac{(-1)^p B_{p,\omega}}{(p-1)!} \frac{(n+p-1)!}{n!} \frac{1}{\omega^{n+p+1}}. \tag{28.410}$$

Voici une belle suite (par rapport à n) dont nous devons étudier le comportement asymptotique.

(7) **Des équivalences** Le lemme 28.103 nous permet de supprimer tous les termes autres que celui qui contient A :

$$\mathrm{Card}\big(W_n(a,N)\big) \sim \frac{A}{(N-1)!} \frac{(n+N-1)!}{n!}. \tag{28.411}$$

Notez que, à gauche, nous avons une suite dans $\mathbb{N}$ et à droite, une suite dans $\mathbb{C}$ (il n'y a pas de raisons à priori que A soit entier ou réel). Cela n'a pas d'importance ; ça n'empêche pas les suites d'être équivalentes.

Le lemme 28.104 donne maintenant

$$\text{Card}\left(W_n(a,N)\right) \sim \frac{A}{(N-1)!}n^{N-1}. \tag{28.412}$$

Cela est déjà très bien parce que ça donne la vitesse de croissance en fonction de N et n. Mais puisque nous sommes perfectionistes, nous allons encore déterminer la valeur de A.

(8) **La valeur de A** Pour déterminer la valeur de A, l'astuce est de considérer la fonction $z \mapsto f(z)(1-z)^N$:

$$f(z)(1-z)^N = (1-z)^N \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-z^{a_i}} \tag{28.413a}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} \tag{28.413b}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1+\ldots+z^{a_i-1}}. \tag{28.413c}$$

Justifications :

- Pour (28.413c). C'est le lemme 3.292(2).

La dernière expression montre qu'il n'y a pas de mal à prendre la limite $z \to 1$; elle vaut

$$\lim_{z\to 1} f(z)(1-z)^N = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}. \tag{28.414}$$

Mais en partant d'autre part de (28.407), nous avons

$$f(z)(1-z)^N = A + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\omega\in\mathrm{U}} \frac{B_{p,\omega}(1-z)^N}{(z-\omega)^p}. \tag{28.415}$$

Vu que $N > p$, la limite $z \to 0$ existe et vaut zéro dans tous les éléments de la somme, y compris les éléments avec $\omega = 1$. Donc

$$\lim_{z\to 1} f(z)(1-z)^N = A. \tag{28.416}$$

Nous savons donc que

$$A = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}. \tag{28.417}$$

En remettant la valeur (28.417) dans l'équivalence (28.412), nous trouvons le résultat demandé. □

Exemple 28.106.
Pour $p = 1$, l'équation est $\alpha x = n$, qui possède au maximum une solution, quel que soit n. Et de plus pour avoir une solution il faut et suffit que α divise n, c'est-à-dire que n soit un multiple de α. Il n'y a que un nombre sur α à être multiple de α. D'où le comportement en $\frac{1}{\alpha}$.

Pour $p = 2$, c'est l'équation (3.273) déjà étudiée. Il y a une famille à un paramètre de solutions dont seulement un certain nombre sont positives. À priori, le nombre de solutions positives croît linéairement en n. △

28.107.
Si vous aimez les séries génératrices. Si vous aimez l'idée de mettre toute l'information d'un problème dans les coefficients d'une série puis de trouver des réponses en les manipulant, vous pouvez regarder *introduction à la théorie analytique des nombres*[733].

Cette vidéo explique comment payer n euros avec des pièces et des billets de valeur données. On pourrait croire que cela est exactement le résultat du théorème 28.105. Il n'en est rien parce que l'hypothèse de pgcd du théorème n'est pas du tout réalisée par les pièces et billets actuellement en circulation.

Du coup, je ne sais pas si ce théorème est intéressant au sens de la définition 0.2.

28.8 Fonctions d'Euler

ThoZJYooWKfbVz

Théorème 28.108 (Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler[112]).
Nous considérons la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{28.418}$$

Alors

(1) Cette formule définit une fonction holomorphe sur

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(z) > 0\}. \tag{28.419}$$

(2) La fonction $\Gamma\colon \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, lequel a des pôles sur les entiers négatifs.

Démonstration. (1) **Holomorphie sous l'intégrale**

Pour étudier l'holomorphie de la fonction Γ sur $\mathcal{P}$ nous utilisons le théorème 28.75.

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \mathcal{P} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{C} \\ (z,t) &\mapsto e^{-t}t^{z-1} \end{aligned} \tag{28.420}$$

et nous commençons par montrer que c'est holomorphe en z pour chaque $t > 0$ fixé. Nous le vérifions par le critère de $\partial_{\bar{z}} f = 0$[61] et en nous souvenant que $t^i = e^{\ln(t^i)} = e^{i\ln(t)}$. Nous obtenons rapidement que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{28.421}$$

Le fait que la fonction $t \mapsto g(z,t)$ soit mesurable pour tout z est d'accord.

Et enfin soit K compact dans $\mathcal{P}$. Il faut trouver une fonction $g_K(t)$ intégrable sur $[0,\infty[$ telle que pour tout $z \in K$ et $t \in [0,\infty[$ nous ayons $|g(z,t) \leqslant g_K(t)|$. Pour cela nous majorons séparément les parties $t \in]0,1[$ et $t \geqslant 1$.

Soit donc K compact dans $\mathcal{P}$; nous posons $M = \max_{z\in K} \Re(z)$ et $\epsilon = \min_{z\in K} \Re(z)$.

Si $t \in]0,1[$ alors nous avons

$$e^{-t}t^{z-1} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}, \tag{28.422}$$

de telle façon à que que

$$\begin{aligned} |e^{-t}t^{z-1}| &\leqslant |e^{(x-1+iy)\ln(t)}| && \text{(28.423a)} \\ &= |e^{(\Re(z)-1)\ln(t)}| && \text{(28.423b)} \\ &= |t^{\Re(z)-1}| && \text{(28.423c)} \\ &\leqslant |t^{\epsilon-1}| && \text{(28.423d)} \\ &= \frac{1}{t^{1-\epsilon}}. && \text{(28.423e)} \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $]0,1[$.

Nous considérons maintenant $t \geqslant 1$. Dans ce cas nous avons

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \leqslant e^{-t}t^{M-1}. \tag{28.424}$$

Cette dernière fonction est un produit d'une exponentielle décroissante avec un polynôme. C'est donc intégrable entre 1 et l'infini.

La fonction g_K que nous considérons est donc

$$g_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1-\epsilon}} & \text{si } t < 1 \\ \text{borné} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant b \\ e^{-t}t^{M-1} & \text{si } t > b. \end{cases} \tag{28.425}$$

[61] Théorème 28.2.

Cela est une fonction intégrable sur $]0,\infty[$ et qui majore g uniformément en z sur le compact K de $\mathcal{P}$. Le théorème 28.75 nous permet donc de conclure que

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty g(z,t)dt \tag{28.426}$$

est holomorphe en z sur $\mathcal{P}$ et que

$$\Gamma'(z)=\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)dt. \tag{28.427}$$

(2) **En deux morceaux** Nous passons maintenant à la seconde partie du théorème. Pour $z\in\mathcal{P}$ nous coupons l'intégrale en deux :

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{28.428}$$

(3) **Première partie** Nous commençons par parler de la première partie : $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ dans laquelle nous voulons utiliser le développement en série de l'exponentielle e^{-t}. Nous devons donc traiter

$$\int_0^1\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}dt. \tag{28.429}$$

Nous allons permuter la somme avec l'intégrale à l'aide du théorème de Fubini 16.307 en posant la fonction

$$g(n,t)=\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1} \tag{28.430}$$

et en considérant le produit entre la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ et la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que nous étudions

$$\int_0^1\int_{\mathbb{N}} g(n,t)dndt. \tag{28.431}$$

Pour permuter il suffit de prouver que $|g|$ est intégrable pour la mesure produit, c'est-à-dire que

$$\int_0^1\int_{\mathbb{N}}\left|\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}\right|<\infty. \tag{28.432}$$

Nous avons $|t^z|=t^{\Re(z)}$, donc

$$\sum_{n=0}^\infty\left|\frac{t^{n+z-1}}{n!}\right|=t^{\Re(z)-1}\sum_{n=0}^\infty\frac{t^n}{n!}=t^{\Re(z)-1}e^t. \tag{28.433}$$

Étant donné que nous avons fixé $z\in\mathcal{P}$, nous avons $\Re(z)-1>-1$ et donc $t^{\Re(z)-1}$ est intégrable entre 0 et 1 (proposition 16.303). La partie e^t se majore sur $[0,1]$ par une constante quelconque. Nous avons donc payé le droit d'inverser la somme et l'intégrale :

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^\infty\int_0^1\frac{(-1)^n}{n!}t^{n+z-1}dt=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}[t^{n+z}]_0^1=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}. \tag{28.434}$$

Nous avons donc l'intéressante formule suivante, valable pour tout $z\in\mathcal{P}$:

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{28.435}$$

(4) **Prolongation de la première partie** Nous voudrions montrer maintenant que la fonction

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!(n-z)} \tag{28.436}$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles en les entiers négatifs. Pour cela nous considérons la suite de fonctions

$$f_n(z)=\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \tag{28.437}$$

et nous allons utiliser la proposition 28.99. Si $n \geqslant 0$, la fonction f_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $z = -n$. Soit K compact de $\mathbb{C}$ et N_K tel que $K \subset \overline{B(0, N_K)}$. Pour $n \geqslant N_K + 1$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K et de plus pour tout $z \in K$ nous avons

$$|z + n| = |z - (-n)| \geqslant \big|n - |z|\big| \geqslant n - |z| \geqslant n - N_K, \tag{28.438}$$

et par conséquent

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!(n - N)}, \tag{28.439}$$

ou pour le dire de façon plus snob :

$$\|f_n\|_{\infty,K} \leqslant \frac{1}{n!(n - N)}, \tag{28.440}$$

dont la série converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \geqslant N} f_n$ converge normalement[62] sur K, donc la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{28.441}$$

est une fonction méromorphe dont les pôles sont ceux des f_n, c'est-à-dire les entiers négatifs (proposition 28.99).

(5) **La seconde partie**

Nous allons à présent prouver que la fonction

$$h(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{28.442}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour cela nous considérons la fonction de deux variables $f(z, t) = e^{-t} t^{z-1}$ et nous utilisons le théorème d'holomorphie sous l'intégrale 28.75. D'abord pour z_0 fixé dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$\int_1^{\infty} |e^{-t} t^{z_0 - 1}| \leqslant \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\Re(z_0)-1} dt, \tag{28.443}$$

donc l'intégrale converge parce que c'est polynôme contre exponentielle. Par ailleurs pour chaque t_0 fixé sur $[0, \infty[$, la fonction $z \mapsto e^{-t_0} t_0^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme en témoigne le calcul suivant :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) t_0^{x+iy-1} = 0. \tag{28.444}$$

Et enfin si K est compact dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$|f(z, t)| = |e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} |t^{\Re(z)-1}| \leqslant e^{-t} t^{M-1} \tag{28.445}$$

où $M = \max_{z \in K} \Re(z)$. Nous en déduisons que la fonction

$$z \mapsto \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{28.446}$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(6) **Conclusion**

Au final nous avons prouvé que la fonction Γ d'Euler admet le prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ donné par

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z + n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{28.447}$$

□

[62] Définition 12.131.

28.8.1 Euler et factorielle

Proposition 28.109.
Nous avons la formule $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous partons de la formule

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt \tag{28.448}$$

que nous intégrons par partie en posant

$$\begin{aligned} u &= t^{n-1} & u' &= (n-1)t^{n-2} \\ v &= e^{-t} & v' &= -e^{-t}. \end{aligned} \tag{28.449}$$

Les termes au bord s'annulent (ici il y a un passage à la limite qui n'est pas écrit) et nous trouvons

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty (n-1)e^{-t}t^{n-2}dt = (n-1)\Gamma(n-1). \tag{28.450}$$

Pour conclure il suffit de remarquer que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} = -[e^{-t}]_0^\infty = 1. \tag{28.451}$$

□

28.9 Exponentielle et logarithme complexe

28.9.1 Propriétés de l'exponentielle

Proposition 28.110.
Soit $z \in \mathbb{C}$ *fixé. La fonction*

$$\begin{aligned} E\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{tz} \end{aligned} \tag{28.452}$$

est C^∞*, sa dérivée est*

$$E'(t) = ze^{tz}. \tag{28.453}$$

La fonction E *est développable en série entière (voir définition 17.154) sur* $\mathbb{R}$ *en* $t = 0$ *et*

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}t^n. \tag{28.454}$$

Démonstration. Nous fixons $z \in \mathbb{C}$. Par définition 20.5, la série suivante est e^{tz} :

$$f(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}t^n. \tag{28.455}$$

Cette série a un rayon de convergence infini et la fonction f est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons la dériver terme à terme :

$$f'(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n!}nt^{n-1} = z\sum_{n=1}^\infty \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1} = ze^{tz}. \tag{28.456}$$

□

THOooNGOIooEECfAv

Théorème 28.111.
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes.

(1) exp *est holomorphe*[63].

(2) $(e^z)' = e^z$.

[63] Définition 14.339.

(3) *L'exponentielle est développable en série entière,*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{28.457}$$

et la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Démonstration. En tant que application $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, la fonction

$$E(x,y) = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{28.458}$$

est C^∞. De plus nous avons

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) = e^{x+iy} = E(x,y) \tag{28.459a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = iE(x,y), \tag{28.459b}$$

et par conséquent la fonction E vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Si r est fixé, par le critère d'Abel appliqué à la suite $r^n/n!$ nous savons que la série $\sum z^n/n!$ converge normalement sur le compact $B(0,r)$. □

28.9.2 Intégrale de Fresnel

Nous allons calculer l'**intégrale de Fresnel**

$$\int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\pi/4} \tag{28.460}$$

en suivant la démarche présentée par Wikipédia[734]. Nous commençons par prouver que l'intégrale est convergente en nous contentant de justifier la convergence de

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx. \tag{28.461}$$

Pour chaque $a > 0$ fixé, l'intégrale $\int_0^a \sin(x^2)dx$ ne pose pas de problèmes. Le lemme 22.177 nous permet de passer à la limite ; nous devons donc seulement calculer

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b \sin(x^2) dx \tag{28.462}$$

où a est une constante strictement positive. Nous effectuons une intégration par partie en posant

$$u = \frac{1}{x} \qquad u' = -\frac{1}{x^2} \tag{28.463a}$$

$$v' = x\sin(x^2) \qquad v = \frac{1-\cos(x^2)}{2}. \tag{28.463b}$$

Notons que la primitive v a été choisie pour avoir $v(0) = 0$. Nous avons

$$\int_a^b \sin(x^2) dx = \left[\frac{1-\cos(x^2)}{2x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(x^2)-1}{2x^2} dx \tag{28.464}$$

EqOdeKye

Pour le premier terme nous avons

$$\lim_{b\to\infty} \left[\frac{1-\cos(x^2)}{2x}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1-\cos(b^2)}{2b} - \frac{1-\cos(a^2)}{2a} = -\frac{1-\cos(a^2)}{2a}. \tag{28.465}$$

C'est borné. Pour le second terme de (28.464), la fonction

$$\frac{\cos(x^2)-1}{2x^2} \tag{28.466}$$

est majorée par la fonction $1/x^2$ qui est intégrable entre a et ∞.

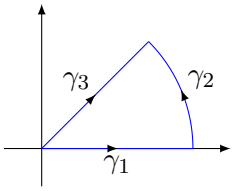


FIGURE 28.1 : Chemin d'intégration pour l'intégrale de Fresnel LabelFigCheminFresnel

Nous allons calculer l'intégrale demandée en passant par la fonction

$$f(x) = e^{-x^2} \tag{28.467}$$

définie sur le plan complexe. Nous l'intégrons sur le chemin $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ indiqué à la figure 28.1.

Ces chemins sont donnés par

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, R] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto t,\end{aligned} \tag{28.468}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0, \frac{\pi}{4}] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto Re^{it},\end{aligned} \tag{28.469}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3 : [0, R] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto te^{i\pi/4}.\end{aligned} \tag{28.470}$$

Tout d'abord la fonction f est bien holomorphe par le critère du théorème 28.2. Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ se fait simplement en posant $f(x, y) = e^{-(x+iy)^2}$. Le calcul est usuel :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.8, Release Date: 2012-01-20                         |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=exp(-(x+I*y)**2)
sage: A=f.diff(x)+I*f.diff(y)
sage: A.simplify_full()
(x, y) |--> 0
```

Nous avons donc

$$0 = \int_\gamma f = \underbrace{\int_0^R e^{-t^2} dt}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2it}} Rie^{it} dt}_{I_2(R)} + \underbrace{\int_0^R e^{-t^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} dt}_{I_3(R)}. \tag{28.471}$$ RafaelRuiz

L'intégrale est nulle pour tout R en vertu de la proposition 28.12. L'intégrale I_1 est une gaussienne et nous avons

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{28.472}$$

par l'exemple 16.310. Nous montrons maintenant que $\lim_{R\to\infty} |I_2(R)| = 0$[64]. D'abord nous majorons en prenant la norme puis nous effectuons le changement de variables $u = 2t$:

$$|I_2(R)| \leqslant \int_0^{\pi/4} Re^{-R^2\cos(2t)} dt \tag{28.473a}$$

$$= \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2\cos(u)} du. \tag{28.473b}$$

Nous savons que le graphe du cosinus est concave : il reste au dessus de la droite que joint $(0, 1)$ à $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Du coup $\cos(u) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}u$ et par conséquent

$$e^{-R^2\cos(u)} \leqslant e^{-R^2(1-\frac{2}{\pi}u)} = e^{R^2(\frac{2}{\pi}u-1)}. \tag{28.474}$$

[64] Il y a moyen de démontrer cela via le lemme de Jordan[735]. Nous donnons ici une démonstration moins technologique.

Nous effectuons l'intégrale

$$|I_2(R)| \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2}e^{\frac{2R^2}{\pi}u}du \tag{28.475a}$$
$$= \frac{R}{2}e^{-R^2}\left[\frac{\pi}{2R^2}e^{2R^2u/\pi}\right]_0^{\pi/2} \tag{28.475b}$$
$$= \frac{\pi}{4R} - \frac{\pi e^{-R^2}}{4R}, \tag{28.475c}$$

et nous avons bien $\lim_{R\to\infty}|I_2(R)| = 0$. Nous passons à la troisième intégrale. En tenant compte que $e^{i\pi/2} = i$, nous avons

$$I_3(R) = -\int_0^R e^{-\gamma_3(t)^2}e^{i\pi/4}dt \tag{28.476a}$$
$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-t^2}e^{2i\pi/4} \tag{28.476b}$$
$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-it^2}. \tag{28.476c}$$

En passant à la limite $R \to 0$, de l'équation (28.471) il ne reste que

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-it^2}dt, \tag{28.477}$$

ce qui signifie que

$$\int_0^\infty e^{-it^2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2(1+i)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4}. \tag{28.478}$$

28.10 Théorème de Weierstrass

ThoArYtQO

Théorème 28.112 (Théorème de Weierstrass[736])**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ que nous supposons converger uniformément sur tout compact vers f. Alors f est holomorphe sur Ω et pour tout k nous avons

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \tag{28.479}$$

uniformément sur tout compact.

Dit en peu de mots, la limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe, et on peut permuter la limite avec la dérivation.

Démonstration. Chacune des fonctions f_n étant holomorphes, si $a \in \Omega$ et r est tel que $B(a,r) \subset \Omega$, nous avons par la formule de Cauchy 28.61 :

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)}\frac{f_n(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{28.480}$$

pour tout z dans un boule $B(a,\rho)$ incluse dans $B(a,r)$. Étant donné que le cercle ∂B est compact, elle y est majorée par une constante M. Montrons que de plus nous pouvons choisir M de telle façon à avoir $|f_n(\xi)| \leqslant M$ pour tout n et tout ξ en même temps. D'abord nous utilisons la continuité de la limite f sur le compact ∂B pour poser $A = \max_{z\in\partial B}|f(z)|$. Ensuite nous considérons un $\epsilon > 0$ et N tel que $\|f_n - f\|_{\partial B} \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Nous savons maintenant que

$$\{|f_n(\xi)| \text{ tel que } n \geqslant N, \xi \in \partial B\} \tag{28.481}$$

est majoré par $A + \epsilon$. Nous posons enfin

$$B = \max_{n\leqslant N}\max_{\xi\in\partial B}|f_n(z)|, \tag{28.482}$$

et alors le nombre $M = \max\{A+\epsilon, B\}$ majore $|f_n(\xi)|$ pour tout n et tout $\xi \in \partial B$.

De plus pour tout $\xi \in \partial B$ et pour tout z dans la petite boule, nous avons $|\xi - z| > r - \rho$, donc la fonction dans l'intégrale est majorée par une constante ne dépendant ni de n ni de ξ. Nous pouvons donc permuter l'intégrale et la limite sur n :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}. \tag{28.483}$$

Cela implique que la fonction f est holomorphe par le corolaire 28.65.

Nous voudrions maintenant parler des dérivées des f_n et de f. Pour cela nous voulons permuter l'intégrale et les dérivées, ce qui est fait au corolaire 28.78 :

$$f_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}} d\omega. \tag{28.484}$$

Nous voulons la convergence sur tout compact contenu dans l'ouvert Ω. Pour ce faire, nous allons considérer un compact $K \subset \Omega$ et prouver la convergence uniforme dans toute boule de la forme $B(z_0, r)$ avec $z_0 \in K$ et $B(z_0, r) \subset \Omega$. Pour chaque tel couple (z_0, r), nous aurons un $N_{(z_0,r)} \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_{(z_0,r)}$,

$$\| f_n^{(k)} - f^{(k)} \|_{B(z_0,r)} \leqslant \epsilon. \tag{28.485}$$

Vu que ces boules $B(z_0, r)$ forment un recouvrement de K par des ouverts, nous pouvons en retirer un sous-recouvrement fini et prendre, comme N, le maximum des $N_{(z_0,r)}$ correspondants. Pour ce N nous aurons

$$\| f_n^{(k)} - f^{(k)} \|_K \leqslant \epsilon. \tag{28.486}$$

Au travail !

Pour $z \in B(z_0, r)$ nous considérons $r' > r$ tel que $B(z_0, r') \subset \Omega$ et nous avons

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r')} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \tag{28.487a}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0,r')} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|r - r'|^{k+1}} d\xi. \tag{28.487b}$$

Nous avons pris ce r' de telle manière que $|\xi - z|$ soit borné par le bas par $|r - r'|$; sinon la majoration que nous venons de faire ne marche pas. Étant donné que $f_n \to f$ uniformément, nous pouvons considérer n assez grand pour que le numérateur soit plus petit que ϵ indépendamment de ξ et de z. Donc pour un n assez grand,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{2\pi r'}{|r - r'|^{k+1}} \tag{28.488}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$. Donc nous avons convergence uniforme $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ sur cette boule. Par l'argument de compacité donné plus haut, nous avons la convergence uniforme sur tout compact. □

28.11 Analyse complexe en plusieurs variables

Pour rappel, la définition d'une application holomorphe est 14.339 et elle est directement donnée en plusieurs variables.

Définition 28.113 ([737]).
Nous définissons le ***polydisque*** *centré en $a \in \mathbb{C}^n$ et de « rayons » $r \in \mathbb{C}^n$ par*

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } |z_j - a_j| < r_j \, \forall j = 1, \ldots, n\}. \tag{28.489}$$

Définition 28.114.
Pour une fonction $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, nous notons

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) f. \tag{28.490}$$

PROPooKGOIooWRIoAq

Proposition 28.115.
Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $z_1, \ldots, z_{j-1}, j_{j+1}, \ldots, j_n \in \Omega$, l'application partielle

$$z \mapsto f(z_1, \ldots, z_{j_1}, z, z_{j+1}, \ldots, z_n) \tag{28.491}$$

est holomorphe.

PROPooFTXYooBMVlSS

Proposition 28.116 ([1]).
Une composée de fonctions holomorphes est holomorphes.

Définition 28.117 ([738]).
*Soient des ouverts B_1 et B_2 dans $\mathbb{C}^n$. Nous disons que $f\colon B_1 \to B_2$ est **biholomorphe** si*

(1) f est holomorphe,

(2) f est une bijection entre B_1 et B_2,

(3) f^{-1} est holomorphe.

28.11.1 Série

PROPooJWDGooLLnldZ

Proposition 28.118.
Soient des application holomorphe $f_n\colon B_{\mathbb{C}}^n(0,r) \to \mathbb{C}$ telles que $\|f_n\| < M_n$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. Alors l'application

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\colon B_{\mathbb{C}^n}(0,r) \to \mathbb{C} \tag{28.492}$$

est holomorphe.

28.11.2 Inversion locale

THOooNBGZooHuGtxW

Théorème 28.119 (Inversion locale, version holomorphe).
Soient des ouverts B_1 et B_2 dans $\mathbb{C}^n$. Nous considérons une fonction holomorphe $f\colon B_1 \to B_2$. Soit $z_0 \in B_1$ et $w_0 = f(z_0)$. Il y a équivalence entre

(1) $\det(df_{z_0}) \neq 0$

(2) Il existe un voisinage U de z_0 dans B_1 et V de w_0 dans B_2 tels que la restriction $f\colon U \to V$ est biholomorphe.

PROPooSOAWooDZswKV

Proposition 28.120 ([3]).
Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un ouvert Λ de $\mathbb{C}^n$ ainsi que $\lambda \in \Lambda$ et $z_0 \in \Omega$. Nous considérons une application holomorphe $f\colon \Omega \times \Lambda \to \mathbb{C}$ et

$$\begin{aligned} g\colon \Omega &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \int_{z_0}^{z} f(s,\lambda)ds \end{aligned} \tag{28.493}$$

EQooERLJooYwqBxO

où l'intégrale est celle sur le chemin droit joignant z_0 à z dans $\mathbb{C}$.
Alors

(1) g est holomorphe sur Ω

ITEMooJWJOooCNjrDl

(2) $g'(z) = f(z,\lambda)$.

Démonstration. Il s'agit de vérifier les hypothèses de 28.75, en notant une subtilité de notations : dans 28.75, l'intégration se fait sur la deuxième variable alors que dans (28.493) l'intégration se fait sur la première ; il faut donc s'adapter. Les hypothèses (1) et (2) sont vérifiées parce que f est holomorphe et donc ses fonctions partielles aussi (proposition 28.115).

Soit un compact K dans Λ. Vu que f est holomorphe, nous pouvons considérer la fonction constante

$$\begin{aligned} g_K\colon [z_0,z] &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \sup_{(u,\lambda)\in[z_0,z]\times K} |f(u,\lambda)| < \infty. \end{aligned} \tag{28.494}$$

En tant qu'intégrale sur le compact $[z_0,z]$ nous avons

$$\int_{z_0}^{z} g_K(s)ds < \infty. \tag{28.495}$$

Cela vérifie l'hypothèse (3). Et conclu donc la preuve. □

28.11.3 Extension d'analytique vers holomorphe

LEMooYCSQooIffjUX

Lemme 28.121 ([1]).
Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Si $f\colon B_{\mathbb{C}^n}(a,r) \to \mathbb{C}^m$ est holomorphe, alors la restriction $g\colon B_{\mathbb{R}^n}(a,r) \to \mathbb{C}^m$ est analytique.

LEMooSOYJooLLilgz

Lemme 28.122 ([1]).
Soit un polynôme P homogène de degré k sur $\mathbb{C}^n$. Nous avons

$$\sup_{z\in B(z_0,r)} |P(z-z_0)| \leqslant \|z-z_0\|^k \sup_{z\in B(z_0,1)} |P(z-z_0)|. \tag{28.496}$$

LEMooAPNOooJSpgUi

Lemme 28.123 ([4]).
Si P est un polynôme réel homogène de degré k sur $\mathbb{R}^n$, nous notons $\tilde{P}$ son extension complexe[65].

Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Il existe des réels $C_{k,n} > 0$ tels que pour tout polynôme réel homogène de degré k,

(1)

$$\sup_{\|z\|\leqslant 1} |\tilde{P}(z)| \leqslant C_{k,n} \sup_{\|x\|\leqslant 1} |P(x)|. \tag{28.497}$$

(2) Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\sup_{z\in B(x_0,r)} |\tilde{P}(z-x_0)| \leqslant C_{k,n} \sup_{x\in B(x_0,r)} |P(x-x_0)|. \tag{28.498}$$

(3) Pour chaque n,

$$\lim_{k\to\infty} C_{k,n}^{1/k} = 1. \tag{28.499}$$

Notez le point important : le même nombre $C_{k,n}$ fonctionne pour tous les polynôme en même temps.

Le théorème suivant dit que si f est analytique sur une $\mathbb{R}^n$-boule autour de x_0, alors en prenant la même formule, nous avons une application analytique sur une $\mathbb{C}^n$-boule à peine plus petite[66].

THOooXJNJooFucWqn

Théorème 28.124 ([4]).
Soient $0 < \rho < r$ et une application analytique[67] *$f\colon B_{\mathbb{R}^n}(x_0,r) \to \mathbb{R}$ s'écrivant sous la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0), \tag{28.500}$$

avec

$$a_k(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_{k,\alpha} x^\alpha. \tag{28.501}$$

Pour chaque k nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k\colon B_{\mathbb{C}^n}(x_0,\rho) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{\alpha\in\Lambda_k} a_{k,\alpha} z^\alpha. \end{aligned} \tag{28.502}$$

Alors

(1) l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon B_{\mathbb{C}^n}(x_0,\rho) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(z-x_0) \end{aligned} \tag{28.503}$$

est holomorphe.

(2) Une telle extension est unique : si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux telles extensions alors $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Nous notons P l'application qui à une fonction analytique fait correspondre de cette façon une fonction holomorphe :

$$P\colon \{f\colon B_{\mathbb{R}^n}(x_0,r) \to \mathbb{R} \text{ analytique}\} \to \{\tilde{f}\colon B_{\mathbb{C}^n}(x,\rho) \to \mathbb{C} \text{ holomorphe}\}. \tag{28.504}$$

Notez que r et ρ sont implicites dans la définition de P.

[65] C'est-à-dire : mêmes coefficients (réels), mais en acceptant les variables complexes.
[66] Plus petite en rayon, mais de dimension deux fois plus grande.
[67] Définition 17.190.

Démonstration. D'abord en tant que sommes finies, chacune des $\tilde{a}_k$ est holomorphe ; ce sont des polynômes homogènes de degré k. Soit $\rho > 0$; pour tout $z \in B(z_0, \rho)$ et pour tout k, en utilisant le lemme 28.123 nous avons

$$|\tilde{a}_k(z - x_0)| \leqslant \|z - x_0\|^k \sup_{s \in B_{\mathbb{C}^n}(x_0,1)} |\tilde{a}_k(s - x_0)| \tag{28.505a}$$
$$\leqslant \|z - x_0\|^k C_k \sup_{x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0,1)} |a_k(x - x_0)| \tag{28.505b}$$
$$\leqslant \|z - x_0\|^k C_k \|a_k\| \tag{28.505c}$$
$$\leqslant \rho^k C_k \|a_k\| \tag{28.505d}$$

Vu que f est analytique nous avons par ailleurs

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \|a_k\| < \infty. \tag{28.506}$$

Vu que $C_k^{1/k} \to 1$ nous savons que C_k peut très bien croître polynômialement ; sans hypothèses supplémentaires, nous ne pouvons rien dire à propos de la convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{a}_k(z - x_0)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k C_k \|a_k\|. \tag{28.507}$$

Nous choisissons donc $\rho < r$ pour avoir

$$\rho^k C_k \|a_k\| = \left(\frac{\rho}{r}\right)^k r^k C_k \|a_k\|. \tag{28.508}$$

Étant donné que $r^k C_k$ a au plus une croissance polynômiale et que $(\rho/r)^k$ a une décroissance exponentielle, nous avons

$$|\tilde{a}(z - x_0)| \leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^k r^k C_k \|a_k\| \leqslant r^k \|a_k\| \tag{28.509}$$

dès que k est grand (lemme 14.451). Tout cela pour dire que

$$\|\tilde{a}_k\|_\infty < \left(\frac{\rho}{r}\right)^k r^k C_k \|a_k\| < r^k \|a_k\| \tag{28.510}$$

où à gauche $\|\tilde{a}_k\|_\infty$ est la norme uniforme sur $B_{\mathbb{C}^n}(x_0, \rho)$ et non la norme en tant qu'application k-multiniléaire. Donc en posant

$$M_k = r^k \|a_k\|, \tag{28.511}$$

nous avons $\|\tilde{a}_k\| < M_k$ avec $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$. La proposition 28.118 nous dit alors qu'en posant

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(z - x_0), \tag{28.512}$$

nous avons une fonction holomorphe sur $B(x_0, \rho)$.

Nous prouvons à présent l'unicité. D'abord x_0 n'est pas un zéro isolé de $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ parce que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ sur un voisinage réel de x_0. Donc, par le principe des zéros isolée (théorème 19.164), $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 = 0$ sur un voisinage complexe de x_0. Ensuite le corolaire 19.165 nous dit que $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 = 0$ sur tout $B_{\mathbb{C}^n}(x_0, \rho)$.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 28.125
Pour être tout à fait correct, il faudrait une version à plusieurs variables du principe des zéros isolés. Vous êtes le bienvenu pour m'envoyer un énoncé avec une démonstration.

□
LEMooTVOAooUTyoCz

Lemme 28.126 ([1]).
Avec l'application P du théorème 28.124 nous avons

$$P(f') = P(f)' \tag{28.513}$$

où à gauche f' est le dérivée réelle, et à droite le prime désigne la dérivée complexe.

28.11.4 Espace de fonctions holomorphes

PROPooFFXSooBLoTSq

Proposition 28.127.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}^n$ et

$$X = \{\varphi\colon \overline{B(z_0), r} \to \mathbb{C}^m \text{ tel que } \begin{cases} \varphi \text{ est holomorphe sur } B(z_0, r) \\ \varphi \text{ est continue sur } \overline{B(z_0, a)}. \end{cases} \} \tag{28.514}$$

Alors $(X, \|\|_\infty)$ est fermé dans $\big(C^0(z_0, r), \|.\|\big)$.

28.11.5 Cauchy-Lipschitz holomorphe

PROPooYYYDooXeEcVw

Proposition 28.128 (Cauchy-Lipschitz holomorphe[4, 1])**.**
Soient $(t_0, y_0, \lambda_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \Lambda$ (ici $\Lambda = C^m$) ainsi qu'une application $f\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \Lambda \to \mathbb{C}^n$ holomorphe[68] sur un voisinage de (t_0, y_0, λ_0). Alors :

(1) Il existe $a, \rho > 0$ tels que le système SUBEQSooPTXEooQMupUi

$$\begin{cases} (\partial_t y)(t, \lambda) = f\big(t, y(t, \lambda), \lambda\big) & \text{(28.515a)} \\ y(t_0, \lambda) = y_0 & \text{(28.515b)} \end{cases}$$

admette une unique solution $y\colon B(t_0, a) \times B(\lambda_0, \rho) \to \mathbb{C}^n$.

(2) Cette solution y est holomorphe.

(3) Il existe un $r > 0$ tel que pour tout $(t, \lambda) \in \overline{B(t_0, a)} \times \overline{B(\lambda_0, \rho)}$, nous avons

$$\|y(t, \lambda) - y_0\| < r. \tag{28.516}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Sécurité**

Soit $R > 0$ tel que f soit holomorphe sur

$$U = \overline{B(t_0, R)} \times \overline{B(y_0, R)} \times \overline{B(\lambda_0, R)}. \tag{28.517}$$

Vu que U est compact et que f y est continue, elle est majorée et nous posons

$$\sup_{(t,y,\lambda)\in U} |f(t, y, \lambda)| \leqslant M. \tag{28.518}$$

(2) **Une application g intermédiaire**

Nous fixons ensuite $(t_1, \lambda_1) \in B(t_0, R) \times B(\lambda_0, R)$ ainsi que l'application

$$\begin{aligned} g\colon \overline{B(y_0, R)} &\to \mathbb{C}^n \\ y &\mapsto g(t_1, y, \lambda_1). \end{aligned} \tag{28.519}$$

Cette application est holomorphe par la proposition 28.115. Nous appliquons à chaque composante g_i l'estimateur de Cauchy (proposition 28.63(1)) avec la majoration $1/R \geqslant 1/(R - r)$:

$$|g_i'(y)| \leqslant \frac{1}{R} \sup_{|w-y_0|=R} |g(w)| \leqslant \frac{M}{R}. \tag{28.520}$$

La norme sur $\mathbb{C}^n$ est celle de la définition 12.38, et nous avons donc

$$\|g'(z)\| = \sqrt{\langle g'(z), g'(z)\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |g_i(z)|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{M}{R}} \leqslant \frac{\sqrt{n}M}{R}. \tag{28.521}$$

[68] Définition 14.339.

(3) **Une condition Lipschitz** Soient $y, z \in B(y_0, R)$. Nous utilisons les accroissements finis 14.351 :

$$\|g(y) - g(z)\| \leqslant \sup_{x\in[y,z,]} \|dg_x\|\|y - z\|. \tag{28.522}$$

Mais nous savons que pour une application holomorphe, la différentielle est l'application qui consiste à multiplier par la dérivée complexe (proposition 14.346). Donc en posant

$$L = \frac{\sqrt{n}M}{R} \tag{28.523}$$

nous avons

$$\|f(t_1, yl_1) - f(t_1, z, \lambda_1)\| \leqslant L\|y - z\|. \tag{28.524}$$

(4) **L'espace de Banach pour la contraction** Soient $a, \rho < R$. Nous posons

$$X = \{\varphi\colon \overline{B(t_0), a} \times \overline{B(\lambda_0, \rho)} \to \mathbb{C}^n \text{ tel que } \begin{cases} \varphi \text{ est holomorphe sur } B(t_0, a) \times B(\lambda_0, \rho) \\ \varphi \text{ est continue sur } \overline{B(t_0, a)} \times \overline{B(\lambda_0, \rho)} \\ \|\varphi - y_0\| \leqslant r \end{cases} \} \tag{28.525}$$

Et maintenant on parle de fermeture et de complétude.

(4a) Par le lemme 14.399), l'espace $\big(C^0(\dots), \|.\|_\infty\big)$ est de Banach

(4b) Nous considérons $\mathcal{F} = \big(X, \|.\|_\infty\big)$.

(4c) La partie $\mathcal{F}$ est fermée dans $C^0(\dots)$ par proposition 28.127.

(4d) En tant que fermé dans un complet, la partie $\mathcal{F}$ est complète.

Nous pourrions donc utiliser le théorème de Picard sur $\mathcal{F}$.

(5) **La suite** Nous allons définir la contraction $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ qui à φ fait correspondre

$$\phi(t, \lambda) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s, \lambda), \lambda\big)ds \tag{28.526}$$

Nous allons maintenant prouver ce qu'il faut pour que cette application soit bien définie et soit une contraction.

Pour la suite nous considérons $\varphi \in \mathcal{F}$ et nous posons

$$\begin{aligned} \phi\colon \overline{B(t_0, a)} \times \overline{B(\lambda_0, \rho)} &\to \mathbb{C}^n \\ (t, \lambda) &\mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s, \lambda), \lambda\big)ds. \end{aligned} \tag{28.527}$$

Nous allons prouver que si a et ρ sont bien choisis, $\phi \in \mathcal{F}$.

(6) **L'intégrale a un sens** Si on fixe $\lambda_1 \in \overline{B(\lambda_0, \rho)}$ l'application

$$\begin{aligned} g\colon [t_0, t] &\to \mathbb{C}^n \\ s &\mapsto f\big(s, \varphi(s, \lambda_1), \lambda_1\big) \end{aligned} \tag{28.528}$$

est continue en tant que composée d'applications continues. Donc l'intégrale sur le compact $[t_0, t]$ ne pose pas de problèmes.

(7) **ϕ est continue sur l'ouvert** Attention que l'intégrale $\int_{t_0}^{t}$ est l'intégrale sur le segment dans $\mathbb{C}$ joignant t_0 à t. Il n'est donc pas vrai que $\int_{t_0}^{t+\delta} = \int_{t_0}^{t} + \int_{t}^{t+\delta}$. La définition plus explicite est que

$$\phi(t, \lambda) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s, \lambda), \lambda\big)ds = y_0 + \int_0^1 f\Big(\gamma(u), \varphi\big(\gamma(u), \lambda\big), \lambda\Big)du \tag{28.529}$$

avec $\gamma(u) = tu + (1 - u)t_0$.

De même, en prenant $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $t + \delta$ reste dans $\overline{(t_0, a)}$ nous avons

$$\phi(t + \delta, \lambda + \delta) = y_0 + \int_0^1 f\Big(\sigma(u), \varphi\big(\sigma(u), \lambda\big), \lambda\Big)du \tag{28.530}$$

avec $\sigma(u) = (t+\delta)u + (1-u)t_0$.

Nous avons donc

$$\|\phi(t,\lambda) - \phi(t+\delta,\lambda+\delta)\| \leqslant \int_0^1 \|f\Big(\sigma(u),\varphi\big(\sigma(u),\lambda+\delta\big),\lambda+\delta\Big) - f\Big(\gamma(u),\varphi\big(\gamma(u),\lambda\big),\lambda\Big)\|du. \tag{28.531}$$

Là dedans, tout est continu en δ et $\gamma(u) - \sigma(u) = \delta u$. Nous avons donc bien

$$\lim_{\delta\to 0} \|\phi(t,\lambda) - \phi(t+\delta,\lambda+\delta)\| = 0, \tag{28.532}$$

et donc la continuité de ϕ.

(8) **ϕ est holomorphe sur le fermé** C'est la proposition 28.76 qui le dit.

(9) **Si $a < rM$ alors $\phi \in \mathcal{F}$** Nous avons supposé que $\|\varphi - y_0\| < r$. Nous prouvons à présent que si $a < rM$ alors $\|\phi - y_0\| < r$. Soit donc $(t,\lambda) \in \overline{B(t_0,a)} \times \overline{B(\lambda_0,\rho)}$. Nous avons

$$\|\phi(t,\lambda) - y_0\| \leqslant \int_{t_0}^t \|f\big(s,\varphi(s,\lambda),\lambda\big)\|ds < aM. \tag{28.533}$$

(10) **L'application T** Tout ce que nous venons de faire nous permet de considérer l'application

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\ T(\varphi)(t,\lambda) &= y_0 + \int_{t_0}^t f\big(s,\varphi(s,\lambda),\lambda\big)ds. \end{aligned} \tag{28.534}$$

(11) **Si $aL < 1$ alors T est une contraction** Soient $\varphi, \phi \in \mathcal{F}$ ainsi que $(t,\lambda) \in \overline{B(t_0,a)} \times \overline{B(\lambda_0,\rho)}$. Nous avons

$$\|T(\phi) - T(\varphi)\| \leqslant \int_{t_0}^t \|f\big(s,\varphi(s,\lambda),\lambda\big) - f\big(s,\phi(s,\lambda),\lambda\big)\|ds \tag{28.535a}$$

$$\leqslant L\int_{t_0}^t \|\varphi(s,t) - \phi(s,t)\| \tag{28.535b}$$

$$\leqslant aL\|\varphi - \phi\|_\infty. \tag{28.535c}$$

Donc si $aL < 1$, l'application T est une contraction.

(12) **Picard** Nous appliquons le théorème de point fixe de Picard 19.60 et nous considérons l'unique point fixe $\varphi_0 \in \mathcal{F}$ de T.

(13) **Point fixe $\Rightarrow$ solution** Nous prouvons que φ_0 est une solution. Vu que $\varphi_0 \in \mathcal{F}$, nous savons déjà qu'elle vérifie

$$\varphi_0(t,\lambda) = y_0 + \int_{t_0}^t f\big(s,\varphi_0(s,\lambda),\lambda\big)ds. \tag{28.536}$$

Nous fixons $\lambda_1 \in B(\lambda_0,\rho)$ et nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g\colon B(t_0,a) &\to \mathbb{C}^n \\ t &\mapsto \varphi_0(t,\lambda_1), \end{aligned} \tag{28.537}$$

c'est-à-dire

$$g(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f\big(s,g(s,\lambda_1),\lambda_1\big)ds. \tag{28.538}$$

C'est le moment d'utiliser 28.120(2) :

$$g'(z) = f\big(t,g(s,\lambda_1),\lambda_1\big). \tag{28.539}$$

Donc φ_0 est bien une solution.

(14) **Solution ⇒ point fixe** Nous prouvons que si y est une solution de (28.515) alors $T(y) = y$. Nous fixons $\lambda_1 \in \Lambda$ et nous posons $g(t) = y(t, \lambda_1)$. Donc

$$g'(t) = f\big(t, y(t, \lambda_1), \lambda_1\big). \tag{28.540}$$

Nous avons alors, en utilisant le théorème 28.9 :

$$\begin{aligned}
T(y)(t, \lambda_1) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s, \lambda_1), \lambda_1\big) ds && \text{(28.541a)}\\
&= y_0 + \int_{t_0}^{t} g'(s) && \text{(28.541b)}\\
&= y_0 + g(t) - g(t_0) && \text{(28.541c)}\\
&= y_0 + g(t) - \underbrace{y(t_0, \lambda_1)}_{=y_0} && \text{(28.541d)}\\
&= g(t) && \text{(28.541e)}\\
&= y(t, \lambda_1). && \text{(28.541f)}
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $T(y) = y$.

□

28.11.6 Cauchy-Lipschitz analytique

PROPooSLVEooFeDlcO

Proposition 28.129 (Analytique et Lipschitz[1, 2])**.**
Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ analytique[69] sur $\bar{U}$. Alors pour tout compact K de U, il existe un réel $L_K > 0$ tel que

$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant L_K \|a - b\| \tag{28.542}$$

pour tout $a, b \in K$.

Démonstration. Étant donné que f est analytique, elle est C^∞ (proposition 17.213). En particulier l'application $df\colon K \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est continue et donc bornée. Nous utilisons le théorème des accroissements finis 14.351 :

$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant \sup_{x \in [a,b]} \|df_x\| \|b - a\| \leqslant \sup_{x \in K} \|df_x\| \|b - a\|. \tag{28.543}$$

Nous avons donc le résultat avec $L_k = \sup_{x \in K} \|df_x\|$. □

THOooHDHCooLMkfaB

Théorème 28.130 (Cauchy-Lipschitz réel analytique[4])**.**
Nous posons $\Lambda = \mathbb{R}^m$ et nous considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, un ouvert Γ de Λ ainsi qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ analytique[70] sur $\overline{\mathbb{R} \times U \times \Gamma}$.

Alors

(1) Pour tout $(t_0, y_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times U\Gamma$, il existe $R > 0$ et une unique application

$$y\colon B(t_0, R) \times B(\lambda_0, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \tag{28.544}$$

telle que

$$\begin{cases} (\partial_t y)(t, \lambda) = f\big(t, y(t, \lambda), \lambda\big) & \text{(28.545a)}\\ y(t_0, \lambda) = y_0 & \text{(28.545b)} \end{cases}$$

pour tout $(t, \lambda) \in B(t_0, \epsilon) \times B(\lambda_0, \epsilon)$.

(2) Celle application y est alors analytique sur $B(t_0, \epsilon) \times B(\lambda_0, \epsilon)$.

Démonstration. Par le théorème 28.124, il existe un $\rho > 0$ et une extension holomorphe

$$\tilde{f}\colon B_{\mathbb{C}}(t_0, \rho) \times B_{\mathbb{C}^n}(y_0, \rho) \times B_{\mathbb{C}^m}(\lambda_0, \rho) \to \mathbb{C}^n. \tag{28.546}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz holomorphe 28.128, il existe une unique fonction holomorphe

$$y_C\colon B_{\mathbb{C}}(t_0, \rho) \times B_{\mathbb{C}^m}(\lambda_0, \rho) \to \mathbb{C}^n \tag{28.547}$$

[69] Application analytique, définition 17.190.
[70] Application analytique, définition 17.190.

telle que

$$\begin{cases} (\partial_t y_C)(t,\lambda) = \tilde{f}\big(t, y_C(t,\lambda), \lambda\big) & (28.548a) \\ y_C(t_0,\lambda) = y_0 & (28.548b) \end{cases}$$

où $\partial_t y_C$ est la dérivée complexe de y_C par rapport à sa variable t. Et nous considérons la restriction y_R de y_C aux réels.

(1) **Nous avons** $\overline{\tilde{f}(t,z,\lambda)} = \tilde{f}(\bar{t},\bar{z},\bar{\lambda})$ LTEMooLAXTooDgZgWJ La fonction $\tilde{f}$ étant analytique, elle est une limite de polynômes dont les coefficients sont réels. Chacun de polynômes vérifie l'égalité parce que $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$ (proposition 4.118).

(2) $y_R(t,\lambda) \in \mathbb{R}^m$ Nous montrons que si $(t,\lambda) \in B_{\mathbb{R}}(t_0,\rho) \times B_{\mathbb{R}^m}(\lambda_0,\rho)$, alors $y_R(t,\lambda) \in \mathbb{R}^n$. Pour cela nous posons

$$w(t,\lambda) = \overline{y_C(\bar{t},\bar{\lambda})}, \tag{28.549}$$

et nous montrons que w vérifie la même équation que y_C. La partie unicité de Cauchy-Lipschitz holomorphe dira alors que $w = y_C$.

Nous calculons donc la dérivée complexe de w par rapport à la variable t. D'abord notez que la conjugaison complexe est continue (lemme 12.39), donc

$$\lim_{\epsilon\to 0} g(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} g(\bar{\epsilon}) \tag{28.550}$$ EQooDTGOooHQeHKr

pour tout fonction $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue en 0. Calcul :

$$\begin{aligned}
(\partial_t w)(t,\lambda) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{w(t+\epsilon,\lambda) - w(t,\lambda)}{\epsilon} && (28.551a)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{w(t+\bar{\epsilon},\lambda) - w(t,\lambda)}{\bar{\epsilon}} && \text{eq.(28.550)} \quad (28.551b)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\overline{y_C(\bar{t}+\epsilon,\bar{\lambda})} - \overline{y_C(\bar{t},\bar{\lambda})}}{\bar{\epsilon}} && (28.551c)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\overline{y_C(\bar{t}+\epsilon,\bar{\lambda}) - yC(\bar{t},\bar{\lambda})}}{\epsilon} && (28.551d)\\
&= \overline{(\partial_t y_C)(\bar{t},\bar{\lambda})} && (28.551e)\\
&= \overline{\tilde{f}\big(\bar{t}, y_C(\bar{t},\bar{\lambda}),\bar{\lambda}\big)} && (28.551f)\\
&= \tilde{f}\big(t, \overline{y_C(\bar{t},\bar{\lambda})}, \lambda\big) && \text{par (1)} \quad (28.551g)\\
&= \tilde{f}\big(t, w(t,\lambda),\lambda\big). && (28.551h)
\end{aligned}$$

On recopie juste pour le plaisir :

$$(\partial_t w)(t,\lambda) = \tilde{f}\big(t, w(t,\lambda),\lambda\big). \tag{28.552}$$

Mais $t_0 \in \mathbb{R}$, donc $\bar{t}_0 = t_0$, et donc

$$w(t_0,\lambda) = \overline{y_C(\bar{t}_0,\bar{\lambda})} = \overline{y_C(t_0,\bar{\lambda})} = \overline{y_C(t_0,\lambda)} = \bar{y}_0 = y_0. \tag{28.553}$$

La fonction w vérifie donc le problème

$$\begin{cases} (\partial_t w)(t,\lambda) = \tilde{f}\big(t, w(t,\lambda),\lambda\big) & (28.554a) \\ w(t_0,\lambda) = y_0. & (28.554b) \end{cases}$$

Par unicité de la solution, nous avons $w = y_C$:

$$\overline{y_C(\bar{t},\bar{\lambda})} = y_C(t,\lambda). \tag{28.555}$$

En particulier si $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^m$, nous avons $\bar{t} = t$ et $\bar{\lambda} = \lambda$ et $\overline{y_C(t,\lambda)} = t_C(t,\lambda)$, c'est-à-dire $y_C(t,\lambda) \in \mathbb{R}^n$. Nous avons donc bien

$$y_R\colon B_{\mathbb{R}}(t_0,\rho) \times B_{\mathbb{R}^m}(\lambda_0,\rho) \to \mathbb{R}^n. \tag{28.556}$$

(3) y_R **vérifie l'équation** Prenons $(t,\lambda)\in B_{\mathbb{R}}(t_0,\rho)\times B_{\mathbb{R}^m}(\lambda_0,\rho)$, et calculons la dérivée réelle :

$$(\partial_t y_R)(t,\lambda)=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\in\mathbb{R}}}\frac{y_R(t+\epsilon,\lambda)-y_R(t,\lambda)}{\epsilon} \tag{28.557a}$$

$$=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\in\mathbb{R}}}\frac{y_C(t+\epsilon,\lambda)-y_C(t,\lambda)}{\epsilon}. \tag{28.557b}$$

Mais y_C est complexe-dérivable, donc la dernière limite est égale à la même limite avec $\epsilon\in\mathbb{C}$:

$$(\partial_t y_R)(t,\lambda)=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\in\mathbb{R}}}\frac{y_C(t+\epsilon,\lambda)-y_C(t,\lambda)}{\epsilon} \tag{28.558a}$$

$$=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon\in\mathbb{C}}}\frac{y_C(t+\epsilon,\lambda)-y_C(t,\lambda)}{\epsilon} \tag{28.558b}$$

$$=(\partial_t y_C)(t,\lambda) \tag{28.558c}$$

où à droite, $(\partial_t y_C)$ est la dérivée complexe. On continue à calculer avec les justifications en-dessous :

$$(\partial_t y_R)(t,\lambda)=(\partial_t y_C)(t,\lambda) \tag{28.559a}$$

$$=\tilde{f}\big(t,y_C(t,\lambda),\lambda\big) \tag{28.559b}$$

$$=\tilde{f}\big(t,y_R(t,\lambda),\lambda\big) \tag{28.559c}$$

$$=f\big(t,y_R(t,\lambda),\lambda\big). \tag{28.559d}$$

Justifications :

- $y_C(t,\lambda)=y_R(t,\lambda)$
- $y_R(t,\lambda)\in\mathbb{R}^n$.
- $\tilde{f}=f$ lorsque les arguments sont réels.

(4) **Existence** Il y a existence du problème réel : y_R fait l'affaire.

Nous passons à l'unicité. Nous considérons y_R et y_C des solutions réelles et complexes comme avant. Nous prenons une autre solution réelle x_R et nous considérons sa complexification $x_C=P(x_R)$. À ce point, nous ne savons pas si x_C est une solution du problème complexe. C'est ce que nous allons prouver. Le lemme 28.126 permet de dire que

$$P(\partial_t x_R)=\partial_t P(x_R)=\partial_t x_C. \tag{28.560}$$

Notez que x_R est solution du problème réel, donc

$$(\partial_t x_R)(t,\lambda)=f\big(t,x_R(t,\lambda),\lambda\big). \tag{28.561}$$

Nous définissons les applications

$$\begin{aligned} g\colon B_{\mathbb{R}}(t_0,\rho)\times B_{\mathbb{R}^m}(\lambda_0,\rho)&\to\mathbb{R}^n\\ (t,\lambda)&\mapsto f\big(t,x_R(t,\lambda),\lambda\big)\end{aligned} \tag{28.562}$$

et

$$\begin{aligned} h\colon B_{\mathbb{C}}(t_0,\rho)\times B_{\mathbb{C}^m}(\lambda_0,\rho)&\to\mathbb{C}^n\\ (t,\lambda)&\mapsto P(f)\big(t,x_C(t,\lambda),\lambda\big).\end{aligned} \tag{28.563}$$

L'application h est holomorphe parce que x_C est holomorphe et le tout est une composée de fonctions holomorphes[71]. Voyons que $P(f)$ et h coïncident sur les réels. Soit donc $(t,\lambda)\in B_{\mathbb{R}}(t_0,\rho)\times B_{\mathbb{R}^m}(\lambda_0,\rho)$; nous avons

$$P(g)(t,\lambda)=g(t,\lambda)=f\big(t,x_R(t,\lambda),\lambda\big). \tag{28.564}$$

Et d'autre part, $x_C(t,\lambda)=x_R(t,\lambda)\in\mathbb{R}^n$, de telle sorte que

$$h(t,\lambda)=P(f)\big(t,x_C(t,\lambda),\lambda\big)=P(f)\big(t,x_R(t,\lambda),\lambda\big)=f\big(t,x_R(t,\lambda),\lambda\big). \tag{28.565}$$

Bref, $P(g)=h$ sur les réels. Par le principe des zéros isolés[72], nous avons $P(g)=h$ partout.

[71] Qui est alors holomorphe par la proposition 28.116.
[72] Théorème 19.164.

Parce que x_R est une solution du problème réel, nous avons $\partial_t x_R = g$. Donc

$$\begin{aligned} P(\partial_t x_R)(t,\lambda) &= P(g)(t,\lambda) && (28.566a)\\ &= h(t,\lambda) && (28.566b)\\ &= P(f)\big(t, x_C(t,\lambda),\lambda\big) && (28.566c)\\ &= \tilde{f}\big(t, x_C(t,\lambda)\lambda\big). && (28.566d) \end{aligned}$$

Et aussi parce que x_R est solution réelle, l'application $\lambda \mapsto x_C(t_0,\lambda)$ est holomorphe et coïncide sur $B_{\mathbb{R}^m}(\lambda_0,\rho)$ avec $\lambda \mapsto x_R(t_0,\lambda) = y_0$. Donc $x_C(t_0,\lambda) = y_0$ pour tout $\lambda \in B_{\mathbb{C}^m}(\lambda_0,\rho)$.

Tout ça pour dire que x_C est une solution du problème complexe. Par unicité de Cauchy-Lipschitz holomorphe, nous avons $x_C = y_C$. Et donc en particulier sur les réels, $x_R = y_R$. □

Chapitre 29

Analyse fonctionnelle

29.1 Théorème d'isomorphisme de Banach

ThofQShsw

Théorème 29.1 (théorème d'isomorphisme de Banach[739]).
Une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme[1].

Démonstration. Soit une application linéaire bijective et continue $f: E \to F$ entre deux espaces de Banach. En particulier elle est surjective, et le théorème de l'application ouverte 12.211 s'applique : f est une application ouverte.

Vu que f est bijective et ouverte, la proposition 12.207 implique que f^{-1} est continue. L'application f est donc continue d'inverse continue. Elle est donc un homéomorphisme. □

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 29.2
Il est donné dans [740] un exemple d'application linéaire et bijective dont l'inverse n'est pas continue. Si un jour vous le mettez au propre, faites-m'en profiter en m'envoyant une photo de votre feuille.

29.2 Théorème d'Ascoli

PropDGsPtpU

Proposition-Définition 29.3 (Application compacte[484]).
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooAFNXooUGbZsh

(1) L'image d'un borné de E par f est relativement compacte[2] *dans F.*

ItemJIkpUbLii

(2) L'image par f de la boule unité fermée est relativement compacte dans F.

ITEMooQKISooBpyyee

(3) Si (x_n) est une suite bornée dans E, alors nous pouvons en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $y_n = f\big(x_{\varphi(n)}\big)$ converge dans F.

Une application vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 29.3 est dite ***compacte****.*

Démonstration. En trois parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** La boule unité fermée est bornée, et donc son image est relativement compacte.

(2) **(2) ⇒ (3)** Soient (x_n) bornée dans E, et soit M, une borne. Nous avons donc

$$z_n = f\left(\frac{x_n}{M}\right) \in f\big(B(0,1)\big) \subset \overline{f\big(B(0,1)\big)}. \tag{29.1}$$

Par hypothèse, la partie $\overline{f\big(B(0,1)\big)}$ est compacte ; la suite (z_n) est contenue dans ce compact. Nous en déduisons que (z_n) admet une sous-suite convergente. Soit donc $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$f\left(\frac{x_{\varphi(n)}}{M}\right) \to y. \tag{29.2}$$

Vu que f est linéaire, nous avons aussi $f\big(x_{\varphi(n)}\big) \to My$.

[1] Définition 9.54.
[2] Relativement compact, définition 9.145.

(3) **(3) ⇒ (1)** Soit une partie bornée A de F. Nous prouvons que $\overline{f(A)}$ est compact. Pour cela nous considérons une suite (y_n) dans $\overline{f(A)}$. Soit $\epsilon_k \to 0$. Pour chaque n, l'élément y_n est dans la fermeture de $f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe un élément de $f(A)$ dont la distance à y_n est plus petite que ϵ_n. Bref, il existe une suite (x_n) dans A telle que

$$\|f(x_n) - y_n\| \leqslant \epsilon_k. \tag{29.3}$$

La suite (x_n) est bornée parce qu'elle est contenue dans A. Donc il existe une sous-suite $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$f\big(x_{\varphi(n)}\big) \to y \tag{29.4}$$

pour un certain $y \in \overline{f(A)}$. Le fait que y soit dans $\overline{f(A)}$ est dû au fait que la suite $n \mapsto f(x_n)$ est une suite dans $f(A)$; donc la limite est dans la fermeture de $f(A)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \|y_{\varphi(n)} - y\| &\leqslant \|y_{\varphi(n)} - f\big(x_{\varphi(n)}\big)\| + \|f\big(x_{\varphi(n)}\big) - y\| && \text{(29.5a)}\\ &\leqslant \epsilon_k + \|f\big(x_{\varphi(n)}\big) - y\| \to 0. && \text{(29.5b)} \end{aligned}$$

Donc la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $y \in \overline{f(A)}$. Nous avons montré que toute dans $\overline{f(A)}$ possédait une sous-suite convergente dans $\overline{f(A)}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass 9.213 conclut que $\overline{f(A)}$ est compact et donc que $f(A)$ est relativement compact.

□

LEMooQCJTooNmMXEC

Lemme 29.4 ([1]).
Soient un espace métrique (E, d) ainsi qu'un espace compact K. Nous considérons la distance uniforme d_∞ sur $C^0(K, E)$. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} \varphi\colon \big(C^0(K,E), d_\infty\big) &\to (E, d)\\ f &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{29.6}$$

est continue.

Démonstration. Soit $y \in E$. Tout ouvert contenant y contient une boule $B(y, r)$. Nous montrons que $\varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$ est ouverte. Soit $f_0 \in \varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$. Nous allons trouver un $\epsilon > 0$ tel que $B(f_0, \epsilon) \subset \varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$. Les éléments f_0, x et y sont fixés, et nous avons $d\big(f_0(x), r\big) < r$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que[3]

$$d\big(f_0(x), y\big) < \alpha < r. \tag{29.7}$$

Nous choisissons $\epsilon < r - \alpha$ et nous calculons un peu :

$$\begin{aligned} d\big(g(x), y\big) &\leqslant d\big(g(x), f_0(x)\big) + d\big(f_0(x), y\big) && \text{(29.8a)}\\ &= \epsilon + d\big(f_0(x), y\big) && \text{(29.8b)}\\ &< \epsilon + \alpha && \text{(29.8c)}\\ &< r. && \text{(29.8d)} \end{aligned}$$

Donc $B(f_0, \epsilon) \subset \varphi^{-1}\big(B(y,r)\big)$.

Cela étant fait, nous prouvons que φ est continue. Soit un ouvert A de E. Pour montrer que $\varphi^{-1}(A)$ est ouvert dans $C^0(K, E)$, nous considérons $f_0 \in \varphi^{-1}(A)$ et nous allons trouver un ouvert S tel que $f_0 \in S \subset \varphi^{-1}(A)$.

Nous avons $f_0(x) \in A$; nous considérons une boule $B\big(f_0(x), r\big) \subset A$, et nous allons trouver un ouvert $S \subset C^0(K, E)$ tel que $f_0 \in S \subset \varphi^{-1}(A)$. La partie A étant ouverte dans le métrique E nous pouvons considérer $r > 0$ tel que $B\big(f_0(x), r\big) \subset A$. □

LEMooKWGOooKzqDud

Lemme 29.5 ([1]).
Soient des espaces topologiques X et Y. Nous considérons la topologie de la norme uniforme sur $C^0(X, Y)$. Soit une partie A de $C^0(X, Y)$. Si $f \in \mathrm{Adh}_{C^0(X,Y)}(A)$, alors $f(x) \in \mathrm{Adh}_Y\big(A(x)\big)$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Adh}(A)$, alors il existe une suite (f_n) dans A telle que $f_n \xrightarrow{C^0(X,Y)} f$, et donc telle que $f_n(x) \xrightarrow{Y} x$. Vu que chacun des $f_n(x)$ est dans $A(x)$, nous avons bien $f(x) \in \mathrm{Adh}_Y\big(A(x)\big)$. □

[3] Par exemple par le lemme 4.60(1).

PROPooCGBHooCpKycz

Proposition 29.6 ([306]).
Soient des espaces topologiques X et Y. Nous considérons une suite équicontinue d'applications $f_n\colon X \to Y$ telle que $f_n \xrightarrow{simple} f$. Alors la convergence est uniforme sur tout compact.

ThoKRbtpah

Théorème 29.7 (Théorème d'Ascoli[741]).
Soient un espace topologique compact K et un espace métrique (E,d). Nous considérons la topologie de la distance uniforme[4] sur $C^0(K,E)$. Une partie A de $C^0(K,E)$ est relativement compacte[5] si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

(1) A est équicontinu[6],

(2) $\forall x \in K$, l'ensemble $A(x) = \{f(x) \text{ tel que } f \in A\}$ est relativement compact dans E.

Démonstration. Attention, ça va être un peu long.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $A \subset C^0(K,E)$ est relativement compact. Nous notons B un compact contenant A. Soit $x \in K$. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned}\varphi\colon \big(C^0(K,E), d_\infty\big) &\to (E,d)\\ f &\mapsto f(x).\end{aligned} \tag{29.9}$$

est continue par le lemme 29.4. La partie B est compacte dans $C^0(K,E)$. Donc $B(x) = \varphi(B)$ est compacte dans E par le théorème 9.298. Vu que $A(x) \subset B(x)$ nous avons montré que $A(x)$ est relativement compact.

Nous devons montrer que A est équicontinu. Nous prouvons que B est équicontinu en x en utilisant la caractérisation du lemme 9.393. Vu que B est compact, il existe un nombre fini de $f_0,\dots,f_n \in B$ tels que

$$B \subset \bigcup_{k=0}^{n} B(f_i,\epsilon) \tag{29.10}$$

où $B(f_i,\epsilon)$ est la boule dans $\big(C^0(K,E),d_\infty\big)$. Chacune des f_i est continue en x ; donc il existe un voisinage V_i de x tel que $d\big(f_i(x),f_i(y)\big) < \epsilon$ pour tout $y \in V_i$. Nous posons

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \tag{29.11}$$

qui, en tant que réunion finie d'ouverts contenant x, est un ouvert contenant x. Pour $f \in B$ et $y \in V$ nous avons

$$d\big(f(x),f(y)\big) \leqslant d\big(f(x),f_j(x)\big) + d\big(f_j(x),f_j(y)\big) + d\big(f_j(y),f(y)\big) < 3\epsilon. \tag{29.12}$$

(2) $\Leftarrow$ En plusieurs parties. Nous considérons l'adhérence B de A dans $C^0(K,E)$.

(2a) **A est précompact** Nous montrons que A est précompact (définition 9.163). Soit $\epsilon > 0$. Étant donné que A est équicontinu, pour chaque $x \in K$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que

$$d\big(f(y),f(x)\big) < \epsilon \tag{29.13}$$

pour tout $y \in U_x$ et pour tout $f \in A$. Les parties $\{U_x\}_{x\in K}$ forment un recouvrement du compact K par des ouverts. Il existe donc $x_1,\dots,x_n \in K$ tels que $U_{x_1},\dots,U_{x_n}$ recouvrent K.

Nous posons

$$L = A(x_1) \cup \dots \cup A(x_n). \tag{29.14}$$

La partie L est relativement compacte parce qu'elle est contenue dans $B_{x_1} \cup \dots B(x_n)$ qui est relativement compact comme union de relativement compacts.

(2a.i) **Les parties C_a**
Par relative compacité, il existe une partie finie J de E telle que

$$L \subset \bigcup_{s\in J} B(s,\epsilon). \tag{29.15}$$

[4] Définition 9.299.
[5] Sa fermeture est compacte, définition 9.145.
[6] Définition 9.391.

Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in J^n$ nous posons

$$C_a = \{f \in C^0(K,E) \text{ tel que } \forall i = 1, \dots, n \forall y \in U_{x_i}, d\big(f(y), a_i\big) < 2\epsilon\}. \tag{29.16}$$

Notons que J^n étant fini, il existe seulement une quantité finie de telles parties.

(2a.ii) **Les C_a recouvrent A** Nous vérifions maintenant que les $\{C_a\}_{a\in J^n}$ recouvrent A. Soit $f \in A$. Vu que $f(x_i) \in A(x_i) \subset L$ nous avons $f(x_i) \in B(s_i, \epsilon)$ pour un certain $s_i \in J \subset E$. Nous considérons l'élément $s = (s_1, \dots, s_n) \in J^n$. Nous prouvons que $f \in C_s$. En effet soit $i = 1, \dots, n$ et $y \in U_{s_i}$. Nous avons

$$d\big(f(y), s_i\big) \leqslant d\big(f(y), f(x_i)\big) + d\big(f(x_i), s_i\big). \tag{29.17}$$

D'abord $d\big(f(x_i), s_i\big) \leqslant \epsilon$ parce que s_i a été choisi pour que $f(x_i) \in B(s_i, \epsilon)$. Ensuite $d\big(f(y), f(x_i)\big) \leqslant \epsilon$ parce que $y \in U_{x_i}$. Bref, $d\big(f(y), s_i\big) \leqslant 2\epsilon$ et $f \in C_s$.

(2a.iii) **A est précompact** Chacun des C_a est contenu dans une boule de taille 2ϵ. Donc A est recouvert par un nombre fini de boules de rayon 2ϵ.

(2b) **B est précompact** Pour rappel, B est l'adhérence de A dans $C^0(K,E)$. La proposition 9.164 dit que B est précompacte en tant qu'adhérence du précompact A.

(2c) **B est complet** Soit une suite de Cauchy (f_n) dans $\mathrm{Adh}_{C^0(K,E)}(A)$. Alors, étant donné le lemme 29.5, pour chaque $x \in K$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ est une suite dans $\mathrm{Adh}_E\big(A(x)\big)$. Montrons qu'elle est même une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n \geqslant N$, alors $d_\infty(f_m, f_n) < \epsilon$. Pour de tels N, m, n nous avons

$$d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant \sup_{y\in K} d\big(f_n(y), f_m(y)\big) = d_\infty(f_m, f_n) < \epsilon. \tag{29.18}$$

La partie $A(x)$ étant relativement compacte, elle est contenue dans un compact S de E. Il se fait que S est complet par la proposition 9.337. Donc $f_n(x)$ converge dans E. Nous notons $f(x)$ cette limite. Cela nous définit une application $f\colon K \to E$.

Nous avons $f_n \xrightarrow{simple} f$, mais n'indique pour l'instant que $f \in C^0(K,X)$ et encore moins que $f_n \xrightarrow{C^0(K,X)} f$. C'est ce que nous voyons maintenant.

D'après la proposition 29.6, la convergence est uniforme sur tout compact. Or justement $f_n \to f$ est une convergence simple sur le compact K. Donc c'est une convergence uniforme et la limite est continue par la proposition 14.397. La convergence uniforme étant également celle de $C^0(K,E)$, nous avons bien $f_n \xrightarrow{C^0(K,E)} f$. Et donc $f \in \mathrm{Adh}_{C^0(K,E)}(A)$ parce que $f_n \in \mathrm{Adh}_{C^0(K,E)}(A)$ pour chaque n.

Cela montre que B est complet.

(2d) **B est compact** Nous savons que B est précompact et complet. La proposition 9.165 dit qu'alors B est compact.

(2e) **Conclusion** Vu que l'adhérence de A est compacte, nous déduisons que A est précompact.

□

La version suivante du théorème de Banach-Steinhaus est énoncée de façon *ad hoc* pour fonctionner avec l'espace $\mathscr{D}(K)$ des fonctions de classe C^∞ à support dans le compact K. Un énoncé un peu plus fort est donné dans le cadre des espaces de Fréchet dans [274].

ThoNBrmGIg

Théorème 29.8 (Banach-Steinhaus avec des seminormes[1]).
Soit (E,d) un espace vectoriel métrique complet dont la topologie est également[7] *donnée par une famille $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ de seminormes. Soit $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille d'applications linéaires continues $T_\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in E$ nous ayons*

$$\sup_{\alpha\in A} \big|T_\alpha(x)\big| < \infty. \tag{29.19}$$

Alors il existe une constante $K > 0$ et un sous-ensemble fini $J \subset I$ tels que pour tout $x \in E$ et pour tout $\alpha \in A$ nous ayons

$$\big|T_\alpha(x)\big| \leqslant K \max_{j\in J} p_j(x). \tag{29.20}$$

EqIFNGhtr

[7] Au sens où les ouverts sont les mêmes.

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nous posons

$$\Omega_k = \{x \in E \text{ tel que } \sup_{\alpha \in A} \left|T_\alpha(x)\right| > k\}. \tag{29.21}$$

Ces ensembles sont des ouverts (pour la même raison que dans la preuve du théorème 12.202) et leur union est E en entier parce que par hypothèse $\sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(x)\right| < \infty$.

(1) **Les Ω_k ne sont pas tous denses** Le théorème 9.438 nous dit que (E, d) est un espace de Baire. Supposons que les Ω_k sont tous denses. Dans ce cas, l'intersection des Ω_k est également dense (c'est la définition 9.436 d'un espace de Baire), et en particulier non vide.

Soit $x_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Nous avons

$$\sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(x_0)\right| = \infty, \tag{29.22}$$

ce qui contredirait l'hypothèse. Donc les Ω_k ne sont pas tous denses.

(2) **Un non dense** Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que Ω_{k_0} n'est pas dense dans E. Il existe donc $x_0 \in E$ et un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x_0 n'intersectant pas Ω_{k_0}.

(3) **Topologie**

Parlons de topologie sur E. L'ouvert $\mathcal{O}$ est un d-ouvert et donc un $\mathcal{P}$-ouvert, lequel contient une $\mathcal{P}$-boule ouverte[8]. Cette dernière boule n'est pas spécialement une d-boule, mais c'est un d-ouvert.

(4) **Une majoration**

Il existe dont J fini dans I et $\rho > 0$ tels que $B_J(x_0, \rho) \subset \mathcal{O}$ et donc tels que

$$B_J(x_0, \rho) \cap \Omega_{k_0} = \varnothing. \tag{29.23}$$

Donc pour tout $z \in B_J(x_0, \rho)$ nous avons

$$\sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(z)\right| \leqslant k_0. \tag{29.24}$$

Si maintenant $y \in B_J(0, \rho)$, nous avons $y = (x_0 + y) - x_0$ et donc

$$\begin{aligned} \left|T_\alpha(y)\right| &= \left|T_\alpha(x_0 + y) - T_\alpha(x_0)\right| && (29.25a)\\ &\leqslant \left|T_\alpha(x_0 + y)\right| + \left|T_\alpha(x_0)\right| && (29.25b)\\ &\leqslant k_0 + C. && (29.25c) \end{aligned}$$

Justifications.

- $x_0 + y \in B_J(x_0, \rho)$, donc $\left|T_\alpha(x_0 + y)\right| \leqslant k_0$.
- nous avons posé $C = \sup_{\alpha\in A} \left|T_\alpha(x_0)\right|$

(5) **Sur la boule unité** En divisant par ρ, pour $y \in B_J(0, 1)$ nous avons

$$\left|T_\alpha(y)\right| \leqslant \rho^{-1}(k_0 + C). \tag{29.26}$$

EQooOVHLooSonnig

(6) **Un bon élément dans la boule unité** Pour n'importe quel $x \in E$ nous avons

$$\frac{x}{\max_{j\in J} p_j(x)} \in B_J(0, 1). \tag{29.27}$$

Nous pouvons donc appliquer (29.26) à cet élément :

$$\left|T_\alpha\left(\frac{x}{\max_{j\in J} p_j(x)}\right)\right| \leqslant \rho^{-1}(k_0 + C). \tag{29.28}$$

Utilisant encore la linéarité de T_α nous trouvons ce que nous devions trouver :

$$\left|T_\alpha(x)\right| \leqslant \max_{j\in J} p_j(x)\rho^{-1}(k_0 + C) = K \max_{j\in J} p_j(x) \tag{29.29}$$

en posant $K = \rho^{-1}(k_0 + C)$.

[8] Définition 9.415.

□

CorPGwLluz

Corolaire 29.9 ([1, 232]).
Soit $\big(X, \{p_i\}_{i\in I}\big)$, un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ seminormé qui est

(1) localement compact[9]*,*

(2) métrisable et complet.

Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'application linéaires continues $X \to \mathbb{C}$ telles que pour tout $x \in X$ il existe[10] *$\alpha_x \in \mathbb{C}$ tel que*

$$T_j x \xrightarrow{\mathbb{C}} \alpha_x. \tag{29.30}$$

Si nous posons $Tx = \alpha_x$ alors

ItemAEOtOMLi

(1) L'application T est linéaire et continue.

ITEMooEVIXooBpaWOc

(2) Si $x_k \xrightarrow{X} x$, alors

$$|T_k(x_k) - T(x_k)| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{29.31}$$

ITEMooJYOVooPIkHBo

(3) Pour tout compact K dans X nous avons

$$\sup_{x\in K} |T_k x - Tx| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{29.32}$$

ItemAEOtOMLiii

(4) si $x_k \to x$ dans X alors

$$T_k x_k \xrightarrow{\mathbb{C}} Tx. \tag{29.33}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Linéaire** Vu que X est seminormé et que $\mathbb{C}$ est un corps valué, la proposition 9.418 nous indique que X est un espace vectoriel topologique et la proposition 9.283 nous dit que la limite de suite est une opération linéaire. Pour $x, y \in X$ nous pouvons donc faire

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= \lim_{j\to\infty} \big(T_j(x+y)\big) && (29.34a)\\
&= \lim_{j\to\infty} \big(T_j(x) + T_j(y)\big) && (29.34b)\\
&= \lim_{j\to\infty} T_j(x) + \lim_{j\to\infty} T_j(y) && (29.34c)\\
&= T(x) + T(y). && (29.34d)
\end{aligned}$$

De même nous avons

$$\begin{aligned}
T(\lambda x) &= \lim_{k\to\infty} \big(T_j(\lambda x)\big) && (29.35a)\\
&= \lim_{j\to\infty} \big(\lambda T_j(x)\big) && (29.35b)\\
&= \lambda \lim_{j\to\infty} T_j(x) && (29.35c)\\
&= \lambda T(x). && (29.35d)
\end{aligned}$$

(2) **Séquentiellement continue** Nous prouvons que T est séquentiellement continue[11]. Soit une suite $x_k \xrightarrow{X} x$. Nous voulons utiliser le théorème de Banach-Steinhaus 29.8. L'ensemble $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un ensemble d'applications linéaires continues. De plus, si $x \in X$, la suite $k \mapsto T_k(x)$ est une suite convergente dans $\mathbb{C}$; elle est donc bornée :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |T_k(x)| < \infty. \tag{29.36}$$

Le théorème de Banach-Steinhaus nous dit qu'il existe un $C > 0$ et J fini dans I tels que pour tout k et pour tout x nous ayons

$$|T_k(x)| \leqslant C \max_{j\in J} p_j(x). \tag{29.37}$$

[9] Définition 9.198.
[10] L'unicité des α_x et donc le fait que tout le reste ait un sens provient de l'hypothèse de séparabilité et la proposition 9.90.
[11] Définition 9.166

Un seul $i \in J$ nous suffira. Soient donc $C > 0$ et $i \in I$ tels que $|T_k(x)| \leqslant Cp_i(x)$ pour tout x. Vu que le module est une opération continue sur $\mathbb{C}$, elle commute avec la limite et nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
|T(x)| &= |\lim_{k\to\infty} T_k(x)| && (29.38a)\\
&= \lim_{k\to\infty} |T_k(x)| && (29.38b)\\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} Cp_i(x) && (29.38c)\\
&= Cp_i(x). && (29.38d)
\end{aligned}$$

Avec ça nous pouvons prouver que T est séquentiellement continue. Soit $x_k \xrightarrow{X} 0$. En utilisant la proposition 9.417 nous avons :

$$|T(x_k)| \leqslant Cp_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \tag{29.39}$$

Donc $|T(x_k)| \to 0$ et T est séquentiellement continue en zéro. Vu que T est linéaire, elle est séquentiellement continue partout.

(3) **Continue** Vu que l'espace X est métrisable, la proposition 9.173 conclut que T est continue.

(4) **Point (2)**

Nous passons à la preuve de (2). Supposons que $x_k \xrightarrow{X} x$. Voici des majorations avec justifications juste en-dessous :

$$\begin{aligned}
|T_k(x_k) - T(x_k)| &\leqslant |T_k(x_k) - T_k(x)| + |T_k(x) - T(x_k)| && (29.40a)\\
&= |T_k(x_k - x)| + |T_k(x) - T(x_k)| && (29.40b)\\
&\leqslant Cp_i\big(x_k - x\big) + |T_k(x) - T(x_k)| && (29.40c)\\
&\leqslant C\epsilon + |T_k(x) - T(x_k)| && (29.40d)\\
&\leqslant C\epsilon + |T_k(x) - T(x)| + |T(x) - T(x_k)| && (29.40e)\\
&\leqslant (C+2)\epsilon. && (29.40f)
\end{aligned}$$

SUBEQooQLXIooSvvNcx
SUBEQooVLNVooOVsQno
SUBEQooHSTIooJgfChZ

Justifications :

- Pour (29.40c). C'est le théorème de Banach-Steinhaus 29.8 qui nous assure l'existence d'un $i \in I$ et d'une $C \in \mathbb{R}^+$ qui donne la majoration.
- Pour (29.40d). Nous nous sommes fixé un $\epsilon > 0$ et nous avons pris k assez grand. Pour la topologie des seminormes, la convergence $y_k \xrightarrow{X} y$ implique la limite $p_i(y_k - y) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ pour toutes les seminormes, et en particulier pour celle donnée par le théorème de Banach-Steinhaus.
- Pour (29.40f). D'une part, par hypothèse et par définition de T, nous avons $T_k(x) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(x)$ et d'autre part par continuité séquentielle de T et par convergence de $x_k \xrightarrow{X} x$ nous avons $T(x_k) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(x)$.
  En prenant k encore plus grand, nous avons toutes les majorations en même temps.

Nous avons donc bien

$$|T_k(x_k) - T(x_k)| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{29.41}$$

(5) **Point (3)** Nous nous lançons dans la preuve du point (3). En vertu du point (1), l'application

$$\begin{aligned}
S_k\colon K &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto |T_k(x) - T(x)|
\end{aligned} \tag{29.42}$$

est continue. Vu que K est un compact, le théorème 9.215, nous indique qu'il existe x_k tel que

$$|T_k(x_k) - T(x_k)| = \sup_{x\in K} |T_k(x) - T(x)|. \tag{29.43}$$

Nous considérons la suite

$$a_k = |T_k(x_k) - T(x_k)| \tag{29.44}$$

et nous allons montrer que

- toutes les sous-suites convergentes de (a_k) convergent vers 0.

- la suite (a_k) est contenue dans un compact de $\mathbb{R}$.

Ensuite le corolaire 9.364 terminera.

(5a) **Toutes les sous-suites convergentes** Soit $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que la suite $b_k = a_{\varphi(k)}$ soit convergente. Nous allons trouver une sous-suite qui converge vers 0. La suite $k\mapsto a_{\varphi(k)}$ est une suite dans le compact K ; elle contient donc une sous-suite convergente. Soit donc $\psi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que $k\mapsto a_{(\varphi\circ\psi)(k)}$ soit convergente. Nous étudions la sous-suite $c_k = b_{\psi(k)}$ et nous allons prouver que $c_k\to 0$.

Pour ne pas mourir sous les notations, nous posons $\sigma=\varphi\circ\psi$. Nous avons donc $x_{\sigma(k)}\xrightarrow{X} x$, et donc $|T_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)})-T(x_{\sigma(k)})|\xrightarrow{\mathbb{R}}0$ par le point (2).

Donc la suite $a_{\varphi(k)}$ qui est convergente contient une sous-suite qui converge vers 0. La suite $a_{\varphi(k)}$ converge donc vers 0.

(5b) **Dans un compact** Nous allons prouver que $|T_k(x_k)-T(x_k)|$ est bornée. Supposons que ce ne soit pas le cas. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, il existe un k tel que $|T_k(x_k)-T(x_k)|>n$. En numérotant bien, il existe une application $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$|T_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})-T(x_{\varphi(k)})|>k. \tag{29.45}$$

EQooRGVOooXJDkQx

La suite $k\mapsto x_{\varphi(k)}$ est une suite dans le compact K. Elle admet une sous-suite convergente. En nommant $x_{\sigma(k)}$ cette sous-suite, nous avons $x_{\sigma(k)}\xrightarrow{X}x$, et nous nous avons encore $|T_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)})-T(x_{\sigma(k)})|\xrightarrow{\mathbb{R}}0$.

Ouais mais bon. Une suite qui vérifie (29.45) ne peut pas avoir une sous-suite convergente. Contradiction.

(6) **Point (4)** Nous avons la majoration

$$|T_kx_k-Tx|\leqslant|T_kx_k-Tx_k|+|Tx_k-T_x|. \tag{29.46}$$

Par le point (2), le premier terme tend vers zéro. La continuité de T (point (1)) s'occupe du deuxième terme.

□

29.3 Espaces de Lebesgue L^p

SecVKiVIQK

29.3.1 Généralités

DEFooKMJQooXeaUtp

Définition 29.10.
*Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Deux fonctions à valeurs complexes f et g sur cet espaces sont dites **équivalentes** et nous notons $f\sim g$ si elles sont μ-presque partout égales. Nous notons $[f]$ la classe de f pour cette relation.*

Nous allons souvent noter f indifféremment pour la fonction f et un des représentants de la classe de f. Toutefois, lorsque la distinction sera importante, nous essayerons de faire faire l'effort de distinguer la fonction f de sa classe $[f]$.

Lemme 29.11.
Une classe contient au maximum une seule fonction continue.

Démonstration. Soient deux fonctions continues f_1 et f_2 avec $f_1(a)\neq f_2(a)$. Si $|f_1(a)-f_2(a)|>\delta$ alors il existe un ϵ tel que $|f_1(x)-f_1(a)|>\delta$ pour tout $x\in B(a,\epsilon)$. En particulier $f_1\neq f_2$ sur $B(a,\epsilon)$. Cette dernière boule est de mesure de Lebesgue non nulle ; ergo f_1 et f_2 ne sont pas dans la même classe. □

DEFooTHIDooWYzBtn

Définition 29.12.
Pour $p\geqslant 1$, nous introduisons l'opération

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{29.47}$$

EQooBDBXooCHRmpo

et nous notons $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω telles que $\|f\|_p<\infty$.

29.13.
Le fait que f doive être mesurable pour être dans L^p est bien dans la définition de L^p, et non une propriété qui pourrait être déduite de la finitude de l'intégrale (29.47).

Soit $\Omega = \mathbb{R}$ muni de ses boréliens ou même de sa tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue. Si A est une partie bornée non mesurable (exemple 16.159), alors nous considérons un borné mesurable K contenant A et la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in K \setminus A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29.48}$$

Nous avons alors $|f| = \mathbb{1}_K$. Vu que K est borné, $\int_{\mathbb{R}} |f| = \mu(K)$ ne présente pas de problèmes. Donc f serait un élément de $L^1(\mathbb{R})$ sans être mesurable.

Pour éviter cela, nous incluons la mesurabilité dans la définition de $\mathcal{L}^p$.

LEMooHVZGooRwHXMk

Lemme 29.14 ([1]).
L'ensemble $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Pour rappel, nous ne considérons les choses que pour $p \geqslant 1$. Le fait que si $f \in L^p$, alors $\lambda f \in L^p$ est évident. Ce qui est moins immédiat, c'est le fait que $f + g \in L^p$ lorsque f et g sont dans L^p. Cela découle d'une part du fait que la fonction $\varphi\colon x \mapsto x^p$ est convexe sur les positifs (lemme 19.116), de telle sorte que

$$\varphi\left(\frac{|a| + |b|}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(|a|) + \varphi(|b|)}{2}, \tag{29.49}$$

ou encore

$$(|a| + |b|)^p \leqslant 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p) \tag{29.50}$$

EqZFSduFa

Et d'autre part, nous savons que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (proposition 11.106(1)). Donc

EQooKRMEooSLHUUc

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f + g|^p d\mu &= \int_\Omega |f(\omega) + g(\omega)|^p d\mu(\omega) && \text{(29.51a)} \\ &\leqslant \int_\Omega \big(|f(\omega)| + |g(\omega)|\big)^p d\mu(\omega) && \text{(29.51b)} \\ &\leqslant 2^{p-1} \int_\Omega \big(|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p\big) d\mu(\omega) && \text{(29.51c)} \\ &= 2^{p-1}\big(\|f\|_p^p + |g|_p^p\big). && \text{(29.51d)} \end{aligned}$$

Donc si f et g sont dans $\mathcal{L}^p$, alors $f + g$ est dans $\mathcal{L}^p$. □

29.15.
Il est à noter que nous ne considérons que des valeurs $p \geqslant 1$, précisément parce que la fonction $x \mapsto |x|^p$ n'est pas convexe lorsque $p < 1$.

Dans le même ordre d'idées, si $p \geqslant 1$, alors le $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{29.52}$$

est également $q \geqslant 1$. Cela est important pour un certain nombres de théorèmes qui vont venir, en particulier l'inégalité de Hölder (29.102).

Si vous en voulez à propos de $0 < p < 1$, vous pouvez lire [742].

29.16.
L'opération $f \mapsto \|f\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$ parce que pour f presque partout nulle, nous avons $\|f\|_p = 0$. Il y a donc des fonctions non nulles sur lesquelles $\|.\|_p$ s'annule.

29.17.
Soit un espace mesuré non complet[12] $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Il existe une partie N de mesure nulle et $A \subset N$ non mesurable. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in N \setminus A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29.53}$$

[12] Définition 16.70.

Cette fonction est non nulle exactement sur N. Donc $f \sim 0$. Mais f n'est pas mesurable parce que $f^{-1}(2) = A$ n'est pas mesurable.

Il est donc possible d'être dans la classe d'équivalence d'une fonction mesurable sans être mesurable. Ceci est cependant un détail (presque) sans importance pour deux raisons.

- La mesure de Lebesgue est complète par définition (définition 16.145) si nous considérons bien la tribu de Lebesgue et non seulement les boréliens.
- Dans le cas des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, il s'agit d'un quotient de $\mathcal{L}^p$ qui ne contient que des fonctions mesurables. Donc dans l'étude de L^p, tous les représentants sont mesurables, même si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas complet.

LemKZVHVAR

Lemme 29.18.
Si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $f \sim g$, alors $g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Démonstration. Soit $h(x) = |g(x)|^p - |f(x)|^p$; c'est une fonction par hypothèse presque partout nulle et donc intégrable sur Ω ; son intégrale y vaut zéro. Nous avons

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \int_\Omega \big(|f(x)|^p + h(x)\big) d\mu(x) = \int_\Omega |g(x)|^p d\mu(x). \tag{29.54}$$

Cela prouve que la dernière intégrale existe et vaut la même chose que la première. □

Nous pouvons donc considérer la norme $|.|_p$ comme une norme sur l'ensemble des classes plutôt que sur l'ensemble des fonctions. Nous notons L^p l'ensemble des classes des fonctions de $\mathcal{L}^p$. Cet espace est muni de la norme

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \tag{29.55}$$

formule qui ne dépend pas du représentant par le lemme 29.18.

PROPooTYCYooAKJWOX

Proposition 29.19.
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et $p \geqslant 1$.

(1) L'ensemble des classes $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel.

ITEMooZNXPooGzFnIK

(2) La formule

$$\|[f]\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \tag{29.56}$$

définit une norme[13] *sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Espace vectoriel** Le lemme 29.14 dit que $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel. Une structure d'espace vectoriel sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est donnée en posant

$$[f] + [g] = [f + g] \tag{29.57}$$

et

$$\lambda[f] = [\lambda f] \tag{29.58}$$

qui sont deux définitions correctes parce qu'elles ne dépendent pas du choix du représentant. De plus le lemme 29.14 dit que $f + g \in \mathcal{L}^p$ dès que $f, g \in \mathcal{L}^p$. Donc $[f + g] \in L^p$ dès que $[f], [g] \in {}^p$.

(2) **Norme**

Pour être une norme, il faut vérifier les trois propriétés de la définition 9.232.

D'abord, si $\|[f]\|_p = 0$, nous avons

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = 0, \tag{29.59}$$

ce qui par le lemme 16.201 implique que $|f(x)|^p = 0$ pour presque tout x. Ou encore $f \sim 0$, c'est-à-dire $[f] = [0]$ au niveau des classes.

[13] Définition 9.232.

Ensuite pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in L^p$ nous avons

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_\Omega |\lambda f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p} \tag{29.60a}$$

$$= \left(\int_\Omega |\lambda|^p |f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p} \tag{29.60b}$$

$$= |\lambda| \|f\|_p. \tag{29.60c}$$

Et enfin, en suivant le calcul (29.51) nous avons

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{29.61}$$

□

29.20.
À partir de maintenant $\big(L^p(\Omega, \mu), \|.\|_p\big)$ est un espace métrique avec toute la topologie qui va avec.

Dans la suite nous n'allons pas toujours écrire $[f]$ pour la classe de f. Par abus de notations nous allons souvent parler de $f \in L^p$ comme si c'était une fonction.

De même nous notons $L^p(\Omega)$ ou $L^p(\Omega, \mu)$ ou $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ d'après ce sur quoi nous voulons insister. Mais seule la dernière notation est parfaitement correcte.

PROPooRSDBooHEjQDq

Proposition 29.21 ([1]).
Soit un espace mesuré σ-fini[14] *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Il existe des parties mesurables Ω_n telles que pour tout n*

ITEMooXSINooDDPzmb
(1) $\mu(\Omega_n) < \infty$,

ITEMooEGWEooAtEWfw
(2) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$

ITEMooGEEZooIjPQmv
(3) $\int_{\Omega_n} |f| < \infty$

ITEMooSDPTooOuiyOj
(4) $\bigcup_n \Omega_n = \{|f| \neq \infty\}$.

Démonstration. Vu que Ω est σ-finie, il existe des parties mesurables S_n telles que $\mu(S_n) < \infty$ et $\bigcup_n S_n = \Omega$. Nous commençons par poser $A_n = \bigcup_{i=1}^n s_i$. Les parties A_n vérifient déjà (1) et (2).

Pour les conditions (3) et (4), il suffit de poser $\Omega_n = A_n \cap \{|f| < n\}$. □

PROPooQNNVooTKRdyC

Proposition 29.22 ([1]).
Soit un espace mesuré σ-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant $\mu\big(|f| = \infty\big) = 0$. Nous considérons des parties mesurables Ω_k telles que

(1) $\mu(\Omega_n) < \infty$,

(2) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$

(3) $\int_{\Omega_n} |f| < \infty$

(4) $\bigcup_n \Omega_n = \{|f| \neq \infty\}$.

Alors en notant $\|f\|_{n,p}$ la norme L^p de f sur Ω_n, nous avons

$$\|f\|_{k,p} \to \|f\|_p \tag{29.62}$$

Démonstration. Nous utilisons la convergence monotone 16.180 en posant $g_k(x) = |f(x)|^p \mathbb{1}_{\Omega - k}$. Les fonctions g_k sont à valeurs dans $[0, \infty]$ et nous avons $g_k \to |f|^p$ ponctuellement. Donc

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} |f|^p = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k \tag{29.63a}$$

$$= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k \tag{29.63b}$$

$$= \int_\Omega |f|^p, \tag{29.63c}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

[14] Définition 16.11.

29.3.2 Un peu de convergence de suites

PropWoywYG

Proposition 29.23 ([743]).
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et supposons que la suite $[f_n]$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ converge vers $[f]$ au sens L^p. Alors il existe une sous-suite (h_n) qui converge ponctuellement μ-presque partout vers f.

Démonstration. Si $p = \infty$ nous sommes en train de parler de la convergence uniforme et il ne faut même pas prendre ni de sous-suite ni de « presque partout ».

Supposons que $1 \leqslant p < \infty$. Nous considérons une sous-suite $[h_n]$ de $[f_n]$ telle que

$$\|[h_j] - [f]\|_p < 2^{-j}, \tag{29.64}$$

puis nous posons $u_k(x) = |h_k(x) - f(x)|^p$. Notons que ce u_k est une vraie fonction, pas une classe. Et en plus c'est une fonction positive. Nous avons

$$\int_\Omega u_k d\mu = \int_\Omega |h_k(x) - f(x)|^p d\mu(x) = \|h_k - f\|_p^p \leqslant 2^{-kp}. \tag{29.65}$$

Vu que u_k est une fonction positive la suite des sommes partielles de $\sum_k u_k$ est croissante et vérifie donc le théorème de la convergence monotone 16.180 :

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega u_k(x) d\mu(x) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kp} < \infty. \tag{29.66}$$

Le fait que l'intégrale de la fonction $\sum_k u_k$ est finie implique que cette fonction est finie μ-presque partout. Donc le terme général tend vers zéro presque partout, c'est-à-dire

$$|h_k(x) - f(x)|^p \to 0. \tag{29.67}$$

Cela signifie que $h_k \to f$ presque partout ponctuellement. □

Est-ce qu'on peut faire mieux que la convergence ponctuelle presque partout d'une sous-suite ? En tout cas on ne peut pas espérer grand chose comme convergence pour la suite elle-même, comme le montre l'exemple suivant.

ExPOmxICc

Exemple 29.24 ([744]).
Nous allons montrer une suite de fonctions qui converge vers zéro dans $L^p[0,1]$ (avec $p < \infty$) mais qui ne converge ponctuellement pour *aucun* point.

Nous construisons la suite de fonctions par paquets. Le premier paquet est formé de la fonction constante 1.

Le second paquet est formé de deux fonctions. La première est $\mathbb{1}_{[0,1/2]}$ et la seconde $\mathbb{1}_{[1/2,1]}$.

Plus généralement le paquet numéro k est constitué des k fonctions $\mathbb{1}_{[i/k,(i+1)/k]}$ avec $i = 0, \dots, k-1$.

Vu que les fonctions du paquet numéro k ont pour norme $\|f\|_p = \frac{1}{k}$, nous avons évidemment $f_n \to 0$ dans L^p. Il est par contre visible que chaque paquet passe en revue tous les points de $[0,1]$. Donc pour tout x et pour tout N, il existe (même une infinité) $n > N$ tel que $f_n(x) = 1$. Il n'y a donc convergence ponctuelle nulle part. △

La proposition suivante est une espèce de convergence dominée de Lebesgue pour L^p.

PropBVHXycL

Proposition 29.25.
Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et (f_n) une suite de fonctions convergeant ponctuellement vers f et telle que $|f_n| \leqslant |f|$. Alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Démonstration. Nous avons immédiatement $|f_n(x)|^p \leqslant |f(x)|^p$, de telle sorte que le théorème de la convergence dominée implique que $f_n \in L^p$. La convergence dominée donne aussi que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, mais cela ne nous intéresse pas ici.

Nous posons $h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. En reprenant la formule de majoration (29.50) et en tenant compte du fait que $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$, nous avons

$$h_n(x) \leqslant 2^{p-1}\big(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p\big) \leqslant 2^p |f(x)|^p, \tag{29.68}$$

ce qui prouve que $|h_n|$ est uniformément (en n) majorée par une fonction intégrable, donc h_n est intégrable et on peut permuter la limite et l'intégrale (théorème de la convergence dominée 16.209) :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} h_n(x) dx = 0. \tag{29.69}$$

□

PropRERZooYcEchc

Proposition 29.26 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$\int_\Omega f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \tag{29.70}$$

pour toute partie mesurable A de mesure finie. Alors $[f] = 0$, c'est-à-dire que f est non nulle uniquement sur une partie de mesure nulle.

Démonstration. Nous rappelons que dire que f est intégrable signifie que $\mathrm{Re}(f)^+$, $\mathrm{Re}(f)^-$, $\mathrm{Im}(f)^+$ et $\mathrm{Im}(f)^-$ sont intégrables.

Les parties

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } \mathrm{Re}(f)^+(x) \in [k, k+1[\}_{k=1,\dots} \tag{29.71}$$

et

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } \mathrm{Re}(f)^+(x) \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[\}_{k=1,\dots} \tag{29.72}$$

sont mesurables en tant qu'images inverses de mesurables par la fonction mesurable $\mathrm{Re}(f)^+$.

Nous notons $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération quelconque de ces parties. L'important est que

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{x \in \Omega \text{ tel que } \mathrm{Re}(f)^+(x) \neq 0\} \tag{29.73}$$

et que pour chaque i, il existe $\alpha_i > 0$ tel que $\mathrm{Re}(f)^+(x) > \alpha_i$ pour tout x dans A_i.

Par hypothèse nous avons $\int_\Omega f\mathbb{1}_{A_i} d\mu = 0$. En particulier,

$$0 = \int_\Omega \mathrm{Re}(f\mathbb{1}_{A_i})^+ = \int_\Omega \mathrm{Re}(f)^+(x)\mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x). \tag{29.74}$$

Mais pour tout $x \in A_i$ nous avons $\mathrm{Re}(f)^+(x) > \alpha_i > 0$, donc

$$0 = \int_\Omega \mathrm{Re}(f)^+(x)\mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x) \geqslant \alpha_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} = \alpha_i \mu(A_i) \geqslant 0. \tag{29.75}$$

Vu cet encadrement par zéro, nous avons $\alpha_i\mu(A_i) = 0$ et donc $\mu(A_i) = 0$ pour tout i.

Nous en déduisons, par union dénombrable de parties de mesures nulles, que $\mathrm{Re}(f)^+$ est non nulle seulement sur une partie de mesure nulle.

Le même raisonnement pour $\mathrm{Re}(f)^-$, $\mathrm{Im}(f)^+$ et $\mathrm{Im}(f)^-$ donne que f est non nulle sur une partie de mesure nulle. Donc $f = 0$ au sens des classes dans L^p. □

29.3.3 L'espace L^∞

SUBSECooYFJTooBqrLXv

Ne pas confondre la norme supremum (définition 12.128) avec la norme L^∞, bien que les deux peuvent être écrites $\|f\|_\infty$.

29.27.
Il n'est pas possible de définir le supremum d'une fonction définie à ensemble de mesure nulle près parce que toute classe contient des fonctions qui peuvent être arbitrairement grandes en n'importe que point. Nous cherchons alors à définir une notion de supremum qui ne tient pas compte des ensembles de mesure nulle.

DEFooIQOOooLpJBqi

Définition 29.28.
*Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Un nombre M est un **majorant essentiel** de f si*

$$\mu\big(|f(x)| \geqslant M\big) = 0. \tag{29.76}$$

Nous posons alors

$$N_\infty(f) = \inf\{M \text{ tel que } |f(x)| \leqslant M \text{ presque partout}\}. \tag{29.77}$$

*Le nombre (peut-être infini) $N_\infty(f)$ sera souvent écrite $\|f\|_{L^\infty}$ ou $\|f\|_\infty$. Il est nommé le **supremum essentiel** de f. Il pourra également être noté*

$$\text{ess-}\sup_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{29.78}$$

EQooZHKBooPgdzCp

Cela revient à prendre le supremum à ensemble de mesure nulle près.

DEFooXUKHooXYrlYq

Définition 29.29.
Nous définissons alors les espaces de Lebesgue correspondants :

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ tel que } N_\infty(f) < \infty\}, \tag{29.79}$$

et L^∞ en est le quotient usuel.

29.30.
Le point sur les notations telles qu'elles devraient être respectées :

(1) Si f est une fonction, $N_\infty(f)$ est son supremum essentiel.

(2) Si f est une fonction, $\|f\|_\infty$ est sa norme supremum. Ce n'est pas la même chose que $N_\infty(f)$.

(3) Si $[f]$ est une classe de fonctions (pour l'égalité presque partout), alors $\|[f]\|_{L^\infty}$ est la norme de cette classe dans L^∞, c'est-à-dire $\|[f]\|_{L^\infty} = N_\infty(f)$ où f est un représentant.

Le point sur les abus tolérables :

(1) Si f est une fonction, on peut écrire $\|f\|_{L^\infty}$ pour $N_\infty(f)$. Attention toutefois que $N_\infty(f)$ peut valoir ∞, alors que les éléments de L^∞ sont sélectionnés pour être les classes des fonctions telles que $N_\infty(f) < \infty$. Donc il est parfois possible, lorsque f est une fonction, de parler de $\|f\|_{L^\infty}$ alors que $[f]$ n'est pas un élément de L^∞.

(2) Si $[f]$ est une classe, on peut écrire $N_\infty([f])$ pour $\|[f]\|_{L^\infty}$.

(3) Noter f la classe de la fonction f. Attention qu'alors, écrire $\|f\|_\infty$ n'a pas de sens.

Le point sur les abus intolérables :

(1) Si f est une fonction, noter $\|f\|_\infty$ pour $N_\infty(f)$.

(2) Si $[f]$ est une classe de fonctions, noter $\|[f]\|_\infty$ pour $\|[f]\|_{L^\infty}$.

29.31.
Tout ceci pour dire que si f_k sont des fonctions et si f est une fonction, nous avons la convergence

$$f_k \xrightarrow{L^\infty} f \tag{29.80}$$

si et seulement si $N_\infty(f_k - f) \to 0$. Cette convergence (qui se sert des abus tolérables de notations) est équivalente à la convergence

$$[f_k] \xrightarrow{L^\infty} [f]. \tag{29.81}$$

Mais ce n'est pas du tout équivalent à $\|f_k - f\|_\infty \to 0$. Tout au plus, il est vrai que si $\alpha \in L^\infty$ (donc α est une classe), il existe un représentant $f \in \alpha$ tel que $\|f\|_\infty = \|\alpha\|_{L^\infty}$.

Lemme 29.32 ([1])**.**
Si f_k est une suite de fonctions telle que $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, alors

$$f_k \xrightarrow{L^\infty} f \tag{29.82}$$

où la convergence signifie $N_\infty(f_k - f) \to 0$.

Démonstration. Si g est une fonction nous avons toujours $N_\infty(g) \leqslant \|g\|_\infty$. Donc

$$N_\infty(f_k - f) \leqslant \|f_k - f\|_\infty \to 0. \tag{29.83}$$

□

29.33.
Attention toutefois que ce lemme ne signifie pas que si $\|f_k - f\|_\infty \to 0$, alors $[f_k] \xrightarrow{L^\infty} [f]$ parce que nous pourrions avoir $N_\infty(f_k) = \infty$ et alors $[f_k]$ n'est pas un élément de L^∞.

Cela arrive par exemple pour $f_k(x) = x$ et $f(x) = x$. Nous avons $\|f_k - f\|_\infty = 0$ pour tout k, alors que ni f_k ni f ne donnent lieu à un élément de L^∞.

Exemple 29.34.
Même si g est bornée, nous n'avons pas spécialement $\|g\|_\infty = N_\infty(g)$. Par exemple

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{aligned} \tag{29.84}$$

Cette fonction vérifie $\|g\|_\infty = 1$ mais $N_\infty(g) = 0$. △

29.3.4 Quelques identifications

Il est intuitivement clair que ce qui peut arriver à une fonction en un seul point ne va pas influencer la fonction lorsqu'elle est vue dans L^p. En tout cas lorsqu'on considère des mesures pour lesquelles les singletons sont de mesure nulle, et c'est bien le cas de la mesure de Lebesgue. Il est peut-être intuitivement moins clair que l'on peut non seulement modifier le comportement d'une fonction en un point, mais également modifier l'ensemble de base. En voici un exemple.

Proposition 29.35.
Nous avons les égalités suivantes d'espaces

$$L^p\big(]0,2\pi[\big) = L^p\big([0,2\pi]\big) = L^p(S^1) \tag{29.85}$$

au sens où il existe des bijections isométriques de l'un à l'autre. Ici nous sous-entendons la mesure de Lebesgue partout[15].

Démonstration. Voici une application où le crochet dénote la prise de classe :

$$\begin{aligned} \psi\colon L^p\big(]0,2\pi[\big) &\to L^p\big([0,2\pi]\big) \\ [f] &\mapsto \text{la classe de } f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{29.86}$$

(1) **Bien définie** Si $[f] = [g]$ dans $L^p\big(]0,2\pi[\big)$ alors $f_e(x) = g_e(x)$ pour tout $x \in]0,2\pi[$ sauf une partie de mesure nulle. L'union de cette partie avec $\{0,2\pi\}$ est encore de mesure nulle dans $[0,2\pi]$. Les images par ψ sont donc égales dans $L^p\big([0,2\pi]\big)$.

(2) **Injective** Supposons que $[f],[g] \in L^p\big(]0,2\pi[\big)$ soient tels que $\psi\big([f]\big) = \psi\big([g]\big)$. En particulier $[f_e] = [g_e]$ et donc $f_e = g_e$ presque partout sur $[0,2\pi]$. Vu que $\{0\} \cup \{2\pi\}$ est de mesure nulle, nous avons $f_e = g_e$ presque partout sur $]0,2\pi[$. Mais pour $x \in]0,2\pi[$, nous avons $f_e(x) = f(x)$ et $g_e(x) = g(x)$. Bref nous avons $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in]0,2\pi[$.

(3) **Surjective** Un élément de $L^p\big([0,2\pi]\big)$ est l'image de sa restriction … ou plutôt l'image de la classe de la restriction d'un quelconque de ses représentants.

(4) **Isométrie** L'intégrale qui donne la norme sur L^p ne change pas selon que nous ajoutions ou non les bornes au domaine d'intégration.

De la même manière nous avons

$$L^p\big([0,2\pi[\big) = L^p\big([0,2\pi]\big). \tag{29.87}$$

En ce qui concerne l'identification avec $L^p(S^1)$, il faut passer par l'isométrie $\varphi\colon [0,2\pi[\to S^1$ donnée par $\varphi(t) = e^{it}$, et être heureux que ce soit bien une isométrie parce qu'il faudra l'utiliser pour un changement de variables pour montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{S^1} (f \circ \varphi^{-1})(z)dz. \tag{29.88}$$

□

[15] Vu que la mesure de Lebesgue est définie pour $\mathbb{R}^d$ munie de sa tribu des boréliens (complétée), vous êtes en droit de vous demander quelle est la tribu et la mesure que nous considérons sur le cercle S^1.

29.3.5 Inégalité de Young, Jensen, Hölder et de Minkowski

PROPooCQUBooCvtMSi

Proposition 29.36 (Inégalité de Young[745, 746])**.**
Soient $a, b \geqslant 0$ ainsi que $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{29.89}$$

Alors

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{29.90}$$

Il y a égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

Démonstration. Nous fixons $b \geqslant 0$, et nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb. \end{aligned} \tag{29.91}$$

On remarque vite fait que $f'(x) = x^{p-1} -$. Nous avons $f'(x) > 0$ si et seulement si $x^{p-1} \geqslant b$. Nous posons $x_0 = b^{1/(p-1)}$, et nous savons que f est strictement décroissante sur $[0, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, \infty[$. Cette fonction a donc un minimum global en $x = x_0$. Rapide calcul :

$$f(x_0) = \frac{b^{p/(p-1)}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{1+1/(p-1)}. \tag{29.92}$$

En utilisant $q = p(p-1)$ nous trouvons vite que

$$f(x_0) = b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0. \tag{29.93}$$

Donc pour tout $x \neq x_0$ nous avons $f(x) > f(x_0) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab \tag{29.94}$$

avec égalité si et seulement si $a = x_0$, c'est-à-dire quand $a = b^{1/(p-1)}$ ou encore, en passant à la puissance p :

$$a^p = b^{p/(p-1)} = b^q. \tag{29.95}$$

□

PropXISooBxdaLk

Proposition 29.37 (Inégalité de Jensen[539])**.**
Soit un espace mesuré de probabilité[16] *$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi qu'une fonction convexe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une application $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tels que α et $f \circ \alpha$ soient intégrables sur Ω. Alors*

$$f\Big(\int_\Omega \alpha \, d\mu \Big) \leqslant \int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu. \tag{29.96}$$

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}$ et c_a le nombre donné par la proposition 19.119 : pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons

$$f\big(\alpha(\omega)\big) - f(a) \geqslant c_a\big(\alpha(\omega) - a\big). \tag{29.97}$$

EqOUMooIwknIP

Cela est en particulier vrai pour $a = \int_\Omega \alpha \, d\mu$. Nous intégrons l'inégalité (29.97) sur Ω en nous souvenant que $\int d\mu = 1$:

$$\int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu - \int_\Omega f(a) d\mu \geqslant c_a\Big(\int_\Omega \alpha - \int_\Omega a \Big) \tag{29.98a}$$

$$\int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu - f(a) \geqslant c_a(a - a) \tag{29.98b}$$

$$f(a) \leqslant \int_\Omega (f \circ \alpha) d\mu. \tag{29.98c}$$

Cette dernière inégalité est celle que nous devions prouver. □

[16] C'est-à-dire que $\int_\Omega d\mu = 1$.

COROOORYUAOOOHRSJL

Corolaire 29.38.
Soit un espace mesuré de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une application $\alpha \in L^1(\Omega, \mu)$ et $\alpha \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$. Alors

$$|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)| \leqslant \|\alpha\|_p. \tag{29.99}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Jensen sur la fonction convexe $f(x) = |x|^p$. Nous avons alors

$$|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)|^p \leqslant \int_\Omega |\alpha(s)|^p d\mu(s), \tag{29.100}$$

c'est-à-dire

$$|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)| \leqslant \left[\int_\Omega |\alpha(s)|^p d\mu(s)\right]^{1/p} = \|\alpha\|_p \tag{29.101}$$

où ma norme $\|.\|_p$ est prise au sens de la mesure μ. □

PROPTYQSPT

Proposition 29.39 (Inégalité de Hölder[747])**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$ satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, alors nous avons les choses suivantes :

ITEMOONDKPOORKDMGS

(1) Le produit fg est dans $L^1(\Omega)$ et nous avons

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{29.102}$$

EQLPKOOPBCQYN

ITEMOOQHLPOORWWMOP

(2) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \tag{29.103}$$

EQAVZOOENYZMT

ITEMOOBOYJOORKIAQJ

(3) Nous avons $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ si et seulement si nous sommes dans un des trois cas suivants :

- *$f = 0$ presque partout,*
- *$g = 0$ presque partout,*
- *Il existe $\lambda > 0$ tel que $|f|^p = \lambda |g|^q$ presque partout.*

Ce qui est appelé « inégalité de Hölder » est généralement l'inéquation (29.102).

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Nous allons le voir comme cas particulier de (2).

(2) **Pour (2)** D'abord nous supposons $\|g\|_q = 1$ et nous posons

$$A = \{x \in \Omega \text{ tel que } |g(x)| > 0\}. \tag{29.104}$$

Hors de A, les intégrales que nous allons écrire sont nulles. Nous avons

$$\|fg\|_r^p = \Big|\int_A |f|^r |g|^{r-q} |g|^q\Big|^{p/r}, \tag{29.105}$$

et le coup tordu est de considérer cette intégrale comme étant une intégrale par rapport à la mesure $\nu = |g|^q d\mu$ qui a la propriété d'être une mesure de probabilité par hypothèse sur g. Nous pouvons alors utiliser l'inégalité de Jensen[17] parce que $p/r > 1$, ce qui fait de $x \mapsto |x|^{p/r}$ une fonction convexe. Nous avons alors

$$\|fg\|_r^p \leqslant \int_A \left(|f|^r |g|^{r-q}\right)^{p/r} |g|^q d\mu \tag{29.106a}$$

$$= \int_A |f|^p |g|^{p(r-q)/r} |g|^q d\mu \tag{29.106b}$$

La puissance de $|g|$ dans cette expression est : $q + \frac{p(r-q)}{r} = 0$ parce que $p(q-r) = rq$. Nous avons alors montré que

$$\|fg\|_r^p \leqslant \int_A |f|^p d\mu \leqslant \|f\|_p^p. \tag{29.107}$$

[17] Proposition 29.37.

La dernière inégalité est le fait que le domaine A n'est pas tout le domaine Ω.

Si maintenant $\|g\|_q \neq 1$ alors nous calculons

$$\|fg\|_r = \|g\|_q \|f\frac{g}{\|g\|_q}\|_r \leqslant \|g\|_q \|f\|_p \tag{29.108}$$

en appliquant la première partie à la fonction $\frac{g}{\|g\|_q}$ qui est de norme 1.

(3) **Pour (3)** Si f ou g est nulle presque partout, il y a immédiatement égalité. Nous supposons donc que f et g ne sont pas nulles presque partout et donc que $\|f\|_p$ et $\|g\|_q$ sont non nuls.

(3a) **Deux fonctions intermédiaires** Nous posons

$$\hat{f} = \frac{|f|}{\|f\|_p}, \quad \hat{g} = \frac{|g|}{\|g\|_q}. \tag{29.109}$$

(3b) **Égalité préliminaire** Nous avons

$$\frac{1}{p}\int \hat{f}^p = \frac{1}{p}\int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f|^p = \frac{1}{p}, \tag{29.110}$$

et de même avec g et q au lieu de f et p. Nous avons donc

$$\frac{1}{p}\int \hat{f}^p + \frac{1}{q}\int \hat{g}^q = 1. \tag{29.111}$$

(3c) **Les équivalences** Les choses suivantes sont équivalentes.

(3c.i) $\int |fg| = \|f\|_p \|g\|_q$

(3c.ii) $\int \hat{f}\hat{g} = 1$

(3c.iii)
$$\int \hat{f}\hat{g} = \frac{1}{p}\int \hat{f}^p + \frac{1}{q}\int \hat{g}^q \tag{29.112}$$

(3c.iv)
$$\int \left(\hat{g}\hat{f} - \frac{1}{p}\hat{f}^p - \frac{1}{q}\hat{g}^q\right) = 0. \tag{29.113}$$

(3c.v)
$$\hat{g}\hat{f} - \frac{1}{p}\hat{f}^p - \frac{1}{q}\hat{g}^q = 0 \tag{29.114}$$

presque partout.
En effet l'inégalité de Young[18] dit que l'intégrante est positive partout. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que l'intégrante soit nulle ; c'est le lemme 16.201.

(3c.vi) $\hat{f}(x)^p = \hat{g}(x)^q$ pour presque tout x. C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Young.

(3c.vii)
$$\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}. \tag{29.115}$$

(3c.viii)
$$|f|^p = \lambda |g|^q \tag{29.116}$$

avec $\lambda = \|f\|_p^p / \|g\|_q^q$.

(3d) **Conclusion** En lisant les implications de haut en bas, nous avons la condition nécessaire au cas d'égalité. Pour traiter la condition suffisante, nous supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|f|^p = \lambda |g|^q$. Alors nous avons

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = \lambda \int |g|^q = \lambda \|g\|_q^q, \tag{29.117}$$

ce qui donne immédiatement $\lambda = \|f\|_p^p / \|g\|_q^q$. Nous pouvons donc remonter les équivalences.

□

[18] Proposition 29.36.

RemNormuptNird

Remarque 29.40.
Dans le cas d'un espace de probabilité, la fonction constante $g = 1$ appartient à $L^p(\Omega)$. En prenant $p = q = 2$ nous obtenons

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2. \tag{29.118}$$

PROPooDVCCooKqbAwo

Proposition 29.41.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant $\mu(\Omega) = 1$. Soient des nombres $0 < r \leqslant s$ ainsi qu'une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Si $\int_\Omega |f|^2 < \infty$, alors $\int_\Omega |f|^r < \infty$.

Démonstration. Si $s = r$, la conclusions est immédiate. Nous supposons donc $r \neq s$. Nous considérons q tel que $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, c'est-à-dire $q = rs/(s - r)$. Vu que $s > r$, nous avons $q > 0$, pas de problèmer.

Par hypothèse, nous avons $f \in L^s(\Omega)$. Et comme Ω est de mesure finie, la fonction constante 1_Ω est dans $L^q(\Omega)$. Nous povons donc écrire l'inégalité de Hölder 29.103 :

$$\|f 1_\Omega\|_r \leqslant \|f\|_s \|1_\Omega\|_q. \tag{29.119}$$

Cela donne $\|f\|_r \leqslant \|f\|_s$, et en déballant,

$$\left(\int_\Omega |f|^r \right)^{1/r} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^s \right)^{1/s}. \tag{29.120}$$

Vu que $r > 0$, l'application $t \mapsto t^r$ est croissante, et nous pouvons écrire

$$\int_\Omega |f|^r \leqslant \left(\int_\Omega |f|^s \right)^{r/s} < \infty. \tag{29.121}$$

Notez l'utilisation de la proposition 14.447. □

LemTLHwYzD

Lemme 29.42.
À propos de $L^1_{loc}(I)$.

(1) Lorsque I est borné nous avons $L^2(I) \subset L^1(I)$.

(2) Si I n'est pas borné alors $L^2(I) \subset L^1_{loc}(I)$.

Démonstration. En effet si I est borné, alors la fonction constante 1 est dans $L^2(I)$ et l'inégalité de Hölder 29.39 nous dit que le produit $1u$ est dans $L^1(I)$.

Si I n'est pas borné, nous refaisons le même raisonnement sur un compact K de I. □

CORooIIEAooNmbkTo

Corolaire 29.43 ([748]).
Soit l'espace $L^2(I)$ avec $I =]0, 1[$ avec la mesure de Lebesgue. Si $u_n \in L^2$ converge vers u dans L^2 alors nous pouvons permuter l'intégrale et la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u_n = \int_I u. \tag{29.122}$$

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire

$$\begin{aligned} T : L^2(I) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_I u. \end{aligned} \tag{29.123}$$

Elle est bien définie par l'inégalité de Hölder $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ appliqué à $g(x) = 1$ qui vérifie $\|g\|_2 = 1$. Nous avons aussi

$$T(u) \leqslant \int_I |u| \leqslant \|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \tag{29.124}$$

où la dernière inégalité est celle de Hölder 29.39. Bref, T est continue. Cela signifie que si $u_n \xrightarrow{L^2(I)} u$ alors $T(u_n) = T(u)$. Cela est l'égalité demandée. □

29.3.6 Inégalité de Minkowski

29.3.6.1 Forme usuelle

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 29.44
Dans la proposition suivante, la partie « égalité » est très personnelle. Je n'en n'ai pas trouvé de preuve complète. Donc soyez doublement vigilant et écrivez-moi si vous avez quelque chose à dire.

PropInegMinkKUpRHg

Proposition 29.45 (Inégalité de Minkowski[749, 750, 751, 752, 753, 1]).
Si $1 \leqslant p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors

ItemDHukLJi

(1) $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

ITEMooGRXBooMLRMww

(2) *Si $p = 1$, il y a égalité si et seulement si $f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0$ pour presque tout x.*

ITEMooQCSHooNUDwtM

(3) *Si $p > 1$, il y a égalité si et seulement si il existe des réels positifs α, β pas tous deux nuls tels que*

$$\alpha f(x) = \beta g(x) \tag{29.125}$$

pour presque tout x.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** En utilisant l'inégalité $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (proposition 11.106(1)) pour chaque x dans l'intégrale, de façon à pouvoir majorer

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \tag{29.126a}$$
$$\leqslant \big(|f(x)|+|g(x)|\big)|f(x)+g(x)|^{p-1}. \tag{29.126b}$$

Nous mettons ça dans une intégrale et nous calculons un peu : SUBEQSooGWMTooDBXSgL

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p d\mu \tag{29.127a}$$
$$\leqslant \int \big(|f|+|g|\big)|f+g|^{p-1} d\mu \tag{29.127b}$$
SUBEQooYCTWooQpHNqs
$$= \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \tag{29.127c}$$
SUBEQooNQKBooQFtTIJ

Lorsque $p = 1$, nous nous arrêtons ici parce que (29.127c) s'écrit

$$\|f+g\|_1 \leqslant \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1. \tag{29.128}$$

Lorsque $p > 1$, nous devons continuer et utiliser Hölder. Attardons nous sur le premier terme. Nous posons $q = p/(p-1)$, $a = f$ et $b = |f+g|^{p-1}$, et nous utilisons l'inégalité de Hölder[19] : SUBEQSooFINUooQfIdMS

$$\int |f||f+g|^{p-1} = \|ab\|_1 \tag{29.129a}$$
$$\leqslant \|a\|_p \|b\|_q \tag{29.129b}$$
$$= \|f\|_p \left[\int \big(|f+g|^{p-1}\big)^q\right]^{1/q} \tag{29.129c}$$
$$= \|f\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \tag{29.129d}$$
$$= \|f\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{(p-1)/p} \tag{29.129e}$$
$$= \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} \tag{29.129f}$$

Nous avons utilisé la règle de produit d'exposants et de somme d'exposants[20]

[19] Proposition 29.39.
[20] Propositions 14.447 et 14.437(3).

Nous utilisons cette inégalité dans les deux termes de (29.127) : SUBEQSooKHKOooOCfndf

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \tag{29.130a}$$
$$\leqslant \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|^{p-1} \tag{29.130b}$$

Nous obtenons le résultat en divisant le tout par $\|f+g\|_p^{p-1}$.

(2) **Pour (2)** Toutes les inégalités de (29.127) sont des égalités. En particulier nous avons celle-ci :

$$\int |f+g| d\mu = \int (|f|+|g|) d\mu \tag{29.131}$$

Cela donne

$$\int \big(|f+g| - |f| - |g|\big) d\mu = 0. \tag{29.132}$$

Vue l'inégalité de la proposition 11.106(1), la fonction intégrée est toujours négative. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que la fonction intégrée soit presque partout nulle :

$$|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \tag{29.133}$$

pour presque tout x. La partie « égalité » de la proposition 11.106(1) donne alors le résultat.

Cas d'égalité, préliminaire

Nous commençons par prouver que si $f+g=0$ alors $f=g=0$. Pour cela nous faisons le calcul : SUBEQSooGHMTooWSTtO

$$\|f\|_p + \|g\|_p = \|f+g\| \tag{29.134a}$$ SUEQooPUQGooAIaFFa
$$\leqslant \big\| |f|+|g| \big\| \tag{29.134b}$$ SUBEQooFXHBooYXMhDf
$$\leqslant \big\| |f| \big\|_p + \big\| |g| \big\| \tag{29.134c}$$ SUBEQooQZFXooPVzQnI
$$= \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{29.134d}$$

Justifications :

- Pour (29.134a). L'hypothèse d'égalité dans l'inégalité de Minkowski.
- Pour (29.134b). Intégrale de l'inégalité de la proposition 11.106(1).
- Pour (29.134c). Inégalité de Minkowski.

Étant donné que le premier et le dernier membre de (29.134) sont égaux, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier,

$$\|f+g\|_p = \big\| |f|+|g| \big\|. \tag{29.135}$$

En termes d'intégrales, cette égalité donne

$$\int |f+g|^p - \big(|f|+|g|\big)^p = 0. \tag{29.136}$$ EQooRYQBooGdstLN

L'inégalité déjà mentionnée $|z_1+z_2|^p \leqslant \big(|z_1|+|z_2|\big)^p$ dit que la fonction à intégrer dans (29.136) est partout négative. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut donc que la fonction soit presque partout nulle. Autrement dit, pour presque tout x nous avons

$$|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|. \tag{29.137}$$ EQooULHAooWXViEH

Cette égalité nous sera utile dans la suite. En particulier, retenez que si $f+g=0$ presque partout, alors $f=g=0$ presque partout. Dans ce cas, l'égalité $\alpha f + \beta g = 0$ fonctionne pour tout α et β.

Cas d'égalité (2), $p=1$.

(1) $\Rightarrow$

L'inégalité (29.127b) est une égalité :

$$\int |f+g|^{p-1}\big(|f+g| - |f| - |g|\big) = 0. \tag{29.138}$$

Par la proposition 11.106(1), la fonction intégrée est presque partout nulle ou positive. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que la fonction soit presque partout nulle (lemme 16.201). Presque chaque x vérifie sont une des deux conditions suivantes :

(1a) $|f(x)+g(x)|=0$
(1b) $|f(x)+g(x)|-|f(x)|-|g(x)|=0$.

Pour les x vérifiant la première condition, nous avons déjà vu que $f=g=0$, juste en dessous de (29.137). En particulier, nous avons $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$ pour tout x dans ce cas.

En ce qui concerne les x vérifiant la seconde condition, la proposition 11.106(1) montre qu'ils vérifient $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$.

Pour les x dans le second cas, la proposition 11.106(1) donne $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$.

Bref, dans tous les cas nous avons $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$ pour presque tout x.

(2) $\Leftarrow$

Nous supposons que $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$ pour presque tout x. La proposition 11.106(1) (utilisée dans l'autre sens) dit que $|f(x)+g(x)|-|f(x)|-|g(x)|=0$ pour presque tout x. L'inégalité (29.127b) est alors une égalité.

Cas d'égalité (3), $p>1$.

Il y a deux sens.

(1) **$\Rightarrow$, les inégalités** Nous supposons que $f,g\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ vérifient $\|f+g\|_p=\|f\|_p+\|g\|_p$, et nous allons voir ce que cela implique. Regroupons les différentes inégalités qui mènent à Minkowski.

$$\|f+g\|_p^p=\int|f+g|^p d\mu \tag{29.139a}$$
$$\leqslant\int\big(|f|+|g|\big)|f+g|^{p-1}d\mu \quad \text{eq. (29.127)} \tag{29.139b}$$
$$\leqslant\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}+\int|g||f+g|^{p-1} \quad \text{eq. (29.130)} \tag{29.139c}$$
$$\leqslant\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}+\|g\|_p\|f+g\|^{p-1} \quad \text{eq. (29.130)} \tag{29.139d}$$
$$=\big(\|f\|_p+\|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p-1} \tag{29.139e}$$
$$=\|f+g\|_p^p \quad \text{hyp. égalité.} \tag{29.139f}$$

La dernière ligne est l'hypothèse d'égalité $\|f\|_p+\|g\|_p=\|f+g\|_p$. Comme le premier et le dernier membre de ces inégalités sont égaux, toutes les inégalités sont des égalités.

(2) **$\Rightarrow$, première inégalité**

L'inégalité (29.139b) est une égalité :

$$\int|f+g|^{p-1}\big(|f+g|-|f|-|g|\big)=0. \tag{29.140}$$

Par la proposition 11.106(1), la fonction intégrée est presque partout nulle ou positive. Pour que l'intégrale soit nulle, il faut que la fonction soit presque partout nulle (lemme 16.201). Presque chaque x vérifie sont une des deux conditions suivantes :

(2a) $|f(x)+g(x)|=0$
(2b) $|f(x)+g(x)|-|f(x)|-|g(x)|=0$.

Pour les x vérifiant la première condition, nous avons déjà vu que $\alpha f+\beta g=0$ pour n'importe quels α et β, juste en dessous de (29.137).

En ce qui concerne les x vérifiant la seconde condition, la proposition 11.106(1) montre qu'ils vérifient $f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0$.

Nous avons donc déjà montré que si f et g vérifient une égalité, alors pour presque tout x, nous avons

$$f(x)\overline{g(x)}\geqslant 0. \tag{29.141}$$

(3) **$\Rightarrow$, seconde inégalité (Hölder)**

La seconde inégalité à être une égalité est (29.139c) :

$$\int|f||f+g|^{p-1}=\|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1}. \tag{29.142}$$

Il s'agit du cas d'égalité de Hölder avec $a=f$, $b=|f+g|^{p-1}$ traité dans la proposition 29.39(3). Nous sommes donc dans un des trois cas suivants :

- $f = 0$ presque partout,
- $f + g = 0$ presque partout,
- il existe $\lambda > 0$ tel que $|a|^p = \lambda |b|^q$.

Dans le premier cas, nous avons $\alpha f = \beta g$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Le second cas donne $f = g = 0$ et donc $\alpha f + \beta g = 0$ pour n'importe quels α et β (voir autour de (29.137)).

Nous supposons donc être dans le troisième cas. Étant donné que $q = p/(p-1)$, nous avons

$$|b|^q = \big(|f+g|^{p-1}\big)^q = |f+g|^p, \tag{29.143}$$

et donc la contrainte est l'existence de $\lambda > 0$ tel que $|f|^p = \lambda |f+g|^p$.

(4) **⇒, troisième inégalité (Hölder)**

La seconde application de Hölder est avec $a = g$ et $b = |f+g|^{p-1}$. Nous sommes dans un cas d'égalité si nous sommes dans un des trois cas suivants :

- $g = 0$
- $f + g = 0$
- il existe $\sigma > 0$ tel que $|a|^p = \sigma |b|^q$.

Encore une fois nous supposons être dans le troisième cas. Il existe donc $\sigma > 0$ tel que $|g|^p = \sigma |f+g|^p$.

(5) **Petit résumé**

Nous avons prouvé l'existence de $\lambda, \sigma > 0$ tels que

$$\begin{cases} f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0 \quad \text{pour presque tout } x & \text{(29.144a)} \\ |f|^p = \lambda |f+g|^p & \text{(29.144b)} \\ |g|^p = \sigma |f+g|^p & \text{(29.144c)} \end{cases}$$

(6) **Des calculs et des cas** En passant à la racine p^{e} :

$$\begin{cases} f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0 \quad \text{pour presque tout } x & \text{(29.145a)} \\ |f| = s|f+g| & \text{(29.145b)} \\ |g| = t|f+g|. & \text{(29.145c)} \end{cases}$$

Les deux dernières égalités du système permettent d'écrire

$$t|f| = st|f+g| = s|g|. \tag{29.146}$$

Nous considérons donc le système, valide pour presque tout x : SUBEQSooLKGDooQouvhW

$$\begin{cases} f(x)\overline{g(x)} \geqslant 0 & \text{(29.147a)} \\ t|f(x)| = s|g(x)| & \text{(29.147b)} \end{cases}$$

Avec la contrainte $(s,t) \neq (0,0)$.

La proposition 11.105 appliqué à chaque couple $f(x)$, $g(x)$ donne l'existence d'une fonction réelle a telle que pour chaque x nous ayons un des deux cas suivants :

- $g(x) = 0$
- $f(x) = a(x)g(x)$.

De plus $a(x) \in \mathbb{R}^+$ parce que $f(x)\overline{g(x)}$ est non seulement réel, mais également positif.

(6a) $s = 0$ Alors nous avons $t|f(x)| = 0$ et donc $f(x) = 0$ pour presque tout x parce que $t \neq 0$. Nous avons alors $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

(6b) $s \neq 0$ Les points de Ω se séparent en deux parties : $g(x) = 0$ et les autres.

(6b.i) $g(x) \neq 0$ Dans ce cas nous avons le système

$$\begin{cases} f(x) = a(x)g(x) & (29.148a) \\ t|f(x)| = s|g(x)|. & (29.148b) \end{cases}$$

Vu que $s \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, la dernière équation donne $t|f(x)| \neq 0$ et donc $t \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. La première équation donne $a(x) = f(x)/g(x)$ que nous pouvons mette dans la secondes pour obternir :

$$|a(x)| = \frac{s}{t}. \tag{29.149}$$

Vu que a est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, cela donne

$$a(x) = \frac{s}{t} \tag{29.150}$$

pour tout x tel que $g(x) \neq 0$.

(6b.ii) $g(x) = 0$ Dans ce cas, le système (29.147) devient

$$t|f(x)| = 0. \tag{29.151}$$

Vu que $s \neq 0$, nous avons $f(x) = 0$. Donc n'importe quel choix de α et β fait l'affaire pour ces points. Il n'y a pas de contraintes.

(6c) $\Leftarrow$ Nous supposons $\alpha f(x) = \beta g(x)$ pour presque tout x. Pour fixer les idées, nous supposons que $\beta \neq 0$ (sinon, refaire le raisonnement en inversant les rôles de f et g). En posant $\lambda = \alpha/\beta$ nous avons

$$g(x) = \lambda f(x) \tag{29.152}$$

pour presque tout x. En passant par l'intégrale,

$$\|f+g\|_p = \|(1+\lambda)f\|_p = (1+\lambda)\|f\|_p = \|f\|_p + \lambda\|f\|_p = \|f\|_p + \|\lambda f\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{29.153}$$

Le λ et $(1+\lambda)$ rentrent et sortent des normes parce qu'ils sont positifs.

□

29.3.6.2 Inégalité intégrale de Minkowski

Dans le cas où nous n'avons pas une somme de deux fonctions mais d'une infinité paramétrée par $y \in Y$, nous pouvons convertir la somme de l'inégalité de Minkowski en une intégrale :

$$\left[\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\Big)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p} d\nu(y). \tag{29.154}$$

Ce sera la proposition 29.50.

LEMooMZWYooIsJJms

Lemme 29.46 ([1]).
Soit un espace mesuré X. Soient p, q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient des applications $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ telles que $f \in L^p(X)$ et $g^{p-1} \in L^q(X)$. Alors

$$\int_X f(x)g^{p-1}(x)dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_p^{p-1}. \tag{29.155}$$

Démonstration. Nous utilisons Hölder 29.39(1) :

$$\int_X f(x)g^{p-1}(x)dx = \|fg^{p-1}\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g^{p-1}\|_q. \tag{29.156}$$

Le seul truc à savoir est que $q(p-1) = p$ et $p/q = p-1$; à part ça, nous calculons

$$\begin{aligned} \|g^{p-1}\|_q &= \left(\int_X |g^{p-1}(x)|^q\right)^{1/q} & (29.157a) \\ &= \left(\int_X |g(x)^{q(p-1)}\right)^{1/q} & (29.157b) \\ &= \left(\int_X g(x)^p\right)^{1/q} & (29.157c) \\ &= \Big(\|g\|_p^p\Big)^{1/q} = \|g\|_p^{p/q} = \|g\|_p^{p-1}. & (29.157d) \end{aligned}$$

□

PROPooYOWUooXoNLbL

Proposition 29.47 ([754, 1]).
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ainsi que $q \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit un espace mesuré σ-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

ITEMooONTQooMHHOxk

(1) Si $p < \infty$ et si $\|f\|_p < \infty$, alors

$$\|f\|_p = \max_{\|\varphi\|_q \leqslant 1} \Big| \int_\Omega f\varphi \, d\mu \Big|. \tag{29.158}$$

ITEMooBZXAooAfgWvF

(2) Si $p \leqslant \infty$, alors

$$\|f\|_p = \sup_{\|\varphi\|_q \leqslant 1} \Big| \int_\Omega f\varphi \, d\mu \Big|. \tag{29.159}$$

Démonstration. Notez l'inégalité de Hölder 29.39(1) :

$$\Big| \int_\Omega f\varphi \Big| \leqslant \int_\Omega |f\varphi| = \|f\varphi\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|\varphi\|_q. \tag{29.160}$$

Donc l'inégalité dans un sens est toujours vérifiée. Nous ne nous concentrons que sur l'inégalité dans l'autre sens.

En plein de parties.

(1) **Pour (1)** Notons tout de suite qu'on suppose $\|f\|_p \neq 0$. Sinon f est presque partout nulle et n'importe que φ fait l'affaire. Nous subdivisons encore en deux parties.

(1a) **Si $\|f\|_p = 1$** Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} \frac{|f(\omega)|^p}{f(\omega)} & \text{si } f(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{29.161}$$

Nous avons bien $\|\varphi\|_q = 1$ parce que, en remarquant que $q(p-1) = 1$,

$$\|\varphi\|_q^q = \int_\Omega |\varphi(\omega)|^q d\omega = \int_{\Omega_1} \big(|f(\omega)|^{p-1}\big)^q = \int_\Omega |f(\omega)| p d\omega = 1. \tag{29.162}$$

(1b) **Si $\|f\|_p < \infty$** Nous posons $g = f/\|f\|_p$. Vu que $\|g\|_p = 1$, nous reprenons le φ du cas précédent qui va pour g. Et nous vérifions que ce φ fonctionne aussi pour f :

$$\int_\Omega f\varphi = \|f\|_p \int_\Omega g\varphi = \|f\|_p. \tag{29.163}$$

(2) **Pour (2), avec $p < \infty$ et $\|f\|_p = \infty$** Nous supposons que $p < \infty$ et que $\|f\|_p = \infty$. Il y a deux cas. Si $f = \infty$ sur une partie de mesure non nulle, il suffit de prendre φ non nulle sur cette partie, et on aura facilement $\int_\Omega f\varphi = \infty$.

Nous supposons que $|f| = \infty$ seulement sur une partie de mesure nulle, et nous considérons des parties Ω_k comme dans la proposition 29.21. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned} \alpha_k : \Omega &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin \Omega_k \\ 0 & \text{si } f(\omega) = 0 \\ \frac{|f(\omega)|^p}{f(\omega)} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{29.164}$$

et $\varphi_k = \alpha_k / \|\alpha_k\|_q$. Nous avons manifestement $\|\varphi_k\|_q = 1$.

Commençons par calculer ce que vaut réellement $\|\alpha_k\|_q$. En notant $\Omega_k' = \{\omega \in \Omega_k \text{ tel que } f(\omega) \neq 0\}$ nous avons un petit calcul :

$$\|\alpha_k\|_q = \left(\int_\Omega |\alpha_k(\omega)|^q \right)^{1/q} \tag{29.165a}$$

$$= \left(\int_{\Omega_k'} \frac{|f(\omega)|^{pq}}{|f(\omega)|^q} d\omega \right)^{1/q} \tag{29.165b}$$

$$= \left(\int_{\Omega_k'} |f(\omega)|^p \right)^{1/q} \tag{29.165c}$$

$$= \|f\|_{k,p}^{p/q} \tag{29.165d}$$

où nous avons noté $\|f\|_{k,p}$ la norme L^p de f sur Ω_k.

Nous pouvons maintenant prouver notre énoncé :

$$\int_\Omega f\varphi_k = \frac{1}{\|\alpha_k\|_q}\int_{\Omega'_k} f(\omega)\frac{|f(\omega)|^k}{f(\omega)}d\omega \tag{29.166a}$$
$$= \frac{1}{\|\alpha_k\|_q}\int_{\Omega_k}|f(\omega)|^p d\omega \tag{29.166b}$$
$$= \frac{1}{\|\alpha_k\|_q}\|f\|_{k,p}^p \tag{29.166c}$$
$$= \|f\|_{k,p}^{p-p/q} \tag{29.166d}$$
$$= \|f\|_{k,p}. \tag{29.166e}$$

La proposition 29.22 conclu que

$$\int_\Omega f\varphi_k = \|f\|_{k,p} \to \|f\|_p = \infty. \tag{29.167}$$

(3) **Pour (2), avec $p=\infty$** Nous passons au cas $p=\infty$[21]. Soit $\epsilon\in]0,1[$, et posons

$$A_\epsilon = \{\omega\in\Omega \text{ tel que } |f(\omega) > 1-\epsilon|\}. \tag{29.168}$$

Notez que $A_\epsilon\in\mathcal{A}$.

(3a) **Si $\|f\|_\infty = 1$** Nous avons $\mu(A_\epsilon)>0$, sinon nous aurions $|f(x)|<1-\epsilon$ presque partout et donc $\|f\|_\infty<1$. Vu que (Ω,μ) est σ-fini, il existe une partie mesurable $B_\epsilon\subset A_\epsilon$ vérifiant $0<\mu(B_\epsilon)<\infty$. Nous posons alors

$$\begin{aligned}\varphi_\epsilon\colon\Omega&\to\mathbb{C}\\ x&\mapsto\begin{cases}\frac{|f(x)|}{\mu(B_\epsilon)f(x)} & \text{si } x\in B_\epsilon\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{29.169}$$

Notons que $B_\epsilon\subset A_\epsilon$ et donc $f(x)\neq 0$ sur B_ϵ. La fonction est donc bien définie(pas de problèmes avec le dénominateur).

Sur B_ϵ, nous avons $|\varphi_\epsilon(x)=1/\mu(B_\epsilon)|<\infty$. Donc $\varphi_\epsilon\in L^1(\Omega)$ parce que B_ϵ est de mesure finie. De plus

$$\int_\Omega|\varphi_\epsilon(x)|dx = \int_{B_\epsilon}\frac{1}{\mu(B_\epsilon)}dx = 1. \tag{29.170}$$

Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon\in]0,1[$, nous avons

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\int_\Omega f\varphi \geqslant 1-\epsilon, \tag{29.171}$$

et donc que

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\int_\Omega f\varphi = 1 = \|f\|_\infty. \tag{29.172}$$

(4) **Si $\|f\|_\infty\neq 1$** Nous posons $g=f/\|f\|_\infty$, de telle sorte que $\|g\|_\infty=1$. Nous prenons les φ_ϵ correspondant à g et nous avons

$$\int_\Omega f\varphi_\epsilon = \|f\|_\infty\int_\Omega g\varphi_\epsilon \geqslant \|f\|_\infty(1-\epsilon), \tag{29.173}$$

et donc ça marche encore.

□

29.48.
Pour la suite, nous considérons deux espaces mesurés σ-finis X et Y ainsi qu'une application $h\colon X\times Y\to\mathbb{C}$. Nous notons alors

$$\begin{aligned}h_{1,y}\colon X&\to\mathbb{C}\\ x&\mapsto h(x,y),\end{aligned} \tag{29.174}$$

[21] Et c'est le moment de ne pas confondre $\|f\|_\infty$ qui signifie en réalité $\|f\|_{L^\infty}$ avec la norme supremum qui n'a rien à voir avec que nous faisons ici.

et

$$\begin{aligned} h_{2,x}\colon Y &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto h(x,y), \end{aligned} \tag{29.175}$$

et

$$\begin{aligned} N_1\colon Y &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \|h_{1,y}\|_p, \end{aligned} \tag{29.176}$$

et

$$\begin{aligned} N_2\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|h_{2,x}\|_1 \end{aligned} \tag{29.177}$$

pour tous les $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels N_2 a un sens.

PROPooUMSFooJWFJzt

Proposition 29.49 ([755]).
Soient deux espaces mesurés σ-finis X et Y. Soit $1 \leqslant p < \infty$. Soit une application mesurable $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} N_1\colon Y &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \|h_{1,y}\|_p \end{aligned} \tag{29.178}$$

est mesurable.

Démonstration. Explicitons :

$$N(y) = \int_X |h(x,y)|^p dy. \tag{29.179}$$

Le théorème de Fubini-Tonelli 16.304(1) appliqué à la fonction

$$\begin{aligned} f\colon X \times Y &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto |h(x,y)|^p \end{aligned} \tag{29.180}$$

dit que N est mesurable. □

PROPooINXBooTrTxwg

Proposition 29.50 (Inégalité intégrale de Minkowski[1, 756, 757, 3]).
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Soient deux espaces mesurables σ-finis X et Y. Soit $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Nous supposons :

(1) h est mesurable.

(2) Pour presque tout $y \in Y$, nous avons $h_{1,y} \in L^p(X)$.

(3) $N_1 \in L^1(Y)$.

Alors nous avons :

ITEMooCCQKooAyHfke

(1) $h_{2,x} \in L^1(Y)$ pour presque tout $x \in X$.

ITEMooVWLZooUYAYuJ

(2) $N_2 \in L^p(X)$.

ITEMooTBUEooQPnLEA

(3) La formule :

$$\left(\int_X \Big|\int_Y h(x,y)dy\Big|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int_Y \left(\int_X |h(x,y)|^p dx\right)^{1/p} dy \tag{29.181}$$

EQooFMJCooOttKYt

ou, en posant

$$\begin{aligned} F\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_Y h(x,y)dy, \end{aligned} \tag{29.182}$$

l'inégalité

$$\|F\|_p \leqslant \int_Y \|h_{1,y}\|_p dy. \tag{29.183}$$

EQooRAIDooRhDMPe

Note : l'équation (29.183) est plus adaptée que (29.181) pour l'énoncé dans le cas $p = \infty$.

Démonstration. Nous subdivisons selon les valeurs de p. Et d'ailleurs, les points (1), (2) et (3) ne seront pas démontrés dans l'ordre.

(1) **Pour $p = 1$** Point par point.

(1a) **Pour (3)** En utilisant Fubini-Tonelli 16.304(2),

$$\int_X \Big| \int_Y h(x,y)dy \Big| dx \leqslant \int_X \Big(\int_Y |h(x,y)|dy \Big) dx = \int_Y \big(\int_X |h(x,y)|dx \big) dy. \tag{29.184}$$

(1b) **Pour (1)** En posant

$$\begin{aligned} F\colon X &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \|h_{2,x}\|_1, \end{aligned} \tag{29.185}$$

nous avons

$$F(x) = \|h_{2,x}\|_1 = \int_Y |h(x,y)|dy. \tag{29.186}$$

En permutant les intégrales par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_X F(x) &= \int_X \Big(\int_Y |h(x,y)|dy \Big) dx && (29.187a) \\ &= \int_Y \Big(\int_X |h(x,y)|dx \Big) dy && (29.187b) \\ &= \int_Y N_1(y) && (29.187c) \\ &< \infty. && (29.187d) \end{aligned}$$

La dernière ligne est l'hypothèse que $N_1 \in L^1(Y)$. Le fait que $\int_X F(x) < \infty$ implique que $F(x) < \infty$ pour presque tout x.

(1c) **Pour (2)** Nous avons un calcul comme d'habitude en utilisant Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \|N_2\|_1 &= \int_X \Big(\int_Y |h(x,y)|dy \Big) dx && (29.188a) \\ &= \int_Y \|h_{1,y}\|_1 dy && (29.188b) \\ &= \int_Y N_1(y)dy && (29.188c) \\ &< \infty. && (29.188d) \end{aligned}$$

(2) **Pour $p = \infty$** Nous définissons

$$\begin{aligned} F\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_Y h(x,y)dy. \end{aligned} \tag{29.189}$$

Nous avons $\big|F(x)\big| \leqslant \int_Y |h(x,y)|dy$, et $|h_{1,y}(x)| \leqslant \|h_{1,y}\|_\infty$ pour presque tout $x \in X$. Armé de cela, nous pouvons faire un petit calcul avec le supremum essentiel (29.78) :

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^\infty} &= \text{ess-sup}_{x\in X} \Big| \int_Y h(x,y) \Big| && (29.190a) \\ &\leqslant \text{ess-sup}_{x\in X} \int_Y \|h_{1,y}\|_{L^\infty} dy && (29.190b) \\ &= \int_Y \|h_{1,y}\|_{L^\infty}. && (29.190c) \end{aligned}$$

Cela est bien la relation (29.183) avec $p = \infty$.

(3) **Si $1 < p < \infty$** Plusieurs parties.

(3a) **Un premier calcul**
Nous posons

$$\begin{aligned} F\colon X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_Y h(x,y)dy, \end{aligned} \tag{29.191}$$

nous considérons un certain $\varphi \in L^q(X)$, et nous calculons $s = |\int_X F\varphi|$:

$$s \leqslant \int_X |F||\varphi| \tag{29.192a}$$
$$= \int_X \left[\int_Y |h(x,y)||\varphi(x)|dy \right] dx. \tag{29.192b}$$

Le théorème de Fubini-Tonelli 16.304(2) appliqué à la fonction $f(x,y) = |h(x,y)||g(x)|$ permet de permuter les intégrales parce que f est mesurable et positive[22] :

$$s \leqslant \int_Y \left(\int_X |h(x,y)||\varphi(x)|dx \right) dy. \tag{29.193}$$

Nous pouvons utiliser Hölder 29.39(1) pour l'intégrale sur X parce que $\varphi \in L^q$ et $h_{1,y} \in L^p$:

$$\int_X |h(x,y)||\varphi(x)| = \|h_{1,y}\varphi\|_1 \leqslant \|h_{1,y}\|_p \|\varphi\|_q = N_1(y)\|\varphi\|_q. \tag{29.194}$$

Parmi les hypothèses, nous avons $N_1 \in L^1(Y)$. Donc l'intégrale sur Y se passe en réalité assez bien et nous avons

$$s \leqslant \int_Y \|h_{1,y}\|_p \|\varphi\|_q dy = \|\varphi\|_q \int_Y N_1(y)dy < \infty. \tag{29.195}$$

Nous avons prouvé que pour tout $\varphi \in L^q(Y)$,

$$\left| \int_X F\varphi \right| \leqslant \|\varphi\|_q \|N_1\|_1 < \infty. \tag{29.196}$$

Nous prenons maintenant le supremum sur tous les $\varphi \in L^q(Y)$ satisfaisant $\|\varphi\|_q = 1$. La proposition 29.47(2) nous dit que le membre de gauche devient $\|F\|_p$. Quant au membre de droite, il devient simplement $\|N_1\|_1$:

$$\|F\|_p \leqslant \|N_1\|_1 < \infty. \tag{29.197}$$

EQooKIFGooRHBGXl

(3b) **Un second calcul** Nous faisons exactement le même calcul que le premier, mais en partant de

$$\begin{aligned} G\colon X &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \int_Y |h(x,y)|dy. \end{aligned} \tag{29.198}$$

Nous considérons $\varphi \in L^q(X)$, et nous calculons en suivant les mêmes étapes :

$$\|G\varphi\|_1 = \int_X |G(x)\varphi(x)|dx \tag{29.199a}$$
$$= \dots \tag{29.199b}$$
$$\leqslant \|\varphi\|_q \|N_1\|_1. \tag{29.199c}$$

Cela montre que pour tout $\varphi \in L^q(X)$ nous avons

$$\left| \int_X G\varphi \right| \leqslant \int_X |G\varphi| = \|G\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_q \|N_1\|_1 < \infty, \tag{29.200}$$

et en passant au supremum, nous avons

$$\|G\|_p \leqslant \|N_1\|_1 < \infty \tag{29.201}$$

(3c) **Pour (3)** Nous avons, en utilisant 29.197 :

$$\left(\int_X \left| \int_Y h(x,y)dy \right|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_X |F(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|F\|_p \leqslant \|N_1\|_1 \tag{29.202}$$

(3d) **Pour (1)** Nous avons vu que $\|G\|_p < \infty$. Donc $G < \infty$ presque partout. Cela prouve que $h_{2,x} \in L^1(Y)$ pour presque tout x.

[22] Nous n'avons pas (encore) de garanties que $|f(x,y)| < \infty$, mais ce n'est pas important pour le moment.

(3e) **Pour (2)** Nous devons voir que $N_2 \in L^p(X)$. Calcul avec permutation d'intégrales de Fubini-Tonelli :

$$\|N_2\|_p^p = \int_X \Big|\|h_{2,x}\|_1\Big|^p dx \tag{29.203a}$$
$$= \int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|dy\Big)^p dx \tag{29.203b}$$
$$= \int_X |G(x)|^p \tag{29.203c}$$
$$= \|G\|_p^p \tag{29.203d}$$
$$< \infty. \tag{29.203e}$$

□

LEMooPSBWooGLggTe

Lemme 29.51 ([749]).
Si (X,μ) est un espace mesuré σ-fini[23] non nul[24], il existe une fonction mesurable strictement positive en escalier $k\colon X \to]0,\infty[$ telle que

$$\int_X k d\mu = 1. \tag{29.204}$$

Démonstration. Vue que X est σ-fini, il existe des parties (A_n) de mesures finies telles que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$. Afin d'avoir des parties disjointes, nous posons

$$B_n = A_n \setminus \big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_n\big). \tag{29.205}$$

Nous posons

$$k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu(B_n)} \mathbb{1}_{B_n} \tag{29.206}$$

où (α_n) est une suite de réels strictement positifs dont la somme vaut 1. En vertu de la somme géométrique (12.517), prendre $\alpha_n = 2^{-n}$ fonctionne.

Notons que les B_n étant disjoints, pour chaque x, la somme définissant $k(x)$ est non seulement finie, mais se réduit à un seul terme. L'application k est en escalier ; son intégrale vaut

$$\int_X k d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu(B_n)} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1. \tag{29.207}$$

□

À mon avis l'énoncé de 29.52 n'est pas tellement correct. Il manque des hypothèse. Ne l'utilisez que si vous êtes sure ; et préférez 29.50.

PROPooGZJZooXfZdqn

Proposition 29.52 (Forme intégrale de Minkowski[749]).
Soient deux espaces σ-finis (X,μ) et (Y,ν). Si $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ est mesurable[25] et si $p \geqslant 1$, alors

$$\Big[\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\Big)^p d\mu(x)\Big]^{1/p} \leqslant \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p} d\nu(y). \tag{29.208}$$

EQooAEXWooXJtGGR

De façon plus compacte :

$$\Big\| x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big\|_p \leqslant \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y) \tag{29.209}$$

où $f_y(x) = f(x,y)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **La fonction M** Pour toute application mesurable $g\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ nous posons

$$M(g) = \int_Y \Big[\int_X |g(x,y)|^p d\mu(x)\Big]^{1/p} d\nu(y). \tag{29.210}$$

Cette fonction a une propriété d'homogénéité : $M(\lambda g) = \lambda M(g)$ pour tout $\lambda \in [0,\infty[$.

[23] Définition 16.18.
[24] C'est-à-dire que μ n'est pas la mesure identiquement nulle.
[25] Pour l'espace mesuré produit $X \times Y, \mu \otimes \nu$.

(2) **Si $M(g) < 1$** Nous considérons une fonction mesurable $g\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ telle que $M(g) < 1$. Soit $k\colon Y \to]0,\infty[$ une fonction donnée par le lemme 29.51, c'est-à-dire telle que $\int_Y k = 1$. Nous posons

$$\begin{aligned} s\colon Y &\to [0,\infty] \\ y &\mapsto \left(\int_X |g(x,y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \end{aligned} \tag{29.211}$$

ainsi que

$$h(y) = s(y) + \big(1 - M(g)\big)k(y). \tag{29.212}$$

Vu que $M(g) < 1$ et que $k > 0$, nous avons l'inégalité stricte $h(y) > s(y) \geqslant 0$ pour tout $y \in Y$. Nous avons de plus

$$\int_Y h(y)d\nu(y) = \underbrace{\int_Y s}_{=M(g)} + \big(1 - M(g)\big) \underbrace{\int_Y k}_{=1} = 1. \tag{29.213}$$

Nous considérons maintenant la mesure $\rho = h\nu$ (produite d'une mesure par une fonction, définition 16.214). Nous venons de montrer que c'est une mesure de probablilité. En posant $\alpha(x) = |x|^p$, nous pouvons faire quelques calculs avec les justifications en-dessous :

SUBEQSooPPZIooSEDcpS

$$\begin{aligned} \alpha\Big(\int_Y |g(x,y)|d\nu(y) \Big) &= \alpha\Big(\int_Y h(y)^{-1}|g(x,y)|h(y)d\nu(y) \Big) && \text{(29.214a)} \\ &= \alpha\left(\int_Y [|g(x,y)|h(y)^{-1}]d\rho(y) \right) && \text{(29.214b)} \\ &\leqslant \int_Y \alpha\big(|g(x,y)|h(y)^{-1}\big)d\rho(y) && \text{(29.214c)} \\ &= \int_Y |g(x,y)|^p |h(y)|^{1-p} d\nu(y) && \text{(29.214d)} \\ & && \text{(29.214e)} \end{aligned}$$

SUBEQooDAWBooOOfQBE

SUBEQooLDEHooJelfxU

Justifications.

- Pour (29.214c). Inégalité de Jensen, proposition 29.37
- Pour (29.214d). La fonction h est à valeurs positives ; donc $h = |h|$ et nous pouvons coller le h qui ressort de ρ avec le $|h^{-1}|^p$.

Nous continuons en intégrant l'inégalité (29.214) sur X :

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y |g(x,y)|d\nu(y) \right)^p d\mu(x) &\leqslant \int_X \left[\int_Y |g(x,y)|^p h(y)^{1-p} d\nu(y) \right] d\mu(x) && \text{(29.215a)} \\ &= \int_Y \int_X \big[|g(x,y)|^p h(y)^{1-p} d\mu(x) \big] d\nu(y) && \text{(29.215b)} \\ &= \int_Y \left(\int_X \big[|g(x,y)|^p d\mu(x) \big] \right) h(y)^{1-p} d\nu(y) && \text{(29.215c)} \\ &= \int_Y s(y)^p h(y)^{1-p} d\nu(y) && \text{(29.215d)} \\ &\leqslant \int_Y h(y)d\nu(y) && \text{(29.215e)} \\ &= 1. && \text{(29.215f)} \end{aligned}$$

SUBEQooSDNWooIZcENB

SUBEQooEFTLooPwnovo

Justifications.

- Pour (29.215b). Les intégrales sont permutées grâce au théorème de Fibini-Tonelli 16.304.
- Pour (29.215e). Nous savons que $h > s \geqslant 0$, donc $s(y)^p/h(y)^p < 1$.

Au final nous avons prouvé que si $M(g) < 1$, alors nous avons

$$\int_X \left(\int_Y |g(x,y)|d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \leqslant 1. \tag{29.216}$$

EQooTGDMooZGYbGx

(3) **La preuve proprement dite** Nous considérons une fonction mesurable $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ comme dans les hypothèses. Astuce : considérons $0<t<1$ et appliquons l'inégalité (29.216) à $g=\frac{t}{M(f)}f$. Cela est possible parce que

$$M(g)=\frac{t}{M(f)}M(f)=t<1. \tag{29.217}$$

Nous avons :

$$\int_X\left(\int_Y|\frac{t}{M(f)}||f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\leqslant 1, \tag{29.218}$$

et donc, vu que $M(f)$ et t sont positifs,

$$\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\leqslant\frac{M(f)}{t}. \tag{29.219}$$

Cette inégalité est valable pour tout $t<1$ et, ô incroyable !, ce t n'est qu'à droite. Nous pouvons prendre la limite $t\to 1$ dans cette inégalité[26] :

$$\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\leqslant M(f). \tag{29.220}$$

Et ça, c'est ce que nous devions démontrer.

□

29.3.7 Ni inclusions ni inégalités

Aucun espace $L^p(\mathbb{R})$ n'est inclus dans aucun autre ni aucune norme n'est plus grande qu'une autre (sur les intersections). Nous verrons cependant en la proposition 29.53 que de telles inclusions et inégalités sont possibles pour $L^p\big([0,1]\big)$.

Nous allons donner des exemples de tout ça en supposant $p<q$ et en nous appuyant lourdement sur les intégrales de $\frac{1}{x^\alpha}$ étudiées par la proposition 16.303.

(1) $L^p\not\subset L^q$

La fonction

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^{1/q}} & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{29.221}$$

EqXIEooZpxQhV

est dans L^p mais pas dans L^q. En effet

$$\|f\|_p^p=\int_0^1\frac{1}{x^{p/q}}dx<\infty \tag{29.222}$$

parce que $p<q$ et $p/q<1$. Par contre

$$\|f\|_q^q=\int_0^1\frac{1}{x}dx=\infty. \tag{29.223}$$

(2) $L^q\not\subset L^p$

La fonction

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^{1/p}} & \text{si } x>1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{29.224}$$

est dans L^q mais pas dans L^p. En effet

$$\|f\|_p^p=\int_1^\infty\frac{1}{x}=\infty \tag{29.225}$$

alors que

$$\|f\|_q^q=\int_1^\infty\frac{1}{x^{q/p}}dx<\infty. \tag{29.226}$$

[26] Nous ne pouvons pas simplement poursuivre les inégalités en majorant t par 1 parce que le t est au dénominateur : l'inégalité irait dans le mauvais sens.

(3) **Exemple de $\|f\|_p > \|f\|_q$**
La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29.227}$$

Nous avons

$$\|f\|_p = 2^{1/p} \tag{29.228a}$$
$$\|f\|_q = 2^{1/q}. \tag{29.228b}$$

Mais comme $p < q$ donc $\|f\|_p > \|f\|_q$.

(4) **Exemple de $\|f\|_p < \|f\|_q$**
La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29.229}$$

Alors

$$\|f\|_p = \frac{1}{2^{1/p}} \tag{29.230a}$$
$$\|f\|_q = \frac{1}{2^{1/q}} \tag{29.230b}$$

et donc $\|f\|_p < \|f\|_q$.

Ces exemples donnent un exemple de fonction f telle que $\|f\|_p < \|f\|_q$ pour tout espace $L^p(I)$ et $L^q(I)$ avec $I \subset \mathbb{R}$. Par contre l'exemple $\|f\|_p > \|f\|_q$ ne fonctionne que si la taille de I est plus grande que 1. Et pour cause : il y a des inclusions si I est borné.

PropIRDooFSWORl

Proposition 29.53 ([16])**.**
Inclusions et inégalités dans le cas d'un ensemble de mesure finie.

(1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dès que $p \leqslant q$.

ItemWSTooLcpOvXii

(2) Si $1 < p < 2$ et si $f \in L^2\big([0,1]\big)$ alors $\|f\|_p \leqslant \|f\|_2$.

Démonstration. Pour la simplicité des notations nous allons noter L^p pour $L^p(\Omega)$, et pareillement pour L^q. Soit $f \in L^q$. Nous posons

$$A = \{x \in \Omega \text{ tel que } |f(x)| \geqslant 1\}. \tag{29.231}$$

Étant donné que $p \leqslant q$ nous avons $|f|^p \leqslant |f|^q$ sur A ; par conséquent $\int_A |f|^p$ converge parce que $\int_A |f|^q$ converge.

L'ensemble A^c est évidemment borné (complémentaire dans Ω) et sur A^c nous avons $|f(x)| \leqslant 1$ et donc $|f|^p \leqslant 1$. L'intégrale $\int_{A^c} |f|^p$ converge donc également.

Au final $\int_\Omega |f|^p$ converge et $f \in L^p$.

Soit à présent $f \in L^2$; par le premier point nous avons immédiatement $f \in L^2 \cap L^p$. Soit aussi $r \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2/p} + \frac{1}{r} = 1$. Nous avons $|f|^p \in L^{2/p}$, et vu que nous sommes sur un domaine borné, $1 \in L^r$. Nous écrivons l'inégalité de Hölder (29.102) avec ces fonctions. D'une part

$$\|f\|_1 = \||f|^p\|_1 = \|f\|_p^p. \tag{29.232}$$

D'autre part

$$\||f|^p\|_{2/p} = \left(\int |f|^2\right)^{p/2} = \|f\|_2^p. \tag{29.233}$$

Donc $\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_2^p$, ce qui prouve l'assertion (2) parce que $p > 1$. □

Remarque 29.54.
Nous n'avons cependant pas $L^2\big([0,1]\big) = L^p\big([0,1]\big)$ parce que l'exemple (29.221) fonctionne encore :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{29.234}$$

pour $x \in [0,1]$ donne bien

$$\|f\|_2 = \int_0^1 \frac{1}{x} = \infty \tag{29.235}$$

et $\|f\|_p = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/2}} < \infty$ parce que $1 < p < 2$.

29.3.8 Complétude

ThoUYBDWQX

Théorème 29.55 ([758, 759]).
Pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p. Pour tout i, il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_k - f_l\|_p \leqslant 2^{-i}$ pour tout $k, l \geqslant N_i$. Nous considérons la sous-suite $g_i = f_{N_i}$, de telle sorte qu'en particulier

$$\|g_i - g_{i-1}\|_p \leqslant 2^{-i+1}. \tag{29.236}$$

EqJLoDID

Pour chaque j nous considérons la somme télescopique

$$g_j = g_0 + \sum_{i=1}^{j} (g_i - g_{i-1}) \tag{29.237}$$

et l'inégalité

$$|g_j| \leqslant |g_0| + \sum_{i=1}^{j} |g_i - g_{i-1}|. \tag{29.238}$$

Nous allons noter

$$h_j = |g_0| + \sum_{i=1}^{j} |g_i - g_{i-1}|. \tag{29.239}$$

EqSomPaFPQOWC

La suite de fonctions (h_j) ainsi définie est une suite croissante de fonctions positives qui converge donc (ponctuellement) vers une fonction h qui peut éventuellement valoir l'infini en certains points. Par continuité de la fonction $x \mapsto x^p$ nous avons

$$\lim_{j\to\infty} h_j^p = h^p, \tag{29.240}$$

puis par le théorème de la convergence monotone (théorème 16.180) nous avons

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega h_j^p d\mu = \int_\Omega h^p d\mu. \tag{29.241}$$

Utilisant à présent la continuité de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ nous trouvons

$$\lim_{j\to\infty} \left(\int h_j^p \right)^{1/p} = \left(\int |h|^p \right)^{1/p}. \tag{29.242}$$

Nous avons donc déjà montré que

$$\lim_{j\to\infty} \|h_j\|_p = \left(\int |h|^p \right)^{1/p} \tag{29.243}$$

où, encore une fois, rien ne garantit à ce stade que l'intégrale à droite soit un nombre fini. En utilisant l'inégalité de Minkowski (proposition 29.45) et l'inégalité (29.236) nous trouvons

$$\|h_j\|_p \leqslant \|g_0\|_p + \sum_{i=1}^{j} \|g_i - g_{i-1}\|_p \leqslant \|g_0\|_p + 1. \tag{29.244}$$

En passant à la limite,

$$\left(\int |h|^p \right)^{1/p} = \lim_{j\to\infty} \|h_j\|_p \leqslant \|g_0\|_p + 1 < \infty. \tag{29.245}$$

Par conséquent $\int |h|^p$ est finie et

$$h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu). \tag{29.246}$$

EqgLpdUPQBF

En particulier, l'intégrale $\int h$ est finie (parce que $p \geqslant 1$) et donc que $h(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Nous savons que $h(x)$ est la limite des sommes partielles (29.239), en particulier la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g_i - g_{i-1}| \tag{29.247}$$

converge ponctuellement. En vertu du corolaire 16.211, la série de terme général $g_i - g_{i-1}$ converge ponctuellement. La suite g_i converge donc vers une fonction que nous notons g. Par ailleurs la suite g_i est dominée par $h \in L^p$, le théorème de la convergence dominée (théorème 16.209) implique que

$$\lim_{j\to\infty} \|g_j - g\|_p = 0. \tag{29.248}$$

Nous allons maintenant prouver que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_p = 0$. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout n et i nous avons

$$\|f_n - g\|_p = \|f_n - f_{N_i} + f_{N_i} - g\|_p \leqslant \|f_n - f_{N_i}\|_p + \|f_{N_i} - g\|_p. \tag{29.249}$$

Pour rappel, $f_{N_i} = g_i$. Si i et n sont suffisamment grands nous pouvons obtenir que chacun des deux termes est plus petit que $\epsilon/2$.

Il nous reste à prouver que $g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous avons déjà vu (équation (29.246)) que $h \in L^p$, mais $|g_i| \leqslant h^p$, par conséquent $g \in L^p$.

Nous avons donc montré que la suite de Cauchy (f_n) converge vers une fonction de L^p, ce qui signifie que L^p est complet. □

ThoGVmqOro

Théorème 29.56 (Riesz-Fischer[112, 760]).
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $p \in [1, \infty]$. Alors

ItemPDnjOJzi

(1) Toute suite convergente dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ admet une sous-suite convergente presque partout sur Ω.

ItemPDnjOJzii

(2) La sous-suite donnée en (1) est dominée par un élément de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

ItemPDnjOJziii

(3) L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est de Banach.

Démonstration. Le cas $p = \infty$ est à séparer des autres valeurs de p parce qu'on y parle de norme uniforme, et aucune sous-suite n'est à considérer.

(1) **Cas $p = \infty$.** Nous commençons par prouver dans le cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, ou plus précisément une suite de représentants d'éléments de L^p. Pour tout $k \geqslant 1$, il existe $N_k \geqslant 0$ tel que si $m, n \geqslant N_k$, on a

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}. \tag{29.250}$$

En particulier, l'ensemble E_k sur lequel

$$|f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \frac{1}{k} \tag{29.251}$$

est de mesure nulle. D'après le lemme 16.28, la partie $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, est encore de mesure nulle. En résumé, nous avons un N_k tel que si $m, n \geqslant N_k$, alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \tag{29.252}$$

EqKAWSptG

pour tout x hors de E. Donc pour chaque $x \in \Omega \setminus E$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge donc. Cela définit donc une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \setminus E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned} \tag{29.253}$$

Cela prouve le point (1) : la convergence ponctuelle.

En passant à la limite $n \to \infty$ dans l'équation (29.252) et tenant compte que cette majoration tient pour presque tout x dans Ω, nous trouvons

$$\|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}. \tag{29.254}$$

Donc non seulement f est dans L^∞, mais en plus la suite (f_n) converge vers f au sens L^∞, c'est-à-dire uniformément. Cela prouve le point (3). En ce qui concerne le point (2), la suite f_n est entièrement (à partir d'un certain point) dominée par la fonction $1 + |f|$ qui est dans L^∞.

(2) **Cas $p < \infty$.**

Toute suite convergente étant de Cauchy, nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans $L^p(\Omega)$ et ce sera suffisant pour travailler sur le premier point. Pour montrer qu'une suite de Cauchy converge, il est suffisant de montrer qu'une sous-suite converge. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que pour tout $n \geqslant 1$ nous ayons

$$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leqslant \frac{1}{2^n}. \tag{29.255}$$

Pour créer la fonction φ, il est suffisant de prendre le N_k donné par la condition de Cauchy pour $\epsilon = 1/2^k$ et de considérer la fonction définie par récurrence[27] par $\varphi(1) = N_1$ et $\varphi(n+1) > \max\{N_n, \varphi(n)\}$. Ensuite nous considérons la fonction

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|. \tag{29.256}$$

Notons que pour écrire cela nous avons considéré des représentants f_k qui sont alors des fonctions à l'ancienne. Étant donné que g_n est une somme de fonctions dans L^p, c'est une fonction L^p, comme nous pouvons le constater en calculant sa norme :

$$\|g_n\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{29.257}$$

Étant donné que tous les termes de la somme définissant g_n sont positifs, la suite (g_n) est croissante. Mais elle est bornée en norme L^p et donc sujette à obéir au théorème de Beppo-Levi 16.180 sur la convergence monotone. Il existe donc une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que $g_n \to g$ presque partout.

Soit un $x \in \Omega$ pour lequel $g_n(x) \to g(x)$; alors pour tout $n \geqslant 2$ et $\forall q \geqslant 0$, [EqWTHojCq]

$$|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| = \Big| \underbrace{f_{\varphi(n+q)}(x) + \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x)}_{=\sum_{k=1}^{q}} \underbrace{\sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)}_{=\sum_{k=1}^{q}} \Big| \tag{29.258a}$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{q} f_{\varphi(n+k)}(x) - \sum_{k=1}^{q} f_{\varphi(n+k-1)}(x) \right| \tag{29.258b}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{q} \left| f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x) \right| \tag{29.258c}$$

$$= g_{n+q+1}(x) - g_{n+1}(x) \tag{29.258d}$$

$$\leqslant g(x) - g_{n+1}(x). \tag{29.258e}$$

Nous prenons la limite $n \to \infty$; la dernière expression tend vers zéro et donc

$$|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \to 0 \tag{29.259}$$

pour tout q. Donc pour presque tout $x \in \Omega$, la suite $n \mapsto f_{\varphi(n)}(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc y converge vers un nombre que nous nommons $f(x)$. Cela définit une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \setminus E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} f_{\varphi(n)}(x) \end{aligned} \tag{29.260}$$

où E est de mesure nulle. Montrons que f est bien dans $L^p(\Omega)$; pour cela nous complétons la série d'inégalités (29.258) en

$$\left|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant g(x) - g_{n-1}(x) \leqslant g(x). \tag{29.261}$$

En prenant la limite $q \to \infty$ nous avons l'inégalité

$$|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leqslant g(x) \tag{29.262}$$ [EqMQbDRac]

[27] Utilisation du théorème 1.131. Vous n'êtes pas obligé de le citer à chaque fois, mais c'est bien de garder en tête que la définition de fonctions par récurrence n'est pas quelque chose de complètement trivial.

pour presque tout $x \in \Omega$, c'est-à-dire pour tout $x \in \Omega \setminus E$. Cette inégalité implique deux choses valables pour presque tout x dans Ω :

$$f(x) \in B\big(g(x), f_{\varphi(n)}(x)\big) \tag{29.263a}$$
$$f_{\varphi(n)}(x) \leqslant |f(x)| + |g(x)|. \tag{29.263b}$$

La première inégalité assure que $|f|^p$ est intégrable sur $\Omega \setminus E$ parce que $|f|$ est majorée par $|g|+|f_{\varphi(n)}|$. Elle prouve par conséquent le point (1) parce que $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est une sous-suite convergente presque partout. La seconde montre le point (2).

Attention : à ce point nous avons prouvé que $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est une suite de fonctions qui converge *ponctuellement presque partout* vers une fonction f qui s'avère être dans L^p. Nous n'avons pas montré que cette suite convergeait au sens de L^p vers f. Ce que nous devons montrer est que

$$\|f - f_{\varphi(n)}\|_p \to 0. \tag{29.264}$$ EqJLfnEvi

L'inégalité (29.262) nous donne aussi, toujours pour presque tout $x \in \Omega$:

$$\big|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\big|^p \leqslant g(x)^p \tag{29.265}$$

ce qui signifie que la suite[28] $|f - f_{\varphi(n)}|^p$ est dominée par la fonction $|g|^p$ qui est intégrable sur $\Omega \setminus E$ et tout autant sur Ω parce que E est négligeable ; cela prouve au passage le point (2), et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (16.209) nous dit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \big|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\big|^p dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \big|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\big| dx = 0. \tag{29.266}$$

Cette dernière suite d'égalités se lit de la façon suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_{\varphi(n)}\|_p = \Big\| \lim_{n\to\infty} |f - f_{\varphi(n)}| \Big\|_p = 0. \tag{29.267}$$

Nous en déduisons que la suite $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est convergente vers f au sens de la norme $L^p(\Omega)$. Or la suite de départ (f_n) était de Cauchy (pour la norme L^p) ; donc l'existence d'une sous-suite convergente implique la convergence de la suite entière vers f, ce qu'il fallait démontrer.

□

Le théorème suivant est souvent cité en disant que L^p est un espace de Hilbert si et seulement si $p = 2$. Comme vous le voyez, il faut un peu plus d'hypothèses.

Je précise que je suis le seul à nommer ce théorème par le nom de Weinersmith. Je ne sais pas si il a déjà un nom ; alors pourquoi pas celui-là plutôt qu'un autre ? La raison de ce choix est dans la constante de Weiner, définition 46.1.

THOooCCMBooGulxkQ

Théorème 29.57 (Théorème de Weinersmith[761, 762])**.**
Nous considérons un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi qu'un nombre $p \in [1, \infty]$. Nous supposons

(1) $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert,

(2) Il existe des parties $A, B \subset L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $A \cap B = \varnothing$ et $0 < \mu(A) < \infty$ et $0 < \mu(B) < \infty$.

Alors $p = 2$.

Démonstration. Vu que L^p est un espace de Hilbert (hypothèse), il vérifie l'identité du parallélogramme de la proposition 12.37, c'est-à-dire

$$\|f + g\|_p^2 + \|f - g\|_p^2 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2. \tag{29.268}$$ EQooAKKYooURIbyi

(1) **Pour $1 \leqslant p < \infty$**

Soient donc A, B comme dans l'hypothèse. Nous considérons les fonctions

$$f = \frac{1}{\mu(A)^{1/p}} \mathbb{1}_A \tag{29.269a}$$
$$g = \frac{1}{\mu(B)^{1/p}} \mathbb{1}_B. \tag{29.269b}$$

[28] À ce point, [112] se contente de majorer $|f_{\varphi(n)}(x)|$ par $|f(x)| + |g(x)|$, mais je ne comprends pas comment cette majoration nous permet d'utiliser la convergence dominée de Lebesgue pour montrer (29.264).

En ce qui concerne les normes L^p de f et g, c'est un calcul simple :

$$\|f\|_p^2 = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu\right)^{2/p} = \left(\int_A \frac{1}{\mu(A)} d\mu\right)^{2/p} = 1. \tag{29.270}$$

De même pour g : $\|f\|_p^2 = \|g\|_p^2 = 1$. Donc

$$2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2 = 4 \tag{29.271}$$

En ce qui concerne la somme,

$$\|f+g\|_p^2 = \left(\int_A \frac{d\mu}{\mu(A)} + \int_B \frac{d\mu}{\mu(B)}\right)^{2/p} = 2^{2/p}. \tag{29.272}$$

Pour la différence, la seule subtilité à voir est que

$$\int_\Omega |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|^p = \int_A |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|^p + \int_B |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|^p = \int_A |\mathbb{1}_A| + \int_B |-\mathbb{1}_B| = \int_A \mathbb{1}_A + \int_B \mathbb{1}_B. \tag{29.273}$$

Ce n'est pas de la magie que le moins se change en plus. Bref, pour la différence nous avons

$$\|f-g\|^2 = \left(\int_\Omega |f(\omega) - g(\omega)|^p d\mu\right)^{2/p} \tag{29.274a}$$

$$= \left(\int_\Omega |\frac{1}{\mu(A)^{1/p}} \mathbb{1}_A(\omega) - \frac{1}{\mu(B)^{1/p}} \mathbb{1}_B(\omega)|^p d\mu\right)^{2/p} \tag{29.274b}$$

$$= \left(\int_A |\frac{\mathbb{1}_A(\omega)}{\mu(A)^{1/p}}|^p + \int_B |-\frac{\mathbb{1}_B(\omega)}{\mu(B)^{1/p}}|^p\right)^{2/p} \tag{29.274c}$$

$$= 2^{2/p}. \tag{29.274d}$$

Donc $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2 \times 2^{2/p}$.

Vu que L^p est un espace de Hilbert, nous avons finalement

$$4 = 2 \times 2^{2/p}. \tag{29.275}$$

Cela est uniquement valable pour $p = 2$.

(2) **Pour $p = \infty$** Il suffit de prendre $f = \mathbb{1}_A$ et $g = \mathbb{1}_B$. Nous avons alors $\|f\|_{L^\infty}^2 = \|g\|_{L^\infty}^2 = \|f+g\|_{L^\infty}^2 = \|f-g\|_{L^\infty}^2 = 1$.

L'égalité (29.268) devient $2 = 4$, ce qui est faux.

□

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, est-ce que $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est assuré de n'être pas de Hilbert ? Non.

Exemple 29.58 ([762]).
Soit la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29.276}$$

Nous allons prouver que pour tout $p \in [0, \infty]$, l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}), \delta)$ est un espace de Hilbert. Pour cela nous introduisons le produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = f(0)\overline{g(0)}. \tag{29.277}$$

Nous avons par ailleurs la norme

$$\|f\|^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\delta = f(0)^p. \tag{29.278}$$

Donc oui, $\|f\|_p = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. △

29.3.9 Théorèmes d'approximation

PROPooUQUBooAWgNhm

Proposition 29.59 ([523], thème 24)**.**
Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors les fonctions étagées[29] dans $L^p(\Omega)$ sont denses dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Soit $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous supposons dans un premier temps que $f : \Omega \to [0, \infty[$. Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, nous verrons plus bas.

Notons que la partie $\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = \infty\}$ est de mesure nulle, donc nous pouvons vraiment choisir un représentant à valeurs dans $[0, \infty[$ et non à valeurs dans $[0, \infty]$ comme le serait un représentant un peu quelconque.

Par le théorème 16.120, il existe une suite croissante de fonctions étagées $\phi_n : \Omega \to [0, \infty[$ telles que $\phi_n \to f$ ponctuellement. Notons que ce théorème fonctionne parce que les fonctions L^p (en tout cas leurs représentants) sont mesurables parce que c'est dans la définition 29.12. Notre devoir est maintenant de prouver que sous l'hypothèse que f est dans L^p, alors la convergence $\phi_n \to f$ est une convergence dans L^p.

(1) $\underline{1 \leqslant p < \infty}$ Vu que f et ϕ_n sont à valeurs positives nous avons $|f - \phi_n|^p \leqslant |f|^p$. Mais par hypothèse $|f|^p \in L^1(\Omega)$. Donc la suite $g_n = |f - \phi_n|^p$ est majorée (uniformément en n) par $|f|^p$ qui est dans L^1. Le théorème de la convergence dominée permet de permuter

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \int \lim_{n\to\infty} g_n = 0. \tag{29.279}$$

Cela revient à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \phi_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f - \phi_n|^p = \int \lim_{n\to\infty} |f - \phi_n|^p = 0, \tag{29.280}$$

ce qui signifie que $\phi_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} f$.

(2) $\underline{\textbf{Pour } p = \infty}$ Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors nous pouvons prendre un représentant borné. Avec lui, nous avons $\phi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Avec cela nous avons, pour ϵ donné, un n assez grand pour avoir

$$N_\infty(\phi_n - f) \leqslant \|\phi_n - f\|_\infty < \epsilon. \tag{29.281}$$

Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $[0, \infty[$, il suffit de faire valoir le travail que nous venons de faire quatre fois, pour les valeurs réelles, imaginaires, positives et négatives. □

PROPooPTZRooCBkZvr

Proposition 29.60 (Continuité de l'intégrale par rapport à la mesure[763])**.**
Soit $p \in [1, \infty[$. Nous considérons $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\int_A |f|^p d\mu < \epsilon \tag{29.282}$$

dès que $\mu(A) < \delta$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La proposition 29.59 dit que les applications étagées sont denses dans L^p. Il existe donc une fonction étagée $\phi \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\|f - \phi\|_p < \epsilon$. Étant donné que ϕ est étagée, elle prend un nombre fini de valeurs et aucune de ces valeurs est ∞. Donc il existe $M > 0$ tel que $|\phi(x)| < M$ pour tout $x \in \Omega$.

Nous posons $\delta = (\epsilon/2M)^p$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \delta$. Nous utilisons l'inégalité de Minkowski de la proposition 29.45(1) :

$$\|f\|_{A,p} \leqslant \|f - \phi\|_{A,p} + \|\phi\|_{A,p} \leqslant \frac{\epsilon}{2} + M\mu(A^{1/p}) < \epsilon. \tag{29.283}$$

Donc nous avons bien $\int_A |f|^p < \epsilon$. □

CORooSGMXooCNfGNk

Corolaire 29.61 ([1])**.**
Si $f \in L^1\big([a, b]\big)$, alors

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{a+h} f = 0. \tag{29.284}$$

[29] Définition 16.114. Pour rappel, une fonction est simple lorsqu'elle prend un nombre fini de valeurs, et elle est étagée lorsqu'elle est en outre mesurable.

Démonstration. Nous notons λ la mesure de Lebesgue. Soit $\epsilon > 0$. La proposition 29.60 dit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\lambda(A) < \delta$ implique $\int_a f = 0$. Si $|h| < \delta$ nous avons $\lambda\big([a, a+h]\big) < \delta$ et donc

$$\int_a^{a+h} f d\lambda = \int_{[a,a+h]} f d\lambda < \epsilon. \tag{29.285}$$

□

PROPooANISooKzQrnH

Proposition 29.62 ([1]).
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soient $f \in L^1(I)$ et $a \in I$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \tag{29.286}$$

est continue.

Démonstration. Soit $h > 0$ tel que $B(a, h) \subset I$, étant compris que la boule est au sens de la topologie sur I ; donc si a est une extrémité de I, cela ne comprend que des $h \geqslant 0$ ou $h \leqslant 0$. Nous avons

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \int_a^{x+h} - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f. \tag{29.287}$$

La limite $h \to 0$ donne zéro par le corolaire 29.61. □

29.3.10 Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact

Définition 29.63.
*Une fonction est **étagée par rapport à** L^p si elle est de la forme*

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{29.288}$$

où les B_k sont des mesurables disjoints et $\mathbb{1}_{B_k} \in L^p$ pour tout k.

LemWHIRdaX

Lemme 29.64.
Si f est une fonction étagée en même temps qu'être dans L^p, alors elle est étagée par rapport à L^p.

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{29.289}$$

où les B_k sont disjoints. Par hypothèse $\|f\|_p$ existe. Donc chacune des intégrales $\int_\Omega |\mathbb{1}_{B_k}|^p$ doit exister parce que les B_k étant disjoints, nous pouvons inverser la norme et la somme ainsi que la somme et l'intégrale :

$$\int_\Omega |f|^p = \int_\Omega \sum_{k=1}^N |c_k \mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx = \sum_{k=1}^N \int |c_k \mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx = \sum_{k=1}^N |c_k|^p \int_\Omega |\mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx. \tag{29.290}$$

□

L'ensemble $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe C^∞ et à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est souvent également noté $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

ThoILGYXhX

Théorème 29.65 ([749]).
Nous avons des densités emboitées. Ici D est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ contenu dans $B(0, r)$ et K est un compact contenant $B(0, r+2)$.

(1) Les fonctions étagées par rapport à L^p sur $\mathbb{R}^d$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. A fortiori les fonctions étagées sont denses dans L^p, mais nous n'en aurons pas besoin ici.

ItemYVFVrOIii

(2) Il existe une suite f_n dans $C(K, \mathbb{C})$ telle que

$$f_n \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_D. \tag{29.291}$$

ItemYVFVrOIiii

(3) *Si A est un borélien tel que $\mathbb{1}_A \in L^p(\mathbb{R}^d)$[30], alors il existe une suite de boréliens bornée $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$\mathbb{1}_{D_n} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_A. \tag{29.292}$$

ItemYVFVrOIiv

(4) *Il existe une suite φ_n dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\varphi_n \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_D. \tag{29.293}$$

ItemYVFVrOIv

(5) *L'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$.*

Démonstration. Nous allons montrer les choses point par point.

(1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, nous savons par le théorème 16.120 qu'il existe une suite f_n de fonctions étagées convergeant ponctuellement vers f telle que $|f_n| \leqslant |f|$. La proposition 29.25 nous dit qu'alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$. La fonction f_n étant étagée et dans L^p en même temps, elle est automatiquement étagée par rapport à L^p par le lemme 29.64.

ItemYVFVrOIi

(2) C'est le théorème d'approximation 16.244 appliqué au borélien D contenu dans l'espace mesuré K.

(3) En vertu du point (2), il existe $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ telle que

$$\|f - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant \epsilon. \tag{29.294}$$

Ensuite, par le théorème de Weierstrass, il existe $\varphi \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \epsilon$. Nous avons aussi

$$\|\varphi - f\|_p^p = \int_K |\varphi(x) - f(x)|^p dx \leqslant \mu(X)\|\varphi - f\|_\infty^p \leqslant \epsilon^p \mu(K). \tag{29.295}$$

Quitte à prendre un φ correspondant à un ϵ plus petit, nous avons

$$\|\varphi - f\| \leqslant \epsilon. \tag{29.296}$$

En combinant et en passant à $\epsilon/2$ nous avons trouvé une fonction $\varphi \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ telle que

$$\|\varphi - \mathbb{1}_D\| \leqslant \epsilon. \tag{29.297}$$

(4) Nous considérons les boréliens fermés $D_n = A \cap B(0, n)$. Alors $\mathbb{1}_{D_n} \in L^p$ et nous avons pour n assez grand :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{D_n}(x) - \mathbb{1}_A(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,n)} |\mathbb{1}_A(x)|^p < \epsilon, \tag{29.298}$$

c'est-à-dire que $\mathbb{1}_{D_n} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_A$.

(5) Il suffit de remettre tout ensemble. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, par le point (2) nous commençons par prendre σ étagée par rapport à L^p telle que

$$\|\sigma - f\|_p \leqslant \epsilon. \tag{29.299}$$

Ensuite nous écrivons σ sous la forme

$$\sigma = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{29.300}$$

et nous appliquons le point (3) à chacune des $\mathbb{1}_{B_k}$ pour trouver des boréliens bornés D_k tels que

$$\|\mathbb{1}_{D_k} - \mathbb{1}_{B_k}\|_p \leqslant \epsilon. \tag{29.301}$$

Enfin nous appliquons le point (4) pour trouver des fonctions $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|\varphi_k - \mathbb{1}_{D_k}\|_p \leqslant \epsilon. \tag{29.302}$$

Il n'est pas compliqué de calculer que

$$\Big\| \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k - f \Big\|_p \leqslant 2\epsilon \sum_k c_k + \epsilon. \tag{29.303}$$

[30] Je pense que cette hypothèse manque dans [749]. En tout cas je vois mal comment je pourrais justifier les différentes étapes de la preuve en prenant par exemple $A = \mathbb{R}^d$.

□

CorFZWooYNbtPz

Corolaire 29.66.
Si $1 < p < \infty$ alors la partie[31] $L^2\big([0,1]\big) \cap L^p\big([0,1]\big)$ *est dense dans* $L^p\big([0,1]\big)$.

Démonstration. Nous savons du théorème 29.65(5) que $C_c^\infty\big([0,1]\big)$ est dense dans L^p. Mais nous avons évidemment $C_c^\infty \subset L^2 \cap L^p$, donc $L^2 \cap L^p$ est dense dans L^p. □

LemCUlJzkA

Lemme 29.67 ([749, 715]).
Soit $1 \leqslant p < \infty$ et $f \in L^p(\Omega)$. Nous notons τ_v l'opérateur de translation par v :

$$\begin{aligned} \tau_v \colon L^p(\Omega) &\to L^p(\Omega) \\ f &\mapsto \Big[x \mapsto f(x-v)\Big]. \end{aligned} \tag{29.304}$$

Pour chaque $f \in L^p(\Omega)$, l'application

$$\begin{aligned} \tau(f) \colon \mathbb{R}^d &\to L^p(\Omega) \\ v &\mapsto \tau_v(f) \end{aligned} \tag{29.305}$$

est continue en $v = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{v\to 0} \|\tau_v(f) - f\|_p = 0. \tag{29.306}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est dans $\mathscr{D}(\Omega)$, et nous verrons ensuite comment généraliser.

(1) **Si $f \in \mathscr{D}(\Omega)$**

Soit une suite $v_i \xrightarrow{\mathbb{R}^d} 0$, et posons $f_i = \tau_{v_i}(f)$; le but est de montrer que $f_i \xrightarrow{L^p} f$. Pour cela, la fonction $f - f_i$ est également à support compact, et qui plus est, si $\text{supp}(f) \subset B(0,r)$, alors $\text{supp}(f - f_i) \subset B(0, r + |v_i|)$, et l'ensemble

$$S = \overline{B\big(0, r + \max_i |v_i|\big)} \tag{29.307}$$

est un compact contenant les supports de tous les $f - f_i$. Le maximum existe parce que $v_i \to 0$. Voilà qui « majore » le domaine de $f - f_i$ uniformément en i.

Majorons maintenant $|f - f_i|^p$ de façon uniforme en i. Soit le nombre

$$M = 2 \max_{x\in\mathbb{R}^d} \{f(x)\}. \tag{29.308}$$

La fonction qui vaut M^p sur S et zéro ailleurs est une fonction intégrable qui majore $|f - f_i|^p$. Nous pouvons donc utiliser la convergence dominée de Lebesgue (théorème 16.209) pour écrire

$$\lim_{i\to\infty} \|f - f_i\|_p^p = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega |f(x) - f(x - v_i)|^p dx = \int_\Omega \lim_{i\to\infty} |f(x) - f(x - v_i)| dx = 0. \tag{29.309}$$

(2) **Pour $f \in L^p(\Omega)$**

Soit $\epsilon > 0$, $f \in L^p(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que $\|f - \varphi\|_p \leqslant \epsilon$. Cela est possible par la densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ vue en 29.65(5). Nous choisissons de plus $|v|$ assez petit pour avoir $\|\tau_v(\varphi) - \varphi\|_p < \epsilon$, qui est possible en vertu de ce que nous venons de démontrer à propos des fonctions à support compact. De plus τ_v étant une isométrie de L^p nous avons $\|\tau_v(\varphi) - \tau_v(f)\| = \|\varphi - f\| < \epsilon$. Nous avons tout pour majorer :

$$\|f - \tau_v(f)\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - \tau_v(\varphi)\| + \|\tau_v(\varphi) - \tau_v(f)\| \leqslant 3\epsilon. \tag{29.310}$$

Nous avons donc bien $\lim_{v\to 0} \|f - \tau_v(f)\| = 0$.

□

[31] Nous parlons bien ici de l'*ensemble* L^2 parce que nous le considérons sans norme ou topologie particulière. La densité dont nous parlons ici est celle pour la topologique de L^p.

29.3.11 Approximation

ThoJsBKir

Théorème 29.68 ([382]).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'espace $\mathscr{D}(I)$ des fonctions continues à support compact sur I est dense dans $L^2(I)$.

Ce théorème sera généralisé à tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$ par le théorème 29.65. Cependant L^p n'étant pas un Hilbert, il faudra travailler sans produit scalaire.

Démonstration. Soit $g \in L^2(I)$ une fonction telle que $g \perp f$ pour toute fonction $f \in C_c(I)$. Nous avons donc

$$\langle f, g \rangle = \int_I f\bar{g} = 0. \tag{29.311}$$

En passant éventuellement aux composantes réelles et imaginaires nous pouvons supposer que les fonctions sont toutes réelles. Nous décomposons g en parties positives et négatives : $g = g^+ - g^-$. Notre but est de montrer que $g^+ = g^-$, c'est-à-dire que g est nulle. La proposition 27.14 conclura que $C_c(I)$ est dense dans $L^2(I)$.

Soit un intervalle $[a, b] \subset I$ et une suite croissante de fonctions $f_n \in C_c(I)$ qui converge vers $\mathbb{1}_{[a,b]}$. Par hypothèse pour chaque n nous avons

$$\int_I f_n g^+ = \int_I f_n g^-. \tag{29.312}$$

La suite étant croissante, le théorème de la convergence monotone (théorème 16.180) s'applique et nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n g^+ = \int_a^b g^+, \tag{29.313}$$

de telle sorte que nous ayons, pour tout intervalle $[a, b] \subset I$ l'égalité

$$\int_a^b g^+ = \int_a^b g^-. \tag{29.314}$$

EqYlErAM

De plus ces intégrales sont finies parce que

$$\int_a^b g^+ \leqslant \int_a^b |g| = \int_I |g| \mathbb{1}_{[a,b]} = \langle |g|, \mathbb{1}_{[a,b]} \rangle \leqslant \|g\|_{L^2} \sqrt{b-a} < \infty \tag{29.315}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit maintenant un ensemble mesurable $A \subset I$. La fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ est mesurable et il existe une suite croissante de fonctions étagées (φ_n) convergente vers $\mathbb{1}_A$ par le théorème fondamental d'approximation 16.120. À multiples près, les fonctions φ_n sont des sommes de fonctions caractéristiques du type $\mathbb{1}_{[a,b]}$, par conséquent, en vertu de (29.314) nous avons

$$\int_I \varphi_n g^+ = \int_I \varphi_n g^-. \tag{29.316}$$

Une fois de plus nous pouvons utiliser le théorème de la convergence monotone et obtenir

$$\int_A g^+ = \int_A g^- \tag{29.317}$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset I$. Si nous notons dx la mesure de Lebesgue, les mesures g^+dx et g^-dx sont par conséquent égales et dominées par dx. Par le corolaire 16.238 du théorème de Radon Nikodym, les fonctions g^+ et g^- sont égales. □

29.3.12 Partie uniformément intégrable

DefOZlZnse

Définition 29.69.
*Une partie $H \subset L^1(\Omega, \mu)$ est **uniformément intégrable** si*

$$\lim_{a\to\infty} \left(\sup_{f\in H} \int_{|f|>a} |f(x)| d\mu(x) \right) = 0. \tag{29.318}$$

Notons dans cette définition que vu que $f \in L^1$ nous avons toujours

$$\lim_{a\to\infty} \int_{|f|>a} |f(x)| d\mu(x) = 0. \tag{29.319}$$

LEMooUOQDooIkVyWm

Lemme 29.70 ([1]).
La partie $H = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\Omega,\mu)$ est uniformément intégrable[32] *si et seulement si*

$$\lim_{a\to\infty}\left(\limsup_n \int_{|f_n|>a} |f_n|\right) = 0. \tag{29.320}$$

Cette formule est prise comme définition de l'uniforme intégrabilité par [764].

Démonstration. Quand on a une suite (x_n) de réels positifs, nous avons toujours $\limsup_n x_n \leqslant \sup_n x_n$. □

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 29.71
Je n'ai pas vérifié l'énoncé de 29.72. Si vous pensez que c'est faux, écrivez-moi. Écrivez-moi également si vous avez une démonstration.

PROPooPZRAooSiqgKT

Proposition 29.72 ([1]).
Soit une partie uniformément intégrable $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit une fonction intégrable g.

(1) La partie $\{f_n + g\}$ est uniformément intégrable.

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la partie $\{\lambda f_n\}$ est uniformément intégrable.

(3) Si pour tout n nous avons $g_n \leqslant f_n$, alors la partie $\{g_n\}$ est uniformément intégrable.

PROPooPFZJooLySrgp

Proposition 29.73 ([1]).
Soit $0 < r < \infty$. Si $f \in L^r(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, alors

$$\int_{|f|^r\geqslant\lambda} |f|^r d\mu \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0. \tag{29.321}$$

THOooGLYJooCbNysA

Théorème 29.74 ([765]).
Soient un espace mesuré fini $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et une partie uniformément intégrable[33] *$H \subset L^1(\Omega)$. Nous avons*

ITEMooCAIFooHXOKQb

(1) $\sup_{f\in H} \|f\|_{L^1(\Omega)} < \infty$.

(2) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que

$$\int_A |f|d\mu < \epsilon \tag{29.322}$$

pour tout $f \in H$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \epsilon$.

29.4 Autres résultats de convergence

PROPooGJBIooAYsZQL

Proposition 29.75 ([1]).
Soit $0 < p < \infty$. Si $|f_n| \xrightarrow{L^p} 0$, alors $\liminf_n |f_n| = 0$ presque partout.

Démonstration. Nous y allons par contradiction en supposant qu'il existe une partie mesurable A de mesure non nulle telle que $\liminf_n |f_n(\omega)| > 0$ pour tout $\omega \in A$.

Pour chaque $\omega \in A$, nous posons $n_\omega \in \mathbb{N}$ et $v_\omega > 0$ tels que pour tout $n \geqslant n_\omega$, $|f_n(\omega)| > v_\omega$. Ensuite nous posons

$$A_{n,k} = \{\omega \in A \text{ tel que } n_\omega \leqslant n \text{ et } v_\omega > 1/k\}. \tag{29.323}$$

Nous avons l'union dénombrable $A = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}^2} A_{n,k}$. Vu qu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, il existe (n_0,k_0) tel que $\mu(A_{n_0,k_0}) > 0$. Pour tout $\omega \in A_{n_0,k_0}$ et pour tout $n > n_0$, nous avons

$$|f_\omega(\omega)| > \frac{1}{k_0}. \tag{29.324}$$

[32] Définition 29.69.
[33] Définition 29.69.

Nous avons donc la minoration, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\|f_n\|_p^p = \int_\Omega |f_n(\omega)|^p d\mu(\omega) \tag{29.325a}$$
$$\geqslant \int_{A_{n_0,k_0}} |f_n(\omega)|^p d\mu(\omega) \tag{29.325b}$$
$$\geqslant \int_{A_{n_0,k_0}} \frac{1}{k_0^p} d\mu(\omega) \tag{29.325c}$$
$$= \frac{1}{k_0^p}\mu(A_{n_0,k_0}) > 0. \tag{29.325d}$$

Nous ne pouvons donc pas avoir $|f_n| \xrightarrow{L^p} 0$. □

PROPooUMBQooAhUgHA

Proposition 29.76 ([766]).
Si $0 < p \leqslant 1$, alors la formule

$$d_r(f,g) = \int_\Omega |f-g|^r d\mu \tag{29.326}$$

est une métrique invariante par translation.

Parfois il faut admettre que la théorie des probabilités a des notations pratiques. Par exemple si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $E(X_n) \to E(X)$. C'est la proposition suivante.

PROPooXXOYooCUtDZf

Proposition 29.77 ([767]).
Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi que $0 < r < \infty$. Nous supposons que $f_n \xrightarrow{L^r} f$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^r = \int_\Omega |f|^r. \tag{29.327}$$

Démonstration. Si $r \geqslant 1$, c'est facile. L'application $f \mapsto \|f\|_r$ est une norme[34] et la proposition 9.233 s'applique. Donc

$$\big|\|f_n\|_r - \|f\|_r\big| \leqslant \|f - f_n\|_r. \tag{29.328}$$

Nous considérons $0 < r \leqslant 1$. Nous considérons la métrique d_r donnée par la proposition 29.76. Notre hypothèse de convergence signifie que $d_r(f_n, f) \to 0$. Nous utilisons l'inégalité triangulaire :

$$d_r(f_n, 0) \leqslant \underbrace{d_r(f_n, f)}_{\to 0} + d_r(f, 0) \to d(f, 0). \tag{29.329}$$

Nous avons donc[35]

$$\limsup_n d_r(f_n, 0) \leqslant d_r(f, 0). \tag{29.330}$$

EQooZATHooVuHfIk

D'autre part la proposition 29.75 nous dit que $\liminf_n |f_n(\omega) - f(\omega)| = 0$ pour tout $\omega \in \Omega \setminus Z$ avec $\mu(Z) = 0$. Nous avons donc aussi $\liminf |f_n| = |f|$ (hors de Z) et $\liminf |f_n|^r = |f|^r$ (hors de Z). Vu que Z est de mesure nulle, nous pouvons l'oublier quand nous faisons des intégrales sur Ω :

$$d_r(f,0) = \int_\Omega |f|^r \tag{29.331a}$$
$$= \int_\Omega \liminf_n |f_n|^r \tag{29.331b}$$
$$= \liminf \int_\Omega |f_n|^r \qquad \text{lem Fatou 16.184} \tag{29.331c}$$
$$= \liminf d_r(f_n, 0) \tag{29.331d}$$
$$\leqslant \liminf \Big(d_r(f_n, f) + d_r(f, 0)\Big) \tag{29.331e}$$
$$= d_r(f, 0). \tag{29.331f}$$

Vu que les expressions tout à gauche et tout à droite sont égales, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier

$$\liminf_n d_r(f_n, 0) = d_r(f, 0). \tag{29.332}$$

[34] Proposition 29.19(2).
[35] Notons que $x_n \leqslant y_n \to \lambda$ n'implique pas que x_n converge. Par contre ça implique que $\limsup_n(x_n) \leqslant \lambda$.

En combinant avec (29.330), et en nous souvenant qu'une limite sup est toujours plus grande qu'une limite inf,

$$\limsup d_r(f_n,0) \leqslant d_r(f,0) \leqslant \liminf d_r(f_n,0) \leqslant \liminf d_r(f_n,0). \tag{29.333}$$

Encore une fois toutes les inégalités sont des égalités et nous avons

$$\liminf d_r(f_n,0) = \limsup d_r(f_n,0) = d_r(f,0). \tag{29.334}$$

Cela prouve que $\lim_{n\to\infty} d_r(f_n,0)$ existe et vaut $d_r(f,0)$ (lemme 11.46). Enfin nous pouvons faire le calcul

$$\int_\Omega |f|^r = d_r(f,0) = \lim_{n\to\infty} d_r(f_n,0) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^r. \tag{29.335a}$$

□

29.5 Convolution

DEFooHHCMooHzfStu

Définition 29.78.
Pour toutes fonctions $f,g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale de droite ait un sens[36]*, nous définissons*

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy. \tag{29.336}$$

L'éventuelle fonction $f*g$ ainsi définie est le ***produit de convolution*** *de f et g.*

Le théorème qui permet de dire que le produit de convolution n'est pas tout à fait ridicule est le suivant.

THOooMLNMooQfksn

Théorème 29.79 ([539, 768])**.**
Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(1) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction

$$\begin{aligned} h_x\colon \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto g(x-y)f(y) \end{aligned} \tag{29.337}$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(2) $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(3) $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \\ (x,y) &\mapsto (x-y,y). \end{aligned} \tag{29.338}$$

Cela est un C^1-difféomorphisme dont le jacobien vaut

$$J_\phi(x,y) = \det\begin{pmatrix} (\partial_1\phi_1)(x,y) & (\partial_2\phi_1)(x,y) \\ (\partial_1\phi_2)(x,y) & (\partial_2\phi_2)(x,y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1. \tag{29.339}$$

C'est une première bonne chose.

Ensuite nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto f(y)g(x). \end{aligned} \tag{29.340}$$

Par hypothèse, pour chaque y, la fonction $x \mapsto |\alpha(x,y)|$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Bref, le calcul suivant a un sens :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}|\alpha|dx\right]dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)g(x)|dx\right]dy \tag{29.341a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left[|f(y)|\int_{\mathbb{R}^d}|g(x)|dx\right]dy \tag{29.341b}$$

SUBEQooMYLWooPeNLlk

$$= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \tag{29.341c}$$

$$< \infty. \tag{29.341d}$$

[36] Attention divulgâchis : ce sera le cas pour $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ par le théorème 29.79.

Le corolaire 16.306 nous dit alors que $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Et notons au passage que

$$\|\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \tag{29.342}$$

parce que le théorème de Fubini 16.307 permet de scinder l'intégrale et de retomber sur (29.341c).

Vu que $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, nous pouvons utiliser le changement de variable 16.284 avec l'application ϕ ci-dessus. En notant λ la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\infty > \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \big(|\alpha| \circ \phi\big)|J_\phi| d\lambda && (29.343a)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha|(x-y,y) d\lambda(x,y) && (29.343b)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| d\lambda(x,y) && (29.343c)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|dy\right] dx. && (29.343d)
\end{aligned}$$

Nous avons scindé l'intégrale avec le théorème de Fubini pour la dernière étape.

Passons à l'intégrabilité de $f * g$. Nous avons

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|dy. \tag{29.344}$$

Or nous venons de voir que (29.344) était, en tant que fonction de x, intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|dy\right]dx = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| d\lambda < \infty. \tag{29.345}$$

Cela prouve que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mais en nous souvenant de (29.342), cela prouve aussi que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\alpha| d\lambda = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \tag{29.346}$$

c'est-à-dire que $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. □

Lemme 29.80.
Le produit de convolution est commutatif : pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ nous avons $f * g = g * f$.

Démonstration. Le théorème de Fubini (théorème 16.307) permet d'écrire

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y)g(x-y). \tag{29.347}$$

En effectuant le changement de variable $z_i = x_i - y_i$ dans chacune des intégrales nous obtenons

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(x-z)dz = (g*f)(x). \tag{29.348}$$

Attention : on pourrait croire qu'un signe apparaît du fait que $z = x - y$ donne $dz = -dy$. Mais en réalité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}$ devient par le même changement de variables $\int_{+\infty}^{-\infty}$ qui redonne un nouveau signe au moment de remettre dans l'ordre. □

Lemme 29.81 ([769, 1])**.**
Le produit de convolution est associatif sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soient $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'existence de $(f * g) * h$ ne fait pas de doute grâce au théorème 29.79. Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}
\big((f*g)*h\big)(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)h(u-x)dx && (29.349a)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy\right]h(u-x)dx && (29.349b)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)h(u-x)dy\right]dx. && (29.349c)
\end{aligned}$$

Nous permutons les intégrales en suivant la procédure 16.308. Pour cela nous commençons par poser

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto f(y)g(x-y)h(u-x), \end{aligned} \tag{29.350}$$

et nous vérifions que $|s|$ peut être successivement intégrée par rapport à y puis x. D'abord l'intégrale par rapport à y est

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|dy, \tag{29.351}$$

qui existe et qui vaut $(|f| * |g|)(x)$ parce que $|f|$ et $|g|$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème 29.79, la fonction $|f| * |g|$ est encore dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. En ce qui concerne l'intégrale du résultat par rapport à x, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|f| * |g|)(x)|h(u-x)|dx, \tag{29.352}$$

qui existe et qui vaut $\big((|f| * |g|) * |h|\big)(u)$. Le corolaire 16.306 nous assure donc que $s \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Nous permutons donc les intégrales dans (29.349c) pour obtenir

$$\big((f*g)*h\big)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(u-x)dx \right] dy. \tag{29.353}$$

EQooHXTBooQpmXcR

Attardons-nous un instant sur l'intégrale interne, et utilisons l'invariance par translation de l'intégrale (lemme 16.259). Nous effectuons la translation $x \to x+y$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(u-x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)h(u-x-y)dx \qquad = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)h\big((u-y)-x\big)dx \tag{29.354a}$$

$$= (g*h)(u-y). \tag{29.354b}$$

Nous pouvons reprendre notre calcul en (29.353) :

$$\big((f*g)*h\big)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)h(u-x)dx \right] dy \tag{29.355a}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(g*h)(u-y) \tag{29.355b}$$

$$= \big(f*(g*h)\big)(u). \tag{29.355c}$$

C'est ce que nous voulions. □

PROPooNBHNooInwoar

Proposition 29.82.
Le couple $\big(L^1(\mathbb{R}^d), *\big)$ est une algèbre de Banach[37].

Démonstration. Point par point.

(1) **Algèbre** La définition d'une algèbre est 3.111. Les différents points sont dans la linéarité de l'intégrale.

(2) **Commutative** C'est la proposition 29.80.

(3) **Associative** C'est le lemme 29.81.

(4) **Normé** L'espace L^1 a une norme ; c'est la norme $\|\|_{L^1}$.

(5) **Complet** C'est le théorème de Riesz-Fischer 29.56.

□

La proposition suivante est une conséquence de l'inégalité de Minkowski sous forme intégrale de la proposition 29.50.

PROPooDMMCooPTuQuS

Proposition 29.83.
Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

(1) $f * g \in L^p$

[37] Algèbre de Banach, définition 9.339.

(2) $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$.

PropHNbdMQe

Proposition 29.84 ([770]).
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si g est dérivable avec $g' \in L^\infty$, alors $f*g$ est dérivable et $(f*g)' = f*g'$.

Démonstration. La fonction qu'il faut intégrer pour obtenir $f*g$ est $f(t)g(x-t)$, dont la dérivée par rapport à x est $f(t)g'(x-t)$. La norme de cette dernière est majorée (uniformément en x) par $G(t) = |f(t)|\|g'\|_\infty$. La fonction f étant dans $L^1(\mathbb{R})$, la fonction G est intégrable et le théorème de dérivation sous l'intégrale (théorème 19.42) nous dit que $f*g$ est dérivable et

$$(f*g)'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x-t)dt = (f*g')(x). \tag{29.356}$$

□

CORooBSPNooFwYQrc

Corolaire 29.85.
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si g est de classe C^∞, alors $f*g$ est de classe C^∞.

Démonstration. Il s'agit d'itérer la proposition 29.84. □

29.5.1 Fonction plateau, lemme d'Urysohn

PROPooQWNNooHmHRbk

Proposition 29.86 ([1]).
Soient deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}^n$ telles que le produit de convolution $f*g$ ait un sens. Si le support de f est dans le compact K et le support de g est dans $B(0,r)$, alors

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset K + \overline{B(0,r)} \tag{29.357}$$

PROPooBOZIooAhKbPs

Proposition 29.87 (Urysohn, Fonctions plateau[302, 771]).
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ainsi qu'un compact K dans Ω. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

(1) $\operatorname{supp}(f)$ *est compact dans Ω,*

(2) $0 \leqslant f \leqslant 1$

(3) $f = 1$ *sur un voisinage de K.*

Démonstration. Nous posons $\delta = d(K, \Omega^c)/3$.

(1) **Les applications ϕ et ϕ_ϵ** Nous nous souvenons de l'application ξ de la proposition 17.177. Elle est de classe C^∞ à support compact dans $B(0,1)$. Nous considérons[38]

$$\phi(x) = \frac{\xi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n}\xi(x)dx}, \tag{29.358}$$

de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi = 1$. Pour chaque $\epsilon > 0$ nous posons également

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{1}{\epsilon^n}\phi(x/\epsilon).\end{aligned} \tag{29.359}$$

Par le lemme 17.186, nous avons

$$\int_{B(0,\epsilon)}\phi_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\epsilon = 1. \tag{29.360}$$

EQooDUOCooLKPmOZ

(2) **La partie K_1** Nous posons

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \phi(x,K) < \delta\}. \tag{29.361}$$

EQooLXRMooKxKHSF

La partie K_1 est bornée parce que si $K \subset B(0,r)$, alors $K_1 \subset B(0, r+\delta)$.

La partie K_1 est fermée. Pour ce voir, nous prouvons que K_1^c est ouvert. Soit $y \in K_1^c$, et prouvons qu'il existe une boule centrée en y et contenue dans K_1^c. Soit $k \in K_1$ réalisant $d(z,K_1) = d(z,k)$ (d

[38] L'intégrale de ξ ne pose pas de problèmes parce qu'elle est continue sur le compact de son support, de telle sorte qu'elle y soit bornée.

est une fonction continue sur le compact K_1, elle atteint ses bornes). Soit $z \in B(y,\alpha)$ où α va être précisé de telle sorte à avoir $B(y,\alpha) \subset K_1^c$. Nous avons

$$\begin{aligned} d(z,k) &\geqslant |d(z,y) - d(y,k)| && \text{cf. justif} && \text{SUBEQooAKWEooGqnxaX} \quad (29.362a)\\ &= d(y,k) - d(z,y) && \text{cf. justi.} && \text{SUBEQooGTKYooEPMiZR} \quad (29.362b)\\ &> \delta + s - \alpha && \text{cf. justif.} && \text{SUBSETooGVBEooIUCcKE} \quad (29.362c)\\ & && && (29.362d) \end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (29.362a). Lemme 9.157.
- Pour (29.362b). Nous choisissons $\alpha < d(y,k)$.
- Pour 29.362c. Vu que $d(y,k) > \delta$, nous posons $s > 0$ tel que $d(y,k) = \delta + s$.

Nous avons prouvé qu'il existe $s > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ suffisamment petit, nous ayons $d(z,k) > \delta + s - \alpha$. Nous en déduisons que $d(z,k) > \delta$ et donc que $z \in K_1^c$.

Nous avons prouvé que $K - 1$ est borné et fermé. Il est donc compact (théorème de Borel-Lebesgue 11.23).

(3) **La fonction f** Nous posons $f = \phi_\epsilon * \mathbb{1}_{K_1}$ où $\mathbb{1}_{K_1}$ est la fonction indicatrice de K_1 et $*$ dénote le produit de convolution[39]. Vu que ϕ_ϵ est de classe C^∞, la fonction f est également de classe C^∞ par le corolaire 29.85.

(4) **À propos de support** La proposition 29.86 dit que le support de f est

$$\operatorname{supp}(f) \subset K_1 + \overline{B(0,\epsilon)}. \tag{29.363}$$

Vue la définition 29.361, nous avons $d(K_1, \Omega^c) \geqslant \delta$, de telle sorte que, en prenant $\epsilon < \delta$ nous avons

$$\operatorname{supp}(f) \subset \Omega. \tag{29.364}$$

Le support de f est également borné parce que contenu dans le borné $K_1 + \overline{B(0,\epsilon)}$. Nous en déduisons que f est une application C^∞ à support compact dans Ω.

(5) **$f(x)$ si $x \in K$** Soit $x \in K$. Nous avons, par définition,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(y) \mathbb{1}_{K_1}(x-y) dy && && (29.365a)\\ &= \int_{\overline{B(0,\epsilon)}} \phi_\epsilon(y) \mathbb{1}_{K_1}(x-y) dy && \text{cf. justif.} && \text{SUBEQooOKGFooDbQwrR} \quad (29.365b)\\ &= \int_{\overline{B(0,\epsilon)}} \phi_\epsilon(y) dy && \text{cv. justif.} && \text{SUEQooBRHEooAwpQdR} \quad (29.365c)\\ &= 1 && \text{par (29.360).} && (29.365d) \end{aligned}$$

Justifications.

- Pour 29.365b. Le support de ϕ_ϵ est dans $\overline{B(0,\epsilon)}$.
- Pour 29.365c. Vu que $x \in K$ et que $|y| < \epsilon < \delta$, nous avons

$$d(x-y, K) \leqslant d(x-y, x) \leqslant \delta, \tag{29.366}$$

et donc $x - y \in K_1$.

(6) **$0 \leqslant f \leqslant 1$** Nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \big|\phi_\epsilon(y) \mathbb{1}_{K_1}(x-y)\big| dy && (29.367a)\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon(y)| dy && (29.367b)\\ &= 1. && (29.367c) \end{aligned}$$

Note : nous avons majoré $\mathbb{1}_{K_1}(x-y)$ par 1.

□

[39] Définition 29.78.

29.5.2 Partition de l'unité

DEFooEDFIooHKnGdE

Définition 29.88 (Partition de l'unité)**.**
*Soit un espace topologique X muni d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$. Une **partition de l'unité** subordonnée à $\{U_i\}_{i\in I}$ est un ensemble de fonctions $\{\phi_i\}_{i\in I}$ telles que*

(1) $\phi_i(X)\subset[0,1]$ *pour tout* $i\in I$.

(2) $\text{supp}(\phi_i)\subset U_i$.

(3) $\sum_{i\in I}\phi_i(x)=1$ *pour tout* $x\in X$.

Si $\mathcal{A}\subset\text{Fun}(X)$, nous disons que $\{\phi_i\}_{i\in I}$ est une $\mathcal{A}$-partition de l'unité si $\phi_i\in\mathcal{A}$ pour chaque i.

THOooQFCQooSlgLpz

Théorème 29.89 (Partition de l'unité sur un compact[302])**.**
Soient un compact $K\subset\mathbb{R}^d$ et des ouverts $\{\Omega_i\}_{i=1,\dots,n}$ recouvrant K. Alors il existe des fonctions $\phi_i\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(i=1,\dots,n)$ telles que

(1) $0\leqslant\phi_k\leqslant 1$

(2) $\text{supp}(\phi_k)\subset\Omega_k$,

(3) $\sum_{k=1}^n\phi_k=1$ *sur un voisinage de* K.

*Ces fonctions ϕ_i sont une **partition de l'unité** subordonnée aux ouverts Ω_i.*

Démonstration. Nous considérons des compacts $\{K_i\}_{i=1,\dots,n}$ comme dans le lemme 9.380. Pour chaque i nous avons $K_i\subset\Omega_i$, de telle sorte que nous pouvions utiliser la proposition 29.87. Nous avons donc des fonctions $\psi_j\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $\text{supp}(\psi_j)$ est compact dans Ω_j, $\psi_j\geqslant 0$ et $\psi_j=1$ sur V_j qui est un voisinage ouvert de K_j.

Nous posons $V=V_1\cup\dots\cup V_n$. C'est un ouvert qui contient K parce que

$$K\subset\bigcup_j K_j\subset\bigcup_j\Omega_j\subset\bigcup_j V_j. \tag{29.368}$$

Nous faisons de même pour K lui-même. Il existe une fonction $\theta\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

- $\text{supp}(\theta)$ est compact dans Vn
- $\theta=1$ sur un voisinage de K,
- $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

Vu que $\psi_j=1$ sur V_j, nous avons $\sum_{j=1}^n\psi_j>0$ sur V.

Nous prouvons à présent que

EQooGABMooZZmlyQ

$$1-\theta+\sum_{k=1}\psi_k>0 \tag{29.369}$$

sur $\mathbb{R}^d$.

(1) **Si $x\in V$** Alors $1-\theta(x)\geqslant 0$ et donc

$$1-\theta(x)+\sum_{k=1}^n\psi_k(x)\geqslant\sum_{k=1}^n\psi_k(x)>0. \tag{29.370}$$

(2) **Si $x\notin V$** Vu que le support de θ est dans V, nous avons $\theta(x)=0$. Quant aux fonctions ψ_k, elles font un peu ce qu'elles veulent, mais elles sont positives[40] et donc

$$1-\theta(x)+\sum_{k=1}^n\psi_k(x)\geqslant 1-\theta(x)=1. \tag{29.371}$$

Vu que (29.369) est prouvé, nous pouvons poser

$$\phi_j=\frac{\psi_j}{1-\theta+\sum_{k=1}^n\psi_k} \tag{29.372}$$

[40] Dans le Frido, « positif » signifie dans $[0,\infty]$.

sans peur pour le dénominateur. Nous avons $\phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que $\theta = 1$ sur un voisinage de K. Su ce voisinage nous avons

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) = \frac{\sum_j \psi_j(x)}{1 - \theta(x) + \sum_k \psi_k(x)} = 1. \tag{29.373}$$

De plus $\phi_j \geqslant 0$ parce que chacun des ψ_j l'est et parce que nous avons montré que le dénominateur était toujours strictement positif.

En enfin,

$$\operatorname{supp}(\phi_j) = \operatorname{supp}(\psi_j) \subset \Omega_j. \tag{29.374}$$

Donc les fonctions ϕ_j sont celles que dont nous avions besoin. □

29.5.3 Approximation de l'unité

LemDQEKNNf

Lemme 29.90.
Soit $f \in L^2(I)$ telle que

$$\int_I f\varphi = 0 \tag{29.375}$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Alors $f = 0$ presque partout sur I.

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire

$$\begin{aligned} \phi\colon L^2(I) &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \langle f, g\rangle = \int_I f\bar{g}. \end{aligned} \tag{29.376}$$

Par densité[41] nous pouvons aussi considérer une suite (φ_n) dans $C_c^\infty(I)$ convergeant dans L^2 vers f. Alors nous avons pour tout n :

$$\langle f, \varphi_n\rangle = 0. \tag{29.377}$$

En passant à la limite, $\langle f, f\rangle = 0$, ce qui implique $f = 0$ dans L^2 et donc $f = 0$ presque partout en tant que bonne fonction. □

Ce résultat est encore valable dans les espaces L^p (proposition 29.191), mais il demande le théorème de représentation de Riesz[42].

DEFooEFGNooOREmBb

Définition 29.91 ([1, 749]).
*Nous considérons $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou $(S^1)^d$. Une **approximation de l'unité** sur Ω autour de $a \in \Omega$ est une suite (φ_n) de fonctions à valeurs réelles dans $L^1(\Omega)$ telle que*

(1) $\sup_k \|\varphi_k\|_1 < \infty$,

ITEMooGVRQooHDbrcf

(2) pour chaque n nous avons $\int_\Omega \varphi_n = 1$,

(3) si V est un voisinage de a, alors

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus V} |\varphi_k| = 0. \tag{29.378}$$

En pratique, nous allons, sur $\mathbb{R}^d$ toujours considérer des approximations de l'unité autour de 0, même si nous ne le préciserons pas. Vous noterez que dans le cas de S^1, le choix du « point de base » est plus arbitraire.

Ce sont des fonctions dont la masse vient s'accumuler autour de zéro. En effet quel que soit le voisinage $B(0, \alpha)$, si k est assez grand, il n'y a presque plus rien en dehors.

Pour le point ((3)), si Ω est S^1, la mesure que nous considérons est $\frac{dx}{2\pi}$.

Exemple 29.92.
Une façon de construire une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$ est de considérer une fonction $\varphi \in L^1(\Omega)$ telle que $\int \varphi = 1$ puis de poser

$$\varphi_k(x) = k^d \varphi(kx). \tag{29.379}$$

Ici, Ω peut être $\mathbb{R}$ ou S^1. △

[41] Théorème 29.65(5).
[42] Théorème 29.188.

Le lemme suivant permet de construire des approximations de l'unité intéressantes. Nous aurons une version pour S^1 dans le lemme 29.127.

LemCNjIYhv

Lemme 29.93 ([749]).
Soit une fonction φ continue et positive à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi(x) > \varphi(0)$ pour tout $x \neq 0$. Si nous posons

$$\varphi_n(x) = \left(\int \varphi(y)^n \right)^{-1} \varphi(x)^n, \tag{29.380}$$

alors la suite (φ_n) est une approximation de l'unité.

Voici un théorème qui donne les propriétés à propos du produit de convolution avec une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^d$. Une version pour S^1 sera le théorème 29.128.

ThoYQbqEez

Théorème 29.94 ([749]).
Soit (φ_k) une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^d$.

(1) Si g est mesurable et bornée sur $\mathbb{R}^d$ et si g est continue en x_0 alors

$$(\varphi_k * g)(x_0) \to g(x_0). \tag{29.381}$$

(2) Si $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^p} g. \tag{29.382}$$

(3) Si g est uniformément continue et bornée, alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^\infty} g \tag{29.383}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) Nous notons $d_k = (\varphi_k * g)(x_0) - g(x_0)$ et nous devons prouver que $d_k \to 0$. Vu que φ_k est d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$ nous pouvons écrire

$$d_k = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k(y) g(x_0 - y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_0)\varphi_k(y) dy, \tag{29.384}$$

et donc

$$|d_k| = \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \big(g(x_0 - y) - g(x_0)\big)\varphi_k(y) dy \Big| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x_0 - y) - g(x_0)\big| |\varphi_k(y)| dy. \tag{29.385}$$

Nous notons $M = \sup_k \|\varphi_k\|_1$, et nous considérons $\alpha > 0$ tel que

$$\big|g(x_0 - y) - g(x_0)\big| \leqslant \epsilon \tag{29.386}$$

pour tout $y \in B(0, \alpha)$. Nous nous restreignons maintenant aux k suffisamment grands pour que $\int_{\complement B(0,\alpha)} |\varphi_k(y)| dy \leqslant \epsilon$. Alors en découpant l'intégrale en $B(0, \alpha)$ et son complémentaire dans $\mathbb{R}^d$,

$$|d_k| \leqslant \epsilon M + \int_{\complement B(0,\alpha)} 2\|g\|_\infty |\varphi_k(y)| dy \leqslant \epsilon M + 2\|g\|_\infty \epsilon \leqslant \epsilon C. \tag{29.387}$$

Donc oui, nous avons $|d_k| \to 0$, et donc le premier point du théorème.

(2) Cette fois $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et nous cherchons à montrer que $\|d_k\|_p \to 0$. Encore qu'ici d_k soit défini à partir d'un représentant dans la classe de g et que d'ailleurs, nous allons travailler avec ce représentant.

D'abord nous développons un peu ce d_k :

$$\|d_k\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(g(x - y) - g(x)\big)\varphi_k(y) dy \right|^p dx \right]^{1/p} \tag{29.388a}$$

$$\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y) - g(x)| \cdot |\varphi_k(y)| dy \Big)^p dx \right]^{1/p}. \tag{29.388b}$$

À cette dernière expression nous appliquons l'inégalité de Minkowski (théorème 29.45) sous la forme (29.208) pour la mesure $d\nu(y) = |\varphi_k(y)|dy$ et $f(x, y) = g(x - y) - g(x)$:

$$\|d_k\|_p \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x - y) - g(x)\big|^p dx \Big)^{1/p} |\varphi_k(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y g - g\|_p |\varphi_k(y)| dy. \tag{29.389}$$

Par le lemme 29.67 nous pouvons trouver $\alpha > 0$ tel que $\|\tau_y g - g\|_p \leqslant \epsilon$ pour tout $y \in B(0,\alpha)$. Avec cela nous découpons encore le domaine d'intégration :

$$\|d_k\|_p \leqslant \int_{B(0,\alpha)} \underbrace{\|\tau_y g - g\|_p}_{\leqslant\epsilon} |\varphi_k(y)|dy + \int_{\complement B(0,\alpha)} \underbrace{\|\tau_y g - g\|_p}_{\leqslant 2\|g\|_p} |\varphi_k(y)|dy \leqslant \epsilon M + 2\epsilon\|g\|_p. \tag{29.390}$$

(3) Nous posons $d_k(x) = (\varphi_k * g)(x) - g(x)$ et nous voulons prouver que $\|d_k\|_\infty \to 0$, c'est-à-dire que $d_k(x)$ converge vers zéro uniformément en x. Nous posons aussi

$$\tau_y(g)\colon x \mapsto g(x-y). \tag{29.391}$$

En récrivant le produit de convolution, une petite majoration donne

$$|d_k(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y(g) - g\|_\infty |\varphi_k(y)|dy. \tag{29.392}$$

L'uniforme continuité de g signifie que pour tout ϵ, il existe un α tel que pour tout $y \in B(0,\alpha)$,

$$\|\tau_y(g) - g\|_\infty \leqslant \epsilon. \tag{29.393}$$

Encore une fois nous découpons le domaine d'intégration en $B = B(0,\alpha)$ et son complémentaire :

$$\|d_k\|_\infty \leqslant \int_B \underbrace{\|\tau_y(g) - g\|_\infty}_{\leqslant\epsilon} |\varphi_k(y)|dy + \int_{\complement B} \underbrace{\|\tau_y(g) - g\|_\infty}_{\leqslant 2\|g\|_\infty} |\varphi_k(y)| \tag{29.394a}$$

$$\leqslant \epsilon M + 2\|g\|_\infty \epsilon \tag{29.394b}$$

où la seconde ligne est justifiée par le choix d'un k assez grand pour que $\int_{\complement B} |\varphi_k(y)|dy \leqslant \epsilon$.

Nous avons donc bien $\|d_k\|_\infty \to 0$.

□

Exemple 29.95.
Une petite remarque en passant : aussi triste que cela en ait l'air, la convergence uniforme n'implique pas la convergence $L^p(\Omega)$ si Ω n'est pas borné. En effet si $f \in L^p$, la suite donnée par

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \tag{29.395}$$

converge uniformément vers f, mais

$$\|f_n - f\|_p = \int_\Omega \frac{1}{n} \tag{29.396}$$

n'existe même pas si le domaine Ω n'est pas borné. △

29.6 Intégrale sur des variétés

29.6.1 Formes différentielles

Nous allons donner une toute petite introduction aux formes différentielles sur des variétés compactes.

LemdwLGFG

Lemme 29.96 ([772]).
Soit ω une k-forme sur $\mathbb{R}^n$ et f, une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Alors $d(f^*\omega) = f^* d\omega$.

Démonstration. Nous effectuons la preuve par récurrence sur le degré de la forme. Soit d'abord une 0-forme, c'est-à-dire une fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous avons

$$d(d^*g)X = d(g \circ f)X = (dg \circ df)X = dg\big(dfX\big) = (f^*dg)(X). \tag{29.397}$$

Supposons maintenant que le résultat soit exact pour toutes les $p-1$-formes et montrons qu'il reste valable pour les p-formes. Par linéarité de la différentielle nous pouvons nous contenter de considérer la forme différentielle

$$\omega = g\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p \tag{29.398}$$

où g est une fonction C^∞. Pour soulager les notations nous allons noter $dx^I = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{p-1}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
d(f^*\omega) &= d\big(f^*(gdx^I \wedge dx^p)\big) && (29.399a)\\
&= d\big(f^*(gdx^I) \wedge f^*dx^p\big) && (29.399b)\\
&= d\big(f^*(gdx^I)\big) \wedge f^*dx^p + (-1)^{p-1} f^*(gdx^I) \wedge (f^*dx^p) && (29.399c)\\
&= f^*\big(d(gdx^I)\big) \wedge f^*dx^p && (29.399d)\\
&= f^*\big(d(gdx^I) \wedge dx^p\big) && (29.399e)\\
&= f^*d\omega && (29.399f)
\end{aligned}$$

Justifications : (29.399c) est la formule de Leibniz. (29.399d) est parce que le second terme est nul : $d(f^*dx^p) = f^*(d^2x^p) = 0$. Nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence et le fait que $d^2 = 0$. L'étape (29.399f) est une utilisation à l'envers de la règle de Leibniz en tenant compte que $d^2x^p = 0$. □

Soit M une variété de dimension n et ω une n-forme différentielle

$$\omega_p = f(p)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{29.400}$$

Si (U, φ) est une carte ($U \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi\colon U \to M$) alors nous définissons

$$\int_{\varphi(U)} \omega = \int_U f\big(\varphi(x)\big)dx_1 \ldots dx_n. \tag{29.401}$$

Lorsque nous voulons intégrer sur une partie plus grande qu'une carte nous utilisons une partition de l'unité du théorème 29.89.

29.6.2 Intégrale d'une fonction sur une sous-variété

L'exemple typique est l'intégrale sur une surface dans $\mathbb{R}^3$, ou de volumes.

Nous supposons à présent que M est une variété compacte de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. La compacité fait que M possède un atlas contenant un nombre fini de cartes $F_i\colon W_i \to F_i(W_i)$.

Si $A \subset M$ est tel que pour chaque i, $A \cap F_i(W_i) = F_i(V_i)$ pour un ensemble V_i mesurable dans $\mathbb{R}^2$, alors nous considérons

$$A_1 = A \cap F_1(W_1) = F_1(V_1). \tag{29.402}$$

Ensuite, nous construisons A_2 en considérant $F_2(W_2)$ et en lui retranchant A_1 :

$$A_2 = \big(A \cap F_2(W_2)\big) \setminus F_1(V_1). \tag{29.403}$$

En continuant de la sorte, nous construisons la décomposition

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_p \tag{29.404}$$

de A en ouverts disjoints, chacun de ouverts A_p étant compris dans une carte.

Il est possible de prouver que dans ce cas, la définition suivante a un sens et ne dépend pas du choix de l'atlas effectué.

Définition 29.97.
*Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'**intégrale** est le nombre*

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f d\sigma_{F_i}. \tag{29.405}$$

29.6.3 Densité des polynômes trigonométriques

DEFooGCZAooFecAHB

Définition 29.98.
*Le **système trigonométrique** donné par $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est*

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}. \tag{29.406}$$

Une bonne partie de la douleur qu'évoque mot « densité » consiste à montrer que ce système est total dans $L^2(S^1) = L^2([0, 2\pi])$, et donc en est une base hilbertienne.

Définition 29.99.
*Un **polynôme trigonométrique** est une fonction de la forme*

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t). \tag{29.407}$$

DEFooZDUKooRnYhhF

Définition 29.100 (Coefficients de Fourier)**.**
Pour toute fonction pour laquelle ça a un sens (que ce soit des fonctions L^2 ou non), nous posons

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \tag{29.408}$$

EqhIPoPH

*Ces nombres sont les **coefficients de Fourier** de f.*

Ces trois définitions n'ont à priori aucun rapport entre elles, et rien en particulier ne devrait vous faire penser à une égalité du type

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n(x). \tag{29.409}$$

Nous avons toutefois quelques liens.

LemZVfZlms

Lemme 29.101.
Deux petits résultats simples mais utiles à propos des polynômes trigonométriques.

(1) Si $f \in L^1(S^1)$, alors nous avons la formule

$$f * e_n = c_n(f) e_n. \tag{29.410}$$

(2) Si P est un polynôme trigonométrique et si $f \in L^1(S^1)$ alors $f * P$ est encore un polynôme trigonométrique.

Démonstration. Le premier point est un simple calcul :

$$(f * e_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t) e_n(t) \tag{29.411a}$$

En ce qui concerne le second point, nous notons $P = \sum_{k=-N}^{N} P_k e_k$, et par linéarité de la convolution,

$$f * P = \sum_{k=-N}^{N} P_k f * e_k = \sum_{k=-N}^{n} P_k c_k(f) e_k, \tag{29.412}$$

qui est encore un polynôme trigonométrique. □

ExDMnVSWF

Exemple 29.102.
Sur S^1 nous construisons alors l'approximation de l'unité basée sur la fonction $1 + \cos(x)$ et le lemme 29.93. Cette fonction est évidemment un polynôme trigonométrique parce que

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{29.413}$$

Ensuite les puissances le sont aussi à cause de la formule du binôme :

$$\big(1 + \cos(x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^n(x), \tag{29.414}$$

dans laquelle nous pouvons remettre $\cos(x)$ comme un polynôme trigonométrique et développer à nouveau la puissance avec (encore) la formule du binôme. La chose importante est qu'il existe une approximation de l'unité (φ_n) formée de polynômes trigonométrique.

Ce qui fait la spécificité des polynômes trigonométriques est qu'ils sont à la fois stables par convolution (lemme 29.101) et qu'ils permettent de créer une approximation de l'unité sur $[0, 2\pi]$. Ce sont ces deux choses qui permettent de prouver l'important théorème suivant. △

ThoQGPSSJq

Théorème 29.103.
Les polynômes trigonométriques sont dense dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

Démonstration.

$$\varphi_k * f \xrightarrow{L^p} f \tag{29.415}$$

par le théorème 29.94. Nous avons donc convergence L^p d'une suite de polynômes trigonométrique, ce qui prouve que l'espace de polynômes trigonométriques est dense dans $L^p(S^1)$. □

Remarque 29.104.
Deux remarques.

- Il n'est pas possible que les polynômes trigonométriques soient dense dans L^∞ parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue (c'est le théorème 14.396). Donc les polynômes trigonométriques ne peuvent engendrer que des fonctions continues.
- Nous donnerons au théorème 30.8 une démonstration indépendante de la densité des polynômes trigonométriques dans $L^p(S^1)$.

29.7 Espaces L^2, généralités

SECooEVZSooLtLhUm

L'espace L^2 est l'espace L^p défini en 29.10 avec $p = 2$. Cependant il possède une propriété extraordinaire par rapport aux autres L^p, c'est que la norme $|.|_2$ dérive d'un produit scalaire. Il sera donc un espace de Hilbert.

NORMooUEIEooYtlFse

29.105.
Nous en rappelons la construction. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons l'opération

DefProdScalLubrgTj

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(\omega)\overline{g(\omega)}d\mu(\omega) \tag{29.416}$$

et la norme associée

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}. \tag{29.417}$$

Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mu) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ tel que } \|f\|_2 < \infty\} \tag{29.418}$$

et la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour μ-presque tout x.

Et enfin, nous considérons le quotient

$$L^2(\Omega, \mu) = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)/\sim . \tag{29.419}$$

LemIVWooZyWodb

Lemme 29.106.
Soit un espace mesuré[43] $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) Pour tout $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, le produit

EQooGLVUooQbPmaX

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}\, d\mu \tag{29.420}$$

est bien défini et est un nombre complexe[44].

(2) L'opération $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit hermitien[45].

(3) Le couple $\big(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \langle ., .\rangle\big)$ est un espace de Hilbert[46].

Démonstration. Que $L^2(\Omega)$ soit un espace vectoriel est un cas particulier de la proposition 29.19. Voyons cette histoire de produit scalaire.

(1) **Pour de vraies fonctions** Nous commençons par analyser l'intégrale (29.420) dans le cas où f et g sont des fonctions, c'est-à-dire des représentants d'éléments de L^2.

Dans ce cas, l'inégalité de Hölder (proposition 29.39) avec $p = q = 2$ nous indique que le produit $f\bar{g}$ est un élément de L^1. Par conséquent la formule a un sens.

[43] Est-ce qu'il ne faudrait pas un peu plus d'hypothèses, comme σ-fini par exemple ? Vérifiez et écrivez-moi quand vous avez la réponse.
[44] Par opposition au fait que ce serait l'infini.
[45] Définition 10.174. Pour rappel, nous considérons des fonctions à valeurs complexes. Si au contraire nous avions considéré seulement des fonctions à valeurs réelles, nous aurions eu un produit scalaire.
[46] Définition 27.2.

(2) **Passage aux classes**

Ensuite nous montrons que la formule passe au quotient. Pour cela, nous considérons des fonctions α et β nulles presque partout et nous regardons le produit de $f_1 = f + \alpha$ par $g_1 = g + \beta$:

$$\langle f_1, g_1 \rangle = \int f\bar{g} + \bar{\beta}f + \alpha\bar{g} + \alpha\bar{\beta}. \tag{29.421}$$

Les fonctions $\bar{\beta}f$, $\alpha\bar{g}$ et $\alpha\bar{\beta}$ étant nulles presque partout, leur intégrale est nulle et nous avons bien $\langle f_1, g_1 \rangle = \langle f, g \rangle$. Nous pouvons donc considérer le produit sur l'ensemble des classes.

(3) **Produit hermitien** Pour vérifier que la formule est un produit hermitien, le seul point non évident est de prouver que $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f = 0$. Cela découle du fait que

$$\langle f, f \rangle = \int_\Omega |f|^2. \tag{29.422}$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|^2$ vérifie les hypothèses du lemme 16.201. Par conséquent $|f(x)|^2$ est presque partout nulle.

(4) **Espace de Hilbert** En ce qui concerne le fait que $L^2(\Omega)$ soit un espace de Hilbert, il s'agit simplement de se remémorer que c'est un espace complet (théorème 29.55) et dont la norme dérive d'un produit scalaire ou hermitien. Nous sommes donc bien dans la définition 27.2.

□

29.107.
Ces espaces seront utilisés pour de nombreuses applications. Nous en aurons besoin pour plusieurs combinaisons d'ensembles Ω et de mesures μ.

- Pour $\mathbb{R}^d$
- Pour S^1
- Pour $[a, b]$
- Pour $[0, 2\pi[$
- Pour $[-T, T[$

Le premier est non compact et il est raisonnable de penser qu'il sera fondamentalement différent des autres. À isomorphismes assez triviaux près, les espaces des fonctions sur les trois autres sont identiques. Nous nous attendons donc à ce qu'ils aient les mêmes propriétés. Notons que du point de vue de L^2, étant donné qu'il y a un quotient par les parties de mesures nulles, prendre $]0, 2\pi[$ ou $[0, 2\pi]$ ou n'importe quelle autre possibilité de ce genre revient au même.

Afin de pouvoir utiliser ces espaces de façon optimale, et entre autres y définir les séries de Fourier, nous avons besoin, pour chacun d'entre eux de définir les éléments suivants :

- mesure
- produit de convolution
- le système trigonométrique (que nous allons montrer être une base hilbertienne)
- coefficients de Fourier

Ça fait pas mal de choses à définir. Il n'est pas besoin de définir un produit scalaire parce que le lemme 29.106 nous en donne un générique.

Les définitions qui viennent sont à prendre « tant que les formules ont un sens ». Nous parlons donc de fonctions dans $\mathrm{Fun}(\Omega, \mathbb{C})$, l'ensemble de toutes les fonctions sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous verrons plus tard les espaces de fonctions sur lesquels tout a un sens.

29.8 L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$

La mesure est celle de Lebesgue. Le produit de convolution est donné, pour $f, g \in \text{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy \tag{29.423}$$

Certaines de ses propriétés ont déjà été vues dans le théorème 29.79.

En ce qui concerne le système trigonométrique, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ nous définirions bien

$$e_\xi(x) = e^{i\xi \cdot x}, \tag{29.424}$$

genre pour faire que les transformations de Fourier sont des séries continues … mais bon. Nous n'allons pas tenter le diable plus que ça, et nous ne définissons

- pas de système trigonométrique,
- pas de coefficients de Fourier non plus,
- pas de théorie des séries de Fourier sur $\mathbb{R}^d$.

Quand je disais que la non-compacité de $\mathbb{R}^d$ allait un peu changer les choses par rapport aux autres, je ne rigolais pas.

29.9 L'espace $L^2(S^1)$

L'espace S^1 sera fait avec forces détails, parce qu'il va servir de base pour les espaces $L^2([0, 2\pi[)$, $L^2([-T, T[)$ ainsi que pour l'étude des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$.

En tant qu'ensemble,

$$S^1 = \{e^{it}\}_{t\in\mathbb{R}}, \tag{29.425}$$

sans garanties que ce paramétrage soit une bijection.

Il y a essentiellement deux façons de définir une intégrale sur S^1.

(1) Voir S^1 comme une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ et utiliser la définition 22.9. Cette façon a cependant deux inconvénients :
   - Elle ne donne pas la tribu des mesurables sur S^1, c'est-à-dire que cette méthode ne donne pas de façon évidente une théorie de la mesure sur S^1.
   - Il faut au moins deux cartes pour paramétrer le cercle. La fainéantise nous prévient que ça va être technique.

(2) Rapporter la structure d'espace mesuré de $[0, 2\pi[$ vers S^1, de force via le premier difféomorphisme qui nous passe par la tête, à savoir $t \mapsto e^{it}$.

Nous allons choisir la seconde possibilité, en gardant en tête qu'elle fonctionne de façon très simple un peu par coup de chance, voir la remarque 16.287(5).

29.9.1 Espace mesuré

Plusieurs choses sont déjà faites.

- Les boréliens de S^1 sont décrits dans la proposition 20.75,
- la tribu de Lebesgue de S^1 est décrite dans la proposition 20.77. Non, ce n'est pas la tribu induite de la tribu de Lebesgue de $\mathbb{C}$.

PROPooDJERooYirMru

Proposition 29.108 (Espaces de fonctions sur S^1[1])**.**
Soit l'espace mesuré $\big(S^1, \mathcal{L}eb(S^1), \mu\big)$.

(1) La formule

$$\langle f, g\rangle = \int_{S^1} f\bar{g}d\mu \tag{29.426}$$

EQooHPFQooEquifZ

est un produit hermitien[47] *sur* $L^2(S^1, \mathcal{L}eb(S^1), \mu)$.

[47] Définition 10.174.

(2) *L'espace $L^2(S^1)$ est un espace de Hilbert.*

ITEMooQZAPooKEeQBW

(3) *L'application*[48]

$$\begin{aligned}\phi\colon L^2(S^1) &\to L^2\big([0,2\pi[\big)\\ f &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\circ\varphi.\end{aligned} \tag{29.427}$$

est une bijection isométrique (isomorphisme d'espaces de Hilbert)

Tout cela se résume par l'égalité

$$L^2(S^1,\mathcal{L}eb(S^1),\mu) = L^2\big(]0,2\pi[,\mathcal{L}eb(\mathbb{R}),\lambda\big) \tag{29.428}$$

où nous avons fait un minuscule abus de notations : ici $\mathcal{L}eb(\mathbb{R})$ est en réalité la tribu induite sur $]0,2\pi[$.

Démonstration. Le fait que la formule (29.426) donne bien un produit hermitien est le lemme 29.106. Ce même lemme assure que le tout donne un espace de Hilbert.

Il nous reste à prouver le point (3). En ce qui concerne l'isométrie, nous posons[49]

$$\begin{aligned}\phi\colon L^2(S^1) &\to L^2\big([0,2\pi[\big)\\ f &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\circ\varphi\end{aligned} \tag{29.429}$$

(1) **Injection** Si $\phi(f)=\phi(g)$, alors pour tout $x\in[0,2\pi[$ nous avons $f\big(\varphi(x)\big)=g\big(\varphi(x)\big)$. Vu que $\varphi\colon[0,2\pi[\to S^1$ est une bijection nous avons alors $f(s)=g(s)$ pour tout $s\in S^1$.

(2) **Surjection** Si $f\in L^2\big(]0,2\pi]\big)$, nous posons $g\colon S^1\to\mathbb{C}$ par

$$g(s)=\sqrt{2\pi}f\big(\varphi^{-1}(s)\big). \tag{29.430}$$

Nous avons alors bien $\phi(g)(x)=f(x)$.

(3) **Isométrie** Nous montrons que ϕ préserve le produit scalaire : SUBEQSooRYYHooPcLXHN

$$\langle\phi(f),\phi(g)\rangle = \int_0^{2\pi}\phi(f)(x)\overline{\phi(g)(x)}d\lambda(x) \tag{29.431a}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f\circ\varphi)(x)\overline{(g\circ\varphi)(x)}\,d\lambda(x) \tag{29.431b}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f\bar{g})\circ\varphi\,d\lambda \tag{29.431c}$$

Pour la suite nous devons invoquer la proposition 16.286 qui nous permet de changer une intégrale sur $\big([0,2\pi[,\mathcal{L}\text{eb}\big([0,2\pi[\big),\lambda\big)$ en une intégrale sur $\big(S^1,\mathcal{L}\text{eb}(S^1),\mu\big)$. La première condition de cette proposition est que $\mathcal{L}\text{eb}(S^1)=\varphi\big(\mathcal{L}\text{eb}([0,2\pi[)\big)$. Cela est la proposition 20.77(2). La condition sur la mesure dans la proposition 16.286 n'est vraie ici qu'à un facteur 2π près. Nous avons :

$$\int_{[0,2\pi[} f d\lambda = 2\pi\int_{S^1}(f\circ\varphi^{-1})d\mu. \tag{29.432}$$

Nous continuons le calcul (29.431) :

$$\langle\phi(f),\phi(g)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f\bar{g})\circ\varphi\,d\lambda = \int_{S^1} f\bar{g}d\mu = \langle f,g\rangle. \tag{29.433}$$

□

[48] Ici $\varphi\colon[0,2\pi[\to S^1$ est la bijection usuelle de la proposition 20.66(1).

[49] Notez que cette définition passe aux classes. Nous le répéterons pas.

29.9.2 Topologie

Nous considérons sur S^1 la topologie induite de $\mathbb{C}$. Vu que S^1 est fermé et borné dans $\mathbb{C}$, il en est une partie compacte. Par le lemme 9.128, l'espace S^1 muni de sa topologie est un espace topologique compact.

Nous pouvons donc sans crainte affirmer que toute fonction continue $f\colon S^1 \to \mathbb{K}$ est bornée et atteint ses bornes.

PROPooEQDBooDfOrTZ

Proposition-Définition 29.109.
Soit la formule

$$d(e^{ix}, e^{iy}) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + 2k\pi|. \tag{29.434}$$

(1) Elle est bien définie (ne dépend pas des choix de x et y donnant les mêmes points dans S^1)

(2) L'infimum est en réalité un minimum : il est atteint par un certain $k \in \mathbb{Z}$ (qui, lui, dépend des choix).

(3) La formule définit une distance[50] sur S^1.

Nous considérons sur S^1 la topologie τ_d découlant de cette distance.

Démonstration. Point par point.

(1) Soient $x', y' \in \mathbb{R}$ tels que $e^{ix'} = e^{ix}$ et $e^{iy'} = e^{iy}$. Alors $x' = x + 2l\pi$ et $y' = y + 2l'\pi$ pour certains entiers $l, l' \in \mathbb{Z}$ (corolaire 20.29). Nous avons alors $|x' - y' + 2k\pi| = |x - y + 2\pi(k + l - l')|$ et

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} |x' - y' + 2k\pi| = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + 2k\pi|. \tag{29.435}$$

(2) Quels que soient x et y fixés, nous avons

$$\lim_{k\to\pm\infty} |x - y + 2k\pi| = \infty. \tag{29.436}$$

Donc l'infimum est forcément atteint par un $k \in \mathbb{Z}$.

(3) Pour la distance, il y a plusieurs points à prouver.

- Pour tout $z, z' \in S^1$ nous avons $d(z, z') \geqslant 0$ parce que la distance est donnée par une valeur absolue.
- Si $d(z, z') = 0$, alors il existe k tel que $x = y + 2k\pi$. Alors $e^{ix} = e^{i(y+2k\pi)} = e^{iy}e^{2ki\pi} = e^{iy}$. C'est-à-dire $z = z'$.
- Pour la symétrie, nous avons

$$|x - y + 2k\pi| = |y - x - 2k\pi| = |y - x + 2k'\pi| \tag{29.437}$$

en posant $k' = -k$. L'infimum étant pris sur $k \in \mathbb{Z}$, nous avons al symétrique $d(e^{ix}, e^{iy}) = d(e^{iy}, e^{ix})$.

- Pour attaquer l'inégalité triangulaire, nous considérons $z_1 = e^{ix_1}$, $z_2 = e^{ix_2}$ et $z_3 = e^{ix_3}$. Nous posons également $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ tels que $d(z_1, z_3) = |x_1 - x_3 + 2k_1\pi|$, $d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2 + 2k_2\pi|$ et $d(z_2, z_3) = |x_2 - x_3 + 2k_3\pi|$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
d(z_1, z_3) &= \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x_1 - x_3 + 2k\pi| && \text{(29.438a)}\\
&= \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + 2k\pi| && \text{(29.438b)}\\
&= \inf_{k\in\mathbb{Z}} \big|(x_1 - x_2 + 2k_2\pi) + (x_2 - x_3 + 2k_3\pi) + 2k\pi\big| && \text{(29.438c)}\\
&\leqslant \big|(x_1 - x_2 + 2k_2\pi) + (x_2 - x_3 + 2k_3\pi)\big| && \text{(29.438d)}\\
&\leqslant |x_1 - x_2 + 2k_2\pi| + |x_2 - x_3 + 2k_3\pi|. && \text{(29.438e)}
\end{aligned}$$

SUBEQooXOGCooCZxCsf

Notez que pour (29.438d), en posant $k = 0$ nous avons bien une inégalité. En y pensant, $k = 0$ réalise effectivement l'infimum, mais ce n'est pas indispensable.

□

[50] Définition 9.155.

Le cercle est bien connu pour être symétrique et en particulier avoir une symétrie sous les rotations. Nous allons voir quelques résultats qui vont dans le sens de dire que la distance définie sur S^1 respecte cette symétrie.

LEMooCQCAooAEctbe

Lemme 29.110.
Plusieurs points à propos de l'invariance de la topologie sous les rotations.

(1) *La distance est invariante sous les rotations, c'est-à-dire que si $a, b \in S^1$ et si $s \in \mathbb{R}$, alors*

$$d(e^{is}a, e^{is}b) = d(a, b). \tag{29.439}$$

ITEMooCIPYooTyPQLj

(2) *Les boules sont préservées sous les rotations*[51]*, c'est-à-dire que*

$$e^{is}B_d(a, r) = B_d(e^{is}a, r). \tag{29.440}$$

(3) *La topologie est invariante sous les rotations : $e^{is}\tau_d = \tau_d$.*

Démonstration. Point par point.

(1) Si $a = e^{ix}$ et $b = e^{iy}$, nous avons

$$d(a, b) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y + 2k\pi| = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |(x - s) - (y - s) + 2k\pi| = d(e^{is}a, e^{is}b). \tag{29.441}$$

Et de un.

(2) Il faut une inclusion dans chaque sens.

(2a) $\underline{e^{is}B_d(a, r) \subset B_d(e^{is}a, r)}$ Soit $b \in e^{is}B_d(a, r)$. Alors $b = e^{is}b'$ pour un certain $b' \in B_d(a, r)$. Nous avons alors, en utilisant le premier point,

$$d(b, ae^{is}) = d(e^{-is}b, a) = d(b', a) < r. \tag{29.442}$$

Donc $b \in B_d(e^{is}a, r)$.

(2b) $\underline{B_d(e^{is}a, r) \subset e^{is}B_d(a, r)}$ Soit $b \in B_d(e^{is}a, r)$. Nous devons prouver que $b \in e^{is}B_d(a, r)$, c'est-à-dire que $b = e^{is}b'$ pour un certain $b' \in B_d(a, r)$ ou encore que $e^{-is}b \in B_d(a, r)$. En utilisant encore le premier point,

$$d(e^{-is}b, a) = d(b, e^{is}a) < r. \tag{29.443}$$

Donc oui, $e^{-is}b \in B(a, r)$.

(3) Soit $A \in \tau_d$. Si $a \in e^{is}A$, alors $a = e^{is}a'$ pour un certain $a' \in A$. Notre but est de prouver que $e^{is}A$ contient un voisinage de a.

Vu que $a' \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_d(a', r) \subset A$. Nous avons alors

$$e^{is}aB_d(a', r) \subset e^{is}A, \tag{29.444}$$

et comme $e^{is}B_d(a', r) = B_d(e^{is}a', r) = B_d(a, r)$ nous avons bien

$$B_d(a, r) \subset e^{is}A. \tag{29.445}$$

□

Nous allons voir maintenant quelques résultats à propos de $B_d(1, r)$ qui a la bonne figure d'être un ouvert qui s'étale symétriquement en partant de 1 (le point le plus à droite du cercle). Par rapport à la figure 29.1, il s'agit ni plus ni moins que de voir qu'une boule de rayon r autour de 1 est bien la partie indiquée (symétrique par rapport à 1 et de longueur d'arc r des deux côtés). De plus, ce voisinage n'est autre que la partie du cercle située à droite de la ligne en pointillés.

Ce lemme-ci montre que $B_d(1, r)$ est une partie de S^1 qui s'étale symétriquement autour de 1.

LEMooMYNVooIWWsiV

Lemme 29.111.
Soit l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R} &\to S^1\\ x &\mapsto e^{ix}.\end{aligned} \tag{29.446}$$

Nous avons $B_d(1, r) = \varphi\big(]-r, r[\big)$.

[51] Pas chaque boule séparément, mais l'ensemble des boules

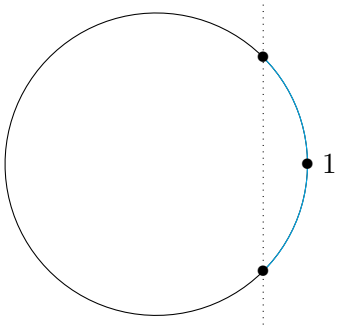


FIGURE 29.1 : Un voisinage de 1 dans S^1. LabelFigJOQVoolPTsYPZK

Démonstration. Soit $b \in B_d(1,r)$ de la forme $b = e^{iy}$ avec y choisi de telle sorte que $d(1,b) = |y|$. Vu que $d(1,b) < r$, nous avons $|y| < r$ et donc $b \in \varphi\big(]-r,r[\big)$.

Dans l'autre sens, si $y \in]-r,r[$, alors

$$d(1,e^{iy}) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |y + 2k\pi| \leqslant |y| < r. \tag{29.447}$$ EQooRWASooYZnQCJ

Nous avons utilisé le fait que l'infimum sur $k \in \mathbb{Z}$ est plus petit ou égal à la valeur pour $k = 0$. Les inégalités (29.447) montrent que $e^{iy} \in B_d(1,r)$. □

Le lemme suivant montre que que les boules autour de 1 sont délimitées par la droite en pointillé de la figure 29.1.

LEMooLINCooHJmJWx

Lemme 29.112.
Soit $r \in [0,\pi]$. Nous avons

$$B_d(1,r) = S^1 \cap \{x + iy \text{ tel que } x > \cos(r)\}. \tag{29.448}$$

Démonstration. En deux inclusions.

(1) **Inclusion $\subset$**

Si $r = \pi$, alors $B(1,r) = S^1 \setminus \{-1\}$, alors que $\cos(\pi) = -1$.

Si $r < \pi$, alors nous partons de la formule (20.20) qui dit que $e^{ir} = \cos(r) + i\sin(r)$. D'après le lemme 29.111, un élément de $B_d(1,r)$ est de la forme e^{iy} avec $y \in]-r,r[$. Nous voudrions donc prouver que $\cos(y) > \cos(r)$ dès que $y \in]-r,r[$ et $r < \pi$.

Sur $]-r,0[$, la fonction cos est croissante[52], donc si $y < 0$ alors

$$\cos(y) > \cos(-r) = \cos(r). \tag{29.449}$$

De la même façon, sur $]0,r[$, la fonction cos est décroissante, de telle sorte que si $y > 0$, alors $\cos(y) > \cos(r)$.

Nous avons prouvé que $B_d(1,r) \subset S^1 \cap \{x + iy \text{ tel que } x > \cos(r)\}$.

(2) **Inclusion inverse**

Soit $z = e^{is}$ avec $s \in [-\pi,\pi[$, et vérifiant $\cos(s) > \cos(r)$. Nous avons

$$d(1,z) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |s + 2k\pi| = |s| \tag{29.450}$$

parce que l'infimum est réalisé par $k = 0$. Nous avons donc

$$\begin{cases} \cos(s) > \cos(r) & \text{(29.451a)} \\ |s| \in [0,\pi] & \text{(29.451b)} \\ r \in [0,\pi], & \text{(29.451c)} \end{cases}$$

et nous devons en déduire que $|s| < r$. Si $s > 0$, alors la décroissance de cosinus (proposition 20.54(1)) dit que $s < r$.

Si $s < 0$, alors nous savons que $\cos(s) = \cos(-s)$ et donc, en posant $s' = -s$, le cas "$s > 0$" nous dit que $s' < r$, et donc que $|s| < r$.

Dans les deux cas nous avons $d(1,z) = |s| < r$.

[52] Lemme 20.30.

□

Proposition 29.113.
La topologie τ_d sur S^1[53] *est la topologique induite depuis $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Nous notons τ_i la topologie induite (c'est-à-dire l'ensemble des ouverts) et τ_d la topologie de la distance fraichement définie. Nous allons également noter $B_{\mathbb{C}}(a,r)$ la boule dans $\mathbb{C}$ de centre a et de rayon r, et $B_d(z,r)$ celle dans S^1, de centre $z\in S^1$ et de rayon r pour notre distance d.

(1) $\tau_i\subset\tau_d$ Un élément général de τ_i est de la forme $\mathcal{O}\cap S^1$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $a\in\mathcal{O}\cap S^1$ et prouvons qu'il existe un ouvert de τ_d contenant a et contenu dans $\mathcal{O}\cap S^1$; cela prouvera que $\mathcal{O}\cap S^1$ est ouvert de τ_d par le théorème 9.8.

Soient $a=e^{ix}$ et r tel que $B_{\mathbb{C}}(a,r)\subset\mathcal{O}$. Nous allons montrer que $B_d(a,r)\subset B_{\mathbb{C}}(a,r)$. Un élément général de $B_d(a,r)$ est $b=e^{iy}$ tel que

$$d(a,b)=\inf_{k\in\mathbb{Z}}|x-y+2k\pi|\leqslant r. \tag{29.452}$$

Quitte à redéfinir x ou y nous pouvons supposer que l'infimum est atteint en $k=0$. En utilisant la proposition 23.15 nous majorons :

$$|a-b|=|e^{ix}-e^{iy}|\leqslant|x-y|=d(a,b)\leqslant r. \tag{29.453}$$

Donc nous avons bien $b\in B_{\mathbb{C}}(a,r)$ dès que $b\in B_d(a,r)$.

(2) $\tau_d\subset\tau_i$

Ce sens est plus délicat parce que, si nous voulons suivre les mêmes pas que le premier sens, nous devrons nous appuyer sur la continuité de l'application $\ln\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, laquelle n'est pas vraie en -1 (voir par exemple le lemme 28.35).

Soient $A\in\tau_d$ et $a\in A$. Nous devons prouver l'existence d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ tel que $S^1\cap\mathcal{O}$ soit inclus dans A et contienne a. Nous allons prouver cela dans le cas $a=1$ et ensuite propager le résultat en utilisant la symétrie de S^1.

(2a) **Si $a=1$** Vu que A est ouvert pour la topologie de la distance d, et vu que $1\in A$, il existe $r>0$ tel que $B_d(1,r)\subset A$. Pour ce r le lemme 29.112 donne

$$B_d(1,r)=S^1\cap\{x+iy\text{ tel que }x>\cos(r)\}. \tag{29.454}$$

Nous montrons que $\mathcal{O}=B_{\mathbb{C}}(1,\delta)$ avec $\delta<1-\cos(r)$ fait l'affaire. Si $x+iy\in B_{\mathbb{C}}(1,\delta)$, alors $x>1-\delta$ et donc

$$1-\delta>1-(1-\cos(r))=\cos(r), \tag{29.455}$$

ce qui prouve que la partie de $\mathcal{O}$ qui est dans S^1 est bien dans $B_d(1,r)$.

(2b) **Si $a\neq1$**

Soient un ouvert quelconque $A\in\tau_d$ ainsi que $a=e^{ix}\in A$. Nous considérons $r>0$ tel que $B_d(a,r)\subset A$; nous avons $e^{-ix}B_d(a,r)\subset e^{-ix}A$ et donc, en tenant compte du lemme 29.110(2) :

$$B_d(1,r)\subset e^{-ix}A. \tag{29.456}$$

Par le premier point, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ tel que $1\in\mathcal{O}$ et

$$\mathcal{O}\cap S^1\subset B_d(1,r)\subset e^{-ix}A. \tag{29.457}$$

Nous avons évidemment que $a\in e^{ix}\mathcal{O}$ et

$$e^{ix}(\mathcal{O}\cap S^1)\subset e^{ix}B_d(1,r)\subset A. \tag{29.458}$$

Donc $e^{ix}\mathcal{O}\cap S^1\subset A$. Vu que $e^{ix}\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble $e^{ix}\mathcal{O}\cap S^1$ est un ouvert de τ_i.

□

LEMooTKFHooJaeMyc

Lemme 29.114 ([1]).
Deux résultats de limites dans S^1.

[53] Définition 29.109.

ITEMooEUDIooDuynRg

(1) *Pour tout $a_0 \in S^1$, nous avons*

$$\lim_{s\to 1} d(a, as) = 0. \tag{29.459}$$

ITEMooXCBUooUxQldB

(2) *Si $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in S^1$, alors*

$$\lim_{s\to 1} f(as) = f(a). \tag{29.460}$$

Démonstration. Point par point.

(1) Soient $a, s \in S^1$. Donnons une formule pour $d(a, as)$. Si $a = e^{ix}$ et $s = e^{iy}$ nous avons $as = e^{i(x+y)}$ et donc

$$d(a, as) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - (x + y) + 2k\pi| = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |y + 2k\pi|. \tag{29.461}$$

Voilà pour la formule. Maintenant la preuve de notre point.

Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta < \epsilon$ et si $s \in B(1, \delta)$, alors il existe $y \in]-\delta, \delta[$ tel que $s = e^{iy}$ par le lemme 29.111. Pour un tel s nous avons

$$d(a, sa) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |y + 2k\pi| \leqslant |y| < \delta < \epsilon. \tag{29.462}$$

Nous avons trouvé $\delta > 0$ tel que $s \in B(1, \delta)$ implique $d(a, as) < \epsilon$. Cela est la limite que nous devions prouver.

(2) Soit $\epsilon > 0$. Soit $r > 0$ tel que si $b \in B(a, r)$, alors $|g(b) - g(a)| < \epsilon$; l'existence d'un tel r est la continuité de g en a. Nous considérons $\delta > 0$ tel que $s \in B(1, \delta)$ implique $sa \in B(a, r)$; l'existence d'un tel δ est le point (1) de ce lemme.

Avec tout cela nous avons $|g(as) - g(a)| < \epsilon$ dès que $s \in B(1, \delta)$. Nous avons donc, comme nous le voulions, la limite $\lim_{s\to 1} g(as) = g(a)$.

□

Lemme 29.115.
Pour $s \in S^1$, nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \alpha_s\colon \operatorname{Fun}(S^1) &\to \operatorname{Fun}(S^1) \\ \alpha_s(g)(u) &= g(u\bar{s}) - g(u). \end{aligned} \tag{29.463}$$

Quelques propriétés avec $1 \leqslant p < \infty$:

(1) *Si $f \in L^p(S^1)$, alors $\alpha_s(f) \in L^p(S^1)$.*

(2) *Si f est continue dans $L^p(S^1)$ nous avons la limite*

$$\lim_{s\to 1} \alpha_s(f) = 0 \tag{29.464}$$

dans $L^p(S^1)$.

Démonstration. D'abord un calcul de norme :

$$\|\alpha_s(f)\|_p^p = \int_{S^1} |f(u\bar{s}) - f(u)|^p du \leqslant \int_{S^1} |f(u\bar{s})|^p du + \int_{S^1} |f(u)|^p du = 2\|f\|_p^p. \tag{29.465}$$

Donc oui pour que $\alpha_s(f) \in L^p(S^1)$.

La fonction f étant supposée continue sur le compact S^1, elle est majorée. Nous savons qu'en posant $M = \|f\|_\infty$ nous avons $|\alpha_s(f)| \leqslant 2M$. Donc la fonction constante

$$\begin{aligned} g\colon S^1 &\to \mathbb{C} \\ u &\mapsto 2M \end{aligned} \tag{29.466}$$

est une fonction intégrable sur S^1 qui majore $|\alpha_s(f)|$ uniformément en s. Soit une suite $s_i \to 1$ dans S^1, et posons $f_i = \alpha_{s_i}(f)$. Alors nous avons

$$\|f_i\|_p^p = \int_{S^1} |f_i(u)|^p du \tag{29.467}$$

et aussi $|f_i|^p \leqslant (2M)^p$. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 16.209 nous permet de permuter limite et intégrale :

$$\lim_{i\to\infty} \|f_i\|_p^p = \int_{S^1} \lim_{i\to\infty} |f_i(u)|^p du. \tag{29.468}$$

Mais

$$\lim_{i\to\infty} f_i(u) = \lim_{i\to\infty} \alpha_{s_i}(f)(u) = \lim_{i\to\infty} \big(f(u\bar{s}_i) - f(u)\big) = 0. \tag{29.469}$$

La dernière limite est due au fait que $\lim_{s\to 1} g(us) = g(u)$ (lemme 29.114(2)). □

29.9.3 Système trigonométrique

Définition 29.116.
*La **famille trigonométrique** sur S^1 est l'ensemble de fonctions $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ données par*

$$\begin{aligned} e_n\colon S^1 &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^n \end{aligned} \tag{29.470}$$

*avec $n \in \mathbb{Z}$. Un **polynôme trigonométrique** est une application $S^1 \to \mathbb{C}$ de la forme*

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \tag{29.471}$$

pour des nombres $a_k \in \mathbb{C}$, peut-être pas tous non-nuls (autrement dit, il n'est pas forcé d'avoir autant de termes négatifs que positifs).

Le but de $z \mapsto z^n$ dans cette définition est d'être lu $t \mapsto e^{int}$ lorsqu'on considère les fonctions sur $[0, 2\pi[$.

PROPooOMGFooROFFFr

Proposition 29.117.
La famille trigonométrique est une famille orthonormale pour le produit scalaire $L^2(S^1, \mathcal{A}, \mu)$.

Démonstration. En utilisant la proposition 29.108(3) nous avons :

$$\langle e_n, e_n\rangle = \int_{S^1} e_n\overline{e_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} e_n\big(\varphi(x)\big)\overline{e_n\big(\varphi(x)\big)} \tag{29.472a}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} e^{inx}e^{-inx}dx \tag{29.472b}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1dx \tag{29.472c}$$

$$= 1. \tag{29.472d}$$

Et nous avons également, pour $m \neq n$:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-m)e^{i(n-m)x}}\right]_0^{2\pi} = 0. \tag{29.473}$$

□

Remarque 29.118.
Vous aurez noté que le facteur $\frac{1}{2\pi}$ qui permet d'avoir $\langle e_n, e_n\rangle = 1$ ne provient ni de la définition du produit scalaire ni de celle de la famille trigonométrique, mais bien de la mesure, voir la définition 20.200.

REMooUCANooVyXPxj

Remarque 29.119.
Notez aussi que nous avons bien $\langle e_n, e_{-n}\rangle = 0$. Il faut donc bien prendre tous les e_n avec $n \in \mathbb{Z}$ et non seulement $n \in \mathbb{N}$.

PROPooTGBHooXGhdPR

Proposition 29.120.
Les polynômes trigonométriques forment une partie dense dans $\big(C(S^1, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Pour préciser les notations, $C(S^1, \mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions continues de S^1 vers $\mathbb{C}$, et l'espace topologique que nous considérons est cet ensemble sur lequel nous considérons la distance supremum.

Nous utilisons le théorème de Stone-Weierstrass 14.459.

Le système contient une fonction constante non nulle, à savoir e_0.

Il sépare les points grâce à la fonction e_1 qui n'est autre que la fonction identité $z \mapsto z$. De plus l'ensemble des polynômes trigonométriques est stable par conjugaison parce que si

$$P = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k, \tag{29.474}$$

alors $\bar{P} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{a_k e_k} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{a_k} e_{-k}$ qui est encore un polynôme trigonométrique. □

Définition 29.121.
*Si nous avons une fonction $f : S^1 \to \mathbb{C}$, nous définissons ses **coefficients de Fourier** par*

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle \tag{29.475}$$

pourvu que l'intégrale existe.

29.9.4 Convolution

La convolution sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par la définition 29.78. Nous voyons maintenant comment cela s'adapte à S^1.

DEFooSKWOooEdIHoH

Définition 29.122.
*Si f et g sont des fonctions sur S^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$, nous définissons la **convolution** de f et g comme étant la fonction sur S^1 définie par*

$$(f * g)(z) = \int_{S^1} f(s) g(z\bar{s}) d\mu(s). \tag{29.476}$$

EQooILQNooBKtSBj

Cette définition appelle plusieurs remarques.

- Dès que $z, s \in S^1$, nous avons $z\bar{s} \in S^1$, de telle sorte qu'au moins l'intégrande ait un sens.
- Nous ne prétendons pas que l'intégrale (29.476) converge pour toutes les fonctions f et g. Cela est une définition « pour tous les couples f, g pour lesquels l'intégrale fonctionne ».
- Le lemme 29.123 nous dira que $L^1(S^1)$ est stable par convolution : si f et g sont dans L^1, alors $f * g$ y est aussi.
- Dans la formule (29.476), la variable s est vraiment une variable muette. Cette formule aurait également pu être écrite

$$(f * g)(z) = \int_{S^1} \big[s \mapsto f(s) g(z\bar{s}) \big] d\mu. \tag{29.477}$$

LEMooTYSSooItOiYE

Lemme 29.123 ([773]).
Si $f, g \in L^1(S^1)$, alors pour presque tout $z \in S^1$, la fonction $s \mapsto \int f(s) g(z\bar{s})$ est dans $L^1(S^1)$.

Démonstration. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \times S^1 &\to \mathbb{C} \\ (z, s) &\mapsto f(s) g(z\bar{s}). \end{aligned} \tag{29.478}$$

(1) $\psi \in L^1(S^1 \times S^1)$ Nous utilisons le corolaire 16.306, et pour cela nous calculons les intégrales en chaine[54] :

$$\int_{S^1} \left[\int_{S^1} |f(s) g(z\bar{s})| dz \right] ds = \int_{S^1} |f(s)| \underbrace{\left[\int_{S^1} |g(z\bar{s})| dz \right]}_{=A<\infty} ds \tag{29.479a}$$

$$= A \int_{S^1} |f(s) ds| \tag{29.479b}$$

$$< \infty. \tag{29.479c}$$

Le fait que $A < \infty$ provient directement de l'hypothèse $g \in L^1(S^1)$[55].

Par le corolaire sus-cité nous avons bien $\psi \in L^1(S^1 \times S^1)$.

[54] Dans les expressions suivantes, les symboles « ds » et « dz » n'ont pas d'autres valeurs que purement de notation pour indiquer le nom de la variable d'intégration.

[55] Avec un changement de variables $z \mapsto z\bar{s}$ que je vous conseille d'être capable de justifier.

(2) **Et par Fubini** Le théorème de Fubini 16.307(1) nous renseigne que pour presque tout $z \in S^1$, l'application

$$s \mapsto \psi(z,s) \tag{29.480}$$

est dans $L^1(S^1)$. Et la partie 16.307(2) ajoute que l'application

$$z \mapsto \int_{S^1} \psi(s,z)ds \tag{29.481}$$

EQooPLLBooJZsZzu

est également $L^1(S^1)$.

(3) **Conclusion** L'application donnée en (29.481) est précisément $(f*g)$. Donc $f*g \in L^1(S^1)$.

□

Lemme 29.124 ([1]).
Si $f \in L^1(S^1)$ et si g est continue sur S^1, alors $f*g$ existe et est continue sur S^1.

Démonstration. Vu que S^1 est compact, la continuité de g implique que g est bornée et donc dans $L^1(S^1)$. Le lemme 29.123 dit alors que $f*g$ est bien définie sur S^1.

Soit $z_0 \in S^1$. Nous montrons que $f*g$ est continue en z_0 ; pour cela nous considérons $\epsilon > 0$ et ensuite nous réfléchissons un peu.

Vu que g est continue sur S^1 qui est compact, g y est uniformément continue par le théorème de Heine14.80. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que pour tout $z_0 \in S^1$, si $z \in B(z_0,\delta)$, alors $|g(z_0) - g(z)| < \epsilon$.

Soit $s \in S^1$. Si $z \in B(z_0,\delta)$, alors $\bar{s}z \in B(\bar{s}z_0,\delta)$ par le lemme 29.110(2). Dans ce cas nous avons aussi

$$|g(\bar{s}z_0) - g(\bar{s}z)| < \epsilon. \tag{29.482}$$

Un peu de calcul maintenant. D'une part

$$(f*g)(z_0) - (f*g)(z) = \int_{S^1} f(s)\big(g(z_0\bar{s}) - g(z\bar{s})\big)ds, \tag{29.483}$$

et donc

$$|(f*g)(z_0) - (f*g)(z)| \leqslant \int_{S^1} |f(s)| \underbrace{\big|g(z_0\bar{s}) - g(z\bar{s})\big|}_{<\epsilon} ds \tag{29.484a}$$

$$\leqslant \epsilon \int_{S^1} |f| \tag{29.484b}$$

$$= A\epsilon \tag{29.484c}$$

pour une certaine constante A ne dépendant pas de z_0.

Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ tel que $z \in B(z_0,\alpha)$ implique

$$|(f*g)(z_0) - (f*g)(z)| \leqslant A\epsilon, \tag{29.485}$$

ce qui signifie que $f*g$ est continue en z_0. □

Notez que dans cette démonstration, l'uniforme continuité de g a été utilisée pour effectuer d'un seul coup la majoration pour tout s dans l'intégrale.

PROPooCSRNooDyClBY

Proposition 29.125.
Si $f \in L^1(S^1)$, nous avons

$$f * e_n = c_n(f)e_n. \tag{29.486}$$

Démonstration. Il s'agit d'un bon calcul. En considérant $z = e^{i\theta}$ nous avons

$$(f*e_n)(z) = \int_{S^1} f(s)e_n(z\bar{s})ds \tag{29.487a}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f(e^{ix})e_n(e^{i(\theta-x)})dx \tag{29.487b}$$

$$= e^{in\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f(e^{ix})e^{-inx}dx \tag{29.487c}$$

$$= e_n(e^{i\theta})\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f(e^{ix})\overline{e_n(e^{ix})}dx \tag{29.487d}$$

$$= e_n(z)\int_{S^1} f(s)\overline{e_n(s)}ds \tag{29.487e}$$

$$= e_n(z)\langle f, e_n\rangle. \tag{29.487f}$$

Donc $(f * e_n)(z) = \langle f, e_n\rangle e_n(z)$, c'est-à-dire que

$$f * e_n = c_n(f)e_n. \tag{29.488}$$

□

LEMooDGHJooRAnwpy

Lemme 29.126.
Si P est un polynôme trigonométrique et si $f \in L^1(S^1)$, alors $f * P$ est également un polynôme trigonométrique.

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$. Par la linéarité du produit de convolution,

$$f * P = \sum_{k=-n}^{n} a_k f * e_k = \sum_k a_k c_k(f) e_k \tag{29.489}$$

où nous avons également utilisé la proposition 29.125. Nous avons donc un polynôme trigonométrique dont les coefficients sont $a_k c_k(f)$ au lieu de a_k. □

29.9.5 Approximation de l'unité

LEMooUNFBooRCzwIn

Lemme 29.127 ([749]).
Soient une fonction continue $f\colon S^1 \to [0,\infty[$ et $a \in S^1$ telle que $f(z) < f(a)$ pour tout $z \in S^1 \setminus \{a\}$. Alors la suite de fonctions $f_n\colon S^1 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(z) = \left(\int_{S^1} f^n\right)^{-1} f(z)^n \tag{29.490}$$

EQooTQYPooLZprN

est une approximation de l'unité[56] *autour de a.*

Démonstration. En plusieurs points, dont d'abord une série de vérifications pour voir que la formule a un sens.

(1) **Strictement positive** D'abord, vu que f prend ses valeurs dans $[0,\infty[$ et vu que $f(z) < f(a)$, nous avons $f(a) > 0$ (strict). Peut-être que f s'annule à certains endroits de S^1, mais pas a.

(2) **f^n est intégrable sur S^1** La fonction f^n est dans les hypothèses de la proposition 16.220 parce que S^1 est compact, f^n y est continue et la mesure sur S^1 est compatible avec la topologie (voir les hypothèses précises).

(3) **L'intégrale n'est pas nulle** Vu que $f(a) > 0$, il existe un ouvert A contenant a sur lequel $f > 0$. Nous avons alors

$$\int_K f^n \geqslant \int_A f^n > 0. \tag{29.491}$$

Cela pour dire que l'inverse dans (29.490) ne pose pas de problèmes.

(4) **Norme** Vu que toutes les fonctions tant f que f_n sont positives, les valeurs absolues ne jouent aucun rôle et nous avons

$$\|f_n\|_1 = \int_{S^1} f_n d\mu = \left(\int_{S^1} f^n\right)^{-1} \int_{S^1} |f(z)|^n d\mu = 1. \tag{29.492}$$

Ce calcul donne d'un seul coup les deux conditions

- $\sup_k \|f_k\| = 1$
- $\int_{S^1} f_n = 1$ pour tout n.

Nous passons maintenant au vrai travail. Soit un voisinage V de a dans S^1. Soit une suite croissante (t_k) qui converge vers $f(a)$, c'est-à-dire $0 < t_k < f(a)$. Nous posons

$$A_k = \{x \in S^1 \setminus V \text{ tel que } f(x) \geqslant t_k\}. \tag{29.493}$$

Cet ensemble est contenu dans S^1 et est donc borné (pour la métrique de S^1).

[56] Définition 29.91.

(1) A_k **est fermé** Attention : ici nous démontrons que A_k est fermé dans S^1, et les complémentaires sont pris dans S^1.

Nous montrons que le complémentaire est ouvert en prenant $y \in A^c$ et en montrant que y admet un voisinage contenu dans A^c (le fameux théorème 9.8 que nous ne nous lasserons jamais de citer). Si $y \in A^c$, il y a deux possibilités (non exclusives) : soit $y \in V$ soit $f(y) < t_k$. Si $y \in V$, alors le voisinage V lui-même est encore dans A^c. Si par contre $f(y) < t_k$, alors par continuité, il existe un voisinage de y sur lequel $f < t_k$.

(2) A_k **est compact** L'espace S^1 est compact, par exemple grâce au lemme 9.128. La partie A_k est fermée dans le compact S^1, donc elle est compacte par le lemme 9.137.

(3) $A_{k+1} \subset A_k$ Si $x \in A_{k+1}$, alors $f(x) \geqslant t_{k+1} > t_k$. Donc $f(x) > t_k$ et $x \in A_k$.

(4) **Intersection vide** Si $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, alors $f(x) \geqslant t_k$ pour tout k. En passant à la limite et en sachant que $\lim_{k\to\infty} t_k = f(a)$, nous avons $f(x) \geqslant f(a)$. Par hypothèse, cela n'est pas. Donc

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \varnothing. \tag{29.494}$$

Nous avons, dans un compact, des fermés emboîtés dont l'intersection est vide. Le corolaire 9.134 nous dit qu'il existe un indice à partir duquel tous les A_k sont vides.

Soit $\delta = t_k$ pour un k tel que A_k est vide. Nous avons

$$\{x \in S^1 \setminus V \text{ tel que } f(x) \geqslant \delta\} = \varnothing, \tag{29.495}$$

c'est-à-dire que sur $S^1 \setminus V$, nous avons $f < \delta$ et donc

$$\int_{S^1\setminus V} f(s)^n < \int_{S^1\setminus V} \delta^n = \text{Vol}(S^1 \setminus V)\delta^n \tag{29.496}$$

où $\text{Vol}(S^1 \setminus V) = \int_{S^1\setminus V} 1 = \mu'(S^1 \setminus V)$ est une constante réelle strictement positive.

Nous avons aussi $\delta < f(a)$ parce que δ est un des t_k (et que cette suite croissante converge vers $f(a)$ sans l'atteindre par hypothèse). Soit δ_1 tel que $\delta < \delta_1 < f(a)$[57].

Nous posons

$$W = \{x \in S^1 \text{ tel que } f(x) > \delta_1\}. \tag{29.497}$$

Cet ensemble n'est pas vide parce qu'il contient a et est ouvert parce que f est continue. Nous avons

$$\int_{S^1} f(s)^n ds \geqslant \int_W f(s)^n ds \geqslant \delta_1^n \,\text{Vol}(W). \tag{29.498}$$

Nous avons donc déjà ces deux inégalités :

$$\int_{S^1\setminus V} f(s)^n \leqslant \text{Vol}(S^1 \setminus V)\delta^n \tag{29.499}$$

et

$$\int_{S^1} f(s)^n ds \geqslant \delta_1^n \,\text{Vol}(W). \tag{29.500}$$

En ce qui concerne les fonctions f_n que nous voulions étudier,

$$f_n(z) = \left(\int_{S^1} f(s)^n ds\right)^{-1} f(z)^n \leqslant \big(\text{Vol}(W)\delta_1^n\big)^{-1} f(z)^n, \tag{29.501}$$

et donc

$$\int_{S^1\setminus V} f_n \leqslant \big(\text{Vol}(W)\delta_1^n\big)^{-1} \text{Vol}(S^1 \setminus V)\sigma^n = \frac{\text{Vol}(S^1 \setminus V)}{\text{Vol}(W)} \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^n. \tag{29.502}$$

Étant donné que $\delta < \delta_1$, nous avons $(\delta/\delta_1)^n \to 0$. Donc aussi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S^1\setminus V} f_n(z)dz = 0. \tag{29.503}$$

□

[57] Dans [749], il prend $\delta < \delta_1 < 1$ et je crois qu'il aurait dû écrire $\varphi(0)$ au lieu de 1.

Le théorème suivant est une version pour S^1 du théorème 29.94. Le produit de convolution dans S^1 est la définition 29.122.

THOooIAOPooELSNxq

Théorème 29.128 ([749, 1]).
Soient (φ_k) une approximation de l'unité sur $\Omega = S^1$ ainsi qu'une fonction $g\colon S^1 \to \mathbb{C}$. Si g est mesurable et bornée sur Ω et si g est continue en a_0 alors

$$(\varphi_k * g)(a_0) \to g(a_0). \tag{29.504}$$

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous posons

$$d_k = \varphi_k * g - g. \tag{29.505}$$

Le but de ce théorème est de montrer que $d_k \to 0$ pour diverses notions de convergence.

Soit $a_0 \in S^1$. Par définition de l'approximation de l'unité, $\int_{S^1} \varphi_k = 1$ et donc on peut écrire $g(a_0) = \int_{S^1} g(a_0)\varphi_k(s)ds$. En ce qui concerne $d_k(a_0)$ nous avons alors

$$d_k(a_0) = \int_{S^1} \varphi_k(s)g(a_0\bar{s})ds - \int_{S^1} g(a_0)\varphi_k(s)ds \tag{29.506a}$$

$$= \int_{S^1} \varphi_k(s)\big(g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big). \tag{29.506b}$$

Nous pouvons passer à la norme (et non la valeur absolue parce que d_k prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$) :

$$|d_k(a_0)| \leqslant \int_{S^1} |\varphi_k(s)|\big|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big|ds. \tag{29.507}$$

La définition d'une approximation de l'unité nous permet de considérer $M = \sup_k \|\varphi_k\|_1 < \infty$. Le lemme 29.114(2) nous permet, lui, de considérer $\alpha > 0$ tel que

$$|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)| < \epsilon \tag{29.508}$$

dès que $s \in B(1,\alpha)$[58]. Vu que la suite (φ_k) est une approximation de l'unité, nous avons

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k| = 0. \tag{29.509}$$

Soit k suffisamment grand pour avoir $\int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k| < \epsilon$. Avec tout cela nous avons les majorations

$$|d_k(a_0)| \leqslant \int_{S^1} |\varphi_k(s)|\big|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big|ds \tag{29.510a}$$

$$= \int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k(s)| \underbrace{\big|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big|}_{\leqslant 2\|g\|_\infty} ds + \int_{B(1,\alpha)} |\varphi_k(s)| \underbrace{\big|g(a_0\bar{s}) - g(a_0)\big|}_{<\epsilon} ds \tag{29.510b}$$

$$\leqslant 2\|g\|_\infty \int_{S^1\setminus B(1,\alpha)} |\varphi_k(s)|ds + \epsilon \int_{S^1} |\varphi_k(s)|ds \tag{29.510c}$$

$$\leqslant \epsilon\big(1 + 2\|g\|_\infty\big). \tag{29.510d}$$

Nous avons donc bien $\lim_{k\to\infty} |d_k(a_0)| = 0$ et donc la continuité de $\varphi_k * g$ en a_0.

□

Voici une version un peu forte sous l'hypothèse de continuité. Vu que S^1 est compact, la continuité est en réalité une hypothèse assez forte : ça implique l'uniforme continuité et l'existence d'un maximum et d'un minimum.

Proposition 29.129.
Soient (φ_k) une approximation de l'unité sur $\Omega = S^1$ ainsi qu'une fonction continue $g\colon S^1 \to \mathbb{C}$.

ITEMooPHBJooOHDVoW

(1) Si $g \in L^p(\Omega)$ $(0 \leqslant p < \infty)$ et si g est continue, alors[59]

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^p} g. \tag{29.511}$$

[58] Notez que $s \in B(1,\alpha)$ si et seulement si $\bar{s} \in B(1,\alpha)$. Il n'y a donc pas d'incohérence entre l'hypothèse sur s et notre condition sur $g(a_0\bar{s})$

[59] Vous noterez les $p \in]0,1[$ en bonus par rapport au cas de $\mathbb{R}^n$.

ITEMooLOSVooDtaugF

(2) Si g est continue sur S^1, alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^\infty} g \tag{29.512}$$

Démonstration. En plusieurs points

(1) $\lim_{u\to 1}\|\tau_u(g)-g\|=0$ Ceci est un petit point intermédiaire. Pour des besoins de notations, nous posons

$$\begin{aligned}\tau_u(g)\colon S^1 &\to \mathbb{C}\\ s &\mapsto g(s\bar{u})\end{aligned} \tag{29.513}$$

pour $u\in S^1$.

La fonction g est continue sur le compact S^1, et y est donc uniformément continue[60]. Nous allons en déduire que $\lim_{u\to 1}\|\tau_u(g)-g\|_\infty=0$.

Soit $\epsilon>0$. L'uniforme continuité de g signifie qu'il existe $\delta>0$ tel que pour tout $a\in S^1$ si $s\in B(a,\delta)$, alors $\big|g(s)-g(a)\big|<\epsilon$. Si $u\in B(1,\delta)$ nous avons aussi $\bar{u}\in B(1,\delta)$ et donc $s\bar{u}\in B(s,\delta)$; ça c'est le lemme 29.110(2).

Pour tout $a\in S^1$ nous avons la chaine

$$u\in B(1,\delta)\Rightarrow a\bar{u}\in B(a,\delta)\Rightarrow\big|g(a\bar{u})-g(a)\big|<\epsilon. \tag{29.514}$$

Cela étant valable pour tout a, c'est encore valable en passant au supremum[61] :

$$u\in B(1,\delta)\Rightarrow\sup_{a\in S^1}\big|g(a\bar{u})-g(a)\big|\leqslant\epsilon \tag{29.515}$$

et donc d'accord pour

$$\lim_{u\to 1}\|\tau_u(g)-g\|=0. \tag{29.516}$$

(2) $\|d_k\|_\infty\to 0$ Nous prouvons la convergence uniforme sur S^1 de d_k vers zéro. Ensuite nous verrons que la compacité de S^1 permet d'en déduire les points (1) et (2).

En utilisant la notation τ_u, nous pouvons écrire

$$d_k(s)=\int_{S^1}\varphi_k(u)g(s\bar{u})du-g(s)=\int_{S^1}\varphi_k(u)\big(\underbrace{g(s\bar{u})}_{=\tau_u(g)(s)}-g(s)\big)du, \tag{29.517}$$

et donc

$$|d_k(s)|\leqslant\int_{S^1}|\varphi_k(u)|\|\tau_u(g)-g\|_\infty du. \tag{29.518}$$

Nous posons $M=\sup_k\|\varphi_k\|_1$, et nous considérons δ tel que $\|\tau_u(g)-g\|_\infty<\epsilon$ pour tout $u\in B(1,\delta)$. Ensuite nous subdivisons S^1 en $B(1,\delta)$ et $B(1,\delta)^c$:

$$\|d_k\|_\infty\leqslant\int_{B(1,\delta)}|\varphi_k(u)|\underbrace{\|\tau_u(g)-g\|_\infty}_{\leqslant\epsilon}du+\int_{B(1,\delta)^c}|\varphi_k(u)|\|\tau_u(g)-g\|_\infty du \tag{29.519a}$$

$$\leqslant\epsilon M+2\|g\|_\infty\int_{B(1,\delta)^c}|\varphi_k(u)|du \tag{29.519b}$$

$$\leqslant\epsilon\big(M+2\|g\|_\infty\big) \tag{29.519c}$$

parce que pour chaque $s\in S^1$ nous avons $\tau_u(g)(s)-g(s)$ et donc $\|\tau_u(g)-g\|_\infty\leqslant 2\|g\|_\infty$.

Tout cela montre que $d_k\xrightarrow{\|.\|_\infty}0$.

(3) **Convergence L^p, $0<p<\infty$**

Soit $\epsilon>0$. Nous avons

$$\|d_k\|_p^p\leqslant\int_{S^1}\big|(\varphi_k*g)(s)-g(s)\big|^p ds. \tag{29.520}$$

Il existe un k à partir duquel $\|\varphi_k*g-g\|_\infty<\epsilon$. Pour de tels k nous avons

$$\|d_k\|_p^p<\epsilon^p. \tag{29.521}$$

[60] Théorème de Heine 14.80. C'est fondamentalement ce fait qui unifie les parties (1) et (2) de cette preuve.
[61] Notez l'inégalité qui n'est plus stricte.

Ce passage est très possible dans le cas de S^1 parce que $\int_{S^1} 1 = 1$. Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, c'est pas du tout bon ; c'est pour cela que nous avons un résultat un peu plus fort dans S^1. La croissance de la fonction puissance (proposition 14.442) nous permet de conclure que $\|d_k\|_p < \epsilon$.

Nous avons donc la convergence L^p pour $0 < p < \infty$.

(4) **Convergence L^∞**

Non, la convergence L^∞ n'est pas la convergence pour la norme $\|.\|_\infty$. Voir la sous-section 29.3.3. Il n'en reste pas moins que si $\epsilon > 0$ et si k est assez grand pour que $\|f_k - f\|_\infty < \epsilon$, nous aurons

$$N_\infty(f_k - f) \leqslant \|f_k - f\| < \epsilon. \tag{29.522}$$

□

29.9.6 Base hilbertienne (suite des polynômes trigonométriques)

Voici le plan pour la suite :

- Construire un polynôme trigonométrique qui vérifie les hypothèse du lemme 29.127.
- En déduire une approximation de l'unité constituée de polynômes trigonométriques.
- Dire que si $f \in L^2(S^1)$, alors $f * \varphi_k$ est un polynôme trigonométrique dès que φ_k en est un.
- Invoquer le théorème 29.128(1) pour déduire que $\varphi_k * f$ est une suite de polynômes trigonométriques dans $L^2(S^1)$ qui converge $\varphi_k * f \xrightarrow{L^2} f$.

LEMooQQILooWlhntZ

Lemme 29.130.
La fonction $P = e_1 + e_{-1}$ est continue à valeurs réelles sur S^1.

Démonstration. Nous avons $e_1(z) = z$ et $e_{-1}(z) = z^{-1}$, c'est-à-dire que pour $z = e^{ix}$ ($x \in \mathbb{R}$), nous avons $e_{-1}(e^{ix}) = e^{-ix}$, de telle sorte que, en utilisant le lemme 20.13 qui donne e^{ix} en termes des fonctions trigonométriques usuelles :

$$(e_1 + e_{-1})(e^{ix}) = e^{ix} + e^{-ix} = \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) = 2\cos(x). \tag{29.523}$$

Nous avons donc la continuité et les valeurs réelles. □

LEMooIDTVooYTpfEm

Lemme 29.131.
Il existe un polynôme trigonométrique à valeurs dans $[0, \infty[$ et tel que $f(a) < f(1)$ pour tout $a \neq 1$ dans S^1.

Démonstration. Le lemme 29.130 nous dit déjà que $P = e_1 + e_{-1}$ est continue à valeurs réelles. Or qui est continue sur un compact (ici S^1), atteint donc ses bornes. Il est donc facile de considérer[62] $M > 0$ tel que $Q = M + e_1 + e_{-1}$ est à valeurs dans $[0, \infty[$.

Une forme explicite de Q est que

$$Q(e^{ix}) = M + 2\cos(x). \tag{29.524}$$

Le maximum de $\cos(x)$ est obtenu en $x = 0$ et vaut 1. Le maximum de Q est alors $Q(1) = 2 + M$. Il n'est atteint qu'une seule fois sur S^1 parce que pour avoir $Q(e^{ix}) = 2 + M$, il faut avoir $2\cos(x) = 2$, c'est-à-dire $x = 2k\pi$. Mais $e^{i2k\pi} = 1$.

Donc $Q(a) < M + 2 = Q(1)$ pour tout $a \neq 1$ dans S^1. □

Proposition 29.132.
Les polynômes trigonométriques $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(S^1)$.

Démonstration. Le fait que les e_n soient orthonormée est la proposition 29.117. Il reste à prouver que ce soit un système total.

Soit $f \in L^2(S^1)$. Soit un polynôme Q vérifiant le lemme 29.131 ; nous posons

$$\varphi_k(z) = \left(\int_{S^1} Q^n \right)^{-1} Q(z)^n. \tag{29.525}$$

Cela est une approximation de l'unité par la proposition 29.127. Les φ_k sont des polynômes trigonométriques parce que les Q^n le sont et que que $\int_{S^1} Q^n$ est seulement un nombre.

[62] Par exemple, M est le maximum de $|P|$.

Le lemme 29.126 nous dit alors que pour tout k, la fonction

$$\varphi_k * f \tag{29.526}$$

est un polynôme trigonométrique. □

Nous nous permettons de confirmer la remarque 29.119 comme quoi il faut bien tous les e_n avec $n \in \mathbb{Z}$, parce que le polynôme trigonométrique Q est bien construit à partir de $e_1 + e_{-1}$.

29.9.7 Convolution, bis

LEMooLUBQooWLMFrN

Lemme 29.133.
Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned} \tag{29.527}$$

Soient $t, u \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(t) = \varphi(u)$. Alors pour toutes fonctions pour lesquelles les intégrales convergent,

$$\int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(t - \theta)\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(u - \theta)\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{29.528}$$

Démonstration. Si $\varphi(u) = \varphi(t)$, alors $u = t + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Cette condition implique que $\varphi(t - \theta) = \varphi(u - \theta)$, et donc l'égalité

$$\int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(t - \theta)\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(u - \theta)\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{29.529}$$

□

Définition 29.134 (Convolution sur S^1)**.**
Le lemme 29.133 permet de définir

$$(f * g)\big(\varphi(t)\big) = \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\theta)(g \circ \varphi)(t - \theta)\frac{d\theta}{2\pi} \tag{29.530}$$

pour toutes les paires de fonctions $f, g \in \mathrm{Fun}(S^1, \mathbb{C})$ pour lesquelles l'intégrale converge.

L'espace de Lebesgues $L^2\big([a, b]\big)$ sera traité dans 31.6.

29.10 Sur $[0, 2\pi[$

Le produit de convolution est un peu subtil parce que $f(t-x)$ n'est pas défini à priori pour tout $t, x \in [0, 2\pi[$, vu que f n'est définie que sur $[0, 2\pi[$. Au moins trois solutions s'offrent à nous :

- considérer implicitement la fonction prolongée par périodicité.
- considérer les fonctions sur $\mathbb{R}/2\pi$, et définir un peu toutes les opérations modulo 2π (fastidieux)
- utiliser une bijection ayant les bonnes propriétés avec S^1 sur lequel tout est déjà fait.

Nous sélectionnons la troisième voie. Pour cela nous considérons la fonction (attention, elle n'est pas tout à fait la même que celle plus haut)

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0, 2\pi[&\to S^1 \\ t &\mapsto e^{it} \end{aligned} \tag{29.531}$$

qui est une bijection par la proposition 20.66(1). Pour le produit de convolution,

$$(f * g)(x) = (f \circ \varphi^{-1}) * (g \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(x)\big) \tag{29.532}$$

pour toutes les fonctions $f, g\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{C}$ pour lesquelles les intégrales en jeu ont un sens.

29.11 Des inégalités

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous nous fendons d'une petite étude de fonction. Soit

$$\begin{aligned}\phi\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{(1+x)^r}{1+x^r}.\end{aligned} \tag{29.533}$$

Un peu de calcul montre que

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{r(1-x^{r-1})}{(1+x^r)(1+x)}. \tag{29.534}$$

29.11.1 c-r inégalité

LEMooFKKEooDTypUd

Lemme 29.135.
Soient $a, b > 0$ et $r \geqslant 1$. Nous avons les inégalités

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r). \tag{29.535}$$

Démonstration. Notons d'abord que si $r = 1$, nous avons juste de égalités ; pas de problèmes. Nous supposons donc que $r > 1$. Pour la première inégalité, nous posons $f(x) = a^r + x^r$ et $g(x) = (a+x)^r$. Nous avons $f(0) = g(0) = a^r$, et, en utilisant la fonction f_α définite par $f_\alpha(x) = x^\alpha$, nous avons

$$f'(x) = rx^{r-1} = rf_{r-1}(x) \tag{29.536a}$$
$$g'(x) = r(a+x)^{r-1} = rf_{r-1}(a+x). \tag{29.536b}$$

Vu que $r > 1$, la fonction f_{r-1} est strictement croissante sur les positifs par la proposition 14.442. Donc pour $x \geqslant 0$ nous avons

$$f'(x) = rf_{r-1}(x) \leqslant rf_{r-1}(a+x) = g'(x). \tag{29.537}$$

Nous avons donc $f(b) \leqslant g(b)$ comme souhaité.

Nous passons à la seconde inégalité. Le lemme 19.116 nous dit que la fonction $f\colon x \mapsto x^r$ est convexe. Donc

$$f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b). \tag{29.538}$$

De là nous déduisons

$$\frac{(a+b)^r}{2^r} \leqslant \frac{1}{2}(a^r + b^r), \tag{29.539}$$

c'est-à-dire la seconde inégalité. □

Comme semble indiquer le code suivant, la seconde inégalité du lemme 29.135 semble vraie pour tous les complexes.

```
import random


def f1(z1: complex, z2: complex, r: float) -> float:
    return abs((z1+z2)/2)**r


def f2(z1: complex, z2: complex, r: float) -> float:
    return (abs(z1)**r + abs(z2)**r)/2


def test(z1: complex, z2: complex, r: float) -> float:
    """Should be positive."""
    return f2(z1, z2, r) - f1(z1, z2, r)


for _ in range(1, 10):
    r = random.uniform(1, 1.3)
    x1 = random.uniform(-10, 10)
```

```
    y1 = random.uniform(-10, 10)
    x2 = random.uniform(-10, 10)
    y2 = random.uniform(-10, 10)
    z1 = complex(x1, y1)
    z2 = complex(x2, y2)
    result = test(z1, z2, r)
    print("-----")
    print(f"z1={z1}")
    print(f"z2={z2}")
    print(f"r={r}")
    print("---> ", result)
    if result < 0:
        print("!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!")
```

tex/frido/codeSnip_5.py

PROPooPMIGooRAjROX

Proposition 29.136 ([774]).
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $r \geqslant 1$.Nous avons

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^r \leqslant \frac{|\alpha|^r + |\beta|^r}{2}. \tag{29.540}$$

Démonstration. Nous prouvons en montant progressivement en généralité.

(1) $\alpha = 1$ **et** $\beta = t \geqslant 1$ SPITEMooUDCCooSxNxhv Nous commençons avec $\alpha = 1$ et en supposant que β est un réel plus grand ou égal à 1. Nous devons prouver que

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^r \leqslant \frac{1+t^r}{2}. \tag{29.541}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} f\colon [1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1+t^r}{2} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^r, \end{aligned} \tag{29.542}$$

et nous prouvons que $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 1$. Pour cela nous calculons la dérivée :

$$f'(t) = \frac{r}{2}\left(t^{r-1} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^{r-1}\right) \geqslant 0. \tag{29.543}$$

Nous avons utilisé le fait que $x \mapsto x^{r-1}$ est croissante et que $t \geqslant 1$. Vu que $f(1) = 1 - 1 = 0$, la proposition 14.214(2) donne

$$f(t) \geqslant f(1) = 0 \tag{29.544}$$

pour tout $t \geqslant 1$

(2) $\alpha = z \in \mathbb{C}$ **avec** $|z| \geqslant 1$ **et** $\beta = 1$ SPITEMooLSGLooXiItES
Nous avons

$$\left|\frac{z+1}{2}\right|^r \leqslant \left(\frac{|z|+1}{2}\right)^r \qquad \text{pcq.} |z+1| \leqslant |z|+1 \tag{29.545a}$$

$$\leqslant \frac{1+|z|^2}{2} \qquad \text{par point (1).} \tag{29.545b}$$

(3) **Cas général**
Notons que si $\beta = 0$ c'est facile. Nous supposons que $\beta \neq 0$ et que $|\alpha| \geqslant |\beta|$. En posant $z = \alpha/\beta$ nous avons $|z| \geqslant 1$ et nous pouvons calculer un peu :

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^r = \left|\frac{\beta\frac{\alpha+\beta}{\beta}}{2}\right| \tag{29.546a}$$

$$= |\beta|^r \left|\frac{z+1}{2}\right| \tag{29.546b}$$

$$\leqslant |\beta|^r \frac{1+|z|^r}{2} \qquad \text{par le point (2)} \tag{29.546c}$$

$$= \frac{|\beta|^r + |\alpha|^r}{2}. \tag{29.546d}$$

□

PROPooHEWFooJpfzEL

Proposition 29.137 ([764]).
Si $a, b \geqslant 0$ et si $0 < r \leqslant 1$, alors

$$(a+b)^r \leqslant a^r + b^r. \tag{29.547}$$

Démonstration. Nous avons un calcul :

$$(a+b)^r - a^r = \int_a^{a+b} rt^{r-1}dt \qquad \text{tho. 16.290} \tag{29.548a}$$

$$= \int_0^b r(s+a)^{r-1}ds \qquad \text{ch.var. } s = t-a \tag{29.548b}$$

$$\leqslant \int_0^b rs^{r-1}ds \qquad \text{cf. justif.} \tag{29.548c}$$

SUBEQooUCTQooBULeqL

$$= b^r. \tag{29.548d}$$

Pour (29.548c), nous savons que $r < 1$ (le cas $r = 0$ est facile), de telle sorte que $r - 1 < 0$. La fonction $s \mapsto (s+a)^{r-1}$ est donc décroissante. □

PROPooTIJYooJGxphQ

Proposition 29.138 (c-r inégalité[764]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soient $f, g \in L^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des fonctions à valeurs réelles[63]*. En posant $c_r = 1$ pour $0 < r \leqslant 1$ et $c_r = 2^{r-1}$ si $r \geqslant 1$, nous avons*

(1) Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\big|f(\omega) + g(\omega)\big|^r \leqslant c_r|f(\omega)|^r + c_r|g(\omega)|^r. \tag{29.549}$$

EQooWIQOooLWPioQ

(2) Nous avons

$$\int_\Omega |f+g|^r d\mu \leqslant c_r \int_\Omega |f|^r d\mu + c_r \int_\Omega |g|^r d\mu. \tag{29.550}$$

EQooAJTKooGNxHqt

Démonstration. L'inégalité (29.549) provient de propositions 29.137 et 29.136 (suivant la valeur de r). L'inégalité (29.550) demande maintenant d'intégrer sur Ω. □

29.11.2 Inégalité de Hanner

Nous allons démontrer les inégalités de Hanner dans le théorème 29.143. Vu que ce sera un peu longuet, nous faisons un lemme.

LEMooDHRCooQiSpyC

Lemme 29.139.
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$|z_1+z_2|^p + |z_1-z_2|^p \geqslant \big(|z_1|+|z_2|\big)^p + \big||z_1|-|z_2|\big|^p. \tag{29.551}$$

EQooMUXVooSpCSyC

Démonstration. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Nous posons

$$d = |z_1+z_2|^p + |z_1-z_2|^p. \tag{29.552}$$

EQooJKYZooFzbETG

Pour $|z_1|$ et $|z_2|$ fixés, nous nous demandons quel est le minimum possible de d.

Si $|z_1| = 0$, alors le minimum est $2|z_2|^p$ et si $|z_2| = 0$ alors il est $2|z_1|^p$. Pour les autres cas, nous posons $|z_1| = a > 0$ ainsi que $b \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que[64]

$$z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\theta}. \tag{29.553}$$

Nous avons déjà que $z_1 + z_2 = z_1(1 + a^{-1}be^{i\theta})$ et donc

$$|z_1+z_2| = a|1 + a^{-1}be^{i\theta}| = |a + be^{i\theta}| \tag{29.554}$$

parce que $a > 0$. De plus,

$$|a+be^{i\theta}|^2 = (a+be^{i\theta})(a+be^{-i\theta}) = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta) \tag{29.555}$$

[63] Par défaut, les éléments de L^p sont à valeurs complexe. Et oui, je sais que ce sont des classes de fonctions, et donc elles peuvent être à valeurs complexes sur une partie de mesure nulle.

[64] Proposition 20.67

parce que $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=\cos(\theta)$. Nous posons

$$d(\theta)=|a+be^{i\theta}|^p+|a-be^{i\theta}|^p. \tag{29.556}$$

En développant,

$$d(\theta)=\big(a^2+b^2+2ab\cos(\theta)\big)^{p/2}+\big(a^2+b^2-2ab\cos(\theta)\big)^{p/2}. \tag{29.557}$$

Trouvons le minimum de cette fonction de θ. D'abord sa dérivée :

$$\begin{aligned}d'(\theta)&=pab\sin(\theta)\big[\big(a^2+b^2-2ab\cos(\theta)\big)^{p/2-1}-\big(a^2+b^2+2ab\cos(\theta)\big)^{p/2-1}\big] &(29.558a)\\ &=pab\sin(\theta)s(\theta). &(29.558b)\end{aligned}$$

Nous avons $s(\theta)=0$ pour $\theta=\pi/2$ et $\theta=3\pi/2$. Il faut surtout remarquer que $1<p<2$, ce qui donne $\frac{p}{2}-1<0$. La fonction $x\mapsto x^{p/2-1}$ est donc décroissante. Cela pour dire que

$$s(0)=\big(|a-b|^2\big)^{p/2-1}-\big(|a+b|^2\big)^{p/2-1}>0. \tag{29.559}$$

De la même façon, $s(\pi)=-s(0)<0$. Cela permet d'écrire un petit tableau de signe de d', et de conclure que $d(\theta)$ a un minimum en 0 et en π. Calcul fait, nous avons

$$d(0)=d(\pi)=|a+b|^p+|a-b|^p. \tag{29.560}$$

En reliant à (29.552) nous avons l'inégalité

$$|z_1+z_2|^p+|z_1-z_2|^p\geqslant(a+b)^p-|a-b|^p. \tag{29.561}$$

EQooVHQOooJcheCR

Nous rappelons que $a=|z_1|$ et que $z_2=z_1a^{-1}be^{i\theta}$. Notons au passage que $|z_2|=b$, donc que ce que nous dit l'équation (29.561) est que

$$|z_1+z_2|^p+|z_1-z_2|^p\geqslant\big(|z_1|+|z_2|\big)^p+\big||z_1|-|z_2|\big|^p. \tag{29.562}$$

□

Encore dans la catégorie des lemmes pour les inégalités de Hanner, nous avons celui-ci.

LEMooTCNEooADpNai

Lemme 29.140 ([1, 775])**.**
La fonction

$$\begin{aligned}\eta\colon\ ]0,\infty[&\to\mathbb{R}\\ a&\mapsto(a^{1/p}+1)^p+|a^{1/p}-1|^p\end{aligned} \tag{29.563}$$

est strictement convexe.

Démonstration. La fonction η est une fonction de classe C^∞ sur $]0,\infty[\backslash\{1\}$. Quelle est sa régularité en $a=1$? À cause de la valeur absolue, il n'est pas clair qu'elle y soit dérivable. En tout cas, la fonction $x\mapsto|x-1|$ n'est pas dérivable en $x=1$, mais peut-être que les exposants aident à lisser. Nous y reviendrons.

Afin de suivre les calculs nous introduisons quelques fonctions :

$$\begin{aligned}so(x)&=1+x^{1/p} &(29.564a)\\ di(x)&=1-x^{1/p} &(29.564b)\\ dj(x)&=x^{1/p}-1 &(29.564c)\end{aligned}$$

Pour les dérivées, nous avons

$$\begin{aligned}so'(x)&=\frac{1}{p}x^{1/p-1} &(29.565a)\\ di'(x)&=-so'(x) &(29.565b)\\ dj'(x)&=so'(x). &(29.565c)\end{aligned}$$

Nous divisons les cas selon $a<1$ ou $a>1$.

(1) **Pour $a<1$** Nous avons

$$\eta(a)=so(a)^p+di(a)^p, \tag{29.566}$$

et la première dérivée donne :

$$\eta'(a)=p\,so'(a)\big(so(a)^{p-1}-di(a)^{p-1}\big). \tag{29.567}$$

EQooCLXZooXCJOwd

Pour la seconde dérivée nous trouvons d'abord

$$\begin{aligned}\eta''(a) = \left(\frac{1-p}{p}\right) a^{\frac{1}{p}-2}\big(so(a)^{p-1} - di(a)^{p-1}\big) \\ + \frac{p-1}{p} a^{\frac{2}{p}-2}\big(so(a)^{p-2} + di(a)^{p-2}\big).\end{aligned} \tag{29.568}$$

À partir de là, le truc est de substituer les expressions suivantes :

$$so(a)^{p-1} = so(a)^{p-2}so(a) = so(a)^{p-2} + so(a)^{p-2}a^{1/p} \tag{29.569a}$$

$$di(a)^{p-1} = di(a)^{p-2} - a^{1/p}di(a)^{p-2}. \tag{29.569b}$$

Plein de trucs se simplifient et nous obtenons

$$\eta''(a) = \frac{p-1}{p} a^{\frac{1}{p}-2}\big(di(a)^{p-1} - so(a)^{p-2}\big). \tag{29.570}$$

(2) **Pour $a > 1$** Les calculs sont essentiellement les mêmes, en partant de

$$\eta(a) = so(a)^p + dj(a)^p. \tag{29.571}$$

Les résultats sont :

$$\eta'(a) = p\, so'(a)\big(so(a)^{p-1} + dj(a)^{p-1}\big), \tag{29.572}$$

EQooAJLHooGWiPlz

et

$$\eta''(a) = \frac{p-1}{p} a^{\frac{1}{p}-2}\big(dj(a)^{p-2} - so(a)^{p-2}\big). \tag{29.573}$$

(3) **Résumé pour $a \neq 1$**

Au final, nous avons pour tout $a \neq 1$:

$$\eta''(a) = \frac{p-1}{p} a^{\frac{1}{p}-2}\big(|1 - a^{1/p}|^{p-2} - (1 + a^{1/p})^{p-2}\big). \tag{29.574}$$

Ce qu'il se passe en $a = 1$ est encore une question ouverte que nous traitons maintenant.

(4) **Pour $a = 1$**

Les limites des expressions (29.567) et (29.572) en $a = 1$ sont vite calculées et c'est 2^{p-1} dans les deux cas. Donc la dérivée admet une prolongation continue en $a = 1$. Nous allons prouver que la fonction η est en réalité dérivable en $a = 1$ et que la dérivée vaut 2^{p-1}.

Nous nous concentrons sur la partie difficile donnée par $f(x) = |x^{1/p} - 1|^p$. Elle est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} di(x)^p & \text{si } x < 1 \\ dj(x)^p & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases} \tag{29.575}$$

Si $f'(1)$ existe, alors elle est égale à la limite

$$f'(1) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(1) - f(1-\epsilon)}{\epsilon}. \tag{29.576}$$

Les deux limites à calculer sont :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\big((1+\epsilon)^{1/p} - 1\big)^p}{\epsilon} \tag{29.577}$$

et

$$\lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{\big(1 - (1+\epsilon)^{1/p}\big)^p}{\epsilon}. \tag{29.578}$$

La première se traite par la règle de L'Hôpital[65], et le résultat est zéro. Pour la seconde, il faut juste transformer

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\big((1+\epsilon)^{1/p} - 1\big)^p}{\epsilon} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\big(1 - (1-h)^{1/p}\big)^p}{-h}, \tag{29.579}$$

qui se traite également par la règle de L'Hôpital. Le résultat est également zéro.

Donc η est dérivable en $a = 1$ et la dérivée vaut $\eta'(1) = 2^{p-1}$.

[65] Proposition 14.220

En récapitulant, nous avons $\eta'' > 0$ sur $]0,\infty[\setminus \{1\}$, donc η' est croissante sur cette partie (proposition 14.213). Vu que η' est continue sur $]0,\infty[$, elle est même croissante (strictement) sur tout $]0,\infty[$.

La proposition 19.112 conclut que η est strictement convexe sur $]0,\infty[$. □

Toujours dans la catégorie des lemmes pour les inégalités de Hanner, nous avons celui-ci.

Lemme 29.141 ([775]).
Soit $1 < p < 2$. La fonction

$$\begin{aligned}\xi\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}\\ (a,b) &\mapsto \big(a^{1/p} + b^{1/p}\big)^p + |a^{1/p} - b^{1/p}|^p\end{aligned} \tag{29.580}$$

est convexe.

Pour rappel, les conventions de données en 4.47 donnent $\mathbb{R}^+ = [0,\infty[$.

Démonstration. La fonction ξ vérifie facilement les conditions suivante :

- $\xi(a,b) = \xi(b,a)$,
- $\xi(0,0) = 0$,
- $\xi(ta,tb) = t\xi(a,b)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Nous posons

$$\begin{aligned}\eta\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}\\ a &\mapsto \xi(a,1).\end{aligned} \tag{29.581}$$

Le lemme 29.140 dit que η est strictement convexe, et le lemme 19.122 conclut que ξ est convexe. □

LEMooWIPYooMZqjbn

Lemme 29.142 ([776]).
Soit $1 < p < 2$. Nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned}\alpha\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1}\end{aligned} \tag{29.582}$$

et

$$\begin{aligned}\beta\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^{1-p}\big((1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1}\big).\end{aligned} \tag{29.583}$$

Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\alpha(x)|A|^p + \beta(x)|B|^p \leqslant |A+B|^p + |A-B|^p. \tag{29.584}$$

Démonstration. Plusieurs étapes.

(1) $\beta(x) \leqslant \alpha(x)$ Nous avons $\alpha(1) = \beta(1) = 2^{p-1}$. Pour les autres valeurs de x, nous allons raisonner avec la dérivée. La valeur de $\alpha'(x)$ est facile à calculer

$$\alpha'(x) = (p-1)(x+1)^{p-2} - (p-1)(1-x)^{p-2}. \tag{29.585}$$

Pour $\beta'(x)$ c'est un peu plus lourd. En substituant $(1+x)^{p-1} = (1+x)^{p-2}(1+x)$ et $(1-x)^{p-1} = (1-x)^{p-2}(1-x)$ nous pouvons regrouper les termes en $(1+x)^{p-2}$ et $(1-x)^{p-2}$. Après un peu de travail,

$$\beta'(x) = \frac{p-1}{x^p}\big((1-x)^{p-2} - (1+x)^{p-2}\big). \tag{29.586}$$

Cela nous permet de calculer $\alpha' - \beta'$:

$$\alpha'(x) - \beta'(x) = (p-1)\big(1 + \frac{1}{x^p}\big)\big((1+x)^{p-2} - (1-x)^{p-2}\big). \tag{29.587}$$

Vu que $1 < p < 2$, le nombre $p-2$ est strictement négatif ; afin de travailler avec des exposants positifs, nous écrivons

$$\alpha'(x) - \beta'(x) = \underbrace{(p-1)}_{>0}\underbrace{\big(1 + \frac{1}{x^p}\big)}_{>0}\underbrace{\left(\frac{1}{(1+x)^{2-p}} - \frac{1}{(1-x)^{2-p}}\right)}_{<0}. \tag{29.588}$$

Nous avons $\alpha'(x) - \beta'(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1]$. Du fait qu'en plus nous ayons $\alpha(1) = \beta(1)$, nous déduisons que $\alpha(x) \geqslant \beta(x)$.

(2) **Une petite étude de fonction** Soit $R \in [0,1]$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} F\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha(x) + R^p\beta(x). \end{aligned} \tag{29.589}$$

Nous montrons maintenant que cette fonction a un maximum global pour $x = R$. D'abord sa dérivée :

$$F'(x) = \underbrace{(p-1)}_{>0}\underbrace{\Big((1-x)^{p-1} - (1+x)^{p-2}\Big)}_{<0}\left(1 - \left(\frac{R}{x}\right)^p\right) \tag{29.590}$$

Nous avons

- $F'(x) = 0$ pour $x = R$,
- $F'(x) < 0$ pour $x > R$,
- $F'(x) > 0$ pour $x < R$.

Donc $x = R$ est bien un maximum global.

(3) **Pause** Nous avons les petits résultats utiles pour commencer à prouver. Petite pause avant de commencer ; pas de panique, ça ne va pas être trop violent.

(4) **Pour $0 < B < A$** Nous devons prouver que

$$\alpha(x)A^p + \beta(x)B^p \leqslant (A+B)^p + (A-B)^p. \tag{29.591}$$

EQooEPKRooRYJDSF

En divisant par A^p et en posant $R = B/A$, l'inéquation (29.591) est équivalente à

$$\alpha(x) + \beta(x)R^p \leqslant (1+R)^p + (1-R)^p \tag{29.592}$$

où $R \in]0,1[$ parce que nous avons supposé $0 < B < A$. Nous avons (il y a un petit calcul pour $F(R)$)

$$(1+R)^p + (1-R)^p = F(R) \geqslant F(x) = \alpha(x) + \beta(x)R^p. \tag{29.593}$$

ok.

(5) **Pour $0 < A < B$** Lorsque $0 < A < B$ nous avons

$$\begin{aligned} \alpha(x)|A|^p + \beta(x)|B|^p &= \alpha(x)A^p + \beta(x)B^p && \text{(29.594a)} \\ &\leqslant \alpha(x)B^p + \beta(x)A^p && \text{(29.594b)} \\ &\leqslant (B+A)^p + (B-A)^p && \text{(29.594c)} \\ &= |A+B|^p + |A-B|^p. && \text{(29.594d)} \end{aligned}$$

SUBEQooSHNUooCoWMFR
SUBEQooBPYVooPsAjbq

Justification :

- Pour (29.594b), c'est parce que $\alpha(x) > \beta(x)$; alors en mettant le plus grand de A et B devant le α au lieu du β, nous majorons.
- Pour (29.594c), c'est l'inégalité dans le cas $0 < B < A$, mais en inversant les noms de A et B.

(6) **Pour $0 < A = B$** Toutes les expressions sont continues par rapport à B (fixons x et A). Nous avons prouvé pour $B < A$ et pour $B > A$. Par continuité, l'inégalité est encore valide pour $A = B$.

(7) **Pour $A < 0$, $B > 0$** En posant $A' = -A$ nous avons $A' > 0$ et nous pouvons écrire

$$|A+B|^p + |A-B|^p = |-A'+B|^p + |-A'-B|^p = |B-A'|^p + |B+A'|^p \geqslant \alpha(x)|A'|^p + \beta(x)|B|^p. \tag{29.595}$$

Nous avons utilisé, avec A' et B le cas déjà prouvé $A', B > 0$.

(8) **Pour $A > 0$, $B < 0$** Celui-là, je vous le laisse.

(9) **Pour $A < 0$, $B < 0$** Posez $A' = -A$ et $B' = -B$ et hop.

□

THOooZRRYooBTBQKW

Théorème 29.143 (Inégalités de Hanner[775, 776]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $1 < p < 2$ et $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; nous avons

$$\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^p + \Big|\|f\|_p - \|g\|_p\Big|^p \leqslant \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \tag{29.596}$$

Il y a égalité si et seulement si $f(t)$ et $g(t)$ sont colinéaires pour presque tout t.

Démonstration. Nous supposons que $\|f\|_p \geqslant \|g\|_p$ pour fixer les idées. De toutes façons, la symétrie des formules nous fait passer de ce cas à l'autre sans difficulté.

Soit $x \in [0,1]$. Nous écrivons l'inégalité du lemme 29.142 pour $A = |f(\omega)|$ et $B = |g(\omega)|$:

$$\alpha(x)|f(\omega)|^p + \beta(x)|g(\omega)|^p \leqslant \big|f(\omega)+g(\omega)\big|^p + \big|f(\omega)-g(\omega)\big|^p. \tag{29.597}$$

Nous intégrons cela par rapport à ω sur Ω :

$$\alpha(x)\|f\|_p^p + \beta(x)\|g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p. \tag{29.598}$$

Et là vient l'idée qu'on se demande ce qui est passé par l'esprit du mec qui a tout combiné : nous évaluons cela pour $x = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}$, ce qui est permis parce que nous avons supposé $\|f\|_p \geqslant \|g\|_p$. Faites le calcul, collectez les termes identiques, vous obtiendrez

$$\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^p + \big(\|f\|_p - \|g\|_p\big)^p \leqslant \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p. \tag{29.599}$$

Et vu que $\|f\|_p \geqslant \|g\|_p$, nous pouvons gratuitement faire

$$\|f\|_p - \|g\|_p = \big|\|f\|_p - \|g\|_p\big|. \tag{29.600}$$

Fini pour Hanner. □

29.11.3 Inégalités de Clarkson

LEMooWEODooLHcVrP

Lemme 29.144 ([777]).
Si $p \geqslant 2$ et si $a, b \in \mathbb{C}$, alors

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}\big(|a|^p + |b|^p\big). \tag{29.601}$$

Démonstration. Nous prouvons l'inégalité en montant petit à petit en généralité.

(1) **Avec $x > 0$** Soit $x \geqslant 0$. Nous montrons dans cette partie l'inégalité

$$x^p + 1 \leqslant (x+1)^{p/2}. \tag{29.602}$$

EQooDJBNooEyfNtq

Pour cela nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1. \end{aligned} \tag{29.603}$$

Nous avons $f(0) = 0$, mais aussi, en utilisant les règle de dérivation[66] nous trouvons vite

$$f'(t) = p(t^2+1)^{p/2-1}t - pt^{p-1}. \tag{29.604}$$

Vu que $(t^2+1)^{p/2-1} \geqslant t^{p-2}$, le signe de $f'(t)$ est toujours strictement positif pour $t > 0$. La proposition 14.213 fait que f est strictement croissante et que $f(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(2) **Avec $x, y \geqslant 0$** Soient $x, y \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$. Nous prouvons dans cette partie que

$$(x^2+y^2)^{p/2} \geqslant x^p + y^p. \tag{29.605}$$

EQooGFGMooSiDfKX

Il s'agit d'appliquer l'inégalité (29.602) à x/y :

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)^{p/2} \geqslant \left(\frac{x}{y}\right)^p + 1. \tag{29.606}$$

En multipliant par y^p et en simplifiant un peu, nous trouvons le résultat (29.605).

[66] Par exemple celle de la proposition 16.297.

(3) **Avec $a, b \in \mathbb{C}$** Nous appliquons l'inégalité (29.605) à $x = |\frac{a+b}{2}|$ et $y = |\frac{a-b}{2}|$. Cela donne :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{p/2} \tag{29.607a}$$

$$= \left(\frac{2|a|^2 + 2|b|^2}{4}\right)^{p/2} \tag{29.607b}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p. \tag{29.607c}$$

La dernière ligne est la convexité de la fonction $t \mapsto t^{p/2}$ (lemme 19.116).

□

LEMooFGKXooZCHNln

Lemme 29.145.
Si $1 < p < 2$, alors l'exposant conjugué q vérifie $q > 2$.

Démonstration. Nous considérons q en fonction de p, sur le domaine $1 < p < 2$:

$$q(p) = \frac{p}{p-1}. \tag{29.608}$$

Donc[67] $q(1) = \infty$ et $q(2) = 2$. Nous étudions ensuite la dérivée :

$$q'(p) = -\frac{1}{(p-1)^2} < 0. \tag{29.609}$$

C'est donc une fonction strictement décroissante. Vues les valeurs aux bornes, nous voyons que $q(p) > 2$ sur tout son domaine. □

LEMooMKIXooVOYaxI

Lemme 29.146 ([778]).
Soit $1 < p < 2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons

$$|x+y|^q + |x-y|^q \leqslant 2\big(|x|^p + |y|^p\big)^{q-1}. \tag{29.610}$$

Démonstration. Nous considérons l'exposant conjugué q et p, c'est-à-dire q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, z) &\mapsto (1+\alpha^{1-q}z)(1+\alpha z)^{q-1} + (1-\alpha^{1-q}z)(1-\alpha z)^{q-1}. \end{aligned} \tag{29.611}$$

Cette fonction vérifie

$$f(1,z) = (1+z)^q + (1-z)^q, \tag{29.612}$$

EQooRFZQooJvdocT

ainsi que

EQooISBRooHMiPRE

$$f(z^{p-1}, z) = \big(1 + z^{(p-1)(1-q)}\big)(1+z^p)^{q-1} + \big(1 - z^{(p-1)(1-q)}\big)(1+z^p)^{q-1} \tag{29.613a}$$

$$= 2(1+z^p)^{q-1}. \tag{29.613b}$$

Nous montrons maintenant que $(\partial_\alpha f)(\alpha, z) \leqslant 0$ pour tout $\alpha \in]0,1[$ et pour tout $z \in]0,1[$. C'est du calcul :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, z) = (1-q)z\big[\alpha^{-q}(1+\alpha z)^{q-1} - (1+\alpha^{1-q}z)(1+\alpha z)^{q-1} - \alpha^{-q}(1-\alpha z)^{q-1} + (1-\alpha^{1-q}z)(1-\alpha z)^{q-2}\big]. \tag{29.614}$$

Maintenant nous factorisons $(1+\alpha z)^{q-2}$ grâce à la décomposition $(1+\alpha z)^{q-1} = (1+\alpha z)(1+\alpha z)^{q-2}$. Notez que le lemme 29.145 donne $q > 2$, et donc pas de problèmes avec la puissance $q-2$. Nous continuons le calcul

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, z) &= (1-q)z(1+\alpha z)^{q-2}\big[\alpha^{-q}(1+\alpha z) - (1+\alpha^{1-q}z)\big] && (29.615a)\\ &\quad + (1-q)z(1-\alpha z)^{q-2}\big[-\alpha^{-q}(1-\alpha z) + (1-\alpha^{1-q}z)\big] \\ &= (1-q)z(1+\alpha z)^{q-2}\big[\alpha^{-q} + \alpha^{-q+1}z - 1 - \alpha^{1-q}z\big] && (29.615b)\\ &\quad + (1-q)z(1-\alpha z)^{q-2}\big[-\alpha^{-q} + \alpha^{-q+1} + 1 - \alpha^{1-q}z\big] \\ &= (1-q)z(1+\alpha z)^{q-2}[\alpha^{-q} - 1] + (1-q)z(1-\alpha z)^{q-2}[1-\alpha^{-q}] && (29.615c)\\ &= (1-q)z(\alpha^{-q} - 1)\big[(1+\alpha z)^{q-2} - (1-\alpha z)^{q-2}\big]. && (29.615d) \end{aligned}$$

[67] Dire que $q(1) = \infty$ est un abus de notations pour parler de la limite $p \to 1$ avec $p > 1$.

Vu que $q > 2$, la fonction $x \mapsto x^{q-2}$ est strictement croissante sur les positifs[68]. Et vu que $\alpha z < 1$, le crochet est strictement positif. Par ailleurs, $z > 0$, $(1-q) < 0$ et $(\alpha^{-q} - 1) > 0$ donc nous avons prouvé que $(\partial_\alpha f)(\alpha, z) \leqslant 0$.

Donc f est décroissante par rapport à α. Vu que $z \in [0,1]$ et que $p > 1$, nous avons $z^{p-1} < 1$ et donc $f(1,z) \leqslant f(z^{p-1}, z)$. Nous y substituons les valeurs calculées en (29.612) et (29.613) :

$$(1+z)^q + (1-z)^q \leqslant 2(1+z^p)^{q-1}. \tag{29.616}$$

Nous pouvons maintenant facilement prouver notre inégalité.

(1) **Pour $0 < x < y$** Si $0 < x < y$, nous avons $x/y \in [0,1]$ et nous pouvons appliquer l'inégalité (29.616) à $z = x/y$. Nous avons successivement :

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^q + \left(1 - \frac{x}{y}\right)^q \leqslant \left(1 + \frac{x^p}{y^p}\right)^{q-1} \tag{29.617a}$$

$$\left(\frac{x+y}{y}\right)^q + \left(\frac{y-x}{y}\right)^q \leqslant 2\left(\frac{y^p + x^p}{y^p}\right)^{q-1} \tag{29.617b}$$

$$y^{-q}(x+y)^q + y^{-q}(y-x)^q \leqslant 2y^{-p(q-1)}(y^p + x^p) \tag{29.617c}$$

$$(x+y)^q + (y-x)^q \leqslant 2y^{-p(q-1)+q}(y^p + x^p). \tag{29.617d}$$

Nous avons utilisé la proposition 14.447 sur la composition de puissances. Maintenant il suffit de remarquer que $q = p(q-1)$ pour avoir le résultat.

(2) **$x < 0$ et $y > 0$** En posant $x' = -x$ nous avons

$$|x+y|^q + |x-y|^q = |-x'+y|^q + |-x'-y|^q \tag{29.618a}$$

$$= |x'-y|^q + |x'+y|^q \tag{29.618b}$$

$$\leqslant 2\big(|x'|^p + |y|^p\big) \tag{29.618c}$$

$$\leqslant 2\big(|x|^p + |y|^p\big). \tag{29.618d}$$

(3) **Les autres cas** Je vous prie de faire la liste, et d'adapter.

□

Pour d'autres preuves du lemme suivant, voir [779].

Lemme 29.147 ([780]).
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ ainsi que $1 < p < 2$. Nous notons q l'exposant conjugué de p. Nous avons l'inégalité

$$|a+b|^q + |a-b|^q \leqslant 2\big(|a|^p + |b|^p\big)^{q-1}. \tag{29.619}$$

Démonstration. Commençons doucement avec le cas $b = 0$. À gauche nous gardons $2|a|^q$, et pour le membre de droite nous remarquons que

$$q - 1 = \frac{1}{p-1}, \tag{29.620}$$

de telle sorte que

$$(|a|^p)^{q-1} = |a|^{p/(p-1)} = |a|^q. \tag{29.621}$$

Gardez en tête que, par le lemme 29.145, $q > 2$; ce sera utile.

Nous commençons le vrai combat. Vu que $|a-b| = |b-a|$ nous pouvons supposer $|a| \geqslant |b|$ pour fixer les idées. En utilisant le lemme 20.68, il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(t_0) \\ |a-b|^2 &= |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(t_0) \end{aligned} \tag{29.622}$$

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0, 2\pi] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \Big(|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(t)\Big)^{q/2} + \Big(|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(t)\Big)^{q/2}. \end{aligned} \tag{29.623}$$

[68] Proposition 14.442.

Elle vérifie

$$f(t_0) = (|a+b|^2)^{q/2} + (|a-b|^2)^{q/2}. \tag{29.624}$$

Vu que $|a+b|$ et $|a-b|$ sont positifs, nous pouvons « simplifier » le carré et la racine carré, de telle sorte que

$$f(t_0) = |a+b|^q + |a-b|^q. \tag{29.625}$$

Nous cherchons un maximum pour f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pour cela, nous prenons d'abord la dérivée :

$$f'(t) = -q|a||b|\sin(t)\Big[\big(|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(t)\big)^{q/2-1} - \big(|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos(t)\big)^{q/2-1}\Big]. \tag{29.626}$$

Notez que $q > 2$, donc la fonction $x \mapsto x^{q/2-1}$ est croissante.

Pour $t \in [0, \pi/2]$, nous avons $\cos(t) \geqslant -\cos(t)$ ainsi que $\sin(t) \geqslant 0$. Donc $f'(t) \leqslant 0$. De la même manière, nous avons $f'(t) \geqslant 0$ pour $t \in [\pi/2, \pi]$.

Par le lien entre dérivée et croissance (proposition 14.214), nous savons que le maximum de f sur $[0, \pi]$ est atteint en 0 ou en π.

Nous avons, en utilisant la supposition $|a| \geqslant |b|$:

$$\begin{aligned} f(0) = f(\pi) &= \big(|a|^2+|b|^2+2|a||b|\big)^{q/2} + \big(|a|^2+|b|^2-2|a||b|\big)^{q/2} && \text{(29.627a)}\\ &= \big(\big||a|+|b|\big|^2\big)^{q/2} + \Big(\big||a|-|b|\big|^2\Big) && \text{(29.627b)}\\ &= \big||a|+|b|\big|^q + \big||a|-|b|\big|^q. && \text{(29.627c)} \end{aligned}$$

En particulier $f(t_0) \leqslant f(0)$ et donc

$$|a+b|^q + |a-b|^q \leqslant \big||a|+|b|\big|^q + \big||a|-|b|\big|^q \leqslant 2\big(|a|^p+|b|^p\big)^{q-1}. \tag{29.628}$$

La dernière inégalité est le lemme 29.146 appliqué aux réels $|a|$ et $|b|$. □

PROPooJDOQooWsGlkr

Proposition 29.148 (Inégalité de Clarkson[778]).
Soient $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) Si $p \geqslant 2$, alors

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^p + \|\frac{f-g}{2}\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big). \tag{29.629}$$

EQooBWDJooGXzdxz

(2) Si $1 < p < 2$ et si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leqslant 2\Big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\Big)^{q-1}, \tag{29.630}$$

EQooXMWBooYrvaoV

ou

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q + \|\frac{f-g}{2}\|_p^q \leqslant 2^{1-q}\big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big)^{q-1}. \tag{29.631}$$

EQooZCWDooBnaMom

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour $p \geqslant 2$** Soient $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; ce sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ nous considérons les nombres complexes $f(\omega)$ et $g(\omega)$; nous pouvons écrire l'inégalité du lemme 29.144 :

$$\left|\frac{f(\omega)+g(\omega)}{2}\right|^p + \left|\frac{f(\omega)-g(\omega)}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}\big(|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p\big). \tag{29.632}$$

EQooIGNKooKFUnKO

Nous avons les substitutions évidentes $f(\omega)+g(\omega) = (f+g)(\omega)$ et $f(\omega)-g(\omega) = (f-g)(\omega)$. En intégrant alors (29.632) sur Ω nous trouvons l'inégalité demandée.

(2) **Pour $1 < p < 2$** Il s'agit de faire la même chose, en utilisant l'inégalité de Clarkson du lemme 29.147.

Pour obtenir (29.631), il s'agit simplement de multiplier et diviser le member de gauche de (29.630) par 2^q.

□

29.12 Théorème de la projection normale

29.12.1 Espace uniformément convexe

DEFooOPQBooBhufew

Définition 29.149 (Espace uniformément convexe[781]).
*Un espace de Banach B est **uniformément convexe** si il existe une fonction $\delta\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que si*

(1) $\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant 1$,

(2) $\|x-y\| \geqslant \epsilon$,

alors

$$\|\frac{x+y}{2}\| \leqslant \|y\| - \delta(\epsilon). \tag{29.633}$$

Lemme 29.150 ([1]).
Si B est un espace de Banach uniformément convexe, alors pour tout $k > 0$, il existe une fonction $\delta_k\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ telle que si

(1) $\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant k$,

(2) $\|x-y\| \geqslant \epsilon$,

alors

$$\|\frac{x+y}{2}\| \leqslant \|y\| - \delta_k(\epsilon). \tag{29.634}$$

Démonstration. Nous posons $x' = x/k$ et $y' = y/k$. Nous avons alors

$$\|x'-y'\| = \frac{\|x-y\|}{k} > \frac{\epsilon}{k}. \tag{29.635}$$

L'uniforme convexité de B dit alors que

$$\|\frac{x'+y'}{2}\| > \|y'\| - \delta(\epsilon/k). \tag{29.636}$$

En multipliant cette inégalité par k nous trouvons

$$\|\frac{x+y}{2}\| > \|y\| - k\delta(\epsilon/k). \tag{29.637}$$

Donc en posant $\delta_k(\epsilon) = k\delta(\epsilon/k)$, nous avons le résultat escompté. □

DEFooMYYLooJyACPL

Définition 29.151 (Projection normale[781]).
Soient un espace de Banach B ainsi que $V \subset B$. Soit $a \in B$. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x,a) \end{aligned} \tag{29.638}$$

possède un infimum[69] *m. Si $x \in V$ est tel que $d(x,a) = m$, alors x est une **projection normale** de a sur V.*

PROPooDKXVooUoYPgz

Proposition 29.152 ([781]).
Soient un espace de Banach B et un sous-espace vectoriel $V \subset B$. Si une projection normale de $a \in B$ sur V existe, alors elle est unique.

Démonstration. Soient deux projections normales b, b' de a sur V.
Si $m = 0$, alors $\|a-b\| = 0$ et $\|a-b'\| = 0$, ce qui donne $a = b$ et $a = b'$. Donc d'accord pour $b = b'$.
Si $m > 0$ alors nous utilisons l'inégalité $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ sous la forme

$$\|a - \frac{b+b'}{2}\| = \|\frac{a-b}{2} + \frac{a-b'}{2}\| \leqslant \|\frac{a-b}{2}\| + \|\frac{a-b'}{2}\| = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m. \tag{29.639}$$

EQooQWJWooVaWMCL

Mais $\frac{b+b'}{2} \in V$, donc

$$\|a - \frac{b+b'}{2}\| \geqslant m. \tag{29.640}$$

[69] Toute fonction à valeurs positives possède un infimum, c'est la proposition 4.85.

Nous en déduisons que dans (29.639), toutes les inégalités sont des égalités et en particulier

$$\|\frac{b+b'}{2}-a\|=m. \tag{29.641}$$

Nous avons donc les deux égalités suivantes :

$$2m=\|a-b\|+\|a-b'\| \tag{29.642}$$

et

$$2m=\|b+b'-2a\|. \tag{29.643}$$

Cela donne

$$\|a-b\|+\|a-b'\|=\|(a-b)+(a-b')\|. \tag{29.644}$$

Vu que B est strictement convexe, cela n'est possible que si $a-b=a-b'$, ce qui signifie que $b=b'$. □

THOooOOVVooMhzHqd

Théorème 29.153 ([778, 781])**.**
Si B est un espace de Banach uniformément convexe, si $V\subset B$ est un sous-espace vectoriel fermé et si $a\in B$, alors a admet une unique projection normale[70] *sur V.*

Démonstration. En deux parties.

(1) **Unicité** Soient deux projections normales b et b' de a sur V. Nous avons $\|a-b\|=\|a-b'\|=m$. Si $b\neq b'$, il existe $\epsilon>0$ tel que

$$\|b-b'\|>\epsilon>0. \tag{29.645}$$

En posant

$$x=\frac{1}{2}\frac{b-a}{m},\quad y=\frac{1}{2}\frac{b'-a}{m}, \tag{29.646}$$

nous avons $\|x\|=\|y\|=\frac{1}{2}<1$. L'uniforme convexité de B donne alors

$$\|\frac{x+y}{2}\|\leqslant\|y\|-\delta(\epsilon). \tag{29.647}$$

Mais

$$x+y=\frac{\frac{1}{2}(b+b')-a}{m} \tag{29.648}$$

et

$$\|x+y\|\leqslant 2\|y\|-2\delta(\epsilon)=1-2\delta(\epsilon)<1. \tag{29.649}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\|\frac{1}{2}(b+b')-a\|<m, \tag{29.650}$$

ce qui est impossible parce que cela dirait que $\frac{b+b'}{2}$ est une « meilleure » projection normale que b et b'.

(2) **Existence** Soient b_k dans V tels que $\|a-b_k\|\to m$. Nous supposons (quitte à passer à une sous-suite) que

$$\|a-b_{k+1}\|\leqslant\|a-b_k\|. \tag{29.651}$$

(2a) **La suite (b_k) converge**
Nous supposons qu'elle ne converge pas. Elle n'est donc pas de Cauchy parce que B est de Banach[71] et donc complet. Il existe $\epsilon>0$ tel que pour tout $N\in\mathbb{N}$ il existe $p,q>N$ tels que

$$\|b_p-b_q\|>\epsilon. \tag{29.652}$$

Nous effectuons quelque choix.

(2a.i) nous choisissons $q>p$ de telle sorte que $\|a-b_p\|\leqslant\|a-b_q\|$,

(2a.ii) nous choisissons N assez grand pour avoir

$$\|a-b_p\|\leqslant\|a-b_q\|<m. \tag{29.653}$$

[70] Définition 29.151.
[71] Définition 9.339.

Nous avons $\|(a-b_p)-(a-b_q)\| = \|b_q-b_p\| > \epsilon$, ce qui avec l'uniforme convexité donne

$$\frac{\|(a-b_p)+(a-b_q)\|}{2} \leqslant \|a-b_q\| - \delta(\epsilon). \tag{29.654}$$

Donc

$$m \leqslant \|a - \frac{b_p-b_q}{2}\| = \|\frac{(a-b_p)+(a-b_q)}{2}\| \leqslant \|a-b_q\| - \delta(\epsilon) < m - \delta(\epsilon) < m. \tag{29.655}$$

Cela signifie que $m < m$, ce qui est impossible.

(2b) **Conclusion** La suite (b_k) converge dans B. Vu que V est fermé, la limite est dans V. Cette limite, que nous nommons b, vérifie

$$\|a-b\| \leqslant \|a-b_k\| \tag{29.656}$$

pour tout k. Mais comme nous avons $m \leqslant \|a-b_k\| \to m$, nous avons $\|a-b\| = m$, c'est-à-dire que b est une projection normale de a sur V.

□

29.12.2 Uniforme convexité des espaces de Lebesgue

PROPooFNLJooDlyIKV

Proposition 29.154 ([782]).
Si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est uniformément convexe[72].

Démonstration. En deux parties.

(1) $1 < p \leqslant 2$ Nous montrons que la fonction $\delta(\epsilon) = 2^{-q}\epsilon^q$ fonctionne.

Soient $f, g \in L^p$ telles que $\|f\|_p \leqslant \|g\|_p \leqslant 1$ et $\|f-g\|_p \geqslant \epsilon$. Nous commençons par écrire l'inégalité de Clarkson (29.630) :

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q + \|\frac{f-g}{2}\|_p^q \leqslant 2^{1-q}\big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big)^{q-1}. \tag{29.657}$$

EQooOWVEooGGfCnv

Par hypothèse, $\|f\|_p$ et $\|g\|_p$ sont plus petites que 1. Vu que $p > 1$, nous avons

$$\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \leqslant 1 + 1 = 2. \tag{29.658}$$

En remplaçant dans le membre de droite de (29.657) nous avons

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q + \|\frac{f-g}{2}\|_p^q \leqslant 2^{1-q}2^{q-1} = 1, \tag{29.659}$$

et donc

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q \leqslant 1 - \|\frac{f-g}{2}\|_p^q. \tag{29.660}$$

EQooKARYooDrQuIJ

Par ailleurs nous avons supposé $\|f-g\|_p \geqslant \epsilon$. Donc aussi[73]

$$\|\frac{f-g}{2}\|_p^q \geqslant 2^{-q}\epsilon^q. \tag{29.661}$$

EQooCGDDooWtDokf

Et par un autre ailleurs,

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p = \frac{1}{2}\|f+g\|_p \leqslant \frac{1}{2}\big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \leqslant 1. \tag{29.662}$$

EQooOFWYooLVrNDc

Vu que nous avons $q \geqslant 2$, cela donne aussi

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p \leqslant \|\frac{f+g}{2}\|^q. \tag{29.663}$$

EQooGMPRooGiLSss

Avec les inégalités (29.661) et 29.663 nous finissons l'inégalité (29.660) :

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p \leqslant \|\frac{f+g}{2}\|_p^q \leqslant 1 - 2^{-q}\epsilon^q \leqslant \|g\|_p - \delta(\epsilon). \tag{29.664}$$

Okay, c'est bon.

(2) $2 \leqslant p < \infty$ Il s'agit de faire la même chose en partant de Clarkson (29.629). Le résultat est que la fonction $\delta(\epsilon) = (\epsilon/2)^p$, ça fonctionne.

□

[72] Définition 29.149.

[73] Ici j'ai un coefficient un peu différent que celui de [782]. Écrivez-moi pour confirmer ou infirmer mes calculs.

29.12.3 Théorème de la projection normale

PROPooTZMRooCvQtGg

Proposition 29.155.
Si $1 < p < \infty$, et si V est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, alors la projection normale[74] *de $a \in L^p$ sur V existe et est unique.*

Démonstration. La proposition 29.154 nous indique que l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est uniformément convexe. Or le théorème 29.153 nous indique que les espaces uniformément convexes vérifient la présente proposition. □

Nous pouvons donner une preuve directe, sans passer par l'uniforme convexité, dans les cas $p \geqslant 2$.

THOooRJFUooQivDKm

Théorème 29.156 (Théorème de la projection normale[783])**.**
Nous considérons $p \geqslant 2$. Soit un sous-espace vectoriel fermé $W \subset L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $u_0 \in L^p$. Nous notons

$$d(u_0, W) = \inf_{w \in W} d(u_0, W). \tag{29.665}$$

Alors il existe $w_0 \in W$ tel que $\|u_0 - w_0\| = d(u_0, W)$.

Démonstration. Nous allons séparer trois cas : $p = 2$ et $p > 2$.

(1) $\underline{p = 2}$ Pour $p = 2$, nous savons que L^2 est un espace de Hilbert[75], et nous avons déjà le théorème de la projection 27.6.

(2) $\underline{p > 2}$ Pour chaque $x \in \Omega$ nous avons $f(x), g(x) \in \mathbb{C}$ et donc l'identité du parallélogramme[76] :

$$\big|f(x) - g(x)\big|^2 + \big|f(x) + g(x)\big|^2 = 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2. \tag{29.666}$$

EQooUBFEooDUiLnb

Vu que $p > 2$, la fonction $s\colon x \mapsto x^{p/2}$ est convexe (lemme 19.116). Calcul :

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)|^p + |f(x) + g(x)|^p &= \big(|f(x) - g(x)|^2\big)^{p/2} + \big(|f(x) + g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(29.667a)}\\
&= s\big(|\dots|^2\big) + s\big(|\dots|^2\big) && \text{(29.667b)}\\
&\leqslant \big(|f(x) - g(x)|^2 + |f(x) + g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(29.667c)}\\
&= \big(2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(29.667d)}\\
&= 2^{p/2}\big(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\big)^{p/2} && \text{(29.667e)}\\
&\leqslant 2^{p/2}2^{p/2-1}\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) && \text{(29.667f)}\\
&= 2^{p-1}\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) && \text{(29.667g)}
\end{aligned}$$

SUBEQooRHAEooHkYNLH
SUBEQooQESLooJkoeqN
SUBEQooQSUHooXKaWwO

Justifications :

- Pour (29.667c) : la convexité de s.
- Pour (29.667d) : la relation (29.666).
- Pour (29.667f) : la seconde inégalité du lemme 29.667f.

Nous isolons $|f(x) - g(x)|^p$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)|^p &\leqslant 2^{p-1}\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) - |f(x) + g(x)|^p && \text{(29.668a)}\\
&= 2^p\left(\frac{|f(x)|^p + |g(x)|^p}{2} - \left|\frac{|f(x)| + |g(x)|}{2}\right|^p\right) && \text{(29.668b)}
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable pour tout x, nous pouvons intégrer sur Ω et découper l'intégrale en petits morceaux :

$$\|f - g\|_p^p \leqslant 2^p\left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \|\frac{f+g}{2}\|_p^p\right). \tag{29.669}$$

EQooVNHSooPXiENC

Voilà une bonne chose de prouvée. Nous pouvons maintenant passer au vif du sujet.

Soit une suite w_j dans W telle que $\|u_0 - w_j\| \to d(u_0, W)$. Trois choses à savoir sur cette suite :

(2a) Une telle suite existe parce que $d(u_0, W)$ est défini comme un infimum.

[74] Définition 29.151.
[75] Lemme 29.106.
[76] Théorème 12.1 en remarquant que $(z_1, z_2) \mapsto z_1\bar{z}_2$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}$.

(2b) Rien ne garantit qu'elle converge.

(2c) Même si elle convergeait, rien ne garantirait que la limite soit encore dans W.

Le troisième point est facile à régler : vu que W est fermé par hypothèse, une suite convergente contenue dans W a sa limite dans W. Nous allons régler la convergence de w_j en prouvant qu'elle est de Cauchy.

Remarquons que W est vectoriel, donc $(w_j + w_k)/2$ est dans W pour tout j et k ; donc

$$\| \frac{w_j + w_k}{2} - u_0 \| \geqslant d(u_0, W). \tag{29.670}$$

En tenant compte de cela, nous écrivons l'inégalité (29.669) avec $f = w_j - u_0$ et $g = w_k - u_0$:

$$\|f - g\|_p^p = \|w_j - w_k\|_p^p \leqslant 2^p \left(\frac{\|w_j - u_0\|^p + \|w_k - u_0\|^p}{2} - d(u_0, W) \right). \tag{29.671}$$

Soit $\epsilon > 0$ et $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon$ tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 < \epsilon$. Il existe un N tel que si $j, k > N$ alors $\|w_j - u_0\|^p \leqslant d(u_0, W)^p + \epsilon_1$ et $\|w_k - u_0\|^p \leqslant d(u_0, W)^p + \epsilon_2$. Pour de telles valeurs de j et k, nous avons

$$\|w_j - w_k\|_p \leqslant 2 \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \right) < 2\epsilon^{1/p}. \tag{29.672}$$

Donc la suite (w_j) est de Cauchy.

L'espace L^p étant complet par le théorème 29.55, nous en déduisons que (w_j) converge dans L^p. Mais comme W est fermé, nous avons $w_j \xrightarrow{L^p} w \in W$.

En termes de normes, nous avons

$$\|w - u_0\| = \lim_j \|w_j - u_0\| = d(W, u_0). \tag{29.673}$$

□

j

29.13 Jauge

DEFooRNZBooLSdowc

Définition 29.157 ([274]).
*Soit un ouvert connexe C dans un espace vectoriel topologique E. Nous supposons que $0 \in C$. La **jauge** de C est l'application*

$$\begin{aligned} j_C \colon E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf\{t > 0 \text{ tel que } \frac{x}{t} \in C\}. \end{aligned} \tag{29.674}$$

LEMooEUETooMAAnNO

Lemme 29.158 ([1]).
Soit un ouvert connexe C dans un espace vectoriel topologique E. Nous supposons que $0 \in C$, et nous considérons la jauge $j_C \colon E \to \mathbb{R}$. Nous posons

$$A_x = \{t > 0 \text{ tel que } \frac{x}{t} \in C\}. \tag{29.675}$$

Nous avons :

ITEMooORQGooUkHWKJ

(1) $]j_C(x), \infty[\subset A_x$.

ITEMooFZSGooLuyzcw

(2) Si $x_0 \notin C$, alors $j_C(x_0) \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $t \in A_x$. Vu que C est connexe et contient 0, vu que $x/t \in C$ nous avons

$$(1 - \lambda)0 + \lambda \frac{x}{t} \in C \tag{29.676}$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$. C'est-à-dire que $(\lambda/t)x \in C$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Donc $(t/\lambda) \in A_x$, et donc $[t, \infty[\subset A_x$. Soit maintenant $t > j_C(x)$. Alors il existe $t_0 \in [j_C(x), t[\cap A_x$. Dans ce cas, $t \in [t_0, \infty[\subset A_x$. Cela prouve le point (1).

Nous passons au point (2). Soit $x_0 \notin C$. Si $j_C(x_0) < 1$, alors nous avons $1 \in A_{x_0}$ par le point (1). Et si $1 \in A_{x_0}$, alors $x_0 \in C$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $j_C(x_0) \leqslant 1$. □

PROPooEBPPooDWUwLx

Proposition 29.159 ([274]).
Soient un espace vectoriel topologique E, un ouvert connexe $C \subset E$ tel que $0 \in C$. Nous la jauge $j_C : E \to \mathbb{R}$ a les propriétés suivantes.

ITEMooAOUUooGhrpk

(1) Pour tout $x \in E$ et $\lambda > 0$ nous avons $f_C(\lambda x) = \lambda j_C(x)$.

ITEMooQWIQooMRramc

(2) Pour tout $x, y \in E$ nous avons $j_C(x + y) \leqslant j_C(x) + j_C(y)$.

ITEMooKGNFooKAEUPH

(3) Si C est symétrique[77], alors j_C est une seminorme[78]

Démonstration. Nous posons

$$A_x = \{t > 0 \text{ tel que } \frac{x}{t} \in C\} \tag{29.677}$$

et $A = A_x$, $B = A_{\lambda x}$.

(1) $\underline{B = \lambda A}$ Soit $t \in B$. Alors $x/(t/\lambda) \in C$. Et donc $t/\lambda \in A$ et donc $t \in \lambda A$. De même si $t \in A$, alors $x/t \in C$ et donc $(\lambda x)/(\lambda t) \in C$ de telle sorte que $\lambda t \in B$.

(2) **infimum, point (1)** La proposition 4.87 dit que $\inf(B) = \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$. Cela prouve le point (1).

(3) **Pour (3)** Nous savons par le lemme 29.158(1) $]j_C(x), \infty[\subset A_x$. Si $\epsilon > 0$, nous avons donc $j_C(x) + \epsilon \in A_x$ et donc

$$\frac{x}{j_C(x) + \epsilon} \in C, \quad \frac{y}{j_C(y) + \epsilon} \in C. \tag{29.678}$$

Comme C est convexe, nous pouvons prendre une combinaison convexe de ces deux éléments. L'astuce est d'écrire

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C \tag{29.679}$$

avec

$$\lambda = \frac{j_C(x) + \epsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\epsilon}, \tag{29.680}$$

et

$$1 - \lambda = \frac{j_C(y) + \epsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\epsilon}. \tag{29.681}$$

Un simple calcul montre que

$$\frac{x + y}{j_C(x) + j_C(y) + 2\epsilon} \in C, \tag{29.682}$$

c'est-à-dire $j_C(x) + j_C(y) + 2\epsilon \in A_{x+y}$ ou encore que

$$j_C(x + y) = \inf(A_{x+y}) \leqslant j_C(x) + j_C(y) + 2\epsilon. \tag{29.683}$$

Vu que cette inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$, nous avons $j_C(x + y) \leqslant j_C(x) + j_C(y)$.

(4) **Pour (3)** Nous devons prouver que $j_C(\lambda x) = |\lambda| j_C(x)$ pour tour λ. Nous l'avons déjà prouvé pour $\lambda > 0$. Vu que $0/t = 0 \in C$ pour tout $t > 0$, nous avons $j_C(0) = 0$ et donc $j_C(\lambda x) = |\lambda| j_C(x)$ pour $\lambda = 0$. Reste à voir cette égalité pour $-\lambda$ lorsque $\lambda > 0$.

Vu que C est symétrique, $A_x = A_{-x}$ et alors

$$j_C(-\lambda x) = \inf\{t > 0 \text{ tel que } \frac{-\lambda x}{t} \in C\} \tag{29.684a}$$

$$= \inf\{t > 0 \text{ tel que } \frac{\lambda x}{t} \in C\} \tag{29.684b}$$

$$= \lambda j_C(x). \tag{29.684c}$$

□

[77] C'est-à-dire que $-x \in C$ si et seulement si $x \in C$.
[78] Définition 9.399.

29.14 Théorèmes de Hahn-Banach

29.14.1 Applications $\mathbb{R}$-linéaires et $\mathbb{C}$-linéaires

LEMooBZHIooSQJSnM

Lemme 29.160 ([784, 785]).
Soit un espace vectoriel X sur $\mathbb{C}$. Nous considérons[79] *l'application*

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R}) &\to \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})\\ f &\mapsto \big[x\mapsto f(x)-if(ix)\big].\end{aligned}\tag{29.685}$$

EQooLYYGooJfKIfu

(1) Cette application est bien définie.

(2) Elle est une bijection.

ITEMooNVKBooIGhzWM

(3) Elle vérifie $\|\psi(f)\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})}=\|f\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})}$.

ITEMooTFWOooIIhcnZ

(4) Si $g\in\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})$ se décompose en $g(x)=u(x)+iv(x)$ où u et v sont à valeurs réelles, alors $g=\psi(u)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Bien définie** Nous devons avant tout prouver que (29.685) a un sens : si $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$, alors nous devons prouver que $\psi(f)\in\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})$, c'est-à-dire que $\psi(f)$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Soient donc $x,y\in X$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ de telle sorte que $\alpha+\beta i$ soit un élément générique de $\mathbb{C}$. Prouver que

$$\psi(f)(x+y)=\psi(f)(x)+\psi(f)(y)\tag{29.686}$$

est un simple calcul. Ensuite

$$\begin{aligned}\psi(f)\big((\alpha+i\beta)x\big)&=f\big((\alpha+i\beta)x\big)-if\big(i(\alpha+i\beta)x\big)&(29.687a)\\ &=\alpha f(x)+\beta f(ix)-i\alpha f(ix)-i(-\beta)f(x)&(29.687b)\\ &=(\alpha+i\beta)\big(f(x)-if(ix)\big)&(29.687c)\\ &=(\alpha+i\beta)\psi(f)(x).&(29.687d)\end{aligned}$$

(2) **ψ est injective** Soient $f,g\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$ telles que $\psi(f)=\psi(g)$. Nous avons l'égalité

$$f(x)-if(ix)=g(x)-ig(ix),\tag{29.688}$$

EQooOFWHooIJutnV

qui est une égalité dans $\mathbb{C}$. En sachant que les nombres $f(x)$, $f(ix)$, $g(x)$ et $g(ix)$ sont des réels, nous séparons les parties réelles et imaginaires dans (29.688) et nous trouvons $f(x)=g(x)$ et $f(ix)=g(ix)$. Chacune de ces deux égalités nous assurent que $f=g$.

(3) **ψ est surjective** Soit $g\in\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})$. Nous séparons ses parties réelles et imaginaires :

$$g(x)=g_1(x)+ig_2(x).\tag{29.689}$$

Avec $g_1,g_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$. Nous allons prouver que $g=\psi(g_1)$.

Ensuite, utilisant la $\mathbb{C}$-linéarité de g pour calculer $g(ix)$ de deux façons différentes. D'une part

$$g(ix)=g_1(ix)+ig_2(ix),\tag{29.690}$$

EQooRMJAooQlTJLV

et d'autre part

$$g(ix)=i\big(g_1(x)+ig_2(x)\big).\tag{29.691}$$

EQooCJQHooFVJXGa

En égalisant les parties réelles et imaginaires de (29.690) et de (29.691),

$$\begin{aligned}g_1(x)&=g_2(ix)&(29.692a)\\ g_2(x)&=-g_1(ix),&(29.692b)\end{aligned}$$

et en particulier $g_1(ix)=g_2(-x)$.

Nous pouvons maintenant calculer

$$\begin{aligned}\psi(g_1)(x)&=g_1(x)-ig_1(ix)&(29.693a)\\ &=g_1(x)-ig_2(-x)&(29.693b)\\ &=g_1(x)+ig_2(x)&(29.693c)\\ &=g(x).&(29.693d)\end{aligned}$$

[79] Voir la définition 6.33 pour les notations.

(4) **Norme** Nous prouvons maintenant le point (3) qui prétend que $\|\psi(f)\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})} = \|f\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})}$. Nous allons montrer les inégalités dans les deux sens.

(4a) $\|f\| \leqslant \|\psi(f)\|$

D'abord nous prouvons que $\|f\| \leqslant \|\psi(f)\|$. Pour cela, nous considérons $x \in X$, et nous écrivons

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - if(ix)| = |\psi(f)x| \tag{29.694}$$

dont la première inégalité est vraie parce que $f(x)$ et $f(ix)$ sont réels. Avec cette inégalité nous avons tout de suite

$$\sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |\psi(f)x|. \tag{29.695}$$

(4b) $\|f\| \geqslant \|\psi(f)\|$

Nous passons maintenant à l'autre sens. Soit $x \in X$. Nous commençons par trouver $\alpha \in S^1$ (c'est-à-dire $|\alpha| = 1$) tel que $f(\alpha i x) = 0$. Si $f(ix) = 0$, alors $\alpha = 1$ fait l'affaire. Sinon, supposons $f(ix) \neq 0$, et considérons l'application

$$\begin{aligned} s\colon]0, 2\pi[&\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f\big(\varphi(t)ix\big). \end{aligned} \tag{29.696}$$

où φ est la bijection continue de la proposition 20.66(1). D'une part, pour $t = \pi$, nous avons

$$s(\pi) = f\big(\varphi(\pi)ix\big) = f(-ix) = -f(ix), \tag{29.697}$$

et d'autre part, pour $t = 0$ nous avons

$$s(0) = f\big(\varphi(0)ix\big) = f(ix) = f(ix). \tag{29.698}$$

Comme nous avons supposé que $f(ix) \neq 0$ le théorème des valeurs intermédiaires 11.92 appliqué à s donne un $t \in]0, \pi[$ tel que $s(t_0) = 0$. En posant $\alpha = \varphi(t_0)$ nous avons le α qu'il nous fallait. Armés de ce α, nous montrons que $\|\psi(f)\| \leqslant \|f\|$. Nous avons

$$\begin{aligned} |\psi(f)x| &= |\alpha||\psi(f)x| && && \text{(29.699a)} \\ &= |\psi(f)(\alpha x)| && \psi(f) \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire} && \text{(29.699b)} \\ &= |f(\alpha x) - if(i\alpha x)| && && \text{(29.699c)} \\ &= |f(\alpha x)|. && && \text{(29.699d)} \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que pour tout $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$, il existe $y \in X$ tel que $\|y\| = 1$ et $|\psi(f)x| = |f(y)|$. En l'occurrence, $y = \alpha x$. Notez que α est une fonction de x. Nous avons donc

$$\sup_{\|y\|=1} |f(y)| \geqslant \sup_{\|x\|=1} |\psi(f)x|, \tag{29.700}$$

autrement dit $\|f\| \geqslant \|\psi(f)\|$.

(5) **Décomposition** Nous prouvons le point (4). Supposons $g(x) = u(x) + iv(x)$. Nous avons $g(ix) = ig(x)$ par $\mathbb{C}$-linéarité de g. Donc

$$u(ix) + iv(ix) = i\big(u(x) + iv(x)\big), \tag{29.701}$$

c'est-à-dire $u(ix) + iv(ix) = iu(x) - v(x)$. En égalisant les partie imaginaires, $v(x) = -u(ix)$. En remettant dans l'expression de g,

$$g(x) = u(x) + iv(x) = u(x) + i\big(-u(ix)\big) = u(x) - iu(ix) = \psi(u)x, \tag{29.702}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

LEMooUFMFooEXecXE

Lemme 29.161 ([784]).
Soient un espace vectoriel X sur $\mathbb{C}$ ainsi qu'une seminorme[80] *p. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$. Nous avons*

$$|\psi(f)(x)| \leqslant p(x) \quad \forall x \in X \tag{29.703}$$

si et seulement si

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad \forall x \in X \tag{29.704}$$

[80] Définition 9.399.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ vérifie $|\psi(f)(x)| \leqslant p(x)$ pour tout x. L'observation à faire est $f(x) = \operatorname{Re}\big(\psi(f)(x)\big)$. Nous avons alors[81]

$$|f(x)| = |\operatorname{Re}\big(\psi(f)(x)\big)| \leqslant |\psi(f)(x)| \leqslant p(x). \tag{29.705}$$

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $|f(x)| \leqslant p(x)$ pour tout x. Soit $x \in X$. Si $\psi(f)(x) = 0$, alors nous avons bien $|\psi(f)(x)| \leqslant p(x)$ parce qu'une seminorme est toujours positive. Nous supposons donc que $\psi(f)(x) \neq 0$.

La décomposition polaire (proposition 20.67) du nombre complexe $\psi(f)x$ donne un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(f)x = e^{i\theta}|\psi(f)x|$. Donc

$$|\psi(f)(x)| = e^{-i\theta}\psi(f)(x) = \psi(f)(e^{-i\theta}x). \tag{29.706}$$ EQooFYVFooQvQTHz

Ces égalités montrent entre autres que $\psi(f)(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R}^+$; et en particulier, il est égal à sa partie réelle. Vu la définition (29.685), ça nous dit que

$$\psi(f)(e^{-i\theta}x) = f(e^{-i\theta}x). \tag{29.707}$$

Nous pouvons alors continuer les égalités (29.706) en mettant des normes partout :

$$|\psi(f)(x)| = |\psi(f)(e^{-i\theta}x)| = |f(e^{-i\theta}x)| \leqslant p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x). \tag{29.708}$$

□

29.14.2 Hahn-Banach, théorème d'extension dominée

THOooXALCooFrkvDo

Théorème 29.162 (Hahn-Banach, extension dominée cas réel[786, 274])**.**
Soit E, un espace vectoriel réel et une application $p\colon E \to \mathbb{R}$ satisfaisant[82]

(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda > 0$,

(2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.

Soit de plus $M \subset E$ un sous-espace vectoriel muni d'une application $g\colon M \to \mathbb{R}$ vérifiant $g(m) \leqslant p(m)$ pour tout $m \in M$. Alors il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que

(1) L'application f étend g : $f(m) = g(m)$ pour tout $m \in M$,

(2) L'application f reste dominée par p : $f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. Si h est une application linéaire définie sur un sous-espace de E, nous notons D_h ledit sous-espace.

(1) **Un ensemble inductif**

Nous considérons P, l'ensemble des fonctions linéaires suivant

$$P = \left\{ h\colon D_h \to \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} M \subset D_h \\ h(m) = g(m) & \forall m \in M \\ h(x) \leqslant p(x) & \forall x \in D_h \end{cases} \right\} \tag{29.709}$$

Cet ensemble est non vide parce que g est dedans. Nous le munissons de la relation d'ordre $h_1 \leqslant h_2$ si et seulement si $D_{h_1} \subset D_{h_2}$ et h_2 prolonge h_1. Nous montrons à présent que P est un ensemble inductif. Soit un sous-ensemble totalement ordonné $Q \subset P$; nous définissons une fonction h de la façon suivante. D'abord $D_h = \sup_{l \in Q} D_l$ et ensuite

$$\begin{aligned} h\colon D_h &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto l(x) \quad \text{si } x \in D_l \end{aligned} \tag{29.710}$$

Cela est bien défini parce que si $x \in D_l \cap D_{l'}$ alors, vu que Q est totalement ordonné (i.e. $l \leqslant l'$ ou $l' \leqslant l$), on a obligatoirement $D_l \subset D_{l'}$ et l' qui prolonge l (ou le contraire). Donc h est un majorant de Q dans P parce que $h \geqslant l$ pour tout $l \in Q$. Cela montre que P est inductif (définition 1.41). Le lemme de Zorn 1.42 nous dit alors que P possède un élément maximal f qui va être la réponse à notre théorème.

[81] Dans [784], l'auteur sépare le calcul en deux parties : une majoration pour $f(x)$ et une pour $-f(x)$. Je ne vois pas où est le mal à la faire d'un seul coup.

[82] Ce n'est pas tout à fait une seminorme (définition 9.399) à cause de la valeur absolue. Le théorème 29.164 parlera pour les vraies seminormes, et pour les espaces sur $\mathbb{C}$.

(2) **Le support de f**

La fonction f est dans P ; donc $f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in D_h$ et $f(m) = g(m)$ pour tout $m \in M$. Pour terminer nous devons montrer que $D_f = E$. Supposons donc que $D_f \neq E$ et prenons $x_0 \notin D_f$. Nous allons contredire la maximalité de f en considérant la fonction h donnée par $D_h = D_f + \mathbb{R}x_0$ et

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \tag{29.711}$$

où α est une constante que nous allons fixer plus tard.

Nous commençons par prouver que h est dans P. Nous devons prouver que

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0) \tag{29.712}$$

Pour cela nous allons commencer par fixer α pour avoir les relations suivantes :

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leqslant p(x + x_0) & \text{(29.713a)} \\ f(x) - \alpha \leqslant p(x - x_0) & \text{(29.713b)} \end{cases}$$

pour tout $x \in D_f$. Ces relations sont équivalentes à demander α tel que

$$\begin{cases} \alpha \leqslant p(x + x_0) - f(x) & \text{(29.714a)} \\ \alpha \geqslant f(x) - p(x - x_0) & \text{(29.714b)} \end{cases}$$

Nous nous demandons donc si il existe un α qui satisfasse

$$\sup_{y \in D_f} \big(f(y) - p(y - x_0)\big) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{z \in D_f} \big(p(z + x_0) - f(z)\big). \tag{29.715}$$

Ou encore nous devons prouver que pour tout $y, z \in D_f$,

$$p(z + x_0) - f(x) \geqslant f(y) - p(y - x_0) \geqslant 0. \tag{29.716}$$

Par les propriétés de p et de f,

$$p(z + x_0) + p(y - x_0) - f(z) - f(y) \geqslant p(z + y) - f(z + y) \geqslant 0. \tag{29.717}$$

La dernière inégalité est le fait que $f \in P$. Un choix de α donnant les inéquations (29.713) est donc possible.

À partir des inéquations (29.713) nous obtenons la relation (29.712) de la façon suivante. Si $t > 0$ nous multiplions l'équation (29.713a) par t :

$$tf(x) + t\alpha \leqslant tp(x + x_0). \tag{29.718}$$

Et nous écrivons cette relation avec x/t au lieu de x en tenant compte de la linéarité de f :

$$f(x) + t\alpha \leqslant tp\big(\frac{x}{t} + x_0\big) = p(x + tx_0). \tag{29.719}$$

Avec $t < 0$, c'est similaire, en faisant attention au sens des inégalités.

Nous avons donc construit $h \colon D_h \to \mathbb{R}$ avec $h \in P$, $D_f \subset D_h$ et $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Cela pour dire que $h > f$, ce qui contredit la maximalité de f. Le domaine de f est donc E tout entier.

La fonction f est donc une fonction qui remplit les conditions.

□

Lemme 29.163 ([312]).
Soient un espace vectoriel complexe X, et une application linéaire $f \colon X \to \mathbb{C}$. Il existe une application $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R})$ telle que

(1) Pour tout $x \in X$, nous avons

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \tag{29.720}$$

(2) Nous avons égalité des normes[83]

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})} = \|u\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})}. \tag{29.721}$$

[83] Pas encore démontrée ; mais si vous savez le faire, écrivez-moi.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)**

Nous décomposons, pour chaque $x \in X$, l'élément $f(x)$ en parties réelles et imaginaires :

$$f(x) = u(x) + iv(x). \tag{29.722}$$

EQooZJZIooBQxfEg

Il ne reste plus qu'à trouver le lien entre u et v. Pour cela, nous écrions $f(ix) = if(x)$ en substituant $f(x)$ et $f(ix)$ par leurs valeurs en termes de u et v :

$$u(ix) + iv(ix) = iu(x) - v(x). \tag{29.723}$$

En égalisant les parties réelles, nous avons $u(ix) = -v(x)$ et donc bien

$$f(x) = u(x) + iv(x) = u(x) - iu(ix). \tag{29.724}$$

EQooZUTLooVzwRDM

Nous prouvons maintenant que u est $\mathbb{R}$-linéaire. Il suffit de considérer $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'écrire $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ en substituant (29.722) pour $f(\lambda x)$ et $f(x)$:

$$u(\lambda x) + iv(\lambda x) = \lambda\big(u(x) + iv(x)\big). \tag{29.725}$$

En égalisant encore les parties réelles, nous avons $u(\lambda x) = \lambda u(x)$. Nous faisons de même pour prouver que $u(x + y) = u(x) + u(y)$.

(2) **Pour (2)**

□

THOooVQLJooWuBMoZ

Théorème 29.164 (Hahn-Banach complexe[312])**.**
Soient un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ (qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et une seminorme $p\colon X \to \mathbb{R}$. Soient un sous-espace vectoriel M de X ainsi qu'une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(M, \mathbb{K})$ telle que

$$|\ell(m)| \leqslant p(m)\ \forall m \in M. \tag{29.726}$$

Alors il existe une extension linéaire $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ telle que

(1) $f(m) = \ell(m)$ pour tout $m \in M$,

(2) $|f(x)| \leqslant p(x)$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. Nous considérons X comme espace vectoriel réel (de dimension double de celle de X comme espace vectoriel complexe). Là-dedans, l'application p vérifie $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$. D'autre part nous décomposons l'application $\ell\colon M \to \mathbb{C}$ en parties réelles et imaginaires :

$$\ell(x) = u(x) + iv(x), \tag{29.727}$$

où $u\colon M \to \mathbb{R}$ est une application vérifiant, pour tout $m \in M$,

$$u(m) \leqslant |u(m)| \leqslant |\ell(m)| \leqslant p(m). \tag{29.728}$$

Donc le théorème en version réelle 29.162 s'applique et il existe une extension $R\colon X \to \mathbb{R}$ de u qui vérifie $R \leqslant p$ sur X. Nous posons alors

$$f(x) = R(x) - iR(ix). \tag{29.729}$$

En vertu du lemme 29.160, cela est une application $\mathbb{C}$-linéaire sur X, et nous avons $f = \ell$ sur M parce que leurs parties réelles sont égales.

De plus nous avons $R \leqslant p$ et donc $|f| \leqslant p$ par le lemme 9.403. □

29.14.3 Hyperplan séparateur

DEFooQUDEooMrgcCV

Définition 29.165 (Hyperplan qui sépare)**.**
Soit E un espace vectoriel topologique réel ainsi que A, B des sous-ensembles de E.

*(1) Nous disons que l'hyperplan d'équation $f = \alpha$ **sépare au sens large** les parties A et B si $f(x) \leqslant \alpha$ pour tout $x \in A$ et $f(x) \geqslant \alpha$ pour tout $x \in B$.*

(2) *La séparation est* ***au sens strict*** *si il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$f(x) \leqslant \alpha - \epsilon \qquad \text{pour tout } x \in A \tag{29.730a}$$
$$f(x) \geqslant \alpha + \epsilon \qquad \text{pour tout } x \in B. \tag{29.730b}$$

Si X est un espace vectoriel topologique complexe, nous disons que A et B sont ***strictement séparés*** *si il existe $\phi \in X'$ et $\alpha > 0$ tels que*

$$\operatorname{Re}(\phi)(a) > \alpha > \operatorname{Re}(\phi)(b) \tag{29.731}$$

pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

PROPooSKBXooQDOmcL

Proposition 29.166 ([274]).
Soit un espace vectoriel topologique réel E. Soit un ouvert connexe non vide $C \subset E$. Soit $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E'$[84] tel que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Si $0 \in C$** Nous commençons par supposer que $0 \in C$, de telle sorte à pouvoir considérer la jauge[85] $j_C : E \to \mathbb{R}$. Nous posons $M = \mathbb{R}x_0$ et

$$\begin{aligned} g : M &\to \mathbb{R} \\ tx_0 &\mapsto t. \end{aligned} \tag{29.732}$$

Vu que $x_0 \notin C$, le lemme 29.158(2) dit que $j_C(x_0) \geqslant 1 = g(x_0)$. Nous multiplions cette inégalité par $t \geqslant 0$ pour obtenir $tj_C(x_0) \geqslant tg(x_0)$. Vu que $tj_C(x_0) = j_C(tx_0)$ (proposition 29.159(1)), et que $tg(x_0) = g(tx_0)$, nous avons

$$j_C(tx_0) \geqslant g(tx_0) \tag{29.733}$$

EQooYSVTooFKJnbg

pour tout $t \geqslant 0$. Si $t < 0$, alors nous avons $j_C(tx_0) \geqslant 0$ et $g(tx_0) = t < 0$. Donc l'inégalité (29.733) est valide pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous avons donc $j_C \geqslant g$ sur M. Le théorème 29.162 dit qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tel que

(1a) $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in M$.

(1b) $f(x) \leqslant j_C(x)$ pour tout $x \in E$.

Pour $x \in C$ en particulier nous avons $f(x) \leqslant j_C(x) < 1 = f(x_0)$. Nous devons encore prouver que f est continue. Pour cela nous considérons l'ouvert $U = C \cap (-C)$, qui est un voisinage ouvert de 0. Soit $x \in U$. Nous avons $f(x) \leqslant j_C(x) < 1$ parce que $x \in C$, mais aussi $f(-x) \leqslant j_C(-x) < 1$ parce que $-x \in C$. Vu que f est linéaire, l'inégalité $f(-x) < 1$ donne $f(x) > -1$. Au final nous avons prouvé que

$$f(x) \in]-1, 1[\tag{29.734}$$

pour tout $x \in U$. La proposition 9.303 dit qu'alors f est continue.

(2) **Si $0 \notin C$** Enfin nous prouvons le cas où 0 n'est pas dans C. Soit $c \in C$. Nous posons $C' = C - c$ et $x_0' = x_0 - c$ de telle sorte que $0 \in C'$ et $x_0' \in C'$. Par la première partie, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) < f(x_0')$ pour tout $x \in C'$. Nous posons ensuite

$$f_1(x) = f(x - c). \tag{29.735}$$

Nous avons alors, pour tout $x \in C$ que

$$f_1(x) = f(x - c) < f(x_0') = f(x_0 - c) = f_1(x_0). \tag{29.736}$$

parce que $x - c \in C'$.

L'application f_1 est encore continue et linéaire. Elle répond donc à la question.

□

ThoSAJjdZc

Théorème 29.167 (Hahn-Banach, première forme géométrique[274]).
Soit E un espace vectoriel topologique et A, B deux convexes non vides disjoints de E. Si A est ouvert, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large[86].

[84] E' est l'ensemble des applications linéaires continues sur E à valeurs dans le corps, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ ici.
[85] Définition 29.157.
[86] Définition 29.165.

Démonstration. Vu que A et B sont convexes, la proposition 9.230 dit que $A-B$ est convexe. De plus $A-B$ est ouvert et ne contient pas zéro. Nous pouvons donc lui appliquer la proposition 29.166 : il existe $f\in E'$ tel que $f(x)<f(0)=0$ pour tout $x\in A-B$. Autrement dit, pour tout $a,b\in A\times B$ nous avons $f(a)<f(b)$. Cela implique

$$\sup\{f(a)\text{ tel que }a\in A\}\leqslant\inf\{f(b)\text{ tel que }b\in B\}. \tag{29.737}$$

En posant $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$\sup\{f|_A\}\leqslant\alpha\leqslant\inf\{f|_B\}, \tag{29.738}$$

l'hyperplan $\{f=\alpha\}$ sépare bien A et B au sens large. □

THOooEQOvGoPdIQfM

Théorème 29.168 (Hahn-Banach, seconde forme géométrique[787])**.**
Soient un espace vectoriel topologique réel ou complexe localement convexe[87] *X ainsi que des parties A, B qui sont*

(1) des convexes

(2) non vides

(3) disjoints

(4) A compact et B soit fermé.

Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement[88] *A et B.*

Dans le cas complexe, cela signifie qu'il existe $\phi\in X'$ et $\alpha>0$ tels que

$$\operatorname{Re}(\phi)(a)>\alpha>\operatorname{Re}(\phi)(b) \tag{29.739}$$

EQooTYESooXLtukE

pour tout $a\in A$ et $b\in B$.

Démonstration. Nous séparons le cas réel du cas complexe.

(1) **Cas réel**

Vu que B est fermé, A est dans l'ouvert $X\setminus B$. Donc si $a\in A$, il existe un voisinage ouvert convexe de a inclus dans $X\setminus B$. Soit U_a un voisinage ouvert et convexe de 0 tel que $(a+U_a)\cap B=\varnothing$.

Vu que la fonction $(x,y)\mapsto x+y$ est continue, nous pouvons trouver un ouvert convexe V_a tel que $V_a+V_a\subset U_a$. L'ensemble $a+V_a$ est alors un voisinage ouvert de a et bien entendu $\bigcup_a(a+V_a)$ recouvre A qui est compact. Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire que nous considérons $a_1,\dots,a_n\in A$ tels que

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}(a_i+V_{a_i}). \tag{29.740}$$

Nous posons alors

$$V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{a_i}. \tag{29.741}$$

Cet ensemble est non vide parce et il contient un voisinage de zéro parce que c'est une intersection finie de voisinages de zéro. Soit $x\in A+V$. Il existe i tel que

$$x\in a_i+U_{a_i}+V\subset a_i+V_{a_i}+V_{a_i}\subset a_i+U_{a_i}\subset X\setminus B. \tag{29.742}$$

Donc $(A+V)\cap B=\varnothing$. L'ensemble $A+V$ est alors un ouvert convexe disjoint de B. Par la première forme géométrique du théorème de Hahn-Banach 29.167 nous avons un hyperplan qui sépare $A+V$ de B au sens large : il existe $f\in X'\setminus\{0\}$ tel que $f(a)+f(v)\leqslant f(b)$ pour tout $a\in A$, $v\in V$ et $b\in B$.

Il suffit donc de trouver un $v\in V$ tel que $f(v)\neq0$ pour avoir la séparation au sens strict. Cela est facile : V étant un voisinage de zéro et f étant linéaire, si elle était nulle sur V, elle serait nulle sur X.

(2) **Cas complexe**

L'espace X est complexe. Nous considérons E l'espace réel correspondant (proposition 9.245). Nous lui appliquons le cas réel : il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ et une application linéaire $f\colon X\to\mathbb{R}$ telle que

$$f(a)<\alpha<f(b) \tag{29.743}$$

[87] Définition 9.269.
[88] Hyperplan strictement séparateur, définition 29.165.

pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Notez que $f \in E'$ et donc $\|f\| < \infty$ (bornée si et seulement si continue, proposition 12.98). Nous considérons maintenant l'application linéaire

$$\phi(x) = f(x) - if(ix) \tag{29.744}$$

décrite dans la proposition 9.246. C'est une application continue parce que $\|\phi\| = \|f\| < \infty$. De plus $\text{Re}(\phi) = f$ et ϕ vérifie donc les inégalités 29.739.

□

CORooHTZVooFhgrSN

Corolaire 29.169 ([274]).
Soit un espace vectoriel réel localement convexe. Soit un sous-espace vectoriel F tel que $\bar{F} \neq E$. Alors il existe une application $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que $f = 0$ sur F.

Démonstration. Soit $a \in E$ avec $a \notin \bar{F}$. Vu que le singleton $\{a\}$ est compact et que $\bar{F}$ est fermé, le théorème de Hahn-Banach 29.168 dit qu'il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \neq 0$ tel que $f < \alpha$ sur $\bar{F}$ et $f(a) > \alpha$.

Étant donné que F est vectoriel et que f est linéaire, avoir $f(x) < \alpha$ pour tout x dans F implique d'avoir $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$. En effet si $f(x) \neq 0$, il existe un λ tel que $f(\lambda x) > \alpha$ ($\mathbb{R}$ est archimédien, théorème 4.59). □

29.14.4 Prolongement de fonctionnelles (dimension finie)

Nous allons prouver quelques lemmes qui permettent de prolonger des fonctionnelles d'un sous-espace vers un sous-espace contenant un nombre fini de dimensions en plus.

LEMooHWSJooGVmIPV

Lemme 29.170 ([788]).
Soient un espace vectoriel réel normé X ainsi qu'un sous-espace M. Soient $\ell \in \mathcal{L}(M, \mathbb{R})$ de norme finie, et $x_1 \in X \setminus M$. On pose $M_1 = \text{Span}\{M, x_1\}$. Alors il existe $\ell_1 \in \mathcal{L}(M_1, \mathbb{R})$ tel que

(1) $\ell_1(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in M$,

(2) $\|\ell_1\|_{\mathcal{L}(M_1,\mathbb{R})} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})}$

Démonstration. Si $\ell = 0$, alors c'est facile : on prend $\ell_1 = 0$. Nous commençons par supposer que $\|\ell\| = 1$; nous ferons le cas général ensuite.

(1) **Deux fonctions** Nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f_+ \colon M &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \|x_1 + z\| - \ell(z) \end{aligned} \tag{29.745}$$

et

$$\begin{aligned} f_- \colon M &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto -\|x_1 + z\| - \ell(z). \end{aligned} \tag{29.746}$$

Pour tout $z_1, z_2 \in M$ nous avons

$$\begin{aligned} f_+(z_1) - f_-(z_2) &= \|x_1 + z_1\| - \ell(z_1) + \|x_1 + z_2\| + \ell(z_2) && \text{(29.747a)} \\ &= \|x_1 + z_1\| + \|x_1 + z_2\| - \ell(z_1 - z_2) && \text{(29.747b)} \\ &\geqslant \|(x_1 + z_1) - (x_1 + z_2)\| - \ell(z_1 - z_2) && \text{(29.747c)} \\ &= \|z_1 - z_2\| - \ell(z_1 - z_2) && \text{(29.747d)} \\ &\geqslant 0 && \text{(29.747e)} \end{aligned}$$

parce que $\|\ell\| = 1$. Nous en déduisons que $f_+(z_1) \geqslant f_-(z_2)$.

(2) **Un entre les deux**

En posant

$$c_- = \sup_{z \in M} \big(- \|x_1 + z\| - \ell(z) \big) \tag{29.748a}$$

$$c_+ = \inf_{z \in M} \big(\|x_1 + z\| - \ell(z) \big), \tag{29.748b}$$

nous avons $c_- \leqslant c_+$. Nous choisissons $c_1 \in [c_-, c_+]$.

(3) **La définition** Si $x \in M_1 = \operatorname{Span} M, x_1$, alors il existe $y \in M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda x_1 + y. \tag{29.749}$$

Nous posons alors

$$\ell_1(x) = \lambda c_1 + \ell(y). \tag{29.750}$$

Voilà qui définit notre ℓ_1. Nous devons prouver qu'elle satisfait $\|\ell_1\| = 1$ et $\ell_1(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in M$. La seconde condition est facile : si $x \in M$, alors $\lambda = 0$ dans (29.750) et nous avons bien $\ell_1(x) = \ell(x)$.

Pour la condition sur la norme, nous allons devoir un peu travailler.

(4) $|\ell_1(x)| \leqslant \|x\|$ **pour tout** $x \in M_1$ Soit $x \in M_1$. Nous avons $x = \lambda x_1 + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in M$. i

(4a) **Si $\lambda = 0$** Alors $x \in M$ et $|\ell_1(x)| = |\ell(x)| \leqslant \|x\|$ parce que $\|\ell\| = 1$.

(4b) **Si $\lambda \neq 0$** Soient $z_1, z_2 \in M$. Par définition de c_1, c_+ et c_- nous avons les inégalités

$$-\|x_1 + z_1\| - \ell(z_1) \leqslant c_- \leqslant c_1 \leqslant c_+ \leqslant \|x_1 + z_2\| - \ell(z_2). \tag{29.751}$$

Nous écrivons ces inégalités pour $z_1 = z_2 = y/\lambda$:

$$-\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y/\lambda) \leqslant c_1 \leqslant \|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y/\lambda). \tag{29.752}$$

(4c) **Si $\lambda > 0$** Nous multiplions (29.752) par λ et nous profitons de la linéarité de ℓ :

$$-\|\lambda x_1 + y\| - \ell(y) \leqslant \lambda c_1 \leqslant \|\lambda x_1 + y\| + \ell(y), \tag{29.753}$$

donc

$$-\|\lambda x_1 + y\| \leqslant \underbrace{\lambda c_1 + \ell(y)}_{=\ell_1(\lambda x_1 + y)} \leqslant \|\lambda x_1 + y\| \tag{29.754}$$

Nous en déduisons que

$$|\ell(\lambda x_1 + y)| \leqslant \|\lambda x_1 + y\|, \tag{29.755}$$

ce qu'il fallait.

(4d) **Si $\lambda < 0$** Le calcul est le même, mais il faut faire attention à bien reverser les inégalités au bon moment, et en manipulant bien les valeur absolues. Nous avons par exemple

$$\lambda\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| = -\big\||\lambda|x_1 + \frac{|\lambda| y}{\lambda}\big\| = -\| - \lambda x_1 - y\| = -\|\lambda x_1 + y\|. \tag{29.756}$$

En multipliant encore (29.752) par λ, nous trouvons

$$-\lambda\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y) \geqslant \lambda c_1 \geqslant \lambda\|x_1 + \frac{y}{\lambda}\| - \ell(y). \tag{29.757}$$

qui devient

$$\|\lambda x_1 + y\| \geqslant \lambda c_1 + \ell(y) \geqslant -\|\lambda x_1 + y\|, \tag{29.758}$$

qui revient au même que (29.754).

(5) **Première conclusion** Nous avons prouvé que $|\ell_1(x)| \leqslant \|x\|$ pour tout x dans M_1. Cela signifie que $\|\ell_1\|_{M_1'} \leqslant 1$. Pour prouver que $\|\ell_1\| = 1$ nous prouvons l'inégalité inverse :

$$\|\ell_1\|_{M_1'} = \sup_{x \in M_1} \frac{|\ell_1(x)|}{\|x\|} \geqslant \sup_{x \in M} \frac{|\ell_1(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in M} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \|\ell\|_M = 1. \tag{29.759}$$

Nous en déduisons que $\|\ell_1\| = 1$ et cela termine la preuve dans le cas où $\|\ell\| = 1$.

Maintenant, si $\|\ell\| = a \neq 1$, nous considérons la forme linéaire $f = \ell/a$ qui satisfait $\|f\| = 1$. Par la partie déjà prouvée, nous définissons une extension $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}$ telle que $\|f_1\| = 1$.

Il suffit alors de poser $\ell_1 = af_1$, et nous avons le résultat. □

Ce lemme est également valable pour les complexes.

LEMooBYEGooRswAmh

Lemme 29.171 ([1]).
Soit un espace vectoriel normé X sur $\mathbb{C}$. Soit $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ de norme finie. Soient un sous-espace M de X ainsi qu'un élément $a \in X \setminus M$. Il existe $\ell_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a), \mathbb{C}\big)$ tel que

(1) $\ell_1(x) = \ell(x)$ *pour tout* $x \in M$,

(2) $\|\ell_1\| = \|\ell\|$.

Démonstration. Nous considérons l'application ψ du lemme 29.160. En posant $f = \psi^{-1}(\ell)$, nous avons $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M, \mathbb{R})$ vérifiant $\|\ell\| = \|f\|$.

L'espace X peut être vu comme vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le lemme 29.170 permet de prolonger f à

$$f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M, a), \mathbb{R}\big) \tag{29.760}$$

vérifiant $\|\ell\| = \|f\| = \|f_1\|$.

Vu que M est déjà un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, l'espace $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a)$ qui nous intéresse est donné par

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M, a, ia). \tag{29.761}$$

Nous pouvons donc utiliser une deuxième fois le lemme 29.170 avec le vecteur ia, et définir une extension

$$f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M, a, ia), \mathbb{R}\big) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a), \mathbb{R}\big) \tag{29.762}$$

vérifiant $\|\ell\| = \|f\| = \|f_1\| = \|f_2\|$.

En utilisant à nouveau le lemme 29.160, nous avons encore une extension

$$\psi(f_2) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(M, a), \mathbb{C}\big) \tag{29.763}$$

vérifiant $\|\ell\| = \|f\| = \|f_1\| = \|f_2\| = \|\psi(f_2)\|$.

Et voilà ! La fonctionnelle $\psi(f_2)$ est celle que nous voulions. □

29.14.5 Prolongement de fonctionnelles (dimension infinie)

Les lemmes 29.170 et 29.171 permettent de prolonger une forme linéaire une dimension réelle ou complexe à la fois. Rien ne nous permet de prolonger d'une infinité de dimensions d'un seul coup. Le théorème de Hahn-Banach va nous permettre de faire une infinité de dimension d'un coup à l'aide du lemme de Zorn.

THOooTZSSooBKfxXE

Théorème 29.172 (Hahn-Banach[788]).
Soit X, un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient un sous-espace vectoriel M, et une fonctionnelle linéaire $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ de norme finie. Il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \mathbb{K})$ telle que

(1) $f(x) = \ell(x)$ *pour tout* $x \in M$,

(2) $\|f\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{K})}$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires (N, f) telles que

(1) N est un sous-espace de X contenant M,

(2) $f \in \mathcal{L}(N, \mathbb{K})$

(3) $\|f\| = \|\ell\|$

(4) $f(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in M$.

Cet ensemble n'est pas vide parce que $(M, \ell) \in \mathcal{E}$. Nous mettons un ordre partiel sur $\mathcal{E}$ en posant $(N, f) \leqslant (N', f')$ si et seulement si $N \subset N'$ et $f'|_N = f$.

(1) **$\mathcal{E}$ est inductif** Nous commençons par prouver que $(\mathcal{E}, \leqslant)$ est un ensemble inductif[89]. Soit une partie $\mathcal{F}$ totalement ordonnée dans $\mathcal{E}$.

[89] Définition 1.41.

(1a) **L'espace vectoriel**
Nous commençons par poser

$$Y = \bigcup_{(N,f)\in\mathcal{F}} N. \tag{29.764}$$

Et nous prouvons que c'est un espace vectoriel. Soient $x, y \in Y$. Supposons $x \in N_1$ et $y \in N_2$. Vu que $\mathcal{F}$ est totalement ordonné, nous avons $N_1 \subset N_2$ (ou le contraire). Donc $x + y \in N_2 \subset Y$. De même pour λx avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in Y$.

(1b) **La fonctionnelle** Nous devons trouver une fonctionnelle g sur Y. Soit $y \in Y$. Commençons par prouver que l'ensemble

$$\{f(y) \text{ tel que } (N, f) \in \mathcal{F}, y \in N\} \tag{29.765}$$

est un singleton. Soient $(N_1, f_1), (N_2, f_2) \in \mathcal{F}$ avec $y \in N_1 \cap N_2$. Nous supposons que $(N_1, f_1) \leqslant (N_2, f_2)$ (sinon c'est le contraire). Alors $f_2(y) = f_2|_{N_1}(y) = f_1(y)$. Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned} g\colon Y &\to \mathbb{K} \\ y &\mapsto f(y) \end{aligned} \tag{29.766}$$

où $(N, f) \in \mathcal{F}$ est tel que $y \in N$.

(1c) **g est linéaire** Soient $x, y \in Y$. Nous supposons que $x \in N_1$ et $y \in N_2$ avec $N_1 \subset N_2$. Donc $x, y, x + y \in N_2$ et nous avons $g(x) = f_2(x)$, $g(y) = f_2(y)$ et $g(x + y) = f_2(x + y)$. La linéarité de f_2 fait alors le boulot. Même raisonnement pour $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

(1d) **g se restreint à ℓ** Soit $x \in M$. Nous avons $g(x) = f(x)$ pour un couple $(N, f) \in \mathcal{F}$ vérifiant $x \in N$. Vu que f prolonge ℓ nous avons $g(x) = f(x) = \ell(x)$.

(1e) **Norme de g** Nous devons voir que $\|g\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{K})} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{K})}$. L'inégalité dans un sens est facile pour qui comprend la norme opérateur[90]. Étant donné que $M \subset Y$ nous avons

$$\|g\|_{\mathcal{L}(Y,\mathbb{K})} = \sup_{y\in Y} \frac{|g(y)|}{\|y\|} \geqslant \sup_{y\in M} \frac{|g(y)|}{\|y\|} = \sup_{y\in M} \frac{|\ell(y)|}{\|y\|} = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{K})}. \tag{29.767}$$

L'inégalité dans l'autre sens n'est pas trop compliquée non plus. Prenons $x \in Y$ vérifiant $\|x\| = 1$. Nous considérons $(N, f) \in \mathcal{E}$ tel que $x \in N$. Alors

$$|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\| = \|\ell\|. \tag{29.768}$$

Donc $\|g\| \leqslant \|\ell\|$.

(1f) **Conclusion pour le moment** Nous avons prouvé que (Y, g) est un majorant de $\mathcal{F}$. Donc $(\mathcal{E}, \leqslant)$ est un ensemble inductif.

(2) **Lemme de Zorn** Vu que $(\mathcal{E}, \leqslant)$ est un ensemble inductif non vide, il possède un élément maximal par lemme de Zorn 1.42. Nous nommons (Y, f) un tel élément maximal.

(3) **Fin de la preuve** Nous devons prouver que $Y = X$, de telle sorte que $f \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$ soit définie sur X. Supposons que $Y \neq X$. Dans ce cas nous considérons $x_1 \in X \setminus Y$. Suivant que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous utilisons le lemme 29.170 ou 29.171 pour construire la paire

$$\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(Y, x_1), f_1\big) \tag{29.769}$$

qui majore (Y, f). Contradiction avec la maximalité de (Y, f). Donc $Y = X$.

□
PROPooFJPXooWrjbuH

Proposition 29.173 ([1]).
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Soit $a \in E$. Nous avons

$$\|a\| = \max_{\substack{\varphi\in E' \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(a)|. \tag{29.770}$$

[90] Si ce n'est pas votre cas, vous ne devriez franchement pas être en train de lire ces lignes. Ce n'est que mon avis ; après tout, vous faites comme vous le sentez.

Démonstration. Soit $\varphi \in E'$ tel que $\|\varphi\| = 1$. Si $|\varphi(a)| > \|a\|$ alors

$$\|\varphi\| = \sup_{x\in E} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|\varphi(a)|}{\|a\|} > 1 \tag{29.771}$$

Nous en déduisons que pour tout $\varphi \in B_{E'}(0,1)$, $|\varphi(a)| \leqslant \|a\|$.

Maintenant nous construisons une application linéaire $\varphi \in E'$ telle que $|\varphi(a)| = \|a\|$ et $\|\varphi\| = 1$. Pour cela nous considérons le sous-espace $M = \text{Span}\{a\}$ et l'application

$$\begin{aligned} f\colon M &\to \mathbb{K} \\ \lambda a &\mapsto \lambda\|a\|. \end{aligned} \tag{29.772}$$

Cette application vérifie $f(a) = \|a\|$ et $\|f\| = 1$ parce que

$$\|f\| = \sup_{x\in M} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\lambda\in\mathbb{K}} \frac{|f(\lambda a)|}{\|\lambda a\|} = \frac{|\lambda|\|a\|}{|\lambda|\|a\|} = 1. \tag{29.773}$$

Le théorème de Hahn-Banach 29.172 prolonge f en un élément $\varphi \in E'$ vérifiant $\|\varphi\| = \|f\| = 1$. Cette fonctionnelle vérifie donc aussi $\varphi(a) = f(a) = \|a\|$. □

CORooOBDHooJpiBrs

Corolaire 29.174 ([1]).
Voici trois façons différentes de dire la même chose, par ordre décroissant de frime.

(1) Le dual d'un espace vectoriel normé sépare les points.

(2) Les fonctionnelles bornées d'un espace vectoriel normé séparent les points.

(3) Si X est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et si $x, y \in X$, alors il existe une application $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Démonstration. Le théorème de la base incomplète 6.28 nous permet de considérer une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de X telle que $e_0 = x$ et $e_1 = y$.

Évacuons quelque objections.

- Si x et y sont colinéaires, on complète seulement $\{x\}$ et ça ne changera rien pour la suite[91].
- En écrivant « e_0 » et « e_1 » ne prétends pas que I soit un ensemble de nombres. C'est juste une facilité d'écriture pour éviter de dire « il existe $\alpha, \beta \in I$ tels que $x = e_\alpha$ et $y = e_\beta$ ».

Nous considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \ell\colon \text{Span}_{\mathbb{K}}(e_0, e_1) &\to \mathbb{K} \\ \alpha e_1 + \beta e_2 &\mapsto \alpha. \end{aligned} \tag{29.774}$$

Cette application est parfaitement bornée. Le théorème de Hahn-Banach 29.172 nous permet de considérer une extension f sur X. Cette extension a la même norme et est donc bornée (donc continue par la proposition 12.98). C'est donc un élément du dual de X.

Comme $f = \ell$ sur $\text{Span}(e_0, e_1)$, nous avons $f(x) \neq f(y)$. □

29.15 Théorème de Tietze

Définition 29.175.
*Si E et F sont des espaces normés, une application $f\colon E \to F$ est **presque surjective** si il existe $\alpha \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que pour tout $y \in \overline{B_F(0,1)}$, il existe $x \in \overline{B_E(0,C)}$ tel que $\|y - f(x)\| \leqslant \alpha$.*

LemBQLooRXhJzK

Lemme 29.176 ([112]).
Soient E et F des espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}^0(E,F)$[92]. Si f est presque surjective, alors

ItemTSOooYkxvBui

(1) f est surjective

ItemTSOooYkxvBuii

(2) pour tout $y \in \overline{B_F(0,1)}$, il existe $x \in \overline{B_E(0, \frac{C}{1-\alpha})}$ tel que $y = f(x)$.

[91] Soyez quand même attentifs à ne pas vous laisser enfumer.
[92] L'ensemble des applications linéaires continues

Le point (2) est une précision du point (1) : il dit quelle est la taille de la boule de E nécessaire à obtenir la boule unité dans F.

Démonstration. Soit $y \in \overline{B_F(0,1)}$. Nous allons construire $x \in B\big(0, \frac{C}{1-\alpha}\big)$ qui donne $f(x) = y$. Ce x sera la limite d'une série que nous allons construire par récurrence. Pour $n = 1$ nous utilisons la presque surjectivité pour considérer $x_1 \in \overline{B_E(0,C)}$ tel que $\|y - f(x_1)\| \leqslant \alpha$. Ensuite nous considérons la récurrence

$$x_n \in \overline{B_E(0,C)} \tag{29.775}$$

tel que

$$\Big\|y - \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} f(x_i)\Big\| \leqslant \alpha^n \tag{29.776}$$

Pour montrer que cela existe nous supposons que la série est déjà construite jusqu'à $n > 1$:

$$\frac{1}{\alpha^n}\Big(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} f(x_i)\Big) \in \overline{B_F(0,1)} \tag{29.777}$$

À partir de là, par presque surjectivité il existe un $x_{n+1} \in \overline{B_E(0,C)}$ tel que

$$\Big\|\frac{y - \sum_{i=1}^{n} \alpha^{i-1} f(x_i)}{\alpha^n} - f(x_{n+1})\Big\| \leqslant \alpha. \tag{29.778}$$

En multipliant par α^n, le terme $\alpha^n f(x_{n+1})$ s'intègre bien dans la somme :

$$\Big\|y - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^{i-1} f(x_i)\Big\| \leqslant \alpha^{n+1}. \tag{29.779}$$

Nous nous intéressons à une éventuelle limite à la somme des $\alpha^{n-1}x_n$. D'abord nous avons la majoration $\|\alpha^{n-1}x_n\| \leqslant \alpha^{n-1}C$, et vu que par la définition de la presque surjectivité $0 < \alpha < 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x_n \tag{29.780}$$

converge absolument[93] parce que la suite des normes est une suite géométrique de raison α. Vu que E est de Banach, la convergence absolue implique la convergence simple (la suite des sommes partielles est de Cauchy et Banach est complet). Nous posons

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x_n \in E, \tag{29.781}$$

et en termes de normes, ça vérifie

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}\|x_n\| \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = \frac{C}{1-\alpha}. \tag{29.782}$$

Donc c'est bon pour avoir $x \in B\big(0, \frac{C}{1-\alpha}\big)$. Nous devons encore vérifier que $y = f(x)$. Pour cela nous remarquons que

$$\|y - f\Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha^{n-1} x_n\Big)\| \leqslant \alpha^N. \tag{29.783}$$

Nous pouvons prendre la limite $N \to \infty$ et permuter f avec la limite (par continuité de f). Vu que $0 < \alpha < 1$ nous avons

$$\|y - f(x)\| = 0. \tag{29.784}$$

□

ThoFFQooGvcLzJ

Théorème 29.177 (Tietze[112, 576, 789])**.**
Soit un espace métrique (X, d) et un fermé $Y \subset X$. Soit $g_0 \in C^0(Y, \mathbb{R})$. Alors g_0 admet un prolongement continu sur X.

[93] Définition 12.130.

Démonstration. Soit l'opération de restriction

$$\begin{aligned} T\colon (C_b^0(X,\mathbb{R}),\|.\|_\infty) &\to (C_b^0(Y,\mathbb{R}),\|.\|_\infty) \\ f &\mapsto f|_Y. \end{aligned} \tag{29.785}$$

L'application T est évidemment linéaire. Elle est de plus bornée pour la norme opérateur usuelle donnée par la proposition 12.76 parce que $\|T(f)\| \leqslant \|f\| < \infty$. L'application T est alors continue par la proposition 12.98.

(1) **Presque surjection**

Soit $g \in C_b^0(Y,\mathbb{R})$ avec $\|g\|_\infty \leqslant 1$. Nous posons

$$Y^+ = \{x \in Y \text{ tel que } \frac{1}{3} \leqslant g(x) \leqslant 1\} \tag{29.786a}$$

$$Y^- = \{x \in Y \text{ tel que } -1 \leqslant g(x) \leqslant -\frac{1}{3}\}. \tag{29.786b}$$

Nous considérons alors

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{3}\frac{d(x,Y^-)-d(x,Y^+)}{d(x,Y^-)+d(x,Y^+)} \end{aligned} \tag{29.787}$$

Vu qu'en valeur absolue le dénominateur est plus grand que le numérateur nous avons $\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}$. Notons que

- Si $x \in Y^+$ alors $f(x) = \frac{1}{3}$ et $g(x) \in [\frac{1}{3}, 1]$;
- Si $x \in Y^-$ alors $f(x) = -\frac{1}{3}$ et $g(x) \in [-1, -\frac{1}{3}]$;
- Si x n'est ni dans Y^+ ni dans Y^- alors nous avons[94] $g(x) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ et donc $\big|f(x)-g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \leqslant \frac{2}{3}$.

Dans les trois cas nous avons $\big|f(x)-g(x)\big| \in [0, \frac{2}{3}]$ pour tout $x \in X$. Cela prouve que

$$\|T(f)-g\|_{Y,\infty} \leqslant \frac{2}{3}. \tag{29.788}$$

En résumé nous avons pris g dans la boule $\overline{B(0,1)}$ de $\big(C_b^0(Y,\mathbb{R}),\|.\|_\infty\big)$ et nous avons construit une fonction f dans la boule $\overline{B(0,\frac{1}{3})}$ de $\big(C_b^0(X,\mathbb{R}),\|.\|_\infty\big)$ telle que $\|T(f)-g\|_\infty \leqslant \frac{2}{3}$. L'application T est donc une presque surjection avec $\alpha = \frac{2}{3}$ et $C = \frac{1}{3}$.

(2) **Extension avec $\|.\|_\infty \leqslant 1$** SPITEMooSTXMooIdockk Nous montrons que si $g \in C^0(Y,\mathbb{R})$ vérifie $\|g\|_\infty \leqslant 1$, alors il existe une extension $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

La proposition 14.398 nous assure que les espaces $C_b^0(X,\mathbb{R})$ et $C_b^0(Y,\mathbb{R})$ sont de Banach (complets), et le lemme 29.176 nous dit alors que T est surjective et que pour tout $g \in \overline{B(0,1)}$, il existe

$$f \in \overline{B\left(0, \frac{1/3}{1-\frac{2}{3}}\right)} = \overline{B(0,1)}. \tag{29.789}$$

telle que $g = T(f)$.

Pour le redire avec des mots plus simples, nous avons prouvé que si $g\colon Y \to \mathbb{R}$ vérifie $\|g\|_\infty \leqslant 1$, il existe une extension $f\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

(3) **Extension avec $|.| < 1$** SPITEMooZBGTooKbyuch Nous montrons que si $g \in C^0(Y,\mathbb{R})$ vérifie $|g| < 1$, alors il existe une extension $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ vérifiant $|f| < 1$.

Soit $g \in B_{C_b^0(Y)}(0,1)$ et son prolongement $h \in \overline{B_{C_b^0(X)}(0,1)}$ du point (2). Si $|h| < 1$ alors nous avons le résultat en posant $f = g$.

Si au contraire il existe $z \in X$ tel que $|h(z)| = 1$, nous posons

$$Z = \{x \in X \text{ tel que } |h(x)| = 1\}. \tag{29.790}$$ EQooIVXAooZQZxlq

[94] Nous rappelons que $\|g\| = 1$, donc $g(x)$ est forcément ente -1 et 1.

Nous avons $Y \cap Z = \varnothing$ parce que nous avons $h = g$ sur Y et nous avons choisi $\|g\|_\infty < 1$. Par ailleurs Y est fermé par hypothèse et Z est fermé parce que h est continue ; par conséquent $Y \cap Z$ est fermé, donc[95]

$$\bar{Y} \cap \bar{Z} = Y \cap Z = \varnothing. \tag{29.791}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} u\colon X &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \frac{d(x,Z)}{d(x,Y)+d(x,Z)} \end{aligned} \tag{29.792}$$

Le dénominateur n'est pas nul parce qu'il faudrait $d(x,Y) = d(x,Z) = 0$, ce qui demanderait $x \in \bar{Y} \cap \bar{Z}$, ce qui n'est pas possible. Nous posons $f = uh$. Si $x \in Y$ alors $u(x) = 1$, donc f est encore un prolongement de g. De plus f est encore continue, et donc encore un bon candidat. Enfin si x est hors de Y alors $d(x,Y) > 0$ (strictement parce que Y est fermé) et donc $0 < u(x) < 1$, ce qui donne $|f(x)| < |h(x)| \leqslant 1$.

Et voilà.

(4) **Démonstration du théorème**

Nous sommes maintenant prêts à prouver le théorème. Soit $g_0 \in C^0(Y, \mathbb{R})$. Nous allons nous ramener au cas de la boule unité ouverte en utilisant un homéomorphisme[96] $\phi\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$.

L'application $g = \phi \circ g_0$ vérifie $|g(y)| < 1$ pour tout $y \in Y$. Par le point (3), il existe une extension $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ vérifiant $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$. Attention : cette application f prolonge g et non g_0.

Nous posons finalement $f_0 = \phi^{-1} \circ f$. Cela est encore une application dans $C^0(X, \mathbb{R})$, mais cette fois elle prolonge g_0. En effet si $y \in Y$, en tenant compte de $f(y) = g(y)$, nous avons

$$f_0(y) = (\phi^{-1} \circ f)(y) = \phi^{-1}\big(f(y)\big) = \phi^{-1}\big(g(y)\big) = \phi^{-1}\big((\phi \circ g_0)(y)\big) = g_0(y). \tag{29.793}$$

□

29.15.1 Pas de bijections bicontinues entre dimensions différentes

THOooLGJMooIYzOBD

Théorème 29.178 ([790]).
Soit une application continue et injective $f\colon \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^n$. Alors

$$f(0) \in \operatorname{Int}\Big(f\big(\overline{B(0,1)}\big)\Big). \tag{29.794}$$

Démonstration. Soit une application continue et injective $f_0\colon \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^n$. Soit $\epsilon < 0$. Si nous supposons que $f_0(0)$ n'est pas à l'intérieur de $f_0\big(\overline{B(0,1)}\big)$, alors il existe un $c \in \mathbb{R}^n$ hors de $f_0\big(\overline{B(0,1)}\big)$ et tel que $\|c - f_0(0)\| < \epsilon$.

Nous posons maintenant $f(x) = f_0(x) - c$. Nous avons

$$\begin{cases} \|f(0)\| < \epsilon & \text{(29.795a)} \\ 0 \notin f\big(\overline{B(0,1)}\big). & \text{(29.795b)} \end{cases}$$

Vu que f est continue et que $\overline{B(0,1)}$ est compact, la partie $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ est compacte (théorème 9.298). L'application restreinte $f\colon \overline{B(0,1)} \to f_0\big(\overline{B(0,1)}\big)$ est une bijection continue entre compacts. Son inverse est alors également continue (lemme 9.300).

Mais comme $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, le théorème de Tietze (29.177) prolonge son inverse en une application continue

$$G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{29.796}$$

Nous avons $G\big(f(0)\big) = 0$. Nous choisissons ϵ assez petit pour que $\|G(y)\| < 0.1$ dès que $\|y - f(0)\| \leqslant 2\epsilon$. Comme $\|f(0)\| < \epsilon$, nous avons aussi

$$\|y\| \leqslant \epsilon \Rightarrow \|y - f(0)\| \leqslant 2\epsilon \Rightarrow \|G(y)\| < 0.1. \tag{29.797}$$

Autrement dit,

$$G\Big(\overline{B(0,\epsilon)}\Big) \subset B\big(0, \frac{1}{10}\big). \tag{29.798}$$

[95] Si vous avez l'intention de dire que $\overline{Y \cap Z} = \bar{Y} \cap \bar{Z} = Y \cap Z = \varnothing$, allez d'abord voir l'exemple 9.195. Ici c'est correct parce que Y et Z sont fermés.

[96] Existence dans le lemme 20.46.

Nous posons

$$\Sigma_1 = \{y \in f\big(\overline{B(0,1)}\big) \text{ tel que } \|y\| \geqslant \epsilon\}, \tag{29.799}$$

ainsi que

$$\Sigma_2 = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|y\| = \epsilon\}, \tag{29.800}$$

et $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

(1) La partie Σ_2 est compacte en tant que fermée et bornée[97]. La partie Σ_1 est compacte en tant que intersection entre le compact $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ et le fermé $\|y\| \geqslant \epsilon$ (corolaire 9.138). Finalement la partie Σ est également compacte[98]

(2) La partie Σ ne contient pas $f(0)$ parce que $\|f(0) < \epsilon\|$ tandis que les éléments $y \in \Sigma$ vérifient $\|y\| \geqslant \epsilon$.

(3) La partie Σ_1 ne contient pas 0. En effet, vu que G étend f^{-1}, si $x \in G(\Sigma_1)$, nous avons $f(x) \in \Sigma_1$ et en particulier $\|f(x)\| \geqslant \epsilon$. Vu que $\|f(0)\| < \epsilon$, nous avons $x \neq 0$.

(4) La partie Σ_1 est compacte, G est continue dessus et ne prend pas la valeur 0. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$G(\Sigma_1) > \delta. \tag{29.801}$$

Nous considérons un tel δ qui vérifie de plus $\delta < 1/10$.

Nous introduisons l'application

$$\begin{aligned} \phi\colon f\big(\overline{B(0,1)}\big) &\to \Sigma \\ y &\mapsto \max\big(\epsilon/\|y\|, 1\big)y. \end{aligned} \tag{29.802}$$

Prouvons que ϕ prend effectivement ses valeurs dans Σ. Il y a deux possibilités : soit $\|y\| < \epsilon$, soit $\|y\| \geqslant \epsilon$. Si $\|y\| < \epsilon$, alors $\phi(y) = \frac{\epsilon}{\|y\|}y$, ce qui donne $\|\phi(y)\| = \epsilon$, et donc $\phi(y) \in \Sigma_2$. Si $\|y\| \geqslant \epsilon$, alors le max est 1 et nous avons $\phi(y) = y$. Dans ce cas, nous avons d'une part $\|\phi(y)\| = \|y\| \geqslant \epsilon$ et d'autre part $\phi(y) = y \in f\big(\overline{B(0,1)}\big)$; donc $\phi(y) \in \Sigma_1$.

Le théorème de Stone-Weierstrass 14.462 nous permet de considérer un polynôme (à n variables) $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\|P - G\|_\Sigma < \delta. \tag{29.803}$$

Un tel polynôme ne s'annule pas sur Σ_1 parce que $\|G\|_{\Sigma_1} > \delta$.

Le polynôme P est de classe C^∞ (proposition 14.389). Vu que Σ_2 est de mesure nulle, la proposition 16.282 dit que $P(\Sigma_2)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.

À l'aide de la proposition 16.283, nous choisissons $s \in \mathbb{R}^n$ tel que $P_2(x) = P(x+s)$ ne s'annule ni sur Σ_1 ni sur Σ_2. Vu que P est uniformément continue sur Σ (théorème de Heine 14.80), il existe M (majorant de la norme de la dérivée sur Σ) tel que

$$\|P(x) - P_2(x)\| = \|P(x+s) - P(x)\|_\Sigma \leqslant sM. \tag{29.804}$$

En choisissant $s < \epsilon'/M$, nous avons

$$\|P - P_2\|_\Sigma < \epsilon'. \tag{29.805}$$

En prenant ϵ' assez petit[99], nous avons encore

$$\|P_2 - G\|_\Sigma < \delta. \tag{29.806}$$

EQooIVQLooViVzsA

Nous introduisons maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{G}\colon f\big(\overline{B(0,1)}\big) &\to \mathbb{R}^n \\ \tilde{G} &= P_2 \circ \phi. \end{aligned} \tag{29.807}$$

Nous allons prouver que $\|G(y) - \tilde{G}(y)\| \leqslant 0.3$ pour tout $y \in f\big(\overline{B(0,1)}\big)$.

(1) **Si $\|y\| > \epsilon$**

Si $\|y\| > \epsilon$ et $y \in b\big(\overline{B(0,1)}\big)$, alors

$$\tilde{G}(y) = (P_2 \circ \phi)(y) = P\big(\min(\epsilon/\|y\|, 1)y\big). \tag{29.808}$$

Vu que $\|y\| > \epsilon$, le max est 1 et nous avons $\tilde{G}(y) = P_2(y)$, et donc, en utilisant (29.806),

$$\|G(y) - \tilde{G}(y)\| = \|G(y) - P_2(y)\| < \delta. \tag{29.809}$$

Quitte à choisir δ plus petit, nous pouvons supposer $\delta < 0.3$.

[97] Borel-Lebesgue 11.23.
[98] Union de compacts, lemme 9.140.
[99] Plus petit que la différence entre δ et $\|P - G\|_\Sigma$.

(2) **Si $\|y\| \leqslant \epsilon$** Nous considérons maintenant le cas $\|y\| \leqslant \epsilon$ et $y \in b\big(\overline{B(0,1)}\big)$.

Montrons que $\|G(y) - \tilde{G}(y)\| < \delta$ pour tout $y \in \big(\overline{B(0,1)}\big)$ tel que $\|y\| > \epsilon$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|G(y) - \tilde{G}(y)\| &= \|G(y) - P_2\big(\phi(y)\big)\| && (29.810a)\\ &\leqslant \|G(y) - G\big(\phi(y)\big)\| + \|G\big(\phi(y)\big) - P_2\big(\phi(y)\big)\| && (29.810b)\\ &\leqslant \|G(y)\| + \|G\big(\phi(y)\big)\| + \|(G - P_2)\big(\phi(y)\big)\|. && (29.810c)\end{aligned}$$

Vu que $\|y\| \leqslant \epsilon$, nous avons $\phi(y) = \frac{\epsilon}{\|y\|}y$, et donc $\|\phi(y)\| = \epsilon$. De ce fait, $\phi(y) \in \Sigma_2$ et nous avons $\|(G - P_2)\big(\phi(y)\big)\| \leqslant \delta$.

Si nous choisissons $\delta < 0.1$ nous avons donc encore

$$\|G(y) - \tilde{G}(y)\| \leqslant 2 \times 0.1 + \delta \leqslant 0.3. \tag{29.811}$$

Bref, pour tout $y \in f\big(\overline{B(0,1)}\big)$ nous avons

$$\|G(y) - \tilde{G}(y)\| \leqslant 0.3. \tag{29.812}$$ EQooMIVFooFwKeSR

Ça va être le moment de demander au théorème de Brouwer d'intervenir.

(1) **Définition de g**

Vu que $\tilde{G}$ est définie sur $f\big(\overline{B(0,1)}\big)$, nous pouvons considérer l'application

$$\begin{aligned}g\colon \overline{B(0,1)} &\to \mathbb{R}^n\\ x &\mapsto x - \tilde{g}\big(f(x)\big).\end{aligned} \tag{29.813}$$

Notons pour $x \in \overline{B(0,1)}$, nous avons $x = G\big(f(x)\big)$, et donc nous pouvons aussi écrire

$$g(x) = (G \circ f)(x) - (\tilde{G} \circ f)(x). \tag{29.814}$$ EQooJWNRooKIfex

(2) **$g(x) \in \overline{B(0,1)}$**

Nous avons déjà vu en (29.812) que $\|G - \tilde{G}\|_{f\left(\overline{B(0,1)}\right)} < 0.3 < 1$. L'équation (29.814) dit alors que $g(x) \in \overline{B(0,1)}$.

(3) **Brouwer** Nous pouvons appliquer le théorème de Brouwer (22.32) à la fonction g. Il existe $x_0 \in \overline{B(0,1))}$ tel que $g(x_0) = x_0$, c'est-à-dire $x_0 - \tilde{G}\big(f(x_0)\big) = x_0$. Nous en déduisons que

$$\tilde{G}\big(f(x_0)\big) = 0. \tag{29.815}$$

(4) **La contradiction** Rappel : $\tilde{G} = P_2 \circ \phi$. Si $y \in \overline{B(0,1)}$, alors $\phi(y) \in \Sigma$, et nous avons tout fait pour que P_2 ne s'annule pas sur Σ.

Et voilà la contradiction.

□

Remarque 29.179.
Il n'existe pas de bijection bicontinue d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si $m \neq n$. Il n'y a donc pas de notion de difféomorphismes entre ouverts de dimensions différentes.

Je crois que c'est une conséquence facile de 29.178. Écrivez-moi si vous pouvez rédiger une preuve.

29.16 Dualité, réflexivité et théorème de représentation de Riesz

Dans la suite E' est le dual topologique, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires et continues sur E. Nous notons également V'' le dual de $(V', \|.\|)$. Certes en tant qu'ensembles, $(V', *)$ et $(V', \|.\|)$ sont identiques, mais comme ils n'ont pas la même topologie, les duaux ne sont pas les mêmes.

Bref, V'' est l'ensemble des applications linéaires continues $(V', \|.\|) \to \mathbb{C}$. Et lorsque nous disons $\mathbb{C}$ ici, ça peut aussi bien être $\mathbb{R}$ selon le contexte.

De plus nous considérons que V'' la norme opérateur qui dérive de la norme de V', laquelle dérive de la norme vectorielle sur V.

PROPooMAQSooCGFBBM

Proposition-Définition 29.180 (Espace réflexif)**.**
Soit un espace vectoriel normé V sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} J\colon V &\to V'' \\ J(x)\varphi &= \varphi(x). \end{aligned} \tag{29.816}$$

EQooRQIMooZdVkDQ

ITEMooNVVSooNFXgnE

(1) L'application J est bien définie : $J(x)\colon V' \to \mathbb{C}$ est continue.

ITEMooKURHooZZWpbu

(2) L'application J est continue.

ITEMooTFYVooKhMOjp

(3) Elle est injective.

Lorsque J est bijective, l'espace V est dit ***réflexif****.*

Démonstration. Point par point.

(1) **(1)** Nous commençons par montrer que $J(x)\colon (V', \|.\|) \to \mathbb{C}$ est continue pour chaque $x \in V$. Soit une suite $\varphi_k \xrightarrow{\|.\|} 0$. Nous avons :

$$J(x)\varphi_k = \varphi_k(x) \leqslant \|\varphi_k\|\|x\| \to 0 \tag{29.817}$$

où vous aurez noté l'utilisation du lemme 12.90. Cela prouve que $J(x)$ est continue et donc que J est bien à valeurs dans V''.

(2) **(2)**

Soit une suite $x_k \xrightarrow{V} 0$, et étudions $\|J(x_k)\|$ pour la norme dans V''. Nous posons $x'_k = x_k/\|x_k\|$ et nous calculons (encore une fois, nous écrivons « $\mathbb{C}$ », mais ça pourrait être $\mathbb{R}$)

$$\|J(x_k)\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |J(x_k)\varphi|_{\mathbb{C}} = \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x_k)| = \|x_k\| \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x'_k)| \leqslant \|x_k\| \to 0. \tag{29.818}$$

La dernière inégalité pourrait être sans doute une égalité[100], mais nous n'en avons pas besoin ici.

(3) **(3)** Soient $x \neq y$ dans V. Le corolaire 29.174 nous permet de considérer un élément $\varphi \in V'$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Nous avons alors

$$J(x)\varphi \neq J(y)\varphi, \tag{29.819}$$

et donc $J(x) \neq J(y)$. Cela prouve que J est injective.

□

PROPooQGHTooLMFCKt

Proposition 29.181 ([1, 3])**.**
Soit un espace de Banach E.

(1) L'application $J\colon E \to E''$ est une isométrie.

ITEMooFTFBooMjahZi

(2) Si E est réflexif,

$$J\big(\overline{B_E}(0,1)\big) = \overline{B_{E''}}(0,1). \tag{29.820}$$

Démonstration. Point par point.

(1) **Isométrie** Soit $x \in E$. En utilisant la définition de la norme opérateur et la proposition 29.173 nous avons :

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{\substack{\varphi\in E' \\ \|\varphi\|=1}} |J(x)\varphi| = \sup_{\substack{\varphi\in E' \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)| = \|x\|. \tag{29.821}$$

Donc J est une isométrie.

(2) **Pour les boules** Deux inclusions

(2a) $J\big(\overline{B_E}(0,1)\big) \subset \overline{B_{E''}(0,1)}$ Soit $x \in \overline{B_E(0,1)}$. Nous savons déjà que J est isométrique. Donc $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E \leqslant 1$.

[100] Écrivez-moi si vous en êtes certain.

(2b) $\underline{J\big(\overline{B_{E''}}(0,1)\big) \subset \overline{B_E(0,1)}}$ Soit $\xi \in \overline{B_{E''}(0,1)}$. Par hypothèse E est réflexif ; l'application $J\colon E \to E''$ est donc bijective et nous pouvons considérer $x = J^{-1}(\xi)$. En utilisant encore le fait que J est isométrique,

$$\|x\|_E = \|J(x)\|_{E''} = \|\xi\|_{E''} \leqslant 1. \tag{29.822}$$

Donc $J^{-1}(\xi) = x \in \overline{B_E(0,1)}$.

□

PROPooHOKQooDWpTqM

Proposition 29.182 ([232]).
Si E est un espace de Banach, alors $J(E)$ est fermé dans E''.

Démonstration. Soit une suite convergente $\xi_n \xrightarrow{E''} \xi$ dans $J(E)$. Vu que J est injective et surjective sur $J(E)$, pour chaque n il existe un unique x_n tel que $\xi_n = J(x_n)$.

Vu que (ξ_n) est une suite convergente dans l'espace normé E'', c'est une suite de Cauchy par la proposition 9.343. Étant donné que J est isométrique, la suite (x_n) est également de Cauchy. Et donc (x_n) converge dans E parce que E est complet (il est de Banach par hypothèse). Il existe donc $x \in E$ tel que $x_n \xrightarrow{E} x$.

Étant donné que J est continue, elle commute avec la limite :

$$\xi = \lim_n \xi_n = \lim_n J(x_n) = J(\lim_n x_n) = J(x). \tag{29.823}$$

Donc $\xi = J(x) \in J(E)$. Cela prouve que $J(E)$ est fermé par la proposition 9.86. □

PROPooJJINooXeUcQP

Proposition 29.183 ([1]).
L'application

$$J\colon \big(E, \sigma(E,E')\big) \to \big(E'', \sigma(E'',E')\big) \tag{29.824}$$

est continue.

Démonstration. Nous utilisons la proposition 9.64 en se souvenant que la topologie $\sigma(E'',E')$ est la topologie initiale des évaluations

$$\begin{aligned} ev_\varphi\colon E'' &\to \mathbb{K} \\ \xi &\mapsto \xi(\varphi). \end{aligned} \tag{29.825}$$

Autrement dit, toutes ces applications sont $\sigma(E'',E')$-continues. La proposition 9.64 dit que J sera continue si toutes les applications $ev_\varphi \circ J\colon \big(E, \sigma(E,E')\big) \to \mathbb{K}$ sont continues. Nous avons

$$(ev_\varphi \circ J)(x) = J(x)(\varphi) = \varphi(x). \tag{29.826}$$

Autrement dit, $ev_\varphi \circ J = \varphi$. Et φ est $\sigma(E,E')$-continue. Donc on est bon. □

LEMooWEMFooEHIaxY

Lemme 29.184 ([1]).
Soient des espaces de Banach V et W. Si $\alpha\colon V \to W$ est une bijection linéaire et isométrique, alors l'application définie par

$$\begin{aligned} \beta\colon V' &\to W' \\ \beta(\varphi)y &= \varphi\big(\alpha^{-1}(y)\big) \end{aligned} \tag{29.827}$$

EQooTSVHooEQGuNw

pour tout $\varphi \in V'$ et $y \in W$ est une bijection linéaire isométrique.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) $\underline{\alpha^{-1} \textbf{ est continue}}$ Le théorème d'isomorphisme de Banach 29.1 implique que α^{-1} est continue parce que α est bijective, continue et linéaire entre deux espaces de Banach.

(2) $\underline{\beta \textbf{ prend ses valeurs dans } W'}$ Nous devons prouver que, si $\varphi \in V'$, alors $\beta(\varphi)$ est bien un élément de W'. Autrement dit, nous devons prouver que $\beta(\varphi)\colon W \to \mathbb{C}$ est continue. Considérons une suite $y_k \xrightarrow{W} 0$. Alors, vu que α est continue, nous avons aussi $\alpha^{-1}(y_k) \xrightarrow{V} 0$, et donc

$$\varphi\big(\alpha^{-1}(y_k)\big) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0 \tag{29.828}$$

parce que φ est continue. Donc $\beta(\varphi)$ est continue.

(3) $\underline{\beta \textbf{ est linéaire}}$ Parce que α l'est.

(4) β **est isométrique** Nous devons prouver que la norme de l'application linéaire $\beta(\varphi)\colon W \to \mathbb{C}$ est la même que celle de φ. Vu que $\alpha\colon V \to W$ est une bijection isométrique, nous avons

$$\{\alpha^{-1}(y) \text{ tel que } \|y\| = 1, y \in W\} = \{x \in V \text{ tel que } \|x\| = 1\}. \tag{29.829}$$

Donc nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\|\beta(\varphi)\| = \sup_{\substack{y\in W\\ \|y\|=1}} \|\beta(\varphi)y\| = \sup_{\substack{y\in W\\ \|y\|=1}} |\varphi\big(\alpha^{-1}(y)\big)| = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} |\varphi(x)| = \|\varphi\|. \tag{29.830}$$

□

La proposition suivante dit que la notion d'être réflexif passe aux isomorphismes d'espaces vectoriels normés.

PROPooVRQKooLdmajh

Proposition 29.185 ([1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une bijection linéaire isométrique $\alpha\colon V \to W$. L'espace W est réflexif[101] *si et seulement si V l'est.*

Démonstration. Nous allons prouver que si W est réflexif, alors V est réflexif. Pour l'implication inverse, il suffira de noter que $\alpha^{-1}\colon W \to V$ est une bijection linéaire isométrique.

En plusieurs points.

(1) **Quelques applications** Nous notons J_V l'application de la proposition 29.180 :

$$\begin{aligned} J_V &\colon V \to V'' \\ J_V(v)\varphi &= \varphi(v), \end{aligned} \tag{29.831}$$

et J_W l'application correspondante pour W. Notre hypothèse est que J_W est bijective.

Nous posons

$$\begin{aligned} \beta &\colon V' \to W' \\ \beta(\varphi)w &= \varphi\big(\alpha^{-1}(w)\big), \end{aligned} \tag{29.832}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma &\colon V'' \to W'' \\ \gamma(\sigma)\varphi &= \sigma\big(\beta^{-1}(\varphi)\big). \end{aligned} \tag{29.833}$$

L'application β est une bijection linéaire isométrique par le lemme 29.184 ; l'application γ l'est aussi, par le même lemme appliqué à $\beta\colon V' \to W'$.

(2) **Le S** Nous posons

$$\begin{aligned} S &\colon V \to V'' \\ S(v)\varphi &= J_W\big(\alpha(v)\big)\beta(\varphi). \end{aligned} \tag{29.834}$$

Nous allons montrer que $S = J_V$ et que S est bijectif.

(3) $S = J_V$ Cela est un calcul :

$$\begin{aligned} J_W\big(\alpha(v)\big)\beta(\varphi) &= \beta(\varphi)\big(\alpha(v)\big) && \text{(29.835a)}\\ &= \varphi\Big(\alpha^{-1}\big(\alpha(v)\big)\Big) && \text{(29.835b)}\\ &= \varphi(v) && \text{(29.835c)}\\ &= J_V(v)\varphi. && \text{(29.835d)} \end{aligned}$$

(4) S **est injective** L'application J_V est toujours injective par la proposition 29.180.

(5) S **est surjective** Soi $\sigma \in V''$. Nous devons prouver l'existence de $v \in V$ tel que $S(v) = \sigma$. Vu que $J_W\colon W \to W''$ est surjective et que $\gamma(\sigma) \in W''$, il existe $w \in W$ tel que

$$J_W(w) = \gamma(\sigma). \tag{29.836}$$

[101] Définition 29.180.

Un simple calcul montre alors que $S\big(\alpha^{-1}(w)\big) = \sigma$:

$$S\big(\alpha^{-1}(w)\big)\varphi = J_W(w)\beta(\varphi) \tag{29.837a}$$
$$= \gamma(\sigma)\big(\beta(\varphi)\big) \tag{29.837b}$$
$$= \sigma\Big(\beta^{-1}\big(\beta(\varphi)\big)\Big) \tag{29.837c}$$
$$= \sigma(\varphi). \tag{29.837d}$$

Nous avons donc bien que $S(v) = \sigma$ en posant $v = \alpha^{-1}(w)$.

(6) **Conclusion** L'application $S = J_V$ est surjective ; l'espace V est donc réflexif par la proposition 29.180.

□

Voici déjà un bel énoncé. Pour des espaces mesurés $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ plus généraux, voir l'arme totale en le théorème 29.188.

PropOAVooYZSodR

Proposition 29.186 ([450], thème 21)**.**
Soit $1 < p < 2$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'application

$$\begin{aligned}\Phi\colon L^q\big([0,1]\big) &\to L^p\big([0,1]\big)'\\ \Phi_g(f) &= \int_{[0,1]} f\bar{g}.\end{aligned} \tag{29.838}$$

est une isométrie linéaire surjective.

Démonstration. Pour la simplicité des notations nous allons noter L^2 pour $L^2\big([0,1]\big)$, et pareillement pour L^p.

(1) **Φ_g est un élément de $(L^p)'$**

Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ nous devons prouver que $\Phi_g(f)$ est bien définie. Pour cela nous utilisons l'inégalité de Hölder[102] qui dit que $fg \in L^1$; par conséquent la fonction $f\bar{g}$ est également dans L^1 et nous avons

$$|\Phi_g(f)| \leqslant \int_{[0,1]} |f\bar{g}| = \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{29.839}$$

En ce qui concerne la norme de l'application Φ_g nous avons tout de suite

$$\|\Phi_g\| = \sup_{\|f\|_p=1} \big|\Phi_g(f)\big| \leqslant \|g\|_q. \tag{29.840}$$

Cela signifie que l'application Φ_g est bornée et donc continue par la proposition 12.98. Nous avons donc bien $\Phi_g \in (L^p)'$.

(2) **Isométrie**

Afin de prouver que $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$ nous allons trouver une fonction $f \in L^p$ telle que $\frac{|\Phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q$. De cette façon nous aurons prouvé que $|\Phi_g| \geqslant \|g\|_q$, ce qui conclurait que $|\Phi_g| = \|g\|_q$.

Nous posons $f = g|g|^{q-2}$, de telle sorte que $|f| = |g|^{q-1}$ et

$$\|f\|_p = \left(\int |g|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \left(\int |g|^q\right)^{1/p} = \|g\|_q^{q/p} \tag{29.841}$$

où nous avons utilisé le fait que $p(q-1) = q$. La fonction f est donc bien dans L^p. D'autre part,

$$\Phi_g(f) = \int f\bar{g} = \int g|g|^{q-2}\bar{g} = \int |g|^q = \|g\|_q^q. \tag{29.842}$$

Donc

$$\frac{|\Phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|g\|_q \tag{29.843}$$

où nous avons encore utilisé le fait que $q - \frac{q}{p} = \frac{q(p-1)}{p} = 1$.

[102] Proposition 29.39.

(3) **Surjectif**

Soit $\ell \in (L^p)'$; c'est une application $\ell\colon L^p \to \mathbb{C}$ dont nous pouvons prendre la restriction à L^2 parce que la proposition 29.53 nous indique que $L^2 \subset L^p$. Nous nommons $\phi\colon L^2 \to \mathbb{C}$ cette restriction.

(3a) $\phi \in (L^2)'$

Nous devons montrer que ϕ est continue pour la norme sur L^2. Pour cela nous montrons que sa norme opérateur (subordonnée à la norme de L^2 et non de L^p) est finie :

$$\sup_{f\in L^2} \frac{|\phi(f)|}{\|f\|_2} \leqslant \sup_{f\in L^2} \frac{|\ell(f)|}{\|f\|_p} < \infty. \tag{29.844}$$

Nous avons utilisé l'inégalité de norme $\|f\|_p \leqslant \|f\|_2$ de la proposition 29.53(2).

(3b) **Utilisation du dual de L^2**

Étant donné que L^2 est un espace de Hilbert (lemme 29.106) et que $\phi \in (L^2)'$, le théorème 27.17 nous donne un élément $g \in L^2$ tel que $\phi(f) = \Phi_g(f)$ pour tout $f \in L^2$.

Nous devons prouver que $g \in L^q$ et que pour tout $f \in L^p$ nous avons $\ell(f) = \Phi_g(f)$.

(3c) $g \in L^q$

Nous posons $f_n = g|g|^{q-2}\mathbb{1}_{|g|<n}$. Nous avons d'une part

$$\Phi_g(f_n) = \int_0^1 f_n \bar{g} = \int_{|g|<n} |g|^q. \tag{29.845}$$

Et d'autre part comme $f_n \in L^2$ nous avons aussi $\phi(f_n) = \Phi_g(f_n)$ et donc

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Phi(f_n) = \phi(f_n) &\leqslant \|\ell\|\|f_n\|_p && \text{(29.846a)}\\ &= \|\ell\| \left(\int_{|g|<n} |g|^{(q-1)p} \right)^{1/p} && \text{(29.846b)}\\ &= \|\ell\| \left(\int_{|g|<n} |g|^q \right)^{1/p}. && \text{(29.846c)} \end{aligned}$$

où nous avons à nouveau tenu compte du fait que $p(q-1) = q$. En combinant avec (29.845) nous trouvons

$$\int_{|g|<n} |g|^q \leqslant \|\ell\| \left(\int_{|g|<n} |g|^q \right)^{1/p}, \tag{29.847}$$

et donc

$$\left(\int_{|g|<n} |g|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \|\ell\|, \tag{29.848}$$

c'est-à-dire

$$\Big(\int_{|g|<n} |g|^q \Big)^{1/q} \leqslant \|\ell\|. \tag{29.849}$$

Si ce n'était pas encore fait nous nous fixons un représentant de la classe g (qui est dans L^2), et nous nommons également g ce représentant. Nous posons alors

$$g_n = |g|^q \mathbb{1}_{|g|<n} \tag{29.850}$$

qui est une suite croissante de fonctions convergeant ponctuellement vers $|g|^q$. Le théorème de Beppo-Levi 16.180 nous permet alors d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|q|<n} |g|^q = \int_0^1 |g|^q. \tag{29.851}$$

Mais comme pour chaque n nous avons $\int_{|g|<n} |g|^q \leqslant \|\ell\|^q$, nous conservons l'inégalité à la limite et

$$\int_0^1 |g|^q \leqslant \|\ell\|^q. \tag{29.852}$$

Cela prouve que $g \in L^p$.

(3d) $\ell(f) = \Phi_g(f)$

Soit $f \in L^p$. En vertu de la densité de L^2 dans L^p prouvée dans le corolaire 29.66 nous pouvons considérer une suite (f_n) dans L^2 telle que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Pour tout n nous avons

$$\ell(f_n) = \Phi_g(f_n). \tag{29.853}$$

Mais ℓ et Φ_g étant continues sur L^p nous pouvons prendre la limite et obtenir

$$\ell(f) = \Phi_g(f). \tag{29.854}$$

□

LemHNPEooHtMOGY

Lemme 29.187 ([16]).
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Soit $g \in L^1(\Omega)$ et S fermé dans $\mathbb{C}$. Si pour tout $E \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu \in S, \tag{29.855}$$

alors $g(x) \in S$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. Soit $D = \overline{B(a,r)}$ un disque fermé dans le complémentaire de S (ce dernier étant fermé, le complémentaire est ouvert). Posons $E = g^{-1}(D)$. Prouvons que $\mu(E) = 0$ parce que cela prouverait que $g(x) \in D$ pour seulement un ensemble de mesure nulle. Mais S^c pouvant être écrit comme une union dénombrable de disques fermés[103], nous aurions $g(x) \in S^c$ presque nulle part.

Vu que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E a = a$ nous avons

$$\Big|\frac{1}{\mu(E)} g d\mu - a\Big| = \Big|\frac{1}{\mu(E)} \int_E (g - a)\Big| \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g - a| \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \mu(E) r = r. \tag{29.856a}$$

Donc

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu \in D, \tag{29.857}$$

ce qui est une contradiction avec le fait que $D \subset S^c$. □

Dans toute la partie d'analyse fonctionnelle, sauf mention du contraire, nous considérons dans L^p des fonctions à valeurs complexes, et donc les éléments du dual sont des applications linéaires continues à valeurs dans $\mathbb{C}$. La raison est que nous allons utiliser les résultats concernant L^p dans la partie sur les transformations de Fourier, tandis que les transformations de Fourier demandent naturellement de travailler sur les complexes.

ThoLPQPooPWBXuv

Théorème 29.188 (Théorème de représentation de Riesz, thème 21, [16, 537, 791, 523]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention que $q = \infty$ si $p = 1$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi &: L^q \to (L^p)' \\ \Phi_g(f) &= \int_\Omega f \bar{g} d\mu \end{aligned} \tag{29.858}$$

est une bijection isométrique[104] *dans les cas suivants :*

ITEMooSQQBooWSFBmX

(1) si $1 < p < \infty$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque,

ITEMooCQGJooOWzjoV

(2) si $p = 1$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini.

Démonstration. Par petits bouts.

(1) **Φ est injective** Nous commençons par prouver que Φ est injectif. Soient $g, g' \in L^q$ tels que $\Phi_g = \Phi_{g'}$. Alors pour tout $f \in L^p$ nous avons

$$\int_\Omega f(\bar{g} - \bar{g}') d\mu = 0. \tag{29.859}$$

[103] Tout ouvert peut être écrit comme union dénombrable d'éléments d'une base de topologie par la proposition 9.2 et $\mathbb{C}$ a une base dénombrable de topologie par la proposition 9.207.

[104] Pour rappel, la norme sur le dual est la norme opérateur 12.76.

Soient des parties A_i de mesures finies telles que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Étant donné que $\mu(A_i)$ est fini, nous avons $\mathbb{1}_{A_i} \in L^p(\Omega)$ et donc

$$\int_{A_i} (\bar{g} - \bar{g}')d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_i}(x)(\bar{g} - \bar{g}')(x)d\mu(x) = 0. \tag{29.860}$$

La proposition 29.26 nous dit alors que $g - g' = 0$ dans $L^q(A_i)$. Pour chaque i, la partie $N_i = \{x \in A_i \text{ tel que } (g - g')(x) \neq 0\}$ est de mesure nulle.

Vu que Ω est l'union de tous les A_i, la partie de Ω sur laquelle $g - g'$ est non nulle est l'union des N_i et donc de mesure nulle parce que une réunion dénombrable de parties de mesure nulle est de mesure nulle. Donc $g - g' = 0$ presque partout dans Ω, ce qui signifie $g - g' = 0$ dans $L^q(\Omega)$.

(2) **La suite**

La partie difficile est de montrer que Φ est surjective.

Soit $\phi \in L^p(\Omega)'$. Si $\phi = 0$, c'est bien dans l'image de Φ ; nous supposons donc que non. Nous allons commencer par prouver qu'il existe une (classe de) fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que $\Phi_g(f) = \phi(f)$ pour tout $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$; nous montrerons ensuite que $g \in L^q$ et que le tout est une isométrie.

(3) **Une mesure complexe**

Si $E \in \mathcal{A}$ nous notons $\nu(E) = \phi(\mathbb{1}_E)$. Nous prouvons maintenant que ν est une mesure complexe[105] sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Le seul point pas facile est de démontrer est l'additivité dénombrable. Il est déjà facile de voir que A et B sont disjoints, $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. Soient ensuite des ensembles A_n deux à deux disjoints et posons $E_k = \bigcup_{i \leqslant k} A_i$ pour avoir $\bigcup_k A_k = \bigcup_k E_k$ avec l'avantage que les E_k soient emboîtés. Cela donne

$$\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_k}\|_p = \mu(E \setminus E_k)^{1/p}, \tag{29.861}$$

mais vu que $1 \leqslant p < \infty$, avoir $x_k \to 0$ implique d'avoir $x_k^{1/p} \to 0$. Prouvons que $\mu(E \setminus E_k) \to 0$. En vertu du lemme 16.23 nous avons pour chaque k :

$$\mu(E \setminus E_k) = \mu(E) - \mu(E_k), \tag{29.862}$$

et vu que $E_k \to E$ est une suite croissante, le lemme 16.24(1), sachant que μ est une mesure « normale », donne

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_k) = \mu\Big(\bigcup_k E_k\Big). \tag{29.863}$$

Donc effectivement $\mu(E_k) \to \mu(E)$ et donc oui : $\mu(E \setminus E_k) \to 0$. Jusqu'à présent nous avons

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_k}\|_p = 0, \tag{29.864}$$

c'est-à-dire $\mathbb{1}_{E_k} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_E$. La continuité de ϕ sur L^p donne alors

$$\lim_{k\to\infty} \nu(E_k) = \lim_{k\to\infty} \phi(\mathbb{1}_{E_k}) = \phi(\lim_{k\to\infty} \mathbb{1}_{E_k}) = \phi(\mathbb{1}_E) = \nu(E). \tag{29.865}$$

Par additivité finie de ν nous avons

$$\nu(E_k) = \sum_{i \leqslant k} \nu(A_i) \tag{29.866}$$

et en passant à la limite, $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \nu(\bigcup_i A_i)$. L'application ν est donc une mesure complexe.

(4) **Mesure absolument continue**

En prime, si $\mu(E) = 0$ alors $\nu(E) = 0$ parce que

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \|\mathbb{1}_E\|_p = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_E = 0 \text{ (dans } L^p) \Rightarrow \phi(\mathbb{1}_E) = 0 \tag{29.867}$$

(5) **Utilisation de Radon-Nikodym**

Nous sommes donc dans un cas où $\nu \ll \mu$ et nous utilisons le théorème de Radon-Nikodym 16.242 sous la forme de la remarque 16.243 : il existe une fonction intégrable $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$[106] telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \int_A \bar{g}d\mu. \tag{29.868}$$

[105] Définition 16.241.

[106] On peut écrire, pour utiliser de la notation compacte que $g \in L^1(\Omega, \mathbb{C})$.

C'est-à-dire que

$$\phi(\mathbb{1}_A) = \int_A \bar{g} d\mu = \int_\Omega \bar{g}\mathbb{1}_A d\mu. \tag{29.869}$$

Nous avons donc exprimé ϕ comme une intégrale pour les fonctions caractéristiques d'ensembles.

(6) **Pour les fonctions étagées**

Par linéarité si f est mesurable et étagée nous avons aussi

$$\phi(f) = \int f\bar{g} d\mu = \Phi_g(f). \tag{29.870}$$

(7) **Pour $f \in L^\infty(\Omega)$**

Une fonction $f \in L^\infty$ est une fonction presque partout bornée. Nous supposons que f est presque partout bornée par M. Par ailleurs cette f est limite uniforme de fonctions étagées : $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ en posant $f_k = f\mathbb{1}_{|f|\leqslant k}$. Pour chaque k nous avons l'égalité

$$\Phi_g(f_k) = \phi(f_k). \tag{29.871}$$

Par ailleurs la fonction $f_k\bar{g}$ est majorée par la fonction intégrable $M\bar{g}$ et le théorème de la convergence dominée 16.209 nous donne

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_g(f_k) = \lim_{k\to\infty} \int f_k\bar{g} = \int f\bar{g} = \Phi_g(f). \tag{29.872}$$

Et la continuité de ϕ sur L^p couplée à la convergence $f_k \xrightarrow{L^p} f$ donne $\lim_{k\to\infty} \phi(f_k) = \phi(f)$. Bref prendre la limite dans (29.871) donne

$$\Phi_g(f) = \phi(f) \tag{29.873}$$

pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$.

(8) **La suite ...**

Voici les prochaines étapes.

- Nous avons $\int f\bar{g} = \phi(f)$ tant que $f \in L^\infty$. Nous allons étendre cette formule à $f \in L^p$ par densité. Cela terminera de prouver que notre application est une bijection.
- Ensuite nous allons prouver que $\|\phi\| = \|\Phi_g\|$, c'est-à-dire que la bijection est une isométrie.

(9) **De L^∞ à L^p**

Soit $f \in L^p$. Si nous avions une suite (f_n) dans L^∞ telle que $f_n \xrightarrow{L^p} f$ alors $\lim \phi(f_n) = \phi(f)$ par continuité de ϕ. La difficulté est de trouver une telle suite de façon à pouvoir permuter l'intégrale et la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\bar{g} = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\bar{g} = \int_\Omega f\bar{g} = \Phi_g(f). \tag{29.874}$$

Nous allons donc maintenant nous atteler à la tâche de trouver $f_n \in L^\infty$ avec $f_n \xrightarrow{L^p} f$ et telle que (29.874) soit valide.

Nous allons d'abord supposer que $f \in L^p$ est positive à valeurs réelles. Nous avons alors par le théorème 16.120 qu'il existe une suite croissante de fonction étagées (et donc L^∞) telles que $f_n \to f$ ponctuellement. De plus étant donné que $|f_n| \leqslant |f|$, la proposition 29.25 nous dit que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Pour chaque n nous avons

$$\int_\Omega f_n\bar{g} = \phi(f_n). \tag{29.875}$$

Soit g^+ la partie réelle positive de $\bar{g}$. Alors nous avons la limite croissante ponctuelle $f_n g^+ \to fg^+$ et le théorème de la convergence monotone 16.180 nous permet d'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n g^+ = \int fg^+. \tag{29.876}$$

Faisant cela pour les trois autres parties de $\bar{g}$ nous avons prouvé que si $f \in L^p$ est réelle et positive,

$$\int f\bar{g} = \phi(f), \tag{29.877}$$

c'est-à-dire que $\Phi_g(f) = \phi(f)$.

Refaisant le tout pour les trois autres parties de f nous montrons que

$$\Phi_g(f) = \phi(f) \tag{29.878}$$

pour tout $f \in L^p(\Omega)$. Nous avons donc égalité de ϕ et Φ_g dans $(L^p)'$ et donc bijection entre $(L^p)'$ et L^q.

(10) **Isométrie : mise en place**

Nous devons prouver que cette bijection est isométrique. Soit $\phi \in (L^p)'$ et $g \in L^q$ telle que $\Phi_g = \phi$. Il faut prouver que

$$\|g\|_q = \|\phi\|_{(L^p)'}. \tag{29.879}$$

(11) $\|\phi\| \leqslant \|g\|_q$

Nous savons que $\phi(f) = \int f\bar{g}$, et nous allons écrire la définition de la norme dans $(L^p)'$:

$$\|\phi\|_{(L^p)'} = \sup_{\|f\|_p=1} \big|\phi(f)\big| \tag{29.880a}$$

$$= \sup \Big| \int f\bar{g} \Big| \tag{29.880b}$$

$$\leqslant \sup \underbrace{\int |f\bar{g}|}_{=\|f\bar{g}\|_1}. \tag{29.880c}$$

Il s'agit maintenant d'utiliser l'inégalité de Hölder 29.39 :

$$\|\phi\| \leqslant \sup_{\|f\|_p=1} \|f\|_p \|\bar{g}\|_q = \|g\|_q. \tag{29.881}$$

L'inégalité dans l'autre sens sera démontrée en séparant les cas $p = 1$ et $1 < p < \infty$.

(12) **Si $p = 1$, une formule** Si E est un ensemble mesurable de mesure finie, alors

$$\Big| \int_E g d\mu \Big| = \big|\phi(\mathbb{1}_E)\big|. \tag{29.882}$$

Mais le fait que $\mu(E) < \infty$ donne que $\mathbb{1}_E \in L^1(\Omega)$. Donc $\mathbb{1}_E \in L^\infty \cap L^1$; nous pouvons alors écrire $\phi(\mathbb{1}_E) = \int_\Omega \mathbb{1}_E \bar{g} d\mu$ et donc

$$\Big| \int_\Omega \mathbb{1}_E \bar{g} d\mu \Big| = \Big| \int_E \bar{g} d\mu \Big| = \big|\phi(\mathbb{1}_E)\big| \leqslant \|\phi\|_{(L^1)'} \|\mathbb{1}_E\|_1 = \|\phi\|\mu(E). \tag{29.883}$$

Nous écrivons cela dans l'autre sens :

$$\|\phi\| \geqslant \frac{1}{\mu(E)} \Big| \int_\Omega \mathbb{1}_E \bar{g} d\mu \Big| = \Big| \frac{1}{\mu(E)} \int_E \bar{g} d\mu \Big|. \tag{29.884}$$

Si nous prenons $S = \{t \in \mathbb{C} \text{ tel que } |t| \leqslant \|\phi\|\}$, c'est un fermé vérifiant que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \bar{g} d\mu \in S. \tag{29.885}$$

Voilà une petite formule qui va nous aider à utiliser le lemme 29.187. Nous ne pouvons cependant pas l'utiliser immédiatement parce que l'appartenance (29.885) n'est vraie que pour les parties de mesure finie.

(13) **Si $p = 1$, conclusion**[1]

Pour utiliser le lemme 29.187, nous utilisons l'hypothèse que Ω est σ-fini. Soient des mesurables A_i de mesure fine tels que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Pour chaque i nous considérons la restriction $g_i \colon A_i \to \mathbb{C}$ de g à A_i. Par le point précédent, elle vérifie

$$\frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} \bar{g}_i d\mu = \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} \bar{g} d\mu \in S. \tag{29.886}$$

En appliquant le lemme 29.187 à l'espace restreint $(A_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, nous concluons $\bar{g}_i \in S$ presque partout, ce qui signifie que $\|g_i\|_\infty \in S$. Nous en concluons que

$$\|g_i\|_\infty \leqslant \|\phi\| \tag{29.887}$$

où, dans ce contexte, $\|g_i\|_\infty$ signifie $\sup_{x\in A_i} |g_i(x)|$.

Nous avons alors

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |g(x)| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|g_i\|_\infty \leqslant \|\phi\|. \tag{29.888}$$

Une petite justification pour cela ? Prenons une suite x_k telle que $|g(x_k)| \to \|g\|_\infty$. Vu que les A_i recouvrent Ω, existe un naturel $i(k)$ tel que $x_k \in A_{i(k)}$. Nous avons alors

$$|g(x_k)| \leqslant \|g_{i(k)}\|_\infty \leqslant \|\phi\|. \tag{29.889}$$

Cela pour conclure que $g \in L^\infty$.

Notons que cet argument ne tient pas avec $p > 1$ parce que l'équation (29.883) terminerait sur $\|\phi\|\mu(E)^{1/p}$. Du coup l'ensemble S à prendre serait $S = \{t \in \mathbb{C} \text{ tel que } |t| \leqslant \|\phi\|\mu(E)^{1/p-1}\}$ et nous sommes en dehors des hypothèses du lemme parce qu'il n'y a pas d'ensemble *indépendant* de E dans lequel l'intégrale $\frac{1}{\mu(E)}\int_E \bar{g}d\mu$ prend ses valeurs.

(14) $1 < p < \infty$

La fonction

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases} \tag{29.890}$$

a la propriété de faire $\alpha g = |g|$ en même temps que $|\alpha(x)| = 1$ pour tout x. Nous définissons

$$E_n = \{x \text{ tel que } |g(x)| \leqslant n\} \tag{29.891}$$

et

$$f_n = \mathbb{1}_{E_n} |g^{q-1}|\alpha. \tag{29.892}$$

Ce qui est bien avec ces fonctions c'est que[107]

$$|f_n|^p = |g^{p(q-1)}||\alpha|^p = |g|^q \tag{29.893}$$

sur E_n. Dans E_n nous avons $|f_n| = |g^{q-1}| \leqslant n^{q-1}$ et dans E_n nous avons $f_n = 0$. Au final, $f_n \in L^\infty$. Par ce que nous avons vu plus haut, nous avons alors

$$\phi(f_n) = \Phi_g(f_n). \tag{29.894}$$

Par ailleurs,

$$f_n\bar{g} = \mathbb{1}_{E_n}|g^{q-1}|\frac{g}{|g|}\bar{g}, \tag{29.895}$$

donc[108]

$$\begin{aligned}
\left|\int_{E_n} |g|^q d\mu\right| &= |\int_\Omega f_n\bar{g}d\mu| && \text{(29.896a)}\\
&= |\phi(f_n)| && \text{(29.896b)}\\
&\leqslant \|\phi\|\|f_n\|_p && \text{(29.896c)}\\
&= \|\phi\|\left(\int_{E_n} |f_n|^p\right)^{1/p} && \text{(29.896d)}\\
&= \|\phi\|\left(\int_{E_n} |g|^q\right)^{1/p}. && \text{(29.896e)}
\end{aligned}$$

Nous avons de ce fait une inégalité de la forme $A \leqslant \|\phi\|A^{1/p}$ et donc aussi $A^{1/p} \leqslant \|\phi\|^{1/p}A^{1/p^2}$, et donc $A \leqslant \|\phi\|\|\phi\|^{1/p}A^{1/p^2}$. Continuant ainsi à injecter l'inégalité dans elle-même, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\left|\int_{E_n} |g|^q d\mu\right| \leqslant \|\phi\|^{1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^k}}\left(\int_{E_n} |g|^q d\mu\right)^{1/p^k}. \tag{29.897}$$

[107] C'est ici que nous utilisons le lien entre p et q. En l'occurrence, de $1/p + 1/q = 1$ nous déduisons $q(p-1) = p$.

[108] Dans [16], cette équation arrive sans modules, ce qui me laisse entendre que $\phi(f_n)$ est réel et positif pour pouvoir écrire que $\phi(f_n) \leqslant \|\phi\|\|f_n\|_p$, mais je ne comprends pas pourquoi.

Nous pouvons passer à la limite $k \to \infty$. Sachant que $p > 1$ nous savons $A^{1/k} \to 1$ et

$$1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k} \to \frac{p}{p-1} = q. \tag{29.898}$$

Nous avons alors

$$\int_{E_n} |g|^q d\mu \leqslant \|\phi\|^q. \tag{29.899}$$

L'intégrale s'écrit tout aussi bien sous la forme $\int_\Omega |g|^q \mathbb{1}_{E_n}$. La fonction dans l'intégrale est une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Nous pouvons alors permuter l'intégrale et la limite $n \to \infty$ en utilisant la convergence monotone (théorème 16.180) qui donne alors $\int_\Omega |g|^q \leqslant \|\phi\|^q$ ou encore

$$\|g\|_q \leqslant \|\phi\|. \tag{29.900}$$

Ceci achève de prouver que l'application $\phi \mapsto \Phi_g$ est une isométrie, et donc le théorème.

□

THOooXMVTooBAbyvr

Théorème 29.189.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Pour $f, g \in \mathrm{Fun}(\Omega, \mathbb{C})$, nous écrivons

$$\Phi_g(f) = \int_\Omega f\bar{g} \tag{29.901}$$

pour toutes les combinaisons de f et g pour lesquelles l'intégrale a un sens.

ITEMooNCVEooTyNsoJ

(1) Si $1 < p < \infty$, alors $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est réflexif[109].

ITEMooTQDJooFShTiA

(2) Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-finie, alors

ITEMooHMMZooMQxWgB

(2a) L'application $\Phi\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)'$ est une bijection isométrique.

ITEMooBFFZooNxoHER

(2b) L'application $\Phi\colon L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)'$ est une injection isométrique.

Note : nous verrons dans 29.193 que l'application $\Phi\colon L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)'$ n'est pas surjective.

Démonstration. En plusieurs parties, en notant toujours p et q les exposants conjugués, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(1) **Pour (1)**
Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} &\alpha_1\colon L^p \to (L^q)' \\ &\alpha_1(g)f = \int_\Omega f\bar{g} \end{aligned} \tag{29.902}$$

et

$$\begin{aligned} &\alpha_2\colon L^q \to (L^p)' \\ &\alpha_2(g)f = \int_\Omega g\bar{f}. \end{aligned} \tag{29.903}$$

Ce sont des bijections linéaires par le théorème de représentation de Riesz 29.188[110]. L'espace L^p est de Banach par le théorème de Riesz-Fischer 29.56 ; le lemme 29.184 s'applique donc. Nous considérons alors les applications correspondantes

$$\beta_1\colon (L^p)' \to (L^q)'' \tag{29.904}$$

et

$$\beta_2\colon (L^q)' \to (L^p)'', \tag{29.905}$$

qui sont également des bijections linéaires. Nous allons montrer que la bijection

$$\beta_2 \circ \alpha_1\colon L^p \to (L^p)'' \tag{29.906}$$

est l'application J de la définition 29.180.

[109] Définition 29.180.
[110] Notez que la conjugaison complexe dans α_2 n'est pas à la même place que dans α_1. L'application α_1 est exactement la même que le Φ de représentation de Riesz alors que α_2 est un tout petit peu modifiée. La raison de ce changement n'est pas très profonde : c'est seulement pour que les choses tombent juste à la fin.

Soient $f \in L^p$ et $\varphi \in (L^p)'$. Il existe $g \in L^q$ tel que $\varphi = \alpha_2(g)$. Nous pouvons donc calculer d'une part, en développant β_2 par sa définition (29.827),

$$(\beta_2 \circ \alpha_1)(f)\varphi = \beta_2\big(\alpha_1(f)\big)\varphi = \alpha_1(f)\big(\alpha_2^{-1}(\varphi)\big) = \alpha_1(f)(g) = \int_\Omega g\bar{f}, \tag{29.907}$$

et d'autre part

$$J(f)\varphi = \varphi(f) = \alpha_2(g)f = \int_\Omega g\bar{f}. \tag{29.908}$$

(2) **Pour (2a)** Il s'agit du théorème 29.188(2).

(3) **Pour (2b)[1]** Il nous reste à couvrir le cas de $(L^\infty)'$. Pour $g \in L^1$ nous prouvons que $\Phi_g \in (L^\infty)'$.

(3a) **$\Phi_g(f)$ est bien définie** Nous prouvons d'abord que si $f \in L^\infty$, alors l'intégrale $\int_\Omega f\bar{g}$ est bien définie. Par définition du supremum essentiel[111], il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| < M$ pour tout x hors d'une partie A de mesure nulle. Nous avons alors

$$\int_\Omega |f\bar{g}| = \int_{\Omega\setminus A} |f\bar{g}| \leqslant M \int_{\Omega\setminus A} |f| = M \int_\Omega |f| < \infty. \tag{29.909}$$

(3b) **Φ_g est continue** Soit une suite $f_k \xrightarrow{L^\infty} f$ ainsi que $g \in L^1$. Pour chaque k, il existe une partie de mesure nulle A_k et un nombre $M_k = \|f_k\|_{L^\infty}$ tel que $|f_k(x)| < \|f_k\|_{L^\infty}$ pour tout x hors de A_k. Nous avons alors

$$|\Phi_g(f_k)| \leqslant \int_{\Omega\setminus A_k} |f_k\bar{g}| d\mu \leqslant \|f_k\|_{L^\infty} \int_{\Omega\setminus A_k} |g| \leqslant \|f_k\|_{L^\infty}\|g\|_1. \tag{29.910}$$

Vu que par hypothèse $f_k \to 0$ dans L^∞, nous avons $\|f_k\|_{L^\infty} \to 0$, et donc aussi

$$|\Phi_g(f_k)| \to 0. \tag{29.911}$$

□

29.190.
Les gens qui n'ont peur d'aucun abus de notations écrivent le théorème 29.189(2a) en disant simplement que $L^1 = L^\infty$ et le démontrent de la façon suivante. Le théorème 29.188(1) nous indique que

$$(L^p)' = L^q. \tag{29.912}$$ EQooJVDEooNGYEtg

Vu que $1 < p < \infty$, nous avons aussi $1 < q < \infty$ et donc $(L^q)' = L^p$. En prenant le dual des deux côtés de (29.912),

$$(L^p)'' = (L^q)' = L^p. \tag{29.913}$$

À ce moment, un second abus vient en aide et nous disons qu'un espace V est réflexif quand $V = V''$. Et voilà.

PropUKLZZZh

Proposition 29.191.
Soit $f \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \tag{29.914}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors $f = 0$ presque partout.

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire $\Phi_f \in (L^q)'$ donnée par

$$\begin{aligned} \Phi_f\colon L^p &\to \mathbb{C} \\ u &\mapsto \int_\Omega fu \end{aligned} \tag{29.915}$$

Par hypothèse cette forme est nulle sur la partie dense $C_c^\infty(\Omega)$. Si (φ_n) est une suite dans $C_c^\infty(\Omega)$ convergente vers u dans L^p, nous avons pour tout n que

$$0 = \Phi_f(\varphi_n) \tag{29.916}$$

En passant à la limite, nous voyons que Φ_f est la forme nulle. Elle est donc égale à Φ_0. La partie « unicité » du théorème de représentation de Riesz 29.188 nous indique alors que $f = 0$ dans L^p et donc $f = 0$ presque partout. □

[111] Voir les définitions 29.28 et 29.29.

PropLGoLtcS

Proposition 29.192.
Si $f \in L^1_{loc}(I)$ est telle que

$$\int_I f\varphi' = 0 \tag{29.917}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$, alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout.

Démonstration. Soit $\psi \in C_c^\infty(I)$ une fonction d'intégrale 1 sur I. Si $w \in C_c^\infty(I)$ alors nous considérons la fonction

$$h = w - \psi \int_I w, \tag{29.918}$$

qui est dans $C_c^\infty(I)$ et dont l'intégrale sur I est nulle. Par la proposition 19.2, la fonction h admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$; et nous notons φ cette primitive. L'hypothèse appliquée à φ donne

$$0 = \int_I f\varphi' = \int_I f\left(w - \psi\int_I w\right) = \int_I fw - \underbrace{\left(\int_I f(x)\psi(x)dx\right)}_{C}\left(\int_I w(y)dy\right) = \int_I w(f - C). \tag{29.919}$$

L'annulation de la dernière intégrale implique par la proposition 29.191 que $f - C = 0$ dans L^2, c'est-à-dire $f = C$ presque partout. □

PROPooXNRRooUdgFPr

Proposition 29.193 ([232]).
L'application

$$\begin{aligned}\Phi\colon L^1(\mathbb{R}^d) &\to L^\infty(\mathbb{R}^d)'\\ \Phi_g(f) &= \int_\Omega f\bar{g}d\lambda\end{aligned} \tag{29.920}$$

n'est pas surjective.

Démonstration. Nous allons construire un élément de $(L^\infty)'$ qui n'est pas dans l'image de L^1.

(1) **Mise en place du décor** Nous considérons l'espace vectoriel normé $\big(L^\infty(\mathbb{R}^d), N_\infty\big)$ défini en 29.28 et 29.29. Dedans, nous considérons le sous-espace D des classes des fonctions dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$; nous aurions très envie de le noter $\big(\mathscr{D}(\mathbb{R}^d), N_\infty\big)$, mais nous allons le noter $\big(D, N_\infty\big)$ parce que $\mathscr{D}$ est un espace de fonctions tandis que nous considérons un espace de classes de fonctions.

Si $f \in D$, alors f est une classe de fonctions contenant un unique représentant continu[112] ; nous le notons $\tilde{f}$.

(2) **Une première fonctionnelle**

Avec ça nous posons[113]

$$\begin{aligned}\phi_0\colon D &\to \mathbb{C}\\ f &\mapsto \tilde{f}(0).\end{aligned} \tag{29.921}$$

(3) **ϕ_0 est linéaire** Ça ne devrait pas poser de problèmes.

(4) **ϕ_0 est continue** Soit $f_k \xrightarrow{N_\infty} 0$. Nous devons prouver que $\tilde{f}_k(0) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$. Supposons le contraire et considérons $\epsilon > 0$ ainsi que k tels que $\tilde{f}_k(0) > \epsilon$.

Par continuité de $\tilde{f}_k$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\tilde{f}_k(x) > \epsilon/2$ pour tout $x \in B(0, \delta)$. Avec cela nous avons $N_\infty(f_k) > \epsilon/2$, et une impossibilité d'avoir[114] $f_k \xrightarrow{N_\infty} 0$.

(5) **ϕ_0 est de norme finie** C'est parce qu'elle est continue.

(6) **Utilisation de Hahn-Banach** Le théorème de Hahn-Banach 29.172 donne une extension continue

$$\phi\colon L^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}. \tag{29.922}$$

Cela est un élément de $(L^\infty)'$ et nous allons montrer qu'il n'est pas dans $\Phi(L^1)$.

[112] Existence parce que les éléments de D sont des classes d'éléments de $\mathscr{D}$ qui sont C^∞. Unicité par la proposition 22.134.
[113] Dans [232], l'auteur ne définit pas L^∞ comme un espace de classes de fonctions, et ces complications disparaissent.
[114] Je vous laisse emballer ce raisonnement dans « si pour tout N, il existe $k > N$ tel que ».

(7) **Par l'absurde** Supposons qu'il existe $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi = \Phi_u$. Pour tout $f \in L^\infty$, nous avons

$$\phi(f) = \Phi_u(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{u}. \tag{29.923}$$

Si f est la classe d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ s'annulant en 0, alors $\phi(f) = 0$. De telles fonctions non identiquement nulles existent par le lemme 17.180[115].

Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, un compact K ne contenant pas 0 et χ_K sa fonction indicatrice. Nous avons $\chi_K\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $(\chi_K\varphi)(0) = 0$. En passant aux classes, $\phi\big([\chi_K f]\big) = 0$. Nous avons :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} u\overline{(\chi_K\varphi)} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi}(u\overline{\chi_K}). \tag{29.924}$$

Vu que cela est valable pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, la proposition 29.191 dit que $u\chi_K = 0$ presque partout.

(8) **Le coup du compact**

Soit une suite de compacts K_n recouvrant $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Par exemple

$$K_n = \overline{B(0,n)} \setminus B(0, \frac{1}{n}). \tag{29.925}$$

Pour chacun des K_n, nous avons $u\chi_{K_n} = 0$ presque partout. Il existe donc une partie de mesure nulle N_k telle que $u\chi_{K_n}$ est nulle à part sur N_k. Au total, u est non nulle seulement sur $\bigcup_k N_k$ et peut-être en 0.

Bref, u est non nulle sur une partie de mesure nulle par le lemme 16.28.

(9) **Conclusion**

La fonction u est nulle presque partout. Donc $\phi = \Phi_u = 0$. Nous savons pourtant que ϕ n'est pas nulle parce qu'il existe des fonctions dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ qui ne s'annulent pas en 0.

Cela est une contradiction. Donc ϕ n'est pas dans l'image de Φ tout en étant dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)'$.

□

Dans [792], il est dit que « la preuve [du lemme suivant], un peu fastidieuse mais en rien ingénieuse, est laissée en exercice ». La preuve est donc de moi ; elle est un tout petit peu ingénieuse mais en rien fastidieuse. J'espère ne pas m'être trompé et me demande bien ce que l'auteur avait en tête. Ma preuve s'appuie sur la proposition 19.130 dont la preuve ne me paraît pas non plus « fastidieuse mais en rien ingénieuse ».

LEMooLDQRooEGWDlm

Lemme 29.194 ([792, 1])**.**
Soit $r > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s, t \in \mathbb{C}$ vérifiant $|s| \leqslant 1$, $|t| \leqslant 1$ et $|s - t| \geqslant r$ nous ayons

$$\left|\frac{s+t}{2}\right|^p \leqslant (1-\delta)\frac{|s|^p + |t|^p}{2}. \tag{29.926}$$

Démonstration. Soit $r > 0$. La partie de $\mathbb{C}^2$ donnée par

$$D = \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } |s| \leqslant 1, |t| \leqslant 1, |s-t| \geqslant r\} \tag{29.927}$$

est compacte. En effet elle est bornée (par la sphère de rayon $\sqrt{2}$) et fermée comme intersection de fermés[116]. Nous considérons la fonction $\Delta\colon D \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\left|\frac{s+t}{2}\right|^p = \Delta(s,t)\frac{|s|^p + |t|^p}{2}. \tag{29.928}$$

Si vous voulez une expression explicite,

$$\Delta(s,t) = \frac{2^{p-1}|s+t|^p}{|s|^p + |t|^p}. \tag{29.929}$$

Cela est bien défini et continu sur D parce que le complémentaire D^c (qui est ouvert) contient $(0,0)$ et donc aussi un voisinage de $(0,0)$.

La proposition 19.130 nous dit que la fonction $z \mapsto |z|^p$ est strictement convexe. En prenant la définition 19.123 de la stricte convexité avec $\theta = \frac{1}{2}$, nous trouvons que

$$\Delta(s,t) < 1 \tag{29.930}$$

pour tout $(s,t) \in D$. Vu que par ailleurs Δ est une fonction continue sur le compact D, elle atteint un minimum dans D. Soit Δ_0 ce minimum qui vérifie forcément $\Delta_0 < 1$.

En posant $1 - \delta = \Delta_0$ nous avons le résultat. □

[115] Ce lemme donne un exemple f sur $\mathbb{R}$. Si vous voulez vraiment un exemple dans $\mathbb{R}^d$, prenez $g(x) = f(\|x\|)$.
[116] Lemme 9.6 suivit du théorème de Borel-Lebesgue 11.23.

29.16.1 Le théorème de Jordan

Les définitions de chemins, de lacets et de courbes de Jordan sont dans 22.75.

LEMooZPRLooJPvrOE

Lemme-Définition 29.195 ([248]).
Soit un lacet $\gamma\colon [a,b]\to X$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} q\colon [a,b] &\to S^1 \\ t &\mapsto e^{2i\pi t/(b-a)} \end{aligned} \tag{29.931}$$

Il existe une unique application continue $\tilde{\gamma}\colon S^1\to \text{Image}(\gamma)$ telle que $\gamma=\tilde{\gamma}\circ q$.
*Cette application $\tilde{\gamma}$ est l'application **quotient** associée à γ.*

Démonstration. La proposition 20.66(1) dit que q est une bijection continue. Donc l'existence et l'unicité d'une application $\tilde{\gamma}=\gamma\circ q^{-1}$. Cette application est continue comme composée d'applications continues. □

LEMooCGVOooVPlSRD

Lemme 29.196 ([248]).
Soit $\gamma\colon [a,b]\to X$ un chemin d'image Γ.

ITEMooWKVAooCQDvpL

(1) Si γ est un chemin de Jordan[117], alors $\gamma\colon [a,b]\to\Gamma$ est un isomorphisme d'espaces topologiques.

ITEMooVYMXooEtgPJT

(2) Si γ est un lacet de Jordan, alors le quotient[118] $\tilde{\gamma}\colon S^1\to\Gamma$ est un homéomorphisme[119].

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Un chemin de Jordan est injectif, et donc bijectif sur son image. Il est donc une bijection continue depuis $[a,b]$ qui est compact. Il est donc un homéomorphisme par le lemme 9.301.

(2) **Pour (2)** L'application $\gamma\colon [a,b[\to\Gamma$ est une bijection continue parce que γ est un lacet de Jordan. Son quotient $\tilde{\gamma}\colon S^1\to\Gamma$ est donc une bijection continue depuis le compact S^1. Le lemme 9.301 conclut que c'est un homéomorphisme.

□

29.16.2 Lemmes pour la parties composantes connexe

CORooPGFLooUTVZMi

Corolaire 29.197.
À propos de courbes simples et de Jordan.

ITEMooIUAXooOfvNov

(1) Toute courbe simple est homéomorphe à $[0,1]$.

(2) Toute courbe de Jordan est homéomorphe à S^1.

Démonstration. Une courbe simple est l'image d'un lacet de Jordan. Donc $\gamma\colon [a,b]\to\Gamma$ est un homéomorphisme par le lemme 29.196(1). Le lemme 12.327 fournit un homéomorphisme entre $[a,b]$ et $[0,1]$. Une composition d'homéomorphismes est un homéomorphisme.

Une courbe de Jordan est l'image d'un lacet de Jordan $\gamma\colon [a,b]\to\Gamma$. Le lemme 29.196(2) dit alors que Γ est homéomorphe à S^1. □

DEFooURFMooXIaRkl

Définition 29.198 ([248]).
Soit un compact K dans $\mathbb{C}$. Nous notons

(1) $\mathcal{G}(K)$ le groupe multiplicatif des fonctions continues $f\colon K\to\mathbb{C}^*$.

(2) $\mathcal{E}(K)$ le sous-groupe des fonctions admettant un logarithme continu[120].

(3) $G(K)$ le quotient[121] $G(K)=\mathcal{G}(K)/\mathcal{E}(K)$.

LEMooHEOWooHTtHsJ

Lemme 29.199 ([248]).
Si K_1 et K_2 sont des compacts homéomorphes, alors les groupes $G(K_1)$ et $G(K_2)$ sont isomorphes.

[117] Définition 22.75.
[118] Définition 29.195.
[119] Bijection continue d'inverse continu.
[120] Logarithme continu, définition 28.46.
[121] Le groupe $\mathcal{G}(K)$ est commutatif ; donc pas de problèmes pour que $\mathcal{E}(K)$ soit normal.

Démonstration. Soit un homéomorphisme $\theta\colon K_1 \to K_2$. Nous posons

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathcal{G}(K_1) &\to \mathcal{G}(K_2)\\ f &\mapsto f\circ\theta^{-1}.\end{aligned} \tag{29.932}$$

(1) **Injective** Suppose $\psi(f)=\psi(g)$. Vu que θ est une bijection, l'égalité $f\circ\theta^{-1}=g\circ\theta^{-1}$ implique $f=g$. Donc ψ est injective.

(2) **Surjective** Soit $f\in\mathcal{G}(K_2)$. Nous avons $f\circ\theta\in\mathcal{G}(K_1)$, et évidemment $\psi(f\circ\theta)=f$.

(3) **Morphisme** Nous avons

$$\psi(fg)=fg\circ\theta^{-1}=(f\circ\theta^{-1})(g\circ\theta^{-1})=\psi(f)\psi(g). \tag{29.933}$$

Nous avons prouvé que ψ est un isomorphisme. Nous devons maintenant voir qu'il passe au quotient, c'est-à-dire que $\psi\big(\mathcal{E}(K_1)\big)\subset\mathcal{E}(K_2)$. Soit $f\in\mathcal{E}(K_1)$, soit un logarithme continu g de f, c'est-à-dire $\exp\big(g(x)\big)=f(x)$. Pour $y\in K_2$, il existe $x\in K_1$ tel que $y=\theta(x)$. Dans ce cas nous avons

$$\exp\big((g\circ\theta^{-1})(y)\big)=\exp\big(g(x)\big)=f(x)=(f\circ\theta^{-1})(y). \tag{29.934}$$

Autrement dit,

$$\exp\big(\psi(g)(y)\big)=\psi(f). \tag{29.935}$$

Donc $\psi(g)$ est un logarithme continu de $\psi(f)$. □

DEFooKXHUooTsKuOe

Définition 29.200.
Petite notation. Si un compact K est donné, pour $p\in\mathbb{C}\setminus K$, nous notons

$$\begin{aligned}f_p\colon K &\to \mathbb{C}^*\\ z &\mapsto z-p.\end{aligned} \tag{29.936}$$

LEMooSULYooWiEoyf

Lemme 29.201.
Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto \lambda x+\alpha\end{aligned} \tag{29.937}$$

avec $\lambda\neq 0$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) et $\alpha\in\mathbb{C}$.
Soit $q\in\mathbb{C}$. Nous avons[122]

$$f_q\big(\phi(x)\big)=\lambda f_{\phi^{-1}(q)}(x). \tag{29.938}$$

Démonstration. En ce qui concerne la multiplication nous avons $f_q(\lambda x)=\lambda x-q$, et donc

$$\frac{1}{\lambda}f_q(\lambda x)=x-\frac{q}{\lambda}=f_{q/\lambda}(x). \tag{29.939}$$

Nous retenons : $f_q(\lambda x)=\lambda f_{q/\lambda}(x)$. En ce qui concerne la translation, c'est plus facile :

$$f_q(x+\alpha)=x+\alpha-q=f_{q-\alpha}(x). \tag{29.940}$$

Lorsque nous faisons les deux en même temps,

$$f_q\big(\phi(x)\big)=f_{q-\alpha}(\lambda x)=\lambda f_{(q-\alpha)/\lambda}(x). \tag{29.941}$$

Il suffit maintenant de remarquer que $\phi^{-1}(q)=\frac{q-\alpha}{\lambda}$, ce qui est facilement vérifié :

$$\phi\left(\frac{q-\alpha}{\lambda}\right)=\lambda\left(\frac{q-\alpha}{\lambda}\right)+\alpha=q. \tag{29.942}$$

□

LEMooBZUCooHWfolf

Lemme 29.202 ([248]).
Soit un lacet de Jordan[123] *$\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}$. Nous notons Γ son image.*

(1) Γ est compact.

[122] L'application f_q est celle de la définition 29.200.
[123] Définition 22.75.

(2) *L'application*[124]

$$\begin{aligned} I_\gamma\colon \mathcal{G}(\Gamma) &\to \mathbb{Z} \\ f &\mapsto \mathrm{Ind}(f\circ\gamma,0) \end{aligned} \tag{29.943}$$

est un morphisme surjectif de noyau $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)$ le groupe multiplicatif des lacets $J\to\mathbb{C}^*$. Le fait que Γ soit compact est parce qu'il est l'image du compact $[a,b]$ par l'application continue γ (théorème 9.298).

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \xi\colon \mathcal{G}(\Gamma) &\to \mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*) \\ f &\mapsto f\circ\gamma. \end{aligned} \tag{29.944}$$

(1) **ξ est un morphisme** Nous avons

$$\xi(fg)=(fg)\circ\gamma=(f\circ\gamma)(g\circ\gamma)=\xi(f)\xi(g). \tag{29.945}$$

(2) **ξ est injective** Nous nous souvenons de l'application quotient $\tilde{\gamma}\colon S^1\to\Gamma$, qui est un homéomorphisme par le lemme 29.196(1). Nous nous souvenons également de l'application

$$\begin{aligned} q\colon [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp\big(2i\pi t/(b-a)\big) \end{aligned} \tag{29.946}$$

qui vérifie $\gamma=\tilde{\gamma}\circ q$. Nous montrons que ceci est l'inverse de ξ :

$$\begin{aligned} \theta\colon \mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*) &\to \mathcal{G}(\Gamma) \\ \lambda &\mapsto \tilde{\lambda}\circ\tilde{\gamma}^{-1}. \end{aligned} \tag{29.947}$$

Soit $\sigma\in\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)$. Nous avons

$$\xi\big(\theta(\sigma)\big)=\theta(\sigma)\circ\gamma=\tilde{\sigma}\circ\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma=\tilde{\sigma}\circ\tilde{\gamma}^{-1}\circ\tilde{\gamma}\circ q=\tilde{\sigma}\circ q=\sigma. \tag{29.948}$$

(3) **Conclusion 1** La proposition 28.57 donne un morphisme surjectif $\psi\colon\mathcal{L}(J,\mathbb{C}^*)\to\mathbb{Z}$. L'application I_γ dont nous parlons ici est exactement $I_\gamma=\psi\circ\xi$. Donc I_γ est un morphisme surjectif.

(4) **Noyau** Nous devons encore montrer que le noyau de I_γ est $\mathcal{E}(\Gamma)$.

(4a) **Dans un sens** Soit $k\in\ker(I_\gamma)$. Alors $(\psi\circ\xi)(k)=0$, c'est-à-dire $\psi(k\circ\gamma)=0$. La proposition 28.57(3) dit qu'alors $k\circ\gamma$ est un lacet homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant. Donc il existe une application continue $H\colon[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{cases} H(0,t)=(k\circ\gamma)(t) & \text{(29.949a)}\\ H(1,t)=1 & \text{(29.949b)} \end{cases}$$

pour tout t. Vu que l'application $\gamma\colon[a,b[\to\mathbb{C}^*$ est injective, nous pouvons considérer son inverse ; pour la suite, quand nous écrirons γ^{-1}, c'est bien de $\gamma^{-1}\colon\Gamma\to[a,b[$ que nous parlerons. C'est une application continue par le lemme 9.302. Nous pouvons donc considérer

$$\begin{aligned} L\colon [0,1]\times\Gamma &\to \mathbb{C}^* \\ (u,z) &\mapsto H\big(u,\gamma^{-1}(z)\big). \end{aligned} \tag{29.950}$$

Cela est une application continue parce que H et γ le sont. Nous avons

$$L(0,z)=H\big(0,\gamma^{-1}(z)\big)=(k\circ\gamma)\big(\gamma^{-1}(z)\big)=k(z), \tag{29.951}$$

et

$$L(1,z)=1. \tag{29.952}$$

Donc k est homotope à une application constante sur Γ. Le théorème de Borsuk 28.49 dit alors que k admet un logarithme continu sur Γ, c'est-à-dire que $k\in\mathcal{E}(\Gamma)$.

[124] Rappel définitions 29.198 pour $\mathcal{G}(\Gamma)$ et $\mathcal{E}(\Gamma)$.

(4b) **Dans l'autre sens** C'est le même raisonnement que le premier, mais un peu plus simple parce qu'il n'y a pas de débats sur la continuité. Soit $k \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Le théorème de Boruk indique que k est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à une application constante. Il existe une application continue $H\colon [0,1]\times\Gamma \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{cases} H(0,z) = k(z) & (29.953a)\\ H(1,z) = 1 & (29.953b)\end{cases}$$

pour tout $z \in \Gamma$. Le chemin $k\circ\gamma$ est homotope à un lacet constant. En effet nous avons l'application continue

$$\begin{aligned} L\colon [0,1]\times[a,b] &\to \mathbb{C}^*\\ (u,t) &\mapsto H\big(u,\gamma(t)\big)\end{aligned} \tag{29.954}$$

qui vérifie $L(0,t) = (k\circ\gamma)(t)$ et $L(1,t) = 1$. Nous avons donc

$$0 = \psi(k\circ\gamma) = I_\gamma(k). \tag{29.955}$$

Nous avons prouvé que $k \in \ker(I_\gamma)$.

□

LEMooODIPooBZJPAW

Lemme 29.203 ([248]).
Soit un lacet de Jordan γ dont l'image est Γ. Des fonctions $f_0, f_1 \in \mathcal{G}(\Gamma)$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ si et seulement si les lacets $f_0\circ\gamma$ et $f_1\circ\gamma$ le sont.

Démonstration. Dans les deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f_0 et f_1 sont homotopes : il existe une application continue $H\colon [0,1]\times\Gamma \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\begin{cases} H(0,z) = f_0(z) & (29.956a)\\ H(1,z) = f_1(z) & (29.956b)\end{cases}$$

pour tout $z \in \Gamma$. L'homotopie entre $f_0\circ\gamma$ et $f_1\circ\gamma$ est donnée par l'application continue

$$\begin{aligned} L\colon [0,1]\times[a,b] &\to \mathbb{C}^*\\ (u,t) &\mapsto H\big(u,\gamma(t)\big).\end{aligned} \tag{29.957}$$

Elle vérifie $L(0,t) = (f_0\circ\gamma)(t)$ et $L(1,t) = (f_1\circ\gamma)(t)$.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons l'existence d'une application continue $H\colon [0,1]\times[a,b] \to \mathbb{C}^*$ telle que $H(0,t) = (f_0\circ\gamma)(t)$ et $H(1,t) = (f_1\circ\gamma)(t)$.

L'application $\gamma\colon [a,b[\to \Gamma$ est continue et bijective. Sa réciproque γ^{-1} est donc également continue (lemme 9.302). Nous pouvons donc considérer l'application continue

$$\begin{aligned} L\colon [0,1]\times\Gamma &\to \mathbb{C}^*\\ (u,z) &\mapsto H\big(u,\gamma^{-1}(z)\big).\end{aligned} \tag{29.958}$$

Elle vérifie

$$L(0,z) = H\big(0,\gamma^{-1}(z)\big) = (f_0\circ\gamma)\big(\gamma^{-1}(z)\big) = f_0(z) \tag{29.959}$$

et $L(1,z) = f_1(z)$. Donc L est une homotopie dans C^* entre f_0 et f_1.

□

CORooDOMAooHtKPTe

Corolaire 29.204 ([248]).
Si Γ est une courbe de Jordan, alors[125] $G(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}$.

Démonstration. Nous allons utiliser le premier théorème d'isomorphisme 2.20. Si γ est un lacet de Jordan dont la courbe est Γ, le lemme 29.202 dit que $I_\gamma\colon \mathcal{G}(\Gamma) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme surjectif tel que $\ker(I_\gamma) = \mathcal{E}(\Gamma)$. Le théorème d'isomorphisme dit alors que

$$\frac{\mathcal{G}(\Gamma)}{\mathcal{E}(\Gamma)} = I_\gamma\big(\mathcal{G}(\Gamma)\big) = \mathbb{Z}. \tag{29.960}$$

□

[125] Rappel : $G(\Gamma)$ est défini en 29.198.

Rappel, si K est compact dans $\mathbb{C}$, et si $p \in \mathbb{C}$, nous considérons la fonction $f_p \in \mathcal{G}(K)$ par $f_p(z) = z - p$.

LEMooAKVFooFMHaOZ

Lemme 29.205 ([1]).
Soient une courbe de Jordan γ ainsi que $p \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$\mathrm{Ind}(f_p \circ \gamma, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma, p). \tag{29.961}$$

PROPooUPPEooEQOOkh

Proposition 29.206 ([248]).
Soit $p \in \mathbb{C}$. Si V est un disque ou un rectangle de centre p, alors $\mathcal{G}(\partial V)$ est engendré par $\mathcal{E}(\partial V)$ et par f_p.

Démonstration. Ici ∂V peut être vu comme un chemin que nous allons noter aussi γ. Utilisant le lemme 29.205, nous avons

EQooRSXRooTJwDNP

$$I_{\partial V}(f_p) = \mathrm{Ind}(f_p \circ \partial V, 0) = \mathrm{Ind}(\partial V, p). \tag{29.962}$$

(1) **Si V est un disque** Alors ∂V est le chemin

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto p + Re^{it}. \end{aligned} \tag{29.963}$$

Nous avons alors le calcul suivant :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p} dt \tag{29.964a}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt \tag{29.964b}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i dt \tag{29.964c}$$

$$= 1. \tag{29.964d}$$

(2) **Si V est un rectangle** Supposons que V ait une hauteur de h et une largeur de l tout en étant centré en p. Le chemin ∂V se décompose en quatre parties dont la première est

$$\begin{aligned} \gamma_1\colon [0, l] &\to \mathbb{C} \setminus \{p\} \\ t &\mapsto p - \frac{hi}{2} - \frac{l}{2} + t \end{aligned} \tag{29.965}$$

Je vous laisse voir les autres parties et calculer les intégrales[126]

Dans les deux cas nous avons $\mathrm{Ind}(\partial V, p) = 1$ et donc, en continuant (29.962),

$$I_{\partial V}(f_p) = 1. \tag{29.966}$$

Nous savons par le lemme 29.202 que

$$\begin{aligned} I_{\partial V}\colon \mathcal{G}(\partial V) &\to \mathbb{Z} \\ f &\mapsto \mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0) \end{aligned} \tag{29.967}$$

est un morphisme surjectif de noyau $\mathcal{E}(\Gamma)$. Le fait que ce soit un morphisme implique que

$$I_{\partial V}(f_p^n) = nI_{\partial V}(f_p) = n. \tag{29.968}$$

Mais $G(\partial V) = \mathcal{G}(\partial V)/\mathcal{E}(\partial V)$. Donc nous avons déjà prouvé que $\{f_p^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contient un élément de chaque classe dans $\mathcal{G}(\partial V)/\mathcal{E}(\partial V)$.

Soit $f \in \mathcal{G}(\partial V)$. En notant [.] la classe par rapport à $\mathcal{E}(\partial V)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$f \in \big[I_{\partial V}(f_p^k)\big]. \tag{29.969}$$

Autrement dit, en posant $\alpha = I_{\partial V}(f_p^k)$, il existe $h \in \mathcal{E}(\partial V)$ tel que $f = \alpha h$. Nous avons donc bien prouvé que $\{f_p, \mathcal{E}(\partial V)\}$ engendre $\mathcal{G}(\partial V)$. □

PROPooJNZQooLWDKww

Proposition 29.207 ([248]).
Soit un compact K de $\mathbb{C}$ ainsi que p, q deux points dans la même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Alors

[126] Je n'ai pas vérifié ; si ça pose un problème, écrivez-moi.

ITEMooQMKOooQHhUGn

(1) $f_p/f_q \in \mathcal{E}(K)$.

ITEMooUJLPooApgXIF

(2) *Si p est dans la composante non bornée*[127] *de $\mathbb{C}\setminus K$, alors $f_p \in \mathcal{E}(K)$.*

Démonstration. Soient p et q dans la même composante connexe de $\mathbb{C}\setminus K$. La proposition 11.70 nous autorise à considérer un chemin $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C}\setminus K$ tel que $\gamma(0)=p$ et $\gamma(1)=q$. Nous posons

$$\begin{aligned} F\colon [0,1]\times K &\to \mathbb{C}^*\\ (t,z) &\mapsto f_{\gamma(t)}(z)=z-\gamma(t). \end{aligned} \tag{29.970}$$

C'est une application continue vérifiant $F(0,z)=f_p(z)$ et $F(1,z)=f_q(z)$. Donc les applications f_p et f_q sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$. La proposition 28.17 nous indique qu'alors l'application f_p/f_q est homotope à 1. Le théorème de Borsuk 28.49 conclut que $f_p/f_q\in\mathcal{E}(K)$.

Soit p dans la composante non bornée de $\mathbb{C}\setminus K$. Vu que K est borné, nous pouvons prendre $r>0$ tel que $K\subset B(0,r)$. Soit $p_0\notin\overline{B(0,r)}$; ce point est également dans la composante non bornée de K. Par le point (1), nous avons $f_p/f_{p_0}\in\mathcal{E}(K)$.

Nous allons prouver que $f_{p_0}\in\mathcal{E}(K)$. Pour cela nous posons

$$\begin{aligned} F\colon [0,1]\times K &\to \mathbb{C}^*\\ (t,z) &\mapsto tz-p_0. \end{aligned} \tag{29.971}$$

Vu que $t\in[0,1]$ et que $z\in K\subset B(0,r)$, nous avons toujours $tz\in B(0,r)$. Étant donné que p_0 n'est pas dans $B(0,r)$, l'application F prend bien ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

L'application F vérifie également $F(0,z)=-p_0$ et $F(1,z)=z-p_0=f_{p_0}(z)$. Donc f_{p_0} est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à l'application constante $-p_0$. Nous en déduisons que $f_{p_0}\in\mathcal{E}(K)$. Au final,

$$f_p=f_{p_0}\frac{f_p}{f_{p_0}}\in\mathcal{E}(K) \tag{29.972}$$

parce que f_{p_0} et f_p/f_{p_0} sont dans $\mathcal{E}(K)$. □

LEMooOTMGooZeUoCy

Lemme 29.208 ([248]).
Soient des composantes connexes bornées $\mathcal{O}_1$, …, $\mathcal{O}_N$ de $\mathbb{C}\setminus K$ que nous supposons deux à deux disjointes. Soient $p_i\in\mathcal{O}_i$. Si $n_1,\dots,n_N\in\mathbb{Z}$ sont des entiers non tous nuls, alors

$$\prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{n_i}\notin\mathcal{E}(K). \tag{29.973}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Par l'absurde** Nous notons $f=\prod_{i=1}^N f_{p_i}^{n_i}$ et nous supposons par l'absurde que $f\in\mathcal{E}(K)$. Par le théorème de Borsuk 28.49, nous avons une extension continue $\tilde{f}\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$.

(2) $\partial\mathcal{O}_i\subset K$ C'est le lemme 9.271.

(3) p_j **n'est pas dans** $\bar{\mathcal{O}}_i$ Nous savons que $p_j\in\mathcal{O}_j$. Mais $\partial\mathcal{O}_i\subset K$ et $K\cap\mathcal{O}_j=\varnothing$. Donc p_j n'est pas dans $\partial\mathcal{O}_i$. Comme les $\mathcal{O}_i$ sont disjoints, nous avons aussi $p_j\notin\mathcal{O}_i$. Bref,

$$p_j\notin\bar{\mathcal{O}}_i. \tag{29.974}$$

(4) **Quelques fonctions** Nous posons

$$\begin{aligned} G_i\colon\bar{\mathcal{O}}_i &\to \mathbb{C}^*\\ z &\mapsto \prod_{j\neq i}(z-p_j)^{n_j}. \end{aligned} \tag{29.975}$$

Le fait que G_i prenne ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$ est parce que $p_j\notin\bar{\mathcal{O}}_i$ pour tout $i\neq j$.

Nous reprenons notre extension continue $\tilde{f}\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ et nous posons

$$\begin{aligned} F_i\colon\bar{\mathcal{O}}_i &\to \mathbb{C}^*\\ z &\mapsto \frac{\tilde{f}(z)}{G_i(z)}. \end{aligned} \tag{29.976}$$

[127] Il y en a une seule, c'est le lemme 28.51.

Vu que G_i ne s'annule pas sur $\bar{\mathcal{O}}_i$, cette fonction F_i est bien définie et continue.

Nous nous fixons i, et nous allons prouver que $n_i = 0$. Nous posons $D = B(0,R)$ avec R assez grand pour contenir $\bar{\mathcal{O}}_i$. Posons

$$\begin{aligned} H_i\colon \overline{B(0,R)} &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \begin{cases} F_i(z) & \text{si } z \in \bar{\mathcal{O}}_i \\ (z-p_i)^{n_i} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{29.977}$$

(5) **H_i est continue** L'application F_i est continue sur $\bar{\mathcal{O}}_i$. L'application $z \mapsto (z-p_i)^{n_i}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \partial\mathcal{O}_i$. Nous avons $z \in \partial\mathcal{O}_i \subset K$ et donc $\tilde{f}(z) = f(z)$. Donc

$$F_i(z) = \frac{f(z)}{G_i(z)} = f_{p_i}(z)^{n_i}. \tag{29.978}$$

Les deux applications F_i et $z \mapsto (z-p_i)^{n_i}$ sont égales sur le bord $\partial\mathcal{O}_i$. Donc H_i est continue sur $\overline{B(0,R)}$.

(6) **Logarithme continu** La partie $\overline{B(0,R)}$ est convexe et compacte. Le corolaire 28.50 dit que H_i admet un logarithme continu. La proposition 28.60 nous affirme que pour tout lacet $\gamma\colon [0,1] \to \overline{B(0,R)}$, nous avons $\operatorname{Ind}(H_i \circ \gamma, 0) = 0$. En particulier le chemin $\partial B(0,R)$ est dans $\overline{B(0,R)}$. Avant de calculer $\operatorname{Ind}(H_i \circ \gamma, 0)$, remarquons que $\gamma(t) \in \overline{B(0,R)}$ et reste donc en-dehors de $\bar{\mathcal{O}}_i$. Donc

$$H_i\big(\gamma(t)\big) = \big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i} \tag{29.979}$$

et

$$(H_i \circ \gamma)'(t) = n_i \gamma'(t) \big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i - 1}. \tag{29.980}$$

De plus si vous voulez une forme explicite de γ, c'est pas compliqué : c'est un cercle de rayon R. Nous avons un calcul :

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Ind}(H_i \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_i \circ \gamma} \frac{dz}{z} && \text{(29.981a)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(H_i \circ \gamma)'(t)}{(H_i \circ \gamma)(t)} && \text{(29.981b)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{n_i \gamma'(t) \big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i - 1}}{\big(\gamma(t) - p_i\big)^{n_i}} && \text{(29.981c)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{n_i \gamma'(t)}{\gamma(t) - p_i} dt && \text{(29.981d)} \\ &= n_i \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - p_i} && \text{(29.981e)} \\ &= n_i \operatorname{Ind}(\gamma, p_i). && \text{(29.981f)} \end{aligned}$$

Vu que $p_i \in B(0,R)$ et que γ est un cercle autour, nous avons $\operatorname{Ind}(\gamma, p_i) = 1$. Donc

$$0 = \operatorname{Ind}(H_i \circ \gamma, 0) = n_i. \tag{29.982}$$

□

LEMooEJRMooNJhMov

Lemme 29.209 ([248, 1])**.**
Nous notons $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$. Pour chaque $i \in I$ nous considérons $p_i \in \mathcal{O}_i$. Alors

$$\mathcal{G}(K) = \operatorname{gr}\big(\mathcal{E}(K), \{f_{p_i}\}_{i\in I}\big). \tag{29.983}$$

Démonstration. Nous commençons par prouver que si $q \in \mathbb{C} \setminus K$, alors

$$f_q \in \operatorname{gr}\big(\mathcal{E}(K), \{f_{p_i}\}_{i\in I}\big). \tag{29.984}$$

Il y a deux possibilités : soit q est dans la composante non bornée, soit il est dans un des $\mathcal{O}_i$.

(1) **Si q est dans la composante non bornée** Alors la proposition 29.207(2) dit que $f_q \in \mathcal{E}(K)$.

(2) **Si $q \in \mathcal{O}_i$** Alors la proposition 29.207(1) dit que $f_q/f_{p_i} \in \mathcal{E}(K)$. Dans ce cas nous avons

$$f_q = f_{p_i}\frac{f_q}{f_{p_i}} \in \text{gr}\left(f_{p_i}, \mathcal{E}(K)\right). \tag{29.985}$$

Soit $f \in \mathcal{G}(K)$. Nous devons prouver l'existence de $g \in \mathcal{E}(K)$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{C} \setminus K$ et $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$f = g\prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}. \tag{29.986}$$

Nous commençons par supposer que $K \subset Q = [0,1] \times [0,1]$.

(1) **Les petits carrés** Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous subdivisons le carré Q en carrés fermés de taille $1/n$; il y a n^2 tels carrés. Nous notons $Q_1, \dots, Q_l$ ceux qui n'ont pas d'intersection avec K, et nous notons A l'union des autres.

Grâce au lemme 12.48, nous savons que pour tout $z \in A$, nous avons $d(z, K) \leqslant \sqrt{2}/n$.

(2) **Prolongement** La partie K est fermée, f est continue dessus. Le théorème de Tietze 29.177 donne un prolongement continu $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous avons

$$K \subset S = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } F(z) \neq 0\}. \tag{29.987}$$

Vu que F est continue, S est ouverte.

(3) **Grand n** Nous prouvons que n peut être choisi assez grand pour que F ne s'annule pas sur A. La fonction F est continue et ne s'annule pas sur l'ouvert S qui contient K. Si $S = \mathbb{C}$, alors n'importe quel n convient.

Sinon nous considérons

$$\begin{aligned}\varphi\colon K &\to [0,\infty[\\ z &\mapsto d(z, S^c).\end{aligned} \tag{29.988}$$

L'application φ est continue sur le compact K. Elle a donc un minimum global que nous nommons s. Pour tout $z \in K$ nous avons $d(z, S^c) \geqslant s$. Donc pour tout $z \in K$ nous avons $B(z, s/2) \subset S$. Nous prenons n assez grand pour avoir

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{s}{2}. \tag{29.989}$$ EQooEWQYopWYsIms

Avec ça nous avons $A \subset S$. En effet, soit $z \in A$. Nous avons $d(z, K) < \sqrt{2}/n < s/2$. Donc il existe $k \in K$ tel que

$$z \in B(k, \frac{s}{2}). \tag{29.990}$$

Comme $k \in K$, nous avons $d(k, S^c) = \varphi(k) \geqslant s$ et donc $B(k, s/2) \subset S$. Nous avons prouvé que $z \in S$.

Bref, nous prenons n assez grand pour vérifier (29.989), et nous avons alors

$$A \subset \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } F(z) \neq 0\}. \tag{29.991}$$

(4) **Une propriété à prouver** SPooVQHTooUNukEE Nous allons prouver l'énoncé suivant. Soit $k = 0, \dots, l$, soit une application continue $h\colon K \to \mathbb{C}^*$ admettant un prolongement continu $F\colon A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_k) \to \mathbb{C}^*$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'application $h/f_{q_{k+1}}^m$ admette un prolongement continu $\tilde{F}\colon A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_{k+1}) \to \mathbb{C}^*$.

(5) **Note pour f**

Jusqu'ici, nous avons prouvé que f vérifie les hypothèses de la récurrence pour $k = 0$.

De plus, cette propriété à prouver n'est pas à prouver par récurrence sur k. Le k est fixé, et nous prouvons la propriété de façon directe. Une récurrence va venir un peu plus loin.

(6) **Preuve de la propriété** Soit $h\colon K \to \mathbb{C}^*$ continue et admettant un prolongement continu $F\colon A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_k) \to \mathbb{C}^*$. Notons $B_k = A \cup (Q_1 \cup \dots \cup Q_k)$ et posons

$$\begin{aligned}g\colon \partial Q_{k+1} &\to \mathbb{C}^*\\ z &\mapsto \begin{cases} F(z) & \text{si } z \in Q_{k+1} \cap B_k\\ s(z) & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned} \tag{29.992}$$

Voyons ce que s peut être pour que g soit continue. La partie ∂Q_{k+1} est le bord d'un carré et est donc constitué de 4 côtés. La valeur de g sur certains de ces côtés (ceux qui sont aussi dans B_k) est prescrite par F. Sur les autres côtés, nous pouvons mettre n'importe quoi pourvu que ce soit égal à F sur les coins et que $s(z) \neq 0$. Étant donné que les valeurs de F sur les coins est non nulle et que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, c'est possible.

Nous notons q_{k+1} le centre de Q_{k+1}. La proposition 29.206 s'applique au compact ∂Q_{k+1}.

$$g \in \mathcal{G}(\partial Q_{k+1}) = \operatorname{gr}\big(\mathcal{E}(\partial Q_{k+1}), f_{q_{k+1}}\big). \tag{29.993}$$

Il existe donc $\xi \in \mathcal{E}(\partial Q_{k+1})$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$g(z) = \xi(z) f_{q_{k+1}}^m(z). \tag{29.994}$$

Prouvons que $Q_{k+1} \cap B_k$ est une union de côtés de Q_{k+1}. Nous avons

$$Q_{k+1} \cap B_k = (Q_{k+1} \cap A) \cup (Q_{k+1} \cap Q_1) \cup \ldots \cup (Q_{k+1} \cap Q_k). \tag{29.995}$$

EQooSPSQooVErrCl

Nous nous souvenons que $A = \bigcup_{i=1}^s R_i$ où R_i sont les carrés qui intersectent K. Donc $R_i \cap Q_j$ est au maximum les côtés de Q_j. Bref, chacun des termes de l'union à droite de (29.995) est une union de côtés de Q_{k+1}.

L'application $\xi \in \mathcal{E}(\partial Q_{k+1})$ admet un logarithme continu et admet donc une extension continue $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ (théorème de Borsuk 28.49). Nous considérons cette extension seulement sur Q_{k+1} et nous l'appelons $G\colon Q_{k+1} \to \mathbb{C}^*$. Nous posons

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon A \cup (Q_1 \cup \ldots \cup Q_{k+1}) &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \begin{cases} G(z) & \text{si } z \in Q_{k+1} \\ \frac{F(z)}{(z-q_{k+1})^m} & \text{si } z \in A \cup (Q_1 \cup \ldots \cup Q_k). \end{cases} \end{aligned} \tag{29.996}$$

Voyons que cette fonction est continue en montrant que les deux morceaux ont les mêmes valeurs sur l'intersection. Soit $z \in Q_{k+1} \cap (A \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_k)$. Alors $z \in \partial Q_{k+1}$ parce que nous avons dit que (29.995) est dans le bord dans Q_{k+1}. Dans ce cas nous avons

$$G(z) = \xi(z) = \frac{g(z)}{f_{q_{k+1}}^m(z)} \tag{29.997a}$$

$$= \frac{F(z)}{f_{q_{k+1}}^m(z)}, \tag{29.997b}$$

$$\tag{29.997c}$$

et donc bien la continuité de $\tilde{F}$.

Si $z \in K$, étant donné que $K \subset A$ nous avons

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{(z - q_{q_{k+1}})^m} = \frac{h(z)}{f_{q_{k+1}}^m(z)}, \tag{29.998}$$

donc $\tilde{F}$ prolonge bien $h/f_{q_{k+1}}^m$.

(7) **Récurrence** En appliquant la propriété (4) l fois, nous construisons une suite d'entiers $(m_i)_{i=1,\ldots,l}$ et une application continue $F_l\colon A \cup (Q_1 \cup \ldots \cup Q_l) = Q \to \mathbb{C}^*$ qui prolonge $f/\prod_{i=1}^l f_{q_i}^{m_i}$.

Sur K nous avons alors

$$f = F_l \prod_{i=1}^l f_{q_i}^{m_i}. \tag{29.999}$$

C'est une application continue sur le convexe Q. Donc $F_l \in \mathcal{E}(Q)$ et donc $F_l \in \mathcal{E}(K)$.

Maintenant vous croyez avoir fini mais non. Vous devez encore vérifier que tout est encore valable si K n'est pas contenu dans $[0,1] \times [0,1]$.

Soit un compact général $K \subset \mathbb{C}$. Pour $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, nous posons $\phi(x) = \lambda x + \alpha$. Il existe forcément un choix de λ et de α tels que $\phi(K) \subset [0,1] \times i[0,1]$.

Soit $f \in \mathcal{G}(K)$. Nous appliquons le résultat déjà prouvé à l'application $f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{G}\big(\phi(K)\big)$. Nous avons $g \in \mathcal{E}\big(\phi(K)\big)$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{C} \setminus \phi(K)$ et $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}$ tels que, pour tout $y \in \phi(K)$,

$$(f \circ \phi^{-1})(y) = g(y) \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}(y). \tag{29.1000}$$

Pour $x \in K$ nous avons donc

$$f(x) = (g \circ \phi)(x) \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}\big(\phi(x)\big). \tag{29.1001}$$

C'est le moment de sortir le lemme 29.201 :

$$f(x) = (g \circ \phi)(x) \prod_{i=1}^{l} f_{q_i}^{m_i}\big(\phi(x)\big) = (g \circ \phi)(x) \prod_{i=1}^{l} \lambda^{m_i} f_{\phi^{-1}(q_i)}^{m_i}(x). \tag{29.1002}$$

En posant

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) = \left(\prod_{i=1}^{l} \lambda^{m_i} \right) (g \circ \phi)(x) & \text{(29.1003a)} \\ \tilde{m}_i = m_i & \text{(29.1003b)} \\ \tilde{q}_i = \phi^{-1}(q_i), & \text{(29.1003c)} \end{cases}$$

nous avons $\tilde{q}_i \in \mathbb{C} \setminus K$, $\tilde{g} \in \mathcal{E}(K)$ et $f = \tilde{g} \prod_{i=1}^{l} f_{\tilde{q}_i}$. □

LEMooBHOGooXxBYGA

Lemme 29.210.
Une partie ouverte de $\mathbb{C}$ a au plus un nombre dénombrable de composantes connexes.

Démonstration. Soit un ouvert A de $\mathbb{C}$. Nous notons $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{C}$ (proposition 9.207). Une composante connexe de A est ouverte[128]. Les composantes connexes de A sont disjointes, et chacune est l'union d'une quantité (au plus) dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$. Si il y avait une quantité non dénombrable de composantes connexes, cela ferait une quantité non dénombrable d'éléments différents de $\mathcal{B}$. Donc non. □

THOooDGXSooMMHTds

Théorème 29.211.
Soit un compact K dans $\mathbb{C}$. Alors

(1) Le nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ est fini ou dénombrable.

ITEMooWLGDooZGORrP

(2) En notant N le nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$, nous avons

$$G(K) = \mathcal{G}(K)/\mathcal{E}(K) \simeq \mathbb{Z}^N \tag{29.1004}$$

où, si N est infini, $\mathbb{Z}^N$ désigne l'ensemble des suites finies dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Le fait que le nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ est au maximum dénombrable est le lemme 29.210.

Soient $\{\mathcal{O}_i\}_{i=0,\dots,N}$ les composantes connexe bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ (avec $i \in \mathbb{N}$ dans le cas où N il y a une infinité dénombrable de composants connexes). Pour chaque i nous prenons un élément $p_i \in \mathcal{O}_i$. Nous notons aussi $\pi\colon \mathcal{G}(K) \to G(K)$ le morphisme canonique. Nous posons

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{Z}^N &\to G(K) \\ n &\mapsto \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{n_i}. \end{aligned} \tag{29.1005}$$

Notez que le produit a toujours un sens parce que $n \in \mathbb{Z}^N$ est toujours une suite finie (de taille N ou arbitraire) d'entiers. Pas de soucis de convergence.

[128] Proposition 9.270 et le fait que $\mathbb{C}$ est localement convexe.

(1) ϕ **est un morphisme** Sur $\mathbb{Z}^n$, nous mettons l'addition $(a+b)_i = a_i + b_i$. Si $N = \infty$ et si a et b ont des longueurs différentes, on prend pour N le maximum des deux longueurs. Nous avons :

$$\phi(a)\phi(b) = \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i} \prod_{j=1}^{N} \pi(f_{p_j})^{b_j} \tag{29.1006a}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i+b_i} \tag{29.1006b}$$

$$= \phi(a+b). \tag{29.1006c}$$

(2) ϕ **est injective** Soit $a \in \mathbb{Z}^N$. Si $a \neq 0$, alors le lemme 29.208 nous dit que $\prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{a_i} \notin \mathcal{E}(K)$. Vu que dans $G(K)$, le zéro est $\mathcal{E}(K)$, nous avons $\prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i} \neq 0$ dès qu'un des a_i est non nul.

(3) ϕ **est surjective** Soit $F \in G(K)$. Vu que π est surjective, il existe $f \in \mathcal{G}(K)$ tel que $\pi(f) = F$. Le lemme 29.209 nous dit qu'il existe $g \in \mathcal{E}(K)$ et $a \in \mathbb{Z}^N$ tels que

$$f = g \prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{a_i}. \tag{29.1007}$$

Nous avons alors

$$F = \pi(f) = \pi(g)\pi\left(\prod_{i=1}^{N} f_{p_i}^{a_i}\right) = \prod_{i=1}^{N} \pi(f_{p_i})^{a_i} = \phi(a). \tag{29.1008}$$

□

DEFooWQSAooDQYaip

Définition 29.212 ([248, 1]).
Si $(G,+)$ est un groupe abélien, la ***pseudo-dimension*** *de G est le cardinal maximum des familles $\mathbb{Z}$-indépendantes de G.*

Dans ce contexte, une famille $\mathbb{Z}$-indépendante est une partie $\{a_i\}_{i\in I}$ de G telle que si $\sum_i z_i a_i = 0$ avec $z_i \in \mathbb{Z}$, alors $z_i = 0$ pour tout i.

Si il existe une partie libre idempotente à un ensemble A, mais pas de parties libres surpotentes[129] *à A, nous disons que la pseudo-dimension de G est « la cardialité de A ».*

Dans tous les cas, nous notons $\operatorname{pdim}(G)$ *la pseudo-dimension de G.*

LEMooPASKooFGJgBz

Lemme 29.213 ([248, 1]).
À propos de pseudo-dimension.

(1) La pseudo-dimension de $\mathbb{Z}^n$ est n.

(2) La pseudo-dimension de $\mathbb{Z}^\infty$[130] *est la cardinalité de $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Nous commençons par le cas de $\mathbb{Z}^n$ et nous ferons $\mathbb{Z}^\infty$ après.

(1) $\geqslant n$ Prenons la base canonique $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{Z}^n$. C'est une partie $\mathbb{Z}$-indépendante de $\mathbb{Z}^n$. Donc la pseudo-dimension de $\mathbb{Z}^n$ est plus grande ou égale à n.

(2) $\leqslant n$ Dans l'autre sens, supposons que $\{a_i\}_{i\in I}$ soit $\mathbb{Z}$-indépendant dans $\mathbb{Z}^n$. Pour rappel, la définition 6.2 de partie libre ne parle que de sommes finies.

Prouvons que $\{a_i\}_{i\in I}$ est $\mathbb{Q}$-libre dans $\mathbb{Q}^n$. Soient une partie finie J de I ainsi que des rationnels $\{q_j\}_{j\in J}$ que $\sum_{j\in J} q_j a_j = 0$. Nous pouvons utiliser le lemme 4.14 pour considérer $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $kq_j \in \mathbb{Z}$ pour tout j (ici il est crucial que J soit fini, sinon on ne peut pas prendre un maximum). Dans ce cas nous avons $\sum_{j\in J} kq_j a_j = 0$, ce qui montre que $\{a_i\}$ n'est pas $\mathbb{Z}$-indépendante.

L'intérêt de $\mathbb{Q}$ est d'être un corps (alors que $\mathbb{Z}$ ne l'est pas). Nous savons que $\mathbb{Q}^n$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n. Il ne contient donc pas de parties $\mathbb{Q}$-libres de cardinal plus grand que n.

Nous passons maintenant à la preuve pour $\mathbb{Z}^\infty$[1]. L'existence d'une partie dénombrable et $\mathbb{Z}$-libre dans $\mathbb{Z}^\infty$ est facile : il faut juste prendre e_i étant la suite nulle partout sauf en i. La partie $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{Z}$-libre dans $\mathbb{Z}^\infty$.

[129] Définition 1.71.
[130] Pour rappel, $\mathbb{Z}^\infty$ est l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathbb{Z}$.

Nous devons maintenant montrer que toute partie libre de $\mathbb{Z}^\infty$ est au maximum dénombrable. Soit une telle partie A. En posant

$$A_n = \{x \in A \text{ tel que } x_n \neq 0 \text{ et } x_k = 0 \text{ si } k > n\}. \tag{29.1009}$$

Étant donné que A ne contient que des suites finies, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

D'abord A_n est $\mathbb{Z}$-libre dans $\mathbb{Z}^n$. En effet considérons une partie finie $\{a_i\}_{i\in I}$ de A_n ainsi que des entiers $\{z_i\}_{i\in I}$ tels que $\sum_{i\in I} z_i a_i = 0$. Vu que $\{a_i\}_{i\in I}$ est également une partie finie de A, nous en déduisons que $z_i = 0$ pour tout i.

La partie A_n étant libre dans $\mathbb{Z}^n$, elle est finie (de cardinal au maximum n). La partie A étant une union dénombrable de parties finies, elle est au maximum dénombrable. □

LEMooEYDNooEUKUpn

Lemme 29.214.
Deux groupes abéliens isomorphes ont même pseudo-dimension.

Démonstration. Soient des groupes abéliens G et H ainsi qu'un isomorphisme $\phi\colon G \to H$. Soit une partie $\mathbb{Z}$-indépendante $\{a_i\}_{i\in I}$ dans G. Nous montrons que $\{\phi(a_i)\}_{i\in I}$ est $\mathbb{Z}$-indépendante dans H.

En effet si $\sum_{i\in I} z_i\phi(a_i) = 0$, alors $0 = \sum_i \phi(z_i a_i) = \phi\big(\sum_i z_i a_i\big)$, et donc $\sum_i z_i a_i = 0$, ce qui entraine $z_i = 0$.

Cela prouve que $\operatorname{pdim}(H) \geqslant \operatorname{pdim}(G)$. En inversant les rôles de G et H (et en utilisant ϕ^{-1}), nous prouvons que $\operatorname{pdim}(G) \geqslant \operatorname{pdim}(H)$.

Si une des pseudo-dimensions est infinie, le raisonnement donné doit être récrit en disant que G possède une partie $\mathbb{Z}$-libre de telle cardinalité si et seulement si H en possède une. □

CORooQNUIooKLtWVD

Corolaire 29.215 ([248]).
Soient des compacts K_1 et K_2 homéomorphes dans $\mathbb{C}$. Alors les parties $\mathbb{C}\setminus K_1$ et $\mathbb{C}\setminus K_2$ ont le même nombre de composantes connexes.

Démonstration. Vu que K_1 est homéomorphe à K_2, les groupes $G(K_1)$ et $G(K_2)$ sont isomorphes par le lemme 29.199. Le théorème 29.211(2) nous enseigne que, si on désigne par N_i le nombre de composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus K_i$, alors $G(K_i) = \mathbb{Z}^{N_i}$. Le fait que $G(K_1)$ soit isomorphe à $G(K_2)$ implique

$$\mathbb{Z}^{N_1} \simeq \mathbb{Z}^{N_2}. \tag{29.1010}$$

Le lemme 29.214 indique alors que $\operatorname{pdim}(\mathbb{Z}^{N_1}) = \operatorname{pdim}(\mathbb{Z}^{N_2})$. Et enfin le lemme 29.213 conclut que $N_1 = N_2$. □

Dans le lemme suivant, $S^1(a,r)$ est la sphère centrée en a et de rayon r : $S^1(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |a - z| = r\}$.

LEMooUSJZooFVAlTa

Lemme 29.216.
La partie $\mathbb{C}\setminus S^1(0,1)$ a exactement 2 composantes connexes.

Démonstration. Posons $A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ et $B = \{z \text{ tel que } |z| > 1\}$. Nous avons $A \cup B = \mathbb{C}\setminus S^1$. La partie A est connexe et même convexe. En ce qui concerne la connexité de B, c'est le corolaire 20.69.

De plus A et B sont des ouverts disjoints.

Supposons que C soit une composante connexe de $\mathbb{C}\setminus S^1(0,1)$ contenant un point de A et un point de B. Soit $a \in C \cap A$. Par définition 9.120(1) d'une composante connexe, C contient tous les connexes contenant a. En particulier $A \subset C$. De même si $b \in C \cap B$, alors $B \subset C$.

Dans ce cas nous aurions $C = A \cup B = \mathbb{C}\setminus S^1(0,1)$. Mais cela est impossible parce que A et B forment un recouvrement de $\mathbb{C}\setminus S^1$ par deux ouverts disjoints.

Donc A et B sont des composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus S^1$. Et ce sont les deux seules parce que $A \cup B = \mathbb{C}\setminus S^1$. □

PROPooIOROooDwIFFU

Proposition 29.217 ([1]).
Si A est borné dans l'espace vectoriel normé V de dimension finie E, alors la partie $V\setminus A$ possède une unique composante connexe non bornée.

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $A \subset B(0, R/2)$. Soient C_1 et C_2 des composantes connexes non bornées de $V\setminus A$. Soient $x_i \in C_i$ satisfaisant $|x_i| > R$. La partie $V \setminus B(0, R/2)$ étant connexe par arcs, il existe un chemin continu entre x_1 et x_2. La proposition 11.69 dit que $C_1 = C_2$. □

29.16.3 Lemmes pout la partie frontière

Proposition 29.218 ([793]).
Si A est ouvert dans $\mathbb{R}$ alors ∂A sépare A et $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}$. C'est-à-dire que sit $p \in A$ et $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}$, alors tout chemin continu de p à q intersecte ∂A.

Démonstration. Soit un arc Γ joignant p à $q$sans intersecter ∂A. Nous posons

$$S_1 = \Gamma \cap A \tag{29.1011a}$$
$$S_2 = \Gamma \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}) \tag{29.1011b}$$

Ce sont deux ouverts disjoints de Γ. Notez que $A \cup \partial A = \bar{A}$, ce telle sorte que

$$\mathbb{R}^2 = A \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}). \tag{29.1012}$$

Donc

$$\Gamma = (\Gamma \cap A) \cup (\Gamma \cap \partial A) \cup (\Gamma \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A)) \tag{29.1013}$$

Étant donné que $\Gamma \cap \partial A = \varnothing$ par hypothèse, nous avons bien $\Gamma = S_1 \cup S_2$ en tant qu'union d'ouverts disjoints. Donc Γ serait non connexe, ce qui est impossible parce que Γ est l'image du connexe $[0,1]$ par un chemin continu. □

DEFooARBEooDWQjwn

Définition 29.219 ([793]).
*Soit un ouvert A. Nous disons qu'un point $s \in \partial A$ est **accessible** si il existe un chemin continu $c\colon [0,1] \to \bar{A}$ tel que $c(1) = s$ et $c\big([0,1[\big) \subset A$.*

PROPooCASWooIoWegN

Proposition 29.220 ([793]).
Si A est ouvert, alors les points accessibles[131] de ∂A sont denses dans ∂A.

Démonstration. Soit $s \in \partial A$. Nous considérons $B(s,r)$. Étant donné que $s \in \partial A$, il existe un $a \in A \cap B(s,r)$. Toute frontière est fermée (proposition 9.185), et $\overline{B(s,r)}$ est compact. Donc $\partial A \cap \overline{B(s,r)}$ est un fermé dans un compact. Donc $\partial A \cap \overline{B(s,r)}$ est compact. Nous considérons alors la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \|x - s\|. \end{aligned} \tag{29.1014}$$

Cette fonction continue a un minimum sur le compact $\partial A \cap \overline{B(s,r)}$. Ce minimum ne vaut pas 0 parce que f ne vaut zéro que en $x = a \notin \partial A$. Soit $q \in \partial A$ réalisant le minimum. Le segment $\ell_{q,a}$ joignant a à q n'intersecte pas ∂A parce qu'une telle intersection contredirait la minimalité de q. Donc q est atteignable.

Étant donné que $q \in B(s,r)$ et que r était arbitraire, il y a bien des points atteignables arbitrairement proches de s. Donc les points atteignables sont denses dans ∂A. □

PROPooWLQEooYpufqW

Proposition-Définition 29.221 ([2]).
Soient un disque $D = \overline{B(c,r)}$ et $p \in \partial D$. Nous notons $v = c - p$. Pour $u \in S^1$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $u \cdot v > 0$

(2) $p + tu \in \mathrm{Int}(D)$ *pour tout t assez petit.*

*Dans ce cas, nous disons que $u \in S^1$ **pointe vers l'intérieur de** D.*

Démonstration. Un petit calcul :

$$|p + tu - c|^2 = |p - c + tu|^2 \tag{29.1015a}$$
$$= |p - c|^2 + 2t(p - c) \cdot u + t^2|u|^2 \tag{29.1015b}$$
$$= r^2 - 2tu \cdot v + t^2. \tag{29.1015c}$$

SUBEQooXTXZooMgvCpR

(1) $\Rightarrow$ Si $u \cdot v > 0$, alors l'expression (29.1015c) est plus petite que r^2 dès que t est petit.

(2) $\Leftarrow$ Pour que l'expression (29.1015c) soit plus petite que r^2 pour le petits t, il faut que $u \cdot v > 0$.

□

[131] point accessible, définition 29.219.

PROPooCYYSooHVnjDl

Proposition 29.222 ([1]).
Soient des disques (pleins) D_i $i = 1, \dots, n$ qui ne sont deux à deux pas tangents[132]*. Nous notons*

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \tag{29.1016}$$

et Ω la composante connexe non bornée[133] *de $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Nous posons*

$$\Gamma = \{x \in \partial K \text{ tel que } \forall r > 0,\ B(x,r) \cap \Omega \neq \varnothing\}. \tag{29.1017}$$

Nous supposons que tous les cercles s'intersectent en $p \in \Gamma$.

Alors :

ITEMooBQWZooEJuptl

(1) il existe $u \in S^1$ qui ne pointe vers l'intérieur[134] *d'aucun des cercles.*

ITEMooAKPPooVyhNfC

(2) il existe un ouvert de S^1 de directions qui ne pointent vers l'intérieur d'aucun des cercles.

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout $u \in S^1$, il existe i tel que $u \cdot v_i > 0$. Nous allons prouver qu'alors $p \in \text{Int}(K)$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon S^1 &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \max_i u \cdot v_i. \end{aligned} \tag{29.1018}$$

Étant donné que toutes les applications $u \cdot v_i$ sont continues, l'application f est continue (proposition 11.30). Continue sur le compact S^1 ? Ah bien elle a un minimum[135] que nous notons δ. Ce δ est strictement positif parce que f ne s'annule pas. Nous avons :

$$\delta = \min_{u \in S^1} f(u) > 0. \tag{29.1019}$$

Autre façon de le dire : pour tout $u \in S^1$, il existe i tel que $u \cdot v_i > \delta$.

Nous montrons à présent que $B(p, 2\delta) \subset K$. Soit $x \in B(p, 2\delta)$ que nous écrivons sous la forme $x = p + tu$ avec $u \in S^1$ et $0 < t < 2\delta$. Il existe i tel que $u \cdot v_i \geqslant \delta$. Nous avons alors

$$|x - c_i|^2 = |p - c_i + tu|^2 \tag{29.1020a}$$
$$= |p - c_i|^2 + 2t(p - c_i) \cdot u + t^2|u|^2 \tag{29.1020b}$$
$$= r^2 - 2t\delta + t^2. \tag{29.1020c}$$

Étant donné que $t > 0$, le signe de $-2t\delta + t^2$ est le même que celui de $t - 2\delta$, qui est négatif. Donc $|x - c_i|^2 < r_i^2$, ce qui montre qu'on a bien $x \in D_i \subset K$.

Nous avons montré que p était intérieur à K, ce qui est contraire aux hypothèses. Cela fini de prouver (1).

Nous passons à la preuve de (2). Supposons que u est une direction qui ne pointe vers l'intérieur d'aucun cercle. Nous avons $u \cdot v_i \leqslant 0$ pour tout i. Si $u \cdot v_i < 0$ pour tout i, c'est bon parce que pour chaque i, il y a un voisinage de u dans lequel $u \cdot v_i$ reste strictement négatif.

Supposons que $u \cdot v_i = u \cdot v_j = 0$ pour certains i et j. Alors les disques D_i et D_j sont tangents par la définition 14.173(4). Donc nous avons au maximum un unique i tel que $u \cdot v_i = 0$. Si R_θ est la rotation d'angle θ dans le sens de u vers v, alors nous avons $R_{-\theta}u \cdot v_i < 0$ pour tout $\theta \in]0, \pi/2, [$. En prenant θ dans un intervalle $]0, \epsilon[$ assez petit, nous avons alors $R_{-\theta}u \cdot u_i < 0$ pour tout i. □

29.223.
Dans la suite, j'assume complètement de mélanger $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Quand vous voyez $e^{i\theta}$, vous pouvez lire $\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ dans $\mathbb{R}^2$.

PROPooDHCWooBOjxEQ

Proposition 29.224 ([1, 2]).
Nous considérons le disque $C_1 = \overline{B(c,r)}$, un point $p \in \partial C_1$, et le vecteur $v = c - p$. Soit ensuite le cercle C_2

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, 2\pi[&\to \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto c_2 + r_2 e^{i\theta}. \end{aligned} \tag{29.1021}$$

Nous supposons que $\gamma(\theta_0) = p$ et que $\gamma'(\theta_0) = u$. Et nous supposons que $u \cdot v > 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que

[132] cercles tangents, définition 14.173.
[133] Voir la proposition 29.217.
[134] Voir la définition 29.221.
[135] Théorème de Weierstrass 9.215.

(1) $\gamma\big([\theta_0, \theta_0 + \epsilon]\big) \subset C_1$,

(2) $\gamma\big([\theta_0 - \epsilon, \theta_0[\big) \cap C_1 = \varnothing$.

Autrement dit, au point d'intersection, C_2 traverse C_1 : il vient de l'extérieur et rentre à l'intérieur.

Démonstration. Nous faisons un développement limité (proposition 12.311) de γ autour de θ_0 :

$$\gamma(0) = p + (\theta - \theta_0)u + \alpha(\theta - \theta_0). \tag{29.1022}$$

Ensuite nous calculons :

$$\begin{aligned}
\|\gamma(\theta) - c\|^2 &= \|p - c + (\theta - \theta_0)u + \alpha(\theta - \theta_0)\|^2 && \text{(29.1023a)}\\
&= \|(p - c) + (\theta - \theta_0)u\|^2 + \beta(\theta - \theta_0) && \text{prop. 12.314} \quad \text{(29.1023b)}\\
&= \underbrace{\|p - c\|^2}_{=r^2} + 2(\theta - \theta_0)u \cdot \underbrace{(p - c)}_{=-v} + |\theta - \theta_0|^2 \underbrace{\|u\|^2}_{=1} + \beta(\theta - \theta_0) && \text{(29.1023c)}
\end{aligned}$$

où $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la propriété $\lim_{t\to 0} \beta(t)/t = 0$. Notez que la fonction $t \mapsto t^2$ a également cette propriété, donc on peut écrire

$$|\theta - \theta_0|^2 + \beta(\theta - \theta_0) = \beta_2(\theta - \theta_0) \tag{29.1024}$$

pour une certaine fonction β_2 ayant encore la même propriété. Au final,

$$\|\gamma(\theta) - c\| = r^2 - 2(\theta - \theta_0)u \cdot v + \beta_2(\theta - \theta_0). \tag{29.1025}$$

Étant donné que $u \cdot v > 0$, le tout est strictement plus petit que r^2 lorsque $\theta > \theta_0$ tout en restant suffisamment proche de θ_0 pour que $\beta_2(\theta - \theta_0)$ ne puisse pas compenser[136]. □

NORMooGADXooWShKTZ

29.225.
Nous nous sommes fixés $p \in R^2$. Nous n'allons pas le noter partout. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, nous notons :

$$\begin{aligned}
u(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, && \text{(29.1026a)}\\
v(r, \theta) &= ru\big(\theta + \frac{\pi}{2}\big) && \text{(29.1026b)}\\
c(r, \theta) &= p + v(r, \theta) && \text{(29.1026c)}
\end{aligned}$$

et EQooNQYRooPaYRuV

$$\begin{aligned}
\gamma_{r,\theta}(t) &= c(r, \theta) + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} && \text{(29.1027a)}\\
&= c(r, \theta) + ru(t) && \text{(29.1027b)}\\
&= p + ru(\theta + \pi/2) + ru(t), && \text{(29.1027c)}
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(r, \theta) &= ru(\theta - \pi/2) && \text{(29.1028a)}\\
\tilde{c}(r, \theta) &= p + \tilde{v}(r, \theta) && \text{(29.1028b)}
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\gamma}_{r,\theta}(t) = \tilde{c}(r, \theta) + ru(-t), \tag{29.1029}$$ EQooXPTEooBCszbW

et encore

$$\begin{aligned}
D_{r,\theta} &= \overline{B\big(c(r, \theta), r\big)} && \text{(29.1030a)}\\
\tilde{D}_{r,\theta} &= \overline{B\big(\tilde{(r, \theta)}, r\big)}. && \text{(29.1030b)}
\end{aligned}$$

PROPooCSGEooIXXVLb

Proposition 29.226 ([1]).
Tout est comme dans 29.225. Alors

ITEMooXOCYooGBpdzs

(1) $\gamma_{r,\theta}(\theta - \pi/2) = p$.

ITEMooNLBNooUeMEmE

(2) $\gamma'_{r,\theta}(\theta - \pi/2) = ru(\theta)$.

[136] C'est le lemme 12.315 qui dit ça plus clairement.

ITEMooGPMYooCFCApF

(3) $\tilde{\gamma}_{r,\theta}(-\theta-\pi/2)=p$

ITEMooZZHWooDLoYRl

(4) $\tilde{\gamma}_{r,\theta}(-\theta-\pi/2)=u(\theta)$.

Démonstration. Nous allons utiliser les formules de trigonométrie de la proposition 20.24 et du lemma 20.16 ainsi que les dérivées données dans le lemme 20.3. Et à part ça, on calcule :

$$\gamma_{r,\theta}(\theta-\pi/2)=c(r,\theta)+r\begin{pmatrix}\cos(\theta-\pi/2)\\ \sin(\theta-\pi/2)\end{pmatrix} \tag{29.1031a}$$

$$=p+v(r,\theta)+r\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ -\cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{29.1031b}$$

$$=p+ru(\theta+\pi/2)+r\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ -\cos(\theta).\end{pmatrix} \tag{29.1031c}$$

Mais en utilisant les formules de trigonométriques,

$$u(\theta+\pi/2)+\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ -\cos(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\pi/2)\\ \sin(\theta+\pi/2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ -\cos(\theta)\end{pmatrix}=0. \tag{29.1032}$$

Et donc $\gamma_{r,\theta}(\theta-\pi/2)=p$.

En ce qui concerne la dérivée, on a en général :

$$\gamma_{r,\theta}(t)=r\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \tag{29.1033}$$

et donc

$$\gamma'_{r,\theta}(\theta-\pi/2)=r\begin{pmatrix}-\sin(\theta-\pi/2)\\ \cos(\theta-\pi/2)\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}=ru(r,\theta). \tag{29.1034}$$

Cela prouver (1) et (2). En ce qui concerne (3) et (4), ce sont mêmes calculs, mais avec plus de signes auxquels il faut faire attention. □

PROPooTAKFooGsvUhi

Proposition 29.227 ([1]).
Si $\theta\in]\beta,\beta+\pi,[$ alors pour des petits t,

$$\gamma_{\theta,l}(\theta-\pi/2+t)\in D_{\beta,r}. \tag{29.1035}$$

Démonstration. Nous faisons un développement limité : il existe une fonction $\epsilon\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ telle que $\epsilon(t)/t\to 0$ et

$$\gamma_{\theta,l}(\theta-\pi/2+t)=\gamma_{\theta,l}(\theta-\pi/2)+t\gamma'_{\theta,l}(\theta-\pi/2)+\epsilon(t) \tag{29.1036a}$$

$$=p+tlu(\theta)+\epsilon(t). \tag{29.1036b}$$

Et nous calculons en utilisant les mêmes techniques que dans la preuve de 29.224 :

$$\|\gamma_{\theta,l}(\theta-\pi/2+t)-c(\beta,r)\|^2=\|tlu(\theta)-ru(\beta+\pi/2)\|^2+\epsilon_2(t) \tag{29.1037a}$$

SUBEQooTLBAooNNnYjV

$$=r^2+t^2l^2-2tlru(\theta)\cdot u(\beta+\pi+2)+\epsilon_2(t). \tag{29.1037b}$$

Nous calculons le produit scalaire :

$$u(\theta)\cdot u(\beta+\pi/2)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\beta+\pi+/2)\\ \sin(\beta+\pi/2)\end{pmatrix} \tag{29.1038a}$$

$$=\sin(\theta)\cos(\beta)-\cos(\theta)\sin(\beta) \tag{29.1038b}$$

$$=\sin(\theta-\beta). \tag{29.1038c}$$

Étant donné que nous avions dit que $\theta-\beta\in]0,\pi[$, nous avons $\sin(\theta-\beta)>0$. □

PROPooMWKYooCXZznB

Proposition 29.228 ([1]).
Soit $\theta,\alpha\in\mathbb{R}$ ainsi que $r,l\in\mathbb{R}^+$. Si $\alpha\in]\theta,\theta+\pi[$, alors

(1) *nous avons :*

$$\gamma_{l,\alpha}\big(]\theta-\pi/2,\theta-\pi/2+\epsilon]\big)\subset B\big(c(r,\theta),r\big), \tag{29.1039}$$

(2) et

$$\gamma_{l,\alpha}\big(]\theta-\pi/2-\epsilon,\theta-\pi/2[\big)\cap B\big(c(r,\theta),r\big)=\varnothing. \tag{29.1040}$$

Autrement dit en p, le cercle $\gamma_{l,\alpha}$ entre dans le cercle $\gamma_{r,\theta}$. En remettant dans (29.1037b), nous trouvons

$$\|\gamma_{\theta,l}(\theta-\pi/2+t)-c(\beta,r)\|^2<r^2 \tag{29.1041}$$

dès que t est petit et positif.

Démonstration. En vertu des propositions 29.224 et 29.226, il suffit de prouver que

$$u(\alpha,l)\cdot v(t,\theta)>0. \tag{29.1042}$$

Il faut calculer :

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}\cdot l\begin{pmatrix}\cos(\theta+\pi/2)\\ \sin(\theta+\pi/2)\end{pmatrix}=l\cos(\alpha)\cos(\theta+\pi/2)+l\sin(\alpha)\sin(\theta+\pi/2) \tag{29.1043a}$$

$$=-l\cos(\alpha)\sin(\theta)+\sin(\alpha)\cos(\theta) \tag{29.1043b}$$

$$=l\sin(\alpha-\theta). \tag{29.1043c}$$

Nous avons supposé que $\alpha\in]\theta,\theta+\pi[$, de sorte que $\alpha-\theta\in]0,\pi[$. Donc le lemme 20.25(8) nous assure que $\sin(\alpha-\theta)>0$. □

PROPooNGGUooFgZaqT

Proposition 29.229 ([1]).
Si t est assez petit, et si $\theta\leqslant\alpha_0+\pi$, alors

$$p+tu(\alpha_0)\in\tilde{D}_{r,\theta}. \tag{29.1044}$$

Démonstration. Nous calculons :

$$\|t+tu(\alpha_0)-\tilde{c}(r,\theta)\|^2=\|tu(\alpha_0)-ru(\theta-\pi/2)\|^2 \tag{29.1045a}$$

$$=r^2+t^2-2tru(\alpha_0)\cdot u(\theta-\pi/2). \tag{29.1045b}$$

Par ailleurs nous avons

$$u(\alpha_0)\cdot u(\theta-\pi/2)=\sin(\theta-\alpha_0). \tag{29.1046}$$

Étant donné que $\theta\in]\alpha_0,\alpha_0+\pi[$, nous avons $\theta-\alpha_0\in]0,\pi[$ et donc $\sin(\theta-\alpha_0)>0$. Donc si t est petit, nous avons bien

$$\|p+tu(\alpha_0)-\tilde{c}(r,\theta)\|^2\leqslant r^2. \tag{29.1047}$$

□

PROPooITHUooXrBYMG

Proposition 29.230 ([1, 4, 794]).
Soient des disques (pleins) D_i $i=1,\dots,n$ qui ne sont deux à deux pas tangents. Nous notons

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}D_i, \tag{29.1048}$$

et Ω la composante connexe non bornée[137] *de $\mathbb{R}^2\setminus K$. Nous posons*

$$\Gamma=\{x\in\partial K\ \text{tel que}\ \forall r>0,\ B(x,r)\cap\Omega\neq\varnothing\}. \tag{29.1049}$$

Soit $p\in\Gamma$.
Alors il existe $r>0$ tel que $\Gamma\cap B(p,r)$ est l'union de deux arcs de cercles qui s'intersectent en p.

Démonstration. Nous divisons la preuves en plein de petites étapes.

(1) **Le bord** En vertu de la proposition 12.8, les éléments de ∂K sont des élements des ∂D_i.

(2) **Oublier les autres disques** Il y a un nombre fini de disques qui ne touchent pas p ; leur adhérence est donc compacte et la distance à p y est donc bornée par le bas par un nombre strictement positif. Bref, nous commençons par prendre un rayon $r_a>0$ tel que $B(p,r_a)$ n'intersecte que des disques qui passent par p. À partir de maintenant à chaque fois que nous parlerons d'une boule autour de p, nous sous-entendrons que le rayon est au moins aussi petit que r_a.

[137] Voir la proposition 29.217.

(3) **Un vecteur extérieur** La proposition 29.222 nous donne un vecteur $n \in S^1$ tel que $n \cdot v_i < 0$ pour tout i. Nous le notons $n = u(\alpha_0)$ pour un certain $\alpha_0 \in [0, 2\pi[$.

(4) **Tous les arcs de cercles** Le bord de chacun des disques D_i peut être paramétré de deux façons : avec un γ_i de type (29.1027) et un $\tilde{\gamma}_i$ de type (29.1029). Nous notons β_i et $\tilde{\beta}_i$ des angles tels que $\gamma_i(\beta_i) = p$ et $\tilde{\gamma}_i(\tilde{\beta}_i) = p$.

L'application $u\colon [\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi[\to S^1$ est une bijection. Nous considérons les ensembles

$$A = \{u^{-1}\big(\gamma_i'(\beta_i)\big)\}_{i=1,\dots,n} \cup \{u^{-1}\big(\tilde{\gamma}_i(\tilde{\beta}_i)\big)\}_{i=1,\dots,n} \tag{29.1050}$$

et

$$B = \{\gamma_i\}_{i=1,\dots,n} \cup \{\tilde{\gamma}_i\}_{i=1,\dots,n}. \tag{29.1051}$$

Vu qu'il n'y a pas de cercles tangents, il y a une bijection $\phi\colon A \to B$.

Enfin nous ordonnons les angles de A dans l'odre croisstant $\{\alpha_k\}_{k=1,\dots,2n}$. Autrement dit $A = \{\alpha_k\}_{k=1,\dots,2n}$ avec $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ parce qu'il n'y a pas de $\alpha_k = \alpha_l$ vu qu'il n'y a pas de cercles tangents.

Nous avons

$$\partial D_i \cap B(p, r_a) = \{\gamma_i(\theta)\}_{\theta\in[\beta_i,\beta_i+h_i]} \cup \{\tilde{\gamma}_i(\theta)\}_{\theta\in[\tilde{\beta}_i,\tilde{\theta}_i+h_i]} \tag{29.1052}$$

où les h_i sont petits et sans importance. Il nous reste à savoir lesquels de ces points font partie de Γ.

(5) **Si $\alpha_k \leqslant \alpha_0 + \pi$ alors $\phi(\alpha_k)$ est un des γ_i** C'est la proposition 29.229.

(6) **Si $\alpha_0 + \pi < \alpha_k < \alpha_0 + 2\pi$ alors $\phi(\alpha_k)$ est un des $\tilde{\gamma}_i$** Supposons que ∂D_i soit l'image de $\gamma_{r,\theta}$ avec $\alpha_0 + \pi < \theta < \alpha_0 + 2\pi$. Alors nous montrons que le petit bout de droite $\{p + tu(\alpha_0)\}_{t\in]0,\epsilon[}$ intersecte l'intérieur de K (ce qui n'est pas possible parce que α_0) a été choisit pour que cela ne se produise pas. C'est juste un calcul :

$$\|p + tu(\alpha_0) - c(r, \theta)\|^2 = r^2 + t^2 - 2tru(\alpha_0) \cdot u(\theta + \pi/2). \tag{29.1053}$$

EQooLAEUooYOnEHb

Et encore du calcul pour le produit scalaire :

$$\begin{aligned} u(\alpha_0) \cdot u(\theta + \pi/2) &= \begin{pmatrix}\cos(\alpha_0)\\ \sin(\alpha_0)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} && \text{(29.1054a)}\\ &= \sin(\alpha_0)\cos(\theta) - \cos(\alpha_0)\sin(\theta) && \text{(29.1054b)}\\ &= \sin(\alpha_0 - \theta). && \text{(29.1054c)} \end{aligned}$$

Mais nous avons supposé que

$$\alpha_0 + \pi < \theta < \alpha_0 + 2\pi. \tag{29.1055}$$

Nous avons alors successivement :

$$\begin{aligned} -\alpha_0 - \pi > -\theta > -\alpha_0 - 2\pi && \text{(29.1056a)}\\ -\pi < \alpha_0 - \theta > -2\pi && \text{(29.1056b)}\\ \pi < \alpha_0 - \theta + 2\pi > 0. && \text{(29.1056c)} \end{aligned}$$

Donc $\sin(\alpha_0 - \theta) = \sin(\alpha_0 - \theta + 2\pi) > 0$. Par conséquent, l'inégalité (29.1053) nous montre que $\|p + tu(\alpha_0) - c(r, \theta)\|^2 < r$ lorsque t est petit.

(7) **Les directions de frontières** Nous posons

$$E = \{\alpha_k \text{ tel que } k = 1, \dots, 2n \text{ tel que } \exists \epsilon \text{ tel que } \phi(\alpha_k)\big(]0, \epsilon]\big) \cap \text{Int}(K) = \varnothing\} \tag{29.1057}$$

Ce sont les directions pour lesquelles l'arc de cercle correspondant ne rentre pas dans K. Nous aurons alors

$$\partial K \cap B(p, r_a) = \bigcup_{\alpha\in E} \phi(\alpha)\big([0, \epsilon[\big). \tag{29.1058}$$

Enfin nous posons $\alpha_m = \min\{\alpha_k\}_{k=1,\dots,2n}$ et $\alpha_M = \max\{\alpha_k\}_{k=1,\dots,2n}$. Nous allons prouver que $E = \{\alpha_m, \alpha_M\}$.

(8) $\alpha_0 + \pi \notin E$ Par définition, $p + tu(\alpha_0) \notin K$ pour tout $t > 0$ assez petit. Vu qu'il s'agit d'une droite, pour les $t < 0$ assez petits, cette droite doit être à l'intérieur d'un des disques.

(9) $]\alpha_m, \alpha_m + \pi[\cap E = \varnothing$ Soit α_k avec $\alpha_k \in]\alpha_m = \alpha_m + \pi, [$. Nous montrons que $\alpha_m \notin E$. Déjà nous savons que $\phi(\alpha_k)$ est un γ_i (et non un $\tilde{\gamma}_i$). Étant donné que

$$\alpha_k < \alpha_0 + \pi < \alpha_m + \pi, \tag{29.1059}$$

la proposition 29.227 dit alors que $\phi(\alpha_k)$ entre dans l'intérieur du disque de $\phi(\alpha_m)$. Donc $\alpha_k \notin E$.

(10) $]\alpha_0 + \pi, \phi_M[\cap E = \varnothing$ Même raison, mais en utilisant la proposition 29.229.

(11) **Ce qu'il reste de E** À part α_m et α_M, tous les éléments de $[\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi[$ ont été exclus de E. Il reste à montrer que α_m et α_M sont dans E.

(12) $\alpha_m \in E$ Nous savons que $\phi(\alpha_m) = \gamma_{\alpha_m, r}$ pour un certain r. Il faut prouver que ce chemin ne rentre pas dans les disques $D_{\theta,l}$ pour $\alpha_m < \theta < \alpha_0 + \pi$ ni dans les disques $\tilde{D}_{\alpha,l}$ avec $\alpha_0 + \pi < \theta < \alpha_M$.

Nous commençons par faire un développement limité et faire toutes les mêmes techniques que dans la proposition 29.224 :

$$\gamma_{\alpha_l, r}\big(\alpha_m - \pi/2 + t\big) = p + tru(\alpha_m) + \epsilon(t), \tag{29.1060}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
\| \gamma_{\alpha_m, r}(\alpha_m - \pi/2 + t) - c(l, \theta) \| &= \| tru(\alpha_m) + \epsilon_1(t) - lu(\theta + \pi/2) \| && \text{(29.1061a)} \\
&= t^2 r^2 + t^2 - 2trlu(\alpha_m) \cdot u(\theta + \pi/2) + \epsilon_2(t) && \text{(29.1061b)} \\
&= l^2 - 2trlu(\alpha_m) \cdot u(\theta - \pi/2) + \epsilon_3(t). && \text{(29.1061c)}
\end{aligned}$$

Étant donné que $\alpha_m < \theta < \alpha_0 + \pi$, nous écrivons $\theta = \alpha_m + s$ avec $0 < s < \pi$ et nous calculons le produit scalaire. En utilisant plein de formules de trigonométie, nous trouvons

$$u(\alpha_m) \cdot u(\theta + \pi/2) = \sin(\alpha_m - \theta) = -\sin(s) < 0, \tag{29.1062}$$

et donc au final

$$\| \gamma_{\alpha_m, r}(\alpha_m - \pi/2 + t) - c(l, \theta) \| = l^2 + 2trl \sin(s) + \epsilon_3(t). \tag{29.1063}$$

Étant donné que $\sin(s) > 0$, le tout est strictement plus grand que l^2 lorsque t est petit. Donc $\gamma_{\alpha_m, r}$ reste bien en dehors de $D_{\theta, r}$.

(13) **Le reste c'est la confiance** J'avoue n'avoir pas fait les calculs pour montrer que $\gamma_{\alpha_m, r}$ n'entre dans aucun des $\tilde{D}_{l,\theta}$ ($\alpha_0 + \pi < \theta < \alpha_M$) ni toutes les vérifications correspondantes pour α_M (qui correspond à $\tilde{\gamma}_{\alpha_M, r}$).

□

PROPooCMQHooGFlsiq

Proposition 29.231 ([1]).
Soient des boules $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Nous notons $D_i = \bar{B}_i$ ainsi que

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{n} D_i. \tag{29.1064}$$

Nous avons

$$\partial K_{n+1} \subset (\partial K_n \setminus B_{n+1}) \cup \big(\partial D_{n+1} \setminus \mathrm{Int}(K_n)\big) \tag{29.1065}$$

Démonstration. Nous avons $K_{n+1} = D_{n+1} \cup K_n$ et donc $\partial K_{n+1} \subset \partial D_{n+1} \cup \partial K_n$ par la proposition 9.186. Nous savons que les points de $B_{n+1} = \mathrm{Int}(D_{n+1})$ ne sont pas dans ∂K_{n+1}, donc

$$\begin{aligned}
\partial K_{n+1} &\subset \big(\partial D_{n+1} \cup \partial K_n\big) \setminus B_{n+1} && \text{(29.1066a)} \\
&= (\partial D_{n+1} \setminus B_{n+1}) \cup (\partial K_n \setminus B_{n+1}) && \text{(29.1066b)} \\
&= \partial D_{n+1} \cup (\partial K_n \setminus B_{n+1}) && \text{(29.1066c)} \\
& && \text{(29.1066d)}
\end{aligned}$$

Le même raisonnement tient pour enlever $\mathrm{Int}(K_n)$ à ∂D_{n+1}. □

PROPooXYNJooQGYgfw

Proposition 29.232 ([794, 1]).
Soient des disques D_i deux à deux non tangents. Nous posons $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, et nous supposons que K_n est connexe pour tout n. Alors

$$\Gamma = \{x \in \partial K \text{ tel que } \forall r > 0,\ B(x, r) \cap \Omega \neq \varnothing\} \tag{29.1067}$$

est une courbe continue fermée.

Démonstration. Nous y allons par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est un simple disque, dont la frontière est le cercle. En ce qui concerne la récurrence, nous notons γ_{n+1} le chemin du bord de D_{n+1} (c'est un cercle) et σ_n le chemin de ∂K_n, qui est continu et fermé par hypothèse.

Il y a deux possibilités : soit $\partial K_{n+1} = \partial K_n$, soit non. Si oui, alors il n'y a rien à faire. Si non, alors il existe un point[138] $q_0 \in \gamma_{n+1}$ tel que $q_0 \in \partial K_{n+1}$. Et nous paramétrons γ_{n+1} de telle sorte à avoir $\gamma_{n+1}(0) = \gamma_{n+1}(2\pi) = q_0$.

(1) **Les arcs**

Le chemin γ_{n+1} intersecte σ_n en un nombre fini de points parce que σ_n est une union d'arcs de cercles et qu'un cercle en coupe un autre au maximum en deux points. Nous les notons (dans l'ordre) $q_1, \dots, q_N$ et nous notons $t_i \in [0, 2\pi[$ tel que $q_i = \gamma_{n+1}(t_i)$. Et u_i tel que $q_i = \sigma_n(u_i)$.

Étant donné que Γ_{n+1} est dans $\partial K_n \cup \partial D_{n+1}$, les seuls candidats à être dans Γ sont les parties à être dans ∂K_{n+1} parmi les parties

$$\gamma_{n+1}\big([t_i, t_{i+1}]\big) \tag{29.1068}$$

et

$$\sigma_n\big([u_i, u_{i+1}]\big). \tag{29.1069}$$

(2) **De q_1 à q_2** Étant donné que les cercles ne sont pas tangents si $q_1 \in \gamma_{n+1} \cap D_i$, alors $\gamma_{n+1}(t_1 + h) \in \text{Int}(D_i)$ pour tout h assez petit. Donc il y a des points de $\gamma_{n+1}\big(]t_1, t_2[\big)$ qui sont dans l'intérieur de K_n. Par le passage de douanes (proposition 9.192), ces points sont donc dans l'intérieur de K_n.

Soit $x \in \sigma_n\big(]u_1, u_2[\big)$. Nous avons $x \in \partial K_n$. La distance avec x est une application continue et non nulle sur le compact D_{n+1}. Il y a donc un minimum non nul ; donc $d(x, D_{n+1}) > 0$. La proposition 9.187 nous assure alors que

$$x \in \partial(K_n \cup D_{n+1}) = \partial K_{n+1}. \tag{29.1070}$$

Donc $\sigma_N\big([u_1, u_2]\big) \subset \partial K_{n+1}$.

(3) **De q_2 à q_3** C'est l'inverse. Maintenant γ_{n+1} est hors de K_n, donc il est dans la frontière tandis que σ_n est dans l'intérieur de D_{n+1}.

(4) **Et ainsi de suite** De q_k à q_{k+1}, ça dépend de la parité de k un sur deux, γ_{n+1} est la frontière et l'autre, c'est σ_n.

□

PROPooTUPHooLnSCkd

Proposition 29.233 ([794]).
Soient deux arcs de Jordan $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ contenus dans un rectangle (dont les côtés sont parallèles aux axes). Nous nommons G et S leurs images et nous supposons :

(1) Ils ne s'intersectent pas : $G \cap S = \varnothing$,

(2) Le chemin γ intersecte le rectangle en un et un seul point, situé sur le côté gauche du rectangle.

(3) Le chemin σ intersecte le rectangle en un et un seul point, situé sur le côté droit du rectangle.

Alors il existe un chemin continu du bord supérieur du rectangle vers le bord inférieur du rectangle qui n'intersecte aucune des deux courbes.

Démonstration. En plusieurs petites parties.

(1) **Le segment vertical**

Étant donné que la fonction « distance avec le côté droit » est continue sur le compact G, elle a un minimum qui est strictement positif parce que G n'intersecte pas le rectangle sur le côté droit. Nous considérons h strictement plus grand que ce minimum tout en étant plus petit que le côté droit. Nous notons ℓ la droite verticale d'abscisse h.

Par construction $\ell \cap G = \varnothing$. Si ℓ n'intersecte pas S, alors on est bon. Si il y a des intersections, alors il faut un peu plus travailler.

[138] Nous confondons γ_{n+1} est est un chemin avec son image.

(2) **Le recouvrement** La fonction

$$\begin{aligned} f\colon S &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x,G) \end{aligned} \tag{29.1071}$$

est continue sur le compact S. Donc elle a un minimum strictement positif (parce que S et G ne s'intersectent pas). Nous considérons $r>0$ strictement plus petit que ce minimum. L'ensemble $\{B(x,r)\}_{x\in S}$ recouvre le compact S avec des ouverts. Donc il y a un sous-recouvrement fini que nous notons $\{B(x_i,r)\}_{i=1,\dots,n}$. Nous notons aussi $D_j=\overline{B(x_i,r_i)}$.

Nous repassons ensuite ces boules une par une de façon à s'assurer qu'aucune n'est tangente à une autre. Pour cela, nous allons nous assurer qu'aucune n'est tangente à une précédente. Supposons que D_i est tangente à D_j avec $i>j$. En remplaçant r_i par un $r_i'\in]r_i,r[$, nous gardons la propriété de recouvrir S tout en évitant la tangence avec D_j et en n'intersectant toujours pas G. Parmi l'infinité de choix, seul un nombre fini provoque une tangence avec un autre D_k. Nous les évitons.

De cette manière nous avons $\{B(x_i,r_i')\}_{i=1,\dots,n}$ qui recouvre S, n'intersecte pas G et tels qu'aucune boule n'est tangente à aucune autre. Et nous notons $K=\bigcup_{i=1}^n D_i$.

(3) **Le chemin** Nous nommons a point d'intersection entre ℓ et K qui est le plus haut (proche du bord haut du rectangle) et b celui qui est le plus bas. Le chemin que nous cherchons suit l entre le bord haut et a, puis suit le bord de K jusqu'à b. Cela est possible parce que le bord est un chemin continu fermé (proposition 29.232) n'intersectant le bord droit du rectangle qu'un un seul point. Il y a forcément un des deux sens dans lequel on peut parcourir ∂K de a à b sans intersecter le rectangle.

Enfin le chemin se termine en suivant ℓ jusqu'au bord inférieur du rectangle.

□

29.16.4 Théorème de Jordan

ThoHSPWBuh

Théorème 29.234 (Théorème de Jordan[248, 795]).
Soit une courbe de Jordan Γ fermée dans $\mathbb{C}$.

ITEMooOAKXooMirWiD

(1) La partie $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a exactement deux composantes connexes.

ITEMooICBGooXHMALK

(2) Une composante connexe est bornée, l'autre non.

(3) Les deux composantes connexes ont Γ comme frontière.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons par le corolaire 29.197(2) que Γ est homéomorphe à S^1. Le corolaire 29.215 nous dit alors que $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a le même nombre de composantes connexes que $\mathbb{C}\setminus S^1$, c'est-à-dire deux par le lemme 29.216.

(2) **Pour (2)** Le lemme 28.51 dit que $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a exactement une composante connexe non bornée. Vu que nous venons de voir qu'elle a exactement deux composants connexes, c'est que l'autre est bornée.

□

29.17 Topologie faible

DEFooZGLDooRRarRj

Définition 29.235 ([232, 1]).
Soit un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) E, et son dual E'.

(1) Le dual E' a la topologie de la norme opérateur.

ITEMooBTIQooTQrtWt

(2) Le dual E' a également la topologie faible $\sigma(E',E)$ donnée par la topologie initiale des fonctions d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_x\colon E' &\to \mathbb{K} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x). \end{aligned} \tag{29.1072}$$

EQooGGDEooSIwGGo

(3) L'espace E a lui-même une topologie faible $\sigma(E,E')$ qui est la topologie initiale de tous les éléments de φ.

*La **topologie faible** sur E, est la plus petite topologie τ pour laquelle*

$$\big(E, \|.\|\big)' = \big(E, \tau\big)'. \tag{29.1073}$$

Autrement dit, c'est la topologie de la proposition 9.58 rendant continues toutes les applications de E'.

Elle sera notée τ_w ou $\sigma(E, E')$.

LEMooZPJNooJyaeAC

Lemme 29.236 ([1]).
Les ouverts faibles sont ouverts.

Démonstration. Nous avons $\tau_w \subset \tau$ pour toute topologie τ telle que $(E, \tau_N)' = (E, \tau)'$ où τ_N est la topologie de la norme. En particulier en posant $\tau = \tau_N$ on a l'égalité. Donc $\tau_w \subset \tau_N$. □

Vu que, pour rendre continue une application, il suffit que toutes les images inverses des ouverts de $\mathbb{F}$ soient des ouverts, la topologie faible sur E est également la topologie engendrée[139] par les parties $\varphi^{-1}(V)$ avec $\varphi \in E'$ et $V \in \tau_{\mathbb{F}}$.

Remarque 29.237.
Il faut noter que la topologie faible n'est pas une topologie métrique. Cela même si la condition $A_i x \to Ax$, elle, est métrique vu qu'elle est écrite dans E.

Dans le cas où E est de dimension infinie, la topologie faible est réellement différente de la topologie forte. Nous verrons à la sous-section 27.3.6 que dans le cas des projections sur un espace de Hilbert, l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathtt{proj}_{u_i} = \mathrm{Id} \tag{29.1074}$$

est vraie pour la topologie faible, mais pas pour la topologie forte.

Lemme 29.238 ([232]).
La topologie faible est Hausdorff[140].

Démonstration. Soient un espace de Banach E ainsi que $x_1 \neq x_2$ dans E. Les parties $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ vérifient les hypothèses de Hahn-Banach (seconde forme géométrique, 29.168). Il existe donc une fonctionnelle $\varphi\colon E \to \mathbb{F}$ telle que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Avec un peu de bonne volonté, nous supposons que $\mathrm{Re}\big(\varphi(x_1)\big) \neq \mathrm{Re}\big(\varphi(x_2)\big)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Re}\big(\varphi(x_1)\big) < \alpha < \mathrm{Re}\big(\varphi(x_2)\big). \tag{29.1075}$$

Posons

$$\mathcal{O}_1 = \{x \in E \text{ tel que } \mathrm{Re}\big(\varphi(x)\big) < \alpha\}, \tag{29.1076a}$$

$$\mathcal{O}_2 = \{x \in E \text{ tel que } \mathrm{Re}\big(\varphi(x)\big) > \alpha\}. \tag{29.1076b}$$

Nous avons $\mathcal{O}_i = \varphi^{-1}(V_i)$ avec[141]

$$V_1 =]-\infty, \alpha[+ i\mathbb{R} \tag{29.1077}$$

et quelque chose du même genre pour V_2. Vu que V_1 et V_2 sont ouverts dans $\mathbb{F}$, et que φ est continue pour la topologie faible, les parties $\mathcal{O}_i$ sont ouvertes dans (E, τ_w).

Nous avons de plus $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$ et $x_i \in \mathcal{O}_i$, de telle sorte que x_1 et x_2 sont correctement séparés. □

29.17.1 Bases de topologie

LEMooEFVXooIWBBdW

Lemme 29.239 ([232]).
Soit un espace de Banach E. Soient $x_0 \in E$, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E'$. La partie

$$V(x_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = \{x \in E \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon\} \tag{29.1078}$$

est faiblement ouverte.

Démonstration. Remarquez que

$$V(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \varphi_i^{-1}\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - \varphi_i(x_0)| < \epsilon\}. \tag{29.1079}$$

Vu que φ_i^{-1} transforme un ouvert en un ouvert, $V(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon)$ est une intersection d'ouverts, et donc un ouvert. De plus x_0 est dedans parce que $\varphi_i(x_0 - x_0) = \varphi_i(0) = 0 < \epsilon$. □

[139] Proposition 9.13.
[140] Espace topologique Hausdorff, définition 9.79.
[141] Adaptez si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$.

LEMooKMIEooNDdIcU

Lemme 29.240 ([232]).
Soient un espace de Banach E ainsi qu'un élément $x_0 \in E$. Les ensembles

$$V(x_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = \{x \in E \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon \, \forall i\} \tag{29.1080}$$

forment une base de la topologie $\sigma(E, E')$ en x_0.

Démonstration. Soit un ouvert faible U contenant x_0. Nous devons prouver que U contient une partie de la forme $V(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon)$. C'est le moment d'avoir bien en tête la construction de la topologie engendrée donnée en la proposition 9.13.

La topologie faible est engendrée par les parties de la forme $\varphi^{-1}(V)$ avec $\varphi \in E'$ et $V \in \tau_{\mathbb{F}}$. La partie U est une union de parties de la forme

EQooKJEPooRissME

$$\bigcap_{j=1}^{k} \varphi_j^{-1}(V_j) \tag{29.1081}$$

où V_j est ouvert dans $\mathbb{F}$ et $\varphi_j \in E'$. Vu que $x_0 \in U$, il existe une partie de la forme (29.1081) contenant x_0. Nous la notons W :

$$x_0 \in W = \bigcap_{j=1}^{k} \varphi_j^{-1}(V_j) \subset U. \tag{29.1082}$$

Vu que V_j est un ouvert de $\mathbb{F}$ contenant $\varphi_j(x_0)$, il existe $\delta_j > 0$ tel que $B\big(\varphi_j(x_0), \delta_j\big) \subset V_j$. En prenant $\epsilon = \min_{j=1,\dots,k}(\delta_j)$, nous avons $B\big(\varphi_j(x_0), \epsilon\big) \subset V_j$ pour tout j. En particulier,

$$\bigcap_{j=1}^{k} \varphi_j^{-1}\Big(B\big(\varphi_j(x_0), \epsilon\big)\Big) \subset W. \tag{29.1083}$$

Nous montrons à présent que $V(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) \subset W$. Pour cela nous considérons $x \in V(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon)$ et nous montrons que $x \in \varphi_j^{-1}\Big(B\big(\varphi_j(x_0), \epsilon\big)\Big)$ pour tout $j = 1, \dots, k$. Nous avons

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| = |\varphi_j(x - x_0)| < \epsilon, \tag{29.1084}$$

et donc bien $\varphi_j(x) \in B\big(\varphi_k(x_0), \epsilon\big)$. Au final nous avons

$$V(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} \varphi_j^{-1}\Big(B\big(\varphi_j(x_0), \epsilon\big)\Big) \subset W \subset U. \tag{29.1085}$$

□

PROPooMBOJooQcwyuv

Proposition 29.241 ([796]).
Soit un espace de Banach E. Soit $\varphi_0 \in E'$. Une base de la topologie[142] *$\sigma(E', E)$ en φ_0 est donnée par les parties*

EQooTINIooJulDlI

$$V(\varphi_0; x_1, \dots, x_k, \epsilon) = \{\varphi \in E' \text{ tel que } |(\varphi - \varphi_0)(x_i)| < \epsilon \, \forall i = 1, \dots, k\}. \tag{29.1086}$$

29.17.2 Convergence

PROPooFJBBooKkRwIp

Proposition 29.242 ([232, 797]).
Soient un espace de Banach E ainsi qu'une suite (x_n) dans E.

ITEMooDMMTooSBINKN

(1) $x_n \xrightarrow{w} x$ *si et seulement si* $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ *pour tout* $\varphi \in E'$.

ITEMooFZKXooNqFGUb

(2) $x_n \xrightarrow{\|.\|} x$ *implique* $x_n \xrightarrow{w} x$.

ITEMooXPTSooYPwNgU

(3) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ *alors* $\{\|x_n\|\}$ *est borné et*

$$\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|. \tag{29.1087}$$

ITEMooAFRFooOXdsBy

(4) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ *et* $\varphi_n \xrightarrow{E'} \varphi$ *alors* $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

Démonstration. Point par point.

[142] Définition 29.235(2).

(1) **Pour (1)** C'est le lemme 9.63.

(2) **Pour (2)** Nous prouvons que $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in E'$:

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| = |\varphi(x_n - x)| \leqslant \|\varphi\|_{E'} \|x_n - x\|_E \to 0 \tag{29.1088}$$

parce que par hypothèse $\|x_n - x\| \to 0$.

(3) **Pour (3)**

Vu que $\varphi(x_n) \xrightarrow{\mathbb{F}} \varphi(x)$, l'ensemble $\{\varphi(x_n)\}$ est borné dans $\mathbb{F}$. Considérons les opérateur suivants :

$$\begin{aligned} T_n : E' &\to \mathbb{F} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x_n). \end{aligned} \tag{29.1089}$$

Cet opérateur a la propriété que $\|T_n\|_{(E')'} = \|x_n\|_E$; en effet, en utilisant la proposition 29.173,

$$\|T_n\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |T_n(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x_n)| = \|x_n\|. \tag{29.1090}$$

Chacun des T_n est donc un opérateur linéaire borné. Nous vérifions que la famille $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aux hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus 12.201. D'abord E' est un Banach par la proposition 12.93. Ensuite nous venons de voir que chacun de T_n est borné dans E'. Et enfin, pour chaque $\varphi \in E'$ nous avons

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(\varphi)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| < \infty. \tag{29.1091}$$

Le théorème de Banach-Steinhaus nous assure donc que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty. \tag{29.1092}$$

Donc l'ensemble $\{\|x_n\|\}$ est borné.

Pour chaque $\varphi \in E'$ tel que $\|\varphi\| \leqslant 1$ nous avons

$$|\varphi(x_n)|_{\mathbb{F}} \leqslant \|\varphi\|_{E'} \|x_n\|_E \leqslant \|x_n\| \tag{29.1093}$$

Étant donnée l'inégalité $|\varphi(x_n)| \leqslant \|x_n\|$ pour tout n et étant donnée la convergence $|\varphi(x_n)| \to |\varphi(x)|$, nous avons pour tout n :

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x_n\|. \tag{29.1094}$$

Cette inégalité valable pour tout n donne la conclusion :

$$|\varphi(x)| \leqslant \liminf \|x_n\|. \tag{29.1095}$$

(4) **Pour (4)**

Nous avons [SUBEQooPHWLooZUiQLO]

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &\leqslant |\varphi_n(x_n) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(x)| && \text{(29.1096a)} \\ &\leqslant \|x_n\| \|\varphi_n - \varphi\| + |\varphi(x_n - x)| && \text{(29.1096b)} \end{aligned}$$

Mais par hypothèse $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$, par le point (3), $\|x_n\|$ est borné, et par le point (1), nous avons $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \to 0$. Tout ça mis ensemble nous permet de prendre la limite dans (29.1096) et de voir que $\|\varphi_n(x_n) - \varphi(x)\| \to 0$.

□

Proposition 29.243.
Si E est un espace de Banach de dimension finie, alors sa topologie normée est la même que sa topologie faible : $\tau_w = \tau_{\|.\|}$.

Démonstration. Vu que E' est défini comme étant l'ensemble des formes continues pour la topologie $\|.\|$, et que τ_w est la plus petite topologie pour laquelle tous les éléments de E' sont continus, nous avons $\tau_w \subset \tau_{\|.\|}$.

Pour prouver l'inclusion inverse, nous considérons $U \in \tau_{\|.\|}$ et nous prouvons que U est également un ouvert faible en montrant que tout élément de U est inclus dans un ouvert faible contenu dans U.

Soit $x_0 \in U$ ainsi que $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. Nous considérons une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E telle que $\|e_i\| = 1$ pour tout i. Vu que tout élément de E peut être décomposé de façon unique en $x = \sum_i x_i e_i$, nous considérons les fonctionnelles linéaires

$$\begin{aligned} \varphi_j \colon E &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto x_j. \end{aligned} \tag{29.1097}$$

C'est le moment de ressortir notre ouvert préféré[143] autour de x_0 :

$$V(x_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}\Big(\{\|z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - \varphi_i(x_0)|\| < \epsilon\}\Big). \tag{29.1098}$$

Supposons que $x \in V(x_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \epsilon)$. Il vérifie $|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| \leqslant \epsilon$ et donc

$$\|x - x_0\| = \|\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x - x_0) e_j\| \tag{29.1099a}$$

$$\leqslant \sum_j |\varphi_j(x - x_0)| \|e_j\| \tag{29.1099b}$$

$$= \sum_j |\varphi_j(x - x_0)| \tag{29.1099c}$$

$$\leqslant \sum_j |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| \tag{29.1099d}$$

$$\leqslant n\epsilon. \tag{29.1099e}$$

En choisissant $\epsilon < \frac{r}{n}$, nous avons $x \in B(x_0, r)$ et donc

$$V(x_0, \dots,) \subset B(x_0, r). \tag{29.1100}$$

□

LEMooMCYAooGMzbbs

Lemme 29.244.
Soit un espace de Banach E sur le corps $\mathbb{F}$. Nous notons $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ l'ensemble de toutes les applications de E vers $\mathbb{F}$. Pour chaque $x \in E$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f_x \colon \mathrm{Fun}(E, \mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ \omega &\mapsto \omega(x). \end{aligned} \tag{29.1101}$$

Nous considérons sur $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ la topologie initiale[144] des $\{f_x\}_{x \in E}$.

La suite (ω_n) dans $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ converge vers $\omega \in \mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ si et seulement si $\omega_n(x) \to \omega(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. C'est le lemme 9.62 appliqué à $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$. □

THOooRECTooEVLHSq

Théorème 29.245 (Banach-Alaoglu-Bourbaki[232])**.**
Soit un espace de Banach E. La boule unité

$$B = \{\varphi \in E' \text{ tel que } \|\varphi\| = 1\} \tag{29.1102}$$

est compacte pour la topologie faible.

Démonstration. Nous considérons à nouveau $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F})$ muni de la topologie du lemme 29.244. Nous considérons l'inclusion

$$\begin{aligned} \Phi \colon \big(E', \|.\|\big) &\to \big(\mathrm{Fun}(E, \mathbb{F}), \tau_I\big) \\ \omega &\mapsto \omega. \end{aligned} \tag{29.1103}$$

En particulier nous notons $S = \Phi(E')$ et nous allons prouver que $\Phi \colon E' \to S$ bijective et continue et que $\Phi^{-1} \colon S \to E'$ est également continue. □

PROPooYARHooOpmztY

Proposition 29.246 ([232])**.**
Un convexe dans un espace de Banach est fermé si et seulement si il est faiblement[145] fermé.

[143] Nous avons un … faible pour lui !
[144] Définition 9.58.
[145] Topologie faible, définition 29.235.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Soit un connexe fermé C de E. Nous devons prouver que C est faiblement fermé, c'est-à-dire que $E \setminus C$ est faiblement ouvert. Soit $x_0 \in E \setminus C$.

Étant donné que tout espace de Banach est localement convexe (proposition 9.277) Nous utilisons le théorème de Hahn-Banach 29.168 pour les partes $A = \{x_0\}$ (qui est compacte) et $C = C$ (qui est fermé). Il existe donc un hyperplan qui sépare strictement[146] $\{x_0\}$ et C. Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in E'$ tels que

$$f(x_0) < \alpha < f(x) \tag{29.1104}$$

pour tout $x \in C$.

Nous posons $V = \{x \in E \text{ tel que } f(x) < \alpha\}$, qui n'est autre que le $V(f, \alpha)$ du lemme 29.239. C'est un ouvert faible contenant x_0 et contenu dans $E \setminus C$. Cela prouve que $E \setminus C$ est faiblement ouvert.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que C est faiblement fermé. Donc $E \setminus C$ est faiblement ouvert et donc ouvert (lemme 29.236). Donc C est fermé.

□

PROPooGQLOooNSgZnZ

Proposition 29.247 ([232, 3])**.**
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et un sous-espace vectoriel fermé M de E.

(1) M muni de la norme hérité de E est un espace de Banach.

(2) Nous considérons les deux topologies suivantes sur M :

- *τ_1 : la topologie induite depuis $\sigma(E, E')$.*
- *τ_2 : la topologie $\sigma(M, M')$.*

Alors $\tau_1 = \tau_2$.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Espace de Banach** C'est la proposition 12.94.

(2) **Égalité des topologies** En deux parties.

(2a) $\tau_2 \subset \tau_1$ Nous montrons que τ_1 rend continue tous les éléments de M'. Soit $\varphi \in M'$. Soit un ouvert U de $\mathbb{K}$; nous devons prouver que $\varphi^{-1}(U) \in \tau_1$. Pour cela, le théorème de Hahn-Banach 29.172 nous indique qu'il existe $\tilde{\varphi} \in E'$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi}|_M$. Vu que $\sigma(E, E')$ rend continue tous les éléments de E', nous avons

$$\tilde{\varphi}^{-1}(U) \in \sigma(E, E'). \tag{29.1105}$$

Donc

$$\varphi^{-1}(U) = \tilde{\varphi}^{-1}(U) \cap M \in \tau_1. \tag{29.1106}$$

Nous en déduisons que τ_1 rend continus tous les éléments de M'. Vu que $\sigma(M, M')$ est la plus petite faisant ça, nous avons bien $\tau_2 \subset \tau_1$.

(2b) $\tau_1 \subset \tau_2$ Soit $\mathcal{O} \in \tau_1$. Nous avons $\mathcal{O} = U \cap M$ avec $U \in \sigma(E, E')$. Soit $x_0 \in \mathcal{O}$. Étant donné que $x_0 \in U$ et étant donné le lemme 29.240, il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E'$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$V(x_0; \varphi_1, \dots, \varphi_k, \epsilon) = \{x \in E \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon\} \subset U. \tag{29.1107}$$

En notant f_i la restriction de φ_i à M, nous avons

$$\begin{aligned} \{x \in E \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon\} \cap M &= \{x \in M \text{ tel que } |\varphi_i(x - x_0)| < \epsilon\} && \text{(29.1108a)} \\ &= \{x \in M \text{ tel que } |f_i(x - x_0)| < \epsilon\} && \text{(29.1108b)} \\ &\in \sigma(M, M'). && \text{(29.1108c)} \end{aligned}$$

Cette partie est donc un $\sigma(M, M')$-voisinage de x_0 contenu dans $\mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O} \subset \tau_2$ et donc $\tau_1 \subset \tau_2$.

□

[146] Hyperplan qui sépare, définition 29.165.

29.17.3 Helly et Goldstine

LEMooSBWJooKIfuJj

Lemme 29.248 (Helly[232, 798])**.**
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous considérons $f_1,\dots,f_k\in E'$ ainsi que des éléments $(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\in\mathbb{K}^n$. De plus nous introduisons

$$\begin{aligned}\varphi\colon E&\to\mathbb{K}^k\\ x&\mapsto\big(f_1(x),\dots,f_k(x)\big).\end{aligned}\tag{29.1109}$$

Nous avons équivalence entre

ITEMooDMOOooPJtgTE
(1) Pour tout $\epsilon>0$, il existe $x_\epsilon\in E$ tel que $\|x_\epsilon\|<1$ et $|f_l(x_\epsilon)-\gamma_l|<\epsilon$.

ITEMooAQAJooHmSXGW
(2) $\gamma\in\overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$.

ITEMooXJKAooFHUsOv
(3) $|\sum_{l=1}^k\beta_l\gamma_l|\leqslant\|\sum_{l=1}^k\beta_lf_l\|$ pour tout $\beta_1,\dots,\beta_k\in\mathbb{K}$.

Notez que $|.|$ dénote soit la valeur absolue (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) soit le module d'un nombre complexe (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Par ailleurs $\|.\|$ dénote la norme opérateur.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) ⇒ (2)** Soit $\epsilon>0$. Il existe $x_\epsilon\in E$ tel que $x_\epsilon\in\overline{B(0,1)}$, et donc tel que

$$\|\varphi(x_\epsilon)-\gamma\|<k\epsilon\tag{29.1110}$$

où à gauche, c'est la norme dans $\mathbb{K}^k$. Cela prouve que, en utilisant 9.53,

$$\gamma\in\varphi\big(\overline{B(0,1)}\big)\subset\overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}\tag{29.1111}$$

(2) **(2) ⇒ (1)** Soit $\epsilon>0$. Étant donné que $\gamma\in\overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$, il existe $y_\epsilon\in\varphi\big(B(0,1)\big)$ tel que $\|y_\epsilon-\gamma\|<\epsilon$ et donc $x_\epsilon\in B(0,1)$ tel que $\|\varphi(x_\epsilon)-\gamma\|<\epsilon$.
Par inégalité triangulaire, cela implique $|f_l(x_\epsilon)-\gamma_l|<\epsilon$.

(3) **(1) ⇒ (3)** Nous posons $S=\sum_{i=1}^k|\beta_i|$. Soit $\epsilon>0$. Nous avons

$$\begin{aligned}|\sum_i\beta_if_i(x_\epsilon)-\sum_i\beta_i\gamma_i|&\leqslant|\sum_i\beta_i\big(f_i(x_\epsilon)-\gamma_i\big)|&(29.1112a)\\&\leqslant\sum_i|\beta_i||f_i(x_\epsilon)-\gamma_i|&(29.1112b)\\&\leqslant S\epsilon.&(29.1112c)\end{aligned}$$

Grâce à la formule de la proposition 12.2, nous en déduisons

$$\begin{aligned}|\sum_i\beta_i\gamma_i|&\leqslant|\sum_i\beta_if_i(x_\epsilon)|+S\epsilon&(29.1113a)\\&\leqslant\|\sum_i\beta_if_i\|\|x_\epsilon\|+S\epsilon&(29.1113b)\\&\leqslant\|\sum_i\beta_if_i\|+S\epsilon.&(29.1113c)\end{aligned}$$

Vu que cette inégalité est valide pour tout ϵ, nous déduisons que $|\sum_i\beta_i\gamma_i|\leqslant\|\sum_i\beta_if_i\|$.

(4) **(3) ⇒ (1)** Nous faisons non(1) ⇒ non(3). Et comme (1) est équivalent à (2), nous faisons non(2) ⇒ non(3).

Nous avons donc $\gamma\notin\overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$. En utilisant le théorème 29.168 ou 29.168 selon que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, nous savons que $\{\gamma\}$ et $\overline{\varphi\big(B(0,1)\big)}$ sont strictement séparés par un hyperplan de $\mathbb{K}^k$. Autrement dit, il existe $\beta\in\mathbb{K}^k$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{Re}\big(\beta\cdot\varphi(x)\big)<\alpha<\operatorname{Re}(\beta\cdot\gamma).\tag{29.1114}$$

Autrement dit,

$$\operatorname{Re}(\sum_{i=1}^k\beta_if_i(x))<\alpha<\operatorname{Re}(\sum_i\beta_i\gamma_i).\tag{29.1115}$$

EQooSEUBooAoyMVa

Maintenant on fait deux cas selon que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

(4a) **Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$** Alors nous pouvons enlever le Re dans (29.1115). Vu que l'inégalité est valide pour tout $x \in E$ et vu que $|A(-x)| = |A(x)||$ lorsque A est linéaire, nous avons

$$|(\sum_i \beta_i f_i)(x)| < \alpha < \sum_i \beta_i \gamma_i. \tag{29.1116}$$

En prenant le supremum sur $\|x\| = 1$ nous trouvons

$$\| \sum_i \beta_i f_i \| \leqslant \alpha \leqslant \sum_i \beta_i \gamma_i, \tag{29.1117}$$

EQooMNEGooMhPMWu

qui contredit (3).

(4b) **Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$** Nous ne pouvons pas enlever les modules si facilement. C'est d'ailleurs le moment de relire le lemme 29.160. Nous posons $\phi = \sum_i \beta_i f_i$ et $g = \mathrm{Re}(\phi)$. Ce que dit (29.1115) est

$$|g(x)| < \alpha < \mathrm{Re}(\sum_i \beta_i \gamma_i) \leqslant |\sum_i \beta_i \gamma_i|. \tag{29.1118}$$

En prenant le supremum sur $\|x\| = 1$ et en tenant compte du fait que $\|\phi\| = \|g\|$, nous obtenons à nouveau une inégalité similaire à (29.1117), et donc une contradiction.

□

THOooATSGooSZZYPz

Théorème 29.249 (Théorème de Goldstine[798]).
Soit un espace de Banach E sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous avons[147]

ITEMooMDBQooSVTyjx

(1) La partie $J\big(B_E(0,1)\big)$ est dense dans $B_{E''}(0,1)$ pour la topologie faible[148] *$\sigma(E'', E')$.*

ITEMooXIGCooVpzqGA

(2) La partie $J(E)$ est $\sigma(E'', E')$-dense dans E''.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit $\xi_0 \in B_{E''}(0,1)$, et soit un voisinage V de ξ_0. Nous devons prouver que $V \cap J\big(B_E(0,1)\big) \neq \varnothing$. La proposition 29.241 donne une base de la topologie faible. Nous pouvons donc supposer que V est de la forme (29.1086). Il faut juste ajouter des primes un peu partout parce que nous parlons ici de $\sigma(E', E'')$ et non de $\sigma(E, E')$. Bref. Il existe des $\varphi_i \in E'$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$V = V(\xi_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \epsilon) = \{\eta \in E'' \text{ tel que } |(\eta - \xi_0)(\varphi_i)| < \epsilon\}. \tag{29.1119}$$

Nous allons montrer qu'il existe $x_\epsilon \in B_E(0,1)$ tel que $J(x) \in V$.

Nous posons $\gamma_i = \xi_0(\varphi_i) \in \mathbb{K}$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$. Nous avons

$$|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i| = |\sum_i \beta_i \xi_0(\varphi_i)| = |\xi_0\big(\sum_i \beta_i \varphi_i\big)| \leqslant \|\sum_i \beta_i \varphi_i\| \tag{29.1120}$$

EQooNGRVooVPapQa

parce que $\|\xi_0\| \leqslant 1$. L'inégalité (29.1120) étant valide pour tout choix de β_i, le théorème d'Helly 29.248 implique l'existence de $x_\epsilon \in E$ tel que $\|x_\epsilon\| < 1$ et

$$|\varphi_i(x_\epsilon) - \gamma_i| < \epsilon. \tag{29.1121}$$

Nous avons donc

$$\epsilon < |\varphi_i(x_\epsilon) - \gamma_i| = |\varphi_i(x_\epsilon) - \xi_0(\varphi_i)| = |\big(J(x_\epsilon) - \xi_0\big)(\varphi_i)|, \tag{29.1122}$$

et donc $J(x_\epsilon) \in V$.

(2) **Pour (2)** Soit $\xi_0 \in E''$ ainsi qu'un voisinage V de ξ_0 de la forme

$$V(\xi_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \epsilon) = \{\eta \in E'' \text{ tel que } |(\eta - \xi_0)(\varphi_i)| < \epsilon\}. \tag{29.1123}$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda\xi_0 \in B_{E''}(0,1)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda V(\xi_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \epsilon) &= \{\lambda\eta \text{ tel que } |(\eta - \xi_0)(\varphi_i)| < \epsilon\} && \text{(29.1124a)}\\
&= \{\lambda\eta \text{ tel que } |(\lambda\eta - \lambda\xi_0)(\varphi_i)| < \lambda\epsilon\} && \text{(29.1124b)}\\
&= \{\eta \text{ tel que } |(\eta - \lambda\xi_0)(\varphi_i)| < \lambda\epsilon\}, && \text{(29.1124c)}
\end{aligned}$$

[147] Définition 29.180 pour J.
[148] Définie en 29.235.

autrement dit

$$\lambda V(\xi_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)=V(\lambda\xi_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\lambda\epsilon). \tag{29.1125}$$

Étant donné que $\lambda\xi_0\in B_{E''}(0,1)$, la première partie dit qu'il existe $x_\epsilon\in B_E(0,1)$ tel que

$$J(x_\epsilon)\in V(\lambda\xi_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\lambda\epsilon)=\lambda V(\xi_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon). \tag{29.1126}$$

En reprenant (29.1125) (avec $1/\lambda$ au lieu de λ), nous avons

$$J(x_\epsilon/\lambda)\in\frac{1}{\lambda}V(\lambda\xi_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)=V(\xi_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon), \tag{29.1127}$$

ce qui signifie que $V(\xi_0;\varphi_1,\dots,\varphi_k,\epsilon)$ contient bien un élément de $J(E)$.

□

29.17.4 Banach-Alaoglu

Lemme 29.250 ([1, 799]).
Soit un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour chaque $x\in E$ nous considérons $K_x=\overline{B_{\mathbb{K}}(0,\|x\|)}$. Nous considérons ensuite[149] *$K=\prod_{x\in E}K_x$.*

L'ensemble K a la topologie produit[150] *τ_K et le dual E' a la topologie faible $\sigma(E',E)$.*

(1) Nous avons $K\cap E'=\overline{B_{E'}(0,1)}$.

(2) Si nous désignons par τ_P la topologie sur $\overline{B_{E'}(0,1)}$ induite depuis K et par τ_σ celle induite depuis E', alors nous avons $\tau_P=\tau_\sigma$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $K\cap E'=\overline{B_{E'}(0,1)}$ Dans un premier sens, si $f\in K\cap E'$, alors

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|}\leqslant\frac{\|x\|}{\|x\|}=1, \tag{29.1128}$$

et donc $f\in\overline{B_{E'}(0,1)}$. Dans l'autre sens, si $f\in\overline{B_{E'}(0,1)}$, alors $\|f(x)\leqslant\|x\|\|$ pour tout x, de telle sorte que $f(x)\in K_x$ pour tout x, c'est-à-dire $f\in K$.

(2) **Base de topologie de τ_K sur K** En tant que topologie produit, la topologie τ_K est la topologie initiale des projections

$$\begin{aligned}\pi_x\colon\prod_{y\in E}K_y&\to K_x\\ f&\mapsto f(x).\end{aligned} \tag{29.1129}$$

La proposition 9.36 donne une base de topologie sur K_x sous la forme de parties de $\mathbb{K}$ de la forme

$$A_x(z,r)=B_{\mathbb{K}}(z,r)\cap B_{\mathbb{K}}(0,\|x\|). \tag{29.1130}$$

Ensuite le lemme 9.59 dit qu'une base de topologie de K est formée de parties de la forme

$$\bigcap_{k=1}^{n}\pi_{x_i}^{-1}\big(A_{x_i}(z_i,r_i)\big). \tag{29.1131}$$

(3) $\tau_\sigma\subset\tau_P$ Nous considérons un élément de τ_σ sous la forme $U'=\overline{B_{E'}(0,1)}\cap V$ où V est un élément de $\sigma(E',E)$. Notre objectif est de montrer que c'est un élément de τ_P. Pour cela nous allons prendre un élément $\varphi_0\in U'$ et montrer qu'il existe un voisinage $W\in\tau_P$ tel que $\varphi_0\in W\subset U'$.

Par la proposition 29.241 nous considérons des points $x_1,\dots,x_k$ et $\epsilon>0$ tels que $V(\varphi_0,x_1,\dots,x_k,\epsilon)\subset V$, et nous notons

$$U=\overline{B_{E'}(0,1)}\cap V(\varphi_0,x_1,\dots,x_k,\epsilon). \tag{29.1132}$$

Nous construisons W de la façon suivante. Nous posons

$$A_{x_i}=B_{\mathbb{K}}\big(\varphi_0(x_i),\epsilon\big),\quad A_x=B_{\mathbb{K}}(0,\|x\|), \tag{29.1133}$$

[149] Définition 1.22 pour le produit cartésien infini.
[150] Topologie produit infinie, définition 9.65.

la seconde définition étant celle lorsque x n'est pas un des $x_1,\dots,x_k$. Nous définissons ensuite

$$W=\overline{B_{E'}(0,1)}\cap\prod_{x\in E}A_x. \tag{29.1134}$$

Avec ça nous avons bien $\varphi_0\in W$ parce que $|\varphi_0(x)|\leqslant\|x\|$ parce que $\varphi_0\in E'$. De plus $W\subset U$. En effet si $h\in W$ nous avons

$$h(x_i)\in B_{\mathbb{K}}\big(\varphi_0(x_i),\epsilon\big), \tag{29.1135}$$

ce qui signifie que $|h(x_i)-\varphi_0(x_i)|<\epsilon$, et donc que $h\in U$.

(4) $\tau_P\subset\tau_\sigma$ Nous considérons un élément de τ_P de la forme $U=\overline{B_{E'}(0,1)}\cap U_0$ où U_0 est un élément de la topologie produit[151] de $\prod_{x\in E}K_x$. Soit $\varphi_0\in U$.

Nous allons montrer qu'il existe $W\in\tau_\sigma$ tel que $\varphi_0\in W\subset U$. Nous cherchons W sous la forme $W=\overline{B_{E'}(0,1)}\cap W_0$ avec $W_0\in\sigma(E',E)$.

Nous avons vu dans le point (2) qu'il existe $z_i\in\mathbb{K}$, $r_i>0$ et $x_i\in E$ tels que, en posant

$$A_i(z_i,r_i)=B_{\mathbb{K}}(z_i,r_i)\cap B_{\mathbb{K}}(0,\|x_i\|), \tag{29.1136}$$

nous avons

$$\varphi_0\in U_0'=\bigcap_{i=1}^{k}\pi_{x_i}^{-1}\big(A_i(z_i,r_i)\big)\subset U_0. \tag{29.1137}$$

Notez que

$$\pi_{x_i}^{-1}\big(A_i(z_i,r_i)\big)=\{f\colon E\to\mathbb{K}\text{ tel que }|f(x_i)-z_i|<r_i\text{ et }|f(x_i)|<\|x_i\|\}. \tag{29.1138}$$

Vu que $\varphi_0\in U_0'$, il existe $\alpha_i>0$ tel que $|\varphi_0(x_i)-z_i|<\alpha_i<r_i$. Donc en prenant $\epsilon_i<r_i-\alpha_i$, nous avons

$$\{f\colon E\to\mathbb{K}\text{ tel que }|f(x_i)-\varphi_0(x_i)|<\epsilon_i\}\subset\{f\colon E\to\mathbb{K}\text{ tel que }|f(x_i)-z_i|<r_i\}. \tag{29.1139}$$

Tout ça pour dire qu'en posant

$$D_i=\{f\colon E\to\mathbb{K}\text{ tel que }|f(x_i)-\varphi_0(x_i)|<\epsilon_i\text{ et }|f(x_i)|\leqslant\|x_i\|\}, \tag{29.1140}$$

et $U_0''=\bigcap_{i=1}^{k}D_i$, nous avons que $U_0''\in\tau_K$ et

$$\varphi_0\in U_0''\subset U_0'\subset U_0. \tag{29.1141}$$

En prenant les mêmes ϵ_i, nous posons

$$W_i=\{\eta\in E'\text{ tel que }|\eta(x_i)-\varphi_0(x_i)|<\epsilon_i\}, \tag{29.1142}$$

et $W_0=\bigcup_{i=0}^{k}W_i$. Nous avons

$$\varphi_0\in W_0\cap\overline{B_{E'}(0,1)}\subset U_0''\cap\overline{B_{E'}(0,1)}\subset U_0\cap\overline{B_{E'}(0,1)}. \tag{29.1143}$$

□

THOooJNIQooOXGCKY

Théorème 29.251 (Banach-Alaoglu[800]).
Soit un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors la boule fermée[152] $\overline{B_{E'}(0,1)}$ *est compacte pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.*

Démonstration. Pour chaque $x\in E$, nous posons $K_x=[-\|x\|,\|x\|]$ et nous considérons le produit cartésien[153] $K=\prod_{x\in E}K_x$. Un élément de K est une application $f\colon E\to\mathbb{R}$ vérifiant $|f(x)|\leqslant\|x\|$.

[151] Définition 9.65.
[152] Fermée par rapport à la topologie de la norme opérateur.
[153] Définition 1.22.

(1) **Une topologie sur $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$** Sur l'ensemble $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$ de toutes les applications $E\to\mathbb{K}$ nous considérons la topologie initiale des applications

$$\begin{aligned}\pi_x\colon\ \mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})&\to\mathbb{K}\\ f&\mapsto f(x).\end{aligned}\tag{29.1144}$$

C'est une topologie séparée[154] par la proposition 9.61. Nous la nommons τ_F

(2) **K est compact dans $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$** Pour chaque $x\in E$, la partie K_x est compacte. Donc la proposition 9.382 dit que $K=\prod_{x\in E}K_x$ est compacte dans $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})=\prod_{x\in E}\mathbb{K}$.

(3) **Topologies sur $\overline{B_{E'}(0,1)}$** Nous avons vu dans le lemme 29.250 que $\overline{B_{E'}(0,1)}=K\cap E'$. Nous pouvons donc considérer (au moins) deux topologies dessus : celle induite de K et celle induite de E'. Nous nommons τ_P la topologie de $\overline{B_{E'}(0,1)}$ induite de K et τ_σ celle induite de E'.

Notons que τ_P est induite de τ_K qui est induite de τ_F. Donc τ_P est la topologie induite de $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$ sur $\overline{B_{E'}(0,1)}$.

Toujours d'après le lemme 29.250, nous avons $\tau_P=\tau_\sigma$.

(4) **E' est fermé dans K** Nous montrons que $K\setminus E'$ est ouvert. Soit $f\in K\setminus E'$. Il y a deux possibilités : soit il existe $x,y\in E$ tels que $f(x)+f(y)\neq f(x+y)$, soit il existe $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $f(\lambda x)\neq\lambda f(x)$.

(4a) **Si $f(x)+f(y)\neq f(x+y)$** Il existe $r>0$ tel que

$$|f(x)+f(y)-f(x+y)|>r.\tag{29.1145}$$

Nous considérons cet ouvert de K :

$$A=\{g\colon E\to\mathbb{K}\text{ tel que }\begin{cases}g\in K,\\ |f(x)-g(x)|<\epsilon,\\ |f(y)-g(y)|<\epsilon,\\ |f(x+y)-g(x+y)|<\epsilon\end{cases}\}.\tag{29.1146}$$

Si $g\in A$ nous avons :

$$\begin{aligned}&\Big|\big(g(x)+g(y)-g(x+y)\big)-\big(f(x)+f(y)-f(x+y)\big)\Big| &\text{(29.1147a)}\\ &\leqslant|g(x)-f(x)|+|g(y)-f(y)| &\text{(29.1147b)}\\ &\quad+|g(x+y)-f(x+y)|\\ &\leqslant 3\epsilon. &\text{(29.1147c)}\end{aligned}$$

En choisissant $\epsilon<r/3$ nous avons alors $|g(x)+g(y)-g(x+y)|>0$, et donc $g\in K\setminus E'$.

(4b) **Si $f(\lambda x)\neq\lambda f(x)$** Le même type de raisonnement[155] donne un ouvert de K contenant f et contenu dans $K\setminus E'$.

(4c) **Conclusion E' est fermé** Contenant un voisinage de tout élément, la partie $K\setminus E'$ est ouverte[156]. Donc E' est fermé.

(5) **Conclusions** Dans $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$, la partie K est compacte et la partie E' est fermée. Donc $K\cap E'$ est compact pour la topologie τ_F (corolaire 9.138). Donc $\big(\overline{B_{E'}(0,1)},\tau_P\big)$ est un espace topologique compact.

Nous avons vu que $\tau_P=\tau_\sigma$. Donc $\big(\overline{B_{E'}(0,1)},\tau_\sigma\big)$ est un espace topologique compact. La proposition 9.34 dit alors que $\overline{B_{E'}(0,1)}$ est compact dans $\big(E',\sigma(E',E)\big)$.

□

[154] Je n'utilise pas le fait que ce soit séparé dans la suite alors que [800] insiste dessus. À mon avis c'est parce que le corolaire 9.138 est souvent énoncé pour des espaces séparés. Peut-être parce que les Français disent que les compacts doivent être séparés. Dans le Frido, un compact doit seulement vérifier la propriété de sous-recouvrement fini. On peut être compact sans être séparé. Si vous avez une idée sur l'endroit où la séparation de $\mathrm{Fun}(E,\mathbb{K})$ joue dans la preuve, écrivez-moi.

[155] Je n'ai pas vérifié. Si ça pose un problème, écrivez-moi.

[156] Théorème 9.8.

29.17.5 Espace de Banach réflexif, Kakutani

THOooTFIHooPQjVAr

Théorème 29.252 (Kakutani[232]).
Un espace de Banach est réflexif[157] *si et seulement si la boule fermée* $\overline{B_E(0,1)}$ *est compacte dans* $\big(E,\sigma(E,E')\big)$[158].

Démonstration. Deux sens.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que E est un espace de Banach réflexif. Nous commençons par voir que

$$J^{-1}\colon \big(E'',\sigma(E'',E')'\big)\to\big(E,\sigma(E,E')\big) \tag{29.1148}$$

est continue. Nous utilisons la proposition 9.64 : l'application J^{-1} sera continue si et seulement si $\varphi\circ J^{-1}\colon E''\to\mathbb{K}$ est continue pour tout $\varphi\in E'$. Pour s'en assurer nous commençons par trouver une forme pratique pour $\varphi\circ J^{-1}$. Soit $\xi\in E''$. Nous écrivons la définition (29.816) de J pour $x=J^{-1}(\xi)$:

$$\varphi\big(J^{-1}(\xi)\big)=J\big(J^{-1}(\xi)\big)\varphi=\xi(\varphi). \tag{29.1149}$$

Nous devons donc vérifier la continuité, pour chaque $\varphi\in E'$ de l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_\varphi\colon \big(E',\sigma(E',E'')'\big)&\to\mathbb{K}\\ \xi&\mapsto\xi(\varphi).\end{aligned} \tag{29.1150}$$

Par la définition 29.235(2) de la topologie faible sur E'', les applications ev_φ sont continues. Nous en concluons par la proposition 9.64 que l'application J^{-1} est continue.

Par ailleurs la proposition 29.181(2) dit que $\overline{B_E(0,1)}=J^{-1}\big(\overline{B_{E''}(0,1)}\big)$, et le théorème de Banach-Alaoglu 29.251 appliqué à E' dit que $\overline{B_{E''}(0,1)}$ est compacte dans $\sigma(E'',E')$. Or l'image d'un compact par une application continue est compacte (proposition 9.298). Donc $\overline{B_E(0,1)}$ est compact.

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $\overline{B_E(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte. Nous savons par la proposition 29.183 que l'application

$$J\colon \big(E,\sigma(E,E')\big)\to\big(E'',\sigma(E'',E')\big) \tag{29.1151}$$

est continue. Comme l'image d'un compact est compacte, la partie $J\big(\overline{B_E(0,1)}\big)$ est$\sigma(E'',E')$-compacte et donc fermée. Mais le théorème de Goldstine 29.249 dit que $J\big(\overline{B_E(0,1)}\big)$ est $\sigma(E'',E')$-dense dans $\overline{B_{E'}(0,1)}$. Donc

$$J\big(\overline{B_E(0,1)}\big)=\overline{B_{E''}(0,1)} \tag{29.1152}$$

par la proposition 9.28.

Nous en déduisons que $J(E)=E''$. En effet si $\xi\in E''$, alors il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\lambda\xi\in\overline{B_{E''}(0,1)}$ (par exemple $\lambda=1/\|\xi\|$). Il existe donc $x\in\overline{B_E(0,1)}$ tel que $J(x)=\lambda\xi$. Et donc $J(x/\lambda)=\xi$. Cela prouve que $\xi\in J(E)$.

Nous avons démontré que J est surjective et donc que E est réflexif.

□

PROPooRNORooDjGqWy

Proposition 29.253 ([232]).
Soient un espace de Banach réflexif E *et un sous-espace vectoriel fermé* M*. Alors* M *est réflexif*[159].

Démonstration. Nous pouvons considérer deux topologies sur M :

(1) τ_1 : la topologie induite de $\sigma(E,E')$,

(2) τ_2 : la topologie faible de M lui-même, c'est-à-dire $\sigma(M,M')$.

Et voici plein de petites affirmations successives.

(1) Nous avons déjà vu dans la proposition 29.247 que $\tau_1=\tau_2$.

(2) Le théorème de Kakutani 29.252 dit que $\overline{B_E(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte.

(3) La partie M est convexe et τ_E-fermée, donc M est $\sigma(E,E')$-fermée par la proposition 29.246.

(4) Pour la topologie $\sigma(E,E')$, l'égalité $\overline{B_M(0,1)}=\overline{B_E(0,1)}\cap M$ est une intersection d'un compact avec un fermé. $\overline{B_M(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte par 9.138.

[157] Définition 29.180.
[158] Définition 29.235.
[159] L'espace M est de Banach par la proposition 12.94

(5) La partie $\overline{B_M(0,1)}$ est $\sigma(E,E')$-compacte et contenue dans M. La proposition 9.35 indique donc que $\overline{B_M(0,1)}$ est compacte pour la topologie de M induite de $\sigma(E,E')$, c'est-à-dire pour τ_1.

(6) Vu que $\overline{B_M(0,1)}$ est τ_1-compacte, elle est aussi τ_2-compacte parce que $\tau_1 = \tau_2$.

(7) La boule $\overline{B_M(0,1)}$ est $\sigma(M,M')$-compacte. Donc le théorème de Kakutani 29.252 dit que M est réflexif.

□

PROPooBBNBooGcXDRH

Proposition 29.254 ([232, 1]).
Un espace de Banach est réflexif si et seulement si son dual est réflexif.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous devons montrer que l'application $J' : E' \to E'''$ est surjective. Soit $\alpha \in E'''$; nous considérons

$$\begin{aligned} f_\alpha : E &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto (\alpha \circ J)(x). \end{aligned} \tag{29.1153}$$

En tant que composition d'applications linéaires continues, ce f_α est un élément de E'. Nous montrons à présent que $J'(f_\alpha) = \alpha$. Soit $\xi \in E''$. Nous avons d'abord $J'(f_\alpha)\xi = \xi(f_\alpha)$. Mais comme J est surjective, il existe $x \in E$ tel que $\xi = J(x)$. Pour ce x nous avons

$$J'(f_\alpha)\xi = \xi(f_\alpha) = J(x)f_\alpha = f_\alpha(x) = \alpha\big(J(x)\big) = \alpha(\xi). \tag{29.1154}$$

Nous avons donc bien $J'(f_\alpha)\xi = \alpha(\xi)$ pour tout $\xi \in E''$.

(2) $\Leftarrow$ La partie $\Rightarrow$ appliquée à E' montre que E'' est réflexif, la proposition 29.182 dit que $J(E)$ est fermé, et donc la proposition 29.253 dit que $J(E)$ est réflexif.

L'application $J : E \to J(E)$ est une bijection isométrique. Donc E est réflexif si et seulement si $J(E)$ est réflexif par la proposition 29.185. Nous venons de prouver que $J(E)$ est réflexif. Donc E est réflexif.

□

PROPooPVVYooMZjQSq

Proposition 29.255 ([232]).
Une suite bornée dans un espace de Banach réflexif[160] *contient une sous-suite faiblement convergente.*

29.17.6 Espaces L^∞

LEMooMSYAooGEMgoc

Lemme 29.256 ([232]).
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas réflexif.

LEMooUSXTooFvpsVd

Lemme 29.257 ([232]).
Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini, alors $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas réflexif[161].

Démonstration. Supposons que $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est réflexif. Le théorème de représentation de Riesz 29.188(2) dit que $(L^1)'$ est en bijection linéaire isométrique avec L^∞ ; le lemme 29.185 dit alors que $(L^1)'$ est réflexif[162]. La proposition 29.254 dit alors que L^1 est réflexif.

Or le lemme 29.256 dit que L^1 n'est pas réflexif. □

La proposition suivante est souvent présentée en disant que l'inclusion $L^1 \subset (L^\infty)'$ est stricte, ou, pire, en disant que $(L^\infty)'$ est strictement plus grand que L^1. Cette façon de dire est un gros abus de langage. D'abord L^1 n'est même pas inclus dans L^∞ ; ce sont deux ensembles qui n'ont rien à voir. Ensuite, ce que signifie réellement cette proposition est seulement que la première injection $L^1 \to (L^\infty)'$ qui nous tombe sous la main (celle du théorème de représentation de Riesz) n'est pas surjective[163].

PROPooXXRQooNSBZOi

Proposition 29.258.
Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi_g : L^\infty(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g} \end{aligned} \tag{29.1155}$$

[160] Définition 29.180.
[161] Définition 29.180.
[162] Dans de nombreuses références, par exemple[232], il est simplement dit que $(L^1)' = L^\infty$. C'est un abus de notation qui permet de se passer du lemme 29.185.
[163] Si vous savez comment prouver qu'il n'existe pas de surject de L^1 vers $(L^\infty)'$, écrivez-moi.

est linéaire et bien définie.

L'application

$$\begin{aligned}\Phi\colon L^1(\mathbb{R}^d) &\to L^\infty(\mathbb{R}^d)'\\ g &\mapsto \Phi_g\end{aligned} \tag{29.1156}$$

n'est pas surjective.

Démonstration. Prouvons d'abord que Φ_g est bien définie. Vu que $f \in L^\infty$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| < M$ sur $\mathbb{R}^d \setminus A$ où A est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$. La fonction $x \mapsto |f(x)\overline{g(x)}|$ est donc majorée par la fonction intégrable $x \mapsto M|g(x)|$ qui est intégrable (sur $\mathbb{R}^d \setminus A$). L'intégrabilité de $f\bar{g}$ n'est donc pas un problème.

Le fait que Φ prenne ses valeurs dans $(L^\infty)'$ est le théorème 29.189(2b).

Le fait qu'elle ne soit pas surjective est la proposition 29.193. □

29.18 Espace de Schwartz

Pour un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, nous notons

$$\partial^\alpha \varphi = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \varphi \tag{29.1157}$$

pour peu que la fonction φ soit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ fois dérivable.

DefHHyQooK

Définition 29.259.
*Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. L'**espace de Schwartz** $\mathscr{S}(\Omega)$ est le sous-ensemble de $C^\infty(\Omega)$ des fonctions dont toutes les dérivées décroissent plus vite que tout polynôme :*

$$\mathscr{S}(\Omega) = \big\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty\big\} \tag{29.1158}$$

où nous avons considéré

EqQWdCbCu

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\Omega} |x^\beta(\partial^\alpha\varphi)(x)| = \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty. \tag{29.1159}$$

Pour simplifier les notations (surtout du côté de Fourier), nous allons parfois écrire $M_i\varphi$ pour la fonction $x \mapsto x_i\varphi(x)$.

Exemple 29.260.
La fonction e^{-x^2} est une fonction à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$. △

Définition 29.261.
*Une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite à **décroissance rapide** si elle décroît plus vite que n'importe quel polynôme. Plus précisément, si pour tout polynôme Q, il existe un $r > 0$ tel que $|f(x)| < \frac{1}{|Q(x)|}$ pour tout $\|x\| \geqslant r$.*

PropCSmzwGv

Proposition 29.262.
Une fonction Schwartz est à décroissance rapide.

Démonstration. Nous commençons par considérer un polynôme P donné par

$$P(x) = \sum_k c_k x^{\beta_k} \tag{29.1160}$$

où les β_k sont des multiindices, les c_k sont des constantes et la somme est finie. Nous avons la majoration

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)P(x)| \leqslant \sum_k \sup_x \left|c_k\varphi(x)x^{\beta_k}\right| \leqslant \sum_k |c_k| p_{0,\beta_k}(\varphi) < \infty. \tag{29.1161}$$

Nous allons noter M_P la constante $\sum_k |c_k| p_{0,\beta_k}(\varphi)$, de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ nous ayons $|\varphi(x)P(x)| \leqslant M_P$ et donc

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{M_P}{|P(x)|} = \frac{1}{|\frac{1}{M_P}P(x)|}. \tag{29.1162}$$

Notons que cette inégalité est a fortiori correcte pour les x sur lesquels P s'annule.

Soit maintenant un polynôme Q. Nous considérons le polynôme $P(x) = \|x\|Q(x)$. Étant de plus haut degré, pour toute constante C il existe un rayon r_C tel que $|P(x)| \geqslant C|Q(x)|$ pour tout $|x| \geqslant r_C$. En particulier pour $|x| \geqslant r_{M_P}$ nous avons

$$|P(x)| \geqslant M_P|Q(x)| \tag{29.1163}$$

et donc, pour ces x,

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{|\frac{1}{M_P}P(x)|} \leqslant \frac{1}{|Q(x)|}. \tag{29.1164}$$

La première inégalité est valable pour tout x, et la seconde pour $\|x\| \geqslant r_{M_P}$. □

CORooZFPSooHCFUSH

Corolaire 29.263 ([1]).
Soit φ une fonction Schwartz sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Alors la fonction

$$y \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x,y)| \tag{29.1165}$$

est intégrable.

Démonstration. Soit un polynôme Q en la variable y. Par la proposition 29.262, il existe $r > 0$ tel que

$$|\varphi(x,y)| < \frac{1}{Q(y)} \tag{29.1166}$$

pour tout $\|(x,y)\| > r$. A fortiori l'inégalité tient pour tout $|y| > r$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x,y)|dy = \int_{\|y\|\leqslant r} \sup_x |\varphi(x,y)|dy + \int_{\|y\|>r} \sup_x |\varphi(x,y)|dy. \tag{29.1167}$$

La première intégrale est bornée par $\text{Vol}\big(B(0,r)\big)\|\varphi\|_\infty$ tandis que la seconde est bornée par l'intégrale de $\frac{1}{Q(y)}$. En prenant Q de degré suffisamment élevé en toutes les composantes de y nous avons intégrabilité. □

29.18.1 Topologie

LEMDEFooZEFVooMMmiBr

Lemme-Définition 29.264.
Les $p_{\alpha,\beta}$ donnés par l'équation (29.1159) ci-dessus sont des seminormes[164]*. La topologie considérée sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est celle des seminormes $p_{\alpha,\beta}$.*

NORMooVQESooRwJShl

29.265.
Nous avons un enchainement de résultats qui nous aident à prouver la continuité d'une application $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to X$.

(1) La topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par une famille dénombrable de seminormes. Donc la proposition 9.421 nous dit que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est métrisable.

(2) La proposition 9.370 nous dit alors que si X est métrique, toute application séquentiellement continue $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to X$ est continue.

(3) Donc si X est métrique, il suffit de prouver que pour $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} 0$ nous avons $T(f_n) \xrightarrow{X} 0$ où $f_n\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to X$. Dans les cas usuels, T sera une distribution et $X = \mathbb{C}$.

(4) En vertu de la proposition 9.417, la convergence $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} 0$ signifie que pour tout choix de multiindice α et β, $p_{\alpha,\beta}(f_n) \to 0$, c'est-à-dire

$$\|x^\beta \partial^\alpha f_n\|_\infty \to 0. \tag{29.1168}$$

EQooPUJPooNbtNFb

(5) Et enfin, la technique pour montrer que $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ est continue est de montrer que sous l'hypothèse d'avoir (29.1168) pour tout choix de α et β, nous avons $T(f_n) \to 0$ dans $\mathbb{C}$.

LemRJhCbkO

Lemme 29.266 ([801]).
La topologie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée aussi par les seminormes

$$q_{n,m} = \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big(1 + \|x\|\big)^m \big|\partial^\alpha \varphi(x)\big|. \tag{29.1169}$$

Autrement dit, une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} 0$ si et seulement si $q_{n,m}(\varphi) \to 0$ pour tout n et m.

Le fait que les $q_{n,m}(\varphi)$ restent bornés est la proposition 29.262. Cependant ce lemme est plus précis parce qu'en disant seulement que φ est majoré par des polynôme, nous ne disons pas que les polynômes correspondants aux φ_n tendent vers zéro si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$. Et d'ailleurs on ne sait pas très bien ce que signifierait $P_n \to 0$ pour une suite de polynômes.

[164] Définition 9.399.

PropGNXBeME

Proposition 29.267.
Pour $p \in [1,\infty]$, l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continument dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'injection dont nous parlons est l'identité ou plus précisément l'identité suivie de la prise de classe. Il faut vérifier que cela est correct et continu, c'est-à-dire d'abord qu'une fonction à décroissance rapide est bien dans L^p et ensuite que si $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, alors $f_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Commençons par $p = \infty$. Alors $\|f_n\|_\infty = p_{0,0}(f_n) \to 0$ parce que si $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, alors en particulier $p_{0,0}(f_n) \to 0$.

Au tour de $p < \infty$ maintenant. Nous savons qu'en dimension d, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(1+\|x\|)^s} \tag{29.1170}$$

est intégrable dès que $s > d$. Pour toute valeur de m nous avons

$$\|\varphi\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big|(1+\|x\|)^m \varphi(x)\big|^p}{\big(1+\|x\|\big)^{mp}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \frac{q_{0,m}(\varphi)^p}{\big(1+\|x\|\big)^{mp}}. \tag{29.1171}$$

En choisissant m de telle sorte que $mp > d$, nous avons convergence de l'intégrale et donc $\|\varphi\|_p < \infty$. Nous retenons que

EqVWfEEMk
$$\|\varphi\|_p^p \leqslant C q_{0,m}(\varphi)^p \tag{29.1172}$$

pour une certaine constante C et un bon choix de m.

Ceci prouve que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$. Nous devons encore vérifier que l'inclusion est continue. Si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, alors en particulier nous avons $q_{0,m}(\varphi_n) \to 0$ par le lemme 29.266. Par conséquent la majoration (29.1172) nous dit que $\|\varphi_n\|_p \to 0$ également.

□

En résumé, si $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \varphi$ alors $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \varphi$.

ThoRWEoqY

Théorème 29.268 ([539]).
Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ finie sur les compacts. Alors $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \mu)$.

PROPooJNQZooIRbJei

Proposition 29.269 ([802]).
La partie $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et ϕ, une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1$ (l'existence de telles fonctions est discutée en 17.14.1). Soit aussi $\phi_k(x) = \phi(x/k)$. Nous posons

$$f_k(x) = \phi_k(x) f(x), \tag{29.1173}$$

et nous allons prouver que pour tout multiindice α et γ,

$$p_{\alpha,\gamma}(f_k - f) = \|x^\gamma \partial^\alpha (f_k - f)\|_\infty \to 0. \tag{29.1174}$$

Pour cela nous allons noter $\beta \leqslant \alpha$ lorsque β est un multiindice contenu dans α. En utilisant la dérivée du produit nous avons

$$(\partial^\alpha f_k)(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} (\partial^{\alpha-\beta}\phi_k)(x)\partial^\beta f(x) \tag{29.1175a}$$

$$= \sum_{\beta \leqslant \alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x) \tag{29.1175b}$$

$$= \sum_{\beta < \alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x) + \phi(x/k)(\partial^\alpha f)(x). \tag{29.1175c}$$

Nous devons donc étudier et majorer

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\gamma \partial^\alpha (f_k - f)| \leqslant \sup \Big|x^\gamma \sum_{\beta<\alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x)\Big| \\ + \sup \big|x^\gamma \big(\phi(x/k) - 1\big)(\partial^\alpha f)(x)\big|\end{aligned} \tag{29.1176}$$

En ce qui concerne le second terme, soit $\epsilon > 0$, vu que f est Schwartz, il existe R tel que

$$|x^\gamma(\partial^\alpha f)(x)| < \epsilon \tag{29.1177}$$

dès que $\|x\| > R$. En prenant $k > R$,

$$|x^\gamma(\partial^\alpha f)(x)| \begin{cases} = 0 & \text{si } \|x\| < R \\ \leqslant \epsilon & \text{si } \|x\| > R. \end{cases} \tag{29.1178}$$

En ce qui concerne le premier terme,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Big|x^\gamma \sum_{\beta<\alpha} k^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x)\Big| \tag{29.1179a}$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\sup_x \Big|\sum_{\beta<\alpha}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(x^\gamma\partial^\beta f)(x)\Big| \tag{29.1179b}$$

$$= \frac{1}{k}\sup_x \Big|\sum_{\beta<\alpha}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)p_{\beta,\gamma}(f)\Big| \tag{29.1179c}$$

La somme ne contient qu'un nombre fini de β différents, donc nous pouvons considérer un nombre K qui majore tous les $p_{\beta,\gamma}(f)$ en même temps. La partie avec ϕ peut être majorée par $\|\partial^{\alpha-\beta}\phi\|_\infty$ (qui est fini) dont nous pouvons prendre le maximum sur $\beta < \alpha$. Toute l'expression dans la somme est donc majorée par un nombre qui ne dépend ni de x ni de β. Vu que la somme est finie, elle est majorée par ce nombre multiplié par le nombre de termes dans la somme et au final

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Big|x^\gamma \sum_{\beta<\alpha} k^{-|\alpha-\beta|}(\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k)(\partial^\beta f)(x)\Big| \leqslant \frac{K'}{k}. \tag{29.1180}$$

La limite $k \to \infty$ ne fait alors plus de doutes. □

Remarque 29.270.

Vu la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ (définition 29.264), la convergence $f_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} f$ peut être exprimée par le fait que pour tout k, l,

$$t^k f_n^{(l)} \xrightarrow{unif} t^k f^{(l)}. \tag{29.1181}$$

C'est-à-dire convergence uniforme de toutes les dérivées multipliées par n'importe quel polynôme.

29.18.2 Produit de convolution

PROPooUNFYooYdbSbJ

Proposition 29.271 (Stabilité de Schwartz par convolution[165] [770])**.**
Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Nous devons prouver que

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi * \psi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\beta(\partial^\alpha(\varphi * \psi))(x)| \tag{29.1182}$$

est borné pour tout multiindices α et β. En appliquant $|\alpha|$ fois la proposition 29.84, nous mettons toutes les dérivées sur ψ : $\partial^\alpha(\varphi * \psi) = (\varphi * \partial^\alpha\psi)$. Cela étant fait, nous majorons

$$\big|x^\beta(\varphi * \partial^\alpha\psi)(x)\big| \leqslant |x^\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \underbrace{\big|(\partial^\alpha\psi)(x-y)\big|}_{\leqslant\|\partial^\alpha\psi\|_\infty} dy\Big| \tag{29.1183a}$$

$$\leqslant |x^\beta|\|\partial^\alpha\psi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)|dy \tag{29.1183b}$$

$$\leqslant p_{\alpha,\beta}(\psi)\|\varphi\|_{L^1}. \tag{29.1183c}$$

Par conséquent, $p_{\alpha,\beta}(\varphi * \psi) \leqslant \|\varphi\|_{L^1} p_{\alpha,\beta}(\psi) < \infty$. □

[165] Définition 29.78.

29.19 Théorème de Montel

ThoXLyCzol

Théorème 29.272 (Montel[112]).
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur Ω, uniformément bornée sur tout compact de Ω. Alors de toute suite dans $\mathcal{F}$ nous pouvons extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Ω.

Démonstration. (1) **Un ensemble équicontinu**

Nous commençons par prendre une suite de compacts dans Ω comme dans le lemme 9.379, et une suite δ_n de réels strictement positifs tels que

$$B(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1} \tag{29.1184}$$

pour tout $z \in K_n$. Soient $x, y \in K_n$ tels que $|x - y| < \delta_n$; nous notons $\partial B(x, 2\delta_n)$ le cercle de rayon $2\delta_n$ autour de x, parcouru dans le sens positif. La formule de Cauchy 28.218 nous donne

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - x} - \frac{f(\xi)}{\xi - y} \right) d\xi = \frac{x - y}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)(\xi - y)} d\xi \tag{29.1185}$$

Nous majorons ça par

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \frac{|x - y|}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{|f(\xi)|}{2\delta_n^2} d\xi \leqslant \frac{|x - y|}{\delta_n} M_n. \tag{29.1186}$$

Justifications :

- $|\xi - x| = 2\delta_n$ et $|\xi - y| \geqslant \delta_n$ parce que ξ est au mieux sur le rayon passant par x et y.
- $|f(\xi)| \leqslant M_n$ où M_n est la borne uniforme de $\mathcal{F}$ sur le compact K_n.
- Nous avons aussi fini par calculer l'intégrale dans laquelle il ne restait plus rien, ça a donné la circonférence du cercle de rayon $2\delta_n$.

Jusqu'à présent nous avons prouvé que l'ensemble

$$\mathcal{F}_n = \{f|_{K_n} \text{ tel que } f \in \mathcal{F}\} \tag{29.1187}$$

est équicontinu. Il est aussi équiborné par hypothèse.

(2) **Application du théorème d'Ascoli**

L'ensemble $\mathcal{F}_n$ vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli 29.7. Donc l'ensemble $\mathcal{F}_n$ est relativement compact dans $C(K_n, \mathbb{C})$ pour la norme uniforme. Autrement dit l'ensemble $\bar{\mathcal{F}}$ est compact et si nous avons une suite de fonctions dans $\mathcal{F}_n$, il existe une sous-suite convergeant dans $\bar{\mathcal{F}}_n$, c'est-à-dire uniformément. Autrement dit il existe une fonction strictement croissante $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $k \mapsto f_{\varphi(k)}$ converge uniformément sur K_n. La limite n'est cependant pas spécialement dans $\mathcal{F}_n$.

(3) **L'argument diagonal**

La suite $k \mapsto f_{\varphi_1 \circ \ldots \varphi_k(k)}$ converge uniformément sur tous les K_n. Si K est un compact de Ω, alors les petites propriétés sympas du lemme 9.379 nous disent que $K \subset \text{Int}(K_m)$ pour un certain m. Ladite suite convergeant uniformément sur K_m, elle converge uniformément sur K et nous avons montré la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

□

Corolaire 29.273 ([112]).
Soient Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. Soit f holomorphe sur Ω telle que $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$.

Alors de (f^n) on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction constante a.

Démonstration. Nous considérons un voisinage de a inclus dans Ω ; sachant que $|f(a)| < 1$, nous trouvons un voisinage encore plus petit de a sur lequel $|f'(z)| < 1$. Soit donc r tel que $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$ et tel que $|f'(z)| < 1$ sur $\overline{B(a, r)}$. Étant donné que $f'(z)$ est continue sur le compact $\overline{B(a, r)}$, nous en prenons le maximum λ (qui est strictement inférieur à 1) et nous avons au final

$$|f'(z)| \leqslant \lambda < 1 \tag{29.1188}$$

pour tout $z \in \overline{B(a,r)}$. Le théorème des accroissements finis 14.351 nous dit que

$$\big|f(z)-a\big| \leqslant \lambda|z-a| \tag{29.1189}$$

pour tout $z \in \overline{B(a,r)}$. C'est ici que nous utilisons l'hypothèse de convexité de Ω. Nous montrons alors par récurrence que

$$\big|f^n(z)-a\big| \leqslant \lambda^n|z-a| \leqslant \lambda^n r \leqslant r. \tag{29.1190}$$

EqIQUzKpg

L'ensemble $A = \{f^n \text{ tel que } n \geqslant 1\}$ est donc uniformément borné sur $\overline{B(a,r)}$ par $a+r$. Autre manière de le dire : pour tout $z \in \overline{B(a,r)}$ nous avons

$$f^n(z) \in \overline{B(a,r)}. \tag{29.1191}$$

La suite (f^n) est donc uniformément bornée sur tout compact de $B(a,r)$. Le théorème de Montel 29.272 nous indique que l'on peut extraire une sous-suite convergente uniformément sur tout compact. Au vu de (29.1190) cette convergence ne peut avoir lieu que vers une fonction g qui vaut la constante a sur $B(a,r)$.

D'autre part la fonction g est holomorphe en tant que limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 28.112. Or une fonction holomorphe constante sur un ouvert est constante sur tout son domaine d'holomorphie (principe d'extension analytique, théorème 19.166). □

29.20 Espaces de Bergman

Source : [576].

Soit Ω un borné dans $\mathbb{C}$ et D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 29.274.
*L'**espace de Bergman** sur Ω, noté $A^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur Ω qui sont en même temps dans $L^2(\Omega)$.*

Nous mettons sur $A^2(\Omega)$ le produit scalaire usuel hérité de L^2 :

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dz. \tag{29.1192}$$

LemIZxKfB

Lemme 29.275.
Soient un compact $K \subset \Omega$ et une fonction $f \in A^2(\Omega)$. Alors

$$\max_{z\in K}|f(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{d(K,\partial\Omega)}\|f\|_2. \tag{29.1193}$$

Démonstration. Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset \Omega$. Nous considérons aussi $\rho \leqslant r$. La formule de Cauchy (28.218) nous donne

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B(a,\rho)}\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta \tag{29.1194}$$

où nous avons utilisé le chemin $\gamma(\theta) = a+\rho e^{i\theta}$, $\gamma'(\theta) = i\rho e^{i\theta}$ et $\rho = |\xi - a|$. Maintenant une astuce est d'écrire

$$\frac{r^2}{2}f(a) = \int_0^r f(a)\rho d\rho, \tag{29.1195}$$

et d'y substituer la valeur de $f(a)$ que nous venons de calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{2}f(a) &= \int_0^r \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})d\theta\rho d\rho && (29.1196a)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{B(a,r)} f(z)dz && \text{passage aux polaires} \quad (29.1196b)\\
&= \frac{1}{2\pi}\langle 1, f\rangle_B && \text{produit scalaire sur } B(a,r) \quad (29.1196c)\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\sqrt{\langle 1,1\rangle_B\langle f,f\rangle_B} && (29.1196d)
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$r^2 f(a) \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\langle 1,1\rangle_B\langle f,f\rangle_B}, \tag{29.1197}$$

et donc

$$\pi r^2 f(a) \leqslant \sqrt{\pi r^2}\|f\|_2, \tag{29.1198}$$

parce que $\langle f, f\rangle_B \leqslant \|f\|_2^2$. En effet le produit scalaire $\|.\|_2$ est donné par une intégrale sur Ω alors que $B(a,r) \subset \Omega$ et que la fonction qu'on y intègre est positive (c'est $|f(z)|^2$). En simplifiant,

$$f(a) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_2. \tag{29.1199}$$

Mais r a été choisi pour avoir $B(a,r) \subset \Omega$, donc $r \leqslant d(a, \partial\Omega)$ et

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{d(a,\partial\Omega)\sqrt{\pi}}\|f\|_2. \tag{29.1200}$$

Maintenant si nous prenons $a \in K$, nous avons encore la minoration $d(a, \partial K) \leqslant d(a, \partial\Omega)$ et donc

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{d(a,\partial K)\sqrt{\pi}}\|f\|_2. \tag{29.1201}$$

□

Théorème 29.276.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

(1) L'espace $A^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

(2) Si D est la boule unité dans $\mathbb{C}$, une base hilbertienne de $A^2(D)$ est donnée par les fonctions

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n \tag{29.1202}$$

pour $n \geqslant 0$.

Démonstration. Nous commençons par montrer que $A^2(\Omega)$ est complet. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans $A^2(\Omega)$ et un compact $K \subset \Omega$. Nous savons par le lemme 29.275 que

$$\max_{z\in K}\big|f_n(z) - f_m(z)\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K,\partial\Omega)}\|f_n - f_m\|_2. \tag{29.1203}$$

Donc f_n converge uniformément sur K. Par le théorème de Weierstrass 28.112, la fonction f est holomorphe. Il existe donc une fonction holomorphe f qui est limite uniforme sur tout compact de Ω de la suite (f_n).

Mais $L^2(\Omega)$ étant complet, la suite (f_n) a une limite $g \in L^2(\Omega)$. Ce que nous voudrions faire est prouver que $f = g$. Notons que tel quel, ce n'est pas vrai parce que f est une vraie fonction alors que g est une classe. Ce que nous enseigne la proposition 29.23 est qu'il existe une sous-suite (qu'on note (g_n)) qui converge vers g presque partout. Dans cette dernière phrase, g_n et g sont de vraies fonctions, des représentants des classes dans L^2.

Nous déduisons que $f = g$ presque partout (ici f et g sont les fonctions) parce que la sous-suite converge uniformément vers f en même temps que presque partout vers g. Donc $f = g$ dans $L^2(\Omega)$ (ici f et g sont les classes). Donc $f \in L^2(\Omega)$ et l'espace $A^2(\Omega)$ est de Hilbert.

Il nous faut encore prouver que $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormale. En ce qui concerne les produits scalaires,

$$\langle e_m, e_n\rangle = \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi}}\int_D z^n\overline{z^m}dz \tag{29.1204a}$$

$$= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}}\int_0^1 \rho\,d\rho\int_0^{2\pi} d\theta\rho^{m+n}e^{i\theta(n-m)} \tag{29.1204b}$$

$$= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}}\frac{1}{m+n+2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)}d\theta}_{2\pi\delta_{mn}} \tag{29.1204c}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)^2}{\pi^2}}\frac{1}{2n+2}2\pi\delta_{nm} \tag{29.1204d}$$

$$= \delta_{nm}. \tag{29.1204e}$$

Donc les fonctions données sont bien orthonormales. Nous devons montrer qu'elles sont denses dans $A^2(D)$. Soit $f \in A^2(D)$ et $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$; nous allons montrer que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2, \tag{29.1205}$$

parce que le point (5) du théorème 27.45 nous indique que ce sera suffisant pour avoir une base hilbertienne.

Étant donné que f est holomorphe sur D, le théorème 28.61 nous développe f en série entière :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{29.1206}$$

En permutant la somme avec le produit scalaire,

$$c_n(f) = \int_D f(z)\bar{e}_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_D f(z)\bar{z}^n dz. \tag{29.1207}$$

Afin de profiter de la convergence uniforme de la série (29.1206) à l'intérieur de D, nous allons exprimer l'intégrale sur D comme une intégrale sur $|z| < r$ en faisant tendre r vers 1 (par le bas). Pour ce faire nous considérons les fonctions

$$g_k(z) = \begin{cases} f(z)\bar{z}^n & \text{si } |z| < 1 - 1/k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29.1208}$$

Ces fonctions sont intégrables sur D et dominées par $f(z)\bar{z}^n$ qui est intégrable sans dépendre de k. Mais nous avons évidemment $g_k(z) \to f(z)\bar{z}^n$. Le théorème de la convergence dominée permet alors de permuter l'intégrale et la limite $k \to \infty$. Cela nous permet d'écrire

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} \bar{z}^n f(z) dz = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \bar{z}^n. \tag{29.1209}$$

Par la convergence uniforme de la série entière *à l'intérieur* du disque D nous pouvons permuter l'intégrale et la somme (proposition 17.55) :

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{|z|<r} z^k \bar{z}^n dz. \tag{29.1210}$$

L'intégrale proprement dite est vite calculée et vaut

$$\int_{|z|<1} \bar{z}^n z^k dz = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{kn}. \tag{29.1211}$$

Nous pouvons donc continuer le calcul de $c_n(f)$ en effectuant la somme sur k qui se réduit à changer k en n puis en effectuant la limite :

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \sum_k a_k \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{kn} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n. \tag{29.1212}$$

Nous effectuons le même genre de calculs pour évaluer $\|f\|_2^2$:

$$\|f\|_2^2 = \int_D |f(z)|^2 dz \tag{29.1213a}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} f(z) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}_k dz \tag{29.1213b}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \int_{|z|<r} f(z)\bar{z}^k dz \qquad \text{permuter } \sum \text{ et } \int \tag{29.1213c}$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k a_k \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1} \qquad \text{intégrale déjà faite.} \tag{29.1213d}$$

Mais nous savons déjà que $c_n(f) = \sqrt{\pi/(n+1)}$, donc ce qui est dans la somme est $\pi \bar{a}_k a_k/(n+1) = |c_k(f)|^2$. Nous avons donc

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 r^{2k+2}. \tag{29.1214}$$

La fonction (de r) constante $|c_k(f)|^2$ domine $|c_k(f)r^{2k+2}|$ tout en ayant une somme (sur k) qui converge ; en effet la proposition 27.24 nous indique que $\sum_k |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$. Le théorème de la convergence dominée nous permet d'inverser la limite et la somme pour obtenir le résultat attendu :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2. \tag{29.1215}$$

□