

Le Frido, volume 2

Plusieurs versions et extensions de ce document.

La version courante Vous trouverez une version dédiée à l'agrégation régulièrement mise à jour à l'adresse suivante :

<http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf>

La version la plus complète Une version plus complète, comprenant le Frido, des exercices ainsi que de la mathématique de niveau recherche :

<http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/mazhe.pdf>

Tout ce qu'il faut savoir pour recompiler soi-même Pour savoir comment recompiler ce document à l'identique, il faut lire

<https://github.com/LaurentClaessens/mazhe>
<http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/readme.pdf>



Copyright 2011-2016 Laurent Claessens, Carlotta Donadello

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled “GNU Free Documentation License”.

Illustration de couverture : Pepper&Carrot <http://www.peppercarrot.com/fr> par David Revoy.

ISBN : 978-2-9540936-6-6

Thèmes

Ceci est une sorte d'index thématique.

Thème 1 : Fonctions Lipschitz

- (1) Définition : 11.189.
- (2) La notion de Lipschitz est utilisée pour définir la stabilité d'un problème, définition 25.23.

Thème 2 : Polynôme de Taylor

- (1) Énoncé : théorème 11.204.
- (2) Le polynôme de Taylor généralise à l'utilisation de toutes les dérivées disponibles le résultat de développement limité donné par la proposition 11.76.
- (3) Il est utilisé pour justifier la méthode de Newton autour de l'équation (25.128).

Thème 3 : Points fixes

- (1) Il y a plusieurs théorèmes de points fixes.

Théorème de Picard 16.109 donne un point fixe comme limite d'itérés d'une fonction Lipschitz. Il aura pour conséquence le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123, l'équation de Fredholm, théorème 16.114 et le théorème d'inversion locale dans le cas des espaces de Banach 16.128.

Théorème de Brouwer qui donne un point fixe pour une application d'une boule vers elle-même. Nous allons donner plusieurs versions et preuves.

- (a) Dans $\mathbb{R}^n$ en version C^∞ via le théorème de Stokes, proposition 16.117.
- (b) Dans $\mathbb{R}^n$ en version continue, en s'appuyant sur le cas C^∞ et en faisant un passage à la limite, théorème 16.118.
- (c) Dans $\mathbb{R}^2$ via l'homotopie, théorème 19.19. Oui, c'est très loin. Et c'est normal parce que ça va utiliser la formule de l'indice qui est de l'analyse complexe ¹.

Théorème de Markov-Kakutani 16.121 qui donne un point fixe à une application continue d'un convexe fermé borné dans lui-même. Ce théorème donnera la mesure de Haar 16.122 sur les groupes compacts.

Théorème de Schauder 16.119 qui est une version valable en dimension infinie du théorème de Brouwer.

- (2) Pour les équations différentielles
 - (a) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 16.125 pour les équations différentielles.
 - (b) Le théorème de Schauder 16.119 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 16.123) sans la condition Lipschitz, mais alors sans unicité de la solution. Notons que de ce point de vue nous sommes dans la même situation que la différence entre le théorème de Brouwer et celui de Picard : hors hypothèse de type «contraction», point d'unicité.
- (3) En calcul numérique
 - La convergence d'une méthode de point fixe est donnée par la proposition 25.55.
 - La convergence quadratique de la méthode de Newton est donnée par le théorème 25.61.
 - En calcul numérique, section 25.6
 - Méthode de Newton comme méthode de point fixe, sous-section 25.7.2.
- (4) D'autres utilisation de points fixes.
 - Processus de Galton-Watson, théorème 28.47.
 - Dans le théorème de Max-Milgram 17.44, le théorème de Picard est utilisé.

1. On aime bien parce que ça ne demande pas Stokes, mais quand même hein, c'est pas gratos non plus.

Thème 4 : Méthode de Newton

- (1) Nous parlons un petit peu de méthode de Newton en dimension 1 dans 25.7.
- (2) La méthode de Newton fonctionne bien avec les fonction convexes par la proposition 25.62.
- (3) La méthode de Newton en dimension n est le théorème 25.68.
- (4) Un intervalle de convergence autour de α s'obtient par majoration de $|g'|$, proposition 25.55.
- (5) Un intervalle de convergence quadratique s'obtient par majoration de $|g''|$, théorème 25.61.
- (6) En calcul numérique, section 25.7.

Thème 5 : Enveloppes

- (1) L'ellipse de John-Loewner donne un ellipsoïde de volume minimum autour d'un compact dans $\mathbb{R}^n$, théorème 13.212.
- (2) Le cercle circonscrit à une courbe donne un cercle de rayon minimal contenant une courbe fermée simple, proposition 14.81.
- (3) Enveloppe convexe du groupe orthogonal 12.36.

Thème 6 : Produit semi-direct de groupes

- (1) Définition 2.85.
- (2) Le corollaire 2.87 donne un critère pour prouver qu'un produit NH est un produit semi-direct.
- (3) L'exemple 12.80 donne le groupe des isométries du carré comme un produit semi-direct.
- (4) Le théorème 12.44 donne les isométries de $\mathbb{R}^n$ par $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_{\rho} O(n)$ où $T(n)$ est le groupe des translations.
- (5) La proposition 12.46 donne une décomposition du groupe orthogonal $O(n) = \text{SO}(n) \times_{\rho} C_2$ où $C_2 = \{\text{Id}, R\}$ où R est de déterminant -1 .
- (6) La proposition 8.44 donne $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_{\rho} \text{GL}(n, \mathbb{R})$ où $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$.

Thème 7 : Racines de polynôme et factorisation de polynômes

- (1) Si $\mathbb{A}$ est une anneau, la proposition 3.111 factorise une racine.
- (2) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, la proposition 3.113 factorise une racine avec sa multiplicité.
- (3) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, le théorème 3.115 factorise plusieurs racines avec leurs multiplicités.
- (4) Si $\mathbb{K}$ est un corps et α une racine dans une extension, le polynôme minimal de α divise tout polynôme annulateur par la proposition 4.55.
- (5) Le théorème 4.58 annule un polynôme de degré n ayant $n + 1$ racines distinctes.
- (6) La proposition 4.105 nous annule un polynôme à plusieurs variables lorsqu'il a trop de racines.
- (7) En analyse complexe, le principe des zéros isolés 19.20 annule en gros toute série entière possédant un zéro non isolé.
- (8) Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Thème 8 : Théorème de Bézout

- (1) Pour $\mathbb{Z}^*$ c'est le théorème 2.24.
- (2) Théorème de Bézout dans un anneau principal : corollaire 3.69.
- (3) Théorème de Bézout dans un anneau de polynômes : théorème 3.105.
- (4) En parlant des racines de l'unité et des générateurs du groupe unitaire dans le lemme 3.9. Au passage nous y parlerons de solfège.

Thème 9 : Équations diophantiennes

- (1) Équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{N}$, équation (2.57).
- (2) Dans 2.5.5, nous résolvons $ax + by = c$ en utilisant Bézout (théorème 2.24).
- (3) L'exemple 3.79 donne une application de la pure notion de modulo pour $x^2 = 3y^2 + 8$. Pas de solutions.
- (4) L'exemple 3.80 résout l'équation $x^2 + 2 = y^3$ en parlant de l'extension $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et de stathme.
- (5) Les propositions 3.81 et 3.84 parlent de triplets pythagoriciens.
- (6) Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décomposition de fractions en éléments simples, théorème 16.59.

Thème 10 : Application réciproque

- (1) Définition 5.172.
- (2) Dans le cas des réels, des exemples sont donnés en 11.268.

Thème 11 : Extension de corps et polynômes

- (1) Définition d'une extension de corps 4.37.
- (2) Pour l'extension du corps de base d'un espace vectoriel et les propriétés d'extension des applications linéaires, voir la section 6.30.
- (3) Extension de corps de base et similitude d'application linéaire (ou de matrices, c'est la même chose), théorème 6.345.
- (4) Extension de corps de base et cyclicité des applications linéaires, corollaire 6.344.
- (5) À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 4.102.

Thème 12 : Rang

- (1) Définition 6.12.
- (2) Le théorème du rang, théorème 6.13
- (3) Prouver que des matrices sont équivalentes et les mettre sous des formes canoniques, lemme 6.15 et son corollaire 6.16.
- (4) Tout hyperplan de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ coupe $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, corollaire 6.16. Cela utilise la forme canonique sus-mentionnée.
- (5) Le lien entre application duale et orthogonal de la proposition 6.32 utilise la notion de rang.
- (6) Prouver les équivalences à être un endomorphisme cyclique du théorème 6.343 via le lemme 6.342.

Thème 13 : Topologie produit

- (1) La définition de la topologie produit est 5.5.
- (2) Pour les espaces vectoriels normés, le produit est donné par la définition 6.197.
- (3) L'équivalence entre la topologie de la norme produit et la topologie produit est le lemme 6.199.

Thème 14 : Produit de compact

- (1) Les produits d'espaces métriques compacts sont compacts ; c'est le théorème de Tykhonov. Nous verrons ce résultat dans les cas suivants.
 - $\mathbb{R}$, lemme 5.106.
 - Produit fini d'espaces métriques compacts, théorème 5.147.
 - Produit dénombrable d'espaces métrique compacts, théorème 5.149.

Thème 15 : Connexité

- (1) Définition 5.67
- (2) Le groupe $SL(n, \mathbb{K})$ est connexe par arcs : proposition 12.18.
- (3) Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs : proposition 12.19.
- (4) Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs, proposition 12.19.
- (5) Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes par arcs, proposition 12.20.
- (6) Le groupe $O(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe, lemme 12.14.
- (7) Les groupe $U(n)$ et $SU(n)$ sont connexes par arcs, lemme 12.15.
- (8) Le groupe $SO(n)$ est connexe mais ce n'est pas encore démontré, proposition 12.16.
- (9) Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 16.155.

Thème 16 : Norme matricielle et rayon spectral

- (1) Définition du rayon spectral 6.83.
- (2) Lien entre norme matricielle et rayon spectral, le théorème 6.91 assure que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$.
- (3) Pour toute norme algébrique nous avons $\rho(A) \leq \|A\|$, proposition 6.85.
- (4) Dans le cadre du conditionnement de matrice. Voir en particulier la proposition 25.42 qui utilise le théorème 6.91.

Thème 17 : Norme opérateur Pour la norme matricielle et le rayon spectral, voir le thème 16.

- (1) Définition 6.81.
- (2) Définition d'une norme d'algèbre 6.82.
- (3) Pour des espaces vectoriels normée, être borné est équivalent à être continu : proposition 6.217.

Thème 18 : Diagonalisation Des résultats qui parlent diagonalisation

- (1) Définition d'un endomorphisme diagonalisable : 6.278.
- (2) Conditions équivalentes au fait d'être diagonalisable en termes de polynôme minimal, y compris la décomposition en espaces propres : théorème 6.281.
- (3) Diagonalisation simultanée 6.284, pseudo-diagonalisation simultanée 6.298.
- (4) Diagonalisation d'exponentielle 6.307 utilisant Dunford.
- (5) Décomposition polaire théorème 12.31. $M = SQ$, S est symétrique, réelle, définie positive, Q est orthogonale.
- (6) Décomposition de Dunford 6.303. $u = s + n$ où s est diagonalisable et n est nilpotent, $[s, n] = 0$.
- (7) Réduction de Jordan (bloc-diagonale) 6.334.
- (8) L'algorithme des facteurs invariants 3.87 donne $U = PDQ$ avec P et Q inversibles, D diagonale, sans hypothèse sur U . De plus les éléments de D forment une chaîne d'éléments qui se divisent l'un l'autre.

Le théorème spectral et ses variantes :

- (1) Théorème spectral, matrice symétrique, théorème 6.292. Via le lemme de Schur.
- (2) Théorème spectral autoadjoint (c'est le même, mais vu sans matrices), théorème 6.380
- (3) Théorème spectral hermitien, lemme 6.286.
- (4) Théorème spectral, matrice normales, théorème 6.290.

Pour les résultats de décomposition dont une partie est diagonale, voir le thème 35 sur les décompositions.

Thème 19 : Sous-groupes

- (1) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $GL(n, \mathbb{C})$, théorème 6.357.
- (2) Sous-groupes compacts de $GL(n, \mathbb{R})$, lemme 12.38 ou proposition 12.39.

Thème 20 : Mesure et intégrale

- (1) Mesure de Lebesgue, définition 7.160
- (2) Intégrale associée à une mesure, définition 7.113

Thème 21 : Équivalence de normes

- (1) La proposition 6.138 sur l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$.
- (2) Montrer que le problème $a - b$ est stable dans l'exemple 25.24.

Thème 22 : Espace L^2 (L2)

- (1) Définition de $L^2(\Omega, \mu)$, 18.28.
- (2) L'espace L^2 est discuté en analyse fonctionnelle, en 18.3.6 parce que l'étude de L^2 utilise entre autres l'inégalité de Hölder 18.20.

Thème 23 : Espaces L^p (Lp)

- (1) Dual de $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < 2$, proposition 18.45.

Thème 24 : Théorème de Stokes, Green et compagnie

- (1) Forme générale, théorème 13.165.
- (2) Rotationnel et circulation, théorème 15.9.

Thème 25 : Invariants de similitude

- (1) Théorème 6.331.
- (2) Pour prouver que la similitude d'applications linéaires résiste à l'extension du corps de base, théorème 6.345.
- (3) Pour prouver que la dimension du commutant d'un endomorphisme de E est de dimension au moins $\dim(E)$, lemme 6.342.
- (4) Nous verrons dans la remarque 6.332 à propos des invariants de similitude que toute matrice est semblable à la matrice bloc-diagonale constituées des matrices compagnon (définition 6.326) de la suite des polynômes minimaux.

Thème 26 : Endomorphismes cycliques

- (1) Définition 6.248.
- (2) Son lien avec le commutant donné dans la proposition 6.340 et le théorème 6.343.
- (3) Utilisation dans le théorème de Frobenius (invariants de similitude), théorème 6.331.

Thème 27 : Formes bilinéaires et quadratiques

- (1) Les formes bilinéaires ont été définies en 6.63.
- (2) Forme quadratique, définition 6.361

Thème 28 : Isométries

- (1) Les isométries de l'espace euclidien sont affines, 12.43.
- (2) Les isométries de l'espace euclidien comme produit semi-direct : $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_{\rho} O(n)$, théorème 12.44.
- (3) Isométries du cube, section 2.12.
- (4) Générateurs du groupe diédral, proposition 12.78.

Thème 29 : Déterminant

- (1) Les n -formes alternées forment un espace de dimension 1, proposition 6.42.
- (2) Déterminant d'une famille de vecteurs 6.45.
- (3) Déterminant d'un endomorphisme 6.48.
- (4) Des interprétations géométriques du déterminant sont dans la section 13.7.

Thème 30 : Polynôme d'endomorphismes

- (1) Endomorphismes cycliques et commutant dans le cas diagonalisable, proposition 6.340.
- (2) Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 12.26.
- (3) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 6.357.
- (4) Décomposition de Dunford, théorème 6.303.
- (5) Algorithme des facteurs invariants 3.87.

Thème 31 : Action de groupe

- (1) Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 10.33.

Thème 32 : Systèmes d'équations linéaires

- Algorithme des facteurs invariants 3.87.
- Méthode du gradient à pas optimal 16.154.

Thème 33 : Classification de groupes

- (1) Structure des groupes d'ordre pq , théorème 12.113.
- (2) Le groupe alterné est simple, théorème 2.83.
- (3) Théorème de Sylow 12.99. Tout le théorème, c'est un peu long. On peut se contenter de la partie qui dit que G contient un p -Sylow.
- (4) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 6.357.
- (5) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corollaire 4.122.

Thème 34 : Théorie des représentations

- (1) Table des caractères du groupe diédral, section 12.14.
- (2) Table des caractères du groupe symétrique S_4 , section 12.13.

Thème 35 : Décomposition de matrices

- (1) Décomposition de Bruhat, théorème 12.37.
- (2) Décomposition de Dunford, théorème 6.303.
- (3) Décomposition polaire 12.31.

Thème 36 : Méthodes de calcul

- (1) Théorème de Rothstein-Trager 13.205.
- (2) Algorithme des facteurs invariants 3.87.
- (3) Méthode de Newton, théorème 25.68
- (4) Calcul d'intégrale par suite équirépartie 20.21.

Thème 37 : Équations différentielles L'utilisation des théorèmes de point fixe pour l'existence de solutions à des équations différentielles est fait dans le chapitre sur les points fixes.

- (1) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 16.125 pour les équations différentielles.
- (2) Le théorème de Schauder 16.119 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 16.123) sans la condition Lipschitz
- (3) Le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123 est utilisé à plusieurs endroits :
— Pour calculer la transformée de Fourier de $e^{-x^2/2}$ dans le lemme 21.15.
- (4) Théorème de stabilité de Lyapunov 24.15.
- (5) Le système proie prédateurs, Lotka-Volterra 24.16
- (6) Équation de Schrödinger, théorème 24.22.
- (7) L'équation $(x - x_0)^\alpha u = 0$ pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, théorème 22.55.
- (8) La proposition 24.18 donne un résultat sur $y'' + qy = 0$ à partir d'une hypothèse de croissance.
- (9) Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 24.20.

Thème 38 : Dénombrements

- Coloriage de roulette (12.4.8.1) et composition de colliers (12.4.8.2).
- Nombres de Bell, théorème 16.82.
- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décomposition de fractions en éléments simples, théorème 16.59.

Thème 39 : Densité

- (1) Densité des polynômes dans $C^0([0, 1])$, théorème de Bernstein 26.117.
- (2) Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$, théorème 18.40.
- (3) Densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 23.17.
- (4) Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 23.19.

Cela est utilisé pour le théorème de trace 23.21.

Les densités sont bien entendu utilisées pour prouver des formules sur un espace en sachant qu'elles sont vraies sur une partie dense. Mais également pour étendre une application définie seulement sur une partie dense. C'est par exemple ce qui est fait pour définir la trace γ_0 sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ en utilisant le théorème d'extension 16.166.

Thème 40 : Injections

- (1) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$, proposition 23.8.
- (2) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$, proposition 23.8.
- (3) L'espace $L^2(\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (les distributions), proposition 22.13.

Thème 41 : Dualité Parmi les théorèmes de dualité nous avons

- (1) Le théorème de représentation de Riesz 17.19 pour les espaces de Hilbert.
- (2) La proposition 18.45 pour les espaces $L^p([0, 1])$ avec $1 < p < 2$.
- (3) Le théorème de représentation de Riesz 18.49 pour les espaces L^p en général.

Tous ces théorèmes donnent la dualité par l'application $\Phi_x = \langle x, \cdot \rangle$.

Thème 42 : Opérations sur les distributions

- (1) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (22.73).
- (2) Dérivation d'une distribution, proposition-définition 22.15.
- (3) Produit d'une distribution par une fonction, définition 22.14.

Thème 43 : Permuter des limites

- (1) Les théorèmes sur les fonctions définies par des intégrales, section 13.19. Nous avons entre autres
 - (a) $\partial_i \int_B f = \int_B \partial_i f$, avec B compact, proposition 13.187.
 - (b) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x , nous avons le théorème 13.177.
 - (c) Si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 13.178.
- (2) Théorème de la convergence monotone, théorème 7.129.

Thème 44 : Convolution

- (1) Définition pour $f, g \in L^1$, théorème 18.33.
- (2) Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 18.35.
- (3) $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, proposition 18.79.
- (4) Les suites régularisantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n * f = f$ dans la proposition 21.17.

Thème 45 : Séries de Fourier

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 21.9.
- Inégalité isopérimétrique, théorème 20.19.
- Fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas, proposition 20.16.

Thème 46 : Transformée de Fourier

- (1) Définition sur L^1 , définition 21.2.
- (2) La transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ est continue, proposition 21.5.
- (3) L'espace de Schwartz est stable par transformée de Fourier. L'application $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection linéaire et continue. Proposition 21.12

Thème 47 : Applications continues et bornées

- (1) Une application linéaire non continue : exemple 6.215 de $e_k \mapsto ke_k$. Les dérivées partielles sont calculées en (17.121).
- (2) Une application linéaire est bornée si et seulement si elle est continue, proposition 6.217.

Thème 48 : Définie positive

- (1) Une application bilinéaire est définie positive lorsque $g(u, u) \geq 0$ et $g(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$ est la définition 6.64.
- (2) Un opérateur ou une matrice est défini positif si toutes ses valeurs propres sont positives, c'est la définition 6.294.
- (3) Pour une matrice symétrique, définie positive implique $\langle Ax, x \rangle > 0$ pour tout x . C'est le lemme 6.296.
- (4) Une application linéaire est définie positive si et seulement si sa matrice associée l'est. C'est la proposition 6.366.

Remarque : nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive dans le cas d'une matrice non symétrique.

Thème 49 : Gaussienne

- (1) Le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (0.1)$$

est fait dans les exemples 13.81 et 13.82.

- (2) Le lemme 21.15 calcule la transformée de Fourier de $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon\|x\|^2}$ qui donne $\hat{g}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4\epsilon}$.
- (3) Le lemme 21.18 donne une suite régularisante à base de gaussienne.
- (4) Elle est utilisée pour régulariser une intégrale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier 21.20

Thème 50 : Inégalités

Inégalité de Jensen (1) Une version discrète pour $f(\sum_i \lambda_i x_i)$, la proposition 11.226.

(2) Une version intégrale pour $f(\int \alpha d\mu)$, la proposition 18.18.

(3) Une version pour l'espérance conditionnelle, la proposition 26.42.

Inégalité de Minkowsky (1) Pour une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ nous avons $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$. Proposition 6.373.

(2) Si $1 \leq p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Proposition 18.23.

(3) L'inégalité de Minkowsky sous forme intégrale s'écrit sous forme déballée

$$\left[\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y). \quad (0.2)$$

ou sous forme compacte

$$\left\| x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y) \quad (0.3)$$

Transformée de Fourier Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, lemme 21.6.

Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 18.35.

Thème 51 : Théorème central limite

- (1) Pour les processus de Poisson, théorème 30.5.

Thème 52 : Lemme de transfert Il s'agit du résultat $\hat{f}' = i\xi \hat{f}$.

- (1) Lemme 21.11 sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- (2) Lemme 23.12 pour L^2 .

Thème 53 : Dédurre la nullité d'une fonction depuis son intégrale Des résultats qui disent que si $\int f = 0$ c'est que $f = 0$ dans un sens ou dans un autre.

- (1) Il y a le lemme 7.123 qui dit ça.
- (2) Un lemme du genre dans L^2 existe aussi pour $\int f\varphi = 0$ pour tout φ . C'est le lemme 18.42.
- (3) Et encore un pour L^p dans la proposition 18.50.
- (4) Si $\int f\chi = 0$ pour tout χ à support compact alors $f = 0$ presque partout, proposition 18.1.
- (5) La proposition 18.44 donne $f = 0$ dans L^p lorsque $\int fg = 0$ pour tout $g \in L^q$ lorsque l'espace est σ -fini.
- (6) Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$. Théorème 16.94.

Table des matières

Thématique	2
Table des matières	11
Index	35
0 Introduction	57
0.1 Préface	57
0.2 Auteurs, contributeurs, sources et remerciements	57
0.3 Les questions pour lesquelles je n'ai pas (encore) de réponse	59
0.3.1 Mes questions d'analyse.	59
0.3.2 Mes questions d'algèbre, géométrie.	61
0.3.3 Mes questions de probabilité et statistiques.	62
0.3.4 Mes questions de modélisation	63
0.3.5 Les preuves à relire par des experts	63
0.4 Comment m'aider à rendre ces notes plus utiles ?	68
1 Construction des ensembles de nombres	69
1.1 Quelques éléments sur les ensembles	69
1.1.1 Lemme de Zorn	69
1.1.2 Complémentaire	70
1.1.3 Relations d'équivalence	70
1.2 Les naturels	71
1.3 Les entiers	71
1.4 Quelques structures algébriques	71
1.5 Les rationnels	73
1.5.1 Suites de Cauchy dans les rationnels	73
1.5.2 Insuffisance des rationnels	75
1.6 Les réels	77
1.6.1 L'ensemble	78
1.6.2 Relation d'ordre	80
1.7 Les complexes	82
1.7.1 Définitions	82
2 Théorie des groupes	85
2.1 Groupes	85
2.2 Sous groupe normal	86
2.3 Groupe dérivé	87
2.4 Théorèmes d'isomorphismes	88
2.5 Le groupe et anneau des entiers	89
2.5.1 Division euclidienne	90
2.5.2 PGCD, PPCM et Bézout	90
2.5.3 Calcul effectif du PGCD et de Bézout	92
2.5.3.1 L'idée	92

2.5.3.2	Pour le PGCD	92
2.5.3.3	Bézout : calcul effectif	93
2.5.4	Écriture des fractions	94
2.5.5	Équation diophantienne linéaire à deux inconnues	95
2.5.6	Quotients	96
2.6	Indice d'un sous-groupe et ordre des éléments	96
2.7	Suite de composition	98
2.8	Groupes résolubles	101
2.9	Action de groupes	102
2.10	Le groupe symétrique	106
2.11	Produit semi-direct de groupes	111
2.12	Isométries du cube	113
2.13	Groupe de torsion	115
2.14	Famille presque nulle	115
3	Anneaux	117
3.1	Généralités	117
3.2	Binôme de Newton et morphisme de Frobenius	118
3.3	Décomposition en facteurs premiers	119
3.4	Le groupe des racines de l'unité	119
3.5	Fonction indicatrice d'Euler (première partie)	121
3.5.1	Introduction par les racines de l'unité	122
3.5.2	Générateurs	123
3.6	Idéal dans un anneau	123
3.7	Caractéristique	124
3.8	Modules	125
3.9	Anneau intègre	127
3.9.1	PGCD et PPCM	128
3.9.2	Contenu d'un polynôme	129
3.10	Anneau factoriel	130
3.11	Anneau principal	131
3.11.1	Bézout	132
3.11.2	Anneau noetherien	133
3.12	Anneau euclidien	133
3.12.1	Équations diophantiennes	135
3.12.2	Triplet pythagoriciens et équation de Fermat pour $n = 4$	136
3.12.3	Lignes et colonnes de matrices	138
3.12.4	Algorithme des facteurs invariants	139
3.13	Anneaux des polynômes	141
3.13.1	Irréductibilité	142
3.13.2	Division euclidienne	143
3.13.3	Bézout	143
3.13.4	Idéaux	144
3.13.5	Racines des polynômes	145
3.13.6	Quelque identités	147
4	Corps	149
4.1	Généralités	149
4.1.1	Corps des fractions	150
4.1.2	Corps premier	151
4.1.3	Petit théorème de Fermat	153
4.2	Théorème des deux carrés	153
4.2.1	Un peu de structure dans $\mathbb{Z}[i]$	154
4.2.2	Résultats chinois	157

4.2.3	Anneaux principaux et polynômes	159
4.3	Extension de corps	160
4.3.1	Polynôme minimal	160
4.3.2	Racines de polynômes	163
4.3.3	Corps de rupture	164
4.3.4	Corps de décomposition	166
4.3.5	Clôture algébrique	167
4.3.6	Extensions séparables	168
4.3.7	Idéal maximum	172
4.4	Espaces de polynômes	173
4.4.1	Polynômes symétriques, alternés ou semi-symétriques	175
4.4.2	Polynôme symétrique élémentaire	175
4.4.3	Relations coefficients racines	178
4.5	Polynômes cyclotomiques	179
4.5.1	Définitions et propriétés	179
4.5.2	Nombres premiers	183
4.5.3	Théorème de Wedderburn	185
4.6	Corps finis	186
4.6.1	Existence, unicité	186
4.6.2	Symboles de Legendre et carrés	189
4.6.3	Théorème de Chevalley-Waring	194
4.6.4	Théorème de l'élément primitif	196
4.6.5	Construction de $\mathbb{F}_q$	201
4.6.5.1	La version du faignant	201
4.6.5.2	La version plus élaborée	202
4.6.6	Exemple : étude de $\mathbb{F}_{16}$	204
4.6.7	Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$	206
4.7	Constructions à la règle et au compas	208
4.7.1	Quelque constructions	208
4.7.2	Nombres constructibles	210
4.7.3	Polygones constructibles	212
4.7.4	Matrices	217
4.8	Minuscule morceau sur la théorie de Galois	217
5	Topologie générale	219
5.1	Topologie en général	219
5.1.1	Définitions basiques	219
5.1.2	Topologie produit	220
5.1.3	Séparabilité	220
5.1.4	Topologie métrique	221
5.1.5	Espace vectoriel normé	222
5.1.6	Topologie sur l'ensemble des réels	225
5.1.7	Base de topologie	227
5.2	Limite et continuité	228
5.3	Compacité	230
5.3.1	Quelque propriétés	230
5.4	Topologie induite	231
5.5	Connexité	232
5.6	Un peu de topologie réelle	234
5.6.1	Suites numériques	234
5.6.2	Maximum, supremum et compagnie	236
5.6.2.1	...et quelque exemples	237
5.6.3	Intervalles	241
5.6.3.1	Connexité	241

5.6.3.2	Compacité	243
5.6.4	Image d'un compact	245
5.6.5	Connexité par arcs	247
5.7	Espaces métriques	247
5.7.1	Espaces métrisables	247
5.7.2	Fonctions continues	247
5.7.3	Caractérisations séquentielles	248
5.7.4	Distance entre un point et un ensemble	250
5.7.5	Compacité	251
5.7.6	Ensembles enchaînés	256
5.7.7	Produit fini d'espaces métriques	257
5.8	Ensembles nulle part denses	258
5.9	Encore de la topologie réelle	259
5.9.1	Ouverts et fermés	259
5.9.2	Intérieur, adhérence et frontière	259
5.9.3	Point d'accumulation, point isolé	261
5.9.4	Limite de suite	261
5.10	Application réciproque	262
5.11	Topologie des semi-normes	263
5.11.1	Espace dual	265
5.11.2	Espace $C^k(\mathbb{R}, E')$	265
5.12	Espaces de Baire	266
6	Espaces vectoriels	269
6.1	Parties libres, génératrices, bases et dimension	269
6.2	Applications linéaires	272
6.2.1	Définition	272
6.2.2	Rang	272
6.3	Matrice d'une application linéaire	274
6.3.1	Écriture dans une base	274
6.3.2	Changement de base : vecteurs de base	276
6.3.3	Changement de base : coordonnées	277
6.3.4	Changement de base : matrice d'une application linéaire	277
6.3.5	Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire	277
6.4	Dualité	278
6.4.1	Orthogonal	278
6.4.2	Transposée	278
6.4.3	Transposée : sans le dual	281
6.4.4	Polynômes de Lagrange	281
6.4.5	Dual de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$	282
6.5	Déterminants	283
6.5.1	Formes multilinéaires alternées	283
6.5.2	Déterminant d'une famille de vecteurs	286
6.5.3	Déterminant d'un endomorphisme	287
6.5.4	Déterminant de Vandermonde	289
6.5.5	Déterminant de Gram	292
6.5.6	Déterminant de Cauchy	292
6.5.7	Matrice de Sylvester	292
6.5.8	Théorème de Kronecker	295
6.6	Directions conservées	296
6.6.1	Généralités	296
6.6.2	Matrice orthogonale	297
6.6.3	Comment trouver la matrice d'une symétrie donnée ?	298
6.6.3.1	Symétrie par rapport à un plan	298

6.6.3.2	Symétrie par rapport à une droite	299
6.6.3.3	En résumé	300
6.7	Normes et distances	300
6.7.1	Introduction : valeur absolue et norme	300
6.7.2	Norme	300
6.8	Produit scalaire	302
6.8.1	Projection et angles	304
6.8.2	Angle entre deux vecteurs	306
6.8.3	Procédé de Gram-Schmidt	306
6.9	Norme opérateur	307
6.9.1	Norme algébrique	309
6.9.2	Normes de matrices et d'applications linéaires	311
6.10	Produit vectoriel	312
6.11	Topologie	313
6.11.1	Boules et sphères	313
6.11.2	Ouverts, fermés, intérieur et adhérence	315
6.11.3	Point isolé, point d'accumulation	321
6.12	Équivalence des normes	322
6.12.1	En dimension finie	323
6.12.2	Contre-exemple en dimension infinie	324
6.13	Suites	325
6.13.1	Limites, convergence	325
6.13.2	Critère de Cauchy	325
6.14	Séries	326
6.15	Série réelle	329
6.15.1	Rappels et définitions	329
6.15.2	Critères de convergence absolue	329
6.15.3	Critères de convergence simple	331
6.15.3.1	Critère d'Abel	331
6.15.4	Quelques séries usuelles	332
6.15.5	Moyenne de Cesaro	333
6.15.6	Écriture décimale d'un nombre	333
6.16	Exponentielle de matrice	337
6.17	Sommes de familles infinies	338
6.17.1	Convergence commutative	338
6.18	Mini introduction aux nombres p-adiques	342
6.18.1	La flèche d'Achille	342
6.18.2	La tortue et Achille	342
6.18.3	Dans les nombres p-adiques, c'est vrai	343
6.19	Fonctions	344
6.20	Produit fini d'espaces vectoriels normés	344
6.20.1	Norme	344
6.20.2	Suites	347
6.21	Applications multilinéaires	348
6.22	Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires	349
6.23	Orthogonalité	350
6.24	Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé	350
6.24.1	Différentielle	350
6.24.2	(non ?) Différentiabilité des applications linéaires	351
6.24.3	Dérivation en chaine et formule de Leibnitz	352
6.24.4	Différentielle partielle	356
6.24.5	Formule des accroissements finis	357
6.24.6	L'inverse, sa différentielle	360

6.24.7	Projection orthogonale	362
6.25	Polynôme d'endomorphismes	363
6.25.1	Polynômes d'endomorphismes	364
6.25.2	Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice	366
6.25.3	Polynôme minimal et minimal ponctuel	366
6.25.4	Polynôme caractéristique	372
6.26	Valeur propre et vecteur propre	375
6.27	Espaces hermitiens	376
6.28	Diagonalisation	377
6.28.1	Matrices semblables	377
6.28.2	Endomorphismes diagonalisables	378
6.28.3	Diagonalisation : cas complexe	381
6.28.4	Diagonalisation : cas réel	383
6.28.5	Pseudo-réduction simultanée	385
6.29	Sous espaces caractéristiques	386
6.29.1	Théorèmes de décomposition	387
6.29.2	Diverses conséquences	389
6.29.3	Diagonalisabilité d'exponentielle	391
6.29.4	Valeurs singulières	392
6.30	Extension du corps de base	392
6.30.1	Extension des applications linéaires	393
6.30.2	Projections	394
6.30.3	Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique	397
6.31	Frobenius et Jordan	399
6.31.1	Matrice compagnon	399
6.31.2	Réduction de Frobenius	399
6.31.3	Forme normale de Jordan	402
6.32	Commutant et endomorphismes cycliques	403
6.32.1	Endomorphisme cyclique	403
6.32.2	Commutant : cas diagonalisable	404
6.32.3	Commutant : cas général	406
6.33	Endomorphismes nilpotents et trigonalisables	409
6.33.1	Endomorphismes nilpotents	409
6.33.2	Endomorphismes trigonalisables	411
6.33.3	Théorème de Burnside	413
6.33.4	Théorème de Lie-Kolchin	414
6.34	Formes bilinéaires et quadratiques	417
6.34.1	Généralités	417
6.34.2	Topologie	417
6.34.3	Matrice associée	417
6.34.4	Dégénérescence	419
6.34.5	Inégalité de Minkowski	420
6.34.6	Ellipsoïde	421
6.35	Théorème spectral auto-adjoint	422
6.36	Mini introduction au produit tensoriel	425
6.36.1	Définitions	425
6.36.2	Application d'opérateurs	425
6.37	Coordonnées cylindriques et sphériques	426
6.38	Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires	426

7	Tribus, théorie de la mesure	429
7.1	Tribus	429
7.1.1	Généralités	429
7.1.1.1	Tribu induite	430
7.1.1.2	Tribu borélienne	431
7.1.1.3	Les boréliens de $\mathbb{R}$	431
7.1.2	Tribu de Baire	431
7.2	Théorie de la mesure	433
7.2.1	Mesure et algèbre de parties	434
7.2.2	Mesure sur un espace mesurable	436
7.2.3	Mesure extérieure	442
7.2.4	Espace mesuré complet	444
7.2.5	Prolongement	452
7.3	Applications mesurables	454
7.3.1	Propriétés	454
7.3.2	D'une tribu à l'autre	454
7.3.3	Mesure image	457
7.3.4	Régularité d'une mesure	458
7.3.5	Théorème de récurrence	462
7.4	Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles	463
7.4.1	Quelques mots à propos de $\overline{\mathbb{R}}$	463
7.4.2	Limite supérieure et inférieure	463
7.4.3	Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable	464
7.4.4	Fonction étagée	470
7.4.5	Fonctions réelle à variables réelles	473
7.5	Intégrale par rapport à une mesure	473
7.5.1	Quelque propriétés	475
7.5.2	Permuter limite et intégrale	478
7.5.2.1	Convergence uniforme	478
7.5.2.2	Convergence monotone	479
7.5.2.3	Convergence dominée de Lebesgue	481
7.5.3	Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité)	483
7.6	Tribu produit, mesure produit	484
7.6.1	Produit d'espaces mesurables	484
7.6.2	Le cas des boréliens	485
7.6.3	Produit de mesures	486
7.7	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	491
7.7.1	Mesure et tribu de Lebesgue	495
7.7.2	Propriétés de la mesure de Lebesgue	496
7.7.3	Ensemble de Cantor	501
7.7.4	Ensemble de Vitali (non mesurable)	503
7.8	Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$	504
7.8.1	Ensembles négligeables	505
7.8.2	Parties et fonctions mesurables	506
7.8.3	Propriétés d'unicité	506
7.8.4	Régularité	508
8	Espaces affines	509
8.1	Repères affines	509
8.2	Classification affine des conique	510
8.3	Applications affines	512
8.4	Isomorphismes	513
8.5	Sous espaces affines	513
8.6	Barycentre	515

8.6.1	Enveloppe convexe	517
8.7	Repères, coordonnées cartésiennes et barycentriques	520
8.7.1	Équation de droite	522
8.8	Structure du groupe des applications affines	522
9	Géométrie hyperbolique	525
9.1	Inversion	525
9.1.1	Cercles perpendiculaires	525
9.1.2	Inversion	526
10	Espaces projectifs	531
10.1	Sous espaces projectifs	531
10.2	Espace projectifs comme «complétés» d'espaces affines	533
10.3	Théorème de Pappus	535
10.4	Homographies	536
10.4.1	Homographies	536
10.4.2	Le groupe projectif	537
10.5	Coordonnées homogènes	538
10.5.1	Dualité	538
10.5.2	Polynômes	540
10.5.3	Repères projectifs	541
10.5.4	Birapport	542
10.6	Sphère de Riemann	544
10.6.1	Action du groupe modulaire	544
11	Analyse réelle	551
11.1	Limite et continuité	551
11.1.1	Définition	551
11.1.2	Propriétés de base	552
11.1.3	Limites de fonctions	553
11.1.4	Règles simples de calcul	558
11.2	Limites à plusieurs variables	558
11.2.1	Règle de l'étau	560
11.2.2	Méthode des chemins	561
11.2.3	Méthode des coordonnées polaires	562
11.2.4	Méthode du développement asymptotique	566
11.2.5	Continuité	566
11.2.6	La fonction la moins continue du monde	568
11.2.7	Approche topologique	569
11.2.8	Continuité de la racine carrée, invitation à la topologie induite	571
11.2.9	Limites en des nombres	573
11.2.10	Limites quand tout va bien	573
11.2.11	Discussion avec mon ordinateur	578
11.2.12	Limites et prolongement	578
11.3	Dérivée : exemples introductifs	579
11.3.1	La vitesse	579
11.3.2	La tangente à une courbe	580
11.3.3	L'aire en dessous d'une courbe	581
11.4	Définition de la dérivée	581
11.5	Continuité et dérivabilité	582
11.6	Dérivation de fonctions d'une variable réelle	583
11.6.1	Exemples	583
11.6.1.1	La fonction $f(x) = x$	583
11.6.1.2	La fonction $f(x) = x^2$	583

11.6.1.3 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$	583
11.6.2 Calcul de la dérivée	584
11.6.3 Interprétation géométrique : tangente	584
11.6.4 Interprétation géométrique : approximation affine	585
11.7 Opérations sur les dérivées	586
11.7.1 Développement limité au premier ordre	587
11.8 Espace des fonctions continues	587
11.9 Uniforme continuité	592
11.10 Compacité	594
11.11 Dérivation et croissance	595
11.12 Dérivée directionnelle	599
11.12.1 Dérivée partielle et directionnelles	600
11.12.1.1 Quelques propriétés et notations	601
11.13 Dérivée suivant un vecteur	601
11.13.1 Gradient : direction de plus grande pente	604
11.14 Différentielle	605
11.14.1 Exemples introductifs	605
11.14.2 Définition de la différentielle	606
11.14.3 Unicité de la différentielle	609
11.14.4 Cas particuliers	610
11.14.5 Calcul de valeurs approchées	610
11.14.6 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable	613
11.14.6.1 Continuité	613
11.14.6.2 Linéarité	613
11.14.6.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle	615
11.14.6.4 Un candidat dans la définition (marche toujours)	615
11.14.7 Règles de calcul	616
11.14.8 Linéarité	617
11.14.9 Produit	617
11.14.10 Différentielle de fonction composée	619
11.14.11 Différentielle et dérivées partielles	622
11.14.12 Plan tangent	623
11.14.13 Calcul de différentielles	623
11.14.14 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent	624
11.14.15 Gradient et recherche du plan tangent	624
11.15 Jacobienne	626
11.15.1 Rappels et définitions	626
11.16 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$	626
11.17 Graphes de fonctions de plusieurs variables	627
11.18 Graphes de fonctions à plusieurs variables	630
11.19 Courbes de niveau	631
11.20 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	635
11.21 Dérivée directionnelle de fonctions composées	636
11.22 Théorèmes des accroissements finis	638
11.23 Fonctions Lipschitziennes	639
11.24 Différentielles d'ordre supérieur	641
11.24.1 Identification des espaces d'applications multilinéaires	641
11.24.2 Fonctions différentiables plusieurs fois	641
11.25 Développement asymptotique, théorème de Taylor	644
11.25.1 Fonctions «petit o»	644
11.25.2 Autres formulations	645
11.25.3 Formule et reste	646
11.25.4 Reste intégral	646

11.25.5 Exemple : un calcul heuristique de limite	647
11.26 Fonctions convexes	647
11.26.1 Inégalité des pentes	647
11.26.2 Convexité et régularité	649
11.26.3 Dérivées d'une fonction convexe	649
11.26.4 Graphe d'une fonction convexe	651
11.26.5 Quelques inégalités	655
11.26.5.1 Inégalité de Jensen	655
11.26.5.2 Inégalité arithmético-géométrique	655
11.26.5.3 Inégalité de Kantorovitch	656
11.27 Suites de fonctions	657
11.27.1 Convergence de suites de fonctions	657
11.27.2 Convergence uniforme	657
11.27.3 Permuter avec les dérivées partielles	659
11.28 Recherche d'extrema	659
11.29 Fonctions réelles de deux variables réelles	660
11.29.1 Limites de fonctions à deux variables	660
11.29.2 Dérivées partielles	662
11.29.3 Différentielle et accroissement	662
11.29.4 Recherche d'extrema locaux	663
11.30 Les fonctions à valeurs vectorielles	663
11.31 Fonctions vectorielles de plusieurs variables	664
11.32 Champs de vecteurs	664
11.32.1 Matrice jacobienne	664
11.33 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla	665
11.34 Interprétation de la divergence	667
11.35 Quelques formules de Leibnitz	668
11.36 La différentielle revisitée	669
11.36.1 Les formes différentielles de base	669
11.36.2 Différentielle comme élément de l'espace dual	669
11.36.3 Différentielles de fonctions composées	670
11.36.4 Exemple de composée : les coordonnées polaires	671
11.37 Quelques rappels	672
11.38 Continuité et dérivabilité	672
11.38.1 Quelques formules à connaître	675
11.39 Application réciproque	675
11.39.1 Définitions	675
11.39.2 Graphe de la fonction réciproque	676
11.39.3 Théorème de la bijection	677
11.40 Rappels de trigonométrie	679
11.41 Fonctions trigonométriques réciproques	681
11.41.1 La fonction arc sinus	681
11.41.2 La fonction arc cosinus	683
11.41.3 La fonction arc tangente	684
11.42 Trigonométrie hyperbolique	685
11.43 Développement limité autour de zéro	686
11.44 Règles de calcul	689
11.44.1 Linéarité des développements limités	689
11.44.2 Développement limité d'un quotient	691
11.44.3 Développement limité d'une fonction composée	691
11.45 Développement au voisinage de $x_0 \neq 0$	692
11.46 Application au calcul de limites	693
11.47 Développement au voisinage de l'infini	694

11.48	Étude d'asymptote	694
12	Retour sur les groupes	705
12.1	Action de groupe et connexité	705
12.2	Espaces de matrices	707
12.2.1	Dilatations et transvections	707
12.2.2	Connexité de certains groupes	713
12.2.3	Densité	715
12.2.4	Racine carré d'une matrice hermitienne positive	717
12.2.5	Racine carré d'une matrice symétrique positive	718
12.2.6	Décomposition polaires : cas réel	718
12.2.7	Enveloppe convexe	721
12.2.8	Décomposition de Bruhat	723
12.3	Sous-groupes du groupe linéaire	725
12.4	Isométries de l'espace euclidien	728
12.4.1	Structure du groupe $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$	729
12.4.2	Classification des isométries de $\mathbb{R}$	732
12.4.3	Classification des isométries de $\mathbb{R}^2$	733
12.4.4	Isométries dans $\mathbb{R}^n$	738
12.4.5	Groupes finis d'isomorphismes	741
12.4.6	Théorème de Sylvester	744
12.4.7	Groupe diédral	744
12.4.7.1	Définition et générateurs : vue géométrique	744
12.4.7.2	Générateurs : vue abstraite	746
12.4.7.3	Classes de conjugaison	749
12.4.7.4	Le compte pour n pair	750
12.4.7.5	Le compte pour n impair	750
12.4.8	Applications : du dénombrement	750
12.4.8.1	Le jeu de la roulette	750
12.4.8.2	L'affaire du collier	751
12.5	Théorèmes de Sylow	752
12.6	Un peu de classification de groupes	757
12.6.1	Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	757
12.6.2	Groupes abéliens finis	758
12.6.3	Groupes d'ordre pq	761
12.6.4	Groupe monogène	763
12.6.5	Fonction indicatrice d'Euler	764
12.7	Nombres premiers	764
12.8	Chiffrement RSA	766
12.8.1	Mise en place par Bob	766
12.8.2	Chiffrement	767
12.8.3	Déchiffrement	767
12.8.4	Une imprudence à ne pas commettre	767
12.8.5	Problèmes calculatoires	768
12.8.6	La solidité de RSA	768
12.8.7	Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme	768
12.9	Représentations et caractères	769
12.9.1	Crochet de dualité et transformée de Fourier	770
12.9.2	Groupes non abéliens	771
12.9.3	Représentations linéaires des groupes finis	772
12.9.4	Module	773
12.9.5	Structure hermitienne	775
12.9.6	Caractères	775
12.10	Équivalence de représentations et caractères	776

12.10.1 Représentation régulière	778
12.10.2 Caractères et représentations : suite et fin	779
12.11 Représentation produit tensoriel	782
12.12 Exemple sur le groupe symétrique	782
12.13 Table des caractères du groupe symétrique S_4	783
12.14 Table de caractères du groupe diédral	784
12.14.1 Représentations de dimension un	785
12.14.2 Représentations de dimension deux	785
12.14.3 Le compte pour n pair	787
12.14.4 Le compte pour n impair	787

13 Intégration 789

13.1 Théorème de la moyenne	789
13.2 Mesure à densité	789
13.2.1 Théorème de Radon-Nikodym	789
13.2.2 Mesure complexe	791
13.2.3 Théorème d'approximation	792
13.2.4 Mesure à densité	792
13.3 Constructions plus naïves de la mesure et de l'intégrale dans le cas réel	792
13.3.1 Mesure de Lebesgue, version rapide	792
13.3.2 Pavés et subdivisions	793
13.3.3 Intégrale d'une fonction en escalier	796
13.3.4 Intégrales partielles	796
13.3.5 Réduction d'une intégrale multiple	797
13.3.6 Propriétés de l'intégrale	798
13.3.7 Intégrales multiples, cas général	799
13.3.8 Réduction d'une intégrale multiple	799
13.3.9 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$	801
13.3.10 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$	804
13.3.11 Fonctions et ensembles non bornés	807
13.4 Propriétés	807
13.5 Primitives et intégrales	808
13.5.1 Primitives et intégrales	811
13.5.2 Intégrales impropres	812
13.6 Théorème de Fubini	815
13.6.1 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini	815
13.7 Interprétation géométrique du déterminant	820
13.7.1 Par rapport à la mesure de Lebesgue	820
13.7.2 En petite dimension	821
13.7.3 Produit vectoriel	822
13.7.4 Produit mixte	823
13.7.5 Déterminant en dimension deux	825
13.7.6 Déterminant en dimension trois	825
13.8 Changement de variables dans une intégrale multiple	826
13.8.1 Des lemmes	826
13.8.2 Le théorème et sa démonstration	827
13.8.3 Exemples	831
13.8.4 Récapitulatif des changements de variables	834
13.8.4.1 Coordonnées polaires	834
13.8.4.2 Coordonnées cylindriques	834
13.8.4.3 Coordonnées sphériques	834
13.8.5 Changement de variables	835
13.8.5.1 Coordonnées polaires	835
13.8.5.2 Coordonnées sphériques	836

13.8.6	Coordonnées polaires	836
13.8.7	Coordonnées cylindriques	837
13.8.8	Coordonnées sphériques	837
13.9	Forme différentielle	838
13.9.0.1	L'isomorphisme musical	839
13.10	Intégrale sur une variété	840
13.10.1	Mesure sur une carte	840
13.10.1.1	Exemple : la mesure de la sphère	841
13.10.2	Intégrale sur une carte	841
13.10.3	Exemples	842
13.10.4	Orientation	842
13.10.5	Formes différentielles	844
13.10.6	Intégrale d'une fonction sur une variété	845
13.11	Intégrales curvilignes	846
13.11.1	Chemins de classe C^1	846
13.11.2	Intégrer une fonction	846
13.11.3	Intégrer un champ de vecteurs	848
13.11.4	Intégrer une forme différentielle sur un chemin	848
13.11.5	Intégration d'une forme différentielle sur un chemin	849
13.11.6	Interprétation physique : travail	850
13.11.7	Intégrer un champs de vecteurs sur un bord en $2D$	851
13.11.8	Intégrer une forme différentielle sur un bord en $2D$	851
13.11.9	Intégrer une forme différentielle sur un bord en $3D$	851
13.11.10	Intégrer d'un champ de vecteurs sur un bord en $3D$	852
13.11.11	Dérivées croisées et forme différentielle exacte	852
13.12	Surfaces paramétrées	853
13.12.1	Graphe d'une fonction	854
13.13	Intégrales de surface	855
13.13.1	Intégrale d'une fonction	855
13.13.2	Intégrale d'un champ de vecteurs	856
13.14	Intégrales de surface	857
13.14.1	Aire d'une surface paramétrée	857
13.14.2	Intégrale d'une fonction sur une surface	858
13.14.3	Aire d'une surface de révolution	859
13.14.4	Intégrale d'une 2	861
13.15	Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface	861
13.16	Divergence, Green, Stokes	864
13.16.1	Théorème de la divergence	864
13.16.2	Formule de Green	865
13.16.3	Formule de Stokes	867
13.16.3.1	Quelle est la bonne orientation ?	867
13.17	Résumé des intégrales vues	868
13.17.1	L'intégrale d'une fonction sur les réels	868
13.17.2	Intégrale d'une fonction sur un chemin	868
13.17.3	Intégrale d'une fonction sur une surface	868
13.17.4	Intégrale d'une fonction sur un volume	869
13.17.5	Conclusion pour les fonctions	870
13.17.6	Circulation d'un champ de vecteurs	870
13.17.7	Flux d'un champ de vecteurs	870
13.17.8	Conclusion pour les champs de vecteurs	870
13.17.9	Attention pour les surfaces fermées !	871
13.18	Intégrales convergeant uniformément	872
13.18.1	Définition et propriété	872

13.18.2 Critères de convergence uniforme	873
13.19 Fonctions définies par une intégrale	874
13.19.1 Continuité sous l'intégrale	874
13.19.2 Le coup du compact	876
13.19.3 Dérivabilité sous l'intégrale	876
13.19.4 Absolue continuité	877
13.19.5 Différentiabilité sous l'intégrale	879
13.20 Formes différentielles exactes et fermées	882
13.21 Théorème d'Abel angulaire	884
13.21.1 Passage à la limite sous le signe intégral	888
13.21.2 Intégrale en dimension un	888
13.21.3 Intégrales convergentes	889
13.21.4 La méthode de Rothstein-Trager	889
13.22 Ellipsoïde de John-Loewer	894
13.23 Rappel sur les intégrales usuelles	897
13.24 Intégrales le long de chemins	898
13.24.1 Circulation d'un champ de vecteur	898
13.25 Circulation d'un champ conservatif	900
13.26 Intégration de fonction à deux variables	901
13.26.1 Intégration sur un domaine rectangulaire	901
13.26.2 Intégration sur un domaine non rectangulaire	902
13.26.3 Changement de variables	905
13.26.3.1 Le cas des coordonnées polaires	906
13.26.3.2 Les coordonnées cylindriques	907
13.26.3.3 Coordonnées sphériques	907
13.26.3.4 Un autre système utile	907
13.27 Les intégrales triples	908
13.27.1 Volume	910
13.28 Un petit peu plus formel	912
13.28.1 Intégration sur un domaine non rectangulaire	912
13.28.2 Changement de variables	912
13.28.2.1 Coordonnées polaires	913
13.28.2.2 Coordonnées sphériques	913
13.29 Primitives et surfaces	914
13.29.1 Longueur d'arc de courbe	914
13.29.2 Aire de révolution	915
13.30 L'aire en dessous d'une courbe	915
13.31 Propriétés des intégrales	916
13.32 Techniques d'intégration	917
13.32.1 Intégration par parties	918
13.32.2 Changement de variables – pour trouver des primitives	920
13.32.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales	921
13.32.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites	923
13.32.5 Quelques formules à connaître	924
13.33 Trucs et astuces de calcul d'intégrales	924
13.33.1 Quelques intégrales «usuelles»	924
13.33.2 Reformuler un carré au dénominateur	927
13.33.3 Décomposer en fractions simples	927

14 Arc paramétré	929
14.1 Définitions, quelques exemples remarquables	929
14.2 Courbes paramétrés	930
14.2.1 Définitions et exemples	930
14.3 Longueur d'arc	931
14.4 Abscisse curviligne	934
14.4.1 Formule intégrale de la longueur	935
14.5 Élément de longueur	939
14.5.1 Élément de longueur : cartésiennes	939
14.5.2 Élément de longueur : polaires (1)	939
14.5.3 Élément de longueur : polaires (2)	939
14.5.4 Approximation de la longueur par des cordes	941
14.6 Arc géométrique	943
14.6.1 Abscisse curviligne et paramétrisation normale	944
14.6.2 Tangente à une courbe paramétrée	949
14.7 Repère de Frenet	951
14.7.1 Torsion	953
14.8 Hors des coordonnées normales	954
14.9 Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$	957
14.10 Courbes planes	958
14.10.1 Angle	958
14.10.2 Courbure signée	959
14.10.3 Degré, indice et homotopie	962
14.11 Courbes fermées planes	968
14.11.1 Cercle circonscrit	968
14.11.2 Description locale	970
14.11.3 Enveloppe convexe	971
14.11.4 Courbure et convexité	974
14.11.5 Théorème des quatre sommets	975
14.11.6 Le théorème de Jordan	978
15 Analyse vectorielle	979
15.1 Le théorème de Green	979
15.2 Théorème de la divergence dans le plan	983
15.2.1 La convention de sens de parcours	983
15.2.2 Théorème de la divergence	983
15.3 Théorème de Stokes	985
15.4 Théorème de Gauss	986
15.5 Coordonnées curvilignes	988
15.5.1 Base locale	988
15.5.2 Importance de l'orthogonalité	988
15.5.3 Coordonnées polaires	990
15.5.4 Coordonnées cylindriques	990
15.5.5 Coordonnées sphériques	991
15.5.6 Gradient en coordonnées curvilignes	991
15.5.6.1 Coordonnées sphériques	992
15.5.7 Divergence en coordonnées curvilignes	992
15.5.7.1 Coordonnées cylindriques	994
15.5.7.2 Coordonnées sphériques	994
15.5.8 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales	994
15.5.9 Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales	995
15.5.9.1 Coordonnées cylindriques	996
15.5.9.2 Coordonnées sphériques	996
15.6 Les formules	996

15.6.1	Coordonnées polaires	996
15.6.2	Coordonnées cylindriques	996
15.6.3	Coordonnées sphériques	997
16	Suite de l'analyse	999
16.0.1	Dérivabilité au sens complexe et différentielle	999
16.1	Série de fonctions	1002
16.2	Séries entières	1007
16.2.1	Disque de convergence	1007
16.2.2	Propriétés de la somme	1009
16.2.3	Dérivation, intégration	1012
16.2.4	Exponentielle et logarithme	1017
16.2.5	Forme polaire ou trigonométrique des nombres complexes	1021
16.3	Vitesses de x^α , de l'exponentielle et du logarithme	1021
16.3.1	Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne	1022
16.4	Le cercle trigonométrique	1024
16.4.1	Les fonctions sinus et cosinus	1024
16.4.2	La fonction tangente	1025
16.4.3	Les coordonnées polaires	1026
16.4.3.1	Transformation inverse : théorie	1026
16.4.3.2	Transformation inverse : pratique	1027
16.4.4	Série génératrice d'une suite	1027
16.4.5	Développement en série et Taylor	1028
16.4.6	Resommer une série	1030
16.4.6.1	Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$	1030
16.4.6.2	Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$	1031
16.4.6.3	Sage, primitives et logarithme complexe	1033
16.4.6.4	Nombres de Bell	1035
16.4.7	Séries entières de matrices	1035
16.4.8	Exponentielle et logarithme de matrice	1038
16.5	Nombres de Bell	1041
16.6	Lemme de Borel	1043
16.6.1	Fonctions plateaux	1043
16.6.2	Le lemme de Borel	1044
16.7	Densité des polynômes	1046
16.7.1	Théorème de Stone-Weierstrass	1046
16.7.2	Primitive de fonction continue	1049
16.7.3	Théorème taubérien de Hardy-Littlewood	1050
16.7.4	Théorème de Müntz	1054
16.8	Complétude avec la norme uniforme	1057
16.9	Théorèmes de point fixe	1058
16.9.1	Points fixes attractifs et répulsifs	1058
16.9.2	Picard	1058
16.9.3	Brouwer	1061
16.9.4	Théorème de Schauder	1063
16.9.5	Théorème de Markov-Kakutani et mesure de Haar	1065
16.10	Théorèmes de point fixes et équations différentielles	1066
16.10.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz	1066
16.10.2	Théorème de Cauchy-Arzella	1068
16.11	Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite	1068
16.11.1	Mise en situation	1068
16.11.2	Théorème d'inversion locale	1069
16.11.3	Théorème de la fonction implicite	1074
16.11.4	Exemple	1076

16.11.5 Théorème de Von Neumann	1077
16.12 Recherche d'extrema	1080
16.12.1 Extrema à une variable	1080
16.12.2 Extrema libre	1080
16.12.3 Extrema liés	1081
16.12.4 Algorithme du gradient à pas optimal	1084
16.13 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse	1087
16.13.1 Lemme de Morse	1091
16.14 Variétés	1093
16.14.1 Introduction	1093
16.14.2 Définition et propriétés	1093
16.14.3 Espace tangent	1094
16.15 Prolongement de fonctions et complétion d'espaces métriques	1095
16.16 Un petit extra	1101
17 Espaces de Hilbert	1103
17.1 Espaces de Hilbert	1103
17.2 Théorème de la projection	1104
17.3 Systèmes orthogonaux et bases	1107
17.3.1 Orthogonalité	1107
17.3.2 Dual	1109
17.3.3 Séparabilité	1110
17.3.4 Bases d'espaces de Hilbert	1114
17.3.5 Digression sur les normes opérateurs	1117
17.3.6 Applications linéaires et continuité	1118
17.4 Théorème de Kochen-Specker	1119
17.5 Théorème de Lax-Milgram	1120
18 Analyse fonctionnelle	1123
18.1 Théorème d'Ascoli	1123
18.2 Théorème de Banach-Steinhaus	1124
18.3 Espaces L^p	1126
18.3.1 Généralités	1126
18.3.2 L'espace L^∞	1128
18.3.3 Inégalité de Jensen, Hölder et de Minkowski	1129
18.3.4 Ni inclusions ni inégalités	1131
18.3.5 Complétude	1132
18.3.6 L'espace L^2	1136
18.3.7 Coefficients et série de Fourier	1138
18.4 Convolution	1139
18.4.1 Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact	1140
18.4.2 Dualité et théorème de représentation de Riesz	1142
18.4.3 Approximation de l'unité	1151
18.4.4 Densité des polynôme trigonométrique	1153
18.5 Théorèmes de Hahn-Banach	1154
18.6 Théorème de Tietze	1156
18.7 Espace de Schwartz	1159
18.7.1 Topologie	1161
18.7.2 Produit de convolution	1163

19 Analyse complexe	1165
19.1 Fonctions holomorphes	1165
19.1.1 Équations de Cauchy-Riemann	1165
19.1.2 Intégrales sur des chemins fermés	1166
19.1.3 Lacets, indice et homotopie	1169
19.1.4 Théorème de Cauchy et analyticité	1170
19.1.5 Théorème de Brouwer en dimension 2	1172
19.1.6 Principe des zéros isolés	1173
19.1.7 Prolongement de fonctions holomorphes	1174
19.1.8 Théorème de Runge	1174
19.2 Intégrales de fonctions holomorphes	1177
19.3 Conditions équivalentes à l'holomorphie	1181
19.4 Singularités, p�les et méromorphe	1182
19.5 Fonctions d'Euler	1183
19.5.1 Euler et factorielle	1186
19.6 Partition d'un entier en parts fixées	1186
19.7 Exponentielle complexe	1189
19.7.1 Intégrale de Fresnel	1191
19.8 Théorème de Weierstrass	1193
19.9 Théorème de Montel	1195
19.10Espaces de Bergman	1196
20 Série de Fourier	1201
20.1 Densité des polynômes trigonométriques	1201
20.1.1 Convergence pour les fonctions continues (Weierstrass)	1201
20.1.2 Convergence pour les fonctions continues (Fejér)	1202
20.1.3 Densité dans L^p	1205
20.2 Fonctions de Dirichlet	1205
20.3 Coefficients et série de Fourier	1206
20.3.1 Le contre-exemple que nous attendions tous	1208
20.3.2 Inégalité isopérimétrique	1210
20.3.3 Suite équirépartie, critère de Weyl	1212
20.3.4 � propos des coefficients	1214
21 Transformation de Fourier	1217
21.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	1217
21.1.1 Formule sommatoire de Poisson	1220
21.2 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz	1222
21.2.1 Quelques transformées de Fourier	1225
21.3 Suite régularisante	1227
21.3.1 Formule d'inversion	1229
21.4 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$	1231
21.4.1 Extension de $L^1 \cap L^2$ vers L^2	1231
22 Distributions	1235
22.0.0.1 Dérivée partielle au sens faible	1235
22.1 Topologie	1235
22.2 Distributions	1238
22.2.1 Multiplication d'une distribution par une fonction	1240
22.2.2 Dérivée de distribution	1240
22.2.3 Ordre et support d'une distribution	1241
22.3 Distributions tempérées	1244
22.3.1 Topologie	1245
22.3.2 Distributions associées à des fonctions	1245

22.3.3	Composition avec une fonction	1245
22.3.4	Transformée de Fourier d'une distribution tempérée	1246
22.3.5	Convolution d'une distribution par une fonction	1246
22.3.6	Approximation de la distribution de Dirac	1247
22.3.7	Peigne de Dirac	1250
22.4	L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$	1251
22.4.1	Dérivation	1253
22.5	L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$	1253
22.5.1	Propriétés générales	1253
22.5.2	Dérivation	1256
22.6	Une équation de distribution	1258
23	Espaces de Soblev, équations elliptiques	1261
23.1	Espaces de Soblev	1261
23.1.1	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$	1261
23.1.2	Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	1267
23.1.2.1	Définition	1268
23.1.3	Espace de Soblev fractionnaire	1269
23.2	Trace	1271
23.3	Théorème de plongement	1274
24	Équations différentielles	1279
24.1	Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$?	1280
24.2	Équations linéaires du premier ordre	1281
24.2.1	Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ?	1282
24.3	Équations à variables séparées	1283
24.3.1	La méthode rapide	1283
24.3.2	La méthode plus propre	1284
24.3.3	Les théorèmes	1284
24.4	Équations linéaires d'ordre supérieur	1286
24.4.1	Équations et systèmes linéaire à coefficients constants	1286
24.4.2	Si les coefficients ne sont pas constants ?	1286
24.5	Système d'équations linéaires	1287
24.5.1	La magie de l'exponentielle...	1287
24.5.2	... mais la difficulté	1287
24.5.3	La recette	1287
24.5.4	Système d'équations linéaires avec matrice constante	1288
24.5.5	Système d'équations linéaires avec matrice non constante	1289
24.6	Réduction de l'ordre	1289
24.7	Propriété des solutions	1290
24.7.1	Fuite des compacts et explosion en temps fini	1290
24.7.2	Stabilité de Lyapunov	1291
24.7.3	Système proie et prédateurs : Lokta-Voltera	1295
24.8	Équation du second ordre	1298
24.8.1	Wronskien	1298
24.8.2	Avec second membre	1299
24.8.3	Équation $y'' + q(t)y = 0$	1299
24.8.4	Équation de Hill	1301
24.9	Différents types d'équations différentielles	1304
24.9.1	Équation homogène	1304
24.9.2	Équation de Bernoulli	1305
24.9.3	Équation de Riccati	1305
24.9.4	Équation différentielle exacte	1305
24.9.4.1	Résolution lorsque tout va bien	1305

24.9.4.2	Facteur intégrant (quand tout ne va pas bien)	1306
24.10	Distributions pour les équations différentielles	1306
24.10.1	Équation de Schrödinger	1306
24.11	Équations différentielles du premier ordre	1310
24.12	Équations différentielles du premier ordre à variables séparables	1313
24.13	Équations différentielles linéaires du premier ordre	1315
24.13.1	Méthode de variation de la constante	1317
24.14	Équations différentielles linéaires du second ordre	1318
24.14.1	Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants	1318
24.14.2	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes	1320
25	Calcul numérique	1323
25.1	Représentations numériques	1323
25.1.1	Entier relatif en complément à deux (binaire)	1323
25.1.2	Représentation en virgule flottante	1324
25.1.3	Simple précision, IEEE-754	1325
25.2	Problèmes pour écrire des nombres	1327
25.2.1	Troncature : la base	1328
25.2.2	Troncature : le drift	1328
25.2.3	Quelque bonnes règles	1329
25.3	Erreur de “cancellation”	1329
25.3.1	Erreur d’absorption	1331
25.3.2	Calcul d’une dérivée	1332
25.4	Conditionnement et stabilité	1332
25.4.1	Comment choisir et penser le K ?	1335
25.5	Conditionnement d’une matrice	1336
25.5.1	Perturbation du vecteur	1338
25.5.2	Perturbation de la matrice	1339
25.6	Un peu de points fixes	1340
25.6.1	Choix de la fonction à point fixe	1340
25.6.2	Convergence quadratique	1342
25.6.3	Convergence	1344
25.7	Méthode de Newton	1345
25.7.1	«Justification» par la formule par Taylor	1345
25.7.2	«Justification» par points fixes	1346
25.7.3	Convergence de la méthode de Newton	1346
25.7.4	Formalisation de l’algorithme	1348
25.7.5	Caractéristiques	1349
25.7.6	Exemple de la racine carré	1349
25.7.7	Si multiplicité	1350
25.7.8	Et la dérivée ?	1350
25.7.9	Méthode de Newton : le cas général	1351
25.8	Estimation de l’ordre de convergence	1353
25.9	Autres méthodes	1353
25.9.1	Méthode de Schröder	1353
25.9.2	Halley	1353
25.10	Méthode des sécantes variables	1354
25.10.1	Aitken	1354
25.11	Équations algébrique	1355
25.11.1	Résoudre un système linéaire	1355
25.11.2	Caractéristiques	1356
25.11.3	Définitions	1356

25.12	Équations non linéaire	1357
25.12.1	Méthode de bisection	1358
25.13	Efficacité	1360
25.14	Exercices	1361
25.15	Approximations de fonctions	1364
25.15.1	Critère d'interpolation	1364
25.15.2	Base de Newton	1365
25.15.3	Méthode des minima quadratiques	1367
25.15.4	Notre espace de Hilbert	1368
25.15.5	Droite de régression	1369
25.16	Système linéaires (généralités)	1370
25.16.1	Les méthodes directes	1371
25.16.2	Méthodes itératives	1371
25.17	Système linéaires (méthodes directes)	1372
25.17.1	Inversion de matrice triangulaire	1372
25.17.2	Transformation gaussienne	1372
25.17.3	Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU)	1373
25.17.4	Matrice de permutation élémentaires	1377
25.17.5	Méthode de Gauss avec pivot partiel	1378
25.17.6	Déterminant	1386
25.17.7	Plusieurs termes indépendants	1386
25.17.8	Cholesky	1387
25.18	Système linéaire (méthodes itératives)	1390
25.18.1	La méthode générale	1391
25.18.2	Jacobi	1391
25.18.3	Gauss-Seidel	1391
25.18.4	Autres	1391
26	Variables aléatoires et théorie des probabilités	1393
26.1	Espace de probabilité	1393
26.2	Variables aléatoires	1394
26.2.1	Indépendance	1394
26.2.2	Lois conjointes et indépendance	1397
26.2.3	Somme et produit de variables aléatoires indépendantes	1398
26.2.4	Espérance	1400
26.2.5	Variance	1401
26.2.6	Covariance	1402
26.2.7	Probabilité conditionnelle, première	1403
26.2.8	Espérance conditionnelle	1404
26.2.9	Probabilité conditionnelle, seconde	1410
26.2.10	Un petit paradoxe	1411
26.2.10.1	Le cas facile	1411
26.2.10.2	Premier raisonnement	1412
26.2.10.3	Simulation	1412
26.2.10.4	La vraie réponse	1413
26.2.10.5	Le même, tourné à peine différemment	1414
26.2.11	Résumé des choses conditionnelles	1414
26.2.12	Inégalité de Jensen	1415
26.2.13	Fonction de répartition	1415
26.2.14	Fonction caractéristique	1415
26.2.15	Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace	1417
26.2.16	Loi d'une variable aléatoire	1418
26.2.17	Changement de variables	1419
26.3	Convergence	1419

26.4	Loi des grands nombres, théorème central limite	1424
26.4.1	Loi des grands nombres	1424
26.4.2	Théorème central limite	1426
26.4.3	Marche aléatoire	1429
26.5	Les lois usuelles	1430
26.5.1	Loi de Bernoulli	1430
26.5.2	Loi binomiale	1430
26.5.3	Loi multinomiale	1431
26.5.4	Loi géométrique	1432
26.5.5	Loi de Poisson	1432
26.5.6	Loi exponentielle	1433
26.5.7	Approximation de la binomiale par une Poisson	1436
26.5.8	Loi de Poisson et loi exponentielle	1436
26.5.9	Loi normale	1438
26.5.10	Vecteurs gaussiens	1439
26.5.11	Variable aléatoire de Rademacher	1443
26.5.12	Loi de Student	1445
26.5.13	Indépendance, covariance et variance de somme	1445
26.6	Estimation des grands écarts	1446
26.7	Simulations de réalisations de variables aléatoires	1450
26.7.1	Générateur uniforme	1450
26.7.1.1	Première méthode	1450
26.7.1.2	Seconde méthode	1450
26.7.2	Simulation par inversion	1450
26.7.2.1	Loi exponentielle	1451
26.7.3	Algorithme de Box-Muller	1451
26.7.4	Méthode du rejet	1452
26.7.5	Simuler une loi géométrique à l'ordinateur	1454
26.7.6	Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur	1454
26.7.7	Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur	1454
26.8	Sage	1455
26.8.1	Loi exponentielle	1455
26.8.2	Inverser des lois	1455
26.9	Monte-Carlo	1456
26.9.1	Intervalle de confiance	1457
26.9.1.1	Principe	1457
26.9.1.2	Échantillonnage préférentiel	1458
26.9.1.3	Méthode de la variable de contrôle	1458
26.9.1.4	Variables antithétiques	1458
26.10	Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires	1459
26.10.1	Nombres normaux	1459
26.10.2	Théorème de Bernstein	1461

27 Statistiques 1465

27.1	Notations et hypothèses	1465
27.2	Modèle statistique	1465
27.3	Modèles d'échantillonnages	1468
27.4	Estimation ponctuelle	1471
27.5	Statistiques et estimateurs	1473
27.5.1	Qualité des estimateurs	1473
27.5.2	Méthode des moments	1474
27.5.3	Méthode de substitution	1476
27.5.4	Méthode du maximum de vraisemblance	1476
27.5.5	Estimation d'une fonction de répartition	1478

27.5.6	Espérance et variance d'un estimateur	1481
27.6	Estimation par intervalle de confiance	1481
27.6.1	Région de confiance	1484
27.6.2	Fonction pivotale	1484
27.6.3	Sondage de proportion	1487
27.7	Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien	1488
27.7.1	Distance entre des mesures	1489
27.7.2	Estimateur par fenêtres glissantes	1489
27.8	Test d'hypothèses, prise de décision	1492
27.8.1	Exemple : qualité des pièces d'usine	1492
27.8.2	Exemple : la résistance d'un fil	1492
27.8.3	Vocabulaire et théorie	1493
27.8.4	Risque de première et seconde espèce	1494
27.8.5	Modèle paramétrique de loi gaussienne	1495
27.9	Tests paramétriques	1496
27.10	Tests d'adéquation	1497
28	Chaînes de Markov à temps discret	1503
28.1	Généralités	1503
28.2	Chaînes de Markov sur un ensemble fini	1504
28.3	Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$	1506
28.3.1	Chaînes de Markov homogènes	1508
28.3.2	Graphe de transition	1509
28.3.3	Chaîne de Markov définie par récurrence	1509
28.3.3.1	Le cas général	1509
28.3.3.2	Exemple : la file de réparation de machines à laver	1511
28.4	Classification des états	1511
28.4.1	Chaînes irréductibles	1514
28.4.2	Nombre de visites	1515
28.5	Mesure invariante	1520
28.6	Convergence vers l'équilibre	1522
28.7	Processus de Galton-Watson	1524
29	Martingales	1529
29.1	Convergence de martingales	1529
29.2	Temps d'arrêt et martingale terminée	1532
29.3	Décomposition de martingales	1534
29.4	Problème de la ruine du joueur	1536
29.4.1	Le cas où la pièce est truquée	1537
29.4.1.1	Introduction d'une martingale	1537
29.4.1.2	Finitude du temps d'arrêt	1538
29.4.1.3	Temps moyen de jeu	1538
29.4.1.4	Probabilité de victoire du joueur	1539
29.4.2	Le cas où la pièce est non truquée	1540
29.4.2.1	Probabilité de gagner	1540
29.4.2.2	Temps moyen de jeu	1542
29.4.3	Un petit complément	1542
30	Processus de Poisson	1543
30.1	Processus de Poisson	1543
30.2	Quelques trucs sur la simulation	1546
30.2.1	Le théorème central limite pour Markov	1547
30.2.2	Feuille 5	1547
30.2.3	Feuille 6	1547

30.2.4	Feuille 7	1548
30.2.5	Simuler des lois conditionnelles	1548
31	Utilisation dans les autres sciences	1549
31.1	Démystification du MRUA	1549
31.1.1	Preuve de la formule	1549
31.1.2	Interprétation graphique	1550
31.2	Relativité en mécanique newtonienne	1550
31.2.1	Relativité du mouvement	1550
31.2.2	Bob et Alice	1550
31.3	Invariance de la vitesse de la lumière	1551
31.3.1	Champ de gravitation et électrique	1551
31.3.1.1	Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique	1551
31.3.1.2	Pourquoi pas la gravitation ?	1551
31.3.2	Support du champ : pas d'éther	1552
31.3.3	Le problème	1552
31.4	Conséquences	1552
31.4.1	Ligne d'univers	1552
31.4.2	Transformations de Lorentz	1553
31.4.3	Conditions d'existence	1556
31.4.4	La notion d'intervalle	1557
31.4.4.1	En mécanique newtonienne	1557
31.4.4.2	En mécanique relativiste	1557
31.4.5	Le cône de lumière d'un point	1557
31.4.6	Contraction des longueurs	1558
31.4.7	Dilatation des intervalles de temps	1558
31.4.8	Invariance de l'intervalle	1559
31.4.8.1	Rappel de trigonométrie hyperbolique	1560
31.4.8.2	Les transformations de Lorentz (bis)	1562
31.4.9	Vitesse limite	1564
31.5	Applications	1564
31.5.1	Le GPS	1564
31.5.2	Les ondes électromagnétiques	1564
31.6	Mécanique relativiste	1564
31.6.1	Des problèmes, toujours des problèmes	1565
31.6.2	Loi d'addition des vitesses	1565
31.6.3	L'action d'une force	1566
31.6.4	Équivalence entre la masse et l'énergie	1567
31.7	Principe de correspondance	1567
32	Exemples avec Sage	1569
A	GNU Free Documentation License	1589
	Bibliographie	1597
	Liste des notations	1615

Index

- λ -système, 439
- p -Sylow, 752
- p -groupe, 752
- Éther, 1552
- Événement, 1557
- élément
 - primitif, 161
- élémentaire
 - polynôme symétrique, 175
- éléments
 - associés dans un anneau, 130
- équation
 - de Riccati, 1305
 - des classes, 105
 - des orbites, 104
 - différentielle
 - étude qualitative, 1302
 - Hill, 1301
 - homogène, 1304
 - système, 1302
 - diophantienne, 95, 135, 137
 - Fredholm, 1061
 - orbite-stabilisateur, 104
- équation différentielle
 - linéaire du premier ordre, 1315
 - linéaire du premier ordre, homogène, 1315
 - linéaire du second ordre, 1318
 - linéaire du second ordre, homogène, 1318
 - premier ordre, 1310
 - second ordre, 1311
 - variables séparables, 1313
- équation homogène associée, 1315
- équilibre
 - point point une équation différentielle, 1291
- équivalence
 - de norme, 323
- étagée
 - fonction, 470
- état
 - apériodique, 1523
 - récurrent, 1512
 - récurrent positif, 1512
 - transitoire, 1512
- étranger
 - dans leur ensemble, 143
- abélianisé, 87
- Abel
 - angulaire, 885
 - convergence radiale, 1011
- abscisse
 - curviligne, 944
- absolument continue, 877
- absorbant, 1511
- accélération d'un chemin, 930
- accroissement, 662
- accumulation
 - dans $\mathbb{R}$, 261
 - dans espace vectoriel normé, 321
- action
 - adjointe, 103
 - de groupe
 - Wedderburn, 185
 - domaine fondamental, 105
 - fidèle, 103
 - libre, 106
 - transitive, 106
- action de groupe, 290
 - sur des matrices, 1091
- adhérence, 259, 318
- affine
 - application, 512
 - espace, 509
 - sous-espace, 513
- affine (application), 275
- aire, 803
- algébrique
 - extension, 160
 - nombre, 166
 - par rapport à une extension de corps, 172
- algébriquement
 - indépendant, 217
- algèbre, 149
 - de parties, 434
 - engendrée, 149
 - polynômes, 141
- algorithme, 1356
 - consistant, 1356

- convergent, 1356
- facteurs invariants, 139
- fortement consistant, 1356
- stable, 1356
- alterné
 - groupe, 109
 - polynôme, 175
- alternée
 - forme linéaire, 283
- analytique
 - au sens complexe, 1170
- angle
 - d'une courbe, 961
 - entre deux droites, 734
 - entre vecteurs, 306
- Anneau
 - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
 - polynôme cyclotomique, 181
- anneau, 71
 - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 184, 188, 761, 766
 - à division, 149
 - de séries formelles, 1041
 - euclidien
 - facteurs invariants, 139
 - factoriel, 130
 - intègre, 127
 - noetherien, 133
 - principal, 132, 154, 370
 - utilisation, 156
 - quotient par un idéal, 123
- anneaux
 - de séries formelles
 - utilisation, 1186
- apériodique
 - état d'une chaîne de Markov, 1523
 - chaîne de Markov, 1523
- application
 - affine, 522
 - définie positive, 302
 - de classe C^k , 642
 - différentiable, 606, 608, 639, 642, 1070, 1091
 - extrema lié, 1082
 - en escalier, 795
 - linéaire
 - bornée, 351
 - théorème de Banach-Steinhaus, 1124
 - mesurable, 438
 - multilinéaire, 348
 - ouverte, 346
 - semi-définie positive, 302
 - tangente, 612
- application réciproque, 262
- approximation
 - de fonctions
 - par des polynômes, 1461
 - de l'unité, 1151
 - par polynômes, 1052
 - polynômiale, 1174
- arc
 - géométriques, 943
 - paramétré, 929
- arc cosinus, 683
- arc sinus, 681
- arc tangente, 684
- archimédien, 72
- associé, 130
- associée
 - subdivision, 795
- asymptotiquement pivotale, 1484
- attractif
 - point fixe, 1058
- automorphisme, 272
- axiome
 - du choix, 69
- Bézout
 - anneau principal, 132
 - calcul effectif, 93
 - nombres entiers, 90
 - polynômes, 144
- Baire
 - espace, 266
 - théorème, 258, 267
 - tribu, 432
- Banach
 - espace, 1103
- barycentre
 - cas affine, 515
 - cas vectoriel, 741
 - enveloppe convexe, 519
- base, 269
 - canonique de $\mathbb{R}^m$, 269
 - d'un module, 126
 - de Newton, 1365
 - de topologie, 221
 - dénombrable, 227
 - espace métrique, 227
 - duale, 669, 838
 - espace préhilbertien, 1114
 - hilbertienne
 - utilisation, 1211
 - locale, 988
- Bergman (espace), 1196
- Bernoulli, 1430
 - somme, 1447
- Berry-Esséen (borne), 1429
- Bessel

- inégalité, 1111
- biais
 - d'estimateur, 1474
- bien
 - conditionné, 1333
 - enchaîné, 256
- bijection, 262
- bilinéaire, 348
- binormale, 952
- birégulier
 - point sur une courbe, 941
- birapport, 542
- Bolzano-Weierstrass
 - espaces métriques, 251
- borélienne
 - fonction, 454
 - tribu, 431
- boréliens, 431
- bord, 260
- borné, 221
 - partie de V , 314
 - temps d'arrêt, 1532
- bornée, 241
 - différentielle, 635
 - partie de $\mathbb{R}^m$, 592
 - suite, 235
- boule
 - avec semi-normes, 263
 - fermée, 259, 313
 - ouverte, 221, 259, 313
- Bruhat (décomposition), 723
- Burnside
 - formule, 105
- Cône de lumière, 1557
- canonique
 - base, 269
 - décomposition, 71
 - espace affine, 509
- Cantor
 - ensemble, 501
- caractéristique
 - d'un anneau, 124
 - polynôme, 372
 - sous-groupe, 85
- caractère, 775
 - abélien, 769
 - de S_4 , 783
 - groupe diédral, 784
 - irréductible, 776
- cardioïde, 941
- carré
 - dans un corps fini, 189
- catégorie
 - ensemble de première, 258
- Cauchy
 - critère
 - uniforme, 658
 - déterminant, 292
 - formule, 1170
 - produit, 1009
 - théorème, 752
- Cauchy-Riemann, 1165
- Cauchy-Schwarz, 302, 1104
- Cayley
 - théorème, 752
- cellule d'un pavage, 794
- centrale (application), 776
- centralisateur, 85, 117
- centre
 - d'un anneau, 117
 - d'un groupe, 85
- cercle
 - circonsrit à une courbe, 64, 968
- cercles
 - perpendiculaires, 525
- Cesaro
 - moyenn, 333
- chaîne, 256
 - de Markov, 1503
 - apériodique, 1523
 - convergence, 1524
 - finie, 1504
 - homogène, 1503
 - irréductible, 1509
 - récurrente positive, 1518
 - régulière, 1505
- champ
 - conservatif, 900
 - de vecteurs, 848
- champ dérivant d'un potentiel, 900
- changement de variable, 943
- Chasles, 509
- Chemin
 - classe C^2 , 846
- chemin, 846, 930
 - dans $\mathbb{R}^p$, 929
- circulation, 898
- clôture algébrique, 166
- classe
 - conjugaison
 - dans S_4 , 108
- classe C^1 , 351, 627
- codimension, 272
- coefficient
 - de Fourier, 1201
- coefficients

- de Fourier, 1138
- coefficients binomiaux, 118
- coercion, 1120
- coercive, 1084
- colinéarité, 531
- combinaison
 - convexe, 515
- combinatoire, 750
- commutant, 403
- commutateur
 - dans un groupe, 87
- compacité, 251, 253, 257, 1178, 1193
 - sous-groupes du groupe linéaire, 725
 - théorème de Dini, 658
 - utilisation, 895
 - théorème de Montel, 1195
- compact, 220, 316, 594
 - arc paramétré, 929
 - Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$, 245
 - boule unité, 244
 - et fonction continue, 245, 252
 - fermé et borné, 244
 - implique fermé, 230
 - intervalle $[a, b]$, 243
 - le coup du, 876
 - localement, 220
 - opérateur, 1123
 - produit dénombrable, 258
 - produit fini, 257
 - quasi, 220
 - relatif, 1123
 - relativement, 220
 - séquentiellement, 221
 - suite exhaustive, 255
- complément
 - à deux, 1323
- complémentaire, 70
- complété
 - d'un espace métrique, 1099
- complétion
 - projective, 533
- complétude, 1097, 1099, 1132
 - de $\mathbb{R}$, 326
 - espaces L^p , 1134
- complète
 - famille de projecteurs, 126
- complet
 - $\mathbb{R}$, 226
 - corps, 72
 - espace mesuré, 444
 - espace topologique, 223
- composante, 663
- composition
 - suite de, 99
- concave, 647
 - log-concave, 654
- condition initiale, 1312
- conditionnement
 - absolu, 1333
 - d'une matrice inversible, 1336
 - relatif asymptotique, 1356
- conjugués
 - éléments d'une extension, 160
- connexe
 - par arc, 247
- connexité, 257
 - définition, 233
 - et intervalles, 242
 - fonction holomorphe, 1173
 - indice d'une courbe, 1169
 - le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$, 714
 - par arc
 - fonction différentiable, 639
 - points d'accumulation, 253
 - prolongement analytique, 1101
 - signature d'une forme quadratique, 1088
 - théorème de Runge, 1174
 - théorème des valeurs intermédiaires, 570
 - utilisation
 - Brouwer, 1172
- Conservative, 850
- consistance
 - estimateur, 1473
- constructible
 - angle, 212
 - point, 208
 - réel, 208
- construction
 - des réels, 78
- contenu, 129
- continue, 567
 - fonction
 - en un point, 229, 672
 - sur un intervalle, 673
 - fonction entre espaces métriques, 247
 - fonction entre espaces topologiques, 229
 - fonction réelle, 567
 - forme différentielle, 838
 - sur espace métrique, 572
 - uniformément, 592
- continuité, 553
 - fonction définie par une intégrale, 874
 - séquentielle, 248
 - sur un intervalle, 567
- contraction, 1058
- convergence

- absolue, 327
- commutative, 338
- dans un espace vectoriel normé, 325
- de martingales, 1533
- de suite, 220
- en loi, 1420
- en norme, 657
- en probabilité, 1420
- normale, 327
- ordre, 1353
- presque sûrement, 1419
- quadratique, 1342
- rapidité, 765, 1220, 1221, 1351, 1447
- série, 326
- suite
 - dans un corps, 72
 - suite dans $\mathbb{R}^m$, 261
 - suite numérique, 234, 1052, 1212
 - Abel angulaire, 885
 - uniforme, 657
 - intégrale, 872
 - série de fonctions, 327
 - suite de fonctions, 657
 - théorème de Dini, 658
- convergent
 - estimateur, 1473
- convexité
 - barycentre, 517
 - enveloppe de $O(n)$, 722
 - fonction, 647
 - inégalité de Jensen, 655
 - locale, 1156
 - méthode de Newton, 1348
 - stricte, 647
 - utilisation, 895
- convolution, 1399, 1526
- coordonnées
 - barycentriques, 521
 - cartésiennes
 - dans un espace affine, 521
 - curvilignes, 988
 - cylindrique, 426
 - dans un espace affine, 510
 - homogène, 538
 - sphériques, 426
- corps, 71
 - archimédien, 72
 - complet, 72
 - de décomposition, 166
 - de rupture, 164
 - polynôme cyclotomique, 181
 - des fractions, 151
 - des fractions rationnelles
 - utilisation, 1186
 - extension, 169, 176
 - fini, 188, 192, 195
 - Wedderburn, 185
 - ordonné, 72
 - premier, 151
- cosinus
 - angle entre deux vecteurs, 306
 - hyperbolique, 685
- courbe, 930
 - étude métrique, 1211
 - de Jordan, 978, 1210
 - efficacité, 1494
 - fermée, 958
 - simple, 958
- courbe de niveau, 628, 631
- courbure, 952
 - signée, 959
 - totale, 960
- covariance, 1402
- critère
 - Abel, 1007
 - Abel pour intégrales, 873
 - Cauchy
 - uniforme, 658
 - de Cauchy, 326
 - série alternée, 331
 - Weierstrass, 873
 - série de fonctions, 1004
- critique
 - Galton-Watson, 1526
 - point, 1080
 - point d'un arc, 941
 - région, 1493
 - valeur, 1494
- cyclique
 - endomorphisme, 368
 - groupe, 85
 - matrice, 368
- cycloïde
 - coordonnées normales, 946
 - longueur, 940
- décalage, 1325
- décimale
 - décomposition, 336
- décomposition
 - Bruhat, 723
 - canonique, 71
 - corps, 166
 - Dunford, 388
 - application, 391
 - exponentielle de matrice, 389
 - Jordan

- et exponentielle de matrice, 389
 - polaire, 719
 - primaire, 387
 - sous-espaces caractéristiques, 387
 - spectrale, 387
- dénombrable, 71
 - à l'infini, 221
- dénombrement, 750
 - partitions de $\{1, \dots, n\}$, 1041
- dérivé
 - groupe, 87
- dérivée, 581
 - au sens de distributions, 1261
 - dans Sobolev $H^1(I)$, 1261
 - directionnelle, 601, 604
 - distributionnelle, 1240
 - faible, 1235
 - fonction à valeurs dans E' , 266
 - partielle, 600, 602, 662
 - seconde, 581, 675
- dérivabilité
 - fonction définie par une intégrale, 876
 - lemme de Borel, 1044
- dérivable, 582, 675
 - au sens complexe, 999
 - fonction, 581, 1279
- dérivation
 - au sens des distribution
 - Sobolev, 1265
- déterminant, 283
 - Cauchy, 1055
 - d'un endomorphisme, 288
 - d'une famille de vecteurs, 286
 - de Cauchy, 292
 - et inversibilité, 288
 - forme linéaire alternée, 283
 - Gram, 292, 1055
 - interprétation géométrique, 820
 - résultant, 293, 889
 - utilisation, 895
 - Vandermonde, 289
- développable
 - en série entière, 1028
- développement
 - asymptotique, 694
 - limité
 - en zéro, 686
 - fonction holomorphe, 1165
 - premier ordre, 587
 - Taylor, 1091
- degré
 - application $S^1 \rightarrow S^1$, 962
 - d'une représentation, 769
 - extension de corps, 161
- dense
 - nulle part, 258
- densité, 1099
 - conjointe, 1398
 - d'une variables aléatoire, 1394
 - dans un espace de fonction
 - critère de Weyl, 1212
 - de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, 226
 - utilisation, 653
 - de $GL(n, \mathbb{R})$ dans $M(n, \mathbb{R})$, 715
 - de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, 1162
 - de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, 1140
 - de $L^2([0, 1])$ dans $L^p([0, 1])$, 1142
 - de $S^+(n, \mathbb{R})$ dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$, 719
 - des fonctions étagées dans L^p , 1140
 - des polynômes
 - dans $C_c^0[0, 1]$, 1461
 - des polynômes trigonométriques dans $L^p(S^1)$, 1154
 - matrices diagonalisables dans $M(n, \mathbb{C})$, 715
 - mesure, 63, 483
 - points extrémaux dans $\mathcal{L}$, 721
 - prolongement, 1097
- densité d'une mesure, 792
- diédral, 751
- diagonalisable, 378
 - et polynôme minimum scindé, 378
 - exponentielle, 391
- diagonalisation
 - cas complexe, 382
 - cas réel, 384
 - endomorphisme auto-adjoint, 422
 - simultanée, 380
- diamètre, 592
- difféomorphisme, 355, 835, 913
 - de classe C^k , 642
- différence
 - divisée, 1366
- différentiabilité, 639
- différentiable, 611
 - dans un Banach, 350
 - deux fois, 641
 - sur un ouvert, 616
- différentielle, 351, 606
 - de $u \mapsto u^{-1}$, 360
 - partielle, 356
 - totale, 662
- dilatation, 708
- dilatation (matrice), 138
- dimension, 271
 - n -formes multilinéaires alternées, 283
 - définition, 271

- sous espace affine, 513
- utilisation, 519
- direction, 601, 949
 - sous-espace affine, 513
- Dirichlet
 - noyau, 1202
 - théorème, 1202
 - théorème (sur les nombres premiers), 184
- disque de convergence, 1007, 1008
- distance, 221
 - associée à une norme, 224
 - entre deux mesures de probabilités, 1489
 - point et ensemble, 250
- distingué, 85
- distribution, 1238
 - équation de Schrödinger, 1307
 - de Dirac, 1244
 - produit par une fonction, 1240
 - tempérée, 1244
- divergence, 665
- diviseur
 - de zéro, 127
 - de zéro à droite, 127
 - polynôme, 143
- division
 - euclidienne, 90, 143
- domaine, 672
 - fondamental d'une action, 105
- dominé
 - modèle statistique, 1472
- dominée
 - convergence (Lebesgue), 482
 - mesure, 790
- droite
 - projective, 531
- dual, 278
 - d'un espace de Hilbert, 1109
 - de $M(n, \mathbb{K})$, 282
 - de $L^p(\Omega)$, 1150
 - de L^p , 1145
 - de $L^p([0, 1])$ avec $1 < p < 2$, 1143
 - espaces L^p , 1142
 - topologique, 278
- Dunford
 - décomposition, 388
- dyadique, 504
- écart-type, 1401
- échantillon, 1466, 1468
- effectif
 - empirique, 1497
- efficacité
 - courbe, 1494
 - d'une méthode itérative, 1360
- élément
 - de surface, 858
 - de torsion, 115
- élément de surface, 840
- ellipsoïde, 421
- endomorphisme, 272
 - auto-adjoint, 422
 - cyclique, 368
- décomposition
 - polaire, 719
- diagonalisable, 413, 717, 1302
 - Dunford, 388
- diagonalisation, 384
- nilpotent
 - Dunford, 388
- préservant une forme quadratique, 728
- sous-espace stable, 388, 1302
- engendré, 131
 - λ -système, 439
 - corps et anneau, 161
 - idéal dans un anneau, 131
 - sous-espace affine, 514
 - sous-groupe, 85
 - tribu, 430
 - par une variable aléatoire, 1395
- ensemble
 - de Cantor, 501
 - différence symétrique, 70
 - infini, 69
- entrelacement, 776
- enveloppe
 - convexe, 517
- équation
 - différentielle
 - linéaire, 1281
 - ordinaire d'ordre 1, 1279
 - variables séparées, 1283
 - générale de degré n , 218
- équicontinuité, 1123
- équi-intégrable, 1533
- équivalence
 - arcs paramétrés, 943
 - chemin, 937
 - classe de fonctions, 1126
 - de représentations, 776
 - de suites, 326
 - homotopie, 1169
 - norme, 323
 - relation, 70
 - suite de composition, 100
- erreur, 1367, 1390
 - assignation, 1328
 - quadratique, 1370

- troncature, 1328
- erreur relative, 1327
- escalier, 470
- espérance, 1400
 - conditionnelle, 1404, 1409
 - événement, 1410
 - événements, 1410
 - variable aléatoire, 1409
- Espace
 - de Sobolev, 1268
- espace
 - L^2
 - Sobolev, 1265
 - L^p , 1127
 - affine, 509
 - canonique, 509
 - Banach, 1103
 - complet, 1099
 - $C_b^0(X, Y)$, norme uniforme, 1057
 - $\mathcal{D}(K)$, 1237
 - $\mathcal{S}(\Omega)$, 1254
 - de Baire, 266
 - de Bergman, 1196
 - de fonctions
 - L^p , 1134
 - Sobolev H^1 , 1265
 - de Hilbert
 - espace de Sobolev H^1 , 1265
 - de probabilité, 1393
 - de Schwartz, 1160, 1244
 - de Sobolev, 1261, 1269
 - euclidien, 306
 - métrique, 221
 - base de topologie, 227
 - mesuré, 436
 - complété, 447
 - mesurable, 429
 - projectif, 531
 - propre, 375
 - tangent, 1095
 - topologique, 232
 - métrisable, 247
 - vectériel
 - dimension, 283
- espace vectoriel
 - topologique, 222
- estimateur, 1473
 - biais, 1474
 - consistant, 1473
 - convergent, 1473
 - de fonction de répartition, 1479
 - maximum de vraisemblance, 1476
- estimation
 - des grands écarts, 1447
- étrangers
 - polynômes, 143
- Euclide
 - algorithme étendu, 92
 - lemme, 94
- euclidien
 - anneau, 133
 - espace, 303
- Euler
 - indicatrice, 122
- événement, 1393
- exact
 - intervalle de confiance, 1482
- excès
 - intervalle de confiance, 1482
- exhaustive (suite de compacts), 255
- exponentielle, 1019
 - complexe, 1189
 - convergence, 333
 - de matrice, 337, 389, 391, 1038
 - utilisation, 1078
 - existence, 1017
 - rapide, 768
 - unicité, 1018
- exposant, 413, 758
 - d'un groupe, 86
- extension
 - corps de base, 393
 - de corps, 160, 176
 - algébrique, 160, 165
 - finie, 196
 - monogène, 161
 - simple, 161
 - utilisation, 213
 - isométrie, 1098
- extrémal
 - point dans un convexe, 721
- extrémité
 - d'un intervalle, 241
- extrapolation, 1365
- extrema, 1081
 - lié, 1082
 - local
 - relatif, 1081
 - volume d'un ellipsoïde, 895
- extremum, 1091
- facteur
 - intégrant, 1306
- factoriel
 - anneau, 130
- factorisation
 - de polynôme, 146, 163

- faisceau de droites, 539
- famille
 - sommable, 340
- Fatou, 481
- Fejér
 - noyau, 1202
- fermé, 219, 260, 316
 - dans un compact, 230
- fermeture, 318
 - séquentielle, 249
- fidèle (action), 103
- filtration, 1529
- fine
 - subdivision, 932
- fixateur, 102
- flux
 - d'un champ de vecteur, 865
- flux d'un champ de vecteurs, 862
- fonction, 672
 - Γ d'Euler, 1183
 - étagée, 1140
 - à décroissance rapide, 1160
 - borélienne, 454
 - caractéristique, 797
 - d'une variable aléatoire, 1415
 - continue
 - égales, 250
 - par morceaux, 473
 - convexe, 647, 653
 - croissante, 672
 - décroissante, 672
 - définie par une intégrale, 874, 879, 1044, 1193
 - Γ d'Euler, 1183
 - utilisation, 1435
 - de classe $\mathcal{C}^1$, 635
 - de Dirichlet, 1205
 - de Möbius, 206
 - de répartition, 1415
 - différentiable, 1081
 - en escalier intégrable, 796
 - génératrice, 1417
 - holomorphe, 999, 1193
 - théorème de Montel, 1195
 - image, 672
 - méromorphe
 - Γ d'Euler, 1183
 - monotone, 672
 - par morceaux, 473
 - valeurs vectorielles, 663
- fondamental
 - domaine d'une action, 105
- forme
 - bilinéaire, 302
 - non dégénérée, 419
- différentielle, 838
 - exacte, 882
 - fermée, 882
- linéaire
 - différentielle, 1082
- quadratique, 417, 744, 1088, 1090, 1091
 - groupe orthogonal, 728
 - matrice associée, 417
- forme canonique
 - fonction simple, 470
- forme linéaire
 - alternée, 283
- formule
 - Bayes, 1403
 - Burnside, 105
 - d'expulsion (produit vectoriel), 313
 - de Cauchy, 1170
 - Hadamard, 1008
 - inversion Möbius, 206
 - probabilité totales, 1403
 - sommatoire de Poisson, 1220
 - Stirling, 326
 - Taylor
 - reste intégral, 646
 - utilisation, 1351
- Fourier, 1220
 - série
 - utilisation, 1211
 - transformée
 - groupe abélien fini, 771
- fréquence
 - empirique, 1497, 1515
- fraction
 - rationnelle
 - intégration, 889
- fraction rationnelle, 923
- fractions (corps), 151
- Fredholm
 - équation, 1061
- Frenet
 - formules, 953
- Fresnel
 - intégrale, 1191
- Frobénius
 - réduction, 400
- Frobenius
 - morphisme, 125
- frontière, 260, 320
- Fubini
 - théorème
 - dans $\mathbb{R}^n$, 820
- générateur, 85, 269

- génératrice
 - partir d'un module, 126
- géométrie
 - avec des groupes, 545, 745
 - avec nombres complexes, 545, 745
- géométrique
 - avec des nombres complexes, 1211
- Galton-Watson
 - sous-critique, 1526
 - sur-critique, 1526
- Gauss
 - lemme
 - polynômes, 152
 - somme de, 190
- Grönwall (lemme), 1279
- gradient, 607, 617, 626
- Gram (déterminant), 292
- Gram-Schmidt, 306
- graphe, 584, 672
 - de transition (chaîne de Markov), 1509
 - fonction, 628
 - fonction de deux variables, 630
- groupe
 - p -groupe, 752
 - $GL(n, \mathbb{R})$, 1090
 - action, 545
 - utilisation, 728
 - agissant sur un ensemble
 - diédral, 744
 - alterné, 109
 - dérivé, 87
 - de $GL(n, \mathbb{K})$, 713
 - de $SL(n, \mathbb{K})$, 713
 - du groupe alterné, 111
 - du groupe symétrique, 109
 - de Galois, 217
 - de permutation, 784
 - caractères de S_4 , 783
 - de permutations, 750
 - de torsion, 115
 - des isométries
 - espace métrique, 222
 - des symétries, 742
 - diédral, 744, 751
 - générateurs (preuve), 745
 - générateurs (utilisation), 784
 - en géométrie, 744
 - et géométrie, 283, 545, 750
 - isométries du cube, 113
 - fini, 185, 188, 750, 754, 761, 766
 - alterné, 110
 - diédral, 744
 - Wedderburn, 185
 - linéaire, 723
 - décomposition polaire, 719
 - enveloppe convexe de $\Omega(n)$, 722
 - hyperplan, 283
 - sous-groupes compacts, 725
 - modulaire, 544
 - orthogonal, 297
 - d'une forme quadratique, 728
 - partie génératrice, 110, 545, 766
 - permutation, 283, 290, 723, 766
 - diédral, 744
 - projectif, 537
 - quotient, 98
 - résoluble, 101
 - spécial orthogonal, 298
 - symétrique, 106
 - action sur un triangle, 773
- groupe dérivé
 - de $GL(n, \mathbb{C})$, 707
- Hadamard
 - formule, 1008
- Hardy-Littlewood (théorème), 1052
- Hausdorff, 220
- Heine (théorème), 593
- hermitien
 - produit scalaire, 376
- hessienne, 644
- Hilbert, 1103
- holomorphe, 999
- homéomorphisme, 228
- homogène
 - chaîne de Markov, 1503
- homographie, 536, 545
- homotopie, 964
- hyperplan, 738
 - de $M(n, \mathbb{K})$, 283
 - sépare
 - au sens strict, 1156
 - séparer
 - au sens large, 1156
- hypothèse
 - alternative, 1493
 - composite, 1493
 - multiple, 1493
 - nulle, 1493
 - simple, 1493
- idéal
 - bilatère, 123
 - dans un anneau, 71
 - maximal, 131
 - maximum, 172
 - principal

- à droite, 131
- à gauche, 131
- identifiable, 1472
- identité
 - polarisation, 417
- image, 672
- inégalité
 - arithmético-géométrique, 656
 - Bessel, 1111
 - Cauchy-Schwarz, 302, 1104
 - de Khintchine, 1444
 - de la moyenne, 639
 - des pentes, 648
 - Hölder, 1129
 - utilisation, 1401, 1462
 - isopérimétrique, 1211
 - Jensen, 655
 - espérance conditionnelle, 1415
 - pour une somme, 655
 - version intégrale, 1129
 - Kantorovitch, 656
 - Markov, 1424
 - Minkowski, 1131
 - triangulaire, 221, 223
 - produit scalaire, 303
- incompressible
 - champ de vecteur, 667
- indécomposable
 - module, 126
- indépendance, 1397
 - événements, 1394
 - utilisation, 1459, 1536
 - affine, 520
 - algébrique, 217
 - sous tribus, 1394
 - variables aléatoires, 1395
- indicatrice d'Euler, 122
- indice, 96
 - d'une courbe dans $\mathbb{C}$, 1169
 - de rotation, 963
- inductif, 69
- induite
 - topologie, 317
 - tribu, 430
- inférence statistique, 1465
- infimum, 238
- injection, 262
- intégrable, 474
 - fonction non en escalier, 802
 - fonction positive, 807
- intégrale
 - calcul, 1212
 - convergente, 813, 889
 - d'une fonction sur une carte, 841
 - d'une fonction sur une variété, 846
 - d'une forme différentielle, 849
 - fonction en escalier, 796
 - fonction sur un intervalle, 811
 - Fresnel, 1191
 - impropre, 812, 813
 - sur un chemin, 846
- intégration
 - fraction rationnelle, 889
- intérieur, 259
 - d'un ensemble, 315
 - point, 315
- intègre
 - anneau, 127
- interpolation, 1365
- Intervalle, 1557
- intervalle, 241, 672
 - fermé, 672
 - longueur, 492
 - ouvert, 672
- intervalle de confiance
 - asymptotique, 1486
- invariant
 - de similitude, 400
- invariante
 - mesure
 - pour une chaîne de Markov, 1520
- inverse généralisé, 1451
- inversion, 526
 - dans le groupe symétrique, 107
- involution, 380
- irréductible
 - chaîne de Markov, 1509
 - dans un anneau, 130
 - module, 126
 - polynôme, 142
 - représentation, 773
- irrationalité
 - $\sqrt{2}$, 75
- isobarycentre, 515
- isolé
 - élément de $\mathbb{R}$, 261
 - point dans un espace vectoriel normé, 321
- isométrie
 - d'espaces métriques, 222
 - de forme quadratique, 729
 - de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, 745
 - espace euclidien
 - isométries du cube, 113
 - groupe, 222
- isomorphisme
 - $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, 188

- d'espaces topologiques, 228
- espace affine, 513
- isotrope
 - cône, 420
 - totalelement, 420
- isotrope (vecteur), 420
- jacobien, 626, 664
- Jordan
 - chemin, 865
 - courbe, 1210
 - réduction, 402
- Jordan-Hölder, 99
- Kronecker, 269
- lacet, 1169
- Lagrange
 - multiplicateur, 1082
 - polynôme, 281
- lagrangien, 1082
- Laplace
 - transformée, 1417
- Laplacien, 994
- Legendre
 - symbole, 189
- Leibnitz, 584, 586
 - applications entre espaces vectoriels normés, 356
- lemme
 - Borel, 1044
 - d'Euclide, 94
 - de Borel-Cantelli, 1423
 - de Gauss
 - contenu de polynôme, 129
 - pour des entiers, 94
 - de Morse, 1091
 - de Schreider, 100
 - de Slutsky, 1421
 - de transfert, 455
 - de Zorn, 69
 - des noyaux, 364
 - Fatou, 481
 - Gauss
 - dans un anneau principal, 133
 - polynômes, 152
 - Grönwall, 1279
 - Hadamard, 881
 - regroupement, 1397
 - Schur complexe, 381
 - Schur réel, 383
- Levi-Civita, 989
- libre, 269
 - action, 106
 - partie, 269
 - partie d'un module, 126
- Ligne d'univers, 1553
- limite, 344
 - d'ensembles, 438
 - d'une fonction, 228
 - de fonctions holomorphes, 1193
 - de suite
 - espace topologique, 220
 - fonction, 228, 551
 - fonction de plusieurs variables, 553
 - inférieure, 463, 464
 - inversion, 1041, 1052, 1127, 1193
 - permutation
 - utilisation, 1417
 - suite, 325
 - suite dans $\mathbb{R}^m$, 261
 - suite numérique, 234
 - supérieure, 463, 464
 - unicité, 229
- linéaire (application), 272
- Lipschitz, 1058
 - localement, 640
- Lipschitzienne, 639
- localement
 - intégrable, 812
- log-concave, 654
- logarithme, 679, 1020
 - de matrice, 1038
- loi
 - χ^2 , 1445
 - binomiale
 - comportement asymptotique, 1447
 - conjointe, 1397
 - d'une variable aléatoire, 1418
 - de Poisson, 1432
 - des grands nombres
 - forte, 1425
 - pour les chaînes de Markov, 1522
 - processus de Poisson, 1544
 - utilisation, 1447, 1459
 - marginale, 1397
 - normale
 - vecteur gaussien, 1439
 - parente, 1465, 1466
 - parente d'un échantillon, 1468
 - réciprocité quadratique, 192
 - sans mémoire, 1434
 - Student, 1445
- Lokta-Volterra, 1295
- longueur
 - élément de, 939
 - arc géométrique, 944

- d'un arc paramétré compact, 932
- d'un intervalle, 492
- d'une arrête, 794
- longueur d'arc, 934
- méromorphe, 1182
- Méthode
 - de Newton, 1346
- méthode
 - des chemins, 561
 - Newton, 1351
 - cas convexe, 1348
- métrique
 - discrète, 222
- maigre, 431
- maigre (ensemble), 258
- majorant, 236, 237
 - essentiel, 1128
- Markov
 - inégalité, 1424, 1471
- martingale, 1529
 - bornée dans $L^2(\Omega)$, 1530
- matrice, 545, 723
 - équivalence, 273
 - dans le groupe linéaire, 728
 - associée à une forme quadratique, 417
 - compagnon, 399
 - creuse, 1371
 - cyclique, 368
 - de dilatation, 138
 - de permutation, 138
 - de similitude, 999
 - de Sylvester, 292
 - de transition, 1503
 - de transvection, 138
 - dense, 1371
 - hermitienne
 - racine carré, 717
 - jacobienne, 617, 626
 - normale, 707
 - orthogonale, 297
 - permutation
 - élémentaire, 1377
 - racine carré, 717
 - semblable, 717
 - semblables, 744, 1090
 - stochastique, 1503
 - symétrique, 1090
 - réelle, 1088
 - trigonalisable, 411
- matrices
 - similitude, 273
- maximal
 - idéal, 131
- maximum, 237, 239
 - global, 1080
 - local, 1080
- mesurable
 - application, 438
 - au sens de m^* , 443
 - ensemble, 436
 - fonction, 454
 - Lebesgue, 792
- mesure
 - σ -finie, 436
 - absolument continue, 790
 - complexe, 791
 - dans une carte, 840
 - de Borel, 460
 - de comptage, 437, 819
 - de Haar, 1065
 - de Lebesgue, 495
 - de Radon, 460, 1179
 - extérieure, 433
 - externe, 792
 - finie, 436
 - sur algèbre de partie, 434
 - image, 457
 - positive, 436
 - probabilité, 1393
 - produit, 489
 - régulière, 460
 - extérieure, 460
 - intérieure, 460
 - sur algèbre de partie, 434
- minimum, 239
- minorant, 237
- modèle
 - échantillonnage, 1466, 1468
 - paramétrique, 1466
 - statistique, 1465
- modulaire (groupe), 544
- module
 - de continuité, 1096
 - indécomposable, 126
 - irréductible, 126
 - simple, 126
 - sur un anneau, 125
- moment, 1400
 - fonction génératrice, 1417
- monôme, 141
- monogène, 85
 - extension de corps, 161
- monotonie, 1300
- morceau
 - fonction continue ou monotone, 473
- morphisme

- d'algèbres, 149
- d'anneaux, 117
- Frobenius, 125
- moyenne
 - de Cesaro, 333
 - empirique, 1402
 - empirique d'un échantillon, 1469
 - quadratique, 1401
- multiplicateur
 - de Lagrange, 1082
- multiplicité
 - racine d'un polynôme, 145
 - racine de $f(x) = 0$, 1345
 - valeur propre
 - algébrique, 373
 - géométrique, 373
- négatif, 81
- négligeable
 - partie d'un espace mesuré, 444
- nabla, 625
- Newton
 - méthode, 1351
- nilpotent, 125
- niveau de confiance, 1482
- nombre
 - complexe
 - norme 1, 185
 - dénormalisé, 1326
 - de Fermat, 213
 - de Néper, 1019
 - normal, 1459
 - normalisée, 1326
 - premier, 154, 184, 188, 757, 761, 765, 766
 - dans leur ensemble, 90
 - deux nombres entre eux, 90
 - théorème des deux carrés, 156
 - tours d'une courbe plane, 962
- nombre premier
 - polynôme cyclotomique, 181
- non dénombrable, 71
- normé
 - espace vectoriel, 223
- normal
 - arc paramétré, 944
 - endomorphisme, 707
 - nombre, 1459
 - sous-groupe, 85
- normal extérieur
 - vecteur, 864
- normale
 - loi réduite, 1438
 - principale, 952
- normalisateur, 85
- norme, 307
 - équivalence, 323
 - d'algèbre, 309
 - d'application linéaire, 308
 - d'une application linéaire, 308
 - définition, 223
 - euclidienne, 301
 - dans $\mathbb{R}^m$, 425
 - opérateur, 309
 - subordonnée, 309
 - supremum, 301
 - vecteur, 304
- noyau
 - d'une forme bilinéaire, 420
 - Dirichlet, 1202
 - Fejér, 1202
- nulle part dense, 258
- observation, 1393
- opérateur
 - adjoint, 377
 - autoadjoint, 377
 - définit positif, 384
 - hermitien, 377
 - linéaire
 - borné, 351
- opérateurs
 - compatibles, 1119
- opposés
 - chemins, 937
- ordre, 69
 - élément, 86
 - d'un groupe, 86
 - d'un polynôme, 197
 - dans un corps, 72
 - distribution, 1241
 - sur un anneau factoriel, 130
 - total, 69
- orientable
 - variété, 843
- orientation, 842
- origine
 - abscisse curviligne, 944
 - repère affine, 521
- orthogonal, 424, 1107
 - coordonnées curviligne, 988
 - famille de projecteurs, 126
 - matrice, 297
 - sous-espace, 278
 - vecteur, 304
- orthonormé, 425
 - système, 1110
- oscillation
 - d'une fonction, 587

- d'une fonction en un point, 587
- osculateur (cercle), 957
- ouvert, 219, 241, 260, 316
 - dans $\mathbb{R}^n$, 259
- parallèle
 - sous-espaces affines, 513
- paramétrages
 - admissible, 943
- paramétrisation, 938
 - normale, 944
- Parseval, 1114
- partie
 - régulière, 686
 - totale, 1110
- partie génératrice, 85
- partition
 - d'un entier en parts fixées, 1186
 - dénombrable mesurable, 466
 - de l'unité, 845
- pavé, 792, 793
- pavable, 793
- Pearson
 - theoreme, 1498
- peigne de Dirac, 1250
- permutation
 - matrice, 138
- permuter
 - dérivée et intégrale
 - $\mathbb{R}^n$, 879
 - dans $\mathbb{R}$, 876
 - dans $\mathbb{R}$ avec les bornes, 878
 - dérivée et limite, 659
 - différentielle et intégrale
 - $\mathbb{R}^n$, 880
 - intégrale
 - et série, 819
 - limite et intégrale, 874
 - convergence dominée, 482
 - convergence monotone, 479
 - espace mesuré, 874, 875
 - série entière et dérivation, 1013
 - série entière et intégration, 1013
 - somme et intégrale, 480, 1004
- petit théorème de Fermat, 153
- PGCD
 - dans un anneau intègre, 128
 - polynômes, 144
- pgcd, 117
 - calcul effectif, 92
- pivotale, 1484
- plan
 - projectif, 531
 - tangent, 626, 662
- Plancherel, 1114
- plongement, 1097
- Poincaré (demi-plan), 544
- point
 - d'équilibre
 - stable, 1291
 - pondéré, 515
- point critique
 - définition, 1093
- point fixe, 1526
 - attractif, 1058
 - Brouwer, 1061
 - Picard, 1059
 - Schauder, 1063
- Poisson
 - formule sommatoire, 1220
 - processus, 1543
- polarisation (identité), 417
- polynôme
 - à plusieurs indéterminées, 195, 295
 - alterné, 175
 - annulateur, 364, 367
 - caractéristique, 372, 382
 - contenu, 129
 - cyclotomique, 179
 - irréductibilité, 181
 - propriétés, 180
 - d'endomorphisme, 717
 - décomposition de Dunford, 388
 - de Bernstein, 1461
 - irréductible, 142
 - séparable, 168
 - sur $\mathbb{F}_q$, 207
 - Lagrange, 281
 - minimal, 163, 366
 - d'un élément d'une extension, 160
 - ponctuel, 367
 - primitif, 197
 - primitif (au sens du contenu), 129
 - racines, 176
 - séparable, 168
 - scindé, 143
 - semi-symétrique, 175
 - symétrique, 175, 176, 195, 290, 295
 - élémentaire, 175, 178
 - trigonométrique, 1153
- portée
 - mesure, 790
- positif, 80
- potentiel, 853, 900
- PPCM
 - dans un anneau intègre, 128
- précision

- simple, 1325, 1326
- préhilbertien, 1103
- premier
 - corps, 151
 - deux éléments d'un anneau principal, 132
 - deux polynômes entre eux, 143
 - idéal, 131
 - sous corps, 151
- premier temps d'atteinte, 1511
- premier type
 - région solide, 805
- presque
 - nulle, 115
 - partout, 438
 - surjective, 1156
- primitif
 - élément d'un corps, 188
 - élément d'une extension de corps, 161
 - polynôme, 143, 197
 - racine, 200
- primitive, 581, 811, 897
 - de fonction continue, 1049
 - et intégrale, 809, 814
 - fonction, 599
- principal
 - anneau, 131
 - idéal, 131
- principe
 - prolongement analytique, 1101
 - zéros isolés, 1173
- Principe de correspondance, 1568
- probabilité
 - conditionnelle, 1403
- problème de Cauchy, 1312
- processus
 - adapté à une filtration, 1529
 - arrêté, 1534
 - croissant prévisible, 1534
 - Galton-Watson, 1524
 - Poisson, 1543
 - sans mémoire, 1434
- produit
 - d'espaces vectoriels normés, 344
 - d'une mesure par une fonction, 63, 483
 - de Cauchy, 1009
 - de convolution, 1139
 - et Fourier, 1217
 - distribution et fonction, 1240
 - espaces mesurés, 491
 - espaces topologiques, 220
 - mixte, 313, 823
 - scalaire
 - en général, 302
 - hermitien, 376
 - sur $M(n, \mathbb{R})$, 311
 - sur $\mathbb{R}^n$, 423
 - semi-direct, 112
 - tensoriel
 - de représentations, 782
 - vectorel, 312, 822
- produit remarquable, 1176
- projecteur
 - dans un module, 126
- projectif
 - complétion, 533
 - droite, 531, 533
 - espace, 531
 - groupe, 537
 - hyperplan, 532
 - plan, 531
 - repère, 541
 - sous-espace, 531
- projection
 - orthogonale, 1106
- prolongement
 - analytique, 1101
 - utilisation, 1195
 - de fonctions, 1097
 - lemme de Borel, 1044
 - méromorphe de la fonction Γ , 1183
 - par continuité, 579, 673
 - dans $H^1(I)$, 1264
 - par densité, 1097
 - théorème de Hahn, 452
- propriété d'intersection non vide, 230
- puissance
 - d'un point, 525
 - d'un test, 1494
- quasi-compact, 220
- quaternion, 171
- quotient, 90, 143
 - dans une suite de composition, 99
 - de groupe, 98
 - de groupes, 761
- réciroque
 - continuité, 262
 - dérivabilité, 585
- récurrent
 - état, 1512
 - nul, 1512
 - point d'un système dynamique, 462
 - positif, 1512
- réduction
 - d'endomorphisme, 388
 - Frobénius, 400

- Jordan, 402
- réel, 78
- réflexif, 1149
- réflexion, 732
 - glissée, 736
 - par rapport à un hyperplan, 738
- région
 - critique, 1493
 - de confiance exact, 1484
 - de rejet, 1493
- régularité
 - d'une mesure, 460
 - extérieure de la mesure de Lebesgue, 498
 - intérieure de la mesure de Lebesgue, 500
- régulière
 - surface, 854
- régulier
 - arc, 941
 - chemin, 865
 - point d'un arc, 941
- régulier à droite, 117
- répulsif
 - point fixe, 1058
- résidu
 - méthode itérative, 1390
- résolvante, 1288
- résultant, 293
 - utilisation, 295, 889
- règle
 - du produit nul, 127
- Règle de Leibnitz, 586
- racine
 - carré
 - de matrice hermitienne, 717
 - carré de matrice
 - hermitienne positive, 717
 - de l'unité, 119, 181, 184, 413, 545, 745
 - primitive, 121
 - utilisation, 180
 - de polynôme, 163
 - multiple, 1345
 - primitive, 200
 - simple, 1345
- racine carré, 570
- raffinement, 932
 - subdivision d'un pavé, 794
- rang, 272, 283, 744
 - classe d'équivalence, 273
 - diagonalisation, 384
 - différentielle, 1082
 - utilisation, 1109
- rare, 431
- rayon
 - de convergence, 1007
 - de courbure, 952
 - de torsion, 953
 - spectral, 309, 389
- recouvrement, 594
- rectangle
 - produit de tribus, 484
- rectifiable, 932
 - arc géométrique, 944
- rejet
 - région dans une prise de décision, 1493
- relèvement, 962
- relations
 - coefficient-racines, 178
 - de Chasles, 509, 916
- relativement
 - compact, 220, 1123
- repère
 - affine, 520
 - cartésien
 - espace affine, 509
 - de Frenet, 952
 - projectif, 541
- Représentation
 - virgule flottante normalisée, 1324
- représentation, 772
 - de groupe fini
 - caractères de S_4 , 783
 - fidèle, 769
 - groupe diédral, 784
 - irréductible, 773, 774
 - produit tensoriel, 782
 - régulière gauche, 778
 - virgule fixe, 1324
- reste, 90, 143
 - d'un développement limité, 686
- risque
 - première espèce, 1494
 - quadratique, 1473
 - seconde espèce, 1494
- rupture
 - corps, 164
- séparé, 220
 - espace topologique, 220
- séparable, 1110
 - élément d'une extension, 170
 - espace topologique, 220
 - extension de corps, 170
 - polynôme irréductible, 168
 - polynôme non constant, 168
- sépare
 - les points, 1047
- série

- dans un espace vectoriel normé, 326
 - de Fourier, 1206, 1220
 - utilisation, 1211
 - de Laurent, 1182
 - de puissance, 1007
 - divergence, 326
 - donnant $(1 - A)^{-1}$, 328
 - entière, 1007, 1041, 1220
 - Abel angulaire, 885
 - fonctions holomorphes, 1170
 - processus de Markov, 1526
 - utilisation, 1186, 1417
 - fonctions, 1052, 1220
 - génératrice d'une suite, 1028
 - utilisation, 1186
 - géométrique, 332
 - harmonique, 332
 - nombres, 1052
 - numérique, 765, 1041
 - Riemann, 332
 - Taylor, 1029
- Schrödinger, 1307
- Schur (théorème), 776
- section, 602
 - de graphe, 628
 - propriété des, 486
- segment
 - dans $\mathbb{R}^p$, 241
 - dans un espace affine, 515
- semblables
 - matrices, 377
- semi-définie positive, 384
- semi-norme, 263
- semi-simple
 - endomorphisme, 369
- semi-symétrique
 - polynôme, 175
- signature
 - d'une permutation, 107
- similitude, 999
- simple
 - extension de corps, 161
 - fonction, 470
 - module, 126
- singularité, 1182
 - effaçable, 1182
 - pôle, 1182
- sinus
 - hyperbolique, 685
- sinus cardinal, 926
- solfège, 120
- solution
 - générale, 1310
 - particulière, 1310
- somme
 - inférieure, 799
 - partielle, 326
 - supérieure, 799
- somme directe (de représentations), 773
- somme partielles
 - Abel angulaire, 885
- sommet, 976
- sous anneau, 123
- sous arc, 929
- sous-additivité
 - sur algèbre de parties, 434
- sous-espace
 - affine engendré par une partie, 514
 - caractéristique, 386
- sous-groupe
 - caractéristique, 85
 - distingué, 761
 - dans le groupe alterné, 110
 - engendré, 85
 - normal, 98, 761
- sous-martingale, 1529
- sous-module, 126
- sous-suite, 592
- spectre
 - d'un endomorphisme, 375
 - matrice hermitienne, 381
 - matrice symétrique réelle, 384
- sphère, 313
 - de Riemann, 544
- stabilité
 - d'un point d'équilibre, 1291
 - Lyapunov, 1292
- stable, 1332
- stathme
 - sur $\mathbb{Z}[i]$, 154
- stathme euclidien, 133
- stationnaire
 - chaîne de Markov, 1520
- statistique, 1473
- statistiques
 - descriptives, 1465
- structure
 - complexe, 959
- structure d'anneau canonique, 117
- Student, 1445, 1486
- subdivision, 794
 - associée à une fonction, 795
 - d'un intervalle, 932
- suite, 115
 - équirépartie, 1212
 - critère de Weyl, 1212

- arithméticogéométrique, 333
- définie par itération, 1351
- de Cauchy, 223, 325
 - dans un corps, 72
- de composition, 99
- de fonctions, 1127
 - théorème de Montel, 1195
- de fonctions intégrables, 874, 1193
- de Jordan-Hölder, 99
- exacte, 111
- régularisante, 1227
- support, 796
 - distribution, 1241
 - famille d'éléments, 115
- supremum, 237, 238
 - d'une suite d'ensembles, 429
- sur-martingale, 1529
- surface paramétrée, 853
- surjection, 262
- Sylow
 - p -Sylow, 752
- Sylvester (matrice), 292
- symétrique
 - polynôme, 175
- symbole
 - de Legendre, 189
- système
 - fondamental, 1286
 - orthonormé, 1110
 - trigonométrique, 1111, 1153
- tangent
 - vecteur unitaire, 952
- tangente, 679, 949, 1025
- tangente à un chemin, 1094
- Tangente hyperbolique, 1562
- tangente hyperbolique, 686
- taubérien, 1050
- taux d'accroissement, 647
- Taylor, 644
 - série entière, 1028
- temps d'arrêt, 1532
- temps de retour, 1511
- terminée
 - martingale, 1533
- test, 1493
 - bilatéral, 1494
 - unilatéral, 1494
- théorème
 - élément primitif, 170, 197, 198
 - accroissements finis, 358
 - dérivée directionnelle, 603
 - dans $\mathbb{R}$, 598
 - forme générale, 639
- Ascoli, 1123
- Bézout
 - polynômes, 144
 - utilisation, 293
- Baire, 258
- Banach-Steinhaus, 1124
 - avec semi-normes, 1125
- base incomplète, 271
- Beppo-Levi, 479
- Bolzano-Weierstrass, 251
- Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$, 245
- Borel-Cantelli, 1393
- Borel-Lebesgue, 244
- Brouwer, 1062
 - dimension 2, 1172
- Carathéodory, 519
- Cauchy, 752
- Cauchy-Arzela, 1068
- Cauchy-Lipschitz, 1066
- Cayley-Hamilton, 374, 716
- central limite, 1427
 - processus de Poisson, 1545
- Chevalley-Warning, 195
- chinois, 158
 - anneau des polynômes, 142
 - anneau principal, 132
- Cochran, 1470
- Cochrane, 1471
- convergence
 - dominée de Lebesgue, 482
 - monotone, 479
- d'Alembert-Gauss, 142
- décomposition des noyaux
 - et exponentielle de matrice, 366
- de Baire, 267
- de Jordan, 978
- de représentation de Riesz, 1109
- des deux carrés, 156
 - version faible, 154
- Dini, 658
- Dirichlet, 1202
 - forme faible, 184
- Doob, 1533
- du rang, 273
- extension d'isométrie, 1098
- extrema
 - lié, 1082
- Fejér, 1203
- fonction implicite dans $\mathbb{R}^n$, 1075
- fonction implicite dans Banach, 1074
- fondamental du calcul intégral, 810
- Fubini
 - dans $\mathbb{R}^n$, 820

- espace mesuré, 816
- version compacte dans $\mathbb{R}^2$, 902
- Fubini-Tonelli, 815
- fuite des compacts, 1290
- Gauss
 - polynômes, 152
- Gauss-Wantzel, 213
- Glivenko-Cantelli, 1479
- Hahn-Banach, 1154
- Hardy-Littlewood, 1052
- Heine, 593
- incidence, 532
- inversion locale, 1070
 - utilisation, 1082, 1091
- isomorphisme
 - premier, 88
 - second, 88
 - troisième, 89
- isomorphisme de Banach, 1123
- Jordan, 1210
- Kronecker, 295
- Lagrange, 96
- Lie-Kolchin, 415
- Lokta-Volterra, 1296
- Markov-Takutani, 1065
- Montel, 1195
- Pappus
 - affine, 535
 - projectif, 536
- Pearson, 1498
- petit de Fermat, 153
- Picard, 1059
- point fixe
 - Brouwer, 1172
- projection
 - cas vectoriel, 1106
 - partie fermée convexe, 1104
- prolongement de Hahn, 452
- prolongement de Riemann, 1182
- Radon-Nikodym, 790
 - complexe, 791
- représentation de Riesz, 1150
- Rolle, 597
- Rothstein-Trager, 889
- Runge, 1174
- Schauder, 1063
- Schur, 776
- spectral, 387
 - autoadjoint, 422
 - matrice symétrique, 384
 - matrices normales, 382
- stabilité de Lyapunov, 1292
- Stone-Weierstrass, 1047, 1049
- Sylvester, 744
- taubérien, 1050
- taubérien faible, 887
- transfert, 1418
- Tykhonov, 256
 - dénombrable, 258
 - fini, 257
- valeurs intermédiaires, 570
- Von Neumann, 1078
- Wedderburn, 185
- Weierstrass, 252
- topologie, 219, 317
 - *-faible, 265, 1239
 - p -adique, 343
 - et semi-normes, 263
 - faible, 309
 - forte, 309
 - induite, 231
 - métrique, 221, 241
 - produit, 220
 - sur $\mathcal{D}(\Omega)$, 1236
 - sur $\mathcal{D}(K)$, 1236
 - sur $C^\infty(\Omega)$, 1236
 - sur dual topologique, 265
 - usuelle sur $\mathbb{R}^n$, 317
- topologique
 - somme directe, 1107
- torsion, 953
 - d'un groupe, 115
- totale, 1110
- trace, 1271
 - dual de $M(n, \mathbb{K})$, 282
 - endomorphisme, 409
 - matrice, 409
 - produit scalaire sur $M(n, \mathbb{R})$, 311
 - unicité pour la propriété de trace, 282
- transcendant, 172
 - par rapport à une extension de corps, 172
- transformée
 - de Cauchy, 1179
 - de Fourier, 1217, 1416
 - continuité, 1218
 - groupe abélien fini, 771
 - Fourier
 - distribution tempérée, 1246
 - Laplace, 1417
- transformation
 - Fourier, 1220
 - gaussienne, 1372
- transient
 - état, 1512
- transition
 - probabilité, 1503

- transitive, 106
- transitoire
 - état, 1512
- transposée, 278
- transvection, 708
- transvection (matrice), 138
- transversale, 105
- tribu, 429
 - borélienne, 431
 - de Baire, 432
 - de Lebesgue, 495
 - engendrée, 430
 - par un événement, 1395
 - par une application, 455
 - par une variable aléatoire, 1395
 - induite, 430
 - produit, 484
- trigonalisation
 - et polynôme caractéristique, 412
 - simultanée, 415
- triplet
 - pythagoricien, 137
- type
 - fini
 - en algèbre, 172
 - espace vectoriel, 270
- unicité
 - des mesures, 441
- unipotent, 125
- unitaire
 - normale principale, 952
- valeur
 - principale (distribution), 1244
 - propre, 375
 - singulière, 392
- valeur absolue
 - p -adique, 343
- valeur propre
 - d'une forme quadratique, 419
- valuation, 142
 - p -adique, 343
- Vandermonde (déterminant), 289
- variété, 1082
- variété
 - orientée, 843
- variable
 - de décision, 1494
- variable aléatoire, 1394
 - absolument continue, 1394
 - Bernoulli
 - marche aléatoire, 1506
 - utilisation, 1461
 - binomiale
 - utilisation, 1536
 - centrée, 1400
 - de Bernoulli
 - utilisation, 1536
 - de Rademacher, 1443
 - intégrable, 1400
 - suite de variables aléatoire de Bernoulli, 1524
- variance, 1401
 - empirique, 1401, 1469
 - empirique corrigée, 1469
 - vecteur gaussien, 1439
- variation des constantes, 1282, 1286
- vecteur
 - cyclique, 368
 - gaussien, 1439
 - propre, 375
 - unitaire normal, 952
 - unitaire tangent, 950
- Vitali (ensemble), 503
- vitesse d'un chemin, 930
- voisinage, 240, 317
- volume
 - d'une région solide, 806
 - région bornée dans $\mathbb{R}^3$, 803
- vraisemblance, 1476
- Wronskien, 1299

Chapitre 11

Analyse réelle

11.1 Limite et continuité

11.1.1 Définition

Proposition 11.1 (Caractérisation de la limite).

Soit une fonction $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point d'accumulation de D . On dit que f admet une **limite** en a si il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (11.1)$$

Démonstration. Il s'agit seulement de recopier la définition 5.52. $\square$

Si aucun nombre ℓ ne vérifie la condition de la définition, alors on dit que la fonction n'admet pas de limite en a . Lorsque f possède la limite ℓ en a , nous notons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell. \quad (11.2)$$

Proposition 11.2.

Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si a est un point d'accumulation de D et si il existe une limite de f en a , alors il en existe une seule.

De façon équivalente, il ne peut pas exister deux nombres $\ell \neq \ell'$ vérifiant tout les deux la condition (11.1).

Démonstration. Soient ℓ et ℓ' deux limites de f au point a . Par définition, pour tout ε nous avons des nombres δ et δ' tels que

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ |x - a| < \delta' &\Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon \end{aligned} \quad (11.3)$$

Pour fixer les idées, supposons que $\delta < \delta'$ (le cas $\delta \geq \delta'$ se traite de la même manière).

Étant donné que a est un point d'accumulation du domaine D de f , il existe un $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta$. Évidemment, nous avons aussi $|x - a| < \delta'$. Les conditions (11.3) signifient alors que ce x vérifie en même temps

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad (11.4)$$

et

$$|f(x) - \ell'| < \varepsilon. \quad (11.5)$$

Afin de prouver que $\ell = \ell'$, nous allons maintenant calculer $|\ell - \ell'|$ et montrer que cette distance est plus petite que tout nombre. Nous avons (voir remarque 11.3)

$$|\ell - \ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| < \varepsilon + \varepsilon. \quad (11.6)$$

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$$|\ell - \ell'| < 2\varepsilon, \quad (11.7)$$

et donc $|\ell - \ell'| = 0$, ce qui signifie que $\ell = \ell'$. $\square$

Remarque 11.3.

Les inégalités (11.6) utilisent deux techniques très classiques en analyse qu'il convient d'avoir bien compris. La première est de faire

$$|A - B| = |A - C + C - B|. \quad (11.8)$$

Il s'agit d'ajouter $-C + C$ dans la norme. Évidemment, cela ne change rien.

La seconde technique est l'inégalité

$$|A + B| \leq |A| + |B|. \quad (11.9)$$

Exemple 11.4

Considérons la fonction $f(x) = 2x$, et calculons la limite $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. Vu que $f(3) = 6$, nous nous attendons à avoir $\ell = 6$. C'est ce que nous allons prouver maintenant. Pour chaque $\varepsilon > 0$ nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $|x - 3| < \delta$ implique $|f(x) - 6| < \varepsilon$. En remplaçant $f(x)$ par sa valeur en fonction de x et avec quelques manipulations nous trouvons :

$$\begin{aligned} |f(x) - 6| &< \varepsilon \\ |2x - 6| &< \varepsilon \\ 2|x - 3| &< \varepsilon \\ |x - 3| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (11.10)$$

Donc dès que $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$, nous avons $|f(x) - 6| < \varepsilon$. Nous posons donc $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Plus généralement, nous avons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2a$, et cela se prouve en étudiant $|f(x) - 2a|$ exactement de la même manière. $\triangle$

11.1.2 Propriétés de base**Proposition 11.5.**

La limite est une opération linéaire, c'est à dire que si f et g sont des fonctions qui admettent des limites en a et si λ est un nombre réel,

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x),$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$

En combinant les deux propriétés de la proposition 11.5, nous pouvons écrire

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (11.11)$$

pour toutes fonctions f et g admettant une limite en a et pour tout réels λ et μ .

En plus d'être linéaire, la limite possède les deux propriétés suivantes.

Proposition 11.6.

Si f et g sont deux fonctions qui admettent une limite en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (11.12)$$

Si de plus $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}. \quad (11.13)$$

11.1.3 Limites de fonctions

Définition 11.7.

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point d'accumulation de D . On dit que f possède une **limite** si il existe un élément $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (11.14)$$

Pour une fonction $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, la définition est la même, sauf que nous remplaçons la valeur absolue par la norme dans $\mathbb{R}^n$. Nous disons donc que ℓ est la limite de f lorsque x tend vers a , et nous notons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$0 < \|x - a\|_{\mathbb{R}^m} < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon. \quad (11.15)$$

Remarque 11.8.

Dans l'équation (11.15), nous avons explicitement écrit les normes $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$. Dans la suite nous allons le plus souvent noter $\|\cdot\|$ sans plus de précision. Il est important de faire l'exercice de bien comprendre à chaque fois de quelle norme nous parlons.

Remarque 11.9.

Il est important de remarquer à quel point les définitions 11.7, et les caractérisations 6.195, 11.1 sont analogues. En réalité, la définition fondamentale est la définition de la limite dans les espaces vectoriels normés ; les deux autres sont des cas particuliers, adaptés à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^m$. Il en sera de même pour les définitions de fonctions continues : il y aura une définition pour la continuité de fonctions entre espaces vectoriels normés, et ensuite une définition pour les fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui en sera un cas particulier.

Tentons de comprendre ce que signifie qu'un nombre ℓ ne soit pas la limite de f lorsque $x \rightarrow a$. Il s'agit d'inverser la condition (11.14). Le nombre ℓ n'est pas une limite de f pour $x \rightarrow a$ lorsque

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \text{ et } \|f(x) - \ell\| > \varepsilon, \quad (11.16)$$

c'est à dire qu'il existe un certain seuil ε tel qu'on a beau s'approcher aussi proche qu'on veut de a (distance δ), on trouvera toujours un x tel que $f(x)$ n'est pas ε -proche de ℓ .

Lemme 11.10 (Unicité de la limite).

Si ℓ et ℓ' sont deux limites de $f(x)$ lorsque x tend vers a , alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous considérons δ tel que $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout x tel que $\|x - a\| < \delta$. De la même manière, nous prenons δ' tel que $\|x - a\| < \delta'$ implique $\|f(x) - \ell'\| < \varepsilon$. Pour les x tels que $\|x - a\|$ est plus petit que δ et δ' en même temps, nous avons

$$\|\ell - \ell'\| = \|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\| \leq \|\ell - f(x)\| + \|f(x) - \ell'\| < 2\varepsilon, \quad (11.17)$$

et donc $\|\ell - \ell'\| = 0$ parce que c'est plus petit que 2ε pour tout ε . □

Le concept de limite appelle immédiatement celui de continuité.

Définition 11.11.

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. On dit que f est **continue** en a lorsque la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égale à $f(a)$.

On dit que f est continue sur une partie $A \subset D$ si elle est continue en tous les points de A .

La continuité peut évidemment être réécrite avec une formule du même type que celle de la limite.

Proposition 11.12.

La fonction $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en $a \in D$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 \text{ tel que } x \in D \cap B(a, \delta) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon. \quad (11.18)$$

Quasiment toutes les propriétés des limites ont un équivalent concernant la continuité.

Proposition 11.13.

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad (11.19)$$

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \ell_i \quad (11.20)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ où $f_i(x)$ dénote la i -ème composante de $f(x)$ et ℓ_i la i -ème composante de $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Cette proposition revient à dire que la convergence d'une fonction est équivalente à la convergence de chacune de ses composantes.

Démonstration. L'élément clef de la preuve est le fait que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^p$, nous ayons l'inégalité

$$|u_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p |u_k|^2} = \|u\|. \quad (11.21)$$

La norme (dans $\mathbb{R}^p$) d'un vecteur est plus grande ou égale à la valeur absolue de chacune de ses composantes.

Supposons que nous ayons une fonction dont chacune des composantes a une limite en a : $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \ell_i$. Montrons que dans ce cas la fonction f tend vers ℓ . Si nous considérons $\varepsilon > 0$, par définition de la limite de chacune des fonctions f_i , il existent des δ_i tels que

$$\|x - a\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon. \quad (11.22)$$

Notez que la norme à gauche est une norme dans $\mathbb{R}^m$ et que celle à droite est une simple valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Considérons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1, \dots, n}$. Si $\|x - a\| < \delta$, alors

$$\|f(x) - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(x) - \ell_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon^2} = \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon. \quad (11.23)$$

Nous voyons qu'en choisissant les δ_i tels que $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$, nous trouvons $\|f(x) - \ell\| < \sqrt{n}\varepsilon$. Afin d'obtenir $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$, nous choisissons donc les δ_i de telle manière à avoir $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$.

Nous avons donc prouvé que la limite composante par composante impliquait la limite de la fonction. Nous devons encore prouver le sens inverse.

Supposons donc que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, et prouvons que nous ayons $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \ell_i$ pour chaque i . Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\|x - a\| < \delta$ implique $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Avec ces choix, nous avons

$$|f_i(x) - \ell_i| \leq \|f(x) - \ell\| < \varepsilon \quad (11.24)$$

où nous avons utilisé la majoration (11.21) avec $f(x) - \ell$ en guise de u . $\square$

De même, pour la continuité nous avons la proposition suivante :

Proposition 11.14.

Soit une fonction $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si chacune de ses composantes l'est, c'est à dire si et seulement si chacune des fonctions $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en a .

Essayez de prouver cette proposition directement par la définition de la continuité, en suivant pas à pas la démonstration de la proposition 11.13.

Proposition 11.15.

Soit $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et a , un point du domaine de f telle que $f(a) > 0$. Alors il existe un rayon r tel que $f(x) > 0$ pour tout x dans $B(a, r)$.

Cette proposition signifie que si la fonction est strictement positive en un point, alors elle restera strictement positive en tous les points «pas trop loin».

Démonstration. Prenons $\varepsilon = f(a)/2$ dans la définition de la continuité. Il existe donc un rayon δ tel que pour tout x dans $B(a, \delta)$,

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{f(a)}{2}, \quad (11.25)$$

en d'autres termes, $f(x) \in B(f(a), \frac{f(a)}{2})$. Évidemment aucun nombre négatif ne fait partie de cette dernière boule lorsque $f(a)$ est strictement positif. $\square$

Corollaire 11.16.

Si $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m \text{ tels que } f(x) \neq 0\} \quad (11.26)$$

est ouvert.

Démonstration. Soit $x \in A$. Si $x > 0$ (le cas $x < 0$ est laissé en exercice), alors il existe une boule autour de x sur laquelle f reste strictement positive (proposition 11.15). Cette boule est donc contenue dans A . Étant donné qu'autour de chaque point de A nous pouvons trouver une boule contenue dans A , ce dernier est ouvert. $\square$

Exemple 11.17

Soit $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles. Nous allons montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. L'identification entre les vecteurs et les matrices consiste simplement à «déplier» la matrice pour en faire un vecteur. Par exemple, en dimension deux,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (11.27)$$

En dimension 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9. \quad (11.28)$$

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant est un polynôme en les composantes de la matrice. En dimension deux, nous avons

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad (11.29)$$

mais en écriture «dépliée», nous pouvons aussi bien écrire

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc. \quad (11.30)$$

En dimension 3, le déterminant est donc un polynôme des 9 variables qui apparaissent dans le vecteur «déplié». En général, dans $\mathbb{R}^{n^2}$, nous considérons donc le polynôme $\det: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ qui

à un vecteur $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ fait correspondre le déterminant de la matrice obtenue en «repliant» le vecteur X .

Donc dans $\mathbb{R}^{n^2}$, l'ensemble des matrices inversibles est donné par l'ensemble des vecteurs sur lesquels le polynôme $\det$ ne s'annule pas, c'est à dire

$$\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \text{ tels que } \det(X) \neq 0\}. \quad (11.31)$$

Mais le déterminant est un polynôme, et donc une fonction continue. Cet ensemble est par conséquence ouvert par le corollaire 11.16. $\triangle$

La proposition suivante montre que la limite peut «passer à travers» les fonctions continues.

Proposition 11.18 (limite de fonction composée).

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = p \quad (11.32a)$$

$$\lim_{y \rightarrow p} f(y) = q \quad (11.32b)$$

Alors nous avons $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = q$.

Démonstration. Comme presque toute preuve à propos de limite ou de continuité, nous commençons par choisir $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un δ tel que $\|x - a\| \leq \delta$ implique $\|f(g(x)) - q\| \leq \varepsilon$.

La limite (11.32b) impose l'existence d'un $\tilde{\delta}$ tel que $\|y - p\| \leq \tilde{\delta}$ implique $\|f(y) - q\| \leq \varepsilon$, tandis que la limite (11.32a) donne un δ tel que $\|x - a\| \leq \delta$ implique $\|g(x) - p\| \leq \tilde{\delta}$ (nous avons pris $\tilde{\delta}$ en guise de ε dans la définition de la limite pour g).

Avec ces choix, si $\|x - a\| \leq \delta$, alors $\|g(x) - p\| \leq \tilde{\delta}$, et par conséquent,

$$\|f(g(x)) - q\| \leq \varepsilon, \quad (11.33)$$

ce que nous voulions. $\square$

De façon pragmatique, la proposition 11.18 nous fournit une formule pour les limites de fonctions composées :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x)} f(y) \quad (11.34)$$

lorsque f est continue.

Remarque 11.19.

La formule (11.34) ne peut pas être utilisée à l'envers. Il existe des cas où $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = q$, et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$ sans pour autant avoir $\lim_{y \rightarrow q} g(y) = q$. Par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (11.35a)$$

$$f(x) = |x|. \quad (11.35b)$$

Nous avons $(g \circ f)(x) = 2$ pour tout x , ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, mais la limite $\lim_{y \rightarrow 0} g(y)$ n'existe pas.

Théorème 11.20 (Caractérisation de la limite par les suites).

Une fonction $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ admet une limite ℓ en un point d'accumulation a de D si et seulement si pour toute suite (x_n) dans $D \setminus \{a\}$ convergente vers a , la suite $(f(x_n))$ dans $\mathbb{R}^n$ converge vers ℓ .

Démonstration. Supposons d'abord que la fonction ait une limite ℓ lorsque $x \rightarrow a$, et considérons une suite (x_n) dans $D \setminus \{a\}$ convergente vers a . Nous devons montrer que la suite $y_n = f(x_n)$

converge vers ℓ , c'est à dire que si nous choisissons $\varepsilon > 0$ nous devons montrer qu'il existe un N tel que $n > N$ implique $\|y_n - \ell\| = \|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon$.

Nous avons deux hypothèses. La première est la convergence de la fonction et la seconde est la convergence de la suite (x_n) . L'hypothèse de convergence de la fonction nous dit que (le ε a déjà été choisit dans le paragraphe précédent)

$$\exists \delta \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon. \quad (11.36)$$

Une fois choisit ce δ qui «va avec» le ε qui a été choisit précédemment, la définition de la convergence de la suite nous enseigne que

$$\exists N \text{ tel que } n > N \Rightarrow \|x_n - a\| < \delta. \quad (11.37)$$

Récapitulons ce que nous avons fait. Nous avons choisi un ε , et puis nous avons construit un N . Lorsque $n > N$, nous avons $\|x_n - a\| < \delta$. Mais alors, par construction de ce δ , nous avons $\|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon$. Au final, $n > N$ implique bien $\|y_n - \ell\| < \varepsilon$, ce qu'il nous fallait.

Nous supposons maintenant que la fonction f ne converge pas vers ℓ , et nous allons construire une suite d'éléments x_n qui converge vers a sans que $(y_n) = f(x_n)$ ne converge vers ℓ . La fonction f vérifie la condition (11.16). Nous prenons donc un ε tel que $\forall \delta$, il existe un x qui vérifie *en même temps* les deux conditions

$$\begin{cases} 0 < \|x - a\| < \delta \\ \|f(x) - \ell\| > \varepsilon. \end{cases} \quad (11.38a)$$

$$(11.38b)$$

Un tel x existe pour tout choix de δ . Choisissons un n arbitraire et $\delta = \frac{1}{n}$. Nous nommons x_n le x correspondant à ce choix de n . La suite (x_n) ainsi construite converge vers a parce que

$$\|x_n - a\| < \delta_n = \frac{1}{n}, \quad (11.39)$$

donc dès que n est grand, $\|x_n - a\|$ est petit. Mais la suite $y_n = f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ parce que

$$\|f(x_n) - \ell\| > \varepsilon \quad (11.40)$$

pour tout n . La suite y_n ne s'approche donc jamais à moins d'une distance ε de ℓ . $\square$

Nous avons déjà vu par le corollaire 5.112 qu'une suite croissante et bornée était convergente. Il en va de même pour les fonctions.

Proposition 11.21 ([8]).

Si la fonction réelle $f: I = [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est croissante et bornée, alors la limite

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) \quad (11.41)$$

existe et est finie.

Démonstration. Commençons par prouver que si (x_n) est une suite dans I convergent vers b , alors $f(x_n)$ est une suite convergente. Dans un second temps nous allons prouver que si (x_n) et (x'_n) sont deux suites convergent vers b , alors les suites convergentes $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ convergent vers la même limite. Alors le critère séquentiel de la limite d'une fonction conclura (proposition 5.122).

Nous pouvons extraire de x_n une sous-suite croissante $(x_{\alpha(n)})$. Alors la suite $f(x_{\alpha(n)})$ est une suite croissante et majorée, donc convergente par le corollaire 5.112¹. Nommons ℓ la limite et montrons qu'elle est aussi limite de f sur la suite originale.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe K tel que si $n > K$ alors $|f(x_{\alpha(n)}) - \ell| < \epsilon$. Soit K' tel que pour tout $n > K'$ nous ayons $x_n > x_{\alpha(K')}$. Cela est possible parce que la suite est bornée par b et converge

1. En gros nous sommes en train de dire que toute la théorie des fonctions convexes est un vulgaire corollaire de Bolzano-Weierstrass.

vers b : il suffit de prendre K' de telle sorte que $|x_n - b| \leq |x_{\alpha(n)} - b|$. Si $n > K'$ alors $x_n > x_{\alpha(K)}$ et

$$f(x_n) \geq f(x_{\alpha(n)}) \geq \ell - \epsilon; \quad (11.42)$$

en résumé si $n > K$ alors $|f(x_n) - \ell| < \epsilon$. Cela prouve que $f(x_n) \rightarrow \ell$.

Soit maintenant une autre suite (x'_n) convergent également vers b . Comme nous venons de le voir la suite $f(x'_n)$ est convergente et nous nommons ℓ' la limite. Si nous considérons (x''_n) la suite « alternée » $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots)$ alors nous avons encore une suite convergente vers b et donc $f(x''_n) \rightarrow \ell'$.

Mais étant donné que $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ sont des sous-suites, elles doivent converger vers la même valeur. Donc $\ell = \ell' = \ell''$. $\square$

11.1.4 Règles simples de calcul

Les opérations simples passent à la limite, sauf la division pour laquelle il faut faire attention au dénominateur.

Proposition 11.22.

Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$. Alors

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \alpha + \beta,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta,$$

$$(3) \text{ si il existe un voisinage de } a \text{ sur lequel } g \text{ ne s'annule pas, alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Un résultat pratique pour calculer des limites est la

Proposition 11.23.

Quand la limite existe, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon),$$

ce qui correspond à un « changement de variables » dans la limite.

Démonstration. Si $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, par définition,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta \text{ tel que } |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leq \epsilon'. \quad (11.43)$$

La seule subtilité de la démonstration est de remarquer que si $|x - a| \leq \delta$, alors x peut être écrit sous la forme $x = a + \epsilon$ pour un certain $|\epsilon| \leq \delta$. En remplaçant x par $a + \epsilon$ dans la condition 11.43, nous trouvons

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta \text{ tel que } |\epsilon| \leq \delta \Rightarrow |f(a + \epsilon) - A| \leq \epsilon', \quad (11.44)$$

ce qui signifie exactement que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon) = A$. $\square$

Il y a une petite différence de point de vue entre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon)$. Dans le premier cas, on considère $f(x)$, et on regarde ce qu'il se passe quand x se rapproche de a , tandis que dans le second, on considère $f(a)$, et on regarde ce qu'il se passe quand on s'éloigne un tout petit peu de a . Dans un cas, on s'approche très près de a , et dans l'autre on s'en éloigne un tout petit peu. Le contenu de la proposition 11.23 est de dire que ces deux points de vue sont équivalents.

11.2 Limites à plusieurs variables

Prenons une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nous disons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad (11.45)$$

lorsque $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ tel que $\|x - x_0\| \leq \delta$ implique $|f(x) - l| \leq \epsilon$.

Remarquez qu'ici, $x \in \mathbb{R}^n$, et sachez distinguer $\|\cdot\|$, la norme dans $\mathbb{R}^n$ de $|\cdot|$ qui est la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Une autre façon d'exprimer cette définition est que l'ensemble des valeurs atteintes par f dans une boule de rayon δ autour de x_0 n'est pas très loin de l . Nous définissons donc

$$E_\delta = \{f(x) \text{ tel que } x \in B(x_0, \delta)\}. \quad (11.46)$$

Notez que si f n'est pas définie en x_0 , il n'y a pas de valeurs correspondantes au centre de la boule dans E_δ . Ceci est évidemment la situation générique lorsqu'il y a une indétermination à lever dans le calcul de la limite. Nous avons alors que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad (11.47)$$

lorsque $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ tel que

$$\sup\{|v - l| \text{ tel que } v \in E_\delta\} \leq \epsilon. \quad (11.48)$$

Une façon classique de montrer qu'une limite n'existe pas, est de prouver que, pour tout δ , l'ensemble E_δ contient deux valeurs constantes. Si par exemple $0 \in E_\delta$ et $1 \in E_\delta$ pour tout δ , alors aucune valeur de l (même pas $l = \pm\infty$) ne peut satisfaire à la condition (11.48) pour toute valeur de ϵ .

Nous laissons à la sagacité de l'étudiant le soin d'adapter tout ceci pour le cas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.

La proposition suivante semble évidente, mais nous sera tellement utile qu'il est préférable de l'expliciter :

Proposition 11.24.

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine s'écrit comme une réunion finie

$$D = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

où k est un entier. Soit $a \in \text{Adh } D$ tel que $a \in \text{Adh } A_i$ pour tout $i \leq k$, et soit $b \in \mathbb{R}$. Alors, la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

existe et vaut b si et seulement si chacune des limites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A_i}} f(x)$$

existe et vaut b .

Démonstration. On sait déjà que si la limite de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ existe, alors toute restriction à A_i admet la même limite. Il suffit donc de prouver la réciproque.

Par hypothèse, pour tout $i = 1 \dots k$, nous savons que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_i > 0 \text{ tel que } (x \in A_i) \text{ et } (\|x - a\| < \delta_i) \Rightarrow \|f(x) - b\| < \epsilon$$

Si ϵ est fixé, posons $\delta = \min_i \{\delta_i\}$. Nous savons alors que

- (1) pour tout $x \in D$, il existe i tel que $x \in A_i$, et
- (2) si x vérifie $\|x - a\| < \delta$, alors pour tout i , $\|x - a\| < \delta_i$ par définition de δ .

On en déduit que si $x \in D$ et $\|x - a\| < \delta$, alors il existe i tel que $x \in A_i$ et $\|x - a\| < \delta_i$, ce qui implique $\|f(x) - b\| < \epsilon$ et prouve la continuité. $\square$

Exemple 11.25

- (1) Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admette une limite en $a \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'elle y admette une limite à droite et une limite à gauche qui soient égales.

- (2) Une suite (x_k) admet une limite si et seulement si les sous suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Ceci n'est pas une application directe de la proposition, mais la teneur est la même.

△

11.2.1 Règle de l'étau

Une première façon de calculer la limite d'une fonction est de la «coincer» entre deux fonctions dont nous connaissons la limite. Le théorème, que nous acceptons sans démonstration, est le suivant :

Théorème 11.26 (Règle de l'étau).

Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant le point a . Soient f , g et h , trois fonctions définies sur $\mathcal{O}$ (éventuellement pas en a lui-même). Supposons que pour tout $x \in \mathcal{O}$ (à part éventuellement a), nous ayons les inégalités

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x). \quad (11.49)$$

Supposons de plus que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell. \quad (11.50)$$

Alors la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et vaut ℓ .

Nous insistons sur le fait que les deux fonctions entre lesquelles nous coinçons f doivent tendre vers la même valeur.

Cette méthode est très pratique lorsqu'on a des fonctions trigonométriques qui se factorisent parce qu'elles sont toujours majorables par 1.

Exemple 11.27

Prouvons que la fonction $f(x) = x \sin(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers 0. D'abord, nous coinçons la fonction entre deux fonctions connues :

$$0 \leq |x \sin(x)| = |x| |\sin(x)| \leq |x|. \quad (11.51)$$

Donc $|x \sin(x)|$ est coincé entre $g(x) = 0$ et $h(x) = |x|$. Ces deux fonctions tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$, et donc $f(x)$ tend vers zéro. △

Exemple 11.28

Prouver la continuité en $(0, 0)$ de la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.52)$$

Considérons une suite $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ qui tend vers $(0, 0)$. Étant donné que $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$ pour tout x et y , nous avons

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| = \left| \frac{x_n |y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right| \leq |x_n| \rightarrow 0. \quad (11.53)$$

Donc nous avons

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0), \quad (11.54)$$

ce qui prouve que la fonction est continue en $(0, 0)$ par la proposition 5.122. Nous avons utilisé la règle de l'étau (théorème 11.26). △

Nous notons $f \sim g$ pour $x \rightarrow a$ lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Cela signifie que f et g tendent vers la même limite, à la même vitesse. Par exemple nous avons $\ln(1-x) \sim -x$ pour $x \rightarrow 0$ parce que

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1 \quad (11.55)$$

où nous avons utilisé la règle de l'Hospital.

11.2.2 Méthode des chemins

Lorsque la limite n'existe pas, il y a une façon en général assez simple de le savoir, c'est la **méthode des chemins**.

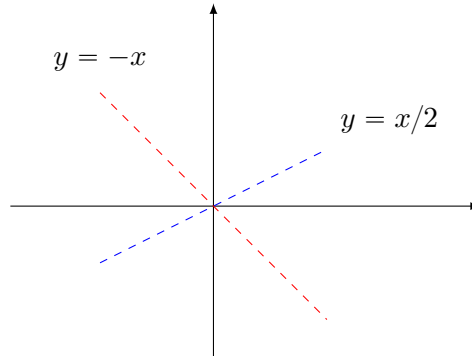


FIGURE 11.1 – Sur toute la droite $y = -x$, la fonction vaut $-1/2$, tandis que sur toute la droite $y = x/2$, elle vaut $\frac{2}{5}$. Il est donc impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$, parce que dans toute boule autour de zéro, il y aura toujours un point de chacune de ces deux droites.

Exemple 11.29

Considérons la fonction

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (11.56)$$

et remarquons que, quelle que soit la valeur de y , cette fonction est nulle lorsque $x = 0$. De la même manière, nous voyons que si $x = y$, alors la fonction vaut $\frac{1}{2}$.

Il est impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$ parce qu'on ne peut pas trouver un ℓ dont on s'approche à la fois en suivant la ligne $x = 0$ et la ligne $x = y$.

Deux autres chemins avec encore deux autres valeurs sont dessinés sur la figure 11.1.

△

Nous pouvons formaliser cet exemple en utilisant le théorème 11.20. Considérons les deux suites $x_n = (0, \frac{1}{n})$ et $y_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Ce sont deux suites dans $\mathbb{R}^2$ qui tendent vers $(0,0)$. Si la fonction f convergerait vers ℓ , alors nous aurions au moins

$$\lim f(x_n) = \ell \quad (11.57a)$$

$$\lim f(y_n) = \ell, \quad (11.57b)$$

mais nous savons que pour tout n , $f(x_n) = f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(y_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Il n'y a donc aucun nombre ℓ qui vérifie les deux équations (11.57) parce que $\lim f(x_n) = 0$ et $\lim f(y_n) = \frac{1}{2}$.

Tout ceci est formalisé et généralisé dans la proposition suivante.

Proposition 11.30.

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et a un point d'adhérence de D . Alors nous avons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad (11.58)$$

2. En fait ce que nous sommes en train de faire est de poser $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$ dans (11.69).

si et seulement si pour toute fonction $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = a$, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma)(t) = \ell. \quad (11.59)$$

Corollaire 11.31.

Soient $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D . Si nous avons deux fonctions $\gamma_1, \gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t) = a \quad (11.60)$$

tandis que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_2)(t), \quad (11.61)$$

ou bien que l'une des deux limites n'existe pas, alors la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow a$ n'existe pas.

Corollaire 11.32.

Soient $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D . Si il existe une fonction $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $\gamma(0) = a$ telle que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma)(t)$ n'existe pas, alors la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.

En ce qui concerne le calcul de limites, la méthode des chemins peut être utilisée de trois façons :

- (1) Dès que l'on trouve une fonction $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma)(t) = \ell$, alors nous savons que si la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, alors cette limite vaut ℓ .
- (2) Dès que l'on a trouvé deux fonctions γ_i qui tendent vers a , mais dont les limites de $\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_i)(t)$ sont différentes, alors la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.
- (3) Dès qu'on trouve un chemin le long duquel il n'y a pas de limite, alors la limite n'existe pas (corollaire 11.32).

La méthode des chemins ne permet donc pas de calculer une limite quand elle existe. Elle permet uniquement de la «deviner», ou bien de prouver que la limite n'existe pas.

Exemple 11.33

Soit à calculer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}. \quad (11.62)$$

Si nous prenons le chemin $\gamma_1(t) = (t, t)$, nous avons bien $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = (0, 0)$, et nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-t}{t+t} = 0. \quad (11.63)$$

Donc si la limite (11.62) existait, elle vaudrait obligatoirement 0. Mais si nous considérons $\gamma_2(t) = (0, t)$, nous avons

$$(f \circ \gamma_2)(t) = \frac{-t}{t} = -1, \quad (11.64)$$

donc si la limite existe, elle doit obligatoirement valoir -1 . Ne pouvant être égale à 0 et à -1 en même temps, la limite (11.62) n'existe pas. $\triangle$

11.2.3 Méthode des coordonnées polaires

La proposition suivante exprime la définition de la limite en d'autres termes, et va être pratique dans le calcul de certaines limites.

Proposition 11.34.

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, a un point d'accumulation de D et $\ell \in \mathbb{R}^n$. Nous définissons

$$E_r = \{f(x) \text{ tel que } x \in B(a, r) \cap D\}, \quad (11.65)$$

et

$$s_r = \sup\{\|v - \ell\| \text{ tel que } v \in E_r\}. \quad (11.66)$$

Alors nous avons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{r \rightarrow 0} s_r = 0$.

Dans cette proposition, E_r représente l'ensemble des valeurs atteintes par f dans un rayon r autour de a . Le nombre s_r sélectionne, parmi toutes ces valeurs, celle qui est la plus éloignée de ℓ et donne la distance. En d'autres termes, s_r est la distance maximale entre $f(x)$ et ℓ lorsque x est à une distance au maximum r de a .

Lorsque nous avons affaire à une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, cette proposition nous permet de calculer facilement les limites en passant aux coordonnées polaires.

Exemple 11.35

Reprenons la fonction de l'exemple 11.29 :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \quad (11.67)$$

Son domaine est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Nous voulons calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. Écrivons la définition de E_r :

$$E_r = \{f(x, y) \text{ tel que } (x, y) \in B((0, 0), r)\}. \quad (11.68)$$

Les points de la boule sont, en coordonnées polaires, les points de la forme (ρ, θ) avec $\rho < r$. La chose intéressante est que $f(\rho, \theta)$ est relativement simple (plus simple que la fonction départ). En effet en remplaçant tous les x par $\rho \cos(\theta)$ et tous les y par $\rho \sin(\theta)$, et en utilisant le fait que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, nous trouvons

$$f(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\rho^2} = \cos(\theta) \sin(\theta). \quad (11.69)$$

Cela signifie que

$$E_r = \{\cos(\theta) \sin(\theta) \text{ tel que } \theta \in [0, 2\pi[\}. \quad (11.70)$$

Prenons ℓ quelconque. Le nombre s_r est le supremum des

$$\|\ell - \cos(\theta) \sin(\theta)\| \quad (11.71)$$

lorsque θ parcourt $[0, 2\pi]$. Nous ne sommes pas obligés de calculer la valeur exacte de s_r . Ce qui compte ici est que s_r ne vaut certainement pas zéro, et ne dépend pas de r . Donc il est impossible d'avoir $\lim_{r \rightarrow 0} s_r = 0$, et la fonction donnée n'a pas de limite en $(0, 0)$. $\triangle$

Nous pouvons retenir cette règle pour calculer les limites lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

- (1) passer en coordonnées polaires, c'est à dire remplacer x par $\rho \cos(\theta)$ et y par $\rho \sin(\theta)$;
- (2) nous obtenons une fonction g de ρ et θ . Si la limite $\lim_{r \rightarrow 0} g(r, \theta)$ n'existe pas ou dépend de θ , alors la fonction n'a pas de limite. Si on peut majorer g par une fonction ne dépendant pas de θ , et que cette fonction a une limite lorsque $r \rightarrow 0$, alors cette limite est la limite de la fonction.

La vraie difficulté de la technique des coordonnées polaire est de trouver le supremum de E_r , ou tout au moins de montrer qu'il est borné par une fonction qui a une limite qui ne dépend pas de θ . Une de situations classiques dans laquelle c'est facile est lorsque la fonction se présente comme une fonction de r multiplié par une fonction de θ .

Exemple 11.36

Soit à calculer la limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right). \quad (11.72)$$

Le passage aux coordonnées polaires donne

$$f(r, \theta) = r^2 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (11.73)$$

Déterminer le supremum de cela est relativement difficile. Mais nous savons que de toutes façons, la quantité $\sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ est bornée par 1. Donc

$$\|f(r, \theta)\| \leq r^2. \quad (11.74)$$

Maintenant la règle de l'étau montre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ est zéro.

La situation vraiment gênante serait celle avec une fonction de θ qui risque de s'annuler dans un dénominateur. $\triangle$

Exemple 11.37

Soit à calculer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x - y}. \quad (11.75)$$

Le passage en polaires donne

$$f(r, \theta) = \frac{r^2}{r(\cos(\theta) - \sin(\theta))} = \frac{r}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}. \quad (11.76)$$

Certes pour chaque θ nous avons $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = 0$, mais il ne faut pas en déduire trop vite que la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ vaut zéro parce que prendre la limite $r \rightarrow 0$ avec θ fixé revient à prendre la limite le long de la droite d'angle θ .

Il n'est pas possible de majorer $f(r, \theta)$ par une fonction ne dépendant pas de θ parce que cette fonction tend vers l'infini lorsque $\theta \rightarrow \pi/4$. Est-ce que cela veut dire que la limite n'existe pas ? Cela veut en tout cas dire que la méthode des coordonnées polaires ne parvient pas à résoudre l'exercice. Pour conclure, il faudra encore un peu travailler.

Nous pouvons essayer de calculer le long d'un chemin plus général $(r(t), \theta(t))$. Choisissons $r(t) = t$ puis cherchons $\theta(t)$ de telle sorte à avoir

$$\cos \theta(t) - \sin \theta(t) = t^2. \quad (11.77)$$

Le mieux serait de résoudre cette équation pour trouver $\theta(t)$. Mais en réalité il n'est pas nécessaire de résoudre : montrer qu'il existe une solution suffit. Nous pouvons supposer que $t^2 < 1$. Pour $\theta = \pi/4$ nous avons $\cos(\theta) - \sin(\theta) = 0$ et pour $\theta = 0$ nous avons $\cos(\theta) - \sin(\theta) = 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous enseigne alors qu'il existe une valeur de θ qui résout l'équation (11.77).

Pour être rigoureux, nous devons aussi montrer que la fonction $\theta(t)$ est continue. Pour cela il faudrait utiliser le théorème de la fonction implicite. Nous verrons dans l'exemple 11.39 comment s'en sortir sans théorème de la fonction implicite, au prix de plus de calculs. $\triangle$

Exemple 11.38

Considérons encore la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}. \quad (11.78)$$

Une mauvaise idée pour prouver que la limite n'existe pas pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ est de considérer le chemin (t, t) . En effet, la fonction n'existe pas sur ce chemin. Or la méthode des chemins parle uniquement de chemins contenus dans le domaine de la fonction. $\triangle$

Exemple 11.39

Revenons encore et toujours sur la fonction

$$(x^2 + y^2)/(x - y). \quad (11.79)$$

Nous prouvons que la limite n'existe pas en trouvant des chemins le long desquels les limites sont différentes. Si nous essayons le chemin (t, kt) avec k constant, nous trouvons

$$f(t, kt) = \frac{t(1 + k^2)}{1 - k}. \quad (11.80)$$

La limite $t \rightarrow 0$ est hélas toujours 0. Nous ne pouvons donc pas conclure.

Nous allons maintenant utiliser la même technique que celle utilisée en coordonnées polaires. Vous noterez que dans ce cas, travailler en cartésiennes donne lieu à des calculs plus longs. L'astuce consiste à prendre k non constant et à chercher par exemple $k(t)$ de façon à avoir

$$\frac{1 + k(t)^2}{1 - k(t)} = \frac{1}{t}. \quad (11.81)$$

Avec une telle fonction, la fonction $t \mapsto f(t, tk(t))$ serait la constante 1. L'équation à résoudre pour k est

$$tk^2 + k + (t - 1) = 0, \quad (11.82)$$

et les solutions sont

$$k(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4t(t-1)}}{2t}. \quad (11.83)$$

Nous proposons donc les chemins

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4t(t-1)}}{2} \end{pmatrix} \quad (11.84)$$

Nous devons vérifier deux points. D'abord que ce chemin est bien défini, et ensuite que $tk(t)$ tend bien vers zéro lorsque $t \rightarrow 0$ (sinon $(t, k(t)t)$ n'est pas un chemin passant par $(0, 0)$). Lorsque t est petit, ce qui se trouve sous la racine est proche de 1 et ne pose pas de problèmes. Ensuite,

$$\lim_{t \rightarrow 0} tk(t) = \frac{-1 \pm 1}{2}. \quad (11.85)$$

En choisissant le signe $+$, nous trouvons un chemin qui nous convient.

Ce que nous avons prouvé est que

$$f\left(t, \frac{-1 + \sqrt{1 - 4t(t-1)}}{2}\right) = 1 \quad (11.86)$$

pour tout t . Le long de ce chemin, la limite de f est donc 1. Cette limite est différente des limites obtenues le long de chemins avec k constant. La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe donc pas. $\triangle$

Exemple 11.40

Considérons la fonction (figure 11.2)

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (11.87)$$

et cherchons la limite $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Le passage en coordonnées polaires donne

$$f(\rho, \theta) = \rho \sin \frac{1}{\rho}. \quad (11.88)$$

Pour calculer la limite de cela lorsque $\rho \rightarrow 0$, nous remarquons que

$$0 \leq \left| \rho \sin \frac{1}{\rho} \right| \leq \rho \quad (11.89)$$

parce que $\sin(\frac{1}{\rho}) \leq 1$ quel que soit ρ . Or évidemment $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0$, donc la limite de la fonction (11.88) est zéro et ne dépend pas de θ . Nous en concluons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. $\triangle$

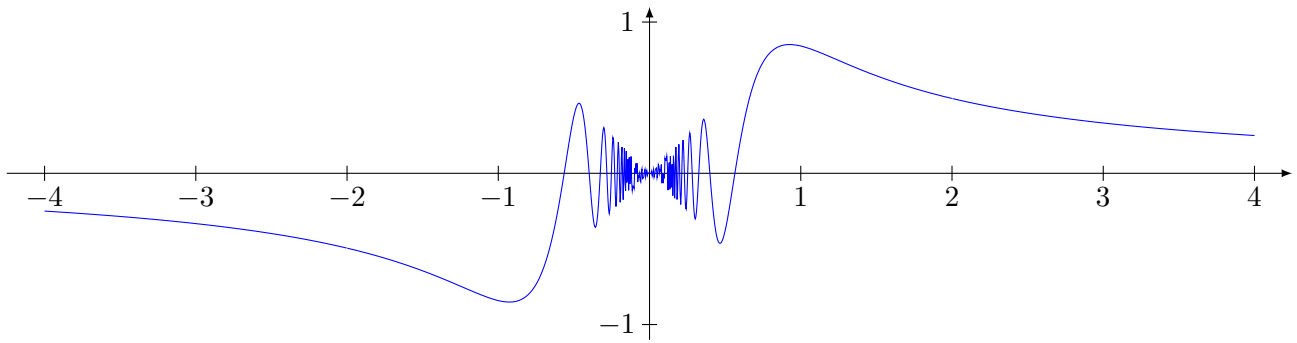


FIGURE 11.2 – La fonction de l'exemple 11.40.

11.2.4 Méthode du développement asymptotique

Nous savons que nous pouvons développer certaines fonctions en série grâce au développement de Taylor (théorème 11.204). Lorsque nous avons une limite à calculer, nous pouvons remplacer certaines parties de la fonction à traiter par la formule (11.457b). Cela est très utile pour comparer des fonctions trigonométriques à des polynômes.

Exemple 11.41

La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ est bien connue. Une manière de la prouver est d'écrire

$$\sin(x) = x + h(x) \quad (11.90)$$

avec $h \in o(x)$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)/x = 0$. Alors nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = 1. \quad (11.91)$$

△

L'utilisation de la proposition 11.18 permet d'utiliser cette technique dans le cadre de limites à plusieurs variables. Reprenons l'exemple 11.41 un tout petit peu modifié :

Exemple 11.42

Soit à calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ où

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}. \quad (11.92)$$

La première chose à faire est de voir f comme la composée de fonctions $f = f_1 \circ f_2$ avec

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\sin(t)}{t} \end{aligned} \quad (11.93)$$

et

$$\begin{aligned} f_2: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto xy. \end{aligned} \quad (11.94)$$

Étant donné que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0$, nous avons $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{t \rightarrow 0} f_1(t) = 1$.

△

11.2.5 Continuité

Nous allons considérer trois approches différentes de la continuité. La première sera de définir la continuité de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ au moyen du critère usuel. Ensuite, nous définiront la

continuité des applications entre n'importe quels espaces métriques, et nous montrerons que les deux définitions sont équivalentes dans le cas des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Enfin, un peu plus tard nous verrons que la continuité peut également être vue en termes de limites. Encore une fois nous verrons que dans le cas de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ cette troisième approche est équivalente aux deux premières.

La définition de fonction continue est la définition 5.52.

Nous allons donc dire qu'une fonction est continue quand plus x s'approche de a en suivant la courbe, plus $f(x)$ s'approche de $f(a)$. Voici la définition précise.

Définition 11.43.

Nous disons que la fonction $x \mapsto f(x)$ est **continue en a** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{ tel que } (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon. \quad (11.95)$$

Définition 11.44.

Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et un point a dans D . Nous disons que f est **continue** lorsque f possède une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

En remplaçant ℓ par $f(a)$ dans la définition de la limite, nous exprimons la continuité de f en a par la façon suivante. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall x \in D$,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon. \quad (11.96)$$

Nous allons maintenant étudier quelques conséquences de cette définition.

- (1) D'abord on voit que la continuité n'a été définie qu'en un point. On peut dire que la fonction f est continue *en tel point donné*, mais nous n'avons pas dit ce qu'est une fonction continue *dans son ensemble*.
- (2) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est **continue sur l'intervalle I** si elle est continue en chaque point de I .
- (3) Comme la définition de f continue en a fait intervenir $f(x)$ pour tous les x pas trop loin de a , il faut au moins déjà que f soit définie sur ces x . En d'autres termes, dire que f est continue en a demande que f existe sur un intervalle autour de a .
Ceci couplé à la définition précédente laisse penser qu'il est surtout intéressant d'étudier les fonctions qui sont continues sur un intervalle.
- (4) L'intuition comme quoi une fonction continue doit pouvoir être tracée sans lever la main correspond aux fonctions continues sur des intervalles. Au moins sur l'intervalle où elle est continue, elle est traçable en un morceau.

Nous allons démontrer maintenant une série de petits résultats qui permettent de simplifier la démonstration de la continuité de fonctions.

Théorème 11.45.

Si la fonction f est continue au point a , alors la fonction λf est également continue en a .

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous avons besoin d'un $\delta > 0$ tel que pour chaque x à moins de δ de a , la fonction λf soit à moins de ϵ de $(\lambda f)(a) = \lambda f(a)$. Étant donné que la fonction f est continue en a , on sait déjà qu'il existe un δ_1 (nous notons δ_1 afin de ne pas confondre ce nombre dont on est sûr de l'existence avec le δ que nous sommes en train de chercher) tel que

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon_1.$$

Hélas, ce δ_1 n'est pas celui qu'il faut parce que nous travaillons avec λf au lieu de f , ce qui fait qu'au lieu d'avoir $|f(x) - f(a)|$, nous avons $|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(a)|$. Ce que δ_1 fait avec (λf) , c'est

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leq |\lambda| \epsilon_1.$$

Ce que nous apprend la continuité de f , c'est que pour chaque choix de ϵ_1 , on a un δ_1 qui fait cette implication. Comme cela est vrai pour chaque choix de ϵ_1 , essayons avec $\epsilon_1 = \epsilon/|\lambda|$ pour voir ce que ça donne. Nous avons donc un δ_1 qui fait

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leq |\lambda| \epsilon_1 = \epsilon.$$

Ce δ_1 est celui qu'on cherchait. □

Théorème 11.46.

Si f et g sont deux fonctions continues en a , alors la fonction $f + g$ est également continue en a .

Démonstration. La continuité des fonctions f et g au point a fait en sorte que pour tout choix de ϵ_1 et ϵ_2 , il existe δ_1 et δ_2 tels que

$$(|x - a| \leq \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon_1.$$

et

$$(|x - a| \leq \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| \leq \epsilon_2.$$

La quantité que nous souhaitons analyser est $|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)|$. Tout le jeu de la démonstration de la continuité est de triturer cette expression pour en tirer quelque chose en termes de ϵ_1 et ϵ_2 . Si nous supposons avoir pris $|x - a|$ plus petit en même temps que δ_1 et que δ_2 , nous avons

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$$

en utilisant la formule générale $|a + b| \leq |a| + |b|$. Maintenant si on choisit ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 < \epsilon$, et les δ_1 , δ_2 correspondants, on a que

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leq \epsilon,$$

pourvu que $|x - a|$ soit plus petit que δ_1 et δ_2 . Le bon δ à prendre est donc le minimum de δ_1 et δ_2 qui eux-même sont donnés par un choix de ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \epsilon$. □

Pour résumer ces deux théorèmes, on dit que si f et g sont continues en a , alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est également continue en a pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Parmi les propriétés immédiates de la continuité d'une fonction, nous avons ceci qui est souvent bien utile.

Corollaire 11.47.

Si la fonction f est continue en a et si $f(a) > 0$, alors f est positive sur un intervalle autour de a .

Démonstration. Prenons $\epsilon < f(a)$ et voyons³ ce que la continuité de f en a nous offre : il existe un δ tel que

$$(|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon < f(a).$$

Nous en retenons que sur un intervalle (de largeur δ), nous avons $|f(x) - f(a)| \leq f(a)$. Par hypothèse, $f(a) > 0$, donc si $f(x) < 0$, alors la différence $f(x) - f(a)$ donne un nombre encore plus négatif que $-f(a)$, c'est à dire que $|f(x) - f(a)| > f(a)$, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. D'où la conclusion que $f(x) > 0$. □

11.2.6 La fonction la moins continue du monde

Parmi les exemples un peu sales de fonctions non continues, il y a celle-ci :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. ici, nous insistons sur le fait que nous prenons ϵ *strictement* plus petit que $f(a)$.

Par exemple, $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, et⁴ $\chi_{\mathbb{Q}}(\pi) = \chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) = 0$. Malgré que $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, il n'existe *aucun* voisinage de 1 sur lequel la fonction reste proche de 1, parce que tout voisinage va contenir au moins un irrationnel. À chaque millimètre, cette fonction fait une infinité de bonds !

Cette fonction n'est donc continue nulle part.

À partir de là, nous pouvons construire la fonction suivante qui n'est continue qu'en un point :

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est continue en zéro. En effet, prenons $\delta > 0$; il nous faut un ϵ tel que $|x| \leq \epsilon$ implique $f(x) \leq \delta$ parce que $f(0) = 0$. Bon ben prendre simplement $\epsilon = \delta$ nous contente. Cette fonction est donc très facilement continue en zéro.

Et pourtant, dès que l'on s'écarte un tant soit peu de zéro, elle fait des bonds une infinité de fois par milliardième de millimètre ! Cette fonction est donc la plus discontinue du monde en tous les points sauf un (zéro) où elle est une fonction continue !

11.2.7 Approche topologique

Nous avons vu que sur tout ensemble métrique, nous pouvons définir ce qu'est un ouvert : c'est un ensemble qui contient une boule ouverte autour de chacun de ses points. Quand on est dans un ensemble ouvert, on peut toujours un peu se déplacer sans sortir de l'ensemble.

Le théorème suivant est une très importante caractérisation des fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) en termes de topologie, c'est à dire en termes d'ouverts.

Théorème 11.48.

Si I est un intervalle ouvert contenu dans $\text{dom } f$, alors f est continue sur I si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$, l'image inverse $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

Par abus de langage, nous exprimons souvent cette condition par « une fonction est continue si et seulement si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert ».

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons transformer le critère de continuité en termes de boules ouvertes, et ensuite, nous passeront à la démonstration proprement dite. Le critère de continuité de f au point x dit que

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } (|x - a| < \epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta. \quad (11.97)$$

Cette condition peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } a \in B(x, \epsilon) \Rightarrow f(a) \in B(f(x), \delta),$$

ou encore

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon \text{ tel que } f(B(x, \epsilon)) \subset B(f(x), \delta). \quad (11.98)$$

Jusque ici, nous n'avons fait que du jeu de notations. Nous avons exprimé en termes de topologie des inégalités analytiques. Si tu veux, tu peux retenir cette condition (11.98) comme définition d'une fonction continue en x . Si tu choisis de vivre comme ça, tu dois être capable de retrouver (11.97) à partir de (11.98).

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème.

D'abord, supposons que f est continue sur I , et prenons $\mathcal{O}$, un ouvert quelconque. Le but est de prouver que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela, nous prenons un point $x_0 \in f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ et nous allons trouver un ouvert autour de ce point contenu dans $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$. Nous écrivons $y_0 = f(x_0)$. Évidemment, $y_0 \in \mathcal{O}$, donc on a une boule autour de y_0 qui est contenue dans $\mathcal{O}$, soit donc $\delta > 0$ tel que

$$B(y_0, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

4. Pour prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est pas trop compliqué, mais pour prouver que π ne l'est pas non plus, il faudra encore manger de la soupe.

Par hypothèse, f est continue en x_0 , et nous pouvons donc y appliquer le critère (11.98). Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$f(B(x_0, \epsilon)) \subset B(f(x_0), \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Cela prouve que $B(x_0, \epsilon) \subset f|_I^{-1}(\mathcal{O})$.

Dans l'autre sens, maintenant. Nous prenons $x_0 \in I$ et nous voulons prouver que f est continue en x_0 , c'est à dire que pour tout δ nous cherchons un ϵ tel que $f(B(x_0, \epsilon)) \subset B(f(x_0), \delta)$. Oui, mais $B(f(x_0), \delta)$ est ouverte, donc par hypothèse, $f|_I^{-1}(B(f(x_0), \delta))$ est ouvert, inclus à I et contient x_0 . Donc il existe un ϵ tel que

$$B(x_0, \epsilon) \subset f|_I^{-1}(B(f(x_0), \delta)),$$

et donc tel que

$$f(B(x_0, \epsilon)) \subset B(f(x_0), \delta),$$

ce qu'il fallait prouver. □

Lemme 11.49.

L'image d'un ensemble connexe par une fonction continue est connexe.

Démonstration. Nous allons encore faire la contraposée. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(A)$ ne soit pas connexe. Nous allons prouver que A elle-même n'est pas connexe. Dire que $f(A)$ n'est pas connexe, c'est dire qu'il existe $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, deux ouverts disjoints qui recouvrent $f(A)$. Je prétends que $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ sont ouverts, disjoints et qu'ils recouvrent A .

- Ces deux ensembles sont ouverts parce qu'ils sont images inverses d'ouverts par une fonction continue (théorème 11.48).
- Si $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)$, alors $f(x) \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont disjoints. Il n'y a donc pas d'éléments dans l'intersection de $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et de $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$.
- Si $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ne recouvrent pas A , il existe un x dans A qui n'est dans aucun des deux. Dans ce cas, $f(x)$ est dans $f(A)$, mais n'est ni dans $\mathcal{O}_1$, ni dans $\mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que ces deux derniers recouvrent $f(A)$.

Nous déduisons que A n'est pas connexe. Et donc le lemme. □

Théorème 11.50 (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit f , une fonction continue sur $[a, b]$, et supposons que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout y tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$, il existe un x entre a et b tel que $f(x) = y$.

Démonstration. Nous savons que $[a, b]$ est connexe parce que c'est un intervalle (proposition 5.103). Donc $f([a, b])$ est connexe (lemme 11.49) et donc est un intervalle (à nouveau la proposition 5.103). Étant donné que $f([a, b])$ est un intervalle, il contient toutes les valeurs intermédiaires entre n'importe quels deux de ses éléments. En particulier toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. □

Corollaire 11.51.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soit I un intervalle et $\alpha < \beta \in f(I)$ et $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Nous considérons $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires 11.50, il existe $t \in]a, b[$ tel que $f(t) = \gamma$. Par conséquent $\gamma \in f(I)$. □

Corollaire-définition 11.52 (Existence de la racine carrée).

*Si $x \geq 0$ alors il existe un unique $y \geq 0$ tel que $y^2 = x$. Ce nombre est noté $\sqrt{x}$ et est nommé **racine carrée** de x .*

Démonstration. La fonction $f: t \mapsto t^2$ est continue et strictement croissante. Nous avons $f(0) = 0$ et ⁵ $f(x+1) > x$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 11.50 nous assure qu'il existe un unique $y \in [0, x+1]$ tel que $f(y) = x$. $\square$

Nous avons déjà vu dans la proposition 1.22 que $\sqrt{2}$ était irrationnel. En fait le théorème suivant va nous montrer que le nombre $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

Théorème 11.53.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est un carré parfait.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel. Le théorème 2.34 nous donne $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tels que $\sqrt{n} = p/q$. La proposition 2.35 nous enseigne de plus que p^2 et q^2 sont premiers entre eux. Nous avons

$$p^2 = nq^2. \quad (11.99)$$

Le nombre q est alors un diviseur commun de q^2 et de p . Donc $q = 1$ et $n = p^2$ est un carré parfait. $\square$

11.2.8 Continuité de la racine carré, invitation à la topologie induite

Pourquoi nous intéresser particulièrement à cette fonction ? Parce qu'elle a une sale condition d'existence : son domaine de définition n'est pas ouvert. Or dans tous les théorèmes de continuité d'approche topologique que nous avons vus, nous avons donné des conditions *pour tout ouvert*. Nous nous attendons donc à avoir des difficultés avec la continuité de $\sqrt{x}$ en zéro.

Prenons I , n'importe quel intervalle ouvert dans $\mathbb{R}^+$, et voyons que la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \quad (11.100)$$

est continue sur I . Remarque déjà que si I est un ouvert dans $\mathbb{R}^+$, il ne peut pas contenir zéro. Avant de nous lancer dans notre propos, nous prouvons un lemme qui fera tout le travail ⁶.

Lemme 11.54.

Soit $\mathcal{O}$, un ouvert dans $\mathbb{R}^+$. Alors $\mathcal{O}^2 = \{x^2 \text{ tel que } x \in \mathcal{O}\}$ est également ouvert.

Démonstration. Un élément de $\mathcal{O}^2$ s'écrit sous la forme x^2 pour un certain $x \in \mathcal{O}$. Le but est de trouver un ouvert autour de x^2 qui soit contenu dans $\mathcal{O}^2$. Étant donné que $\mathcal{O}$ est ouvert, on a une boule centrée en x contenue dans $\mathcal{O}$. Nous appelons δ le rayon de cette boule :

$$B(x, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Étant donné que cet ensemble est connexe, nous savons par le lemme 11.49 que $B(x, \delta)^2$ est également connexe (parce que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue). Son plus grand élément est $(x + \delta)^2 = x^2 + \delta^2 + 2x\delta > x^2 + \delta^2$, et son plus petit élément est $(x - \delta)^2 = x^2 + \delta^2 - 2x\delta$.

Ce qui serait pas mal, c'est que ces deux bornes entourent x^2 ; de cette façon elles définiraient un ouvert autour de x^2 qui soit dans $\mathcal{O}^2$. Hélas, c'est pas gagné que $x^2 + \delta^2 - 2x\delta$ soit plus petit que x^2 .

Heureusement, en fait c'est vrai parce que d'une part, du fait que $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^+$, on a $x > 0$, et d'autre part, pour que $\mathcal{O}$ soit positif, il faut que $\delta < x$. Donc on a évidemment que $\delta < 2x$, et donc que

$$x^2 + \delta^2 - 2x\delta = x^2 + \underbrace{\delta(\delta - 2x)}_{<0} < x^2.$$

Donc nous avons fini : l'ensemble

$$B(x, \delta)^2 =]x^2 + \delta^2 - 2x\delta, x^2 + \delta^2 + 2x\delta[\subset \mathcal{O}^2$$

5. Faites deux cas suivant $x \geq 1$ ou non si vous le voulez, moi je prends $x + 1$.

6. C'est toujours ingrat d'être un lemme : on fait tout le travail et c'est toujours le théorème qui est nommé.

est un intervalle qui contient x^2 , et donc qui contient une boule ouverte centrée en x^2 .

□

Maintenant nous pouvons nous attaquer à la continuité de la racine carrée sur tout ouvert positif en utilisant le théorème 11.48. Soit $\mathcal{O}$ n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}$, et prouvons que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Par définition,

$$f|_I^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in I \text{ tel que } \sqrt{x} \in \mathcal{O}\}. \quad (11.101)$$

Maintenant c'est un tout petit effort que de remarquer que $f|_I^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^2 \cap I$. De là, on a gagné parce que $\mathcal{O}^2$ et I sont des ouverts. Or l'intersection de deux ouverts est ouvert.

Nous n'en avons pas fini avec la fonction $\sqrt{x}$. Nous avons la continuité de la racine carrée pour tous les réels strictement positifs. Il reste à pouvoir dire que la fonction est continue en zéro malgré qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de zéro.

Il est possible de dire que la racine carrée est continue en 0, malgré qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de 0...en tout cas pas un ouvert au sens que tu as en tête. Nous allons rentabiliser un bon coup notre travail sur les espaces métriques.

Nous pouvons définir la notion de boule ouverte sur n'importe quel espace métrique A en disant que

$$B(x, r) = \{y \in A \text{ tel que } d(x, y) < r\}.$$

Définition 11.55.

Soit $f: A \rightarrow B$, une application entre deux espaces métriques. Nous disons que f est **continue** au point $a \in A$ si $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$ tel que

$$f(B(a, \epsilon)) \subset B(f(a), \delta). \quad (11.102)$$

Tu reconnais évidemment la condition (11.98). Nous l'avons juste recopiée. Tu remarqueras cependant que cette définition généralise immensément la continuité que l'on avait travaillé à propos des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Maintenant tu peux prendre n'importe quel espace métrique et c'est bon.

Nous n'allons pas faire un tour complet des conséquences et exemples de cette définition. Au lieu de cela, nous allons juste montrer en quoi cette définition règle le problème de la continuité de la racine carrée en zéro.

La fonction que nous regardons est

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \quad (11.103)$$

Mais cette fois, nous ne la voyons pas comme étant une fonction dont le domaine est une partie de $\mathbb{R}$, mais comme fonction dont le domaine est $\mathbb{R}^+$ vu comme un espace métrique en soi. Quelles sont les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^+$ autour de zéro? Réponse : la boule ouverte de rayon r autour de zéro dans $\mathbb{R}^+$ est :

$$B(0, r)_{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } d(x, 0) < r\} = [0, r[.$$

Cet intervalle est un ouvert. Aussi incroyable que cela puisse paraître !

Testons la continuité de la racine carrée en zéro dans ce contexte. Il s'agit de prendre $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^+$ et $a = 0$ dans la définition 11.55. Nous avons que $B(\sqrt{0}, \delta) = B(0, \delta) = [0, \delta[$ pour la topologie de $\mathbb{R}^+$.

Il s'agit maintenant de trouver un ϵ tel que $f(B(0, \epsilon)) \subset [0, \delta[$. Par définition, nous avons que

$$f(B(0, \epsilon)) = [0, \sqrt{\epsilon}[,$$

le problème revient donc à trouver ϵ tel que $\sqrt{\epsilon} \leq \delta$. Prendre $\epsilon < \delta^2$ fait l'affaire.

Donc voilà. Au sens de la topologie propre à $\mathbb{R}^+$, nous pouvons dire que la fonction racine carrée est partout continue.

11.2.9 Limites en des nombres

Si tu regardes la fonction $f(x) = 5x + 3$, tu ne serais pas étonnée si je te disais par exemple que

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 53 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3. \quad (11.104)$$

En effet, plus x est proche de 10, plus $f(x)$ est proche de 53 et plus x est proche de 0, plus $f(x)$ est proche de 3. Pas grand chose de neuf sous le Soleil.

Oui, mais l'intérêt d'introduire le concept de limite dans le cas de l'infini était qu'on ne peut pas bêtement calculer $f(\infty)$. Il fallait donc une astuce pour parler du comportement de f quand on s'approche de l'infini.

Nous posons la définition suivante.

Définition 11.56.

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on dit que la fonction f **tend vers l'infini quand x tend vers a** si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \text{ tel que } (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \geq M \text{ quand } x \in \text{dom } f.$$

Cela signifie que l'on demande que dès que x est assez proche de a (c'est à dire dès que $|x - a| \leq \delta$), alors $f(x)$ est plus grand que M , et que l'on peut trouver un δ qui fait ça pour n'importe quel M . Une autre façon de le dire est que pour toute hauteur M , on peut trouver un intervalle de largeur δ autour de a ⁷ tel que sur cet intervalle, la fonction f est toujours plus grande que M .

Montrons sur un dessin pourquoi je disais que la fonction $x \rightarrow 1/x$ n'est pas de ce type.

Le problème est qu'il n'existe par exemple aucun intervalle autour de 0 sur lequel f serait toujours plus grande que 10. En effet n'importe quel intervalle autour de 0 contient au moins un nombre négatif. Or quand x est négatif, f n'est certainement pas plus grande que 10. Nous y reviendrons.

Pour l'instant, montrons que la fonction $f(x) = 1/x^2$ est une fonction qui vérifie la définition 11.56. Avant de prendre n'importe quel M , prenons par exemple 100. Nous avons besoin d'un intervalle autour de zéro sur lequel f est toujours plus grande que 100. C'est vite vu que $f(0.1) = f(-0.1) = 100$, donc l'intervalle $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ est le bon. Partout dans cet intervalle, f est plus grande que 100. Partout ? Ben non : en $x = 0$, la fonction n'est même pas définie, donc c'est un peu dur de dire qu'elle est plus grande que 100. C'est pour cela que nous avons ajouté la condition « quand $x \in \text{dom } f$ » dans la définition de la limite.

Prenons maintenant un $M \in \mathbb{R}$ arbitraire, et trouvons un intervalle autour de 0 sur lequel f est toujours plus grande que M . La réponse est évidemment l'intervalle de largeur $1/\sqrt{M}$, c'est à dire

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}} \right].$$

11.2.10 Limites quand tout va bien

D'abord définissons ce qu'on entend par la limite d'une fonction en un point quand il n'y a aucun infini en jeu.

Définition 11.57.

On dit que la fonction f **tend vers b quand x tend vers a** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{ tel que } (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon \text{ quand } x \in \text{dom } f.$$

Dans ce cas, nous notons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \quad (11.105)$$

7. C'est à dire un intervalle de la forme $[a - \delta, a + \delta]$.

Commençons par un exemple très simple : prouvons que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. C'est donc $a = b = 0$ dans la définition. Prenons $\epsilon > 0$, et trouvons un intervalle autour de zéro tel que partout dans l'intervalle, $x \leq \epsilon$. Bon ben c'est clair que $\delta = \epsilon$ fonctionne.

Plus compliqué maintenant, mais toujours sans surprises.

Proposition 11.58.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On veut un intervalle de largeur δ autour de zéro tel que x^2 soit plus petit que ϵ sur cet intervalle. Cette fois-ci, le δ qui fonctionne est $\delta = \sqrt{\epsilon}$. En effet un élément de l'intervalle $[-\delta, \delta]$ est un r de valeur absolue plus petite ou égale à δ :

$$|r| \leq \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

En prenant le carré de cette inégalité on a :

$$r^2 \leq \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

Calculer et prouver des valeurs de limites, mêmes très simples, devient vite de l'arrachage de cheveux à essayer de trouver le bon δ en fonction de ϵ si on n'a pas quelques théorèmes généraux. Nous allons donc maintenant en prouver quelque-uns.

Théorème 11.59.

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \tag{11.106}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda b \tag{11.107}$$

pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Afin de prouver la propriété (11.107), il faut trouver un δ tel que pour tout x dans $[a - \delta, a + \delta]$, on ait $|(\lambda f)(x) - \lambda b| \leq \epsilon$. Cette dernière inégalité est équivalente à $|\lambda| |f(x) - b| \leq \epsilon$. Nous devons donc trouver un δ tel que

$$|f(x) - b| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}. \tag{11.108}$$

soit vraie pour tout x dans $[a - \delta, a + \delta]$. Mais l'hypothèse (11.106) dit précisément qu'il existe un δ tel que pour tout x dans $[a - \delta, a + \delta]$ on ait cette inégalité. □

Théorème 11.60.

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \tag{11.109a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2, \tag{11.109b}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b_1 + b_2. \tag{11.110}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe δ_1 tel que

$$|f(x) - b_1| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{11.111}$$

dès que $|x - a| \leq \delta_1$. Il existe aussi δ_2 tel que

$$|g(x) - b_2| \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (11.112)$$

dès que $|x - a| \leq \delta_2$. Tu notes l'astuce de prendre $\epsilon/2$ dans la définition de limite pour f et g . Maintenant, ce qu'on voudrait c'est un δ tel que l'on ait $|(f+g)(x) - (b_1+b_2)| \leq \epsilon$ dès que $|x-a| \leq \delta$. Moi je dit que $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ fonctionne. En effet, en utilisant l'inégalité $|a+b| \leq |a| + |b|$, nous trouvons :

$$|(f+g)(x) - (b_1+b_2)| = |(f(x) - b_1) + (g(x) - b_2)| \leq |f(x) - b_1| + |g(x) - b_2|. \quad (11.113)$$

Comme on suppose que $|x - a| \leq \delta$, on a évidemment $|x - a| \leq \delta_1$, et donc l'équation (11.111) tient. Mais si $|x - a| \leq \delta$, on a aussi $|x - a| \leq \delta_2$, et donc l'équation (11.111) tient également. Chacun des deux termes de (11.113) est donc plus petits que $\epsilon/2$, et donc le tout est plus petit que ϵ , ce qu'il fallait montrer. $\square$

Une formule qui résume ces deux théorèmes est que

$$\lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (11.114)$$

Lemme 11.61.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors il existe un $\delta > 0$ et un $M > 0$ tels que

$$(|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

Ce que signifie ce lemme, c'est que quand la fonction f admet une limite finie en un point, alors il est possible de majorer la fonction sur un intervalle autour du point.

Démonstration. Cela va être démontré par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de δ ni de M qui vérifient la condition. Dans ce cas, pour tout δ et pour tout M , il existe un x tel que $|x - a| \leq \delta$ et $|f(x)| > M$. Cela est valable pour tout M , donc prenons par exemple $b + 1000$. Donc

$$\forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } |x - a| \leq \delta \text{ et } |f(x)| > b + 1000. \quad (11.115)$$

Cela signifie qu'aucun δ ne peut convenir dans la définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ce qui contredit les hypothèses. $\square$

Dans le même ordre d'idée, on peut prouver que si la limite de la fonction en un point est positive, alors elle est positive autour de ce point. Plus précisément, nous avons la

Proposition 11.62.

Si f est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est positive.

Démonstration. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_0$. Par la définition de la limite fait que si pour tout x dans un voisinage autour de a , on ait $|f(x) - y_0| < \epsilon$. Cela est valable pour tout ϵ , pourvu que le voisinage soit assez petit. Si je choisis un voisinage pour lequel $|f(x) - y_0| < \frac{y_0}{2}$, alors sur ce voisinage, f est positive. $\square$

Théorème 11.63.

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2, \quad (11.116)$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = b_1 b_2. \quad (11.117)$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, et tentons de trouver un δ tel que $|f(x)g(x) - b_1b_2| \leq \epsilon$ dès que $|x - a| \leq \delta$. Nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - b_1b_2| &= |f(x)g(x) - b_1b_2 + f(x)b_2 - f(x)b_2| \\ &= |f(x)(g(x) - b_2) + b_2(f(x) - b_1)| \\ &\leq |f(x)(g(x) - b_2)| + |b_2(f(x) - b_1)| \\ &= |f(x)||g(x) - b_2| + |b_2||f(x) - b_1|. \end{aligned} \quad (11.118)$$

À la première ligne se trouve la subtilité de la démonstration : on ajoute et on enlève⁸ $f(x)b_2$. Maintenant nous savons par le lemme 11.61 que pour un certain δ_1 , la quantité $|f(x)|$ peut être majoré par un certain M dès que $|x - a| \leq \delta_1$. Prenons donc un tel δ_1 et supposons que $|x - a| \leq \delta_1$. Nous savons aussi que pour n'importe quel choix de ϵ_2 et ϵ_3 , il existe des nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x) - b_1| \leq \epsilon_2$ et $|g(x) - b_2| \leq \epsilon_3$ dès que $|x - a| \leq \delta_2$ et $|x - a| \leq \delta_3$. Dans ces conditions, la dernière expression (11.118) se réduit à

$$|f(x)g(x) - b_1b_2| \leq M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3. \quad (11.119)$$

Pour terminer la preuve, il suffit de choisir ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leq \epsilon$, et puis prendre $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Remettons les choses dans l'ordre. L'on se donne ϵ au départ. La première chose est de trouver un δ_1 qui permet de majorer $|f(x)|$ par M selon le lemme 11.61, et puis choisissons ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leq \epsilon$. Ensuite nous prenons, en vertu des hypothèses de limites pour f et g , les nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x) - b_1| \leq \epsilon_2$ et $|g(x) - b_2| \leq \epsilon_3$ dès que $|x - a| \leq \delta_2$ et $|x - a| \leq \delta_3$.

Si avec tous ça on prend $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, alors la majoration et les deux inégalités sont valables en même temps et au final

$$|f(x)g(x) - b_1b_2| \leq M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leq \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

À l'aide de ces petits résultats, nous pouvons déjà calculer pas mal de limites. Nous pouvons déjà par exemple calculer les limites de tous les polynômes en tous les nombres réels. En effet, nous savons la limite de la fonction $f(x) = x$. la fonction $x \mapsto x^2$ n'est rien d'autre que le produit de f par elle-même. Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right) = a^2.$$

De la même façon, nous trouvons facilement que

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n. \quad (11.120)$$

Théorème 11.64 (Limite et continuité).

La fonction f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est continue en a , et nous prouvons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$; ce qu'il nous faut c'est un δ tel que $|x - a| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. La définition 11.43 de la continuité donne l'existence d'un δ comme il nous faut.

Dans l'autre sens, c'est à dire prouver que f est continue au point a sous l'hypothèse que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, la preuve se fait de la même façon. □

Nous en déduisons que si nous voulons gagner quelque chose à parler de limites, il faut prendre des fonctions non continues. Prenons une fonction qui fait un saut. Pour se fixer les idées, prenons celle-ci :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]\infty, 2[\\ x/2 & \text{si } x \in [2, \infty[\end{cases} \quad (11.121)$$

8. Comme exercice, tu peux essayer de refaire la démonstration en ajoutant et enlevant $g(x)b_1$ à la place.

Essayons de trouver la limite de cette fonction lorsque x tend vers 2. Étant donné que f n'est pas continue en 2, nous savons déjà que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$. Donc ce n'est pas 1. Cette limite ne peut pas valoir 4 non plus parce que si je prends n'importe quel ϵ , la valeur de $f(2 + \epsilon)$ est très proche de 2, et donc ne peut pas s'approcher de 4. En fait, tu peux facilement vérifier que *aucun nombre ne vérifie la condition de limite pour f en 2*. Nous disons que la limite n'existe pas.

Pour résumer, les limites qui ne font pas intervenir l'infini ne servent à rien parce que

- si la fonction est continue, la limite est simplement la valeur de la fonction par le théorème 11.64,
- si la fonction fait un saut, alors la limite n'existe pas (nous n'avons pas prouvé cela en général, mais avoue que l'exemple est convainquant).

Nous avons même la proposition suivante :

Proposition 11.65.

Si f existe en a (c'est à dire si $a \in \text{dom}(f)$) et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $f(a) = b$.

Démonstration. Du fait que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, il découle que pour tout ϵ , il existe un δ tel que $|x - a| \leq \delta$ implique $|f(x) - b| \leq \epsilon$. Il est évident que pour tout δ , $|x - x| \leq \delta$, donc nous avons que

$$|f(a) - b| \leq \epsilon$$

pour tout ϵ . Cela implique que $f(a) = b$. □

Notons toutefois que l'inverse de cette proposition n'est pas vraie : la fonction (11.121) donne justement une fonction qui prend la valeur 1 en 2 sans que la limite en 2 soit 1. Quoi qu'il en soit, cette proposition achève de nous convaincre de l'inutilité d'étudier les limites sans infinis : dès qu'on a une limite, à tous les coups c'est la valeur de la fonction ... heu ... en es-tu bien sûr ?

Proposition 11.66 ([8]).

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue dont la variable y varie dans un compact I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{y \in I} f(x, y) \end{aligned} \tag{11.122}$$

est continue.

Démonstration. Soit x_0 fixé et prouvons que d est continue en x_0 . Nous notons y_0 la valeur de y qui réalise le maximum (par le théorème 5.110 et le fait que les fonctions projection soient continues, lemme 6.136). Soit aussi $\epsilon > 0$ tellement fixé que même avec un tourne vis hydraulique, il ne bougerait pas. Nous considérons δ tel que si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta$ alors $\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| < \epsilon$.

Si $|x - x_0| < \delta$ alors pour y assez proche de y_0 nous avons $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta$, et donc $\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| \leq \epsilon$. Cela montre qu'il existe δ tel que $|x - x_0| \leq \delta$ implique $d(x) \geq d(x_0) - \epsilon$.

Nous devons encore trouver un δ tel que si $|x - x_0| \leq \delta$ alors $d(x) \leq d(x_0) + \epsilon$. Supposons que non. Alors pour tout δ il existe un x tel que $|x - x_0| \leq \delta$ et $d(x) > d(x_0) + \epsilon$. Cela nous donne une suite $x_i \rightarrow x_0$.

Pour chaque x_i nous notons y_i la valeur de y qui réalise le supremum correspondant. La suite (y_i) étant contenue dans un compact nous supposons prendre une sous-suite de (x_i) telle que la suite (y_i) converge. Nous nommons a la limite (et non y_0 parce que nous ne savons pas si $y_i \rightarrow y_0$). Pour chaque i nous avons

$$f(x_i, y_i) > \sup_{y \in I} f(x_0, y) + \epsilon. \tag{11.123}$$

En prenant la limite et en utilisant la continuité de f ,

$$f(x_0, a) > \sup_{y \in I} f(x_0, y) + \epsilon, \tag{11.124}$$

ce qui est impossible. □

11.2.11 Discussion avec mon ordinateur

Voici un extrait de ce peut donner Sage. Nous lui donnons la fonction

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8}. \quad (11.125)$$

Cette fonction est faite exprès pour que le dénominateur s'annule en -4 . En fait $3x^2+10x-8 = (x+4)(3x-2)$, et la fraction peut se simplifier en

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}. \quad (11.126)$$

Et avec cela nous écrivons $f(-4) = -\frac{1}{14}$. Voyons comment cela passe dans Sage.

```
-----
| Sage Version 5.2, Release Date: 2012-07-25 |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface. |
| Type "help()" for help. |
-----

sage: f(x)=(x+4)/(3*x**2+10*x-8)
sage: f(-4)
-----

ValueError                                Traceback (most recent call last)
ValueError: power::eval(): division by zero
```

Il produit donc une erreur de division par zéro. Cela n'est pas étonnant. Pourtant si on lui demande, il est capable de simplifier. En effet :

```
sage: f.simplify_full()
x |--> 1/(3*x - 2)
sage: f.simplify_full()(-4)
-1/14
```

11.2.12 Limites et prolongement

La proposition 11.65 a une terrible limitation : il faut que la fonction existe au point considéré. Or en regardant bien la définition 11.57, nous remarquons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ peut très bien exister sans que $f(a)$ n'existe.

Reprenons l'exemple de la fonction (11.125) que mon ordinateur refusait de calculer en zéro :

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8} = \frac{x+4}{(x+4)(x-\frac{2}{3})}. \quad (11.127)$$

Cette fonction a une condition d'existence en $x = -4$. Et pourtant, tant que $x \neq -4$, cela a un sens de simplifier les $(x+4)$ et d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{x-\frac{2}{3}} = \frac{3}{3x-2}.$$

Étant donné que pour toute valeur de x différente de -4 , la fonction f s'exprime de cette façon, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{3}{3x-2} \right).$$

Oui, mais la fonction⁹ $g(x) = 3/(3x-2)$ est continue en -4 et donc sa limite vaut sa valeur. Nous en déduisons que

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\frac{3}{14}.$$

9. Cette fonction g n'est pas f parce que g a en plus l'avantage d'être définie en -4 .

Que dire maintenant de la fonction ainsi définie ?

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -4 \\ -3/14 & \text{si } x = -4. \end{cases} \quad (11.128)$$

Cette fonction est continue en -4 parce qu'elle y est égale à sa limite. Les étapes suivies pour obtenir ce résultat sont :

- Repérer un point où la fonction n'existe pas,
- calculer la limite de la fonction en ce point, et en particulier vérifier que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas,
- définir une nouvelle fonction qui vaut partout la même chose que la fonction originale, sauf au point considéré où l'on met la valeur de la limite.

C'est ce qu'on appelle **prolonger la fonction par continuité** parce que la fonction résultante est continue. La prolongation de f par continuité est donc en général définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \text{ existe} \\ \lim_{y \rightarrow x} f(y) & \text{si } f(x) \text{ si cette limite existe et est finie.} \end{cases} \quad (11.129)$$

Dans le cas que nous regardions,

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8},$$

le prolongement par continuité est donné par

$$\tilde{f} = \frac{3}{3x-2}. \quad (11.130)$$

Remarque que cette fonction n'est toujours pas définie en $x = 2/3$.

11.3 Dérivée : exemples introductifs

11.3.1 La vitesse

Lorsqu'un mobile se déplace à une vitesse variable, nous obtenons la *vitesse instantanée* en calculant une vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus petits. Si le mobile a un mouvement donné par $x(t)$, la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 5$ sera

$$v_{\text{moy}}(2 \rightarrow 5) = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2}.$$

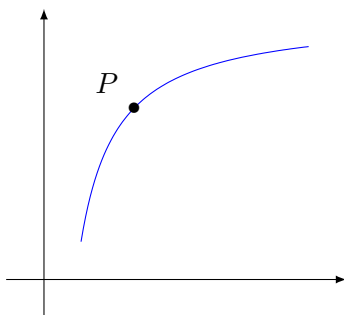
Plus généralement, la vitesse moyenne entre 2 et $2 + \Delta t$ est donnée par

$$v_{\text{moy}}(2 \rightarrow 2 + \Delta t) = \frac{x(2 + \Delta t) - x(2)}{\Delta t}.$$

Cela est une fonction de Δt . Oui, mais je te rappelle qu'on a dans l'idée de calculer une vitesse instantanée, c'est à dire de voir ce que vaut la vitesse moyenne sur un intervalle très très très très petit. La notion de limite semble toute indiquée pour décrire mathématiquement l'idée physique de vitesse instantanée.

Nous allons dire que la vitesse instantanée d'un mobile est la limite quand Δt tends vers zéro de sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps Δt , ou en formule :

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (11.131)$$

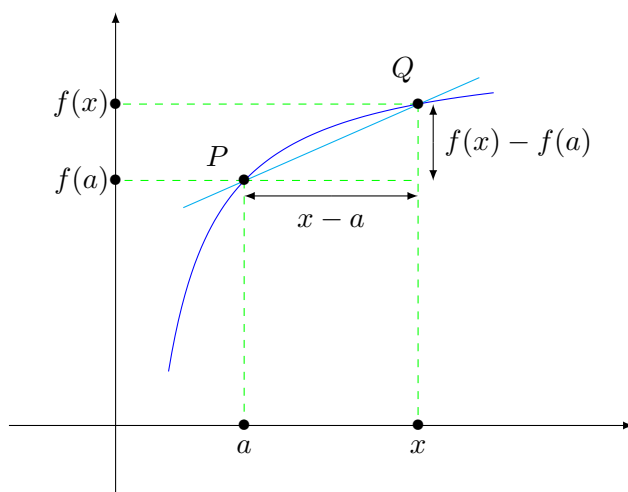
FIGURE 11.3 – Comment trouver la tangente à la courbe au point P ?

11.3.2 La tangente à une courbe

Passons maintenant à tout autre chose, mais toujours dans l'utilisation de la notion de limite pour résoudre des problèmes intéressants. Comment trouver l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$?

Essayons de trouver la tangente au point P donné de la courbe donnée à la figure 11.3.

La tangente est la droite qui touche la courbe en un seul point sans la traverser. Afin de la construire, nous allons dessiner des droites qui touchent la courbe en P et un autre point Q , et nous allons voir ce qu'il se passe quand Q est très proche de P . Cela donnera une droite qui, certes, touchera la courbe en deux points, mais en deux point *tellement proche que c'est comme si c'étaient les mêmes*. Tu sens que la notion de limite va encore venir.

FIGURE 11.4 – Traçons d'abord une corde entre le point P et un point Q un peu plus loin.

Nous avons placé le point, sur la figure 11.4, le point P en a et le point Q un peu plus loin x . En d'autres termes leurs coordonnées sont

$$P = (a, f(a)) \qquad Q = (x, f(x)). \qquad (11.132)$$

Comme tu devrais le savoir sans même regarder la figure 11.4, le coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points est donné par

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad (11.133)$$

et bang ! Encore le même rapport que celui qu'on avait trouvé à l'équation (11.131) en parlant de vitesses. Si tu regardes la figure 11.5, tu verras que réellement en faisant tendre x vers a on obtient la tangente.

11.3.3 L'aire en dessous d'une courbe

Encore un exemple. Nous voudrions bien pouvoir calculer l'aire en dessous d'une courbe. Nous notons $S_f(x)$ l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x , c'est à dire l'aire bleue de la figure 11.6.

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x + \Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x + \Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x + \Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \quad (11.134)$$

c'est à dire

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \quad (11.135)$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en dessous de f . Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

Nous avons déjà vu que calculer la dérivée d'une fonction n'est pas très compliqué. Aussi étonnant que cela puisse paraître, il se fait que le processus inverse est très compliqué : il est en général extrêmement difficile (et même souvent impossible) de trouver une fonction dont la dérivée est une fonction donnée.

Une fonction dont la dérivée est la fonction f s'appelle une **primitive** de f , et la fonction qui donne l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x est notée

$$S_f(x) = \int_0^x f(t)dt. \quad (11.136)$$

Nous pouvons nous demander si, pour une fonction f donnée, il existe une ou plusieurs primitives, c'est à dire si il existe une ou plusieurs fonctions F telles que $F' = f$. La réponse viendra...

11.4 Définition de la dérivée

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et une fonction

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \quad (11.137)$$

On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (11.138)$$

existe. Formellement nous disons que cette limite existe et vaut ℓ lorsque pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que dès que $|x - a| < \delta$ on ait

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| < \epsilon. \quad (11.139)$$

Lorsque la limite (11.138) existe nous l'appelons $f'(a)$ et nous disons que la fonction f est dérivable en a . Si la fonction est dérivable en tout point de I , nous disons qu'elle est dérivable sur I . Cela fournit un nombre $f'(x)$ en chaque point $x \in I$, c'est à dire une nouvelle fonction

$$\begin{aligned} f': I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned} \quad (11.140)$$

qui sera nommée **fonction dérivée** de f .

Il arrive que la fonction f' soit elle-même dérivable. Dans ce cas nous nommons f'' la dérivée de f ; cela est la **dérivée seconde** de f .

11.5 Continuité et dérivabilité

On considère dans la suite une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $a \in A \subset \mathbb{R}$; cependant, les notions de continuité et de dérivabilité se généralisent immédiatement au cas de fonctions à valeurs vectorielles; la notion de continuité se généralise au cas des fonctions à plusieurs variables (la notion de dérivabilité est remplacée par celle de différentiabilité dans ce cadre).

Définition 11.67.

La fonction f est **dérivable** en a si $a \in \text{int } A$ et si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. On note alors cette quantité $f'(a)$, c'est le nombre dérivé de f en a . La fonction dérivée de f est

$$f' : A' \rightarrow \mathbb{R} : a \mapsto f'(a)$$

définie sur l'ensemble noté A' des points a où f est dérivable.

Exemple 11.68

Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ est continue et dérivable. Exceptionnellement (bien qu'on sache que la dérivabilité implique la continuité), montrons ces deux assertions séparément.

Continuité Pour prouver la continuité au point $a \in \mathbb{R}$ nous devons montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (11.141)$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \, |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \epsilon \quad (11.142)$$

ce qui est clair en prenant $\delta = \epsilon$.

Dérivabilité Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons la limite du quotient différentiel

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} 1 = 1 \quad (11.143)$$

ce qui prouve que f est dérivable et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de $\mathbb{R}$.

On a donc montré que la fonction $x \mapsto x$ est continue, dérivable, et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de son domaine.

△

Proposition 11.69.

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue.

Démonstration. Soit I un intervalle sur lequel la fonction f est dérivable, et soit $x_0 \in I$. Nous allons prouver la continuité de f en x_0 . Le fait que la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (11.144)$$

existe implique a fortiori que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0. \quad (11.145)$$

Cela signifie la continuité de f en vertu du critère 11.64. □

11.6 Dérivation de fonctions d'une variable réelle

11.6.1 Exemples

11.6.1.1 La fonction $f(x) = x$

Commençons par la fonction $f(x) = x$. Dans ce cas nous avons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1. \quad (11.146)$$

La dérivée est donc 1.

Proposition 11.70.

La dérivée de la fonction $x \mapsto x$ vaut 1, en notations compactes : $(x)' = 1$.

Démonstration. D'après la définition de la dérivée, si $f(x) = x$, nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \epsilon) - x}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1, \quad (11.147)$$

et c'est déjà fini. $\square$

11.6.1.2 La fonction $f(x) = x^2$

Prenons ensuite $f(x) = x^2$. En utilisant le produit remarquable $(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$ nous trouvons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a. \quad (11.148)$$

Lorsque $x \rightarrow a$, cela devient $2a$. Nous avons par conséquent

$$f'(x) = 2x. \quad (11.149)$$

Lemme 11.71.

Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Démonstration. Utilisons la définition, et remplaçons f par sa valeur :

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \quad (11.150a)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} \quad (11.150b)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - x^2}{\epsilon} \quad (11.150c)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon(2x + \epsilon)}{\epsilon} \quad (11.150d)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2x + \epsilon) \quad (11.150e)$$

$$= 2x, \quad (11.150f)$$

ce qu'il fallait prouver. $\square$

11.6.1.3 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$

Considérons maintenant la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \end{aligned} \quad (11.151)$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, nous obtenons

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \quad (11.152)$$

Notons que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ n'existe pas en $x = 0$. En effet elle serait donnée par le quotient

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (11.153)$$

Mais si x devient très petit, la dernière fraction tend vers l'infini.

11.6.2 Calcul de la dérivée

Soit $f, g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors nous admettons les propriétés suivantes.

(1) la fonction $h = f + g$ est dérivable et $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(2) la fonction $h = fg$ est dérivable et

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (11.154)$$

Cette formule est appelée **règle de Leibnitz**.

(3) la fonction $h = \frac{f}{g}$ est dérivable en tout point x tel que $g(x) \neq 0$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad (11.155)$$

(4) la fonction $h = f \circ g$ est dérivable et

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad (11.156)$$

Proposition 11.72.

Si $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que la proposition était vraie avec $n = 1$ et $n = 2$. Supposons qu'elles soit vraie avec $n = k$, et prouvons qu'elle est vraie pour $n = k + 1$. Nous avons

$$x^{k+1} = xx^k. \quad (11.157)$$

En utilisant la règle de Leibnitz et l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} (x^{k+1})' &= (x)'x^k + x(x^k)' \\ &= x^k + x(kx^{k-1}) \\ &= x^k + kx^k \\ &= (k+1)x^k, \end{aligned} \quad (11.158)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

11.6.3 Interprétation géométrique de la dérivée : tangente

Considérons le **graphe** de la fonction f sur I , c'est à dire l'ensemble

$$\{(x, f(x)) \text{ tel que } x \in I\}. \quad (11.159)$$

Le nombre

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (11.160)$$

est la pente de la droite qui joint les points $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$, voir la figure 11.7.

Étant donné que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $(a, f(a))$, l'équation de la tangente est

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \quad (11.161)$$

11.6.4 Interprétation géométrique de la dérivée : approximation affine

Le fait que la fonction f soit dérivable au point $a \in I$ signifie que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \quad (11.162)$$

pour un certain nombre ℓ . Cela peut être récrit sous la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell = 0, \quad (11.163)$$

ou encore

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \ell(x - a)}{x - a} = 0. \quad (11.164)$$

Introduisons la fonction

$$\alpha(t) = \frac{f(a + t) - f(a) - t\ell}{t}. \quad (11.165)$$

Cette fonction est faite exprès pour que

$$\alpha(x - a) = \frac{f(x) - f(a) - \ell(x - a)}{x - a}; \quad (11.166)$$

par conséquent $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x - a) = 0$. Nous récrivons l'équation (11.166) sous la forme

$$f(x) - f(a) - \ell(x - a) = (x - a)\alpha(x - a). \quad (11.167)$$

Le second membre tend vers zéro lorsque x tend vers a avec une «vitesse au carré» : c'est le produit de deux facteurs tous deux tendant vers zéro. Si x n'est pas très loin de a , il n'est donc pas une mauvaise approximation de dire

$$f(x) - f(a) - \ell(x - a) \simeq 0, \quad (11.168)$$

c'est à dire

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a). \quad (11.169)$$

Nous avons retrouvé l'équation (11.161). La manipulation que nous venons de faire revient donc à dire que la fonction f , au voisinage de a , est bien approximée par sa tangente.

L'équation (11.169) peut être aussi écrite sous la forme

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x \quad (11.170)$$

qui est une approximation d'autant meilleure que Δx est petit.

Proposition 11.73 ([147]).

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle J (f est alors une bijection de I vers J). Si ne s'annule par sur alors

- (1) la fonction f est une bijection de I vers J ,
- (2) la fonction f^{-1} est dérivable sur J ,
- (3) et nous avons la formule

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \quad (11.171)$$

11.7 Opérations sur les dérivées

Pour continuer, nous allons en faire une un peu plus abstraite.

Proposition 11.74.

La dérivation est une opération linéaire, c'est à dire que

- (1) $(\lambda f)' = \lambda f'$ pour tout réel λ où, pour rappel, la fonction (λf) est définie par $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$,
- (2) $(f + g)' = f' + g'$.

Démonstration. Ces deux propriétés découlent des propriétés correspondantes de la limite. Nous allons faire la première, et laisser la seconde à titre d'exercice. Écrivons la définition de la dérivée avec (λf) au lieu de f , et calculons un petit peu :

$$\begin{aligned}
 (\lambda f)'(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\lambda f)(x + \epsilon) - (\lambda f)(x)}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(f(x + \epsilon)) - \lambda f(x)}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \\
 &= \lambda \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \\
 &= \lambda f'(x).
 \end{aligned} \tag{11.172}$$

□

Proposition 11.75.

La dérivée d'un produit obéit à la **règle de Leibnitz** :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{11.173}$$

Cette règle est souvent écrite sous la forme compacte $(fg)' = f'g + g'f$.

Démonstration. La définition de la dérivée dit que

$$(fg)'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon)g(x + \epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon}. \tag{11.174}$$

La subtilité est d'ajouter au numérateur la quantité $-f(x)g(x + \epsilon) + f(x)g(x + \epsilon)$, ce qui est permis parce que cette quantité est nulle¹⁰. Le numérateur de (11.174) devient donc

$$\begin{aligned}
 &f(x + \epsilon)g(x + \epsilon) - f(x)g(x + \epsilon) + f(x)g(x + \epsilon) - f(x)g(x) \\
 &= g(x + \epsilon)(f(x + \epsilon) - f(x)) + f(x)(g(x + \epsilon) - g(x)),
 \end{aligned} \tag{11.175}$$

où nous avons effectué deux mises en évidence. Étant donné que nous avons deux termes, nous pouvons couper la limite en deux :

$$\begin{aligned}
 (fg)'(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x + \epsilon) \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \epsilon) - g(x)}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x + \epsilon) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} + f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(x + \epsilon) - g(x)}{\epsilon},
 \end{aligned} \tag{11.176}$$

où nous avons utilisé le théorème 11.63 pour scinder la première limite en deux, ainsi que la propriété (11.107) pour sortir le $f(x)$ de la limite dans le second terme. Maintenant, dans le premier terme, nous avons évidemment¹¹ $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(x + \epsilon) = g(x)$. Les limites qui restent sont les définitions classiques des dérivées de f et g au point x :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \tag{11.177}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

10. Le coup d'ajouter et enlever la même chose a déjà été fait durant la démonstration du théorème 11.63. C'est une technique assez courante en analyse.

11. Pas tout à fait évidemment : selon le théorème 11.64, *limite et continuité*, il faut que g soit continue.

11.7.1 Développement limité au premier ordre

Si une fonction est dérivable en a alors elle peut être approximée «au premier ordre» par une formule simple.

Proposition 11.76 (Développement limité au premier ordre).

Si f est dérivable en a alors nous avons la formule

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \quad (11.178)$$

pour une fonction α telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0. \quad (11.179)$$

Ce résultat sera généralisé pour des dérivées d'ordre supérieures avec les séries de Taylor, théorème 11.204.

Démonstration. La fonction f étant dérivable en a nous avons l'existence de la limite suivante :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (11.180)$$

ce qui revient à dire qu'en définissant la fonction β par

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \beta(h) \quad (11.181)$$

alors $\beta(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. En multipliant par h et en nommant $\alpha(h) = h\beta(h)$ nous trouvons le résultat :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \quad (11.182)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \beta(h) = 0. \quad (11.183)$$

□

11.8 Espace des fonctions continues

Définition 11.77.

*Soit I , un intervalle de $\mathbb{R}$. L'**oscillation** sur I est le nombre*

$$\omega_f(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x). \quad (11.184)$$

Pour chaque x fixé, la fonction

$$x \mapsto \omega_f(B(x, \delta)) \quad (11.185)$$

est une fonction positive, croissante et a donc une limite (pour $\delta \rightarrow 0$). Nous notons $\omega_f(x)$ cette limite qui est l'**oscillation** de f en ce point. Une propriété immédiate est que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega_f(x_0) = 0$.

Lemme 11.78.

L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de fermés.

Démonstration. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f . Nous avons

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}. \quad (11.186)$$

Il nous suffit donc de montrer que pour tout ϵ , l'ensemble

$$\{x \text{ tel que } \omega_f(x) < \epsilon\} \quad (11.187)$$

est ouvert. Soit en effet x_0 dans cet ensemble. Il existe δ tel que $\omega_f(B(x_0, \delta)) < \epsilon$. Si $x \in B(x_0, \delta)$, alors si on choisit δ' tel que $B(x, \delta') \subset B(x_0, \delta)$, nous avons $\omega_f(B(x, \delta')) < \epsilon$, ce qui justifie que $\omega_f(x) < \epsilon$ et donc que x est également dans l'ensemble considéré. $\square$

Théorème 11.79.

L'ensemble des points de discontinuité d'une limite simple de fonctions continues est de première catégorie.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de fonctions convergent simplement vers f . Nous devons écrire l'ensemble des points de discontinuité de f comme une union dénombrable d'ensembles tels que sur tout intervalle I , aucun de ces ensembles n'est dense. Nous savons déjà par le lemme 11.78 que l'ensemble des points de discontinuité de f est donné par

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}. \quad (11.188)$$

Nous essayons donc de prouver que pour tout ϵ , l'ensemble

$$F = \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geq \epsilon\} \quad (11.189)$$

est nulle part dense. Soit

$$E_n = \bigcap_{i,j>n} \{x \text{ tel que } |f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon\}. \quad (11.190)$$

Nous montrons que cet ensemble est fermée en étudiant le complémentaire. Soit $x \notin E_n$; alors il existe un couple (i, j) tel que

$$|f_i(x) - f_j(x)| > \epsilon. \quad (11.191)$$

Par continuité, cette inégalité reste valide dans un voisinage de x . Donc il existe un voisinage de x contenu dans $\mathbb{C}E_n$ et E_n est donc fermé.

De plus nous avons $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$. Ce dernier point est dû au fait que pour tout x , il existe N tel que $i, j > N$ implique $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \epsilon$. Cela est l'expression du fait que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit I , un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous voulons trouver un intervalle $J \subset I$ sur lequel f est continue. Nous écrivons I sous la forme

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap I). \quad (11.192)$$

Tous les ensembles $J_n = E_n \cap I$ ne peuvent être nulle part dense en même temps (à cause du théorème de Baire 5.151). Il existe donc un n tel que J_n contienne un ouvert J . Le but est de montrer que f est continue sur J . Pour ce faire, nous n'allons pas simplement majorer $|f(x) - f(x_0)|$ par ϵ lorsque $|x - x_0|$ est petit. Ce que nous allons faire est majorer l'oscillation de f sur $B(x_0, \delta)$ lorsque δ est petit. Pour cela nous prenons x_0 et x dans J et nous écrivons

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \quad (11.193)$$

À ce niveau nous rappelons que n est fixé par le choix de J , dans lequel ϵ est déjà inclus. Nous choisissons évidemment $|x - x_0| \leq \delta$ de telle sorte que le second terme soit plus petit que ϵ en vertu de la continuité de f_n . Pour le premier terme, pour tout $i, j \geq n$ nous avons

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon. \quad (11.194)$$

Si nous posons $j = n$ et $i \rightarrow \infty$, en tenant compte du fait que $f_i \rightarrow f$ simplement,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon. \quad (11.195)$$

Nous avons donc obtenu $|f(x) - f_n(x_0)| \leq 2\epsilon$. Cela signifie que dans un voisinage de rayon δ autour de x_0 , les valeurs extrêmes prises par $f(x)$ sont $f_n(x_0) \pm 4\epsilon$. Nous avons donc prouvé que pour tout ϵ , il existe δ tel que

$$\omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \leq 4\epsilon. \quad (11.196)$$

De là nous concluons que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0, \quad (11.197)$$

ce qui signifie que f est continue en x_0 . $\square$

Exemple 11.80

Une fonction discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue ailleurs. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \end{cases} \quad (11.198)$$

où par « $x = p/q$ » nous entendons que p/q est la fraction irréductible.

Cette fonction est discontinue sur $\mathbb{Q}$ parce que si $q \in \mathbb{Q}$ alors $f(q) \neq 0$ alors que dans tous voisinage de q il existe un irrationnel sur qui la fonction vaudra zéro.

Montrons que f est continue sur les irrationnels. Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x_0) = 0$. Mais si on prend un voisinage suffisamment petit de x_0 , nous pouvons nous arranger pour que tous les rationnels aient un dénominateur arbitrairement grand. En effet si nous nous fixons un premier rayon $r_0 > 0$ alors il existe un nombre fini de fractions de la forme $1, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \dots, \frac{k}{N}$ dans $B(x_0, r_0)$. Il suffit maintenant de choisir $0 < r \leq r_0$ tel que ces fractions soient toutes hors de $B(x_0, r)$. Dans cette boule nous avons $f < \frac{1}{N}$. Du coup f est continue en x_0 . $\triangle$

Définition 11.81 (Point périodique[148]).

Soit $f: I \rightarrow I$ une application d'un ensemble I dans lui-même. Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k = 1, \dots, n-1$ alors on dit que x est un point n -périodique.

Lemme 11.82.

Soit I un segment¹² de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f: I \rightarrow I$. Si K est un segment fermé avec $K \subset f(I)$ alors il existe un segment fermé $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.

Démonstration. Mentionnons immédiatement que f est continue sur I qui est compact¹³. Par conséquent tous les nombres dont nous allons parler sont finis parce que f est bornée par le théorème 5.110.

Soit $K = [\alpha, \beta]$. Si $\alpha = \beta$ alors le segment $L = \{\alpha\}$ convient. Nous supposons donc que $\alpha \neq \beta$ et nous considérons $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Vu que $a \neq b$ nous supposons $a < b$ (le cas $a > b$ se traite de façon similaire).

Nous posons

$$A = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) = \alpha\}. \quad (11.199)$$

C'est un ensemble borné par a et b . De plus il est fermé; ce dernier point n'est pas tout à faire évident parce que f n'est pas défini sur $\mathbb{R}$ mais sur I qui est fermé, le corollaire 11.47 n'est donc pas immédiatement utilisable. Prouvons donc que $Z = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha\}$ est fermé. Si x_0 est hors de Z alors soit x_0 est dans I soit il est hors de I . Dans ce second cas, le complémentaire de I étant ouvert, on a un voisinage de x_0 hors de I et par conséquent hors de Z . Si au contraire $x_0 \in I$ alors il y a (encore) deux cas : soit $x_0 \in \text{Int}(I)$ soit x_0 est sur le bord de I . Dans le premier cas, le

12. définition 5.102. Un segment est un intervalle fermé borné.

13. Par le lemme 5.105.

théorème des valeurs intermédiaires¹⁴ fonctionne. Pour le second cas, nous supposons $x_0 = \max(I)$ (le cas $x_0 = \min(I)$ est similaire). Le théorème des valeurs intermédiaires dit que sur $[x_0 - \epsilon, x_0]$, $f \neq \alpha$ et en même temps, sur $]x_0, x_0 + \epsilon]$, nous sommes en dehors du domaine. Au final $\{f(x) = \alpha\}$ est fermé et A est alors fermé en tant que intersection de deux fermés.

L'ensemble A étant non vide ($a \in A$), il possède donc un maximum que nous nommons u :

$$u = \max(A). \quad (11.200)$$

Nous posons aussi

$$B = \{x \in [u, b] \text{ tel que } f(x) = \beta\} \quad (11.201)$$

qui est encore fermé, borné et non vide. Nous pouvons donc définir

$$v = \min(B). \quad (11.202)$$

Nous prouvons maintenant que $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$. D'abord $f([u, v])$ est un intervalle compact¹⁵ contenant $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$. Par conséquent $[\alpha, \beta] \subset f([u, v])$. Pour l'inclusion inverse supposons $t \in [u, v]$ tel que $f(t) > \beta$. Vu que $f(a) = \alpha$ et $\alpha < \beta$ le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in [a, t]$ tel que $f(t_0) = \beta$. Cela donne $t_0 < v$ et donc contredit la minimalité de v dans B . Nous en déduisons que $f([u, v])$ ne contient aucun élément plus grand que β . Même jeu pour montrer que ça ne contient aucun élément plus petit que α .

En définitive, le segment $L = [u, v]$ fonctionne. $\square$

Lorsque $I_2 \subset f(I_1)$ nous notons $I_1 \rightarrow I_2$ ou, si une ambiguïté est à craindre, $I_1 \xrightarrow{f} I_2$. Cette flèche se lit «recouvre».

Lemme 11.83 ([2, 148]).

Soient les segments $I_0, \dots, I_{n-1}$ tels que nous ayons le cycle

$$I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0. \quad (11.203)$$

Alors f^n admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

Démonstration. Nous prouvons les cas $n = 1$ et $n = 2$ séparément.

$n = 1$ Nous avons $I_0 \rightarrow I_0$, c'est à dire que $I_0 \subset f(I_0)$. Si $I_0 = [a, b]$ alors nous posons $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ pour certains $\alpha, \beta \in I_0$. Nous posons ensuite $g(x) = f(x) - x$.

Dans un premier temps, $g(\alpha) = a - \alpha \leq 0$ parce que $a \in I_0$ et $\alpha \in I_0$. Pour la même raison, $g(\beta) = b - \beta \geq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset I_0$ tel que $g(t_0) = 0$. Nous avons donc $f(t_0) = t_0$.

$n = 2$ Nous avons $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$. Vu que $I_1 \subset f(I_0)$, le lemme 11.82 donne un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mézalors

$$J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1). \quad (11.204)$$

Nous avons donc $J_1 \xrightarrow{f^2} J_1$ et par le cas $n = 1$ traité plus haut, la fonction f^2 a un point fixe x_0 dans J_1 . De plus

$$f(x_0) \in f(J_1) = I_1, \quad (11.205)$$

le point x_0 est donc bien celui que nous cherchions.

Cas général. Nous avons

$$I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0. \quad (11.206)$$

Vu que $I_1 \subset f(I_0)$, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mais

$$I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1), \quad (11.207)$$

¹⁴. Théorème 11.50.

¹⁵. Corollaire 11.51 et théorème 5.60.

donc il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$. En procédant encore longtemps ainsi nous construisons les ensembles $J_1, \dots, J_{n-1}$ tels que

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \dots \subset J_1 \subset J_0 \quad (11.208)$$

tels que $I_k = f^k(J_k)$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$. La dernière de ces inclusions est $I_{n-1} = f^{n-1}(J_{n-1})$, mais $I_{n-1} \rightarrow I_0$, c'est à dire que

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1}), \quad (11.209)$$

et il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 \subset f^n(J_n)$. Mais comme $J_n \subset J_0$ nous avons en particulier $J_n \subset f^n(J_n)$.

Cela donne un point fixe $x_0 \in J_n$ pour f^n . Par construction nous avons $J_n \subset J_{n-1} \subset \dots \subset J_1 \subset J_0$ et donc $x_0 \in J_k$ pour tout k . En particulier

$$f^k(x_0) \in f^k(J_k) = I_k \quad (11.210)$$

pour tout k .

□

Théorème 11.84 (Théorème de Sarkowski[2, 148]).

Soit I , un segment de $\mathbb{R}$ et une application continue $f: I \rightarrow I$. Si f admet un point 3-périodique, alors f admet des points n -périodiques pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. Soit $a \in I$ un point 3-périodique pour f et notons $b = f(a)$, $c = f(b)$. Les points b et c sont également des points 3-périodiques. Quitte à renommer, nous pouvons supposer que a est le plus petit des trois. Il reste deux possibilités : $a < b < c$ et $a < c < b$. Nous traitons d'abord le premier cas.

Supposons $a < b < c$. Nous posons $I_0 = [a, b]$ et $I_1 = [b, c]$. Nous avons immédiatement $I_1 \subset f(I_0)$ et comme $f(b) = c$ et $f(c) = a$, $f(I_1)$ recouvre $[a, c]$ et donc recouvre en même temps I_1 et I_0 . Nous avons donc $I_0 \rightarrow I_1$, $I_1 \rightarrow I_0$ et $I_1 \rightarrow I_1$.

Un point 1-périodique Nous avons $I_1 \rightarrow I_1$ qui prouve que f a un point fixe dans I_1 . Voilà un point 1-périodique.

Un point 2-périodique Nous avons $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$. Par conséquent, le lemme 11.83 dit que f^2 a un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f(x_0) \in I_1$. Montrons que $f(x_0) \neq x_0$. Pour avoir $x_0 = f(x_0)$, il faudrait $x_0 \in I_0 \cap I_1 = \{b\}$. Mais b est un point 3-périodique, donc ne vérifiant certainement pas $f^2(b) = b$. Nous en déduisons que $f(x_0) \neq x_0$ et donc que x_0 est 2-périodique.

Un point 3-périodique On en a par hypothèse.

Un point n -périodique pour $n \geq 4$ Nous avons le cycle

$$I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_{n-1 \text{ fois}} \rightarrow I_0. \quad (11.211)$$

Le lemme donne alors un point fixe $x \in I_0$ pour f^n tel que $f^k(x) \in I_1$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Est-ce possible que $x = b$? Non parce que $f^2(b) = a \in I_0$ alors que $f^2(x) \in I_1$. Mais $I_0 \cap I_1 = \{b\}$.

Par conséquent la relation $f^k(x) \in I_1$ exclu d'avoir $f^k(x) = x$, et le point x est bien n -périodique.

Passons au cas $a < c < b$. Alors nous posons $I_0 = [a, c]$ et $I_1 = [c, b]$. Encore une fois $f(I_0)$ contient a et b , donc $I_0 \rightarrow I_0$ et $I_0 \rightarrow I_1$. Mais en même temps $f(I_1)$ contient a et c , donc $I_1 \rightarrow I_0$.

Nous pouvons donc refaire comme dans le premier cas, en inversant les rôles de I_0 et I_1 . En particulier nous pouvons considérer le cycle

$$I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_0 \rightarrow \dots \rightarrow I_0 \rightarrow I_1. \quad (11.212)$$

□

11.9 Uniforme continuité

Définition 11.85.

Une partie $A \subset \mathbb{R}^m$ est dite **bornée** si il existe un $M > 0$ tel que $A \subset B(0, M)$. Le **diamètre** de la partie A est le nombre

$$\text{Diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\| \in [0, \infty]. \quad (11.213)$$

Lorsque A est borné, il existe un M tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$.

Lemme 11.86.

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^m$, alors $\text{Diam}(A) = \text{Diam}(\bar{A})$.

Nous n'allons pas donner de démonstrations de ce lemme.

Si (x_n) est une suite et I est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, nous désignons par x_I la suite des éléments x_n tels que $n \in I$. Par exemple la suite $x_{\mathbb{N}}$ est la suite elle-même, la suite $x_{2\mathbb{N}}$ est la suite obtenue en ne prenant que les éléments d'indice pair.

Les suites x_I ainsi construites sont dites des **sous-suites** de la suite (x_n) .

Pour une fonction $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, la continuité au point a signifie que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (11.214)$$

Le δ qu'il faut choisir dépend évidemment de ε , mais il dépend en général aussi du point a où l'on veut tester la continuité. C'est à dire que, étant donné un $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un δ qui fonctionne pour certains points, mais qui ne fonctionne pas pour d'autres points.

Il peut cependant également arriver qu'un même δ fonctionne pour tous les points du domaine. Dans ce cas, nous disons que la fonction est uniformément continue sur le domaine.

Définition 11.87.

Une fonction $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **uniformément continue** sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in D, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (11.215)$$

Il est intéressant de voir ce que signifie le fait de *ne pas* être uniformément continue sur un domaine D . Il s'agit essentiellement de retourner tous les quantificateurs de la condition (11.215) :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x, y \in D \text{ tel que } \|x - y\| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon. \quad (11.216)$$

Dans cette condition, les points x et y peuvent être fonction du δ . L'important est que pour tout δ , on puisse trouver deux points δ -proches dont les images par f ne soient pas ε -proches.

Exemple 11.88

Prenons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, et demandons nous pour quel δ nous sommes sûr d'avoir

$$|f(a + \delta) - f(a)| = \left| \frac{1}{a + \delta} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon. \quad (11.217)$$

Pour simplifier, nous supposons que $a > 0$. Nous calculons

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a + \delta} &< \varepsilon \\ \frac{\delta}{a(a + \delta)} &< \varepsilon \\ \delta &< \varepsilon a^2 + \varepsilon a \delta \\ \delta(1 - \varepsilon a) &< \varepsilon a^2 \\ \delta &< \frac{\varepsilon a^2}{1 - \varepsilon a}. \end{aligned} \quad (11.218)$$

Notons que, à ε fixé, plus a est petit, plus il faut choisir δ petit. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est donc pas uniformément continue. Cela correspond au fait que, proche de zéro, la fonction monte très vite. Une fonction uniformément continue sera une fonction qui ne montera jamais très vite. $\triangle$

Proposition 11.89.

Quelques propriétés des fonctions uniformément continues.

- (1) *Toute application uniformément continue est continue ;*
- (2) *la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue ;*
- (3) *toute application lipschitzienne est uniformément continue.*

Une fonction peut être uniformément continue sur un domaine et pas sur un autre. Le théorème suivant donne une importante indication à ce sujet.

Théorème 11.90 (Heine).

Une fonction continue sur un compact (fermé et borné) est uniformément continue.

La démonstration qui suit est valable pour une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et utilise le fait que le produit cartésien de compacts est compact. Dans le cas de fonctions sur $\mathbb{R}$, nous pouvons modifier la démonstration pour ne pas utiliser ce résultat ; voir plus bas.

Démonstration. Nous allons prouver ce théorème par l'absurde. Nous commençons par écrire la condition (11.216) qui exprime que f n'est pas uniformément continue sur le compact K :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x, y \in K \text{ tels que } \|x - y\| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon. \quad (11.219)$$

En particulier (en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ pour tout n), pour chaque n nous pouvons trouver x_n et y_n dans K qui vérifient simultanément les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon. \end{cases} \quad \begin{matrix} (11.220a) \\ (11.220b) \end{matrix}$$

Nous insistons que c'est le même ε pour chaque n . L'ensemble K étant compact, l'ensemble $K \times K$ est compact (théorème 5.147) et nous pouvons trouver une sous-suite convergente *du couple* (x_n, y_n) dans $K \times K$. Quitte à passer à ces sous-suites, nous nous supposons que (x_n, y_n) converge dans $K \times K$ et en particulier que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. Étant donné que pour chaque n elles vérifient $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, les limites sont égales :

$$\lim x_n = \lim y_n = x. \quad (11.221)$$

L'ensemble K étant fermé, la limite x est dans K . Par continuité de f , nous avons finalement

$$\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(x), \quad (11.222)$$

mais alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0, \quad (11.223)$$

ce qui est en contradiction avec le choix (11.220b).

Tout ceci prouve que $f(K)$ est bornée supérieurement et que f atteint son supremum (qui est donc un maximum). Le fait que $f(K)$ soit borné inférieurement se prouve en considérant la fonction $-f$ au lieu de f .

$\square$

Remarque 11.91.

Nous pouvons ne pas utiliser le fait que le produit de compacts est compact. Cela est particulièrement commode lorsqu'on considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ parce que dans ce cadre nous ne pouvons pas supposer connue la notion de produit d'espace topologiques.

Pour choisir les sous-suites (x_n) et (y_n) , il suffit de prendre une sous-suite convergente de (x_n) et d'invoquer le fait que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$. Les suites (x_n) et (y_n) étant adjacentes, la convergence de (x_n) implique la convergence de (y_n) vers la même limite.

Il est donc un peu superflus de parler de la convergence du couple (x_n, y_n) .

11.10 Compacité

Soit E , un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Nous pouvons considérer les ouverts suivants :

$$\mathcal{O}_x = B(x, 1) \quad (11.224)$$

pour chaque $x \in E$. Évidemment,

$$E \subseteq \bigcup_{x \in E} \mathcal{O}_x. \quad (11.225)$$

Cette union est très souvent énorme, et même infinie. Elle contient de nombreuses redondances. Si par exemple $E = [-10, 10]$, l'élément $3 \in E$ est contenu dans $\mathcal{O}_{3.5}$, $\mathcal{O}_{2.7}$ et bien d'autres. Pire : même si on enlève par exemple $\mathcal{O}_2$ de la liste des ouverts, l'union de ce qui reste continue à être tout E . La question est : *est-ce qu'on peut en enlever suffisamment pour qu'il n'en reste qu'un nombre fini ?*

Définition 11.92.

Soit E , un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Une collection d'ouverts $\mathcal{O}_i$ est un **recouvrement** de E si $E \subseteq \bigcup_i \mathcal{O}_i$. Un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ tel que de tout recouvrement par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini est dit **compact**.

Proposition 11.93.

Les ensembles compacts sont fermés et bornés.

Démonstration. Prouvons d'abord qu'un ensemble compact est borné. Pour cela, supposons que K est un compact non borné vers le haut¹⁶. Donc il existe une suite infinie de nombres strictement croissante $x_1 < x_2 < \dots$ tels que $x_i \in K$. Prenons n'importe quel recouvrement ouvert de la partie de K plus petite ou égale à x_1 , et complétons ce recouvrement par les ouverts $\mathcal{O}_i =]x_{i-1}, x_i[$. Le tout forme bien un recouvrement de K par des ouverts.

Il n'y a cependant pas moyen d'en tirer un sous recouvrement fini parce que si on ne prends qu'un nombre fini parmi les $\mathcal{O}_i$, on en aura fatalement un maximum, disons $\mathcal{O}_k$. Dans ce cas, les points $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ ne seront pas dans le choix fini d'ouverts.

Cela prouve que K doit être borné.

Pour prouver que K est fermé, nous allons prouver que le complémentaire est ouvert. Et pour cela, nous allons prouver que si le complémentaire n'est pas ouvert, alors nous pouvons construire un recouvrement de K dont on ne peut pas extraire de sous recouvrement fini.

Si $\mathbb{R} \setminus K$ n'est pas ouvert, il possède un point, disons x , tel que tout voisinage de x intersecte K . Soit $B(x, \epsilon_1)$, un de ces voisinages, et prenons $k_1 \in K \cap B(x, \epsilon_1)$. Ensuite, nous prenons ϵ_2 tel que k_1 n'est pas dans $B(x, \epsilon_2)$, et nous choisissons $k_2 \in K \cap B(x, \epsilon_2)$. De cette manière, nous construisons une suite de $k_i \in K$ tous différents et de plus en plus proches de x . Prenons un recouvrement quelconque par des ouverts de la partie de K qui n'est pas dans $B(x, \epsilon_1)$. Les nombres k_i ne sont pas dans ce recouvrement.

Nous ajoutons à ce recouvrement les ensembles $\mathcal{O} =]k_i, k_{i+1}[$. Le tout forme un recouvrement (infini) par des ouverts dont il n'y a pas moyen de tirer un sous recouvrement fini, pour exactement la même raison que la première fois. $\square$

Le résultat suivant le théorème de Borel-Lebesgue, et la démonstration vient de wikipédia.

Théorème 11.94 (borel-Lebesgue).

Les intervalles de la forme $[a, b]$ sont compacts.

¹⁶. Nous laissons à titre d'exercice le cas où K est borné par le haut et pas par le bas.

Démonstration. Soit Ω , un recouvrement du segment $[a, b]$ par des ouverts, c'est à dire que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}. \quad (11.226)$$

Nous notons par M le sous-ensemble de $[a, b]$ des points m tels que l'intervalle $[a, m]$ peut être recouvert par un sous-ensemble fini de Ω . C'est à dire que M est le sous ensemble de $[a, b]$ sur lequel le théorème est vrai. Le but est maintenant de prouver que $M = [a, b]$.

M est non vide En effet, $a \in M$ parce que il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega$ tel que $a \in \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ tout seul recouvre l'intervalle $[a, a]$.

M est un intervalle Soient $m_1, m_2 \in M$. Le but est de montrer que si $m' \in [m_1, m_2]$, alors $m' \in M$. Il y a un sous recouvrement fini de l'intervalle $[a, m_2]$ (par définition de $m_2 \in M$). Ce sous recouvrement fini recouvre évidemment aussi $[a, m']$ parce que $[a, m'] \subseteq [a, m_2]$, donc $m' \in M$.

M est une ensemble ouvert Soit $m \in M$. Le but est de prouver qu'il y a un ouvert autour de m qui est contenu dans M . Mettons que Ω' soit un sous recouvrement fini qui contienne l'intervalle $[a, m]$. Dans ce cas, on a un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega'$ tel que $m \in \mathcal{O}$. Tous les points de $\mathcal{O}$ sont dans M , vu qu'ils sont tous recouverts par Ω' . Donc $\mathcal{O}$ est un voisinage de m contenu dans M .

M est un ensemble fermé M est un intervalle qui commence en a , en contenant a , et qui finit on ne sait pas encore où. Il est donc soit de la forme $[a, m]$, soit de la forme $[a, m[$. Nous allons montrer que M est de la première forme en démontrant que M contient son supremum s . Ce supremum est un élément de $[a, b]$, et donc il est contenu dans un des ouverts de Ω . Disons $s \in \mathcal{O}_s$. Soit c , un élément de $\mathcal{O}_s$ strictement plus petit que c ; étant donné que s est supremum de M , cet élément c est dans M , et donc on a un sous recouvrement fini Ω' qui recouvre $[a, c]$. Maintenant, le sous recouvrement constitué de Ω' et de $\mathcal{O}_s$ est fini et recouvre $[a, s]$.

Nous pouvons maintenant conclure : le seul intervalle non vide de $[a, b]$ qui soit à la fois ouvert et fermé est $[a, b]$ lui-même, ce qui prouve que $M = [a, b]$, et donc que $[a, b]$ est compact. $\square$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, et nous avons l'importante propriété suivante des fonctions continues sur un compact.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 5.110.

Théorème 11.95.

Si f est une fonction continue sur l'intervalle compact $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes.

Démonstration. Étant donné que $[a, b]$ est un intervalle compact, son image est également un intervalle compact, et donc est de la forme $[m, M]$. Ceci découle du théorème 5.60 et le corollaire 11.51. Le maximum de f sur $[a, b]$ est la borne M qui est bien dans l'image (parce que $[m, M]$ est fermé). Idem pour le minimum m . $\square$

11.11 Dérivation et croissance

Supposons une fonction dont la dérivée est positive. Étant donné que la courbe est « collée » à ses tangentes, tant que les tangentes montent, la fonction monte. Or, une tangente qui monte correspond à une dérivée positive, parce que la dérivée est le coefficient directeur de la tangente.

Ce résultat très intuitif peut être prouvé rigoureusement. C'est la tache à laquelle nous allons nous atteler maintenant.

Proposition 11.96.

Si f et f' sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et si $f'(x)$ est strictement positive sur $[a, b]$, alors f est croissante sur $[a, b]$.

De la même manière, si $f'(x)$ est strictement négative sur $[a, b]$, alors f est décroissante sur $[a, b]$.

Démonstration. Nous n'allons prouver que la première partie. La seconde partie se prouve en considérant $-f$ et en invoquant alors la première¹⁷. Prenons x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$. Par hypothèse, pour tout x dans $[x_1, x_2]$, nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \quad (11.227)$$

Maintenant, la proposition 11.62 dit que quand une limite est positive, alors la fonction dans la limite est positive sur un voisinage. En appliquant cette proposition à la fonction

$$r(\epsilon) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad (11.228)$$

dont la limite en zéro est positive, nous trouvons que $r(\epsilon) > 0$ pour tout ϵ pas trop éloigné de zéro. En particulier, il existe un $\delta > 0$ tel que $\epsilon < \delta$ implique $r(\epsilon) > 0$; pour un tel ϵ , nous avons donc

$$r(\epsilon) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} > 0. \quad (11.229)$$

Étant donné que $\epsilon > 0$, nous avons que $f(x + \epsilon) - f(x) > 0$, c'est à dire que f est strictement croissante entre x et $x + \delta$.

Jusqu'ici, nous avons prouvé que la fonction f était strictement croissante dans un voisinage autour de chaque point de $[a, b]$. Cela n'est cependant pas encore tout à fait suffisant pour conclure. Ce que nous voudrions faire, c'est de dire, c'est prendre un voisinage $]a, m_1[$ autour de a sur lequel f est croissante. Donc, $f(m_1) > f(a)$. Ensuite, on prend un voisinage $]m_1, m_2[$ de m_1 sur lequel f est croissante. De ce fait, $f(m_2) > f(m_1) > f(a)$. Et ainsi de suite, nous voulons construire des $m_3, m_4, \dots$ jusqu'à arriver en b . Hélas, rien ne dit que ce processus va fonctionner. Il faut trouver une subtilité. Le problème est que les voisinages sur lesquels la fonction est croissante sont peut-être de plus en plus petit, de telle sorte à ce qu'il faille une infinité d'étapes avant d'arriver à bon port (en b).

Heureusement, nous pouvons drastiquement réduire le nombre d'étapes en nous souvenant du théorème de Borel-Lebesgue (numéro 11.94). Nous notons par $\mathcal{O}_x$, un ouvert autour de x tel que f soit strictement croissante sur $\mathcal{O}_x$. Un tel voisinage existe. Cela fait une infinité d'ouverts tels que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{x \in [a, b]} \mathcal{O}_x. \quad (11.230)$$

Ce que le théorème dit, c'est qu'on peut en choisir un nombre fini qui recouvre encore $[a, b]$. Soient $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_n}\}$, les heureux élus, que nous supposons pris dans l'ordre : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Nous avons

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i. \quad (11.231)$$

Quitte à les rajouter à la collection, nous supposons que $x_1 = a$ et que $x_n = b$. Maintenant nous allons choisir encore un sous ensemble de cette collection d'ouverts. On pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}_{x_1}$. Nous savons que $\mathcal{A}_1$ intersecte au moins un des autres $\mathcal{O}_{x_i}$. Cette affirmation vient du fait que $[a, b]$ est connexe (proposition 5.103), et que si $\mathcal{O}_{x_1}$ n'intersectait personne, alors

$$\mathcal{O}_{x_1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=2}^n \mathcal{O}_{x_i} \quad (11.232)$$

forment une partition de $[a, b]$ en deux ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible parce que $[a, b]$ est connexe. Nous nommons $\mathcal{A}_2$, un des ouverts $\mathcal{O}_{x_i}$ qui intersecte $\mathcal{A}_1$. Disons que c'est $\mathcal{O}_{x_k}$. Notons

17. Méditer cela.

que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un intervalle sur lequel f est strictement croissante. En effet, si y_{12} est dans l'intersection, $f(a) < f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1$, et pour tout $x > y_{12}$ dans $\mathcal{A}_2$, $f(x) > f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante dans $\mathcal{A}_2$.

Maintenant, nous éliminons de la liste des $\mathcal{O}_{x_i}$ tous ceux qui sont inclus à $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Dans ce qu'il reste, il y en a automatiquement un qui intersecte $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, pour la même raison de connexité que celle invoquée plus haut. Nous appelons cet ouvert $\mathcal{A}_3$, et pour la même raison qu'avant, f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

En recommençant suffisamment de fois, nous finissons par devoir prendre un des $\mathcal{O}_{x_i}$ qui contient b , parce qu'au moins un des $\mathcal{O}_{x_i}$ contient b . À ce moment, nous avons fini la démonstration. $\square$

Il est intéressant de noter que ce théorème concerne la croissance d'une fonction sous l'hypothèse que la dérivée est positive. Il nous a fallu très peu de temps, en utilisant la positivité de la dérivée, pour conclure qu'autour de tout point, la fonction était strictement croissante. À partir de là, c'était pour ainsi dire gagné. Mais il a fallu un réel travail de topologie très fine¹⁸ pour conclure. Étonnant qu'une telle quantité de topologie soit nécessaire pour démontrer un résultat essentiellement analytique dont l'hypothèse est qu'une limite est positive, n'est-ce pas ?

Une petite facile, maintenant.

Proposition 11.97.

Si f est croissante sur un intervalle, alors $f' \geq 0$ à l'intérieur cet intervalle, et si f est décroissante sur l'intervalle, alors $f' \leq 0$ à l'intérieur de l'intervalle.

Note qu'ici, nous demandons juste la croissance de f , et non sa *stricte* croissance.

Démonstration. Soit f , une fonction croissante sur l'intervalle I , et x un point intérieur de I . La dérivée de f en x vaut

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad (11.233)$$

mais, comme f est croissante sur I , nous avons toujours que $f(x + \epsilon) - f(x) \geq 0$ quand $\epsilon > 0$, et $f(x + \epsilon) - f(x) \leq 0$ quand $\epsilon < 0$, donc cette limite est une limite de nombre positifs ou nuls, qui est donc positive ou nulle. Cela prouve que $f'(x) \geq 0$. $\square$

Les deux prochains théorèmes sont très importants.

Théorème 11.98 (Théorème de Rolle).

Soit f , une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Étant donné que $[a, b]$ est un intervalle compact, l'image de $[a, b]$ par f est un intervalle compact, soit $[m, M]$ (théorème 5.60). Si $m = M$, alors le théorème est évident : c'est que la fonction est constante, et la dérivée est par conséquent nulle. Supposons que $M > f(a)$ (il se peut que $M = f(a)$, mais alors si f n'est pas constante, il faut avoir $m < f(a)$ et le reste de la preuve peut être adaptée).

Comme M est dans l'image de $[a, b]$ par f , il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Considérons maintenant la fonction

$$\tau(x) = \frac{f(c + x) - f(c)}{x}. \quad (11.234)$$

Par définition, $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = f'(c)$. Par hypothèse, si $u < c$,

$$\tau(u - c) = \frac{f(u) - f(c)}{u - c} > 0 \quad (11.235)$$

18. et je te rappelle que nous avons utilisé la proposition 5.103, qui elle même était déjà un très gros boulot !

parce que $u - c < 0$ et $f(u) - f(c) < 0$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) \geq 0$. Nous avons aussi, pour $v > c$,

$$\tau(v - c) = \frac{f(v) - f(c)}{v - c} < 0 \quad (11.236)$$

parce que $v - c > 0$ et $f(v) - f(c) < 0$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) \leq 0$. Mettant les deux ensemble, nous avons $f'(c) = \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0$, et c est le point que nous cherchions. $\square$

Sur wikipédia, deux démonstrations complètement différentes sont proposées, celle qui est présentée ici est adaptée de celle qui est proposée par le célèbre mathématicien de Téhéran le Rézéen.

Le théorème suivant est le théorème des **accroissements finis**.

Théorème 11.99 (Accroissements finis).

Soit f , une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

(1) Il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \quad (11.237)$$

Autrement dit, la tangente en c est parallèle à la corde entre a et b .

(2) Nous avons la majoration

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| |b - a|. \quad (11.238)$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$\tau(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right), \quad (11.239)$$

c'est à dire la fonction qui donne la distance entre f et le segment de droite qui lie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Par construction, $\tau(a) - \tau(b) = 0$, donc le théorème de Rolle s'applique à τ pour laquelle il existe donc un $c \in]a, b[$ tel que $\tau'(c) = 0$.

En utilisant les règles de dérivation, nous trouvons que la dérivée de τ vaut

$$\tau'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (11.240)$$

donc dire que $\tau'(c) = 0$ revient à dire que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

La majoration est une conséquence immédiate, parce que le supremum de $|f'(x)|$ est forcément plus grand que $|f'(c)|$. $\square$

Corollaire 11.100.

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors f est constante sur $[a, b]$.

Démonstration. Si f n'était pas constante sur $[a, b]$, il existerait un $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(a) \neq f(x_1)$, et dans ce cas, il existerait un $c \in]a, x_1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \neq 0, \quad (11.241)$$

ce qui contredirait les hypothèses. $\square$

Corollaire 11.101.

Soient f et g , deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que

$$f'(x) = g'(x) \quad (11.242)$$

pour tout $x \in [a, b]$. Alors existe un réel C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Considérons la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$, dont la dérivée est, par hypothèse, nulle. L'annulation de la dérivée entraîne par le corollaire 11.101 que h est constante. Si $h(x) = C$, alors $f(x) = g(x) + C$, ce qu'il fallait prouver. $\square$

Définition 11.102.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans I .

Exprimé en termes des primitives, le corollaire 11.101 signifie que

Corollaire 11.103.

Si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle, alors il existe une constante C pour laquelle $F(x) = G(x) + C$.

Cela signifie qu'il n'y a, en réalité, pas des milliards de primitives différentes à une fonction. Il y en a essentiellement une seule, et puis les autres, ce sont juste les mêmes, mais décalées d'une constante.

Remarque 11.104.

L'hypothèse de se limiter à un intervalle est importante parce que si on considère la fonction sur deux intervalles disjoints, nous pouvons choisir la constante indépendamment dans l'un et dans l'autre. Par exemple la fonction

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(x) - 7 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (11.243)$$

est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Certains ne s'en privent pas. Le logiciel Sage par exemple fait ceci :

```
sage: f(x)=1/x
sage: F=f.integrate(x)
sage: A=F(x)-F(-x)
sage: A.full_simplify()
I*pi
```

En réalité lorsque $x > 0$, Sage définit $\ln(-x) = \ln(x) + i\pi$. Cela a une certaine logique parce que $\ln(-1) = i\pi$ (du fait que $e^{i\pi} = -1$), mais si on ne le sait pas, ça peut étonner.

11.105.

Il existe plusieurs primitives à une fonction donnée. En physique, la constante arbitraire est souvent fixée par une condition initiale, comme nous le verrons dans la section 31.1.

11.12 Dérivée directionnelle

Nous sommes capables de dériver une fonction de deux variables $f(x, y)$ par rapport à x et par rapport à y . C'est à dire que nous sommes capables de donner la variation de la fonction lorsqu'on bouge le long des axes horizontal et vertical. Il est évidemment souhaitable de parler de la variation de la fonction lorsqu'on se déplace le long d'autre droites.

Soit donc $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire (c'est à dire $u_1^2 + u_2^2 = 1$), et considérons la fonction de une variable

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + tu_1, b + tu_2). \end{aligned} \quad (11.244)$$

La fonction φ n'est rien d'autre que la fonction f vue le long de la droite de direction donnée par le vecteur u . Nous pouvons aussi l'écrire $\varphi(t) = f(p + tu)$.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La façon la plus naturelle de définir une dérivée à deux variables est de considérer les **dérivées partielles** définies par

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.\end{aligned}\tag{11.245}$$

Ces nombres représentent la façon dont le nombre $f(x, y)$ varie lorsque soit seul x varie soit seul y varie. Les dérivées partielles se calculent de la même façon que les dérivées normales. Pour calculer $\partial_x f$, on fait «comme si» y était une constante, et pour calculer $\partial_y f$, on fait comme si x était une constante.

11.12.1 Dérivée partielle et directionnelles

Soit une fonction $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $n \neq 1$, la notion de *dérivée* de la fonction f n'a plus de sens puisqu'on ne peut plus parler de pente de la tangente au graphe de f en un point. On introduit alors quelques notions qui feront, en dimension quelconque, le même travail que la dérivée en dimension un : les dérivées directionnelles et la différentielle. Nous allons voir qu'en dimension un, la différentielle coïncide avec la dérivée.

Définition 11.106.

Soit un point $a \in \text{int } A$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ avec $\|u\| = 1$. La dérivée de f au point a dans la direction u est donnée par la limite suivante, si elle existe

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}\tag{11.246}$$

Géométriquement, il s'agit du taux de variation instantané de f en a dans la direction du vecteur u , c'est-à-dire de la pente de la tangente dans la direction du vecteur u au graphe de f au point $(a, f(a))$.

Remarque 11.107.

On peut reformuler la définition en écrivant $x = a + u$, on obtient :

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{f(a + u) - f(a) - T(u)}{\|u\|} = 0.\tag{11.247}$$

Remarque 11.108.

Pourquoi avons-nous posé la condition $\|u\| = 1$? Le but de la dérivée directionnelle dans la direction u est de savoir à quelle vitesse la fonction monte lorsque l'on se déplace en suivant la direction u . Cette information n'aura un caractère « objectif » que si l'on avance à une vitesse donnée. En effet, si on se déplace deux fois plus vite, la fonction montera deux fois plus vite. Par convention, nous demandons donc d'avancer à vitesse 1.

Cas particulier où $n = 2$:

$a = (a_1, a_2)$, $u = (u_1, u_2)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

Un cas particulier des dérivées directionnelles est la dérivée partielle. Si nous considérons la base canonique e_i de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}.\tag{11.248}$$

Dans le cas d'une fonction à deux variables, nous avons donc les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a)\tag{11.249}$$

qui correspondent aux dérivées directionnelles dans les directions des axes. Ces deux nombres représentent de combien la fonction f monte lorsqu'on part de a en se déplaçant dans le sens des axes X et Y .

11.12.1.1 Quelques propriétés et notations

- (1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $v = \alpha u$, alors $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial u}(a)$.
- (2) Si on prend $u = e_j$ le j ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

c'est-à-dire que la dérivée de f au point a dans la direction e_j est la dérivée partielle de f par rapport à sa j ème variable.

- (3) Une fonction peut être dérivable dans certaines directions mais pas dans d'autres (rappelez vous que si la limite à droite est différente de la limite à gauche, la limite n'existe pas).
- (4) Même si une fonction est dérivable en un point dans toutes les directions, on n'est pas sûr qu'elle soit continue en ce point. La dérivabilité directionnelle n'est donc pas une notion suffisante pour assurer la continuité. C'est pourquoi on introduit le concept de *différentiabilité*.

11.13 Dérivée suivant un vecteur

Définition 11.109.

Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, a un point dans U et v un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On dit que f admet une **dérivée suivant le vecteur v au point a** si la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ admet une dérivée en $t = 0$. La dérivée de f suivant le vecteur v au point a est alors cette dérivée, et f est dite dérivable suivant v en a ,

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Définition 11.110.

La fonction $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de composantes $(f_1, \dots, f_n)$, est dite **dérivable suivant v au point a** si toute ses composante f_i , $i = 1, \dots, n$ sont dérivables suivant v au point a . Dans ce cas, nous écrivons

$$\partial_v f(a) = (\partial_v f_1(a), \dots, \partial_v f_n(a))^T. \quad (11.250)$$

On parle aussi souvent de dérivé **dans la direction** du vecteur v . Une **direction** dans $\mathbb{R}^m$ est un vecteur de norme 1. Tant que u est un élément non nul de $\mathbb{R}^m$, nous pouvons parler de la direction de u .

Proposition 11.111.

Soit u un vecteur de norme 1 dans $\mathbb{R}^m$ et soit $v = \lambda u$, avec λ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable suivant v au point a si et seulement si f est dérivable suivant u au point a , en outre

$$\partial_v f(a) = \lambda \partial_u f(a).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \partial_v f(a) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{t} = \\ &= \lambda \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{\lambda t} = \lambda \partial_u f(a). \end{aligned} \quad (11.251)$$

□

Définition 11.112.

Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **dérivées partielles de f au point a** les dérivées de f suivant les vecteurs de base $e_1, \dots, e_m$ au point a , si elles existent.

Si $m = 2, 3$ on peut utiliser la notation f_x, ∂_x ou ∂_1 pour la dérivée partielle suivant e_1, f_y, ∂_y ou ∂_2 pour la dérivée partielle suivant e_2 et f_z, ∂_z ou ∂_3 pour la dérivée partielle suivant e_3 . En général, nous écrivons ∂_i pour noter la dérivée partielle suivant e_i .

Exemple 11.113

Les dérivées partielles de la fonction $f(x, y) = xy^3 + \sin y$ au point $(0, \pi)$ sont

$$\partial_x f(0, \pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \pi) = f_x(0, \pi) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{(t\pi^3 + \sin \pi) - (\sin \pi)}{t} = \pi^3,$$

$$\partial_y f(0, \pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) = f_y(0, \pi) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{0(\pi + t)^3 + \sin(t + \pi) - 0 \cdot \pi^3}{t} = \cos \pi = -1,$$

△ La fonction d'une

seule variable qu'on obtient à partir de f en fixant les $p - 1$ variables $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$ et qui associe à x_i la valeur $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$, est appelée x_i -ème **section** de f en $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$. L' i -ème dérivée partielle de f au point $a = (x_1, \dots, x_m)$ est la dérivée de l' i -ème section de f au point x_i . En pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction on fait une dérivation par rapport à la variable choisie en considérant les autres variables comme des constantes.

Exemple 11.114

Considérons la fonction $f(x, y) = 2xy^2$. Lorsque nous calculons $\partial_x f(x, y)$, nous faisons comme si y était constant. Nous avons donc $\partial_x f(x, y) = 2y^2$. Par contre lors du calcul de $\partial_y f(x, y)$, nous prenons x comme une constante. La dérivée de y^2 par rapport à y est évidemment $2y$, et par conséquent, $\partial_y f(x, y) = 4xy$. △

Exemple 11.115

La fonction $f(x, y) = x^y$ est dérivable au point $(1, 2)$ et on a

$$\partial_x f(1, 2) = (yx^{y-1})_{(x,y)=(1,2)} = 2,$$

$$\partial_y f(1, 2) = \partial_y \left(e^{y \ln x} \right)_{(x,y)=(1,2)} = \left(\ln x e^{y \ln x} \right)_{(x,y)=(1,2)} = \ln(1 - e^{2 \ln(1)}) = 0.$$

△

Définition 11.116.

Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La fonction f est **dérivable sur U suivant le vecteur u** , si f est dérivable suivant le vecteur u en tout point de U .

Pour les fonctions d'une seule variable la dérivabilité en un point a implique la continuité en a . Cela n'est pas vrai pour les fonctions de plusieurs variables : il existe des fonction f qui sont dérivables suivant tout vecteur au point a sans pour autant être continue en a .

Exemple 11.117

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.252)$$

Pour voir que f n'est pas continue en $(0, 0)$ il suffit de calculer la limite de f restreinte à la parabole $y = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Pourtant la fonction f est dérivable en $(0, 0)$ dans toutes les directions. En effet, soit $v = (v_1, v_2)$. Si $v_2 \neq 0$, alors

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2},$$

tandis que si $v_2 = 0$, alors la valeur de $f(tv_1, 0)$ est 0 pour tout t et v_1 , donc la dérivée partielle de f par rapport à x en l'origine existe et est nulle. $\triangle$

Exemple 11.118

Pour une fonction réelle à variable réelle, la dérivabilité entraîne la continuité. Il n'en va pas de même pour les fonctions à plusieurs variables, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.253)$$

Nous avons tout de suite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \quad (11.254)$$

De plus si $u_x \neq 0$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \frac{u_y}{u_x} \|u\|. \quad (11.255)$$

Donc toutes les dérivées directionnelles de f en $(0, 0)$ existent alors que la fonction n'y est manifestement pas continue. En effet sous forme polaire,

$$f(r, \theta) = \frac{r \sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad (11.256)$$

et quelle que soit la valeur de r , en prenant θ suffisamment proche de $\pi/2$, la fraction peut être arbitrairement grande.

Nous verrons par la proposition 11.131 que la différentiabilité d'une fonction implique sa continuité. $\triangle$

Théorème 11.119 (Accroissement finis pour les dérivées suivant un vecteur).

Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. Soient a et b deux points distincts dans U , tels que le segment¹⁹ $[a, b]$ soit contenu dans U . Soit u le vecteur

$$u = \frac{b - a}{\|b - a\|_m}.$$

Si $\partial_u f(x)$ existe pour tout x dans $[a, b]$ on a

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leq \sup_{x \in [a, b]} \|\partial_u f(x)\|_n \|b - a\|_m.$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $g(t) = f((1-t)a - tb)$. Elle décrit la droite entre a et b parce que $g(0) = a$ et $g(1) = b$. En ce qui concerne la dérivée,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1-t-h)a - (t+h)b) - f((1-t)a - tb)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + (t+h)(b-a)) - f(a + t(b-a))}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(a + t(b-a)) \|b - a\|. \end{aligned} \quad (11.257)$$

¹⁹ Définition 5.102.

Le dernier facteur $\|b - a\|$ apparaît pour la normalisation du vecteur u . En effet dans la limite, il apparaît $h(b - a)$, ce qui donnerait la dérivée le long de $b - a$, tandis que u vaut $(b - a)/\|b - a\|$.

Par le théorème des accroissements finis pour g , il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$g(1) = g(0) + g'(t_0)(1 - 0). \quad (11.258)$$

Donc

$$\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{t_0} \|g'(t_0)\| = \sum_{t_0 \in]0, 1[} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(a + t_0(b - a)) \right\| \|b - a\|. \quad (11.259)$$

Mais lorsque t_0 parcourt $]0, 1[$, le point $a + t_0(b - a)$ parcourt le segment $]a, b[$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 11.120.

Dans les mêmes hypothèses, si $n = 1$, alors il existe $\bar{x}$ dans $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \partial_u f(\bar{x}) \|b - a\|_m.$$

Définition 11.121.

Le nombre

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t} \quad (11.260)$$

est la **dérivée directionnelle** de f dans la direction de u au point (a, b) . Il sera noté

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a, b), \quad (11.261)$$

ou plus simplement $\partial_u f(a, b)$.

Lorsque f est différentiable, la dérivée directionnelle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u. \quad (11.262)$$

11.13.1 Gradient : direction de plus grande pente

Étant donné que u est de norme 1, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$|\nabla f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}| \leq \|\nabla f(a, b)\|. \quad (11.263)$$

Donc

$$-\|\nabla f(p)\| \leq \nabla f(p) \cdot u \leq \|\nabla f(p)\|. \quad (11.264)$$

La norme de la dérivée directionnelle (qui est la valeur absolue du nombre au centre) est donc «coincée» entre $-\|\nabla f(p)\|$ et $\|\nabla f(p)\|$. Prenons par exemple

$$u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}. \quad (11.265)$$

Dans ce cas, nous avons exactement

$$\nabla f(p) \cdot u = \|\nabla f(p)\|, \quad (11.266)$$

qui est la valeur maximale que la dérivée directionnelle peut prendre.

La direction du gradient est donc la direction suivant laquelle la dérivée directionnelle est la plus grande. Pour la même raison, la dérivée directionnelle est la plus petite dans le sens opposé au gradient.

En termes bien clairs : lorsqu'on veut aller le plus vite possible au ski, on prend la direction du gradient de la piste de ski. C'est dans cette direction que ça descend le plus vite. Dans quelle direction vont les débutants ? Ils vont perpendiculairement à la pente (ce qui ennuie tout le monde,

mais c'est un autre problème). Les débutants vont donc dans la direction perpendiculaire au gradient. Prenons donc $u \perp \nabla f(p)$ et calculons la dérivée directionnelle de f dans la direction u en utilisant la formule 11.262 :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u = 0 \quad (11.267)$$

parce que nous avons choisi $u \perp \nabla f(p)$. Nous voyons donc que les débutants en ski ont eu la bonne intuition que la direction dans laquelle la piste ne descend pas, c'est la direction perpendiculaire au gradient.

C'est aussi pour cela que l'on a tendance à faire du zig-zag à vélo lorsqu'on monte une pente très forte et qu'on est fatigué. C'est toujours pour cela que les routes de montagne font de longs lacets. La montée est moins rude en suivant une direction proche d'être perpendiculaire au gradient !

Théorème 11.122.

Le gradient des fonction suit à peu près les mêmes règles que les dérivées. Soient f et g deux fonctions différentiables. Nous avons entre autres

- (1) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
- (2) $\nabla(fg)(a, b) = g(a, b)\nabla f(a, b) + f(a, b)\nabla g(a, b)$;
- (3) Dès que $g(a, b) \neq 0$, nous avons

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{g(a, b)\nabla f(a, b) - f(a, b)\nabla g(a, b)}{g(a, b)^2}. \quad (11.268)$$

11.14 Différentielle

Note : pour savoir des choses sur la différentielle de $f: E \rightarrow F$ avec E et F de dimension infinie, il faut aller voir la section 6.24. Ici nous ne parlerons que de dimension finie.

11.14.1 Exemples introductifs

La notion de dérivée est associée à la recherche de la droite tangente à une courbe. Reprenons rapidement le cheminement. La dérivée de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point a est un nombre $f'(a)$, qui définit donc une application linéaire dont le coefficients angulaire est $f'(a)$, et que nous notons df_a :

$$\begin{aligned} df_a: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto f'(a)u. \end{aligned} \quad (11.269)$$

La droite donnée par l'équation

$$y(a + u) = f'(a)u \quad (11.270)$$

est parallèle à la tangente en a . Pour trouver la tangente, il suffit de la décaler de la hauteur qu'il faut. L'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ devient

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = f(a) + df_a(x - a). \quad (11.271)$$

Nous nous proposons de généraliser cette formule au cas de la recherche du plan tangent à une surface.

Exemple 11.123

Considérons $f(x, y) = x^2y + y^2e^x$. Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + y^2e^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 2ye^x. \end{aligned} \quad (11.272)$$

Cet exemple était l'exemple facile où tout se passe bien.

Exemple 11.124

Les choses sont moins simples lorsqu'on considère la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (11.273)$$

On voit que pour tout x et tout y , nous avons $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Donc cette fonction est nulle sur les axes horizontaux et verticaux. Nous avons en particulier

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (11.274)$$

Donc ces dérivées partielles existe.

Il n'est par contre pas question de dire que cette fonction «va bien» autour du point $(0, 0)$. En effet si nous regardons sa valeur sur la droite diagonale $y = x$, nous avons

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}. \quad (11.275)$$

Par conséquent si nous suivons la fonction le long de la droite $y = x$, la hauteur vaut $\frac{1}{2}$ en permanence, sauf juste en $(0, 0)$ où la fonction fait un grand plongeon !

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=(x*y)/(x**2+y**2)
sage: plot3d(f,(x,-2,2),y(-2,2))
```

D'ailleurs elle fait un plongeon le long de toutes les droites (sauf verticale et horizontale). En effet si nous regardons la fonction le long de la droite $y = mx$, nous avons

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}. \quad (11.276)$$

La fonction est donc *constante* sur chacune de ces droites. Il n'est donc pas question de dire que cette fonction est «dérivable» en $(0, 0)$, vu qu'elle fait des grands sauts dans presque toutes les directions. $\triangle$

Nous devons donc trouver mieux que les dérivées partielles pour étudier le comportement des fonctions un peu problématiques.

11.14.2 Définition de la différentielle

Nous nous souvenons de l'équation (11.167) qui nous dit que pour une fonction d'une variable la dérivabilité signifiait qu'il existait un nombre ℓ et une fonction α tels que

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + (x - a)\alpha(x - a) \quad (11.277)$$

et $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$.

En nous inspirant de cela, nous posons la définition suivante.

Définition 11.125.

Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et a un point dans U . Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. On dit que f est **différentiable au point** a s'il existe une application linéaire T de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui satisfait

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^m}} \frac{f(a + h) - f(a) - T(h)}{\|h\|_m} = 0. \quad (11.278)$$

Si une telle T existe on l'appelle **différentielle** de f au point a , et on la note $df(a)$.

Note : df_a est en soi une application $df(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nous notons $df_a(u)$ la valeur de df_a sur le vecteur $u \in \mathbb{R}^m$.

Proposition 11.126.

Si f est différentiable au point (a, b) , alors elle y est continue, c'est à dire que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b). \quad (11.279)$$

Démonstration. Si nous considérons la différence entre $f(x, y)$ et $f(a, b)$, nous avons (en notations matricielle) :

$$|f(X) - f(P)| = |\ell \cdot (X - P) + \|X - P\| \alpha(\|X - P\|)|. \quad (11.280)$$

Le membre de droite tend évidemment vers zéro lorsque X tend vers P . $\square$

Les propositions 11.127 et 11.128 vont montrer qu'en étudiant bien les dérivées partielles, nous pouvons conclure à la différentiabilité d'une fonction. Attention cependant, nous verrons dans l'exemple 11.140 que l'existence des dérivées directionnelles partielles ne permettait pas de conclure à la différentiabilité.

Proposition 11.127.

Soit f une fonction de x et y et un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si les nombres $\partial_x f(a, b)$ et $\partial_y f(a, b)$ existent et si il existe une fonction $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(a, b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \\ &+ \|(x, y) - (a, b)\| \alpha(\|(x, y) - (a, b)\|) \end{aligned} \quad (11.281)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0, \quad (11.282)$$

alors f est différentiable en (a, b) .

Dans cet énoncé nous avons écrit $d((x, y), (a, b))$ la distance entre (x, y) et (a, b) , c'est à dire le nombre $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$. Afin d'écrire l'équation (11.281) sous forme plus compacte, nous introduisons le vecteur

$$\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} \quad (11.283)$$

L'équation (11.281) devient alors

$$f(X) = f(P) + \nabla f(a, b) \cdot (X - P) + \|X - P\| \alpha(\|X - P\|). \quad (11.284)$$

Le vecteur $\nabla f(a, b)$ est appelé le **gradient** de f au point (a, b) .

Proposition 11.128.

Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles $\partial_x f(x, y)$ et $\partial_y f(x, y)$ qui sont elles-mêmes des fonctions continues de x et y . Alors la fonction f est différentiable partout.

Proposition 11.129.

Si f est différentiable en (a, b) alors pour tout vecteur u , la fonction

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + tu_1, b + tu_2) \end{aligned} \quad (11.285)$$

est dérivable en 0 et on a

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \quad (11.286)$$

où nous avons noté $p = (a, b)$.

Démonstration. Récrivons la formule (11.284) sous la forme

$$f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + \|x - p\| \alpha(\|x - p\|). \quad (11.287)$$

Cela étant vrai pour tout x , nous l'écrivons en particulier pour $x = p + tu$ où t est un réel et u est le vecteur unitaire choisi. Nous avons donc

$$f(p + tu) = f(p) + t \nabla f(p) \cdot u + \|tu\| \alpha(\|tu\|). \quad (11.288)$$

En utilisant le fait que u est unitaire, $\|tu\| = |t| \|u\| = |t|$. La dérivée de φ en 0 est alors donnée par

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \nabla f(p) \cdot u + \alpha(|t|). \quad (11.289)$$

Lorsque nous prenons la limite, le membre de gauche devient $\varphi'(0)$ tandis que dans le membre de droite, le second terme disparaît. Nous avons finalement

$$\varphi'(0) = \nabla f(p) \cdot u \quad (11.290)$$

□

Le théorème suivant reprend pas principales propriétés d'une fonction différentiable.

Théorème 11.130.

Si f est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors

- (1) f est continue en a .
- (2) Toute les dérivées directionnelles $\partial_u f(a)$ existent et nous avons l'égalité

$$df_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$u \mapsto df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} u^i, \quad (11.291)$$

si les u^i sont les composantes de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La différentielle de f en a envoie donc un vecteur u sur la dérivée directionnelle de f au point a dans la direction u .

- (3) L'application df_a est une application linéaire.

Le point (3) est évidemment contenu dans la définition de la différentielle, mais c'est bien de la remettre en toute lettres. En regard avec la formule (11.291), elle dit que $\partial_u f(a)$ est linéaire par rapport à u .

Proposition 11.131.

Si f est différentiable au point a alors

- (1) elle est continue en a ,
- (2) elle admet une dérivée dans toutes les directions de $\mathbb{R}^m$,
- (3) si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est la différentielle de f au point a , alors

$$T(u) = df_a(u) = \partial_u f(a). \quad (11.292)$$

La dernière égalité sera de temps en temps utilisée sous la forme

$$df_a(u) = \frac{d}{dt} \left[f(a + tu) \right]_{t=0}. \quad (11.293)$$

Démonstration. La limite

$$\lim_{h \rightarrow 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n}{\|h\|_m} = 0,$$

implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0_m} \|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n = 0.$$

Comme T est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = 0$, d'où la continuité de f au point a .

Si u est un vecteur non nul, la différentiabilité de f au point a implique

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(a+tu) - f(a) - T(tu)\|_n}{\|tu\|_m} = 0,$$

par la linéarité de T et par l'égalité $\|tu\|_m = |t|\|u\|_m$ on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{|t|} = T(u).$$

Donc f est dérivable suivant le vecteur u et $\partial_u f(a) = T(u) = df_a(u)$. □

Cette proposition est à ne pas confondre avec la proposition 11.157 qui dira que si les dérivées partielles *sont continues* sur un voisinage de a , alors f est différentiable en a .

Le lemme suivant regroupe quelques égalités avec lesquelles nous allons souvent travailler. Il explique comment sont liés les dérivées directionnelles, les dérivées partielles et la différentielle.

Lemme 11.132.

Si $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, alors

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt} [f(a+tu)]_{t=0} = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a) \cdot u \quad (11.294)$$

pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^m$

Démonstration. La première égalité est la proposition 11.131, et la seconde est seulement la définition de la dérivée directionnelle avec des notations un peu plus snob. En particulier nous avons

$$df_a(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \quad (11.295)$$

Pour le reste c'est la linéarité de la différentielle qui joue : le vecteur u peut être écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base

$$u = \sum_{i=1}^m u_i e_i, \quad u_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Alors, la linéarité de df_a nous donne

$$df_a(u) = df_a\left(\sum_{i=1}^m u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m u_i (df_a e_i) = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \quad (11.296)$$

Le lien avec le gradient est la définition du produit scalaire (6.382). □

11.14.3 Unicité de la différentielle

Corollaire 11.133.

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ différentiable au point a dans U . Alors l'application $df(a)$, différentielle de f au point a , est unique, c'est à dire que si T_1 et T_2 sont deux applications vérifiant la condition (11.278), alors $T_1 = T_2$.

Démonstration. Pour tout vecteur u , la proposition 11.131 implique que $T_1(u) = T_2(u) = \partial_u f(a)$. $\square$

Corollaire 11.134.

Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. La dérivabilité de f au point a suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une condition nécessaire pour la différentiabilité de f en a .

11.14.4 Cas particuliers

$n = 1$: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a si et seulement si f est différentiable en a et

$$df_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto df_a(x) = f'(a) \cdot x$$

$n = 2$: f est différentiable en $a = (a_1, a_2)$ si et seulement si

$$\lim_{(v_1, v_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2) - [\frac{\partial f}{\partial x}(a) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) v_2]}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0$$

Parmi les vecteurs $u \in \mathbb{R}^n$, un vecteur d'origine $(a, f(a))$ se distingue des autres : le vecteur gradient de f en a donnant la direction de plus grande pente de f en a .

11.14.5 Calcul de valeurs approchées

Si nous remplaçons les accroissements $x - a$ et $y - b$ par h et k , le critère de différentiabilité s'écrit

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \sqrt{h^2 + k^2} \alpha(\sqrt{h^2 + k^2}). \quad (11.297)$$

Le dernier terme du membre de droite tend vers zéro à une vitesse double lorsque h et k tendent vers zéro : d'une part parce que $\sqrt{h^2 + k^2}$ tend vers zéro et d'autre part parce que $\alpha(\sqrt{h^2 + k^2})$ tend vers zéro. Nous avons donc la «bonne» approximation

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b). \quad (11.298)$$

lorsque (x, y) n'est pas trop loin de (a, b) . Cette expression est évidemment une généralisation immédiate de l'équation (11.170). Elle exprime que l'on peut obtenir des informations sur la valeur d'une fonction en (x, y) si on peut calculer la fonction et ses dérivées en un point (a, b) non loin de (x, y) .

Cette formule peut aussi être vue sous la forme suivante, plus pratique dans certains calculs :

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) \simeq f(a, b) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(a, b). \quad (11.299)$$

Exemple 11.135

Prenons la fonction $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$ et calculons une approximation de

$$f\left(\frac{\pi}{3} + 0.01, \frac{\pi}{2} + 0.03\right). \quad (11.300)$$

D'abord les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\sin(x) \sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \cos(x) \cos(y). \end{aligned} \quad (11.301)$$

Nous allons utiliser l'approximation

$$f\left(\frac{\pi}{3} + 0.01, \frac{\pi}{2} + 0.03\right) \simeq f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) + 0.01 \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) + 0.03 \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (11.302)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned} \quad (11.303)$$

Par conséquent

$$f\left(\frac{\pi}{3} + 0.01, \frac{\pi}{2} + 0.03\right) \simeq \frac{1}{2} - 0.01 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{200}. \quad (11.304)$$

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=cos(x)*sin(y)
sage: a=f(pi/3+0.01,pi/2+0.03)
sage: numerical_approx(a)
0.491093815387986
sage: b=1/2-sqrt(3)/200
sage: numerical_approx(b)
0.491339745962156
sage: numerical_approx(a-b)
-0.000245930574169814
```

Cela fait une erreur de l'ordre du dix millième.

△

Remarque 11.136.

Les esprits les plus critiques diront que cette vérification pas Sage n'en est pas une parce que Sage a certainement utilisé un algorithme d'approximation qui se base sur la même idée que ce que nous venons de faire, et que par conséquent le fait qu'il obtienne le même résultat que nous est un peu tautologique.

Ils n'auront pas tort. Cependant, le code source de Sage est disponible publiquement²⁰; vous pouvez aller le lire et vérifier qu'il y a effectivement une *preuve* que le résultat fourni par Sage possède une bonne dizaine de décimales correctes.

Cette disponibilité publique du code source est une des nombreuses différences fondamentale entre Sage et votre calculatrice²¹. Dois-je vous rappeler qu'un des principes fondamentaux de l'éthique scientifique est que les résultats et les méthodes utilisées doivent être absolument ouverts à la vérification et à la critique de tous ?

$$df_p(u) = \nabla f(p) \cdot u. \quad (11.305)$$

Définition 11.137.

Soit un point $a \in \text{int } A$. La fonction f est **différentiable** au point a si il existe une application linéaire $df_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x - a)}{\|x - a\|} = 0. \quad (11.306)$$

20. Voir <http://www.sagemath.org>

21. et les autres logiciels de type fenêtre, pomme ou feuille d'érable.

Si f est différentiable en a , l'application df_a est appelée la différentielle de f en a . Voyons comment cette application linéaire agit sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

La notion de dérivée partielle (ou de dérivée suivant un vecteur) pour une fonction de plusieurs variables n'est pas une généralisation de la notion de dérivée en une variable d'espace. En fait, du point de vue géométrique, la dérivée de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point a est la pente de la ligne droite tangente au graphe de g au point $(a, g(a))$. Cette ligne, d'équation $r(x) = g'(a)x + g(a)$, est la meilleure approximation affine du graphe de g au point a , comme à la figure 11.8.

Le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une surface de deux paramètres dans $\mathbb{R}^3$. Si l'approximation affine d'une telle surface au point $(x, y, f(x, y))$ existe, alors elle est un plan tangent. En dimension plus haute, le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est une surface de m paramètres dans $\mathbb{R}^{m+1}$ et son approximation affine (si elle existe) est un hyperplan de $\mathbb{R}^m$.

Nous allons voir que si f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ l'approximation affine de f au point a est l'élément de $f(a) + \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ qui ressemble le plus à f au voisinage de a . Plus précisément, on utilise les définitions suivantes.

Définition 11.138.

Soient f et g deux applications d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. On dit que g est **tangente** à f au point $a \in U$ si $f(a) = g(a)$ et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - g(x)\|_n}{\|x - a\|_m} = 0.$$

La relation de tangence est une relation d'équivalence. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où f admet une application affine tangente au point a .

En ce qui concerne l'interprétation géométrique, si nous regardons la figure 11.9, et d'ailleurs aussi en voyant la définition 11.278, la fonction est différentiable et la différentielle est T si il existe une fonction α telle que

$$f(a + u) - f(a) - T(u) = \alpha(u) \quad (11.307)$$

où la fonction α satisfait

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(u)\|}{\|u\|} = 0 \quad (11.308)$$

C'est cela qui fait écrire $f(a + u) - f(a) - df_a(u) = o(\|u\|)$ à ceux qui n'ont pas peur de la notation o .

La différentielle df_a est donc la partie linéaire de l'application affine qui approxime au mieux la fonction f autour du point a . La notion de différentielle est la vraie généralisation du concept de dérivée pour fonctions de plusieurs variables, en outre elle nous permet d'expliciter la relation qui associe au vecteur u la dérivée $\partial_u f(a)$, pour f et a fixés.

Remarque 11.139.

Si on remplace les normes $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_n$ par d'autres normes, l'existence et la valeur de la différentielle de f au point a ne sont pas remises en cause. En effet, soient $\|\cdot\|_M$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|_N$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème 6.139, ces normes sont équivalentes à $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_n$ respectivement ; il existe donc des constantes $k, K, l, L > 0$ telles que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^m$ et tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} k\|u\|_M &\leq \|u\|_m \leq K\|u\|_M, \\ l\|v\|_N &\leq \|v\|_n \leq L\|v\|_N. \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sont les mêmes et on a

$$\begin{aligned} \frac{l}{K} \frac{\|f(a + h) - f(a) - T(h)\|_N}{\|h\|_M} &\leq \frac{\|f(a + h) - f(a) - T(h)\|_n}{\|h\|_m} \leq \\ &\leq \frac{L}{k} \frac{\|f(a + h) - f(a) - T(h)\|_N}{\|h\|_M}. \end{aligned} \quad (11.309)$$

Il est donc possible, pour démontrer la différentiabilité ou pour calculer la différentielle, d'utiliser le critère (11.278) avec une norme au choix. Parfois c'est utile.

11.14.6 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable

Chacun des points du théorème 11.130 est en soi un critère pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point.

11.14.6.1 Continuité

Le premier critère à vérifier est donc la continuité. Si une fonction n'est pas continue en un point, alors elle n'y sera pas différentiable. Pour rappel, la continuité en a se teste en vérifiant si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

11.14.6.2 Linéarité

Un second test est la linéarité de la dérivée directionnelle par rapport à la direction : l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ doit être linéaire, sinon df_a n'existe pas.

Exemple 11.140

Examinons la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (11.310)$$

Prenons $u = (u_1, u_2)$ et calculons la dérivée de f dans la direction de u au point $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{tu_1 t^2 u_2}{t^2 u_1^2 + t^4 u_2^4} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + t^2 u_2^4} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{si } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } u_1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.311)$$

Cette application n'est pas linéaire par rapport à u . En effet, notons

$$\begin{aligned} A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0), \end{aligned} \quad (11.312)$$

et vérifions que pour tout u et v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous ayons $A(\lambda u) = \lambda A(u)$ et $A(u + v) = A(u) + A(v)$. Le premier fonctionne parce que

$$A(\lambda u) = A(\lambda u_1, \lambda u_2) = \frac{\lambda^2 u_2^2}{\lambda u_1} = \lambda \frac{u_2^2}{u_1} = \lambda A(u). \quad (11.313)$$

Mais nous avons par exemple

$$A((0, 1) + (2, 3)) = A(2, 4) = \frac{16}{2} = 8, \quad (11.314)$$

tandis que

$$A(0, 1) + A(2, 3) = 0 + \frac{9}{2} \neq 8. \quad (11.315)$$

La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0, 0)$, parce que la candidate différentielle, $df_{(0,0)}(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$, n'est même pas linéaire.

△

Voici une autre façon de traiter la fonction de l'exemple 11.140.

Exemple 11.141

La figure 11.10 représente le domaine d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et sur chacune des parties, elle est définie différemment.

L'expression de f est ici

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ x - y & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ x^2 y & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ x + y & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.316)$$

On note que les deux axes forment une zone à problèmes. La zone hors des axes est un ouvert sur lequel f est différentiable car composée de polynômes. Analysons chacun des points de la forme (a, b) dans la zone à problèmes (c'est-à-dire si $ab = 0$).

Si $a = 0$ et $b > 0$ Un tel point $(0, b)$ est sur l'axe verticale, dans la moitié supérieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y > 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y > 0 \\ x \geq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y > 0 \\ x \geq 0}} x - y = 0 - b = -b$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y > 0 \\ x < 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y > 0 \\ x < 0}} xy = 0b = 0$$

qui sont différentes puisque b est supposé non-nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0, b)$ avec $b > 0$.

Si $a = 0$ et $b < 0$ Un tel point $(0, b)$ est sur l'axe verticale, dans la moitié inférieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y < 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y < 0 \\ x \geq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y < 0 \\ x \geq 0}} x^2 y = 0^2 b = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y < 0 \\ x < 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ y < 0 \\ x < 0}} x + y = 0 + b = b$$

qui sont différentes puisque b est supposé non-nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0, b)$ avec $b < 0$.

Si $a > 0$ et $b = 0$ Un tel point $(a, 0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié droite. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x > 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x > 0 \\ y \geq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x > 0 \\ y \geq 0}} x - y = a - 0 = a$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x > 0 \\ y < 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x > 0 \\ y < 0}} x^2 y = a^2 0 = 0$$

qui sont différentes puisque a est supposé non-nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a, 0)$ avec $a > 0$.

Si $a < 0$ et $b = 0$ Un tel point $(a, 0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié gauche. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x < 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x < 0 \\ y > 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x < 0 \\ y > 0}} xy = a0 = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x < 0 \\ y \leq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ x < 0 \\ y \leq 0}} x + y = a + 0 = a$$

qui sont différentes puisque a est supposé non-nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a, 0)$ avec $a < 0$.

Si $a = 0$ et $b = 0$ Le cas du point $(0, 0)$ est particulier, puisque il est adhérent aux quatre composantes du domaine où la fonction est définie différemment. Pour étudier la continuité, il faut donc étudier quatre limites. Ces limites ont déjà été étudiées ci-dessus et valent toutes 0, ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.

En ce qui concerne la différentiabilité, on sait qu'il est nécessaire que toutes les dérivées directionnelles existent. Calculons la dérivée dans la direction $(0, 1)$ (au point $(0, 0)$) :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f((0, 0) + t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(0, t)}{t} = \dots$$

qu'on sépare en deux cas, car $f(0, t)$ possède une formule différente si $t < 0$ ou si $t \geq 0$:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(0, t)}{t} = \begin{cases} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{0+t}{t} = 1 \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \geq 0}} \frac{f(0, t)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \geq 0}} \frac{0-t}{t} = -1 \end{cases}$$

ce qui prouve que la limite n'existe pas, donc que la dérivée directionnelle n'existe pas, et finalement que la fonction n'est pas différentiable.

Conclusion : La fonction donnée est continue hors des axes et au point $(0, 0)$, mais discontinue partout ailleurs sur les axes. Elle est différentiable hors des axes, mais ne l'est pas sur les axes.

△

11.14.6.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle

Dans la pratique, nous pouvons calculer $\partial_u f(a)$ pour une direction u générale, et puis en déduire $\partial_x f$ et $\partial_y f$ comme cas particuliers en posant $u = (1, 0)$ et $u = (0, 1)$. Une chose incroyable, mais pourtant possible est qu'il peut arriver que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \neq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u^i. \quad (11.317)$$

Ceci se produit lorsque f n'est pas différentiable en a . En voici un exemple.

11.14.6.4 Un candidat dans la définition (marche toujours)

Lorsqu'une fonction est donnée, un candidat différentielle au point (a_1, a_2) est souvent assez simple à trouver en un point :

$$T(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) u_2. \quad (11.318)$$

L'application T est la candidate différentielle en ce sens que si la différentielle existe, alors elle est égale à T . Ensuite, il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - T((x,y) - (a_1,a_2))}{\|(x,y) - (a_1,a_2)\|} = 0 \quad (11.319)$$

ou non. Si oui, alors la différentielle existe et $df_{(a,b)}(u) = T(u)$, sinon²², la différentielle n'existe pas.

Attention : dans la ZAP, les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne peuvent en général pas être calculées en utilisant les règles de calcul (c'est bien pour ça que la ZAP est une zone à problèmes). Il faut d'office utiliser la définition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}, \quad (11.320)$$

et la définition correspondante pour $\partial_y f$.

Conclusion

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $a \in \text{int } A$. Si f est différentiable en a ,

$$(df_a(e_j))_i = d(f_i)_a(e_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = [Jac(f)|_a]_{ij}$$

et la matrice de l'application linéaire df_a est la matrice jacobienne $m \times n$ de f en a notée $Jac(f)|_a$.

11.14.7 Règles de calcul

Proposition 11.142 (Règles de calculs).

Soient f et g des fonctions différentiables en $g(a)$ et a respectivement, alors la composée $f \circ g$ est différentiable en a et

$$d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a$$

et de plus les jacobiniennes correspondantes vérifient

$$J_{f \circ g}(a) = J_f(g(a))J_g(a)$$

où le membre de droite est le produit (non-commutatif!) des deux matrices.

Corollaire 11.143 (Chain rule).

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, alors

$$(f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))g'_i(t).$$

Remarque 11.144. (1) Si $p = 1$, on retrouve la règle usuelle de dérivation de fonctions composées.

(2) Si g est à plusieurs variables, cette règle permet de déterminer les dérivées partielles de $f \circ g$, puisqu'une dérivée partielle peut être vue comme dérivée usuelle par rapport à une seule variable (voir remarque page 623).

(3) Si f est à valeurs vectorielles, cette formule permet de retrouver la jacobienne de $f \circ g$ puisqu'il suffit de traiter chaque composante de f séparément.

Définition 11.145.

Une fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite **différentiable sur l'ouvert** $U \subset \mathbb{R}^m$, si f est différentiable en tout point de U . Dans ce cas, la différentielle de f est l'application

$$df : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ x \mapsto df(x). \quad (11.321)$$

^{22.} y compris si la limite (11.319) n'existe même pas.

Remarque 11.146.

Tout élément T de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^m$ et coïncide avec sa différentielle. En effet, pour tout a et h dans $\mathbb{R}^m$ on a

$$\frac{\|T(a+h) - T(a) - T(h)\|_n}{\|h\|_m} = 0.$$

La proposition 11.131 nous donne une recette très pratique pour calculer la différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 11.147.

Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **gradient** de f la fonction $\nabla f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de composantes

$$\partial_1 f, \dots, \partial_m f.$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))^T$. On appelle **matrice jacobienne** de f la fonction $J(f) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_m f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \dots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix} \quad (11.322)$$

11.14.8 Linéarité

La proposition suivante signifie que différentiation est une opération linéaire sur l'ensemble des fonctions différentiables.

Proposition 11.148.

Soient f et g deux fonction de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$, et soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$ et λf sont différentiables au point a et on a

$$\begin{aligned} d(f+g)(a) &= df(a) + dg(a), \\ d(\lambda f)(a) &= \lambda df(a), \end{aligned} \quad (11.323)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0_m} \frac{\|(f(a+h) + g(a+h)) - (f(a) + g(a)) - df(a).h - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} &\leq \\ \lim_{h \rightarrow 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a).h\|_n}{\|h\|_m} + \lim_{h \rightarrow 0_m} \frac{\|g(a+h) - g(a) - dg(a).h\|_n}{\|h\|_m} &= 0. \end{aligned} \quad (11.324)$$

De même on démontre la propriété $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$. □

11.14.9 Produit

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous notons $f \cdot g$ la fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ donnée par le produit scalaire point par point, c'est à dire

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (11.325)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Le point dans le membre de droite est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Le cas particulier $n = 1$ revient au produit usuel de fonctions :

$$(fg)(x) = f(x)g(x). \quad (11.326)$$

Lemme 11.149.

Si f et g sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction produit fg est également différentiable et

$$d(fg)(a) = df(a)g(a) + f(a)dg(a) \quad (11.327)$$

au sens où pour chaque u dans $\mathbb{R}^m$,

$$d(fg)(a).u = g(a)df(a).u + f(a)dg(a).u. \quad (11.328)$$

Remarquons qu'ici, $f(a)$ et $g(a)$ sont des réels, donc nous pouvons écrire $f(a)dg(a)$ aussi bien que $dg(a)f(a)$ sans ambiguïtés.

Démonstration. Ce que nous devons faire pour vérifier la formule 11.327, c'est de vérifier le critère (11.278) en remplaçant f par fg et $T(h)$ par $g(a)df(a).h + f(a)dg(a).h$.

Ce que nous avons au numérateur est

$$\begin{aligned} \clubsuit &= (fg)(a+h) - (fg)(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h \\ &= f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h. \end{aligned} \quad (11.329)$$

Maintenant, nous allons faire apparaître $(f(a+h) - f(a) - df(a).h)g(a+h)$ en ajoutant et soustrayant ce qu'il faut pour conserver $\clubsuit$:

$$\begin{aligned} \clubsuit &= (f(a+h) - f(a) - df(a).h)g(a+h) \\ &\quad + f(a)g(a+h) + g(a+h)df(a).h \\ &\quad - f(a)g(a) - g(a)df(a).h - f(a)dg(a).h. \end{aligned} \quad (11.330)$$

Nous mettons maintenant $f(a)$ et $fd(a).h$ en évidence là où c'est possible :

$$\begin{aligned} \clubsuit &= (f(a+h) - f(a) - df(a).h)g(a+h) \\ &\quad + f(a)(g(a+h) - g(a) - dg(a).h) \\ &\quad + (g(a+h) - g(a))df(a).h. \end{aligned} \quad (11.331)$$

Nous devons maintenant considérer la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\clubsuit\|}{\|h\|}. \quad (11.332)$$

Étant donné que f et g sont différentiables, les deux premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) - f(a) - df(a).h)}{\|h\|} g(a+h) &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} f(a) \frac{(g(a+h) - g(a) - dg(a).h)}{\|h\|} &= 0. \end{aligned} \quad (11.333)$$

En ce qui concerne le troisième terme, en utilisant la norme d'une application linéaire, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|df(a).h\|}{\|h\|} \leq \sup_{h \in \mathbb{R}^m} \frac{\|df(a).h\|}{\|h\|} = \|df(a)\|, \quad (11.334)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \|g(a+h) - g(a)\| \frac{\|df(a).h\| \|h\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \|g(a+h) - g(a)\| \|df(a)\| = 0 \end{aligned} \quad (11.335)$$

parce que g est continue (la limite du premier facteur est nulle tandis que la norme de $df(a)$ est un nombre constant). Nous avons donc bien prouvé que la formule (11.327) est la différentielle de fg au point a . $\square$

Ce résultat se généralise pour des fonctions f et g de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 11.150.

Soient f et g deux fonction de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$. Alors la fonction $f \cdot g$ est différentiable au point a et on a

$$g(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a) \quad (11.336)$$

au sens où

$$d(f \cdot g)_a(u) = g(a) \cdot (df_a(u)) + f(a) \cdot (dg_a(u)) \quad (11.337)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.

Note : il faut être bien attentif en lisant la formule (11.337). Les points à l'intérieur des grandes parenthèses marquent l'application des différentielles sur u . Le contenu de ces parenthèses sont donc des éléments de $\mathbb{R}^n$. Les points devant les parenthèses dénotent le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ ($f(a)$ et $dg_a(u)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$).

Démonstration. La preuve du cas $n = 1$ est déjà faite ; c'est la formule (11.327). Pour le cas général $n \geq 2$, nous passons au composantes en nous rappelant que

$$(f \cdot g)(a) = \sum_{i=1}^n f_i(a)g_i(a) = \sum_{i=1}^n (f_i g_i)(a). \quad (11.338)$$

En utilisant la linéarité de la différentiation, nous nous réduisons donc au cas des produits $f_i g_i$ qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d(f \cdot g)(a) &= d\left(\sum_{i=1}^n f_i g_i\right)(a) \\ &= \sum_{i=1}^n (df_i(a)g_i(a) + f_i(a)dg_i(a)) \\ &= g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a). \end{aligned} \quad (11.339)$$

Ceci termine la preuve. □

11.14.10 Différentielle de fonction composée

La plus importante entre les règles de différentiation est la règle de différentiation d'une fonction composée (*chain rule* dans les livres anglais et américains). Cette règle généralise la règle de dérivation pour fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il est utile d'introduire d'abord une formulation équivalente de la définition de différentielle

Lemme 11.151.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. La fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable au point a dans U , si et seulement s'il existe une fonction $\sigma_f : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\sigma_f(a, a) = \lim_{x \rightarrow a} \sigma_f(a, x) = 0 \quad (11.340a)$$

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + \sigma_f(a, x)\|x - a\|_m, \quad (11.340b)$$

pour une certaine application linéaire $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Si les conditions (11.340) sont satisfaites alors T est la différentielle de f en a . En effet, dans ce cas nous avons

$$f(a + h) = f(a) + T(h) + \sigma_f(a, a + h)\|h\|, \quad (11.341)$$

et la condition (11.278) devient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\sigma_f(a, a + h)\| \|h\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\sigma_f(a, a + h)\| = 0 \quad (11.342)$$

Si f est différentiable au point a il suffit de prendre $T = df(a)$ et

$$\sigma_f(a, x) = \frac{f(x) - f(a) - df(a).(x - a)}{\|x - a\|_m}.$$

□

Remarque 11.152.

La fonction $\sigma_f(a, x)\|x - a\|_m$ est ce qui avait été appelé $\epsilon(h)$ sur la figure 11.9.

Proposition 11.153.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables respectivement au point a dans U et $b = f(a)$ dans V . Alors la fonction composée $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable au point a et

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a. \quad (11.343)$$

Note : la formule (11.343) est à comprendre de la façon suivante. Si $u \in \mathbb{R}^m$, alors

$$d(g \circ f)_a(u) = \underbrace{dg_{f(a)}}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} \left(\underbrace{df_a(u)}_{\in \mathbb{R}^n} \right) \in \mathbb{R}^p. \quad (11.344)$$

Démonstration. En tenant compte du lemme 11.151 on peut écrire

$$f(a + h) - f(a) = df_a(h) + \sigma_f(a, a + h)\|h\|_m, \quad \forall h \in U - a, \quad (11.345a)$$

$$g(b + k) - g(b) = dg_b(k) + \sigma_g(b, b + k)\|k\|_n, \quad \forall k \in V - b. \quad (11.345b)$$

On sait que $f(a) = b$ et que $f(a + h)$ est un élément de V et $f(a + h) = f(a) + k$ pour $k = df_a(h) + \sigma_f(a, a + h)\|h\|_m$. Par substitution dans la deuxième équation on obtient

$$\begin{aligned} g(f(a + h)) - g(f(a)) &= dg_{f(a)}(df_a(h) + \sigma_f(a, a + h)\|h\|_m) \\ &\quad + \sigma_g(f(a), f(a + h))\|df_a(h) + \sigma_f(a, a + h)\|h\|_m\|_n \\ &= g \circ f(a + h) - g \circ f(a) \\ &= dg_{f(a)} \circ df_a(h) \\ &\quad + \|h\|_m \left[dg_{f(a)} \sigma_f(a, a + h) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_g(f(a), f(a + h)) \left\| df_a \frac{h}{\|h\|_m} + \sigma_f(a, a + h) \right\|_n \right], \end{aligned} \quad (11.346)$$

donc

$$(g \circ f)(a + h) - (g \circ f)(a) = dg_{f(a)} \circ df_a(h) + S(a, a + h)\|h\|_m \quad (11.347)$$

où S représente le contenu du dernier grand crochet. Il ne reste plus qu'à prouver que $S(a, a + h)$ est $o(\|h\|_m)$. En tenant compte du fait que $\sigma_f(a, a + h)$ et $\sigma_g(f(a), f(a + h))$ sont $o(\|h\|_m)$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0_m} \frac{S(a, a + h)}{\|h\|_m} &= \lim_{h \rightarrow 0_m} \frac{dg_{f(a)} \sigma_f(a, a + h)}{\|h\|_m} + \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0_m} \frac{\sigma_g(f(a), f(a + h)) \left\| df_a \frac{h}{\|h\|_m} + \sigma_f(a, a + h) \right\|_n}{\|h\|_m} = 0. \end{aligned} \quad (11.348)$$

□

En appliquant la proposition précédente point par point, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 11.154.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables respectivement sur U et sur V . Alors la fonction composée $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable sur U .

La matrice jacobienne de $g \circ f$ au point a est le produit matriciel des matrices jacobienes de f et de g . Plus précisément, nous avons

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a). \quad (11.349)$$

Remarquez que nous considérons la matrice jacobienne de g au point $f(a)$.

Dans le cas particulier où $m = 1$ et f est une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, dérivable au point a , on a que la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point a si g est différentiable et alors

$$(g \circ f)'(a) = dg(f(a)) \cdot f'(a).$$

En fait, pour les fonctions d'une seule variable la dérivabilité coïncide avec la différentiabilité.

Nous avons aussi une formule importante pour la différentielle des formes bilinéaires.

Lemme 11.155.

Toute application bilinéaire

$$B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \quad (11.350)$$

$$B(a_1, a_2) = a_1 \star a_2$$

est différentiable en tout point (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, et on a

$$dB(a_1, a_2) \cdot (h_1, h_2) = h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \frac{\|B(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - B(a_1, a_2) - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|(a_1 + h_1) \star (a_2 + h_2) - a_1 \star a_2 - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \spadesuit \end{aligned} \quad (11.351)$$

on rajoute et on enlève la quantité $(a_1 + h_1) \star a_2$ dans le numérateur, et on obtient

$$\begin{aligned} \spadesuit &= \frac{\|(a_1 + h_1) \star h_2 + h_1 \star a_2 - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|h_1 \star h_2\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} \leq C \frac{\|h_1\|_m \|h_2\|_n}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} \leq \\ &\leq C \frac{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}^2}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = C \|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}. \end{aligned} \quad (11.352)$$

Si on prend la limite de cette expression pour $(h_1, h_2) \rightarrow (0_m, 0_n)$ on obtient 0, donc la preuve est complète. À noter, que dans l'avant-dernier passage on a utilisé la continuité des applications linéaires $\text{proj}_m : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\text{proj}_n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à chaque point (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ associent a_1 et a_2 respectivement. $\square$

Proposition 11.156.

Soit V et W deux espaces vectoriels et $\varphi : V \rightarrow W$ un isomorphisme. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow V$ une application telle que $\varphi \circ f : \mathbb{C} \rightarrow W$ soit différentiable.

Alors f est différentiable et $df = \varphi^{-1} \circ d(\varphi \circ f)$.

Démonstration. Si T est la différentielle de $\varphi \circ f$ au point z nous avons

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{(\varphi \circ f)(z + h) - (\varphi \circ f)(z) + T(h)}{h} = 0. \quad (11.353)$$

En appliquant φ aux deux membres, et en permutant avec la limite (parce que φ est continue),

$$\varphi \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) + \varphi^{-1}T(h)}{h} = 0, \quad (11.354)$$

ce qui signifie que f est différentiable et que $df = \varphi^{-1} \circ T = \varphi^{-1} \circ d(\varphi \circ f)$. $\square$

11.14.11 Différentielle et dérivées partielles

Proposition 11.157.

Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et a un point dans U . Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. Si toutes les dérivées partielles de f existent sur U et sont continues au point a alors f est différentiable au point a .

Démonstration. On se limite au cas $m = 2$. Pour rendre les calculs plus simples on utilise ici la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$, mais comme on a vu plus en haut, cela ne peut pas avoir des conséquences sur la différentiabilité de f . Si la différentielle de f au point a existe alors elle est définie par la formule

$$df_a(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v_2$$

pour tout v dans $\mathbb{R}^m$.

On commence par prouver le résultat en supposant que les dérivées partielles de f au point a sont nulles. La différentiabilité de f signifie que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta > 0$ telle que si $\|v\|_\infty \leq \delta$ alors

$$\frac{\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n}{\|v\|_\infty} \leq \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} & \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n = \\ & = \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2) + f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leq \\ & \leq \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n + \|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n. \end{aligned} \quad (11.355)$$

Comme la dérivée partielle $\partial_x f$ est nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta_1 > 0$ telle que si $|v_1| \leq \delta_1$ alors

$$\|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leq \varepsilon |v_1|.$$

Pour l'autre terme on a, par la proposition 11.119,

$$\begin{aligned} & \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n \leq \\ & \leq \sup\{\|\partial_y f(x)\|_n \mid x \in S\} |v_2|. \end{aligned} \quad (11.356)$$

où S est le segment d'extrémités $(a_1 + v_1, a_2)$ et $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$. Comme la dérivée partielle $\partial_y f$ est continue et nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il existe une constante $\delta_2 > 0$ telle que si $\|(u_1, u_2)\|_\infty \leq \delta_2$ alors $\|\partial_y f(a_1 + u_1, a_2 + u_2)\|_n \leq \varepsilon$. Si on choisit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ le segment S est contenu dans la boule de rayon δ centrée au point a et on obtient

$$\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leq \varepsilon |v_1| + \varepsilon |v_2| \leq 2\varepsilon \|v\|_\infty.$$

Cela prouve que f est différentiable en (a_1, a_2) et que la différentielle est nulle :

$$df_{(a_1, a_2)} = 0. \quad (11.357)$$

Dans le cas général, où les dérivées partielles de f au point a ne sont pas spécialement nulles, on peut considérer la fonction²³

$$g(x, y) = f(x, y) - \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y, \quad (11.358)$$

23. Vous verrez dans la discussion à propos de la fonction (17.117) pourquoi cette fonction ne fonctionne pas dans le cas de la dimension infinie.

qui a dérivées partielles nulles au point a . La fonction g est donc différentiable. La fonction f est maintenant la somme de g et de la fonction linéaire et continue $(x, y) \mapsto \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y$. On verra dans la prochaine section que la somme de deux fonctions différentiables est une fonction différentiable. Par conséquent, la fonction f est différentiable. $\square$

Remarque 11.158.

En dimension infinie, il n'est pas vrai que l'existence et la continuité de toutes les dérivées partielles en un point implique la différentiabilité en ce point. Pour donner un exemple, nous allons continuer l'exemple 6.215 avec la fonction 17.117 sur un espace de Hilbert.

En dimension infinie nous aurons le théorème 6.233 qui donnera quelque chose de moins fort.

Étant donné que pour tout vecteur u dans $\mathbb{R}^m$ on a $\partial_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$, le gradient de f nous donne la direction dans laquelle la croissance de f est maximale. Soit C une colline et soit f la fonction que à chaque point (x, y) de la Terre associe son altitude. Si nous voulons monter la colline le plus vite possible nous n'avons qu'à suivre la direction ∇f à chaque point. Elle est la projection sur le plan x - y de la direction de pente maximale. Au contraire, la direction $-\nabla f$ est la direction de croissance minimale.

La matrice jacobienne calculé au point a est la matrice associée canoniquement à l'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

11.14.12 Plan tangent

On a dit au début de cette section que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ alors le graphe de f est une surface à deux paramètres et que l'application affine tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est un plan. Maintenant on sait que ce plan est celui d'équation

$$T_a(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2). \quad (11.359)$$

Le plan tangent au graphe de f au point a est le graphe de cette fonction T_a .

Remarque 11.159.

Il existe cependant des fonctions différentiables dont les dérivées partielles ne sont pas continues. La construction d'un tel exemple est cependant délicate, et nous le ferons pas ici. Retenez cependant que si dans un exercice vous obtenez que les dérivées partielles ne sont pas continues, vous ne pouvez pas immédiatement en conclure que la fonction ne sera pas différentiable.

11.14.13 Calcul de différentielles

Remarque 11.160.

En pratique, ayant une formule pour la fonction f , on dérive –grâce aux règles usuelles de dérivation– par rapport à la variable x_i en considérant que les autres $(x_j$ avec $j \neq i)$ sont des constantes.

Exemple 11.161

Pour $f(x, y) = xy + x^2$, les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$\triangle$

Des *règles de calcul* sont d'application. En particulier, quand ces opérations existent, les sommes, différences, produits, quotients et compositions d'applications différentiables sont différentiables.

Toute application linéaire est différentiable, et sa différentielle en tout point est égale à l'application elle-même. En particulier, les *projections canoniques*, c'est-à-dire les applications du type $(x, y, z) \mapsto y$, sont linéaires donc différentiables.

Exemple 11.162

Les cas suivants sont faciles :

- (1) En combinant les projections canoniques avec les règles de calculs, on obtient que toute fonction polynômiale à n variables est différentiable comme application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- (2) Toute fonction rationnelle, du type $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, est différentiable en tout point a tel que $Q(a) \neq 0$.
- (3) Pour une fonction d'une variable $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le caractère différentiable et le caractère dérivable coïncident. De plus, on a

$$df_a(u) = f'(a)u.$$

△

11.14.14 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent

Notons G , le graphe d'une fonction f , c'est à dire

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x, y)\}. \quad (11.360)$$

Première affirmation : si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ est une courbe telle que $\gamma(0) = (a, f(a))$, alors $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ est dans le plan tangent à G au point $(a, f(a))$.

Plus fort : tous les éléments du plan tangent sont de cette forme.

Le plan tangent à G en un point $x \in G$ est donc constitué des vecteurs vitesse de tous les chemins qui passent par x .

Prenons maintenant S , une courbe de niveau de G , c'est à dire

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x, y) = C\}. \quad (11.361)$$

Si nous prenons un chemin dans G qui est, de plus, contraint à S , c'est à dire tel que $\gamma(t) \in S$, alors $\gamma'(0)$ sera tangent à G (ça, on le savait déjà), mais en plus, $\gamma'(0)$ sera tangent à S , ce qui est logique.

La morale est que si vous prenez un chemin qui se ballade dans n'importe quoi, alors la dérivée du chemin sera un vecteur tangent à ce n'importe quoi.

En outre, si $\gamma(t) \in S$ et $\gamma(0) = a$, alors

$$\langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = 0, \quad (11.362)$$

c'est à dire que le vecteur tangent à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient. Cela est intuitivement logique parce que la tangente à la courbe de niveau correspond à la direction de *moins* grande pente.

11.14.15 Gradient et recherche du plan tangent

Nous avons maintenant en main les concepts utiles pour trouver l'équation du plan tangent à une surface.

De la même manière que la tangente à une courbe était la droite de coefficient directeur donné par la dérivée, maintenant, le plan tangent à une surface est le plan dont les vecteurs directeurs sont les dérivées partielles :

La généralisation de l'équation (11.271) est

$$T_a(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x - a)^i \quad (11.363)$$

Nous introduisons aussi souvent l'opérateur différentiel abstrait **nabla**, noté ∇ et qui est donné par le vecteur

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (11.364)$$

Les égalités suivantes sont juste des notations, sommes toutes logiques, liées à ∇ :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \quad (11.365)$$

et

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \quad (11.366)$$

Ce dernier est un élément de $\mathbb{R}^n$: chaque entrée est un nombre réel.

Définition 11.163.

Le vecteur gradient de f au point a est le vecteur donné par la formule (11.366).

La notation ∇ permet d'écrire la différentielle sous forme un peu plus compacte. En effet, la formule (11.291) peut être notée

$$df_a(u) = \langle \nabla f(a), u \rangle. \quad (11.367)$$

En utilisant ce produit scalaire, l'équation (11.363) peut se récrire

$$T_a(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x - a)^i = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle. \quad (11.368)$$

Afin d'éviter les confusions, il est parfois souhaitable de bien mettre les parenthèses et noter $(\nabla f)(a)$ au lieu de $\nabla f(a)$.

Proposition 11.164.

$\nabla f(a) \perp S_a$

$$z = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x - a)^i. \quad (11.369)$$

Cas particulier où $n = 2$:

Le plan T_a avec $a = (a_1, a_2)$ a pour équation dans $\mathbb{R}^3$:

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2). \quad (11.370)$$

Définition 11.165.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point a . Le plan tangent au graphe de f en $(a, f(a))$ est l'ensemble des points

$$\begin{aligned} T_a f &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + df_a(x - a)\} \\ &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle\} \end{aligned}$$

Nous avons vu que, de la même façon qu'en deux dimensions nous avons l'approximation (11.169) d'une fonction par sa tangente, en trois dimensions nous avons l'approximation suivante d'une fonction de deux variables :

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad (11.371)$$

lorsque (x, y) n'est pas trop loin de (a, b) . Cela signifie que le graphe de f ressemble au graphe de la fonction $T_{(a,b)}$ donnée par

$$T_{(a,b)}(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b). \quad (11.372)$$

En notations compactes :

$$T_p(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p). \quad (11.373)$$

Le graphe de la fonction T_p sera le **plan tangent** au graphe de f au point p . L'équation du plan tangent sera donc

$$z - f(p) = \nabla f(p) \cdot (x - p). \quad (11.374)$$

Remarque 11.166.

Lorsque nous utilisons la notation vectorielle, la lettre « x » désigne le vecteur (x, y) . Il faut être attentif. Dans un cas x est un vecteur dans l'autre c'est une composante d'un vecteur.

Les champs de vecteurs et tout ce qui s'y rapportent jouent un rôle crucial en électromagnétisme. Voir par exemple [149].

11.15 Jacobienne

11.15.1 Rappels et définitions

Dans cette section nous considérons des fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ où $D \subset \mathbb{R}^n$, et un point $a \in \text{Int } D$ où f est différentiable.

Remarque 11.167.

La définition de continuité (resp. différentiabilité) pour une fonction à valeurs vectorielles est celle introduite précédemment, et on remarque que pour avoir la continuité (resp. différentiabilité) de f en un point, il faut et il suffit de chacune des composantes de $f = (f_1, \dots, f_m)$, vues séparément comme fonctions à n variables et à valeurs réelles, soit continue (resp. différentiable) en ce point.

Définition 11.168.

La **jacobienne** de f en a est la matrice de l'application linéaire donnée par la différentielle. Elle a de nombreuses notations

$$J_f(a) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial x_1, \dots, x_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad (11.375)$$

Autrement dit, c'est la matrice composée de l'ensemble des dérivées partielles de f . Le **jacobien** de f au point a est le déterminant de cette matrice.

Si $m = 1$, cette matrice ne contient qu'une ligne ; c'est donc un vecteur appelé le **gradient** de f au point a et noté $\nabla f(a)$.

Remarque 11.169. (1) Si la fonction est supposée différentiable, calculer la jacobienne revient à connaître la différentielle. En effet, par linéarité de la différentielle et par définition des dérivées partielles, nous avons

$$df_a(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ et où le membre de droite est un produit matriciel

(2) Remarquons que la jacobienne peut exister en un point donné sans que la fonction soit différentiable en ce point !

11.16 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

À peu près toutes les notions que vous connaissez à propos de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se généralisent immédiatement au cas de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Nous disons que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **de classe** C^1 si chacune de ses composantes f_i est de classe C^1 en tant que fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La dérivée de f est donnée par la dérivée composante par composante. Pour l'intégrale de f , il en va de même : composante par composante.

$$\int f(x)dx = \left(\int f_1(x)dx, \int f_2(x)dx, \dots, \int f_n(x)dx \right). \quad (11.376)$$

Par exemple si nous considérons le mouvement d'une particule sur une hélice, la position est donnée par

$$f(t) = (R \sin(t), R \cos(t), t). \quad (11.377)$$

La vitesse est donnée par

$$f'(t) = (R \cos(t), -R \sin(t), 1), \quad (11.378)$$

et l'intégrale sera donnée par

$$\int f(t)dt = \left(-R \cos(t) + C_1, R \sin(t) + C_2, \frac{t^2}{2} + C_3 \right). \quad (11.379)$$

Si nous considérons une pierre lancée horizontalement du sommet d'une falaise avec une vitesse initiale v_0 , la vitesse de la pierre sera donnée par

$$v(t) = (v_0, gt). \quad (11.380)$$

Pour trouver la position, nous intégrons la vitesse par rapport au temps :

$$f(t) = \int v(t)dt = (v_0 t + C_1, \frac{gt^2}{2} + C_2). \quad (11.381)$$

Notez qu'il faut une constante d'intégration différente pour chaque composantes.

Lemme 11.170.

Pour toute fonction $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\left\| \int_a^b u(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|dt \quad (11.382)$$

pourvu que le membre de gauche ait un sens.

Démonstration. Étant donné que $\int_a^b u(t)dt$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, par la proposition 6.386, il existe un $\xi \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 tel que

$$\left\| \int_a^b u(t)dt \right\| = \xi \cdot \int_a^b u(t)dt = \int_a^b u(t) \cdot \xi dt \leq \int_a^b \|u(t)\| \|\xi\| dt = \int_a^b \|u(t)\| dt. \quad (11.383)$$

□

11.17 Graphes de fonctions de plusieurs variables

La plus grande partie de ce cours est consacrée à l'étude des fonction de plusieurs variables. Nous allons maintenant donner quelques indication sur comment «dessiner» une telle fonction. Vous connaissez déjà la définition de graphe pour une fonction f d'une seule variable à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des point du plan de la forme $(x, f(x))$. Vous voyez que cet ensemble n'est pas vraiment un gros morceau de $\mathbb{R}^2$ parce que son intérieur est vide : il y a une seule valeur de f qui correspond au point x , donc une boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(x, f(x))$ de n'importe quel rayon contient toujours des points qui ne font pas partie du graphe de f .

Nous voulons donner une définition assez générale pour le graphe d'une fonction

Définition 11.171.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le **graphe** de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme

$$\text{Graph } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid y = f(x)\}. \quad (11.384)$$

Si f est une fonction de deux variables indépendantes x et y à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors un point dans le graphe de f est un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$z = f(x, y), \quad (11.385)$$

ou encore, un point de la forme

$$(x, y, f(x, y)). \quad (11.386)$$

Ici nous sommes intéressés par les fonctions de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, notre définition se spécialise

Définition 11.172.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Le **graphe** de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ donné par

$$\text{Graph } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}. \quad (11.387)$$

Étant donné que nous ne donnerons des exemples que de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la définition devient

$$\text{Graph } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}. \quad (11.388)$$

C'est cette définition qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on travaille sur des dessins en trois dimensions.

Nous avons parfois besoin de donner des représentations graphiques d'une fonction. Nous pouvons, par exemple, penser à la fonction qui associe à un point de la Terre son altitude. Lorsqu'on part pour une promenade en montagne on a envie de connaître le graphe de cette fonction qui correspond en fait à la surface de la montagne. Bien sûr nous ne voulons pas amener avec nous un modèle en 3D de la montagne donc il nous faut une méthode efficace pour projeter le graphe de f sur le plan x - y tout en gardant les informations fondamentales. Pour cela nous avons besoin de deux définitions (à ne pas confondre!)

Définition 11.173.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **z -section** de $\text{Graph } f$ à la hauteur c est donné par

$$S_c^z = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = c\}.$$

Définition 11.174.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La **courbe de niveau** de f à la hauteur c est l'ensemble

$$N_c = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}. \quad (11.389)$$

On peut représenter la fonction f d'une façon très précise en traçant quelques unes de ses courbes de niveau. Dans la suite on pourra considérer aussi les x -sections et les y -sections du graphe d'une fonction de deux variables. La x -section de $\text{Graph } f$ à la hauteur a est

$$S_a^x = \{(a, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(a, y) = z\}.$$

Comme vous avez peut-être déjà compris, S_a^x est le graphe de la fonction de y qu'on obtient de f en fixant $x = a$. Cette fonction est appelée x -section de f pour $x = a$.

Certaines surfaces dans $\mathbb{R}^3$ sont le graphe d'une fonction.

Exemple 11.175

Quelques graphes importants.

Un plan non vertical Tout plan dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrit par une équation de la forme

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = r,$$

où, (x_0, y_0, z_0) est vecteur dans $\mathbb{R}^3$, et a, b, c et r sont des nombres réels. Si $c \neq 0$ alors le plan n'est pas vertical et on peut dire que il est le graphe de la fonction

$$P(x, y) = \frac{r + cz_0 - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{c},$$

quitte à choisir des nouvelles constantes s, t, q ,

$$P(x, y) = sx + ty + q.$$

Un paraboloïde elliptique Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PE_1(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PE_2(x, y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes elliptiques. Le premier est contenu dans le demi-espace $z \geq 0$, l'autre dans $z \leq 0$. Le nom de cette surface vient de la forme de ses sections. En fait toutes sections S_c^z sont des ellipses, alors que les section S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Un paraboloïde hyperbolique (selle) Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PH_1(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PH_2(x, y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes hyperboliques. Remarquez que les sections S_c^z de ce graphe sont des hyperboles, alors que les section S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Une demi-sphère La fonction $S^+ = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ a pour graphe la demi-sphère supérieure centrée en l'origine et de rayon R . Le dernier de ces exemples nous signale une chose très importante : une sphère entière n'est pas le graphe d'une fonction de x et y . Par contre, une demi-sphère est bien le graphe de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

L'équation que nous utilisons pour d'écrire une sphère de rayon R centrée en l'origine est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Donc, à chaque point (x, y) dans le disque $x^2 + y^2 \leq R^2$ (notez que ce disque est contenu dans la section S_0^z), on peut associer deux valeurs de z : $z_1 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Par définition, une fonction n'associe qu'un seul valeur à chaque point de son domaine, d'où l'impossibilité de décrire cette sphère comme le graphe d'une fonction de x et y .

△

Considérons la fonction $Sp : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à (x, y, z) la valeur $x^2 + y^2 + z^2$. La sphère de rayon R centrée en l'origine est l'ensemble de niveau N_{R^2} de Sp . L'ensemble de niveau N_0 de Sp est l'origine, et tous les ensemble de niveau de hauteur négative sont vides. La même chose est vraie pour les ellipsoïdes centrées en l'origine avec les axes x, y et z comme axes principaux et comme longueurs de demi-axes a, b et c . Voici la fonction dont il sont les ensemble de niveau

$$El(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Exemple 11.176

Des ensembles de niveau importants.

Tout graphe Le graphe de toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peut être considéré comme l'ensemble de niveau zéro de la fonction $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

Hyperboloïdes Les hyperboloïdes, comme les ellipsoïdes, sont une famille d'ensemble de niveau. En particulier, nous considérons des hyperboloïdes dont l'axe de symétrie est l'axe des z et qui sont symétriques par rapport un plan $x-y$. Une fois que les paramètres a , b et c sont fixés la fonction que nous intéressé est

$$Hyp(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

Les ensembles de niveau N_d pour $d > 0$ sont connexes, on les appelle *hyperboloïdes à une feuille*. L'ensemble de niveau N_0 est *cône (elliptique)*, le deux moitiés du cône se touchent en l'origine. Enfin, les ensembles de niveau N_d pour $d < 0$ ne sont pas connexes et pour cette raison on les appelle *hyperboloïdes à deux feuilles*.

△

11.18 Graphes de fonctions à plusieurs variables

La physique, et les sciences en général, regorge de fonctions à plusieurs variables.

Accélération centripète ²⁴ Si une masse m tourne sur un cercle, elle subira une accélération dirigée vers l'intérieur égale à

$$F(v, r) = \frac{mv^2}{r} \quad (11.390)$$

où r est le rayon du cercle et v est la vitesse.

Pression dans un gaz Si on a n moles de gaz dans un volume V à une température T , alors la pression sera donnée par la fonction de trois variables

$$p = \frac{nRT}{V} \quad (11.391)$$

où R est la constante des gaz parfaits.

En mathématique, on peut inventer de nombreuses fonctions de plusieurs variables. La fonction

$$f(x, y) = x^2 + xy \cos(x^2 + y^3) \quad (11.392)$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$. La fonction

$$f(x, y, z) = \frac{x + y - 2z}{1 - x^2 - y^2 - z^2} \quad (11.393)$$

est définie sur $\mathbb{R}^3$ moins la sphère unité $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Le **graphe** d'une fonction de deux variables $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\{(x, y, f(x, y)) \text{ tel que } (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (11.394)$$

Ce graphe est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 11.177

Tracer le graphe de la fonction

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2. \quad (11.395)$$

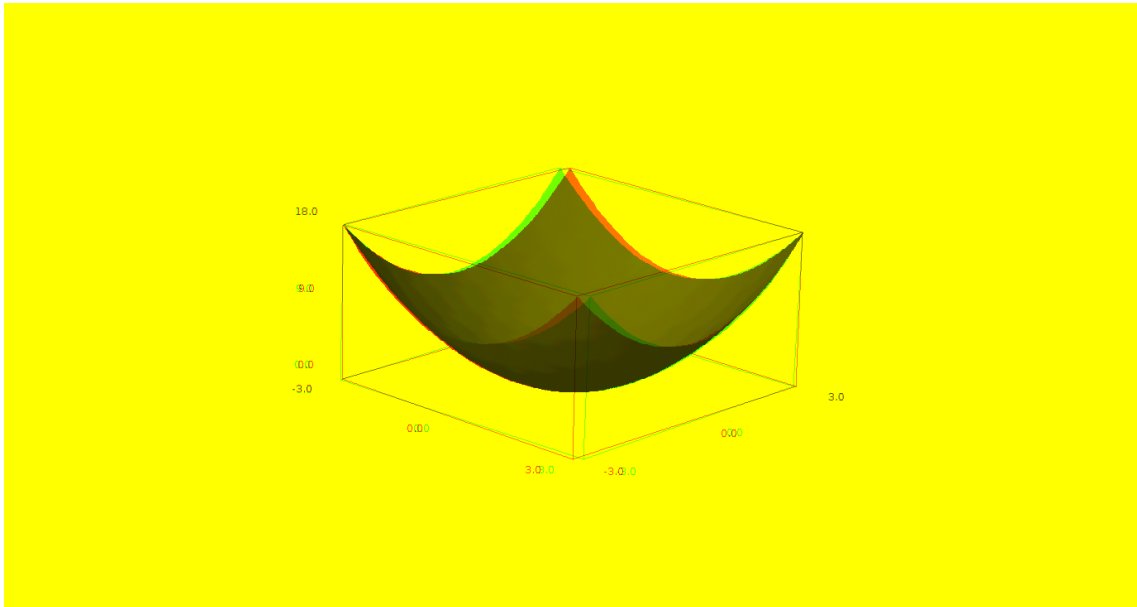
Le plus simple est de demander à Sage de nous fournir une représentation 3D

24. Appelez la «centrifuge» si vous voulez; ça ne me fait ni chaud ni froid.

```
-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11          |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
|-----
```

```
sage: f(x,y)=x**2+y**2
sage: plot3d(f,(x,-3,3),(y,-3,3))
```

Voici ce que cela donne²⁵ : (à regarder avec des lunettes bleues et rouges) :



À part que l'ordinateur l'a dit, est-ce qu'on peut comprendre pourquoi le graphe de la fonction $x^2 + y^2$ ressemble à un bol ? En coordonnées cylindriques, le graphe s'écrit

$$z = r^2. \quad (11.396)$$

Donc il se fait que plus on s'éloigne du point $(0,0)$ dans le plan XY , plus le graphe va monter. Et il monte à quelle vitesse ? Il monte à la vitesse r^2 . Il s'agit donc de dessiner la fonction $z = r^2$ dans le plan et de la «faire tourner».

△

11.19 Courbes de niveau

Une technique utile pour se faire une idée de la forme d'une fonction en trois dimensions est de tracer les **courbes de niveau**. La courbe de niveau de hauteur h est la courbe dans le plan donnée par l'équation

$$f(x,y) = h. \quad (11.397)$$

Exemple 11.178

Dessignons par exemple les courbes de niveau de la fonction

$$f(x,y) = x + y + 2. \quad (11.398)$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x + y + 2 = h$, c'est à dire

$$y(x) = -x + h - 2. \quad (11.399)$$

25. En vrai, ce que Sage donne est un objet qu'on peut même faire bouger.

Par conséquent la courbe de niveau de hauteur 0 est $y = -x - 2$, celle de hauteur 5 est $y = -x + 3$, etc.

Nous pouvons également nous aider de Sage pour ce faire :

```
-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11 |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
-----

sage: f(x,y)=x+y+2
sage: var('h')
h
sage: niveau(h,x)=solve(f(x,y)==h,y)[0].rhs()
sage: g1(x)=niveau(1,x)
sage: g1
x |--> -x - 1
```

Ici la fonction `g1` est la courbe de niveau 1.

Si on veut faire tracer une courbe de niveau, Sage peut le faire :

```
sage: implicit_plot(f(x,y)==1,(x,-3,3),(y,-4,4))
```

Cela tracera la courbe de niveau $h = 1$ dans la partie du plan $x \in [-3, 3]$ et $y \in [-4, 4]$.

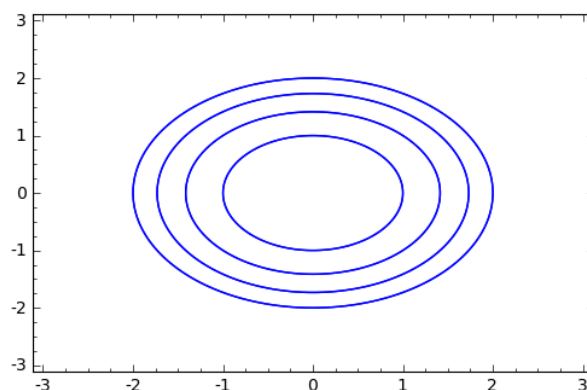
△

Il est bien entendu possible de créer automatiquement 50 courbes de niveau et de demander de les tracer toutes sur le même graphe.

```
1  #! /usr/bin/sage -python
2  # -*- coding: utf8 -*-
3
4  from sage.all import *
5
6  var('x,y')
7  f=x**2+y**2
8  G=Graphics()
9  a=3
10 for i in range(0,5):
11     G=G+implicit_plot(f==i,(x,-a,a),(y,-a,a))
12 show(G)
```

courbeNiveau.py

Le résultat est :



Notez que les courbes sont censées être des cercles : les axes X et Y n'ont pas la même échelle. Vous trouverez sur cette page tout ce qu'il vous faudra pour créer des courbes de niveau avec Sage.

Exemple 11.179

Un exemple plus riche en enseignements est celui de la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2. \quad (11.400)$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x^2 - y^2 = h$.

Commençons par $h = 0$. Dans ce cas nous avons $(x + y)(x - y) = 0$ et par conséquent les courbes de niveau de hauteur zéro sont les deux droites $x + y = 0$ et $x - y = 0$.

Voyons ensuite la courbe de niveau $h = 1$. Cela est l'équation $x^2 - y^2 = 1$, c'est à dire

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \quad (11.401)$$

C'est une fonction qui n'est définie que pour $|x| \geq 1$. Avec $x = 1$ nous avons $y = 0$. Ensuite, lorsque x grandit, y grandit également, mais la courbe ne peut pas croiser la courbe de niveau $h = 0$. Donc, suivant les notations de la figure 11.11, la courbe de niveau «part» de P et doit monter sans croiser les diagonales.

En ce qui concerne la courbe de niveau $h = -1$, elle correspond à la courbe $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$ qui est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement que précédemment nous amène à la figure 11.12.

△

Une autre façon de voir les courbe de niveau est de dire que la courbe de niveau de hauteur h est la projection dans le plan XY de la section du graphe de f par le plan $z = h$.

On peut également définir le graphe de fonctions de trois (ou plus) variables. Le graphe de la fonction $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\{(x, y, z, f(x, y, z)) \text{ tel que } (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4. \quad (11.402)$$

De tels graphes ne peuvent pas être représentés sur une feuille de papier. Il est toutefois possible de définir les ensembles de niveaux :

$$E_h = \{(x, y, z) \in D \text{ tel que } f(x, y, z) = h\}. \quad (11.403)$$

Ce sont des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ que l'on peut dessiner.

Exemple 11.180

Les surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sont des sphères. Il n'y a pas de surfaces de niveau pour les «hauteurs» négatives. △

Exemple 11.181

Considérons la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. En coordonnées cylindrique, cette fonction s'écrit

$$f(r, \theta, z) = r^2 - z^2. \quad (11.404)$$

La surface de niveau 0 est donnée par l'équation $r = |z|$. Cela fait un cercle à chaque hauteur, dont le rayon grandit linéairement avec la hauteur ; le tout est donc un cône. C'est d'ailleurs le cône obtenu par rotation de la courbe de niveau $h = 0$ que nous avons obtenue pour la fonction $x^2 - y^2$.

En ce qui concerne les ensembles de niveau positifs, ils sont donnés par

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - h}. \quad (11.405)$$

Notez qu'ils ne sont pas définis pour $r \geq h$. Cela pose un petit problème quand on veut le tracer à l'ordinateur :

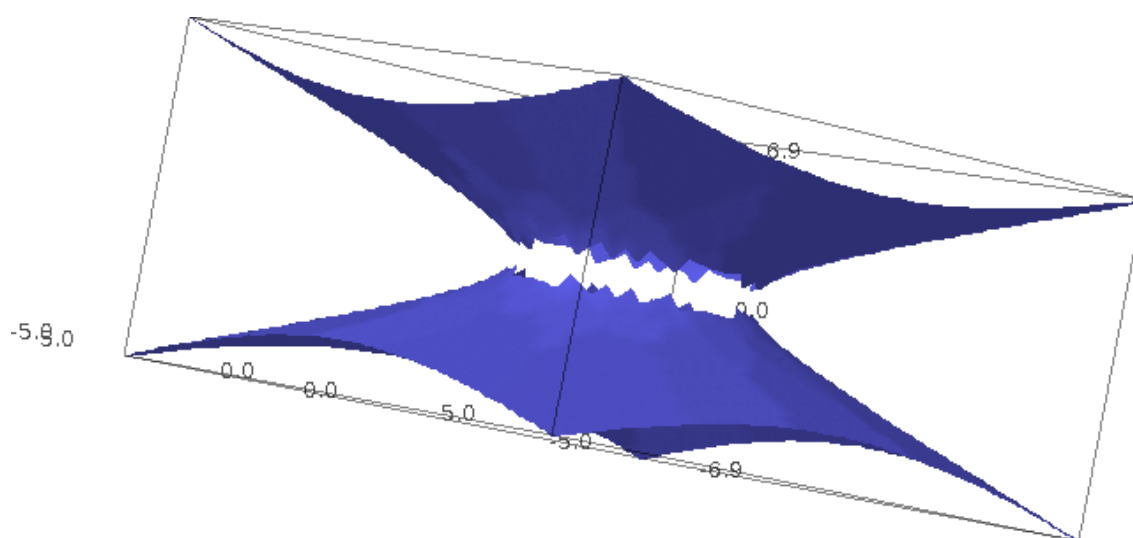
```

-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11          |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
-----

sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: F+G

```

Le résultat est ²⁶ :



On voit qu'il y a un grand trou au centre correspondant aux z proches de zéro. Or d'après l'équation, il n'en est rien : en $z = 0$ il y a bel et bien tout un cercle. Afin d'obtenir une meilleure image, il faut demander de tracer avec un maillage plus fin :

```

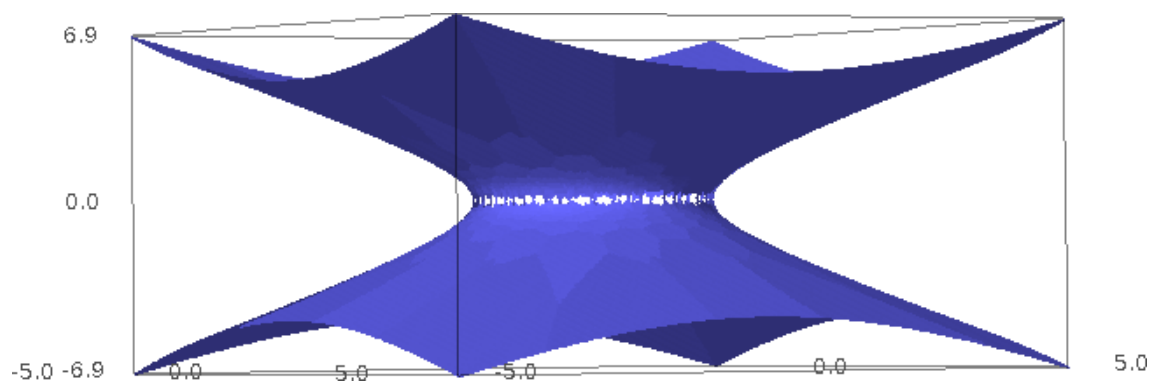
-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11          |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
-----

sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: F+G

```

Le temps de calcul est un peu plus long, mais le résultat est meilleur :

²⁶. Encore une fois : ça donne mieux à l'écran, et vous pouvez le faire bouger ; je vous encourage à le faire !



△

11.20 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction différentiable de U , ouvert de $\mathbb{R}^m$, dans $\mathbb{R}^n$. L'application différentielle de f est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} df : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ a &\mapsto df_a. \end{aligned} \quad (11.406)$$

Nous savons que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel normé avec la définition 6.79. Si T est un élément dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ alors la norme de T est définie par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{\|T(x)\|_n}{\|x\|_m} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ \|x\|_m \leq 1}} \|T(x)\|_n.$$

Lorsqu'il existe un $M > 0$ tel que $\|df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} < M$ pour tout a dans U , nous disons que la différentielle de f est **bornée** sur U .

Définition 11.182.

La fonction f est dite **de classe $\mathcal{C}^1$** de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ si son application différentielle df est continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Nous écrivons $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Proposition 11.183.

Une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ où U est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Démonstration. Supposons que les dérivées partielles de f existent et sont continues. Nous savons alors déjà par la proposition 11.157 que la fonction f est différentiable et qu'elle s'exprime sous la forme

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^m \partial_i f(a) h_i, \quad \forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^m.$$

Pour montrer que df est continue, nous devons montrer que la quantité $\|df(x) - df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)}$

peut être rendue arbitrairement petite si $\|x - a\|_m$ est rendu petit. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \|df_x - df_a\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\|h\|=1} \|df_x(h) - df_a(h)\| \\
 &= \sup_{\|h\|_m=1} \left\| \sum_{i=1}^m (\partial_i f(x) - \partial_i f(a)) h_i \right\|_n \leq \\
 &\leq \sup_{\|h\|_m=1} \sum_{i=1}^m \|(\partial_i f(x) - \partial_i f(a))\|_n |h_i| \leq \\
 &\leq \sup_{\|h\|_m=1} \|h\|_{\infty} \sum_{i=1}^m \|(\partial_i f(x) - \partial_i f(a))\|_n \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)\|.
 \end{aligned} \tag{11.407}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé le fait que si $\|h\|_m \leq 1$, alors $\|h\|_{\infty} \leq 1$. Étant donné la continuité de $\partial_i f$, la dernière ligne peut être rendue arbitrairement petite lorsque x est proche de a .

Supposons maintenant que f soit dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)\|_n = \|df(x).e_i - df(a).e_i\|_n \leq \|df(x) - df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)},$$

la continuité de df implique donc celle de $\partial_i f$ pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$. $\square$

Proposition 11.184.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \rightarrow V$ dans $\mathcal{C}^1(U, V)$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ dans $\mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^p)$. Alors la fonction composée $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$.

Démonstration. On fixe a dans U

$$\begin{aligned}
 &\|d(g \circ f)(x) - d(g \circ f)(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \\
 &= \|dg(f(x)) \circ df(x) - dg(f(a)) \circ df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \leq \\
 &\leq \|(dg(f(x)) - dg(f(a))) \circ df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} + \\
 &\quad + \|dg(f(a)) \circ (df(x) - df(a))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \leq \\
 &\leq \|dg(f(x)) - dg(f(a))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} + \\
 &\quad + \|dg(f(a))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)} \|df(x) - df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)}.
 \end{aligned} \tag{11.408}$$

On peut conclure en passant à la limite $x \rightarrow a$ parce que les fonctions f , g , df et dg sont continues, de telle sorte que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} dg(f(x)) &= dg(f(a)) \\
 \lim_{x \rightarrow a} df(x) &= df(a).
 \end{aligned} \tag{11.409}$$

$\square$

Remarque 11.185.

On peut prouver le même résultat en utilisant la continuité de l'application bilinéaire

$$\begin{aligned}
 \circ : \mathcal{C}^1(U, V) \times \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^p) &\rightarrow \mathcal{L}(U, \mathbb{R}^p) \\
 (T, S) &\mapsto T \circ S.
 \end{aligned} \tag{11.410}$$

11.21 Dérivée directionnelle de fonctions composées

Étant donné que nous allons voir en détail la différentielle de fonctions composées à la proposition 11.153, nous n'allons pas rentrer dans tous les détails ici.

Nous savons déjà comment dériver les fonctions composées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si nous avons deux fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous formons la composée $\varphi = f \circ u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée vaut

$$\varphi'(a) = f'(u(a))u'(a). \quad (11.411)$$

Considérons maintenant le cas un peu plus compliqué des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et de la composée

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(x, y) &= f(u(x, y)). \end{aligned} \quad (11.412)$$

Afin de calculer la dérivée partielle de φ par rapport à x , nous admettons que pour tout a, b et t , il existe $c \in [a, a+t]$ tel que

$$u(a+t, b) = u(a, b) + t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b). \quad (11.413)$$

Cela est une généralisation immédiate du théorème 11.99. Nous devons calculer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+t, b) - \varphi(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u(a+t, b)) - f(u(a, b))}{t}. \quad (11.414)$$

Étant donné l'hypothèse que nous avons faite sur u , nous avons

$$f(u(a+t, b)) = f\left(u(a, b) + t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b)\right). \quad (11.415)$$

En utilisant le théorème des accroissements finis pour f , nous avons un point d entre $u(a, b)$ et $u(a, b) + t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b)$ tel que

$$f\left(u(a, b) + t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b)\right) = f(u(a, b)) + t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b) f'(d). \quad (11.416)$$

Le numérateur de (11.414) devient donc

$$t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b) f'(d). \quad (11.417)$$

Certes les points c et d sont inconnus, mais nous savons que c est entre a et $a+t$ ainsi que d se situe entre $u(a, b)$ et $u(a, b) + t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b)$. Lorsque nous prenons la limite $t \rightarrow 0$, nous avons donc $\lim_{t \rightarrow 0} c = a$ et $\lim_{t \rightarrow 0} d = u(a, b)$. Nous avons alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \frac{\partial u}{\partial x}(c, b) f'(d)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) f'(u(a, b)). \quad (11.418)$$

La formule que nous avons obtenue (de façon pas très rigoureuse) est

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y)) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) f'(u(x, y)). \quad (11.419)$$

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué où nous voudrions savoir les dérivées partielles de la fonction φ donnée par

$$\varphi(x, y, z) = f(u(x, y), v(x, y, z)) \quad (11.420)$$

où $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Commençons par la dérivée partielle par rapport à z . Étant donné que φ ne dépend de z que via la seconde entrée de f , il est normal que seule la dérivée partielle de f par rapport à sa seconde entrée arrive dans la formule :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y, z)) \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z). \quad (11.421)$$

La dérivée partielle par rapport à y demande de tenir compte en même temps de la façon dont f varie avec sa première entrée et la façon dont elle varie avec sa seconde entrée ; cela nous fait deux termes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y, z)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y, z)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z). \quad (11.422)$$

Cette formule a une interprétation simple. Lançons un caillou du sommet d'une falaise. Son mouvement est une chute libre avec une vitesse initiale horizontale :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (11.423a)$$

$$(11.423b)$$

où v_0 est la vitesse initiale horizontale et h_0 est la hauteur de la falaise. Si nous sommes intéressés à la distance entre le caillou et le bas de la falaise (point $(0, 0)$), le théorème de Pythagore nous dit que

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \quad (11.424)$$

Pour trouver la variation de la distance par rapport au temps il faut savoir de combien la distance varie lorsque x varie et multiplier par la variation de x par rapport à t , et puis faire la même chose avec y .

Théorème 11.186.

Soit $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable en a , et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $g(a)$. Si nous définissons $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$, alors pour tout $i = 1, \dots, m$, nous avons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(a)) \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (11.425)$$

où $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ dénote la dérivée partielle de f par rapport à sa k -ième variable.

Donnons un exemple d'utilisation de cette formule. Si

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (11.426)$$

nous avons $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Les dérivées partielles de φ sont données par les formules

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(x, y)) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(x, y)) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(g(x, y)) \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y) \quad (11.427)$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(x, y)) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(x, y)) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(g(x, y)) \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y) \quad (11.428)$$

Notez que les dérivées de φ et des composantes de g sont calculées en (x, y) , tandis que celles de f sont calculées en $g(x, y)$.

11.22 Théorèmes des accroissements finis

Nous avons déjà démontré (lemme 11.132) que si f est différentiable au point x alors $df_x(u) = \partial_u f(x)$. Une importante conséquence est le théorème des accroissements finis

Théorème 11.187 (Accroissements finis, inégalité de la moyenne).

Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. Soient a et b deux points dans U , $a \neq b$, tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U . Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \quad (11.429)$$

Démonstration. On utilise le théorème 11.119 et le fait que

$$\|\partial_u f(x)\|_n \leq \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \|u\|_m,$$

pour tout u dans $\mathbb{R}^m$. □

La proposition suivante est une application fondamentale du théorème des accroissements finis 11.187.

Proposition 11.188.

Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^m$ et une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est constante ;
- (2) f est différentiable et $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$;
- (3) les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ existent et sont nulles sur U .

Démonstration. Nous allons démontrer les équivalences en plusieurs étapes. D'abord (1) $\Rightarrow$ (2), puis (2) $\Rightarrow$ (3), ensuite (3) $\Rightarrow$ (2) et enfin (2) $\Rightarrow$ (1).

Commençons par montrer que la condition (1) implique la condition (2). Si $f(x)$ est constante, alors la condition (11.278) est vite vérifiée en posant $T(h) = 0$.

Afin de voir que la condition (2) implique la condition (3), remarquons d'abord que la différentiabilité de f implique que les dérivées partielles existent (proposition 11.131) et que nous avons l'égalité $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ (lemme 11.132). L'annulation de $\sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout u implique l'annulation des $\partial_i f(a)$ pour tout i .

Prouvons maintenant que la propriété (3) implique la propriété (2). D'abord, par la proposition 11.157, l'existence et la continuité des dérivées partielles $\partial_i f(a)$ implique la différentiabilité de f . Ensuite, la formule $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ implique que $df(a) = 0$.

Il reste à montrer que (2) implique la condition (1), c'est à dire que l'annulation de la différentielle implique la constance de la fonction. C'est ici que nous allons utiliser le théorème des accroissements finis. En effet, si a et b sont des points de U , le théorème 11.187 nous dit que

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \quad (11.430)$$

Mais $\|df(x)\| = 0$ pour tout $x \in U$, donc ce supremum est nul et $f(b) = f(a)$, ce qui signifie la constance de la fonction. □

11.23 Fonctions Lipschitziennes

Définition 11.189.

Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques²⁷, $f: E \rightarrow F$ une application et un réel k strictement positif. Nous disons que f est **Lipschitzienne** de constante k sur E si pour tout $x, y \in E$,

$$d_F(f(x) - f(y)) \leq k d_E(x, y). \quad (11.431)$$

Soit f une fonction k -Lipschitzienne. Si $y \in \overline{B(x, \delta)}$ alors $\|x - y\| \leq \delta$ et donc $\|f(x) - f(y)\| \leq k\delta$. Cela signifie que la condition Lipschitz pour s'énoncer en termes de boules fermées par

$$f(\overline{B(x, \delta)}) \subset \overline{B(f(x), k\delta)} \quad (11.432)$$

tant que $\overline{B(x, \delta)}$ est contenue dans le domaine sur lequel f est Lipschitz.

²⁷. Pour rappel, les espaces métriques sont définis par la définition 5.17 et le théorème 5.20 ; je précise que nous ne supposons pas que E soit vectoriel ; en particulier il peut être un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 11.190.

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$, et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. La fonction f est Lipschitzienne sur U si et seulement si df est bornée sur U .

Démonstration. Le fait que l'application différentielle df soit bornée signifie qu'il existe un $M > 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\|df_a\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \leq M$, pour tout a dans U . Si cela est le cas, alors le théorème 11.187 et la convexité²⁸ de U impliquent évidemment que f est de Lipschitz de constante plus petite ou égale à M .

Inversement, si f est Lipschitz de constante k , alors pour tout a dans U et u dans $\mathbb{R}^m$ on a

$$\left\| \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} \right\|_n \leq k \|u\|_m,$$

En passant à la limite pour $t \rightarrow 0$ on a

$$\|\partial_u f(a)\|_n = \|df_a(u)\|_n \leq k \|u\|_m,$$

donc la norme de df_a est majorée par k pour tout a dans U . □

Notez cependant qu'une fonction peut être Lipschitzienne sans être différentiable.

Proposition 11.191.

Une fonction Lipschitzienne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de la continuité donnée par le théorème 5.53. Prouvons donc la continuité en $a \in \mathbb{R}$. Pour tout x nous avons

$$|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|. \quad (11.433)$$

Si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\delta < \frac{\epsilon}{k}$ pour avoir

$$|f(x) - f(a)| \leq k \frac{\epsilon}{k} = \epsilon. \quad (11.434)$$

Donc f est continue en a . □

Définition 11.192.

Une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, y) &\mapsto f(t, y) \end{aligned} \quad (11.435)$$

est **localement Lipschitz** en y au point (t_0, y_0) si il existe des voisinages V de t_0 et W de y_0 et un nombre $k > 0$ tels que pour tout $(t, y) \in V \times W$ on ait

$$\|f(t_0, y_0) - f(t, y)\| \leq k \|y - y_0\|. \quad (11.436)$$

La fonction est localement Lipschitz sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si elle est localement Lipschitz en chaque point de U .

Proposition 11.193.

Si f et g sont deux fonctions localement Lipschitz alors $f + g$ l'est.

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul avec une majoration standard :

$$\|(f + g)(t_0, y_0) - (f + g)(t, y)\| \leq \|f(t_0, y_0) - f(t, y)\| + \|g(t_0, y_0) - g(t, y)\| \quad (11.437a)$$

$$\leq k_f \|y - y_0\| + k_g \|y - y_0\| \quad (11.437b)$$

$$= (k_f + k_g) \|y - y_0\|. \quad (11.437c)$$

□

²⁸. La convexité de U sert à assurer que la droite reliant a à b est contenue dans U ; c'est ce que nous utilisons dans la démonstration du théorème 11.187.

Lemme 11.194.

La fonction donné par

$$f(t, (x, y)) = xy \quad (11.438)$$

est localement Lipschitz en tout point.

Démonstration. Nous avons la majoration classique

$$|f(t, (x_0, y_0)) - f(t, (x, y))| = |x_0 y_0 - xy| \leq |x_0 y_0 - x_0 y| + |x_0 y - xy| \leq |x_0| |y_0 - y| + |y| |x_0 - x|. \quad (11.439)$$

Vu que nous parlons de fonction *localement Lipschitzienne*, nous pouvons majorer $|y|$ et $|x_0|$ par un même nombre k dans un voisinage de (x_0, y_0) . Cela donne

$$|f(t, (x_0, y_0)) - f(t, (x, y))| \leq k(|y_0 - y| + |x_0 - x|) \leq \sqrt{2}k \left\| \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix} \right\|. \quad (11.440)$$

Nous avons utilisé l'équivalence de norme de la proposition 6.138(1). $\square$

11.24 Différentielles d'ordre supérieur

Définition 11.195.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. La fonction f est dite **deux fois différentiable** au point a dans U , si f est différentiable dans un voisinage de a , et sa différentielle df est différentiable au point a en tant que application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

La fonction f sera dite *deux fois différentiable* sur l'ensemble U si elle est deux fois différentiable en chaque point de U .

11.24.1 Identification des espaces d'applications multilinéaires

La différentielle de la différentielle de f est notée

$$d(df)(a) = d^2 f(a),$$

et est une application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$. Comme on a vu dans la proposition 6.210, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On verra comment cette propriété est utilisé dans l'exemple 11.199.

Soient V et W deux espace vectoriel normés de dimension finie et $\mathcal{O}$ un ouvert autour de $x \in V$. D'une part l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(V, W)$ est lui-même un espace vectoriel normé de dimension finie, et on peut identifier $\mathcal{L}(V, \mathcal{L}^{(k)}(V, W))$ avec $\mathcal{L}^{(k+1)}(V, W)$, ce qui nous permet de dire que la k^{e} différentielle est une application

$$d^k f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}^{(k)}(V, W). \quad (11.441)$$

Plus précisément, l'identification se fait de la façon suivante : si $\omega \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}^{(k)}(V, W))$, alors ω vu dans $\mathcal{L}^{(k+1)}(V, W)$ est définie par

$$\omega(u_1, \dots, u_{k+1}) = \omega(u_1)(u_2, \dots, u_{k+1}). \quad (11.442)$$

Cela étant posé nous pouvons donner les définition.

11.24.2 Fonctions différentiables plusieurs fois

Définition 11.196 ([150]).

La fonction $f : \mathcal{O} \subset V \rightarrow W$ est

- (1) de classe C^0 si elle est continue,
- (2) de classe C^1 si $df : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ est continue,

- (3) de classe C^k si $df: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}^{(k)}(V, W)$ est continue,
 (4) de classe C^∞ si f est dans $\bigcap_{k=0}^\infty C^k(V, W)$.

Définition 11.197.

Un C^k -**difféomorphisme** est une application inversible de classe C^k dont l'inverse est également de classe C^k .

Exemple 11.198

Voyons comment la différentielle seconde fonctionne. Soit $f \in C^2(V, W)$; nous notons $\varphi = df: V \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ et donc nous voulons étudier la fonction

$$d\varphi: V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W)). \quad (11.443)$$

Si $a, u \in V$ nous avons

$$d\varphi_a(u) = \frac{d}{dt} \left[\varphi(a + tu) \right]_{t=0} \quad (11.444)$$

qui est une dérivée dans $\mathcal{L}(V, W)$ – pas de problèmes : c'est un espace vectoriel normé de dimension finie. Par linéarité, nous pouvons faire entrer l'argument de $d\varphi_a(u)$ dans la dérivée :

$$d\varphi_a(u)v = \frac{d}{dt} \left[\varphi(a + tu)v \right]_{t=0} \quad (11.445a)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[df_{a+tu}(v) \right]_{t=0} \quad (11.445b)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{ds} \left[f(a + tu + sv) \right]_{s=0} \right]_{t=0} \quad (11.445c)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f}{\partial v}(a + tu) \right]_{t=0} \quad (11.445d)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \quad (11.445e)$$

Par conséquent nous voyons

$$\begin{aligned} d^2 f: V &\rightarrow \mathcal{L}^{(2)}(V, W) \\ d^2 f_a(u, v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a). \end{aligned} \quad (11.446)$$

Dans le cas d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons une seule direction et par linéarité de (11.446) par rapport à u et v , nous avons

$$d^2 f_a(u, v) = f''(a)uv \quad (11.447)$$

où les produits sont des produits usuels dans $\mathbb{R}$ et f'' est la dérivée seconde usuelle. $\triangle$

Exemple 11.199

Soit $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application bilinéaire. On définit $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $f(x) = B(x, x)$. Le lemme 11.155 nous dit que B est différentiable. Cela implique la différentiabilité de f . Pour trouver la différentielle de la fonction f , nous écrivons $f = B \circ s$ où $s: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ est l'application $s(x) = (x, x)$. En utilisant la règle de différentiation de fonctions composées,

$$df(a) = dB(s(a)) \circ ds(a). \quad (11.448)$$

Mais $ds(a).u = (u, u)$ parce que $s(a + h) - s(a) = (h, h)$. Par conséquent,

$$df(a).u = dB(s(a))(u, u) = B(u, a) + B(a, u) \quad (11.449)$$

où nous avons utilisé la formule du lemme 11.155. La formule (11.449) peut être écrite sous la forme compacte

$$df(a) = B(\cdot, a) + B(a, \cdot) \quad (11.450)$$

La fonction $df(a)$ ainsi écrite est linéaire par rapport à a , donc différentiable. En outre elle coïncide avec sa différentielle, comme on a vu dans la remarque 11.146, au sens que la différentielle de df au point a sera l'application que à chaque x dans $\mathbb{R}^m$ associe l'application linéaire $B(x, \cdot) + B(\cdot, x)$. On voit bien que d^2f au point a est une application de $\mathbb{R}^m$ vers l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On peut utiliser d'autre part l'isomorphisme des espaces $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et dire que, une fois que a est fixé, l'application $d^2f(a)$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. On écrit alors $d^2f(a)(x, y) = B(x, y) + B(y, x)$. $\triangle$

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la différentielle seconde est la suivante

Proposition 11.200.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction. La fonction f est deux fois différentiable au point a si et seulement si les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ sont différentiables en a .

Cela veut dire, en particulier, que f est deux fois différentiable si et seulement si ses dérivées partielles secondes, $\partial_i \partial_j f$, pour toute couple d'indices i, j dans $\{1, \dots, m\}$, existent et sont continues. Pour les différentielles d'ordre supérieur on a la définition suivante.

Proposition 11.201 (Dérivées partielles et fonctions C^k).

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. La fonction f est de classe C^k si et seulement si les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_m f$ existent et sont de classe C^∞ .

La différentielle seconde dans l'exemple 11.199 est symétrique, c'est à dire que $d^2f(a)(x_1, x_2) = d^2f(a)(x_2, x_1)$. En fait toute différentielle seconde est symétrique.

Théorème 11.202 (Schwarz).

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^2 . Alors, pour toute couple i, j d'indices dans $\{1, \dots, m\}$ et pour tout point a dans U , on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Démonstration. Pour simplifier l'exposition nous nous limitons ici au cas $m = 2$. Soit (h, g) un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ on note

$$\begin{aligned} \Delta_h f(v) &= f(v + he_1) - f(v) = f(x + h, y) - f(x, y), \\ \Delta_g f(v) &= f(v + ge_2) - f(v) = f(x, y + g) - f(x, y), \end{aligned} \quad (11.451)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_g \Delta_h f(v) &= (f(x + h, y + g) - f(x, y + g)) - (f(x + h, y) - f(x, y)), \\ \Delta_h \Delta_g f(v) &= (f(x + h, y + g) - f(x + h, y)) - (f(x, y + g) - f(x, y)), \end{aligned} \quad (11.452)$$

donc,

$$\frac{1}{g} \Delta_g \left(\frac{1}{h} \Delta_h f(v) \right) = \frac{1}{h} \Delta_h \left(\frac{1}{g} \Delta_g f(v) \right). \quad (11.453)$$

On utilise alors le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{h} \Delta_h f(v) = \frac{1}{h} (f(x + h, y) - f(x, y)) = \frac{1}{h} \partial_1 f(x + t_1 h, y) h = \partial_1 f(x + t_1 h, y),$$

pour un certain t_1 dans $]0, 1[$. De même on obtient

$$\frac{1}{g} \Delta_g f(v) = \partial_2 f(x, y + t_2 g),$$

pour un certain t_2 dans $]0, 1[$. Alors

$$\frac{1}{g} \Delta_g (\partial_1 f(x + t_1 h, y)) = \frac{1}{h} \Delta_h (\partial_2 f(x, y + t_2 g)). \quad (11.454)$$

En appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis on a

$$\partial_2 \partial_1 f(x + t_1 h, y + s_1 g) = \partial_1 \partial_2 f(x + s_2 h, y + t_2 g). \quad (11.455)$$

Il suffit maintenant de passer à la limite pour $(h, g) \rightarrow (0, 0)$ et de se souvenir du fait que f est $\mathcal{C}^2$ seulement si ses dérivées partielles secondes sont continues pour avoir $\partial_2 \partial_1 f(v) = \partial_1 \partial_2 f(v)$. $\square$

Si f est deux fois différentiable $d^2 f(a)$ est l'application bilinéaire associée avec la matrice symétrique

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \dots & \partial_1 \partial_m f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \partial_m f(a) & \dots & \partial_m^2 f(a) \end{pmatrix} \quad (11.456)$$

Cette matrice est dite la matrice **hessienne** de f .

Exemple 11.203

Montrons qu'il n'existe pas de fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\partial_x f(x, y) = 5 \sin x$ et $\partial_y(x, y) = 6x + y$. Ceci est vite fait en appliquant le théorème de Schwarz, 11.202 ; ce que nous trouvons est

$$\partial_y(\partial_x f) = 0 \neq \partial_x(\partial_y f) = 6.$$

Donc, l'existence d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\partial_x(x, y) = 5 \sin x$ et $\partial_y f(x, y) = 6x + y$ serait en contradiction avec le théorème. $\triangle$

11.25 Développement asymptotique, théorème de Taylor

Théorème 11.204 (Théorème de Taylor[85, 151]).

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ ainsi que $a \in I$. Soit une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors il existe une fonction ϵ définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0, \quad (11.457a)$$

$$f(x) = T_{f,n}^a(x) + \epsilon(x)(x - a)^n \quad \forall x \in I \quad (11.457b)$$

où $T_{f,n}^a(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ et $f^{(k)}$ dénote la k -ième dérivée de f (en particulier, $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$).

Nous insistons sur le fait que la formule (11.457b) est une égalité, et non une approximation. Ce qui serait une approximation serait de récrire la formule dans le terme contenant ϵ .

Le polynôme $T_{f,n}^a$ est le **polynôme de Taylor** de f au point a à l'ordre n .

Les conditions (11.457) sont souvent aussi énoncées sous la forme qu'il existe une fonction α telle que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t^n} = 0 \end{cases} \quad (11.458a)$$

$$\begin{cases} f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \alpha(h). \end{cases} \quad (11.458b)$$

11.25.1 Fonctions «petit o»

Nous voulons formaliser l'idée d'une fonction qui tend vers zéro « plus vite » qu'une autre. Nous disons que $f \in o(\varphi(x))$ si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0. \quad (11.459)$$

En particulier, nous disons que $f \in o(x)$ lorsque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$.

Remarque 11.205.

À titre personnel, l'auteur de ces lignes déconseille d'utiliser cette notation qui est un peu casse-figure pour qui ne la maîtrise pas bien.

En termes de notations, nous définissons l'ensemble $o(x)$ l'ensemble des fonctions f telles que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \quad (11.460)$$

Plus généralement si g est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, nous disons $f \in o(g)$ si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (11.461)$$

De façon intuitive, l'ensemble $o(g)$ est l'ensemble des fonctions qui tendent vers zéro «plus vite» que g .

Nous pouvons donner un énoncé alternatif au théorème 11.204 en définissant $h(x) = \epsilon(x+a)x^n$. Cette fonction est définie exprès pour avoir

$$h(x-a) = \epsilon(x)(x-a)^n, \quad (11.462)$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x-a) = \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0. \quad (11.463)$$

Donc $h \in o(x^n)$.

Le théorème dit donc qu'il existe une fonction $\alpha \in o(x^n)$ telle que

$$f(x) = T_{f,n}^a(x) + \alpha(x-a). \quad (11.464)$$

pour tout $x \in I$.

Exemple 11.206

Le développement du cosinus est donné par

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \quad (11.465)$$

Nous avons donc l'existence d'une fonction $h_1 \in o(x^2)$ telle que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + h_1(x)$. Il existe aussi une autre fonction $h_2 \in o(x^4)$ telle que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + h_2(x)$. $\triangle$

11.25.2 Autres formulations**Exemple 11.207**

Une des façons les plus courantes d'utiliser les formules (11.457) est de développer $f(a+t)$ pour des petits t en posant $x = a+t$ dans la formule :

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + f''(a)\frac{t^2}{2} + \epsilon(a+t)t^2 \quad (11.466)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(a+t) = 0$. Ici, la fonction T dont on parle dans le théorème est $T_{f,2}^a(a+t) = f(a) + f'(a)t + f''(a)\frac{t^2}{2}$.

Lorsque x et y sont deux nombres «proches²⁹», nous pouvons développer $f(y)$ autour de $f(x)$:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + f''(x)\frac{(y-x)^2}{2} + \epsilon(y-x)(y-x)^2, \quad (11.467)$$

et donc écrire

$$f(x) - f(y) = -f'(x)(y-x) - f''(x)\frac{(y-x)^2}{2} - \epsilon(y-x)(y-x)^2. \quad (11.468)$$

De cette manière nous obtenons une formule qui ne contient plus que y dans la différence $y-x$.

$\triangle$

29. par exemple dans une limite $(x, y) \rightarrow (h, h)$.

11.25.3 Formule et reste

Proposition 11.208.

Soient $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \text{Int}(I)$. Soit un entier $k \geq 1$. Si f est k fois dérivable en a , alors il existe un et un seul polynôme P de degré $\leq k$ tel que

$$f(x) - P(x - a) \in o(|x - a|^k) \quad (11.469)$$

lorsque $x \rightarrow a$, $x \neq a$. Ce polynôme est donné par

$$P(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k. \quad (11.470)$$

Notons encore deux façons alternatives d'écrire le résultat. Si $f \in C^k$ il existe une fonction α telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + (x - a)^n \alpha(x - a). \quad (11.471)$$

Si $f \in C^{k+1}$ alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + (x - a)^{n+1} \xi(x - a) \quad (11.472)$$

où ξ est une fonction telle que $\xi(t)$ tend vers une constante lorsque $t \rightarrow 0$.

La proposition suivant donne une intéressante façon de trouver le reste d'un développement de Taylor.

Proposition 11.209.

Soient I , un intervalle dans $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k sur I telle que $f^{(k+1)}$ existe sur I . Soient $a \in \text{Int}(I)$ et $x \in I$. Alors il existe c strictement compris entre x et a tel que

$$R_{f,a,k}(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - a)^{k+1}. \quad (11.473)$$

11.25.4 Reste intégral

Proposition 11.210 (Formule de Taylor avec reste intégral[152]).

Soient X et Y des espaces normés et un ouvert $\mathcal{O} \subset X$. Si $f \in C^m(\mathcal{O}, Y)$ et si $[p, x] \subset \mathcal{O}$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} (d^k f)_p (x - p)^k \\ + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} (d^m f)_{p+t(x-p)} (x - p)^m \end{aligned} \quad (11.474)$$

où $\omega_p u^k$ signifie $\omega_p(u, \dots, u)$ lorsque $\omega \in \Omega^k$.

Comme expliqué dans l'exemple 11.198, toute ces applications de différentielles se réduisent à des termes de la forme

$$f^{(k)}(p)(x - p)^k \quad (11.475)$$

dans le cas d'une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

11.25.5 Exemple : un calcul heuristique de limite

Soit à calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2 \cos(x)+2} \sin(x)}{\sqrt{e^{2 \cos(x)+2} - 1}}. \quad (11.476)$$

La stratégie que nous allons suivre pour calculer cette limite est de développer certaines parties de l'expression en série de Taylor, afin de simplifier l'expression. La première chose à faire est de remplacer $e^{y(x)}$ par $1 + y(x)$ lorsque $y(x) \rightarrow 0$. La limite devient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2 \cos(x) + 3) \sin(x)}{\sqrt{-2 \cos(x) + 2}}. \quad (11.477)$$

Nous allons maintenant remplacer $\cos(x)$ par $1 - x^2/2$ au numérateur et par $1 - x^2/2$ au dénominateur. Pourquoi ? Parce que le cosinus du dénominateur est dans une racine, donc nous nous attendons à ce que le terme de degré deux du cosinus donne un degré un en dehors de la racine, alors que du degré un est exactement ce que nous avons au numérateur : le développement du sinus commence par x .

Nous calculons donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{-2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + 2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (11.478)$$

Tout ceci n'est évidemment pas très rigoureux, mais en principe vous avez tous les éléments en main pour justifier les étapes.

11.26 Fonctions convexes

Définition 11.211 ([153]).

Une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite **convexe** lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I et tout λ dans $[0, 1]$ nous avons

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \quad (11.479)$$

Si l'inégalité est stricte, alors nous disons que la fonction f est **strictement convexe**.

Une fonction est **concave** si son opposée est convexe.

11.212 ([154]).

Les différents résultats pour les fonctions convexes s'adaptent généralement sans mal aux fonctions strictement convexes. Une nuance cependant : de même que les fonctions dérivables convexes sont celles qui ont une dérivée croissante, les fonctions dérivables strictement convexes sont celles qui ont une dérivée strictement croissante (proposition 11.216). En revanche, il ne faudrait pas croire que la dérivée seconde d'une fonction dérivable strictement convexe est nécessairement une fonction à valeurs strictement positives (voir théorème 11.217) : la dérivée d'une fonction strictement croissante peut s'annuler occasionnellement, ou plus exactement peut s'annuler sur un ensemble de points d'intérieur vide. Penser à $x \mapsto x^4$ pour un exemple de fonction strictement convexe dont la dérivée seconde s'annule.

11.26.1 Inégalité des pentes

Dans l'étude des fonctions convexes nous allons souvent utiliser la fonction **taux d'accroissement** qui est, pour α dans le domaine de convexité de f définie par

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : I \setminus \{\alpha\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}. \end{aligned} \quad (11.480)$$

Proposition 11.213 (Inégalité des pentes[155]).

Soit f une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tout $a < b < c$ dans I nous avons³⁰

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}. \quad (11.481)$$

En d'autres termes,

$$\tau_a(b) \leq \tau_a(c) \leq \tau_b(c), \quad (11.482)$$

c'est à dire que τ est croissante en ses deux arguments.

Démonstration. D'abord les inégalités $a < b < c$ impliquent $0 < b - a < c - a$ et donc

$$\lambda = \frac{b - a}{c - a} < 1. \quad (11.483)$$

L'astuce est de remarquer que $(1 - \lambda)a + \lambda c = b$. Donc λ a toutes les bonnes propriétés pour être utilisé dans la définition de la convexité :

$$f((1 - \lambda)a + \lambda c) \leq \lambda f(c) + (1 - \lambda)f(a), \quad (11.484)$$

c'est à dire

$$f(b) - f(a) \leq \lambda(f(c) - f(a)) \quad (11.485)$$

ou encore, en remplaçant λ par sa valeur :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \quad (11.486)$$

Cela fait déjà une des inégalités à savoir.

D'autre part en partant de $-a < -b < -c$ nous posons

$$0 < \lambda = \frac{c - b}{c - a}. \quad (11.487)$$

Nous avons à nouveau $b = (1 - \lambda)c + \lambda a$ et nous pouvons obtenir la seconde inégalité

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}. \quad (11.488)$$

□

Géométriquement, l'inégalité des pentes se comprend facilement : le coefficient angulaire de la corde du graphe augmente. Donc si $x < y < z$, le coefficient moyen entre x et y est plus petit que celui entre x et z qui est plus petit que celui entre y et z .

Donc si le coefficient angulaire moyen entre a et $b + u$ vaut celui entre a et b , ce coefficient ne peut qu'être constant entre a et b : sinon il serait plus grand entre b et $b + u$ et la moyenne sur $a \rightarrow b + u$ serait plus grande que sa moyenne sur $a \rightarrow b$. Mais avoir un coefficient angulaire constant signifie être une droite.

En résumé, si une fonction est convexe et non strictement convexe, alors son graphe est une droite. C'est en gros cela que la proposition 11.221 clarifiera.

30. Les inégalités sont strictes si la fonction f est strictement convexe.

11.26.2 Convexité et régularité

Lemme 11.214 ([154]).

Une fonction convexe sur un ouvert

- (1) *y admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point,*
- (2) *y est continue.*

Démonstration. Soit $I =]a, b[$ un intervalle sur lequel f est convexe et $\alpha \in I$. Nous allons prouver que f est continue en α . Nous considérons τ_α le taux d'accroissement défini par (11.480); c'est une fonction croissante comme précisé dans l'inégalité des trois pentes 11.213 et de plus $\tau_\alpha(x)$ est bornée supérieurement par $\tau_\alpha(b)$ pour $x < \alpha$ et inférieurement par $\tau_\alpha(a)$ pour $x > \alpha$. Les limites existent donc et sont finies par la proposition 11.21. Autrement dit les limites

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \tau_\alpha(x) = \inf_{t > \alpha} \tau_\alpha(t) \quad (11.489a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \tau_\alpha(x) = \sup_{t < \alpha} \tau_\alpha(t). \quad (11.489b)$$

existent et sont finies, c'est à dire que la fonction f admet une dérivée à gauche et à droite.

Pour tout x nous avons les inégalités

$$\tau_\alpha(a) \leq \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \tau_\alpha(b). \quad (11.490)$$

En posant $k = \max\{\tau_\alpha(a), \tau_\alpha(b)\}$ nous avons

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq k|x - \alpha|. \quad (11.491)$$

La fonction est donc Lipschitzienne et par conséquent continue par la proposition 11.191. $\square$

Remarque 11.215.

Les dérivées à gauche et à droite ne sont a priori pas égales. Penser par exemple à une fonction affine par morceaux dont les pentes augmentent à chaque morceau.

11.26.3 Dérivées d'une fonction convexe

Proposition 11.216 ([156, 157, 8]).

Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

- (1) *est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I .*
- (2) *est strictement convexe si et seulement si sa dérivée est strictement croissante sur I*

Démonstration. Pour la preuve de (1) et (2), nous allons démontrer les énoncés «non stricts» et indiquer ce qu'il faut changer pour obtenir les énoncés «stricts».

Sens direct Nous supposons que f est convexe. Soient $a < b$ dans I et $x \in]a, b[$. D'après l'inégalité des pentes 11.213,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \quad (11.492)$$

En faisant la limite $x \rightarrow a$ nous avons

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (11.493)$$

et la limite $x \rightarrow b$ donne

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b). \quad (11.494)$$

Ici les inégalités sont non a priori strictes, même si f est strictement convexe : même avec des inégalités strictes dans (11.492), le passage à la limite rend l'inégalité non stricte. Quoi qu'il en soit nous avons

$$f'(a) \leq f'(b). \quad (11.495)$$

Sens direct : strict Nous savons déjà que f' est croissante. Si (11.495) était une égalité, alors f' serait constante sur $]a, b[$ parce qu'en prenant c entre a et b nous aurions $f'(a) \leq f'(c) \leq f'(b)$ avec $f'(a) = f'(b)$. Donc $f'(a) = f'(c)$. Avoir f' constante sur un intervalle est contraire à la stricte convexité.

Sens réciproque Nous supposons que f' est croissante et nous considérons $a < b$ dans I ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. Nous posons $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, et nous savons que $a \leq x \leq b$. Le théorème des accroissements finis 11.99 donne $c_1 \in]a, x[$ et $c_2 \in]x, b[$ tels que

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (11.496)$$

et

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \quad (11.497)$$

Et en plus $c_1 < c_2$. Vu que f' est croissante nous avons $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ et donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \quad (11.498)$$

En remplaçant x par sa valeur en termes de λ , a et b nous avons $x - a = (1 - \lambda)(b - a)$ et $b - x = \lambda(b - a)$, et l'inégalité (11.498) nous donne

$$f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (11.499)$$

Sens réciproque : strict Si f' est strictement croissante, nous avons $f'(c_1) < f'(c_2)$ et les inégalités suivantes sont strictes, ce qui donne

$$f(x) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (11.500)$$

□

Théorème 11.217 ([156]).

Une fonction f de classe C^2 est convexe si et seulement si f'' est positive.

Démonstration. La fonction est C^2 , donc f'' est positive si et seulement si f' est croissante (proposition 11.96) alors que la proposition 11.216 nous jure que f sera convexe si et seulement si f' est croissante. □

Remarque 11.218.

Une fonction peut être strictement convexe sans que sa dérivée seconde ne soit toujours strictement positive. En exemple : $x \mapsto x^4$ est strictement convexe alors que sa dérivée seconde s'annule en zéro.

Exemple 11.219

Quelques exemples utilisant le théorème 11.217

- (1) La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe parce que sa dérivée seconde est la constante (positive) 2.
- (2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (sa dérivée seconde est $2x^{-3}$).
- (3) La fonction exponentielle est également convexe.
- (4) La fonction $\ln$ est concave parce que la dérivée seconde de $-\ln$ est $\frac{1}{x^2}$ qui est strictement positif.

△

Proposition 11.220 ([158]).

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , elle est convexe si et seulement si sa matrice hessienne est définie positive pour tout x .

11.26.4 Graphe d'une fonction convexe

L'idée principale du graphe d'une fonction convexe est qu'il est toujours au dessus du graphe de ses tangentes (lorsqu'elles existent). Lorsqu'elles n'existent pas, le lemme 11.214 donne des coefficients directeurs de droites qui vont rester en dessous du graphe de la fonction.

Proposition 11.221 ([159]).

Une fonction convexe est strictement convexe si et seulement si il n'existe aucun intervalle de longueur non nulle sur lequel elle coïncide avec une fonction affine.

Démonstration. Si sur l'intervalle (non réduit à un point) $[x, y]$, la fonction convexe f coïncide avec une fonction affine, alors $f(t) = at + b$ et pour $\lambda \in]0, 1[$ nous avons

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = a\lambda x + a(1 - \lambda)y + b = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (11.501)$$

où nous avons remplacé b par $\lambda b + (1 - \lambda)b$. Par conséquent la fonction n'est pas strictement convexe.

Nous supposons maintenant que la fonction convexe f n'est pas strictement convexe sur l'intervalle I . Il existe $x \neq y \in I$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (11.502)$$

Nous posons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ et $u \in]x, z[$ pour écrire des inégalités des pentes entre $x < u < z < y$. Plus précisément si nous notons $a \rightarrow b$ la pente de a à b , c'est à dire $a \rightarrow b = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, alors les inégalités des pentes pour $x < u < z$ puis $u < z < y$ donnent

$$x \rightarrow z \leq u \rightarrow z \leq z \rightarrow y. \quad (11.503)$$

Voyons maintenant qu'en réalité $z \rightarrow y = x \rightarrow z$. En effet en remplaçant

$$f(y) = \frac{f(z) - \lambda f(x)}{1 - \lambda} \quad (11.504)$$

et

$$y = \frac{\lambda x}{1 - \lambda} \quad (11.505)$$

dans l'expression $z \rightarrow y = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$ nous obtenons

$$z \rightarrow y = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = x \rightarrow z. \quad (11.506)$$

Les inégalités (11.503) sont donc des égalités :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(z) - f(u)}{z - u} = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \quad (11.507)$$

Nous avons donc montré que le nombre $a = \frac{f(z) - f(u)}{z - u}$ ne dépend pas de u . Nous avons alors

$$f(z) - f(u) = a(z - u) \quad (11.508)$$

ou encore :

$$f(u) = f(z) - a(z - u), \quad (11.509)$$

ce qui signifie que sur $]x, z[$, la fonction f est affine. $\square$

Proposition 11.222.

Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son graphe est au dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration. **Sens direct** Soient $x, y \in I$. Nous voulons :

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \quad (11.510)$$

Étant donné que nous aurons besoin, dans le quotient différentiel de quelque chose comme $f(x + t) - f(x)$ nous écrivons la définition (11.479) de la convexité en inversant les rôles de x et y et en manipulant un peu :

$$f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(x) \quad (11.511a)$$

$$f(x + t(y - x)) \leq tf(y) + (1 - t)f(x) \quad (11.511b)$$

$$f(x + t(y - x)) = f(x) \leq tf(y) - tf(x) \quad (11.511c)$$

Nous divisons par t :

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x). \quad (11.512)$$

Le passage à la limite $t \rightarrow 0$ donne

$$(y - x)f'(x) \leq f(y) - f(x), \quad (11.513)$$

ce qu'il fallait.

Sens inverse Pour tout $x, y \in I$ nous supposons avoir

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \quad (11.514)$$

Si nous supposons $x \neq y$ et si nous posons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ nous voulons prouver que

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (11.515)$$

Pour cela nous écrivons l'inégalité (11.514) avec les couples (x, z) et (y, z) :

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)'(x - z) \quad (11.516a)$$

$$f(y) \geq f(z) + f'(z)'(y - z) \quad (11.516b)$$

En multipliant la première par λ et la seconde par $(1 - \lambda)$ et en sommant,

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq \lambda f(z) + \lambda f'(z)'(x - z) + (1 - \lambda)f(z) + (1 - \lambda)f'(z)'(y - z) \quad (11.517a)$$

$$= f(z) + f'(z)'(\lambda(x - z) + (1 - \lambda)(y - z)) \quad (11.517b)$$

$$= f(z). \quad (11.517c)$$

□

Proposition 11.223 ([8]).

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in \mathbb{R}$. Il existe une constante $c_a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout x nous ayons

$$f(x) - f(a) \geq c_a(x - a). \quad (11.518)$$

Autrement dit, le graphe de la fonction f est toujours au dessus de la droite d'équation

$$y = f(a) + c_a(x - a). \quad (11.519)$$

Démonstration. Les dérivées à gauche et à droite de f données par le lemme 11.214 sont les candidats tout cuits pour être coefficient directeur de la droite que l'on cherche. Nous allons prouver qu'en posant

$$c_a = \inf_{t > a} \tau_a(t), \quad (11.520)$$

la droite $y = f(a) + c_a(x - a)$ répond à la question³¹.

Nous devons prouver que le nombre $\Delta_x = f(x) - (f(a) + c_a(x - a))$ est positif pour tout x .

31. En prenant l'autre, $c'_a = \sup_{t < a} \tau_a(t)$, ça fonctionne aussi. En pensant à une fonction affine par morceaux, on remarque qu'en choisissant un nombre entre les deux, nous avons plus facilement une inégalité stricte dans (11.518).

Si $x > a$ Nous divisons par $x - a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est positif :

$$\frac{\Delta_x}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c_a \quad (11.521a)$$

$$= \tau_a(x) - \inf_{t>a} \tau_a(t) \quad (11.521b)$$

$$\geq 0 \quad (11.521c)$$

parce que $t \rightarrow \tau_a(t)$ est croissante et que $x > a$.

Si $x < a$ Nous divisons par $x - a$ et nous devons prouver que $\frac{\Delta_x}{x-a}$ est négatif :

$$\frac{\Delta_x}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c_a \quad (11.522a)$$

$$= \tau_a(x) - \inf_{t>a} \tau_a(t) \quad (11.522b)$$

$$\leq 0 \quad (11.522c)$$

parce que $t \rightarrow \tau_a(t)$ est croissante et que $x < a$.

□

Proposition 11.224 ([8]).

Si g est une fonction convexe, il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n x + b_n). \quad (11.523)$$

Démonstration. Pour $u \in \mathbb{R}$ nous considérons $a(u)$ et $b(u)$ tels que la droite $y(x) = a(u)x + b(u)$ vérifie $y(u) = g(u)$ et $y(x) \leq g(x)$ pour tout x . Cela est possible par la proposition 11.223. Il s'agit d'une droite coupant le graphe de g en $x = u$ et restant en dessous. Nous considérons alors (u_n) une suite quelconque dense dans $\mathbb{R}$ (disons les rationnels pour fixer les idées) et nous posons

$$\begin{cases} a_n = a(u_n) \\ b_n = b(u_n). \end{cases} \quad (11.524a)$$

$$(11.524b)$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $a_n x + b_n \leq g(x)$ pour tout n et $g(q)$ est le supremum qui est atteint pour le n tel que $u_n = q$. Si maintenant x n'est pas dans $\mathbb{Q}$ il faut travailler plus.

Nous prenons $(\tilde{q}_n)$, une sous-suite de (q_n) convergeant vers x et N suffisamment grand pour que pour tout $n \geq N$ on ait $|\tilde{q}_n - x| \leq \epsilon$ et $|g(\tilde{q}_n) - g(x)| \leq \epsilon$; cela est possible grâce à la continuité de g (lemme 11.214). Ensuite les sous-suites $(\tilde{a}_n)$ et $(\tilde{b}_n)$ sont celles qui correspondent :

$$\tilde{a}_n \tilde{q}_n + \tilde{b}_n = g(\tilde{q}_n). \quad (11.525)$$

Nous considérons la majoration

$$|\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - g(x)| \leq |\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n - (\tilde{a}_n \tilde{q}_n + \tilde{b}_n)| + \underbrace{|\tilde{a}_n \tilde{q}_n + \tilde{b}_n - g(\tilde{q}_n)|}_{=0} + \underbrace{|g(\tilde{q}_n) - g(x)|}_{\leq \epsilon} \quad (11.526a)$$

$$\leq |\tilde{a}_n| |x - \tilde{q}_n| + \epsilon \quad (11.526b)$$

$$= \epsilon (|\tilde{a}_n| + 1). \quad (11.526c)$$

Il nous reste à montrer que $|\tilde{a}_n|$ est borné par un nombre ne dépendant pas de n (pour les $n > N$).

Vu que la droite de coefficient directeur $\tilde{a}_n$ et passant par le point $(\tilde{q}_n, g(\tilde{q}_n))$ reste en dessous du graphe de g , nous avons pour tout n et tout $y \in \mathbb{R}$ l'inégalité

$$g(y) \geq \tilde{a}_n(y - \tilde{q}_n) + g(\tilde{q}_n) \in \tilde{a}_n B(y - x, \epsilon) + B(g(x), \epsilon). \quad (11.527)$$

Si $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le haut, nous prenons y tel que $B(y - x, \epsilon)$ soit minoré par un nombre k strictement positif et nous obtenons

$$g(y) \geq k \tilde{a}_n + l \quad (11.528)$$

avec k et l indépendants de n . Cela donne $g(y) = \infty$. Si au contraire $\tilde{a}_n$ n'est pas borné vers le bas, nous prenons y tel que $B(y - x, \epsilon)$ est majoré par un nombre k strictement négatif. Nous obtenons encore $g(y) = \infty$.

Nous concluons que $|\tilde{a}_n|$ est bornée. $\square$

Lemme 11.225 ([1]).

L'application

$$\begin{aligned} \phi: S^{++}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned} \quad (11.529)$$

est **log-concave**, c'est à dire que l'application $\ln \circ \phi$ est concave. De façon équivalente, si $A, B \in S^{++}$ et si $\alpha + \beta = 1$, alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta. \quad (11.530)$$

Ici S^{++} est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives, définition 6.294.

Démonstration. Nous commençons par prouver que l'équation (11.530) est équivalente à la log-concavité du déterminant. Pour cela il suffit de remarquer que les propriétés de croissance et d'additivité du logarithme donnent l'équivalence entre

$$\ln \left(\det(\alpha A + \beta B) \right) \geq \ln \left(\det(\alpha A) \right) + \ln \left(\det(\beta B) \right), \quad (11.531)$$

et

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta. \quad (11.532)$$

Le théorème de pseudo-réduction simultanée, corollaire 6.298, appliqué aux matrices A et B nous donne une matrice inversible Q telle que

$$\begin{cases} B = Q^t D Q \\ A = Q^t Q \end{cases} \quad \begin{aligned} (11.533a) \\ (11.533b) \end{aligned}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (11.534)$$

$\lambda_i > 0$. Nous avons alors

$$\det(A)^\alpha \det(B)^\beta = \det(Q)^{2\alpha} \det(Q)^{2\beta} \det(D)^\beta = \det(Q)^2 \det(D)^\beta \quad (11.535)$$

(parce que $\alpha + \beta = 1$) et

$$\det(\alpha A + \beta B) = \det(\alpha Q^t Q + \beta Q^t D Q) = \det(Q^t(\alpha \mathbb{1} + \beta D)Q) = \det(Q)^2 \det(\alpha \mathbb{1} + \beta D). \quad (11.536)$$

L'inégalité (11.532) qu'il nous faut prouver se réduit donc à

$$\det(\alpha \mathbb{1} + \beta D) \geq \det(D)^\beta. \quad (11.537)$$

Vue la forme de D nous avons

$$\det(\alpha \mathbb{1} + \beta D) = \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \quad (11.538)$$

et

$$\det(D)^\beta = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta. \quad (11.539)$$

Il faut donc prouver que

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta. \quad (11.540)$$

Cette dernière égalité de produit sera prouvée en passant au logarithme. Vu que le logarithme est concave par l'exemple 11.219, nous avons pour chaque i que

$$\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i). \quad (11.541)$$

En sommant cela sur i et en utilisant les propriétés de croissance et de multiplicativité du logarithme nous obtenons successivement

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i) \quad (11.542a)$$

$$\ln\left(\prod_i (\alpha + \beta\lambda_i)\right) \geq \ln\left(\left(\prod_i \lambda_i\right)^\beta\right) \quad (11.542b)$$

$$\prod_i (\alpha + \beta\lambda_i) \geq \left(\prod_i \lambda_i\right)^\beta, \quad (11.542c)$$

ce qui est bien (11.540). $\square$

11.26.5 Quelques inégalités

11.26.5.1 Inégalité de Jensen

Proposition 11.226 (Inégalité de Jensen).

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et des réels $x_1, \dots, x_n$. Soient des nombres positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ formant une combinaison convexe³². Alors

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i). \quad (11.543)$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n , en sachant que $n = 2$ est la définition de la convexité de f . Vu que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_n}, \quad (11.544)$$

nous avons

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k x_k}{1 - \lambda_n}\right). \quad (11.545)$$

La chose à remarquer est que les nombres $\frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n}$ avec k allant de 1 à $n - 1$ forment eux-mêmes une combinaison convexe. L'hypothèse de récurrence peut donc s'appliquer au second terme du membre de droite :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \lambda_n f(x_n) + (1 - \lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} f(x_k) = \lambda_n f(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k). \quad (11.546)$$

$\square$

11.26.5.2 Inégalité arithmético-géométrique

La proposition suivante dit que la moyenne arithmétique de nombres strictement positifs est supérieure ou égale à la moyenne géométrique.

Proposition 11.227 (Inégalité arithmético-géométrique[160]).

Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres strictement positifs. Nous posons

$$m_a = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \quad (11.547)$$

et

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \quad (11.548)$$

Alors $m_g \leq m_a$ et $m_g = m_a$ si et seulement si $x_i = x_j$ pour tout i, j .

32. Définition 8.22.

Démonstration. Par hypothèse les nombres m_a et m_g sont tout deux strictement positifs, de telle sorte qu'il est équivalent de prouver $\ln(m_g) \leq \ln(m_a)$ ou encore

$$\frac{1}{n}(\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)) \leq \ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right). \quad (11.549)$$

Cela n'est rien d'autre que l'inégalité de Jensen de la proposition 11.226 appliquée à la fonction $\ln$ et aux coefficients $\lambda_i = \frac{1}{n}$. $\square$

11.26.5.3 Inégalité de Kantorovitch

Proposition 11.228 (Inégalité de Kantorovitch[161]).

Soit A une matrice symétrique strictement définie positive dont les plus grandes et plus petites valeurs propres sont $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} + \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^2 \|x\|^4. \quad (11.550)$$

Démonstration. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $\|x\| = 1$. Nous diagonalisons³³ la matrice A par la matrice orthogonale $P \in O(n, \mathbb{R})$: $A = PDP^{-1}$ et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ où D est une matrice diagonale formée des valeurs propres de A .

Nous posons $\alpha = \sqrt{\lambda_{\min}\lambda_{\max}}$ et nous regardons la matrice

$$\frac{1}{\alpha}A + tA^{-1} \quad (11.551)$$

dont les valeurs propres sont

$$\frac{\lambda_i}{\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda_i} \quad (11.552)$$

parce que les vecteurs propres de A et de A^{-1} sont les mêmes (ce sont les valeurs de la diagonale de D). Nous allons quelque peu étudier la fonction

$$\theta(x) = \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}. \quad (11.553)$$

Elle est convexe en tant que somme de deux fonctions convexes. Elle a son minimum en $x = \alpha$ et ce minimum vaut $\theta(\alpha) = 2$. De plus

$$\theta(\lambda_{\max}) = \theta(\lambda_{\min}) = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}. \quad (11.554)$$

Une fonction convexe passant deux fois par la même valeur doit forcément être plus petite que cette valeur entre les deux³⁴ : pour tout $x \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$,

$$\theta(x) \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}. \quad (11.555)$$

Nous sommes maintenant en mesure de nous lancer dans l'inégalité de Kantorovitch.

$$\sqrt{\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\langle Ax, x \rangle}{\alpha} + \alpha \langle A^{-1}x, x \rangle \right) \quad (11.556a)$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1} \right) x, x \right\rangle \quad (11.556b)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\| \left(\frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1} \right) x \right\| \|x\| \quad (11.556c)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1} \right\| \quad (11.556d)$$

Justifications :

33. Théorème spectral 6.292.

34. Je ne suis pas certain que cette phrase soit claire, non ?

- 11.556a par l'inégalité arithmético-géométrique, proposition 11.227. Nous avons aussi inséré $\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ dans le produit sous la racine.
- 11.556c par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème 6.66.
- 11.556d par la définition de la norme opérateur de la proposition 6.80

La norme opérateur est la plus grande des valeurs propres. Mais les valeurs propres de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ sont de la forme $\theta(\lambda_i)$, et tous les λ_i sont entre $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$. Donc la plus grande valeur propre de $A/\alpha + \alpha A^{-1}$ est $\theta(x)$ pour un certain $x \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Par conséquent

$$\sqrt{\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{A}{\alpha} + \alpha A^{-1} \right\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}. \quad (11.557)$$

□

11.27 Suites de fonctions

11.27.1 Convergence de suites de fonctions

Nous considérons un espace normé $(\Omega, \|\cdot\|)$. Nous disons qu'une suite de fonctions f_n **converge** vers f pour la norme $\|\cdot\|$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $n \geq N$ implique $\|f_n - f\| < \epsilon$.

Dans le cas particulier de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad (11.558)$$

nous parlons que **convergence uniforme**.

Théorème 11.229 (Critère de Cauchy).

Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur Ω converge en norme sur Ω si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon \quad (11.559)$$

pour $n, m > N$.

Corollaire 11.230.

La série $\sum f_n$ converge en norme sur Ω si et seulement si $\exists N$ tel que

$$\|f_n + \dots + f_m\| \leq \epsilon \quad (11.560)$$

pour tout $n, m > N$.

Démonstration. L'hypothèse montre que la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy du théorème 11.229. □

11.27.2 Convergence uniforme

Définition 11.231 ([85]).

Nous disons qu'une suite de fonctions (f_n) définies sur un ensemble A **converge uniformément** vers une fonction f si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0 \quad (11.561)$$

où $\|g\|_A = \sup_{x \in A} \|g(x)\|$.

Proposition 11.232 (Critère de Cauchy uniforme[162]).

Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace topologique complet. La suite de fonction $f_n: X \rightarrow Y$ converge uniformément sur A si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d(f_k(x), f_l(x)) \leq \epsilon \quad (11.562)$$

pour tout $x \in X$.

Grosso modo, cela dit que si qu'une suite de Cauchy pour la norme uniforme est une suite uniformément convergente. Le fait que la suite converge fait partie du résultat et n'est pas une hypothèse. Ce critère sera utilisé pour montrer que $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, proposition 16.103.

Démonstration. Si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ alors le critère est satisfait ; c'est dans l'autre sens que la preuve est intéressante.

Soit donc une suite de fonctions satisfaisant au critère et montrons qu'elle converge uniformément. Pour tout $x \in X$ la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans l'espace complet Y ; nous avons donc convergence ponctuelle $f_n \rightarrow f$. Nous devons prouver que cette convergence est uniforme. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d(f_k(x), f_l(x)) \leq \epsilon \quad (11.563)$$

pour tout $x \in X$. Si nous nous fixons un tel k et un $x \in A$ nous considérons l'inégalité

$$d(f_k(x), f_l(x)) \leq \epsilon \quad (11.564)$$

qui est vraie pour tout l . En passant à la limite $l \rightarrow \infty$ (limite qui commute avec la fonction distance par définition de la topologie) nous avons

$$d(f_k(x), f(x)) \leq \epsilon. \quad (11.565)$$

Cette inégalité étant valable pour tout $x \in X$, cela signifie que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$. $\square$

Théorème 11.233 (Limite uniforme de fonctions continues).

Soit A , un ensemble mesuré et $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f . Si les fonctions f_n sont toutes continues en $x_0 \in A$, alors f est continue en x_0 .

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Si $x \in A$ nous avons, pour tout n , la majoration

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\| \quad (11.566a)$$

$$\leq \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + 2\|f_n - f\|_\infty. \quad (11.566b)$$

Grâce à l'uniforme convergence, nous considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Pour de tels n , nous avons

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq 2\epsilon\|f_n - f\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\|. \quad (11.567)$$

La continuité de f_n nous fournit un $\delta > 0$ tel que $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| < \epsilon$ dès que $\|x - x_0\| < \delta$. Pour ce δ , nous avons alors $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$. $\square$

Théorème 11.234 (Théorème de Dini[163]).

Soit D un espace métrique compact et une suite de fonctions $f_n \in C(D, \mathbb{R})$ telle que

(1) $f_n \rightarrow g$ ponctuellement,

(2) $g \in C(D, \mathbb{R})$,

(3) la suite (f_n) est croissante, c'est à dire que pour tout $x \in D$ et pour tout $n \geq 0$ nous avons $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Soit $x \in D$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$g(x) - \epsilon \leq f_{N(x)} \leq g(x). \quad (11.568)$$

De plus g et $f_{N(x)}$ sont des fonctions continues, donc il existe $\eta(x)$ tel que si $y \in B(x, \eta(x))$ alors

$$g(y) \in B(g(x), \epsilon) \quad (11.569a)$$

$$f_{N(x)}(y) \in B(f_{N(x)}(x), \epsilon). \quad (11.569b)$$

Si $n \geq N(x)$ et si $y \in B(x, \eta(x))$ alors nous avons les majorations

$$g(y) \geq f_n(y) \geq f_{N(x)}(y) \geq f_{N(x)}(x) - \epsilon \geq g(x) - 2\epsilon \geq g(y) - 3\epsilon. \quad (11.570)$$

Justifications :

- (1) Les deux première inégalités sont la croissance de la suite.
- (2) La suivante est (11.569b).
- (3) Ensuite il y a le choix de $N(x)$.
- (4) Et enfin il y a (11.569a).

Nous retenons que si $x \in D$ et si $n \geq N(x)$ alors

$$g(y) \geq f_n(y) \geq g(y) - 3\epsilon \quad (11.571)$$

pour tout $y \in B(x, \eta(x))$.

Nous utilisons maintenant la compacité de D . Pour chaque $x \in D$ nous pouvons considérer la boule ouverte $B(x, \eta(x))$; ces boules recouvrent D . Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est à dire un ensemble fini d'éléments $x_1, \dots, x_K$ tels que

$$D = \bigcup_{k=1}^K B(x_k, \eta(x_k)). \quad (11.572)$$

Si à ce moment vous ne comprenez pas pourquoi c'est une égalité au lieu d'une inclusion, il faut lire l'exemple 5.64. Considérons

$$n \geq N = \max\{N(x_1), \dots, N(x_K)\}. \quad (11.573)$$

Pour tout $y \in D$ il existe $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que $y \in B(x_k, \eta(x_k))$, et vu que $n \geq N(x_k)$ nous reprenons la majoration (11.571) :

$$g(y) \geq f_n(y) \geq g(y) - 3\epsilon. \quad (11.574)$$

Pour le n choisi nous avons ces inégalités pour tout $y \in D$, c'est à dire que nous avons $\|f_n - g\| \leq 3\epsilon$ et donc la convergence uniforme. $\square$

11.27.3 Permuter avec les dérivées partielles

Théorème 11.235.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ et f_k de classe C^1 . Supposons que f_k converge simplement vers f et que $\partial_i f_k$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction g_i pour $i = 1, \dots, n$. Alors f est de classe C^1 et $\partial_i f = g_i$. De plus, f_k converge vers f uniformément.

11.28 Recherche d'extrema

Soit une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si $f'(a) > 0$, alors la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ sera une droite croissante (coefficient directeur positif). Cela ne veut pas spécialement dire que la fonction elle-même sera croissante, mais en tout cas cela est un bon indice.

Exemple 11.236

Si $f(x) = x^2$, il est connu que $f'(x) = 2x$. Nous avons donc que f' est positive si $x \geq 0$ et $f' > 0$ est

négative si $x < 0$. Cela correspond bien au fait que x^2 est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et croissante sur $] 0, \infty[$. $\triangle$

Sur la figure 11.13, nous avons dessiné la fonction $f(x) = x \cos(x)$ et sa dérivée. Nous voyons que partout où la dérivée est négative, la fonction est décroissante tandis que, inversement, partout où la dérivée est positive, la fonction est croissante.

Les extrema de la fonction f sont donc placés là où f' change de signe. En effet si $f'(x) < 0$ pour $x < a$ et $f'(x) > 0$ pour $x > a$, la fonction est décroissante jusqu'à a et est ensuite croissante. Cela signifie que la fonction connaît un creux en a . Le point a est donc un minimum de la fonction.

Attention cependant. Le fait que $f'(a) = 0$ ne signifie pas automatiquement que f a un maximum ou un minimum en a . Nous avons par exemple tracé sur la figure 11.14 les fonctions x^3 et sa dérivée. Il est à noter que, conformément à ce que l'on pense, certes la dérivée s'annule en $x = 0$, mais elle ne change pas de signe.

11.29 Fonctions réelles de deux variables réelles

Une **fonction réelle de 2 variables réelles** est une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$.

Le **graphe de f** , noté $\text{Gr } f$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\text{Gr } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ et } z = f(x, y)\}$$

Les **courbes de niveau** de la fonction f sont obtenues en posant $f(x, y) = \lambda$.

11.29.1 Limites de fonctions à deux variables

Ici nous n'allons pas entrer dans tous les détails, mais simplement mentionner les quelques techniques les plus courantes.

Théorème 11.237.

Soient deux fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si a est un point adhérent au domaine de $g \circ f$ et si

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= b \\ \lim_{y \rightarrow b} g(y) &= c, \end{aligned} \tag{11.575}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c. \tag{11.576}$$

Les techniques usuelles sont

- (1) La règle de l'étau. Cette technique demande un peu plus d'imagination parce qu'il faut penser à un «truc» différent pour chaque exercice. En revanche, la justification est facile : il y a un théorème qui dit que ça marche.
- (2) Lorsqu'on applique la règle de l'étau, penser à

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{11.577}$$

Cela permet de majorer le numérateur. Attention : ce genre de majoration ne fonctionnent qu'au numérateur : agrandir le dénominateur ferait diminuer la fraction.

- (3) Il n'est pas vrai que

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^4} \leq \sqrt{x^4 + 2y^4}. \tag{11.578}$$

En effet, si x est petit, alors $x^2 > x^4$, et non le contraire.

Une technique très efficace pour les limites $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ est le passage aux coordonnées polaires. Il s'agit de poser

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{matrix} (11.579a) \\ (11.579b) \end{matrix}$$

et puis de faire la limite $r \rightarrow 0$.

Si la limite obtenue **ne dépend pas de θ** , alors c'est la limite cherchée. L'exercice suivant en donne des exemples.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$
- (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)^2}{(x+y)^2 + (x-y)^2}$
- (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$
- (4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Correction de l'exercice 1

- (1) Ici la méthode des chemins pour est particulièrement éclairante. Regardons d'abord la fonction sur la droite $x = y$. Nous avons

$$f(x, y) = \frac{x - x}{2x} = 0. \quad (11.580)$$

Donc la fonction est nulle sur toute la ligne.

Si nous regardons maintenant la ligne verticale $x = 0$, nous avons

$$f(0, y) = \frac{-y}{y} = -1, \quad (11.581)$$

donc la fonction vaut -1 sur toute la ligne verticale.

- (2)
- (3) Regardons la technique des coordonnées polaires. Nous remplaçons x par $r \cos(\theta)$ et y par $r \sin(\theta)$:

$$f(r, \theta) = \frac{r^4 \cos(\theta) \sin^3(\theta)}{r^2} = r^2 \cos(\theta) \sin^3(\theta). \quad (11.582)$$

Cette fonction tend vers zéro quand $r \rightarrow 0$. Nous avons donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0. \quad (11.583)$$

Pour cet exercice nous pouvons aussi utiliser la règle de l'étau en écrivant d'abord

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{|x||y|^3}{|x^2 + y^2|}. \quad (11.584)$$

Mais on a que $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|x^2 + y^2| = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$, donc

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} (\sqrt{x^2 + y^2})^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \rightarrow 0. \quad (11.585)$$

- (4) En passant aux polaires, nous avons

$$f(r, \theta) = \frac{r \cos \theta \sin(r \sin \theta)}{r} = \cos(\theta) \sin(r \sin \theta). \quad (11.586)$$

La limite de cette dernière fonction lorsque $r \rightarrow 0$ vaut zéro.

Une autre façon de procéder consiste à multiplier et diviser par y de telle façon à faire apparaître $\sin(y)/y$ dont nous connaissons la limite :

$$f(x, y) = \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (11.587)$$

La limite du premier facteur est 1, tandis que le second peut être traité de façon classique en prenant la valeur absolue et en majorant $|x|$ par $\sqrt{x^2 + y^2}$.

11.29.2 Dérivées partielles

La **dérivée partielle** par rapport à x au point (x, y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad (11.588)$$

et se calcule en dérivant f par rapport à x en considérant que y est constante.

De la même manière, la dérivée partielle par rapport à y au point (x, y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad (11.589)$$

et se calcule en dérivant f par rapport à y en considérant que x est constante.

Pour les dérivées partielles secondes,

$$\begin{aligned} \text{— } f''_{xx}(x, y) &= (f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right). \\ \text{— } f''_{yy}(x, y) &= (f'_y)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \\ \text{— } f''_{xy}(x, y) &= (f'_x)'_y = (f'_y)'_x = f''_{yx}(x, y) \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y). \end{aligned}$$

11.29.3 Différentielle et accroissement

La **différentielle totale** de f au point (a, b) est donnée, quand elle existe (!), par la formule

$$df(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy. \quad (11.590)$$

De la même façon que la formule des accroissements finis disait que $f(x + a) \simeq f(x) + af'(x)$, en deux dimensions nous avons que l'**accroissement** approximatif de f au point (a, b) pour des accroissements Δx et Δy est

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \quad (11.591)$$

Le **plan tangent** au graphe de f au point $(a, b, f(a, b))$ est

$$T_{(a,b)}(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad (11.592)$$

essayez d'écrire l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x)$ au point $x = a$ en terme de la dérivée de f , et comparez votre résultat à cette formule.

Un des principaux théorèmes pour tester la différentiabilité d'une fonction est le suivant.

Théorème 11.238.

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si les dérivées partielles existent dans un voisinage de a et donc continues en a , alors f est différentiable en a .

Le plus souvent, nous prouvons qu'une fonction est différentiable en calculant les dérivées partielles et en montrant qu'elles sont continues.

11.29.4 Recherche d'extrema locaux

(1) Rechercher les points critiques, c'est-à-dire les (x, y) tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

En effet, si (x_0, y_0) est un extrémum local de f , alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

(2) Déterminer la nature des points critiques : «test» des dérivées secondes :

$$\text{On pose } H(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2$$

(a) Si $H(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \implies (x_0, y_0)$ est un minimum local de f .

(b) Si $H(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \implies (x_0, y_0)$ est un maximum local de f .

(c) Si $H(x_0, y_0) < 0 \implies f$ a un point de selle en (x_0, y_0) .

(d) Si $H(x_0, y_0) = 0 \implies$ on ne peut rien conclure.

Dérivation implicite : Soit $F(x, f(x)) = 0$ la représentation implicite d'une fonction $y = f(x)$ alors

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

11.30 Les fonctions à valeurs vectorielles

Jusqu'à présent nous avons vu des fonctions de plusieurs variables qui prenaient leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons maintenant voir ce qu'il se passe lorsque les fonctions prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Une fonction d'une variable est dite **à valeurs vectorielles** lorsque

$$\begin{aligned} f: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.593}$$

Les fonctions $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont les **composantes** de f . Ce que nous avons raconté à propos des dérivées passe facilement :

$$\frac{f(a + \epsilon) - f(a)}{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(a+\epsilon) - f_1(a)}{\epsilon} \\ \frac{f_2(a+\epsilon) - f_2(a)}{\epsilon} \\ \frac{f_3(a+\epsilon) - f_3(a)}{\epsilon} \end{pmatrix}. \tag{11.594}$$

En particulier dès que les fonctions f_i sont dérivables, nous avons

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ f'_2(a) \\ f'_3(a) \end{pmatrix} \tag{11.595}$$

comme dérivée de la fonction. Cette dérivée est un vecteur.

Exemple 11.239

Si

$$f: x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 e^x \\ \cos(x^2) \\ x^3 + x \end{pmatrix}, \tag{11.596}$$

alors

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2xe^x + x^2e^x \\ -2x \sin(x^2) \\ 3x^2 + 1 \end{pmatrix}. \quad (11.597)$$

△

11.31 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Ce sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.598)$$

En ce qui concerne les dérivées, tout se passe comme avant. Si les dérivées partielles des composantes f_i existent au point $a \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(a) \\ \partial_x f_2(a) \\ \partial_x f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \partial_y f_1(a) \\ \partial_y f_2(a) \\ \partial_y f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \begin{pmatrix} \partial_z f_1(a) \\ \partial_z f_2(a) \\ \partial_z f_3(a) \end{pmatrix}. \quad (11.599)$$

11.32 Champs de vecteurs

Un champ de vecteur est une fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Géométriquement, il s'agit simplement de mettre un vecteur en chaque point de l'espace. Cela arrive très souvent en physique.

Exemple 11.240

Si un fluide (eau, gaz) coule dans un tube, en tout point le point a une vitesse, qui sera un vecteur généralement dirigé le long du tube. △

Exemple 11.241

La force d'attraction de la Terre sur une masse m située au point $r = (x, y, z)$ est donnée par

$$F(r) = -G \frac{Mmr}{\|r\|^3}. \quad (11.600)$$

Dans cette expression, tant r que $F(r)$ sont des vecteurs. Nous l'avons représenté sur la figure 11.15.

L'application

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ r &\mapsto F(r) \end{aligned} \quad (11.601)$$

est le champ gravitationnel de la Terre.

△

11.32.1 Matrice jacobienne

La **matrice jacobienne** de la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ au point $a \in \mathbb{R}^3$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, c'est à dire

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix}. \quad (11.602)$$

Exemple 11.242

Si

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xye^z \\ x^2 + \cos(yz) \\ xyz \end{pmatrix}, \quad (11.603)$$

alors

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ 2x & -z \sin(yz) & -y \sin(yz) \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}. \quad (11.604)$$

△

11.33 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla

Nous avons déjà vu le gradient d'une fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y, z) \\ \partial_y f(x, y, z) \\ \partial_z f(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (11.605)$$

Afin de définir la divergence et le rotationnel, nous introduisons ∇ sous une forme un peu plus abstraite comme le «vecteur»

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \quad (11.606)$$

Vue comme ça, la formule (11.605) est claire.

Si F est un champ de vecteurs, nous introduisons la **divergence** de F par

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (11.607)$$

Cela est une fonction. Et nous introduisons le rotationnel du champ de vecteur F par

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) e_x - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) e_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) e_z. \end{aligned} \quad (11.608)$$

Cela est un champ de vecteur. En utilisant le symbole complètement antisymétrique ϵ_{ijk} , le rotationnel d'un champ de vecteur peut s'écrire

$$\nabla \times F = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i F_j e_k. \quad (11.609)$$

Le gradient, la divergence et le rotationnel consistent à appliquer simplement à ∇ est trois produits qu'on peut effectuer sur un vecteur :

- (1) Le produit d'un vecteur par un scalaire multiplie chacune des composantes :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}. \quad (11.610)$$

- (2) Le produit scalaire d'un vecteur avec un autre vecteur donne lieu à la divergence :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (11.611)$$

(3) Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (11.612)$$

Ces trois opérations joueront un rôle central en électromagnétisme dans les équations de Maxwell.

Exemple 11.243

Soit $F(x, y, z) = xe_x + xye_y + e_z$, c'est à dire

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.613)$$

Son rotationnel est donné par

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0 - 0)e_x - (0 - 0)e_y + (y - 0)e_z = ye_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}. \quad (11.614)$$

△

Afin d'étudier comment se comporte la composition de ces opérateurs, nous aurons besoin de ce lemme que nous n'énoncerons pas précisément.

Lemme 11.244.

Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 , alors on peut permuter l'ordre des dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (11.615)$$

La fonction

$$(x, y, z) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y, z) \quad (11.616)$$

sera notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \quad (11.617)$$

Il y a deux propriétés importantes :

Théorème 11.245.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (11.618)$$

Si $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^2 , alors

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0. \quad (11.619)$$

Démonstration. Ce sont seulement deux calculs qui manipulent les définitions. Pour le premier, la divergence de f est le champ de vecteurs

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y + \frac{\partial f}{\partial z} e_z. \quad (11.620)$$

En mettant ce champ dans la définition du rotationnel,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] e_x \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] e_y \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] e_z. \end{aligned} \quad (11.621)$$

En utilisant le lemme 11.244, chacun des termes fait zéro.

La seconde propriété se démontre en utilisant le même type de calcul. $\square$

Remarque 11.246.

Il n'y a pas de propriétés du même style pour la combinaison $\nabla \times (\nabla \cdot F)$ pour le rotationnel de la divergence. En effet la divergence d'un champ de vecteur est une fonction, et il n'y a pas de rotationnel pour une fonction.

11.34 Interprétation géométrique et physique de la divergence

En physique, on dit qu'un champ de vecteurs à divergence nulle est **incompressible**. Nous allons essayer de comprendre pourquoi. Lorsqu'un fluide incompressible se déplace, il faut qu'en chaque point il y ait autant de fluide qui rentre que de fluide qui sort. Nous allons voir sur quelques exemples que la divergence d'un champ de vecteurs est le «bilan de masse» d'un fluide qui se déplace selon le champ de vecteurs.

Si en un point la divergence est positive, cela signifie qu'il y a une perte de masse et si la divergence est négative, cela signifie qu'il y a une accumulation de masse.

Prenons par exemple un fluide qui se déplace selon le champ de vitesse montré à figure 11.16.

Étant donné que la vitesse diminue lorsque x avance, il y a une accumulation de fluide. Regardez en effet la quantité de fluide qui rentre dans le rectangle par rapport à la quantité de fluide qui en sort. Ce champ de vecteurs a pour équation :

$$F(x, y) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.622)$$

Sa divergence vaut donc

$$(\nabla \cdot F)(x, y) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y) + \underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial y}(x, y)}_{=0} = -\frac{1}{x^2}. \quad (11.623)$$

Cette divergence étant négative, il y a bien accumulation de fluide en tout point, et d'autant plus que x est petit.

Exemple 11.247

Prenons le champ de vecteurs tournant

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad (11.624)$$

représenté à la figure 11.17. Cela est un vecteur qui est constamment perpendiculaire au rayon.

Un fluide dont la vitesse serait donné par ce champ de vecteur se contente de tourner. Intuitivement il ne devrait pas y avoir de divergence parce qu'il n'y a aucune accumulation de fluide. En effet,

$$\nabla \cdot F(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \quad (11.625)$$

△

Exemple 11.248

Prenons le cas du champ de force de gravitation :

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (11.626)$$

Nous pouvons rapidement remarquer que $\nabla \cdot F = 0$. Est-ce que cela peut se comprendre sur le dessin de la figure 11.18.

Essayons de voir combien de fluide entre dans la zone bleue et combien en sort. D'abord, il est certain que les vecteurs qui sortent sont plus courts que ceux qui rentrent, ce qui voudrait dire qu'il y a plus de fluide qui rentre. Mais on voit également que le *nombre* de vecteurs qui sortent est plus grand parce que la seconde sphère est plus grande et qu'il y a un vecteur en chaque point de la sphère.

Intuitivement nous pouvons dire que la quantité qui rentre dans la sphère de rayon r_1 donnée par la taille des vecteurs entrants multiplié par la surface de la sphère, c'est à dire

$$4\pi r_1^2 \|F(x, y, z)\|, \quad (11.627)$$

mais $\|F(x, y, z)\| = \frac{1}{r^2}$, donc la quantité de fluide entrant est 4π . La quantité de fluide sortant sera la même.

Cela explique deux choses

- (1) Pourquoi les forces de gravitation et électromagnétiques sont en $1/r^2$; c'est parce que nous vivons dans un monde avec trois dimensions d'espace. En étudiant très précisément le champ de gravitation, certains physiciens espèrent trouver des déviations expérimentales par rapport à la règle du $1/r^2$; cela *pourrait* être un signe que l'espace contient des dimensions supplémentaires.
- (2) Pourquoi il y a un 4π comme coefficient dans beaucoup d'équations en électromagnétisme ; en particulier dans certaines anciennes unités de flux.

△

Remarque 11.249.

Nous allons voir plus loin comment s'assurer que l'équation (11.627) représente bien la «quantité de fluide» qui rentre dans la zone délimitée

11.35 Quelques formules de Leibnitz

La divergence étant une combinaison de dérivées, il n'est pas tellement étonnant que la divergence de produits donne lieu à des formules en deux termes. Si f est une fonction et si F et G sont des champs de vecteurs, nous avons (sans démonstrations) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (fF) &= f \nabla \cdot F + F \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (F \times G) &= G \cdot \nabla \times F - F \cdot \nabla \times G. \end{aligned} \quad (11.628)$$

Nous avons aussi, pour le rotationnel,

$$\nabla \times (fF) = f \nabla \times F + \nabla f \times F. \quad (11.629)$$

11.36 La différentielle revisitée

11.36.1 Les formes différentielles de base

Si la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable alors la différentielle en $a \in \mathbb{R}^n$ est l'application

$$\begin{aligned} df_a: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n. \end{aligned} \quad (11.630)$$

Considérons en particulier la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^n$ fait correspondre $x_i \in \mathbb{R}$. Par abus de notations, nous la noterons x_i . Nous avons

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \quad (11.631)$$

Par exemple $\partial_y x = 0$ et $\partial_x x = 1$. Toutes les dérivées partielles de x_i s'annulent sauf la i ème qui vaut 1. Par conséquent

$$\begin{aligned} dx_i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto u_i. \end{aligned} \quad (11.632)$$

Remarque 11.250.

En toute rigueur nous devrions écrire $(dx_i)_a$. Mais étant donné que

$$(dx_i)_a(u) = (dx_i)_b(u) \quad (11.633)$$

pour tout points a, b et pour tout vecteurs u , nous nous permettons de simplifier la notation en ne précisant pas en quel point nous calculons la différentielle de x_i .

Étant donné que $dx_i(u) = u_i$, nous pouvons récrire la formule (11.630) en remplaçant u_i par $dx_i(u)$:

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(u). \quad (11.634)$$

En tant que application linéaire, df_a est une combinaison linéaire des dx_i . En notations compacte :

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i. \quad (11.635)$$

11.36.2 Différentielle comme élément de l'espace dual

Si nous considérons la base canonique $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^n$. À partir d'elle, nous considérons la **base duale**. En termes pratiques, nous définissons dx_i comme la forme sur $\mathbb{R}^n$ qui à un vecteur u fait correspondre sa composante i :

$$dx_i \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = u^i. \quad (11.636)$$

En termes savants, dx_i est le dual de e_i . Si tu ne l'as pas encore compris, Jean Doyen va te le faire comprendre !

Maintenant, dans la formule (11.291), nous pouvons remplacer u^i par $dx_i(u)$, et écrire

$$df_a(u) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)u^i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i(u). \quad (11.637)$$

Ce qui arrive tout à droite est explicitement vu comme une forme sur $\mathbb{R}$, dont les composantes dans la base duale sont les dérivées partielles de f au point a , agissant sur u . En faisant un pas en arrière, nous omettons le u , et nous écrivons

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx^i \quad (11.638)$$

Cette notation dx_i pour la forme duale de e_i est en réalité parfaitement logique parce que dx^i est la différentielle de la projection

$$\begin{aligned} x^i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^n) &\mapsto x^i. \end{aligned} \quad (11.639)$$

Je te laisse un peu méditer sur cette différentielle de la projection. L'important est que tu aies compris cela d'ici la fin de ta deuxième année.

11.36.3 Différentielles de fonctions composées

Cette façon de voir la différentielle nous permet de jeter un nouveau regard sur la formule de différentiation des fonctions composées. Soient

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ g: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (11.640)$$

et $h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(u) = h(f(u)) = (g \circ f)(u). \quad (11.641)$$

Nous allons noter x les coordonnées de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathbb{R}^p$ et u , un vecteur de $\mathbb{R}^p$ accroché au point a . Pour $\mathbb{R}^n$, les notations seront que les coordonnées sont y , b est un point de $\mathbb{R}^n$ et v est un vecteur «accroché» au point b .

Nous avons

$$dg_b(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) dy_i(v). \quad (11.642)$$

Ici $dy_i(v)$ signifie la i ème composante de v . C'est simplement v_i . Cette formule étant valable pour tout point $b \in \mathbb{R}^n$ et pour tout vecteur v , nous pouvons l'écrire en particulier pour

$$\begin{cases} b = f(a) \\ v = df_a(u). \end{cases} \quad (11.643a)$$

$$(11.643b)$$

Cela donne

$$dg_{f(a)}(df_a(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) dy_i(df_a(u)). \quad (11.644)$$

Mais

$$df_a(u) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \quad (11.645)$$

donc la i ème composante de ce vecteur est

$$(df_a(u))_i = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \quad (11.646)$$

En remplaçant $dy_i(df_a(u))$ par cela dans l'expression (11.644), nous trouvons

$$dg_{f(a)}(df_a(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \quad (11.647)$$

Nous pouvons vérifier que cela est la différentielle de $g \circ f$ au point a appliquée au vecteur u . En effet

$$d(g \circ f)_a(u) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \quad (11.648)$$

tandis que, par la dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \quad (11.649)$$

Au final, ce que nous avons prouvé est que

$$d(g \circ f)_a(u) = dg_{f(a)}(df_a(u)). \quad (11.650)$$

11.36.4 Exemple de composée : les coordonnées polaires

Le changement de coordonnées pour les polaires est la fonction

$$f \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (11.651)$$

Considérons une fonction g sur $\mathbb{R}^2$, et définissons la fonction $\tilde{g}$ par

$$\tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (11.652)$$

La formule (11.649) permet de trouver les dérivées partielles de g par rapport à r et θ en termes de celles par rapport à x et y de g .

Pour faire le lien avec les notations du point précédent, nous avons

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta) &= r \cos(\theta) \\ f_2(r, \theta) &= r \sin(\theta) \\ (x_1, x_2) &\rightarrow (r, \theta) \\ (y_1, y_2) &\rightarrow (x, y). \end{aligned} \quad (11.653)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \theta) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(r, \theta)) \frac{\partial f_i}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned} \quad (11.654)$$

Prenons par exemple $g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Étant donné que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (11.655)$$

nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{-2 \cos \theta}{r^3}. \quad (11.656)$$

En utilisant la formule,

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \left(\frac{-2 \cos \theta}{r^3} \right) + \sin(\theta) \left(\frac{-2 \sin \theta}{r^3} \right) = -\frac{2}{r^3}. \quad (11.657)$$

Nous pouvons vérifier directement que cela est correct. En effet

$$\tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{r^2}, \quad (11.658)$$

dont la dérivée par rapport à r vaut $-2/r^3$.

En ce qui concerne la dérivée par rapport à θ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} &= \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial(r \cos(\theta))}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial(r \sin(\theta))}{\partial \theta} \\ &= \left(\frac{-2 \cos \theta}{r^3} \right) (-r \sin \theta) + \left(\frac{-2 \sin \theta}{r^3} \right) (r \cos \theta) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.659)$$

En résumé et avec quelques abus de notations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} &= \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} &= -r \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned} \quad (11.660)$$

11.37 Quelques rappels

Définition 11.251 (Intervalle).

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si pour tout $a, b \in I$ nous avons $t \in I$ dès que $a \leq t \leq b$.

Un intervalle est **ouvert** si il est de la forme $]a, b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Un intervalle est **fermé** si il est de la forme $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque 11.252.

L'ensemble $\mathbb{R}$ ne contient pas $-\infty$ et $+\infty$. L'intervalle $[-\infty, 5]$ par exemple, n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

Exemple 11.253

- (1) Les ensembles $]3, 7[$ et $]-\infty, \pi[$ sont des intervalles ouverts.
- (2) Les ensembles $[10, 15]$ et $[-1, +\infty[$ sont des intervalles fermés.
- (3) L'ensemble $]-4, -2[\cup]2, 9[$ n'est pas un intervalle (il y a un «trou» entre -2 et 2).
- (4) L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle ; par convention, il est à la fois ouvert et fermé.

Un intervalle peut n'être ni ouvert ni fermé ; par exemple $]4, 8]$. Cet intervalle est «ouvert en 4 et fermé en 8» . $\triangle$

Définition 11.254 (Fonction, domaine, image, graphe).

Soient X et Y deux ensembles. Une **fonction** f définie sur X et à valeurs dans Y est une correspondance qui associe à chaque élément x dans X **au plus** un élément y dans Y . On écrit $y = f(x)$.

- La partie de X qui contient tous les x sur lesquels f peut opérer est dite **domaine** de f . Le domaine de f est indiqué par $\text{Domaine } f$.
- L'élément de $y \in Y$ associé par f à un élément $x \in \text{Domaine } f$ (c'est à dire $f(x) = y$) est appelé **image** de x par f . L'**image** de la fonction f est la partie de Y qui contient les images de tous les éléments de $\text{Domaine } f$. L'image de f est indiquée par $\mathfrak{S}f$.
- Le **graphe** de f est l'ensemble de toutes les couples $(x, f(x))$ pour $x \in \text{Domaine } f$. Le graphe de f est une partie de l'ensemble noté $X \times Y$ et il est indiqué par $\text{Graph } f$. Dans ce cours $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, donc le graphe de f est contenu dans le plan cartésien.

Définition 11.255 (Fonction croissante, décroissante et monotone).

Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- (1) La fonction f est **croissante** sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \leq f(y)$. Elle est strictement croissante si $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$.
- (2) La fonction f est **décroissante** sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \geq f(y)$. Elle est strictement décroissante si $f(x) > f(y)$ dès que $x < y$.
- (3) La fonction f est dite **monotone** sur I si elle est soit croissante soit décroissante sur I .

Exemple 11.256

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. Elle n'est par contre ni croissante ni décroissante sur l'intervalle $[-4, 3]$. $\triangle$

11.38 Continuité et dérivabilité

Dans cette section, nous désignerons par I un intervalle ouvert non vide contenu dans $\mathbb{R}$.

Définition 11.257 (Fonction continue).

Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** au point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

La fonction est dite **continue** sur l'intervalle I si elle est continue en tous les points de I .

Théorème 11.258 (Théorème des valeurs intermédiaires).

Si f est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ avec $f(a) \neq f(b)$ alors pour tout t entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = t$.

Nous considérons la question suivante : étant donné une fonction f définie sur $I \setminus \{x_0\}$, est-il possible de définir f en x_0 de telle façon à ce qu'elle soit continue ?

Exemple 11.259

La fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (11.661)$$

n'est pas définie pour $x = 0$ et il n'y a pas moyen de définir $f(0)$ de telle sorte que f soit continue parce que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. $\triangle$

Définition 11.260 (Prolongement par continuité).

Soit $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. La fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f}: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11.662)$$

est une fonction continue sur I et est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0 .

Exemple 11.261

La fonction $f(x) = x \ln(|x|)$ n'est pas définie en $x = 0$. Cependant

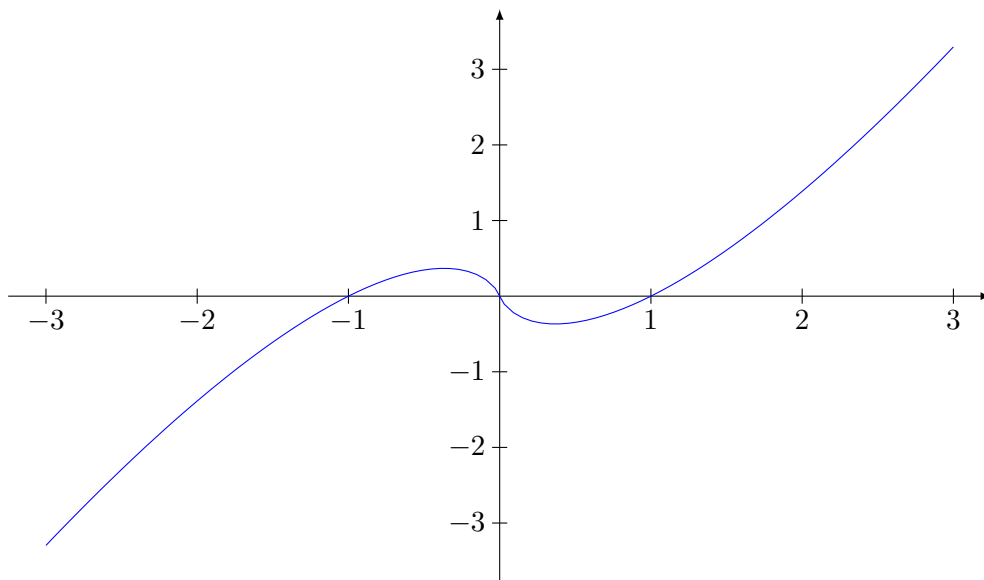
$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(|x|) = 0. \quad (11.663)$$

Nous pouvons donc définir la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.664)$$

Contrairement à la fonction initiale f , cette fonction $\tilde{f}$ est définie et continue en 0.

Notez que sur le graphe de la fonction $\tilde{f}$, la courbe est bien régulière en $x = 0$.



△

Exemple 11.262

La fonction

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 3)(x - 2)} \quad (11.665)$$

admet pour limite $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{4}{5}$. Son prolongement par continuité en $x = -3$ est donné par

$$\tilde{f}(x) = \frac{x - 1}{x - 2}. \quad (11.666)$$

Notons que les fonctions f et $\tilde{f}$ ne sont pas identiques : l'une est définie pour $x = -3$ et l'autre pas. Lorsqu'on fait le calcul

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{x - 1}{x - 2}, \quad (11.667)$$

la simplification n'est pas du tout un acte anodin. Le dernier signe « $=$ » est discutable parce que les deux dernières expressions ne sont pas égales pour tout x ; elles ne sont égales «que» pour les x pour lesquels les deux expressions existent. △

Exemple 11.263

La fonction

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad (11.668)$$

n'est pas définie en $x = 0$, mais en la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad (11.669)$$

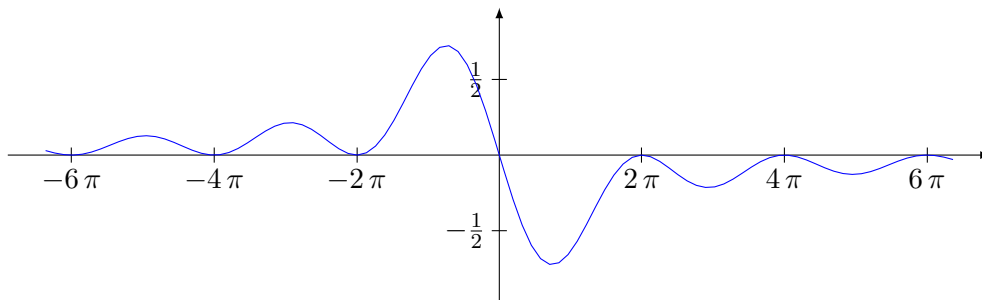
nous reconnaissons la limite définissant la dérivée du cosinus en 0, c'est à dire que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \sin(0) = 0. \quad (11.670)$$

Nous avons donc le prolongement par continuité

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.671)$$

Encore une fois, le graphe de la fonction $\tilde{f}$ ne présente aucune particularité autour de $x = 0$.



△

Définition 11.264 (Fonction dérivable).

Nous disons qu'une fonction f est **dérivable** au point $x_0 \in I$ si la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon} \quad (11.672)$$

existe.

Si f est une fonction dérivable, rien n'empêche la fonction dérivée f' d'être elle-même dérivable. Dans ce cas nous notons f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la fonction f' . Cette fonction f'' est la **dérivée seconde** de f . Elle peut encore être dérivable ; dans ce cas nous notons $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite. Nous définissons $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ la dérivée n^e de f . Nous posons évidemment $f^{(0)} = f$.

Théorème 11.265.

Toute fonction f dérivable au point x_0 est continue au point x_0 .

Remarque 11.266.

La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : il existent bien des fonctions qui sont continues à un point x_0 mais qui ne sont pas dérivables en x_0 . La fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, par exemple est continue sur tout $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

11.38.1 Quelques formules à connaître**À retenir 11.267**

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x). \quad (11.673a)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (11.673b)$$

$$(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x). \quad (11.673c)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \quad (11.673d)$$

11.39 Application réciproque**11.39.1 Définitions**

Les définitions d'injection, surjection, bijection et d'application réciproque sont les définitions 5.171 et 5.172.

Exemple 11.268

- (1) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ parce qu'il n'existe aucun x tel que $x^2 = -1$.

- (2) La fonction

$$\begin{aligned} f: [0, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \quad (11.674)$$

est une bijection. Notez que c'est la même fonction que celle de l'exemple précédent. Seul l'intervalle sur laquelle nous nous plaçons a changé.

- (3) La fonction

$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \quad (11.675)$$

n'est pas une bijection parce qu'il existe plus de un x tel que $\sin(x) = 1$.

En conclusion : il est très important de préciser les domaines des fonctions considérées. $\triangle$

Remarque 11.269.

Dire que la fonction $f: I \rightarrow J$ est bijective, c'est dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x peut être résolue de façon univoque pour tout $y \in J$.

Remarque 11.270.

Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective.

Proposition 11.271.

Une fonction monotone et surjective d'un intervalle I sur un autre intervalle J est continue sur I .

Exemple 11.272

La fonction

$$\begin{aligned} f: [2, 3] &\rightarrow [4, 9] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{11.676}$$

est une bijection. Sa réciproque est la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1}: [4, 9] &\rightarrow [2, 3] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{11.677}$$

$\triangle$

Exemple 11.273

Trouvons la fonction réciproque de la fonction affine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. Si $y \in \mathbb{R}$ le nombre $f^{-1}(y)$ est la valeur de x pour laquelle $f(x) = y$. Il s'agit donc de résoudre

$$3x - 2 = y \tag{11.678}$$

par rapport à x . La solution est $x = \frac{y+2}{3}$ et donc nous écrivons

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}. \tag{11.679}$$

Notons que dans les calculs, il est plus simple d'écrire « y » que « x » la variable de la fonction réciproque. Il est néanmoins (très) recommandé de nommer « x » la variable dans la réponse finale. Dans notre cas nous concluons donc

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}. \tag{11.680}$$

$\triangle$

11.39.2 Graphe de la fonction réciproque

Par définition le graphe de la fonction f est l'ensemble des points de la forme (x, y) vérifiant $y = f(x)$. Afin de déterminer le graphe de la bijection réciproque nous pouvons faire le raisonnement suivant.

Le point (x_0, y_0) est sur le graphe de f

$\Leftrightarrow$

La relation $f(x_0) = y_0$ est vérifiée

$\Leftrightarrow$

La relation $x_0 = f^{-1}(y_0)$ est vérifiée

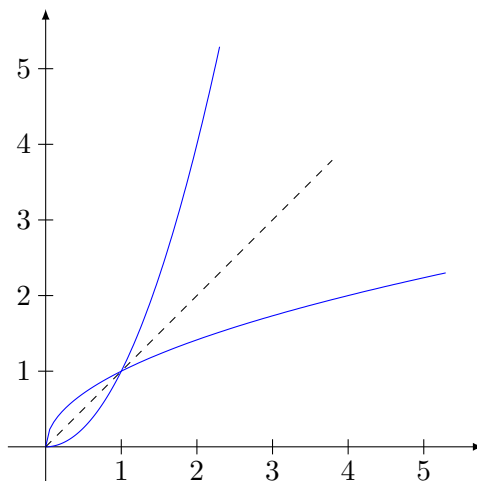
$\Leftrightarrow$

Le point (y_0, x_0) est sur le graphe de f^{-1} .

À retenir 11.274

Dans un repère orthonormal, le graphe de la bijection réciproque est obtenu à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le dessin suivant montre le cas de la courbe de la fonction carré comparé à celle de la racine carrée.

**11.39.3 Théorème de la bijection****Proposition 11.275.**

Soit une bijection $f: I \rightarrow J$ et $f^{-1}: J \rightarrow I$ sa réciproque. Alors pour tout $x_0 \in I$ nous avons

$$f^{-1}(f(x_0)) = x_0 \quad (11.681)$$

et pour tout $y_0 \in J$ nous avons

$$f(f^{-1}(y_0)) = y_0. \quad (11.682)$$

Démonstration. Nous prouvons la relation (11.681) et nous laissons (11.682) comme exercice au lecteur.

Soit $x_0 \in I$, et posons $y_0 = f(x_0)$. La définition de l'application réciproque est que pour $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$. Donc $f^{-1}(y_0)$ est l'unique élément de I dont l'image est y_0 . C'est donc x_0 et nous avons $f^{-1}(y_0) = x_0$, c'est à dire

$$f^{-1}(f(x_0)) = x_0. \quad (11.683)$$

□

Théorème 11.276 (Théorème de la bijection).

Soit I un intervalle et f une fonction continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

- (1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;
- (2) La fonction $f: I \rightarrow f(I)$ est bijective
- (3) La fonction $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ est strictement monotone de même sens que f ;
- (4) La fonction $f: I \rightarrow f(I)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire que $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ est continue.

Démonstration. Prouvons les choses point par point.

- (1) Supposons pour fixer les idées que f est monotone croissante³⁵.

Soient $a < b$ dans $f(I)$. Par définition il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $a = f(x_1)$ et $b = f(x_2)$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ et vérifie $f(x_1) < f(x_2)$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 11.258 nous dit que pour tout t dans $[f(x_1), f(x_2)]$, il existe un $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = t$. Cela montre que toutes les valeurs intermédiaires entre a et b sont atteintes par f et donc que $f(I)$ est un intervalle.

- (2) Nous prouvons maintenant que f est bijective en prouvant séparément qu'elle est surjective et injective.

f est surjective Une fonction est toujours surjective depuis un intervalle I vers l'ensemble $\Im f$.

f est injective Soit $x \neq y$ dans I ; pour fixer les idées nous supposons que $x < y$. La stricte monotonie de f implique que $f(x) < f(y)$ ou que $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$.

La fonction f est donc bijective.

- (3) Comme d'accoutumée nous supposons que f est croissante. Soient $y_1 < y_2$ dans $f(I)$; nous devons prouver que $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$. Pour cela nous considérons les nombres $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Nous allons en prouver la contraposée en supposant que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. En appliquant f (qui est croissante) à cette dernière inégalité il vient

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)), \quad (11.684)$$

ce qui signifie

$$y_1 \geq y_2 \quad (11.685)$$

par l'équation (11.682).

- (4) La fonction $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ est une fonction monotone et surjective, donc continue par la proposition 11.271.

□

Proposition 11.277 ([164]).

Soit $f: I \rightarrow J = f(I)$ une fonction bijective, continue et dérivable³⁶. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et sa dérivée est donnée par

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (11.686)$$

À retenir 11.278

Très souvent on préfère retenir la formule

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'((f^{-1})(y_0))} \quad (11.687)$$

Démonstration. Prouvons que f^{-1} est dérivable au point $b = f(a) \in J$. Étant donné que f est dérivable en a , nous avons

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (11.688)$$

Par ailleurs, étant donnée la continuité de f^{-1} donnée par la proposition 11.276(4), nous avons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f^{-1}(b + \epsilon) = f^{-1}(b) = a. \quad (11.689)$$

35. Traitez en tant que exercice le cas où f est décroissante.

36. Pour rappel, une fonction dérivable est toujours continue; l'hypothèse de continuité n'est pas nécessaire

Nous pouvons donc remplacer dans (11.688) tous les x par $f^{-1}(b + \epsilon)$ et prendre la limite $\epsilon \rightarrow 0$ au lieu de $x \rightarrow a$:

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(f^{-1}(b + \epsilon)) - f(a)}{f^{-1}(b + \epsilon) - a} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{b + \epsilon - f(a)}{f^{-1}(b + \epsilon) - f^{-1}(b)} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{f^{-1}(b + \epsilon) - f^{-1}(b)} \\
 &= \frac{1}{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b + \epsilon) - f^{-1}(b)}{\epsilon}} \\
 &= \frac{1}{(f^{-1})'(b)}.
 \end{aligned} \tag{11.690}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(a) = b$ et $a = f^{-1}(b)$. □

Remarque 11.279.

Le formule (11.687) est très simple à retenir : il suffit d'écrire

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{11.691}$$

puis de dériver les deux côtés par rapport à x en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$(f^{-1})'(f(x)) f'(x) = 1. \tag{11.692}$$

Exemple 11.280(Exponentielle et logarithme)

Nous savons que la fonction

$$\begin{aligned}
 \exp: \mathbb{R} &\rightarrow]0, \infty[\\
 x &\mapsto e^x
 \end{aligned} \tag{11.693}$$

est croissante et dérivable. Elle est donc bijective, d'inverse continue et dérivable par le théorème 11.276 et la proposition 11.277. Nous nommons **logarithme** la fonction inverse de l'exponentielle :

$$\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}. \tag{11.694}$$

La proposition 11.277 nous enseigne que la fonction logarithme est croissante et que sa dérivée peut être calculée³⁷ : si $y = e^x$ alors

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{y}. \tag{11.695}$$

Nous retrouvons ainsi la formule très connue comme quoi la dérivée du logarithme est l'inverse³⁸. △

11.40 Rappels de trigonométrie

Dans ce cours tous les angles sont exprimés en radians.

Définition 11.281.

La fonction **tangente** est la fonction

$$\begin{aligned}
 \tan: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.
 \end{aligned} \tag{11.696}$$

37. Nous savons que $\exp'(x) = \exp(x)$: la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même.

38. Ou encore que le logarithme est une primitive de la fonction inverse.

Proposition 11.282.

Quelque propriétés de la fonction tangente.

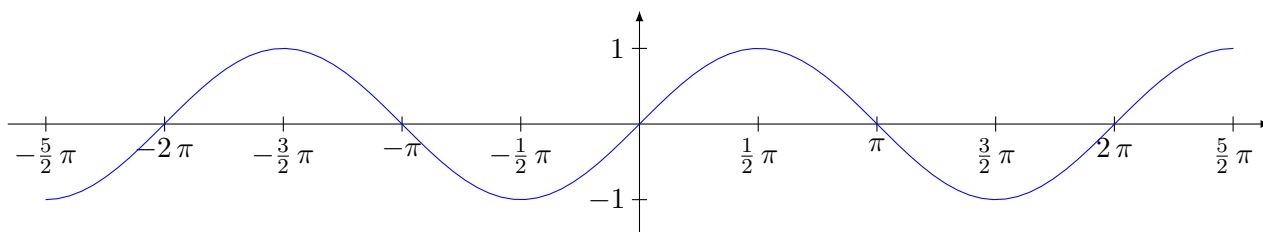
- (1) L'image de la fonction tangente est $\mathbb{R}$.
- (2) La fonction tangente est périodique, de période π .
- (3) Son graphe est un réunion dénombrable de courbes disjointes, voir la figure 11.19.

Voici un tableau qui rappelle les valeurs à retenir pour les fonctions sinus, cosinus et tangente.

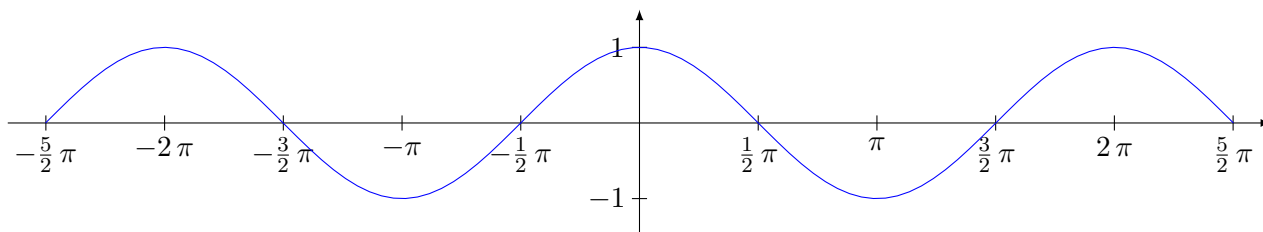
x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	N.D.

où «N.D.» signifie «non défini».

Rappelons le graphe de la fonction sinus :



celui de la fonction cosinus :



The result is on figure 11.19.

Nous allons donner une preuve géométrique de la limite remarquable (vue en terminale)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (11.697)$$

Cette preuve peut vous servir pour reviser la signification géométrique des fonction trigonométriques et leur propriétés de base. il est donc fortement conseillé de la parcourir même si elle n'est pas exigible en tant que question de théorie à l'examen.

Première étape : On montre que

Lemme 11.283.

Pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq |x|$.

- Si $0 \leq x \leq \pi/2$ alors le sinus de x est la longueur du cathète verticale du triangle rectangle de sommets $O = (0, 0)$, $A = (\cos(x), \sin(x))$ et $B = (\cos(x), 0)$. Le triangle de sommets A , B et $C = (1, 0)$ est aussi rectangle et nous savons que chacun des cathètes ne peut pas être plus long que l'hypoténuse. Donc $\sin(x)$ est inférieur à la longueur du segment AC . À son tour le segment AC ne peut pas être plus long que l'arc de cercle

$\widehat{AOC}$, car le chemin le plus court entre deux points du plan est toujours donné par un morceau de droite. La longueur de l'arc du cercle $\cap AC$ est *par définition* la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOC}$, qui est x et on a l'inégalité $\sin(x) \leq x$.

- Si $-\pi/2 \leq x \leq 0$ le même raisonnement que au point précédent permet de conclure que $\sin(x) \leq |x|$.
- Nous savons par ailleurs que la fonction sinus prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ et donc pour tout x tel que $|x| \geq \pi/2 \equiv 1,57 \dots$ on a forcément $|\sin(x)| \leq |x|$.

Deuxième étape : On commence par observer que la fonction $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est un rapport entre deux fonction impaires et est donc une fonction paire. Nous pouvons alors nous réduire à considérer le cas où x est positif. La première étape de cette preuve nous dit que $g(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$.

Nous voulons étudier le comportement de g dans un voisinage de 0. Nous pouvons alors supposer que x soit inférieur à $\pi/2$. Soit $D = (1, \tan(x))$. On voit très bien dans le dessin que l'aire du triangle de sommets O , D et C est supérieure à l'aire du secteur circulaire de sommets O , A et C . Ces deux aires peuvent être calculées très facilement et nous obtenons

$$\frac{\sin(x)}{2 \cos(x)} \geq \frac{x}{2}.$$

À partir de cette dernière inégalité nous pouvons écrire

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x).$$

En prenant la limite lorsque x tend vers 0 dans les trois membres de l'inégalité la règle de l'étau nous permet d'obtenir la limite remarquable (11.697).

11.41 Fonctions trigonométriques réciproques

11.41.1 La fonction arc sinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{11.698}$$

et sa réciproque éventuelle.

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas bijective : elle prend une infinité de fois chaque valeur de $J = [-1, 1]$. Pour définir une bijection réciproque de la fonction sinus en utilisant le théorème 11.276, nous devons donc choisir un intervalle à partir duquel la fonction sinus est monotone. Nous choisissons l'intervalle

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{11.699}$$

La fonction

$$\begin{aligned} \sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} \tag{11.700}$$

est une bijection croissante et continue. Nous avons donc le résultat suivant.

Théorème 11.284 (Définition et propriétés de arc sinus).

Nous nommons **arc sinus** la bijection inverse de la fonction $\sin: I \rightarrow J$. La fonction

$$\begin{aligned} \arcsin: [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned} \tag{11.701}$$

ainsi définie est

(1) continue et strictement croissante ;

(2) impaire : pour tout $x \in [-1, 1]$ nous avons $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

Démonstration. Nous prouvons le fait que $\arcsin$ est impaire. Un élément de l'ensemble de définition de $\arcsin$ est de la forme $y = \sin(x)$ avec $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. La relation (11.681) s'écrit dans notre cas

$$x = \arcsin(\sin(x)). \quad (11.702)$$

Nous écrivons d'une part cette équation avec $-x$ au lieu de x :

$$-x = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin(x)) = \arcsin(-y); \quad (11.703)$$

et d'autre part nous multiplions (11.702) par -1 :

$$-x = -\arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(y). \quad (11.704)$$

En égalisant les valeurs (11.703) et (11.704) nous trouvons

$$\arcsin(-y) = -\arcsin(y), \quad (11.705)$$

ce qui signifie que $\arcsin$ est une fonction impaire. $\square$

Notons que cette preuve repose sur le fait que tout élément de l'ensemble de définition de la fonction arc sinus peut être écrit sous la forme $\sin(x)$ pour un certain x .

Si $x_0 \in [-1, 1]$ est donné, calculer $\arcsin(x_0)$ revient à trouver un angle θ_0 dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour lequel $\sin(\theta_0) = x_0$. Un tel angle sera forcément unique.

Remarque 11.285.

La définition de arc sinus découle du choix de l'intervalle I , qui est une convention. Il aurait été possible de faire un choix différent : pourriez vous trouver la réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$? Le mieux est de l'écrire comme une translatée de arc sinus, en utilisant le fait que sinus est une fonction périodique.

Exemple 11.286

Pour calculer $\arcsin(1)$, il faut chercher un angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ayant 1 pour sinus : résoudre $\sin(\theta) = 1$. La solution est $\theta = \frac{\pi}{2}$ et nous avons donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. $\triangle$

À l'aide des valeurs remarquables de la fonction sinus nous obtenons le tableau suivant de valeurs remarquables pour l'arc sinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Les autres valeurs remarquables peuvent être déduites du fait que l'arc sinus est une fonction impaire.

En ce qui concerne la dérivabilité de la fonction arc sinus, en application de la proposition 11.277 elle est dérivable en tout $y = \sin(x)$ tel que $\sin'(x) \neq 0$, c'est à dire tel que $\cos(x) \neq 0$. Or $\cos(x) = 0$ pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $y = \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. La fonction arc sinus est donc dérivable sur $] -1, 1[$. Nous avons donc la propriété suivante pour la dérivabilité.

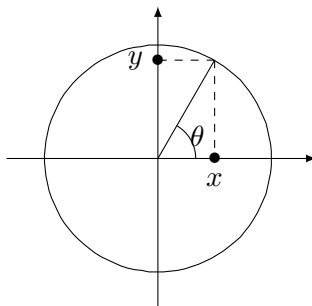
Proposition 11.287.

La fonction arc sinus est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Pour tout $y \in] -1, 1[$, la dérivée est donnée par la formule (11.687), qui dans ce cas s'écrit

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (11.706)$$

La dernière égalité vient du fait que si $x = \arcsin(y)$ alors $y = \sin(x)$ et $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - y^2}$.

Pour comprendre la dernière égalité, remarquer que dans le dessin suivant, $\theta = \arcsin(y)$, donc $y = \sin(\theta)$, et $x = \cos(\theta)$.



Notons enfin que le graphe de la fonction arc sinus est donné à la figure 11.20.

11.41.2 La fonction arc cosinus

Nous voulons étudier la fonction

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned} \quad (11.707)$$

et son éventuelle réciproque. Encore une fois il n'est pas possible d'en prendre la réciproque globale parce que ce n'est pas une bijection. Nous choisissons de considérer l'intervalle $[0, \pi]$ sur lequel la fonction cosinus est continue et strictement monotone décroissante.

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 11.288.

La fonction

$$\begin{aligned} \cos: [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned} \quad (11.708)$$

*est une bijection continue strictement décroissante. Sa bijection réciproque, nommée **arc cosinus***

$$\begin{aligned} \arccos: [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned} \quad (11.709)$$

est continue, strictement décroissante et dérivable. Pour tout $y \in]-1, 1[$, sa dérivée est donnée par

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}. \quad (11.710)$$

Remarque 11.289.

Certes la fonction cosinus est paire (vue sur $\mathbb{R}$), mais la fonction arc cosinus ne l'est pas car elle est une bijection entre $[-1, 1]$ et $[0, \pi]$.

Pour $y_0 \in [-1, 1]$, trouver la valeur de $\arccos(y_0)$ revient à résoudre l'équation $\cos(x_0) = y_0$. Cela nous permet de construire un tableau de valeurs :

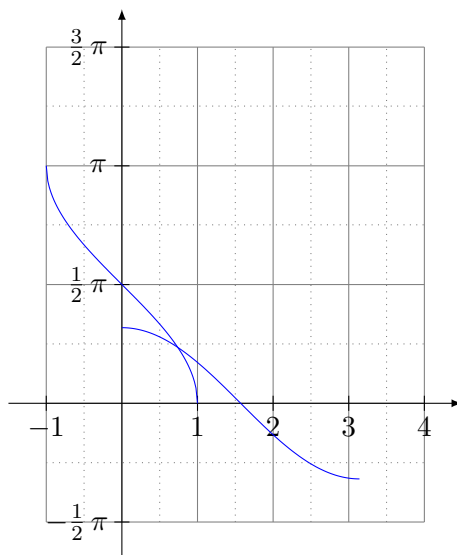
x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

Exemple 11.290

Cherchons $\arccos(\frac{1}{2})$. Il faut trouver un angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. La solution est $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

Il n'est cependant pas immédiat d'en déduire la valeur de $\arccos(-\frac{1}{2})$. En effet $\theta = \arccos(-\frac{1}{2})$ si et seulement si $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0, \pi]$. La solution est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. $\triangle$

En ce qui concerne la représentation graphique, il suffit de tracer la fonction cosinus entre 0 et π puis de prendre le symétrique par rapport à la droite $y = x$.



11.41.3 La fonction arc tangente

La fonction tangente est donnée par la formule

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (11.711)$$

et n'est pas définie sur les points de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Afin de définir une bijection réciproque nous considérons l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (qui est ouvert, contrairement aux intervalles choisis pour arc cosinus et arc sinus). Le résultat est le suivant.

Théorème 11.291.

La fonction

$$\begin{aligned} \tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) \end{aligned} \quad (11.712)$$

est une bijection strictement croissante.

La bijection réciproque

$$\begin{aligned} \arctan: \mathbb{R} &\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned} \quad (11.713)$$

*nommée **arc tangente** est*

(1) *impair et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

(2) *dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (11.714)$$

Note : la dernière ligne n'a rien de mystérieux : $\tan(\arctan(x)) = x$ et donc $\tan^2(\arctan(x)) = x^2$.

En ce qui concerne la dérivabilité nous savons que

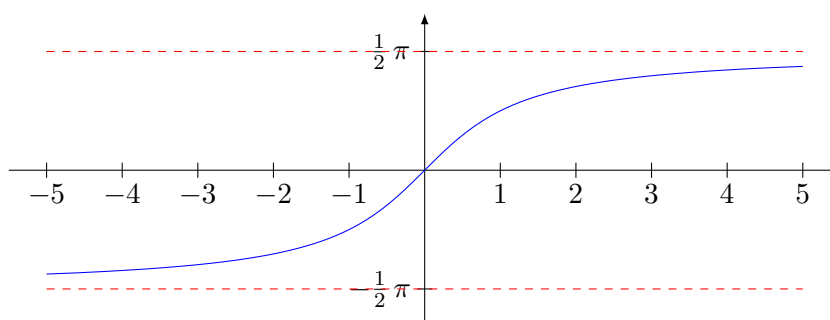
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x), \quad (11.715)$$

qui ne s'annule pour aucune valeur de x ; c'est pour cela que $\arctan$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

Le nombre $\arctan(x_0)$ se calcule en cherchant l'angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont la tangente vaut x_0 . Nous obtenons le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

En ce qui concerne la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$, elle s'obtient «en retournant» la partie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ du graphique de la fonction tangente (voir les rappels 11.40).



11.42 Trigonométrie hyperbolique

Définition 11.292.

Les fonction *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (11.716a)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (11.716b)$$

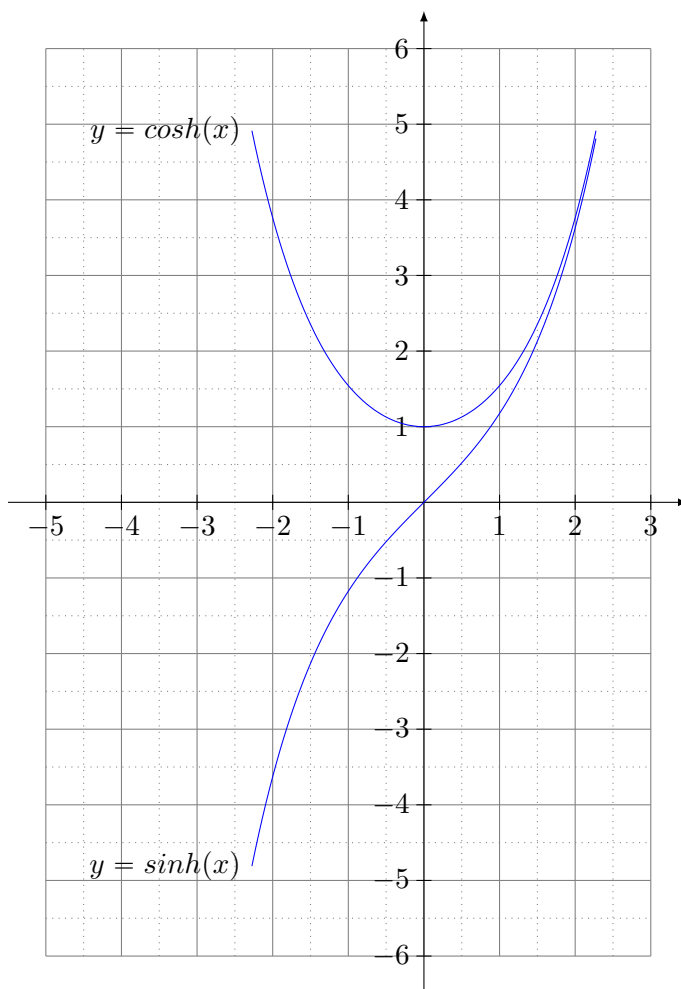
Leurs principales propriétés sont :

$$(1) \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$(2) \quad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$(3) \quad \sinh'(x) = \cosh.$$

Les représentations graphiques sont ceci :



La **tangente hyperbolique** est donnée par le quotient

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \quad (11.717)$$

11.43 Développement limité autour de zéro

Dans cette sections nous supposons toujours que les fonctions sont définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, I , contenant 0.

Définition 11.293.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert I autour de zéro. Nous disons que f admet un **développement limité** autour de 0 à l'ordre n si il existe une fonction $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n \alpha(x) & (11.718a) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0 & (11.718b) \end{cases}$$

où $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est une polynôme de degré n . Le polynôme P_n est appelé la **partie régulière** du développement.

La fonction α est appelé le **reste** du développement et sera parfois noté α_f . Lorsque P est la partie régulière d'un développement limité de f nous notons parfois $f \sim P$.

Proposition 11.294 (Troncature).

Si f admet un développement limité d'ordre n alors il admet également un développement limité d'ordre n' pour tout $n' < n$. Ce dernier s'obtient en tronquant le polynôme d'ordre n à l'ordre n' .

Proposition 11.295 (Unicité).

Si f admet un développement limité alors ce dernier est unique : il existe un unique polynôme P_n d'ordre n et une unique fonction α vérifiant simultanément les deux conditions

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n \alpha(x), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (11.719a) \\ (11.719b) \end{array}$$

Exemple 11.296

En ce qui concerne les séries géométriques de raison x nous savons les formules

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (11.720)$$

et

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad (11.721)$$

pour tout $x \in]-\infty, 1[$. Comparant les deux, il est naturel d'essayer de prendre $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ comme développement limité de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour voir si cela fonctionne, il faut vérifier si «le reste» est bien de la forme $x^n \alpha(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$.

Le reste en question est donné par

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \dots - x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \frac{x}{1-x}. \quad (11.722)$$

En posant $\alpha(x) = \frac{x}{1-x}$ nous avons donc bien

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \frac{x}{1-x} \quad (11.723)$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Cela est le développement limité de f à l'ordre n autour de 0. $\triangle$

La formule des accroissements finis est un cas particulier de développement fini. Supposons que f soit dérivable en 0. En effet nous pouvons facilement trouver la fonction α qui convient. Sachant que $f(0) + x f'(0)$ donne l'approximation affine de f autour de 0, nous cherchons α en écrivant

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x \alpha(x). \quad (11.724)$$

Cela nous pousse à définir

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0). \quad (11.725)$$

Notons que cette fonction n'est pas définie en $x = 0$, mais cela n'a pas d'importance : seule la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x)$ nous intéresse. Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = 0. \quad (11.726)$$

En conclusion si f est dérivable, son développement limité à l'ordre 1 est donné par

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x \alpha(x) \quad (11.727)$$

où $\alpha(x)$ est donnée par la formule (11.725).

Plus généralement nous avons la proposition suivante qui donne le développement limité de toute fonction dérivable n fois.

Proposition 11.297 (Formule de Taylor-Young).

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Alors il existe une fonction $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \alpha(x) \quad (11.728)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0. \quad (11.729)$$

Cette proposition nous permet de trouver facilement des développements limités. Dans l'exemple 11.296 nous avons dû utiliser des astuces et des formules pour déterminer le développement limité de $\frac{1}{1-x}$. Au contraire la formule (11.728) nous permet de trouver le polynôme en calculant seulement de dérivées.

Exemple 11.298

Utilisation de la formule (11.728) pour déterminer le développement limité de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x}. \quad (11.730)$$

Il faut calculer les dérivées successives de f :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (11.731a)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (11.731b)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (11.731c)$$

Avec ces résultats, nous devinons que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \quad (11.732)$$

Pour en être sûr nous le prouvons par récurrence. La dérivée de $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ est donnée par

$$\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}. \quad (11.733)$$

Évaluées en $x = 0$, les dérivées successives de f sont $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2, \dots, f^{(n)}(0) = n!$. Utilisant la formule (11.728) nous avons

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \alpha(x), \quad (11.734)$$

conformément à ce que nous avons déjà trouvé. $\triangle$

Remarque 11.299.

Pour alléger la notation et ne pas écrire $\dots + x^n \alpha(x)$ nous pouvons aussi écrire

$$f(x) \sim 1 + x + x^2 + \dots + x^n, \quad (11.735)$$

mais il est interdit d'écrire

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (11.736)$$

en mettant un signe d'égalité entre une fonction et son développement limité³⁹.

Notons cependant que la proposition 11.297 ne donne pas de moyen simple de trouver la fonction α . Si la fonction f est très régulière dans l'intervalle I on a le résultat suivant (qui n'est pas exigible à l'examen, mais qui ne fait pas de mal non plus).

Proposition 11.300 (Reste dans la forme de Lagrange).

Si la fonction f est dérivable $n+1$ fois dans I alors il existe $\bar{x}$ dans l'intervalle d'extrêmes 0 et x tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x}) x^{n+1}. \quad (11.737)$$

³⁹. Il faut cependant être très prudents avec la notation abrégée. Elle pourrait nous faire oublier des informations importantes, voir les développements des fonction trigonométriques pour un exemple.

Voici quelque développements limités à savoir. Ils sont calculables en utilisant la formule de Taylor-Young (proposition 11.297).

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \alpha(x) \quad \text{ordre } n \quad (11.738a)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \alpha(x) \quad \text{ordre } 2p+1 \quad (11.738b)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{p+2} \alpha(x) \quad \text{ordre } 2p+1 \quad (11.738c)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^n \alpha(x) \quad \text{ordre } n \quad (11.738d)$$

$$(1+x)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} x^k \quad \text{exact si } l \text{ est entier.} \quad (11.738e)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n \alpha(x) \quad \text{ordre } n. \quad (11.738f)$$

Il est fortement suggéré au lecteur de vérifier ces développements par lui-même.

Remarque 11.301.

Quelques remarques.

- (1) Les développements de sinus et de cosinus ont un terme sur deux qui est nul. C'est pour cela qu'en ayant un polynôme de degré $2p$, nous avons le développement d'ordre $2p+1$.
- (2) En ce qui concerne le développement de $\ln(1+x)$, il faut noter que la somme va jusqu'à $k = n-1$ (et non $k = n$) parce que nous voulons aller jusqu'à x^n et que nous écrivons x^{k+1} .
- (3) Si l est entier, le développement de $(1+x)^l$ est exact. Dans le développement de $(1+x)^\alpha$, nous reconnaissons la formule de $\binom{l}{k}$, sauf que nous ne pouvons pas l'écrire avec cette notation lorsque α n'est pas entier.
- (4) Le développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que les puissances de x d'exposant paire. Voir comme exemple le développement de la fonction cosinus.

11.44 Règles de calcul

Les règles suivantes permettent de calculer les développements limités des fonctions qu'on peut écrire comme combinaison des fonctions dans le tableau de la section précédente.

Remarque 11.302.

Il est toujours possible de calculer le développement limité d'une fonction par la formule de Taylor-Young. Les règles suivantes peuvent nous économiser de l'effort et du temps.

11.44.1 Linéarité des développements limités

L'opération qui consiste à prendre le développement limité d'une fonction est une opération linéaire : connaissant les développements limités de f et de g , il suffit de les sommer pour obtenir celui de $f+g$. De même, si λ est une constante, le développement limité de λf est le développement limité de f fois λ .

Proposition 11.303.

Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions acceptant des développements limités d'ordre n

$$f(x) = P(x) + x^n \alpha_f(x) \quad (11.739a)$$

$$g(x) = Q(x) + x^n \beta(x) \quad (11.739b)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = 0$, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet le développement limité

$$(f + g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + (\lambda \alpha + \mu \beta)(x). \quad (11.740)$$

Remarque 11.304.

La forme explicite du reste ne nous intéresse pas. Dans la pratique on écrira toujours $(f + g)(x) = (P + Q)(x) + \alpha(x)$, où on appelle α une fonction opportune telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$.

Démonstration. Vu les définitions (11.739) des polynômes P , Q et des restes α et β , l'égalité (11.740) est une conséquence de la linéarité de la dérivation et de la proposition 11.297

De plus $P + Q$ est un polynôme de degré n dès que P et Q sont des polynômes de degré n , et

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lambda \alpha + \mu \beta)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \lambda \alpha(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \mu \beta(x) = 0. \quad (11.741)$$

Par conséquent $\lambda \alpha + \mu \beta$ est la fonction de reste de $\lambda f + \mu g$. $\square$

Exemple 11.305

Calculer le développement de la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x}. \quad (11.742)$$

Le développement de $\sqrt[3]{1+x}$ est donné par la formule (11.738f) avec $\alpha = \frac{1}{3}$. Nous avons donc dans un premier temps

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{6}x^3 + x^3\alpha(x) \quad (11.743a)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x). \quad (11.743b)$$

Nous avons alors

$$3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x} = 3\left[1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x)\right] + 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\beta(x) \quad (11.744a)$$

$$= 4 - x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{31}{27}x^3 + x^3(\alpha(x) + \beta(x)). \quad (11.744b)$$

$\triangle$

La condition $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$ signifie que l'approximation qui consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme n'est pas une trop mauvaise approximation lorsque x est petit. Cela ne signifie rien de plus. En particulier si x est grand, l'approximation polynômiale peut-être (et est souvent) très mauvaise.

À ce propos, notez qu'un polynôme tend toujours vers $\pm\infty$ lorsque x est grand. Une approximation polynômiale d'une fonction bornée est donc toujours (très) mauvaise pour les grandes valeurs de x .

À titre d'exemple nous avons tracé sur la figure 11.21 la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} + e^{-2x} \quad (11.745)$$

et ses développements limités d'ordre 1 à 3. Il est particulièrement visible que l'approximation est assez bonne pour la partie gauche du graphe sur laquelle la fonction est bien croissante, alors qu'elle est franchement mauvaise sur la droite où le graphe ressemble plutôt à une constante⁴⁰.

40. Pouvez-vous cependant dire que vaut $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$?

11.44.2 Développement limité d'un quotient

Proposition 11.306.

Si P_f est le polynôme du développement limité de f à l'ordre n et P_g celui de g , alors nous obtenons le développement limité de f/g à l'ordre n en effectuant la division selon les puissances croissantes de P_f par P_g .

Attention : il s'agit bien de faire une division selon les puissances croissantes, et non une divisions euclidienne. La division euclidienne de A par B consiste à écrire $A = BQ + R$ avec le reste R de degré le plus *petit* possible. Ici nous voulons avoir un reste de degré le plus *grand* possible.

Exemple 11.307

Cherchons le développement limité à l'ordre 5 de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Nous utilisons les formules (11.738b) et (11.738c) pour savoir les développements de sinus et cosinus ⁴¹ :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \alpha_1(x) \quad (11.746a)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \alpha_2(x). \quad (11.746b)$$

Nous calculons alors la division des deux polynômes, en classant les puissances dans l'ordre croissant (c'est le sens inverse de ce qui est fait pour la divisions euclidienne!) :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{r} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 \\ \hline -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{72}x^7 \right) \\ \hline \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{72}x^7 \\ \hline -\left(\frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{15}x^7 + \frac{1}{180}x^9 \right) \\ \hline \frac{29}{360}x^7 - \frac{1}{180}x^9 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\ \hline x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \end{array} \right. \end{array}$$

Nous avons continué la division jusqu'à obtenir un reste de degré plus grand que 5. Le développement à l'ordre 5 de la fonction tangente autour de zéro est alors

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \alpha(x). \quad (11.747)$$

Notons que, vu que le reste ne nous intéresse pas vraiment, nous aurions pu ne pas calculer les coefficients des termes en x^7 et x^8 . La dernière soustraction était également inutile. $\triangle$

11.44.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 11.308.

Soient f et g des fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. Nous supposons que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Alors la composée $f(g(x))$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en substituant le développement de g à chaque « x » du développement de f , et en supprimant tous les termes de degré plus élevé que n .

Exemple 11.309

Pour trouver le développement de la fonction $f(x) = e^{-2x}$, il suffit d'écrire celui de e^t et de remplacer ensuite t par $-2x$. Le développement à l'ordre 3 de la fonction exponentielle est :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3 \alpha(t). \quad (11.748)$$

⁴¹. Encore une fois, vous êtes très fortement encouragés à calculer vous-même ces développements à partir de la formule de Taylor-Young 11.728.

Le développement de $f(x) = e^{-2x}$ sera donc

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6} - 8x^3\alpha(-2x). \quad (11.749)$$

Donc le polynôme de degré 3 partie régulière de g est :

$$1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3, \quad (11.750)$$

et la fonction reste correspondante est :

$$\alpha_g(x) = -8\alpha(-2x). \quad (11.751)$$

△

Exemple 11.310

Nous savons les développements

$$f(x) = \ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (11.752)$$

et

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{6}. \quad (11.753)$$

Nous obtenons le développement d'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ en écrivant

$$\ln(1 + \sin(x)) \sim \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3. \quad (11.754)$$

Il s'agit maintenant de trouver les termes qui sont de degré inférieur ou égale à 3.

D'abord

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} \sim x^2 \quad (11.755)$$

Nous avons alors aussi

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 \sim x^3 \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \sim x^3. \quad (11.756)$$

En remplaçant tout ça dans (11.754) nous trouvons

$$\ln(1 + \sin(x)) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \quad (11.757)$$

△

11.45 Développement au voisinage de $x_0 \neq 0$

Il est intéressant de développer une fonction au voisinage de zéro lorsque nous nous intéressons à son comportement pour les x pas très grands. Il est toutefois souvent souhaitable de savoir le comportement d'une fonction au voisinage d'autres valeurs que zéro.

Pour développer la fonction f autour de x_0 , nous considérons la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ que nous développons autour de zéro (pour h). L'objectif est de trouver une polynôme P et une fonction α tels que

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \alpha(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (11.758a) \\ (11.758b) \end{matrix}$$

En pratique, le développement limité à l'ordre n d'une fonction autour d'un point x_0 quelconque à l'intérieur de son domaine prend la forme suivante, qui généralise la formule de Taylor-Young vue dans la proposition 11.297

Proposition 11.311 (Formule de Taylor-Young, cas général).

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0 . Alors il existe une fonction $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \alpha(x - x_0) \quad (11.759)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0. \quad (11.760)$$

Exemple 11.312

Développer la fonction $\cos$ autour de $x = \frac{\pi}{3}$. Nous développons autour de $h = 0$ la fonction $\cos(\frac{\pi}{3} + h)$:

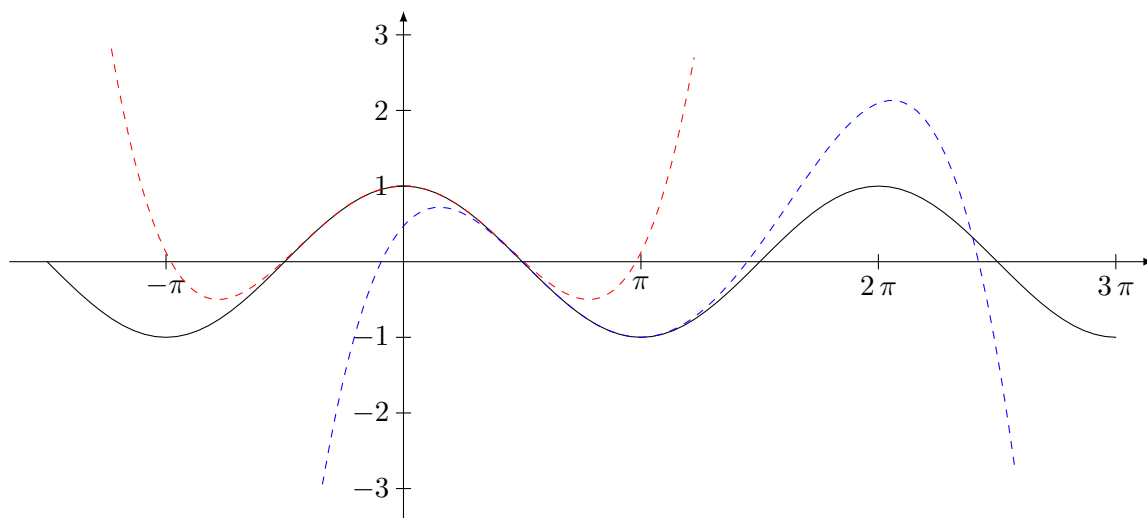
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) \sim \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + h \cos'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{h^2}{2} \cos''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2. \quad (11.761)$$

Il est aussi possible d'écrire cela en notant $x = x_0 + h$, c'est à dire en remplaçant h par $x - \frac{\pi}{3}$:

$$\cos(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2. \quad (11.762)$$

△

Pour donner une idée nous avons dessiné sur le graphe suivant la fonction sinus et ses développements d'ordre 4 autour de zéro et autour de $3\pi/4$.



11.46 Application au calcul de limites

Lors d'un calcul de limite, développer une partie d'une expression peut être utile.

Exemple 11.313

À calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. \quad (11.763)$$

Cela est une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Le développement limité du numérateur nous donne une fonction $\alpha(x)$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$ et

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x). \quad (11.764)$$

Sur le membre de droite la limite est facile à calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x)\right) = 1. \quad (11.765)$$

△

11.47 Développement au voisinage de l'infini

Il est souvent utile de connaître le comportement d'une fonction pour les grandes valeurs de x et de déterminer ses asymptotes éventuelles. La technique que nous allons utiliser consiste à poser $x = \frac{1}{h}$ et de développer la fonction "auxiliaire" $g(h) = f(1/h)$ autour de $h = 0$. La limite avec $h \rightarrow 0^+$ donnera le comportement pour $x \rightarrow \infty$ et la limite $h \rightarrow 0^-$ donnera le comportement pour $x \rightarrow -\infty$.

Dans le cas d'un développement autour de $\pm\infty$ nous ne parlons plus de développement *limité* mais de **développement asymptotique**.

Exemple 11.314

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} \sqrt{1+4x^2} - 2x. \quad (11.766)$$

Nous allons effectuer un développement asymptotique de la partie «difficile» de l'expression posant d'abord $x = 1/h$. Si $f(x) = e^{1/x} \sqrt{1+4x^2}$ alors

$$g(h) = \frac{1}{|h|} e^h \sqrt{h^2 + 4} = \frac{1}{h} (1 + h + h\alpha(h)) (2 + h\beta(h)). \quad (11.767)$$

La première parenthèse est le développement de e^h et la seconde celui de $\sqrt{h^2 + 4}$. Nous nous apprêtons à faire la limite $x \rightarrow \infty$ qui correspond à $h \rightarrow 0^+$, nous pouvons donc supposer que $h > 0$ et omettre la valeur absolue. En effectuant le produit et en regroupant tous les termes contenant h^2 , $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ dans un seul terme $h\gamma(h)$,

$$f(h) = \frac{1}{h} (2 + 2h + h\gamma(h)) = \frac{2}{h} + 2 + \gamma(h) = 2x + 2 + \gamma(1/x) \quad (11.768)$$

où γ est une fonction vérifiant $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la limite (11.766) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} \sqrt{1+x^2} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 2 + \gamma(1/x) - 2x) = 2. \quad (11.769)$$

△

11.48 Étude d'asymptote

Lorsqu'une fonction tend vers l'infini pour $x \rightarrow \infty$, une question qui peut venir est : à quelle vitesse tend-t-elle vers l'infini ?

Il est «visible» que la fonction logarithme ne tend pas très vite vers l'infini : certes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty, \quad (11.770)$$

mais par exemple $\ln(100000) \simeq 11.5$ tandis que $e^{100000} \simeq 10^{43429}$. Sans contestations possibles, l'exponentielle croît plus vite que le logarithme.

Soient f et g deux fonctions dont la limite $x \rightarrow \infty$ est ∞ . Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (11.771)$$

nous disons que g tend vers ∞ plus vite que f ; si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad (11.772)$$

nous disons que f tend vers ∞ plus vite que g , et si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R} \quad (11.773)$$

avec $a \neq 0$ alors nous disons que f tend vers l'infini à la même vitesse que $ag(x)$.

Exemple 11.315

La fonction $x \mapsto x^2$ tend vers l'infini plus vite que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. $\triangle$

Dans cette section nous allons nous contenter de déterminer les fonctions qui tendent vers l'infini aussi vite qu'une droite oblique, que nous appelons asymptote et que nous voulons déterminer.

Exemple 11.316

Déterminer les asymptotes obliques (s'ils existent) de la fonction

$$f(x) = e^{1/x} \sqrt{1 + 4x^2}. \quad (11.774)$$

Tout d'abord nous remarquons que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Nous sommes donc en présence d'une branche du graphe qui tend vers l'infini. Ensuite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4} = 2. \quad (11.775)$$

Donc le graphe de f tend vers l'infini à la même vitesse que le graphe de la fonction $y = 2x$. Nous aurons donc une asymptote oblique de coefficient directeur 2. De façon imagée, nous pouvons penser que le graphe de f et celui de $y = 2x$ sont presque parallèles si x est assez grand. Afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il nous reste à voir quelle est la «distance» entre le graphe de f et celui de $y = 2x$:

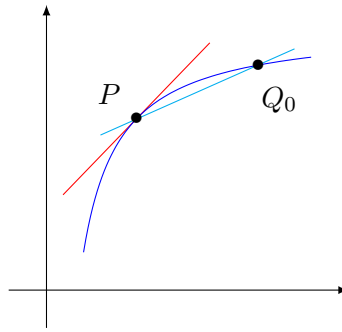
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} \sqrt{1 + 4x^2} - 2x. \quad (11.776)$$

Cette limite a été calculée dans l'exemple 11.314 et vaut 2.

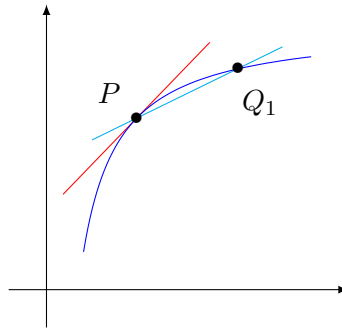
Nous concluons que le graphe de la fonction f admet l'asymptote

$$y = 2x + 2. \quad (11.777)$$

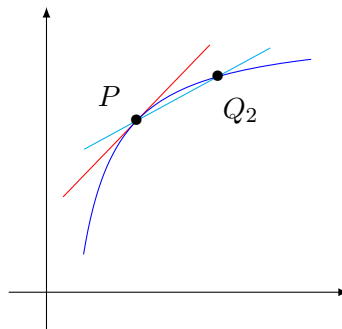
$\triangle$



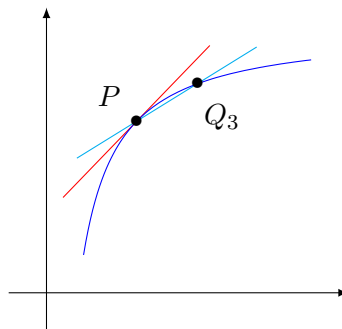
(a) Pas très non ...



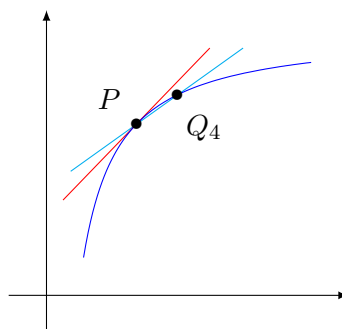
(b) ... de mieux en mieux ...



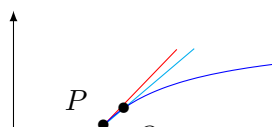
(c) ... de mieux en mieux ...



(d) ... de mieux en mieux ...



(e) ... de mieux en mieux ...



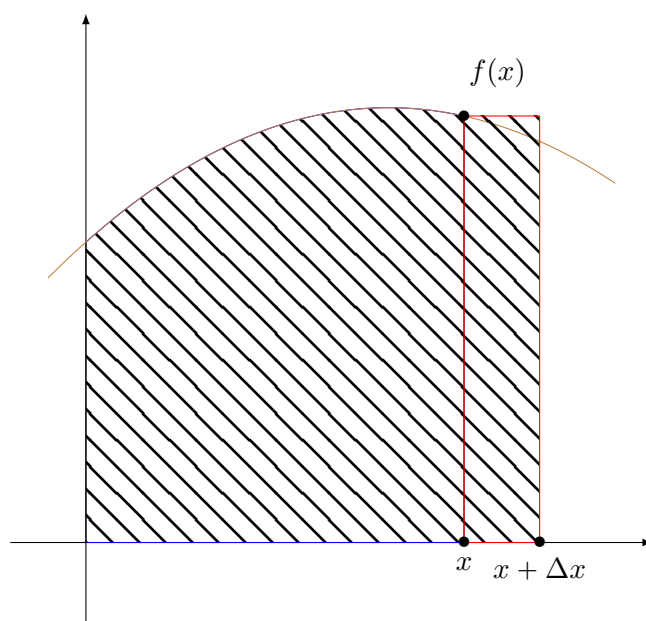


FIGURE 11.6 – L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime de combien la surface augmente lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$.

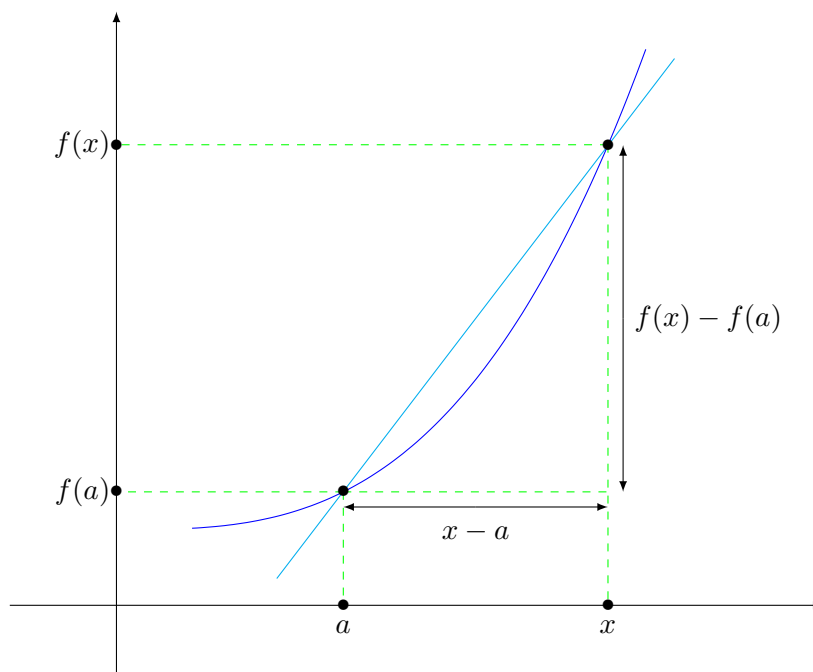


FIGURE 11.7 – Le coefficient directeur de la corde entre a et x .

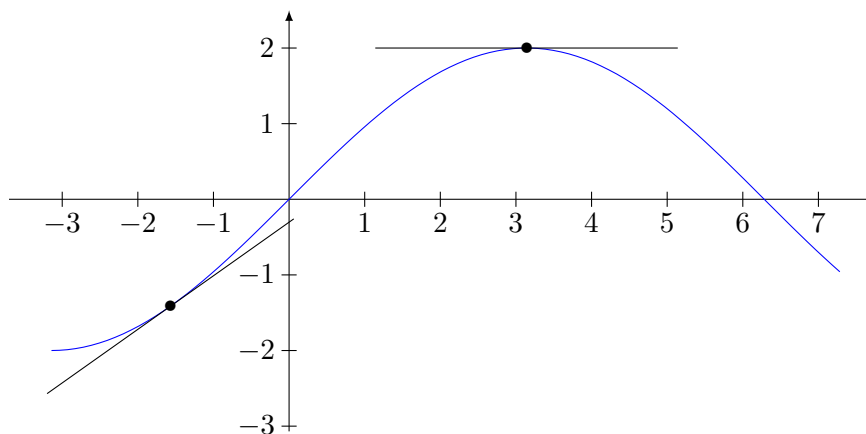


FIGURE 11.8 – Tangentes au graphe d'une fonction d'une variable

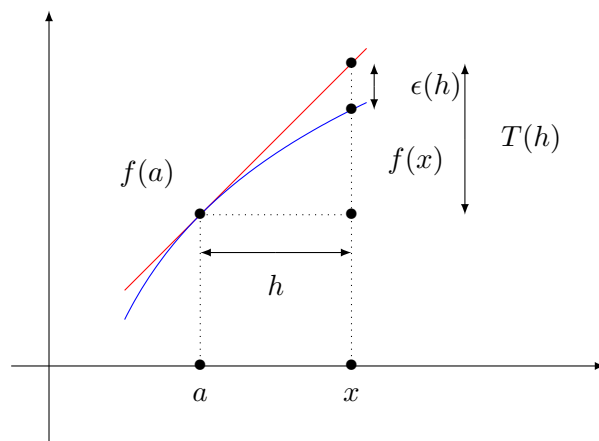


FIGURE 11.9 – Interprétation géométrique de la différentielle.

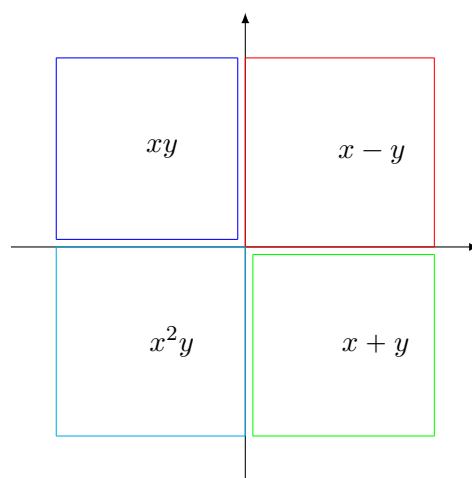
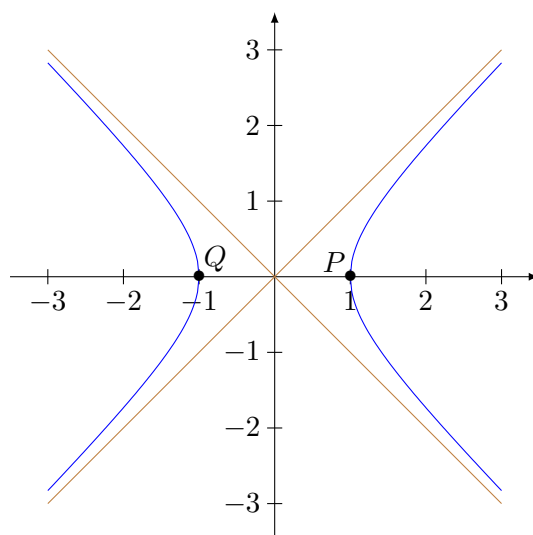
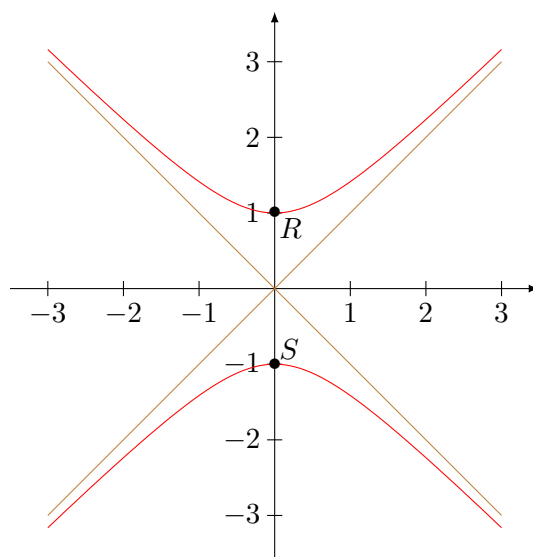
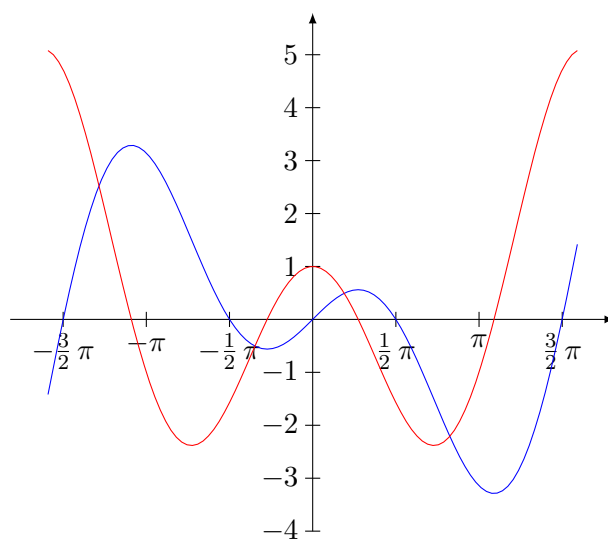


FIGURE 11.10 – La fonction de l'exemple 11.141.

FIGURE 11.11 – La courbe de niveau $h = 1$ de $x^2 - y^2$. Notez qu'elle est en deux morceaux.FIGURE 11.12 – La courbe de niveau $x^2 - y^2 = -1$.FIGURE 11.13 – La fonction $f(x) = x \cos(x)$ en bleu et sa dérivée en rouge.

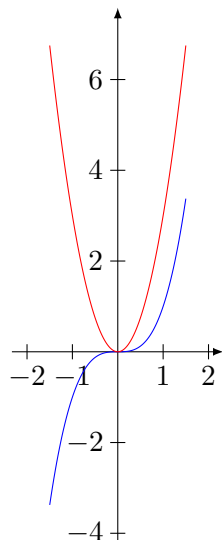


FIGURE 11.14 – La dérivée de x^3 s'annule en $x = 0$, mais ce n'est ni un minimum ni un maximum.

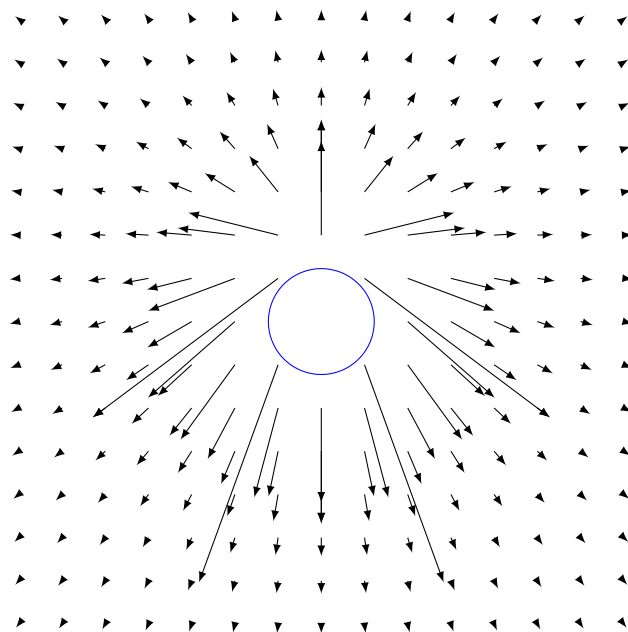


FIGURE 11.15 – Le champ de gravitation de la Terre.

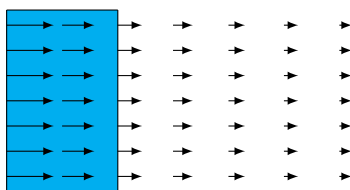


FIGURE 11.16 – Le champ de vecteurs $F(x, y) = \frac{1}{x}(1, 0)$.

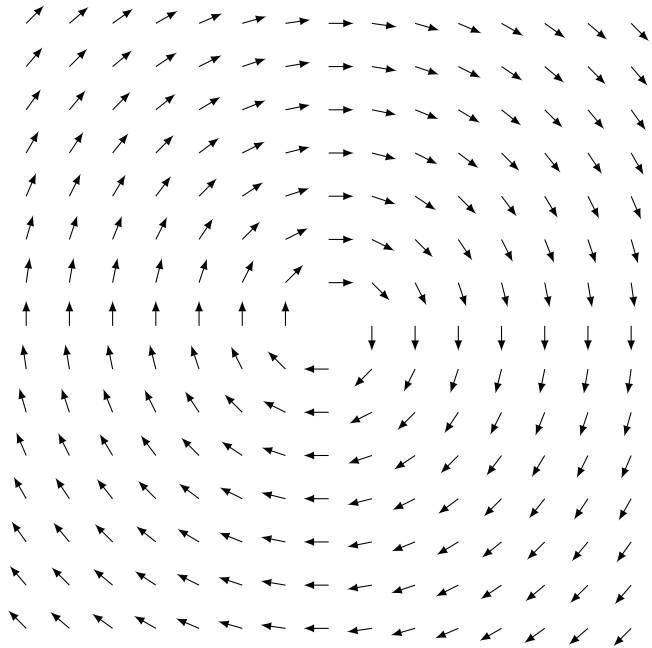


FIGURE 11.17 – Le champ de vecteurs $F(x, y) = (y, -x)$.

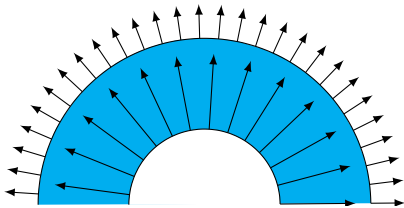


FIGURE 11.18 – Le champ de vecteur de la gravité. Nous avons tracé, sur les deux cercles la même densité de vecteurs, c'est à dire le même nombre de vecteurs par unité de surface.

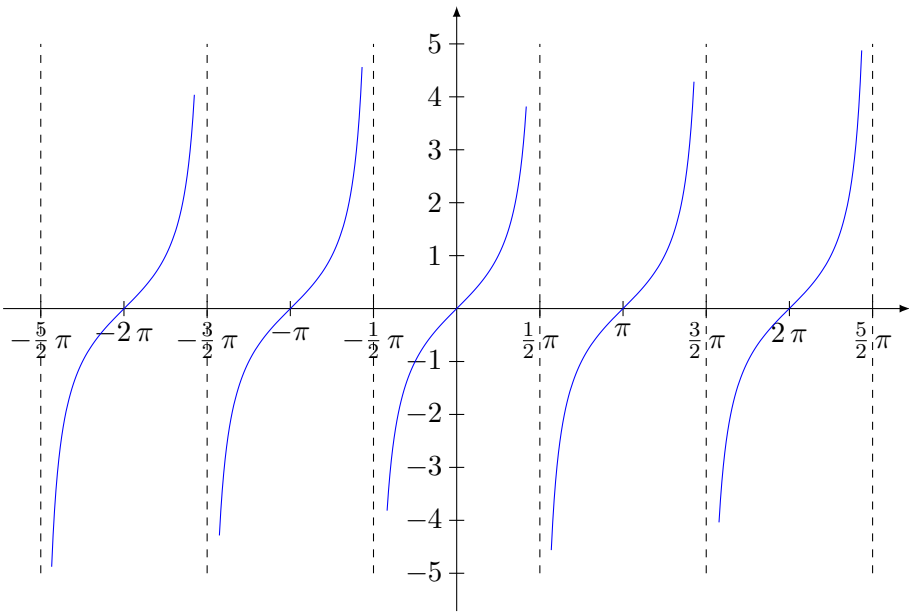
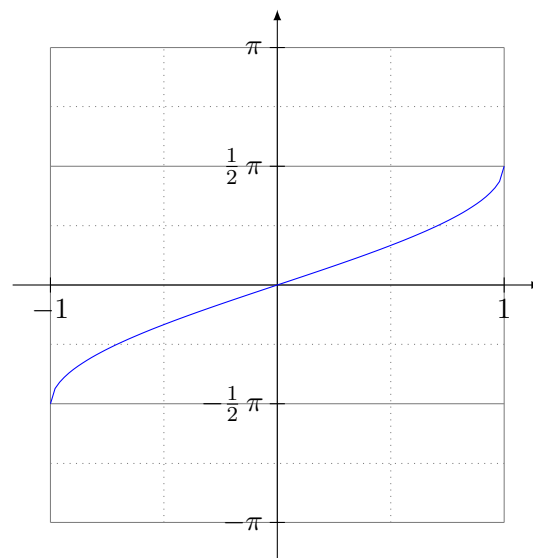
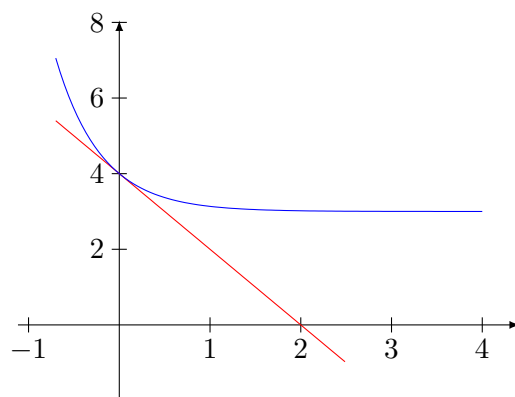
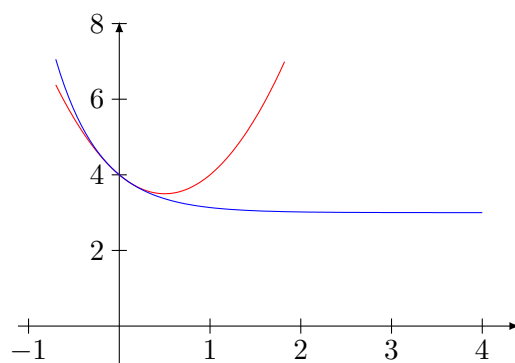


FIGURE 11.19 – <+Type your caption here+>

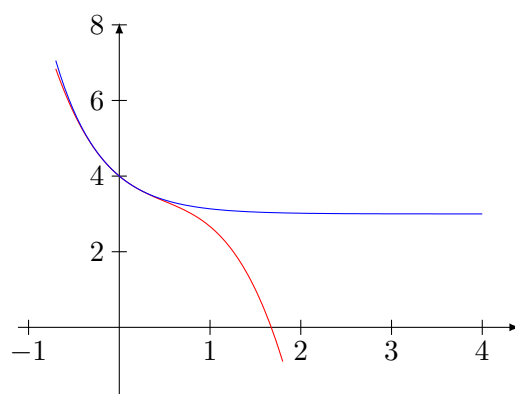
FIGURE 11.20 – Le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$



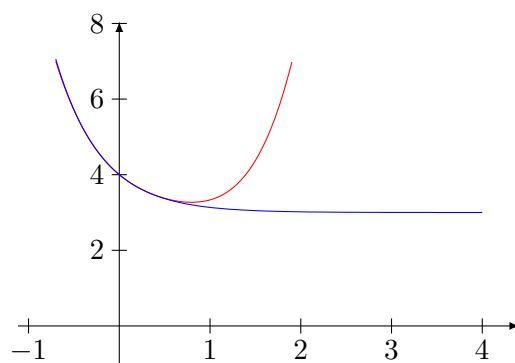
(a) Polyôme d'ordre 1



(b) Polyôme d'ordre 2



(c) Polyôme d'ordre 3



(d) Polyôme d'ordre 4

FIGURE 11.21 – Les développements limités d'ordre de plus en plus grand de la fonction de l'exemple 11.305. La fonction est en bleu et les «approximations» sont en rouge.

Chapitre 12

Retour sur les groupes

12.1 Action de groupe et connexité

Sources : [165] et wikipédia.

Théorème 12.1.

Soit G un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini¹ agissant continument et transitivement sur un espace topologique localement compact E . Alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi: G/G_x &\rightarrow E \\ [g] &\mapsto g \cdot x\end{aligned}\tag{12.1}$$

est un homéomorphisme.

Lemme 12.2.

Si G et H sont des groupes topologiques tels que G/H et H sont connexes², alors G est connexe.

Démonstration. Soit $f: G \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\tilde{f}: G/H &\rightarrow \{0, 1\} \\ [g] &\mapsto f(g).\end{aligned}\tag{12.2}$$

D'abord nous montrons qu'elle est bien définie. En effet si $h \in H$ nous aurions $\tilde{f}([gh]) = f(gh)$, mais étant donné que H est connexe, l'ensemble gH est également connexe ; la fonction continue f est donc constante sur gH . Nous avons donc $f(gh) = f(g)$.

Étant donné que G/H est également connexe, la fonction $\tilde{f}$ doit être constante. Si g_1 et g_2 sont deux éléments du groupe, nous avons $f(g_1) = \tilde{f}([g_1]) = \tilde{f}([g_2]) = f(g_2)$. Nous en déduisons que f est constante et que G est connexe. $\square$

Théorème 12.3.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe, le groupe $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes.

Démonstration. La seconde assertion découle de la première parce que les matrices de déterminant 1 et celles de déterminant -1 ne peuvent pas être reliées par un chemin continu tandis que l'application

$$M \mapsto \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} M\tag{12.3}$$

est un homéomorphisme entre les matrices de déterminant 1 et celles de déterminants -1 . Montrons donc que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs pour $n \geq 2$ en procédant par récurrence sur la dimension.

1. Cela signifie qu'il est une réunion dénombrable de compacts

2. Définition 5.67.

Nous acceptons le résultat pour $G = \text{SO}(2)$. Notons que nous en avons besoin pour prouver que la sphère S^{n-1} est connexe.

Le groupe $\text{SO}(n)$ agit, par définition, de façon transitive sur la sphère S^{n-1} . Soit $a \in S^{n-1}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1} \quad (12.4a)$$

$$G_a \simeq \text{SO}(n-1) \quad (12.4b)$$

où G_a est le fixateur de a dans G . Pour montrer le second point, nous considérons $\{e_i\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M \in G$ telle que $Ma = e_1$. Le fixateur de e_1 est évidemment isomorphe à $\text{SO}(n-1)$ parce qu'il est constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad (12.5)$$

où $(a_{ij}) \in \text{SO}(n-1)$. L'application

$$\begin{aligned} \alpha: G_{e_1} &\rightarrow G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM \end{aligned} \quad (12.6)$$

est un isomorphisme entre G_a et $\text{SO}(n-1)$. Le théorème 12.1 nous montre alors que, en tant qu'espaces topologiques,

$$G/G_a = S^{n-1}. \quad (12.7)$$

L'hypothèse de récurrence montre que $G_a = \text{SO}(n-1)$ est connexe tandis que nous savons que S^{n-1} est connexe. Le lemme 12.2 conclut que $G = \text{SO}(n)$ est connexe. $\square$

Lemme 12.4.

Une bijection continue entre un espace compact et un espace séparé est un homéomorphisme.

Proposition 12.5.

Les groupes $\text{U}(n)$ et $\text{SU}(n)$ sont connexes.

Démonstration. Soit $G(n)$ le groupe $\text{SU}(n)$ ou $\text{U}(n)$. Ce groupe opère transitivement sur la sphère complexe

$$S_{\mathbb{C}}^{n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \langle z, z \rangle = \sum_k |z_k|^2 = 1\}. \quad (12.8)$$

Cet ensemble est le même que S^{2n-1} parce que $|z_k| = x_k^2 + y_k^2$. Nous avons une bijection continue entre S^{n-1} et $S_{\mathbb{C}}^{n-1}$ et donc un homéomorphisme (lemme 12.4). Soit $a \in S_{\mathbb{C}}^{n-1}$, nous avons

$$G \cdot a = S_{\mathbb{C}}^{n-1} \quad (12.9a)$$

$$G_a \simeq G(n-1). \quad (12.9b)$$

La seconde ligne est un isomorphisme de groupe et un homéomorphisme. Il est donné de la façon suivante. D'abord le fixateur de e_1 dans $G(n)$ est donné par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad (12.10)$$

où $(a_{ij}) \in G(n-1)$. Par ailleurs si M est une matrice de $G(n)$ telle que $Ma = e_1$, nous avons l'homéomorphisme

$$\begin{aligned}\alpha: G_{e_1} &\rightarrow G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM.\end{aligned}\tag{12.11}$$

Encore une fois, cela est un homéomorphisme par le lemme 12.4. Par composition nous avons $G_a \simeq G(n-1)$ et un homéomorphisme

$$G(n)/G_a = S_{\mathbb{C}}^{n-1}.\tag{12.12}$$

Le groupe G_a et l'ensemble $S_{\mathbb{C}}^{n-1}$ étant connexes, le groupe $G(n)$ est connexe par le lemme 12.2. $\square$

Lemme 12.6 ([2]).

Si G est un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ alors son groupe dérivé³ l'est également.

Démonstration. Soit S_m l'ensemble des produits de m commutateurs de G :

$$S_m = \{g_1, \dots, g_m \text{ où les } g_i \text{ sont des commutateurs}\}.\tag{12.13}$$

La partie S_m est l'image de G par l'application continue

$$\begin{aligned}\underbrace{G \times \dots \times G}_{2m \text{ facteurs}} &\rightarrow G \\ (g_1, h_1, g_2, h_2, \dots, g_m, h_m) &\mapsto [g_1, h_1] \dots [g_m, h_m]\end{aligned}\tag{12.14}$$

En tant qu'image d'un connexe par une application continue, S_m est connexe par la proposition 5.69. Vu que les S_m ont l'identité en commun, le groupe dérivé

$$D(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m\tag{12.15}$$

est également connexe. $\square$

12.2 Espaces de matrices

L'ensemble des matrices est un espace vectoriel. Nous identifions $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$; plus précisément, nous identifions une matrice

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}\tag{12.16}$$

avec le vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, où $a_{i,j} = x_{(n-1)i+j}$.

Définition 12.7.

*Un endomorphisme est **normal** si il commute avec son adjoint.*

12.2.1 Dilatations et transvections

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $n \geq 2$.

Théorème-définition 12.8 ([2]).

Soit une application linéaire $u: E \rightarrow E$ dont les points fixes forment un hyperplan noté H d'équation $H = \ker(f)$ avec $f \in E^*$.

(1) *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\det(u) \neq 1$
- (b) *L'application u est diagonalisable et a une valeur propre qui vaut $\det(u) \neq 1$.*
- (c) $\mathrm{Image}(u - \mathrm{Id}) \not\subseteq H$.

3. Définition 2.14.

- (d) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\text{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.
- (2) Les affirmations suivantes sont équivalentes :
- (i) Il existe $a \in H$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.
- (ii) Dans une base adaptée, la matrice de u est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.17)$$

- (3) Les conditions (1)a-(1)d sont respectées si et seulement si les conditions (2)i-(2)ii ne sont pas respectées (elles sont les négations l'une de l'autre.).

Un endomorphisme qui est soit l'identité soit respecte les conditions (1) est une **dilatation**. Un endomorphisme qui est soit l'identité soit qui vérifie les conditions (2) est une **transvection** (dans les deux cas il faut que les points fixes forment un hyperplan).

Notons que selon cette terminologie, l'application $x \mapsto \lambda x$ n'est pas une dilatation mais un produit de dilations.

Démonstration. Nous allons prouver plein d'implications ...

(1)a implique (1)b Le théorème de la base incomplète (voir remarque 6.6) permet de considérer une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ soit une base de H . Dans cette base, la matrice de u est de la forme suivante (les cases non remplies sont nulles et les étoiles correspondent à des valeurs inconnues mais pas spécialement nulles) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & * \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (12.18)$$

Le fait que le déterminant de u ne soit pas 1 implique que $\lambda \neq 1$. Par conséquent le polynôme caractéristique

$$\chi_u(X) = (1 - X)^{n-1}(\lambda - X) \quad (12.19)$$

possède une racine $\lambda \neq 1$, et donc u possède un vecteur propre v pour cette valeur⁴. Le vecteur v est linéairement indépendant de $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ (parce que vecteur propre de valeur propre différente). Par conséquent l'ensemble $\{e_1, \dots, e_{n-1}, v\}$ est une base par le théorème 6.8(3). Cela est une base de vecteurs propres et donc une base de diagonalisation⁵.

(1)b implique (1)c Nous nommons maintenant $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base de diagonalisation. Nous avons $u(e_n) = \lambda e_n$ avec $\det(u) = \lambda \neq 1$. Nous avons

$$(u - \text{Id})(e_n) = (\lambda - 1)e_n \notin H, \quad (12.20)$$

ce qui prouve que l'image de e_n par $u - \text{Id}$ n'est pas dans H .

(1)c implique (1)d Reprenons une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ donnant la matrice (12.18). Il existe $x \in E$ tel que $u(x) - x$ n'est pas dans H , c'est à dire tel que $u(u(x) - x) \neq u(x) - x$. Nous en déduisons que

$$u^2(x) - 2u(x) + x \neq 0 \quad (12.21)$$

ou encore que

$$(X - 1)^2(u)x \neq 0. \quad (12.22)$$

4. Proposition 6.265.

5. Nous pourrions en dire à peine plus et prouver le point (1)d, mais cela ne servirait à rien parce que nous voulons prouver les équivalences et qu'il faudra quand même prouver que (1)c implique (1)d.

C'est à dire que $(X - 1)^2$ n'est pas un polynôme annulateur de u . Or ce serait le cas si $X - 1$ était le polynôme minimal (proposition 6.245). Le polynôme caractéristique étant $(X - 1)^{n-1}(X - \lambda)$ (et étant annulateur⁶), le polynôme minimal est de la forme

$$\mu_u(X) = \begin{cases} (X - 1)(X - \lambda) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ X - 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \quad (12.23)$$

Dans notre cas nous venons de voir que ce n'est pas $X - 1$ et donc c'est $(X - 1)(X - \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.

Nous devons trouver une base de diagonalisation ... Supposons

$$u(e_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \lambda e_n, \quad (12.24)$$

dans lequel nous venons de prouver que $\lambda \neq 1$, et cherchons

$$e'_n = \sum_{j=1}^n p_j e_j = 1^n p_n e_n \quad (12.25)$$

de telle sorte à avoir $u(e'_n) = \lambda e_n$. Nous avons

$$u(e'_n) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j u(e_j) + p_n u(e_n) \quad (12.26a)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (p_j + p_n a_j) e_j + p_n \lambda e_n. \quad (12.26b)$$

En égalisant à $\lambda \sum_{j=1}^n p_j e_j$, il vient

$$p_j + p_n a_j = \lambda p_j \quad (12.27)$$

pour tout $j = 1, \dots, n-1$ et la condition triviale $p_n \lambda = \lambda p_n$ pour $j = n$. Nous en déduisons que le choix

$$p_j = \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} \quad (12.28)$$

fonctionne (parce que $\lambda \neq 1$ comme nous l'avons démontré plus haut). En bref, il suffit de poser

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} e_j + p_n e_n \quad (12.29)$$

avec p_n au choix pour avoir une base $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n\}$ de diagonalisation de u avec $\lambda \neq 1$ comme dernière valeur propre.

(1)d implique (1)a Évident ... encore qu'il faut invoquer l'invariance du déterminant par changement de base.

Nous avons terminé la première série d'équivalences. Nous continuons avec la seconde.

(2)i implique (2)ii Nous prenons $e_{n-1} = a$ et nous complétons en une base de H . Pour e_n il suffit de prendre n'importe quel vecteur v tel que $f(v) \neq 0$ (qui existe parce que $f = 0$ est seulement un hyperplan), et de le normaliser.

Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée parce que $u(e_n) = e_n + f(e_n)a = e_n + e_{n-1}$ du fait que $e_{n-1} = a$ et $f(e_n) = 1$.

(2)ii implique (2)i Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ cette base. En prenant $a = e_{n-1}$ et en posant $x = \sum_k x_k e_k$ nous avons

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k + x_n (e_{n-1} + e_n) = x + x_n e_{n-1} = x_n a. \quad (12.30)$$

6. Théorème de Cayley-Hamilton 6.262.

Mais vu que $f(x) = \sum_i f_i x_i$, et que $f(e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$ nous avons $f(x) = f_n x_n$. Il n'y a cependant pas de raisons d'avoir $f_n = 1$. Cependant en définissant

$$e'_i = \frac{1}{f_n} e_i \quad (12.31)$$

nous avons bien $u(e'_n) = \frac{1}{f_n}(e_{n-1} + e_n) = e'_{n-1} + e'_n$. Donc dans cette base nous avons encore la matrice de u de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (12.32)$$

mais cette fois avec $f(e'_n) = 1$.

Nous avons terminé avec la seconde série d'équivalences. Il nous reste à prouver que la première est équivalente à la négation de la seconde.

non (1)c implique (2)i Considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$ et posons $a = u(x_0) - x_0 \in \text{Image}(u - \text{Id})$. Par la négation de (1)c nous avons $a \in H$. De plus $x_0 \notin H$ (sinon $f(x_0) = 0$) donc $u(x_0) \neq x_0$ et $a \neq 0$.

Nous montrons que ce choix de a fonctionne : $u(x) = x + f(x)a$ pour tout $x \in E$. Nous faisons cela séparément pour $x \in H$ et pour $x = x_0$.

Si $h \in H$ alors $u(h) = h$ et $f(h) = 0$ donc $h + f(h)a = h = u(h)$. Si $x = x_0$ alors $u(x_0) = a + x_0$ (cela est la définition de a) et $x_0 + f(x_0)a = x_0 + a$.

(2)ii implique non (1)a Dans une base adaptée nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (12.33)$$

et donc $\det(u) = 1$, ce qui contredit (1)a.

□

Remarque 12.9.

Nous notons E_{ij} la matrice qui possède uniquement 1 en position (i, j) . C'est à dire que $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Soit H l'hyperplan des points fixes de f . Dans une base contenant une base de H , la matrice d'une transvection a pour forme type :

$$T_{ij}(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda E_{ij} \quad (12.34)$$

avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et une dilatation a pour forme type la matrice diagonale

$$D_i(\alpha) = \mathbb{1} + (\alpha - 1)E_{ii} \quad (12.35)$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Bien entendu, en choisissant une base quelconque, les matrices des dilatations et des translations peuvent avoir des formes différentes.

Lemme 12.10.

Quelque manipulations de lignes et de colonnes pour les matrices.

(1) La multiplication à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de ligne

$$L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j. \quad (12.36)$$

(2) La multiplication à droite par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de colonne

$$C_j \rightarrow C_j + \lambda C_i. \quad (12.37)$$

(3) La multiplication à gauche par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ revient à la substitution de lignes

$$\begin{cases} L_i \rightarrow L_j \\ L_j \rightarrow -L_i. \end{cases} \quad (12.38a)$$

$$(12.38b)$$

Note qu'il n'est pas possible d'inverser deux lignes à l'aide de transvections sans changer un signe parce que les transvections sont de déterminant 1 alors que l'inversion de lignes change le signe du déterminant.

Démonstration. Point par point.

Pour (1) Nous devons prouver que

$$(T_{ij}(\lambda)A)_{kl} = \begin{cases} A_{kl} & \text{si } k \neq i \\ A_{il} + \lambda A_{jl} & \text{si } k = i. \end{cases} \quad (12.39)$$

Un peu de calcul matriciel avec utilisation modérée des indices donner :

$$(T_{ij}(\lambda)A)_{kl} = \sum_s (T_{ij}(\lambda))_{ks} A_{sl} \quad (12.40a)$$

$$= \sum_s \delta_{ks} A_{sl} + \lambda \delta_{ik} \delta_{js} A_{sl} \quad (12.40b)$$

$$= A_{kl} + \lambda \delta_{ik} A_{jl}. \quad (12.40c)$$

Pour (2) C'est la même chose.

Pour (3) Si nous appliquons successivement ces trois matrices (de droite à gauche) nous effectuons les substitutions :

$$\begin{cases} L'_i = L_i + L_j \\ L'_j = L_j \end{cases} \text{ suit de } \begin{cases} L''_i = L'_i \\ L''_j = L'_j - L'_i \end{cases} \text{ et de } \begin{cases} L'''_i = L''_i + L''_j \\ L'''_j = L''_j. \end{cases} \quad (12.41)$$

En effectuant ces substitutions,

$$L'''_i = L''_i + L''_j = L'_i + (L'_j - L'_i) = L'_j = L_j \quad (12.42)$$

et

$$L'''_j = L''_j = L'_j - L'_i = L_j - (L_i + L_j) = -L_i, \quad (12.43)$$

ce qu'il fallait.

□

Proposition 12.11 ([166]).

Soit $n \geq 2$ et un corps commutatif $\mathbb{K}$.

(1) Si $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$, il existe des transvections $U_1, \dots, U_r, V_1, \dots, V_s$ telles que

$$A = U_1 \dots U_r D_n(\det(A)) V_1 \dots V_s. \quad (12.44)$$

(2) L'ensemble des transvections engendre le groupe spécial linéaire $\text{SL}(n, \mathbb{K})$.

(3) L'ensemble des transvections et des dilatations engendre le groupe linéaire $\text{GL}(n, \mathbb{K})$.

Démonstration. Nous allons montrer que toutes les matrices de $\text{SL}(n, \mathbb{K})$ peuvent être écrites comme produits de matrices de la forme (12.34). Cela montrera qu'étant donné un endomorphisme f et une base *pas spécialement liée* à f , il est possible décrire la matrice de f comme produit de transvections dont les hyperplans invariants sont «contenus» dans cette base. Cela suffit à prouver que les transvections engendrent $\text{SL}(n, \mathbb{K})$ grâce au lemme 2.6.

Toutes les transvections ont un déterminant égal à 1. Donc le groupe engendré par les transvections est inclus à $\text{SL}(2, \mathbb{K})$. Soit $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$; nous allons utiliser le pivot de Gauss pour la

diagonaliser. Étant donné que A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $A_{i1} \neq 0$ alors une multiplication à gauche par $L_{1i}((A_{11} - 1)/A_{i1})$ effectue la substitution

$$L_1 \rightarrow L_1 - \frac{A_{11} - 1}{A_{i1}} L_i \quad (12.45)$$

qui met un 1 en la position $(1, 1)$. Notons que si la première colonne est de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.46)$$

avec $s \neq 0$ alors il faut plutôt faire les substitutions $L_2 \rightarrow L_2 + L_1$ et ensuite $L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1}{s} L_2$ pour obtenir le même résultat. En effectuant le pivot avec A_{11} , une suite d'opérations sur les lignes et les colonnes donnent

$$M_1 \dots M_p A N_1 \dots N_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad (12.47)$$

où $A_1 \in \text{GL}(n-1, \mathbb{K})$ et $\det(A_1) = \det(A)$. En continuant de la sorte nous arrivons sur une matrice diagonale⁷

$$M_1 \dots M_{p'} A N_1 \dots N_{q'} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \quad (12.48)$$

avec $\alpha = \det(A)$. En d'autres termes nous avons prouvé qu'il existe des transvections $U_1, \dots, U_r$ et $V_1, \dots, V_s$ telles que

$$A = U_1 \dots U_r D_n(\det(A)) V_1 \dots V_s. \quad (12.49)$$

Cela prouve que les transvections et les translations engendrent $\text{GL}(n, \mathbb{K})$. Si $A \in \text{SL}(n, \mathbb{K})$ alors $D_n(\det(A)) = 1$ et l'équation (12.49) est un produit de transvections. $\square$

Proposition 12.12.

Le groupe $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ est engendré par les endomorphismes inversibles diagonalisables.

Démonstration. Par la proposition 12.11, le groupe $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ est engendré par les dilatations et les transvections. Il suffit donc de montrer qu'à leur tour, ces deux types d'endomorphismes sont engendrés par les endomorphismes inversibles et diagonalisables.

Les dilatations sont diagonalisables et inversibles. Soit une transvection u , et une base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ dans laquelle u est de la forme (12.17). Nous considérons l'endomorphisme $d: E \rightarrow E$ défini par $d(e_k) = k e_k$. Cet endomorphisme est diagonalisable parce que son polynôme minimal, $\mu_d = \prod_{k=1}^n (X - k)$, est scindé à racines simples (voir le théorème 6.281).

Nous avons évidemment $u = d^{-1} \circ (d \circ u)$ où d^{-1} est diagonalisable et inversible. Voyons que $d \circ u$ est également diagonalisable en montrant que μ_d est son polynôme minimal (qui est scindé à racines simples).

Il suffit de montrer que $\mu_d(d \circ u)(e_k) = 0$ pour tout k . Ainsi μ_d sera un polynôme annulateur de $d \circ u$ de degré n , et donc minimal.

Si $k \leq n-1$ Alors $u(e_k) = e_k$ et $(d \circ u - n)e_k = (k - n)e_k$. En tout :

$$\mu_d(d \circ u)(e_k) = (d \circ u - 1)(d \circ u - 2) \dots (d \circ u - n)e_k = (k-1)(k-2) \dots (k-n)e_k = 0 \quad (12.50)$$

parce que dans le produit des $k-i$, il y en a forcément un de nul.

7. Attention : les opérations sur les lignes et les colonnes ne sont pas des opérations de similitude. Il n'est pas question de prétendre ici que toutes les matrices de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ sont diagonales, voir la définition 6.14.

Si $k = n$ Dans un premier temps,

$$(d \circ u - n)e_n = d(e_n + e_{n-1}) - ne_n = ne_n + (n-1)e_{n-1} - ne_n = (n-1)e_{n-1}. \quad (12.51)$$

Ensuite

$$(d \circ u - (n-1))e_{n-1} = d(e_{n-1}) - (n-1)e_{n-1} \quad (12.52a)$$

$$= d(e_{n-1}) - (n-1)e_{n-1} \quad (12.52b)$$

$$= (n-1)e_{n-1} - (n-1)e_{n-1} \quad (12.52c)$$

$$= 0 \quad (12.52d)$$

Le polynôme μ_d est donc un polynôme scindé à n racines simples annulateur de $d \circ u$, qui est alors diagonalisable et inversible (parce que u et d le sont).

Donc sous la forme $u = d^{-1}(du)$, la transvection u est écrite comme produit de diagonalisables inversibles. $\square$

Proposition 12.13 ([28]).

Soit $n \geq 3$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Alors

- (1) le groupe dérivé de $D(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$ est $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$;
- (2) le groupe dérivé de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$.

La preuve utilise le fait que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ et que les transvections avec les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Voir la proposition 12.11.

12.2.2 Connexité de certains groupes

Lemme 12.14.

Le groupe $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Démonstration. La non connexité par arcs est facile parce que les éléments de déterminant 1 ne peuvent pas être reliés aux éléments de déterminant -1 par un chemin continu restant dans $\mathrm{O}(n)$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires 11.50.

En ce qui concerne la connexité, il faut en dire un peu plus.

Les éléments de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ ont des déterminants égaux à 1 ou à -1 . Ces deux parties sont des ouverts (pour la topologie induite de $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$). En effet soit $A \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ (la partie contenant les déterminants 1 ; ce que l'on va dire tient pour l'autre partie). Alors, vu que le déterminant est une fonction continue sur $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de A dans $\mathrm{eM}(n, \mathbb{R})$ dans lequel le déterminant reste entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ (c'est la définition de la continuité avec $\epsilon = 1/2$). L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est par définition un ouvert de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ et ne contient que des éléments de déterminant 1.

La partie $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ de $\mathrm{eM}(n, \mathbb{R})$ est donc non-connexe selon la définition 5.67. $\square$

Lemme 12.15.

Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont connexes par arcs.

Démonstration. Soit A , une matrice unitaire et Q une matrice unitaire qui diagonalise A . Étant donné que les valeurs propres arrivent par paires complexes conjuguées,

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\theta_r} & \\ & & & & e^{-i\theta_r} \end{pmatrix}. \quad (12.53)$$

Le chemin $U(t)$ obtenu en remplaçant θ_i par $t\theta_i$ avec $t \in [0, 1]$ joint QAQ^{-1} à l'identité. Par conséquent $Q^{-1}U(t)Q$ joint A à l'unité. $\square$

Proposition 12.16.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe.

Théorème 12.17.

Les matrices normales⁸ forment un espace connexe par arc.

Démonstration. Soit A une matrice normale, et U une matrice unitaire qui diagonalise A . Nous considérons $U(t)$, un chemin qui joint $\mathbb{1}$ à U dans $U(n)$. Pour chaque t , la matrice

$$A(t) = U(t)^{-1}AU(t) \quad (12.54)$$

est normale. Nous avons donc trouvé un chemin dans les matrices normales qui joint A à une matrice diagonale. Il est à présent facile de la joindre à l'identité.

Toutes les matrices normales étant connexes à l'identité, l'ensemble des matrices normales est connexe. $\square$

Proposition 12.18.

Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$; par la proposition 12.11(2) nous pouvons écrire

$$A = \prod_{c \in X} T_c(\lambda_c) \quad (12.55)$$

où X est une partie de l'ensemble des couples (i, j) dans $\{1, \dots, n\}$. En posant

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) \\ t &\mapsto \prod_{c \in X} T_c(t\lambda_c) \end{aligned} \quad (12.56)$$

nous avons une application continue de A vers $\mathbb{1}$, dont pour tout t la matrice $\varphi(t)$ est inversible de déterminant 1.

Donc tous les éléments de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ peuvent être reliés à $\mathbb{1}$. Donc $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est connexe par arcs. $\square$

Proposition 12.19 ([167]).

Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et sa décomposition (12.44). Comme fait précédemment, chacune des transvections peut être reliée à $\mathbb{1}$ par un chemin continu dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. En ce qui concerne le facteur de translation, nous ne pouvons pas simplement prendre le chemin donné par $t \mapsto D_n(t \det(A))$ parce que le résultat n'est pas inversible en $t = 0$.

Vu que $\mathbb{C}^*$ il existe une application continue $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $\alpha(0) = \det(A) \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha(1) = 1$. Il suffit alors de prendre $D_n(\alpha(t))$ et nous avons un chemin continu de A vers $\mathbb{1}$ restant dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. $\square$

Proposition 12.20.

Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes par arcs.

Démonstration. Nous notons $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R})$ les parties de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ formées des applications de déterminant ± 1 respectivement. Vu le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 11.50), il n'existe pas d'applications continues dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ reliant $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ à $\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R})$ tout en restant dans les applications de déterminant non nul⁹.

Montrons que $\mathrm{GL}^\pm(n, \mathbb{R})$ sont connexes par arcs. Si $A \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ alors grâce à la décomposition (12.44), il existe un chemin continu de A vers $D_n(\det(A))$. Vu que $\mathbb{R}^\pm$ sont connexes par arc, il est possible de relier $D_n(\det(A))$ à $D_n(\pm 1)$ par un chemin continu. $\square$

8. Définition 12.7.

9. Si $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est le chemin, la fonction à mettre dans le théorème des valeurs intermédiaires est la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto \det(\varphi(t))$.

12.2.3 Densité

Proposition 12.21.

Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$.

Démonstration. D'après le lemme de Schur 6.288, une matrice de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ est de la forme

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}. \quad (12.57)$$

Les valeurs propres sont sur la diagonale. La matrice est diagonalisable si les éléments de la diagonales sont tous différents. Il suffit maintenant de considérer n suites $(\epsilon_k^{(r)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergentes vers zéro telles que pour chaque k les nombres $\lambda_r + \epsilon_k^{(r)}$ soient tous différents. La suite de matrices

$$A_k = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 + \epsilon_k^{(1)} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n + \epsilon_k^{(n)} \end{pmatrix} Q^{-1}. \quad (12.58)$$

est alors diagonalisable pour tout k et nous avons $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$. $\square$

Proposition 12.22.

Les matrices inversibles sont denses dans l'ensemble des matrices. C'est à dire que $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$; le lemme de Schur réel 6.291 nous permet d'écrire

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} Q^{-1} \quad (12.59)$$

avec Q orthogonale.

Pour définir A_k nous remplaçons λ_i par $\lambda_i + \epsilon_k^{(i)}$ de façon à avoir $\epsilon_k^{(i)} \rightarrow 0$ et $\lambda_i + \epsilon_k^{(i)} \neq 0$. En ce qui concerne les blocs, ceux dont le déterminant est non nul, nous n'y touchons pas, et ceux dont le déterminant est nul, nous remplaçons a par $a + \epsilon_k$.

Avec cela, QA_kA^{-1} est une suite dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ qui converge vers A . $\square$

Proposition 12.23.

Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ alors

$$e^{\text{Tr}(A)} = \det(e^A). \quad (12.60)$$

Démonstration. Ici, e^A est l'exponentielle soit d'endomorphisme soit de matrice définie par la proposition 6.178.

Le résultat est un simple calcul pour les matrices diagonalisable. Si A n'est pas diagonalisable, nous considérons une suite de matrices diagonalisables A_k dont la limite est A (proposition 12.21). La suite

$$a_k = e^{\text{Tr}(A_k)} \quad (12.61)$$

converge vers $e^{\text{Tr}(A)}$ tandis que la suite

$$b_k = \det(e^{A_k}) \quad (12.62)$$

converge vers $\det(e^A)$. Mais nous avons $a_k = b_k$ pour tout k ; les limites sont donc égales. $\square$

Théorème 12.24 (Cayley-Hamilton[168, 169]).

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif quelconque annule son propre polynôme caractéristique

Une autre démonstration est donnée en le théorème 6.262.

Démonstration. La preuve est divisée en plusieurs étapes.

Endomorphisme diagonalisable Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel V de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et χ_u son polynôme caractéristique. Nous savons que si λ est une valeur propre de u alors $\chi_u(\lambda) = 0$ le théorème 6.260(2). En combinant avec le lemme 6.239, si x est vecteur propre pour la valeur propre λ de u nous avons

$$\chi_u(u)x = \chi_u(\lambda)x = 0. \quad (12.63)$$

Donc tant que u possède une base de vecteurs propres nous avons $\chi_u(u) = 0$.

Le cas complexe Nous nous restreignons à présent (et provisoirement) au cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce qui nous donne $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ par la proposition 12.21. Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ nous considérons une suite de matrices diagonalisables $A_k \xrightarrow{\mathbb{M}(n, \mathbb{C})} A$. Pour chaque k nous avons par le point précédent

$$\chi_{u_k}(u_k) = 0. \quad (12.64)$$

Chacune des composantes de $\chi_{u_k}(u_k)$ est un polynôme en les composantes de u_k , ce qui légitime le passage à la limite :

$$\chi_u(u) = 0. \quad (12.65)$$

Le théorème est établi pour toutes les matrices de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et donc aussi pour tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

La cas général Par définition, $\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1})$; les coefficients de X sont des polynômes à coefficients entiers en les composantes de u . En substituant u à X nous obtenons une matrice dont chacune des entrées est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u . Pour chaque i et j entre 1 et n il existe donc un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{Z}(X_1, \dots, X_{n^2})$ tel que

$$\chi_u(u)_{ij} = P(u_{11}, \dots, u_{nn}). \quad (12.66)$$

Ces polynômes ne dépendent pas de u ni du corps sur lequel on travaille. Notre but est maintenant de prouver que $P_{ij} = 0$.

Étant donné que le cas complexe (et a fortiori entier) est déjà prouvé nous savons que pour tout $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{Z})$ nous avons $P(u_{11}, \dots, u_{nn}) = 0$. La proposition 4.105 nous donne effectivement $P = 0$, en conséquence de quoi l'endomorphisme $\chi_u(u)$ est nul.

□

Exemple 12.25

Pour montrer que chaque composante $\chi_u(u)$ est bien un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u , voyons l'exemple 2×2 : $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. D'abord

$$\chi_u(X) = \det \begin{pmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{pmatrix} = X^2 - (a + d)X + ad - cb. \quad (12.67)$$

Le coefficient de X^2 est 1, celui de X est $-a - d$ et le terme indépendant est $ad - cb$; tout trois sont des polynômes à coefficients entiers en a, b, c, d . Après substitution de X par u ,

$$\chi_u(u)_{ij} = (u^2)_{ij} - (a + d)u_{ij} + ad - cb. \quad (12.68)$$

Cela est bien un polynôme à coefficients entiers en les entrées de la matrice u .

△

12.2.4 Racine carré d'une matrice hermitienne positive

Proposition 12.26.

Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ est une matrice hermitienne¹⁰ positive, alors il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $A = R^2$. De plus R est un polynôme (de $\mathbb{R}[X]$) en A .

La matrice R ainsi définie est la **racine carré de** A , et est notée $\sqrt{A}$. Une des applications usuelles de cette proposition est la décomposition polaire.

Démonstration. **Existence** Étant donné que A est hermitienne, elle est diagonalisable par une unitaire (proposition 6.290), et ses valeurs propres sont réelles et positives (parce que A est positive). Soit donc P une matrice unitaire telle que

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (12.69)$$

avec $\alpha_i > 0$. Si on pose

$$R = P \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^*, \quad (12.70)$$

alors $R^2 = A$ parce que $P^*P = \mathbb{1}$.

Hermitienne positive La matrice R est hermitienne parce que, avec un peu de notation raccourcie, $R = P^*\sqrt{\alpha}P$ et $R^* = P^*\sqrt{\alpha}P$. D'autre part, elle est positive parce que ses valeurs propres sont les $\sqrt{\alpha_i}$ qui sont positives.

Polynôme Nous montrons maintenant que la matrice R est un polynôme en A . Pour cela nous considérons un polynôme Q tel que $A(\alpha_i) = \sqrt{\alpha_i}$ pour tout i . Soit $\{e_i\}$ une base de diagonalisation de A : $Ae_i = \alpha_i e_i$. Alors c'est encore une base de diagonalisation de $Q(A)$. En effet si $Q = \sum_k a_k X^k$, alors

$$Q(A)e_i = \left(\sum_k a_k A^k\right)e_i = \left(\sum_k a_k \alpha_i^k\right)e_i = Q(\alpha_i)e_i = \sqrt{\alpha_i}e_i. \quad (12.71)$$

Les valeurs propres de $Q(A)$ sont donc $\sqrt{\alpha_i}$. Nous savons maintenant que $Q(A)$ a la même base de diagonalisation de A (et donc la même matrice unitaire P qui diagonalise), c'est à dire que

$$Q(A) = P^* \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P = R. \quad (12.72)$$

Donc oui, R est un polynôme en A .

Notons que ce Q n'est pas du tout unique ; il existe une infinité de polynômes qui envoient n nombres donnés sur n nombres donnés.

Unicité Soit S une matrice hermitienne positive telle que $R^2 = S^2 = A$. D'abord S commute avec A parce que

$$SA = S^3 = S^2S = AS. \quad (12.73)$$

Donc S commute aussi avec $Q(A) = R$. Étant donné que S et R commutent et sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables par le corollaire 6.282. Soient $D_R = PRP^*$ et $D_S = PSP^*$ les formes diagonales de R et S dans une base de simultanée diagonalisation. Les carrés des valeurs propres de R et S étant identiques (ce sont les valeurs propres de A) et les valeurs propres de R et S étant positives, nous déduisons que $D_R = D_S$ et donc que $R = P^*D_RP = P^*D_SP = S$.

□

10. Définition 6.275.

12.2.5 Racine carré d'une matrice symétrique positive

Lemme 12.27 ([170]).

Le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{R})$ est compact.

Démonstration. Nous avons $O(n) = f^{-1}(\{\mathbb{1}_n\})$ où f est l'application continue $A \mapsto A^t A$. En tant qu'image inverse d'un fermé par une application continue, le groupe $O(n)$ est fermé.

De plus il est borné parce que tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont ≤ 1 , donc $\|A\|_\infty$ pour tout $A \in O(n)$. $\square$

Proposition 12.28.

Une matrice symétrique semi (ou pas) définie positive admet une unique racine carré symétrique. Le spectre de la racine carré est la racine carré du spectre de la matrice de départ.

Démonstration. Ceci est une phrase pour que les titres se mettent bien.

Existence Soit T une matrice symétrique et Q une matrice orthogonale qui diagonalise¹¹ T : $QTQ^{-1} = D$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$ et $\lambda_i \geq 0$. En posant $R = Q^{-1}\sqrt{D}Q$, il est vite vérifié que $R^2 = T$ et que R est symétrique. En ce qui concerne le spectre, R a pour valeurs propres les $\sqrt{\lambda_i}$.

Unicité Soit R une matrice symétrique de $T : R^2 = T$. Du coup R et T commutent : $RT = R^3 = TR$. Par conséquent les espaces propres de T sont stables sous R . Soit E_λ l'un d'eux de dimension d , et T_F, R_F les restrictions de T et R à E_λ . L'application T_F est une homothétie et $R_F^2 = T_F = \lambda \mathbb{1}$. Mais R_F est encore une matrice symétrique définie positive, donc nous pouvons considérer une base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de E_λ qui diagonalise R_F avec les valeurs propres μ_i ; nous avons donc en même temps

$$R_F^2(e_i) = \mu_i^2 e_i \quad (12.74a)$$

$$T_F(e_i) = \lambda e_i, \quad (12.74b)$$

de telle sorte que $\mu_i^2 = \lambda$. Mais les valeurs propres de R_F sont positives, sont $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ pour tout i . En conclusion R_F est univoquement déterminé par la donnée de T . Vu que cela est valable pour tous les espaces propres de T et que ces espaces propres engendrent tout E , l'opérateur R est déterminé de façon univoque par T . $\square$

Notons que nous n'avons démontré l'unicité qu'au sein des matrices symétriques.

12.2.6 Décomposition polaires : cas réel

Nous nommons $S^+(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques réelles définies positives et $S^{++}(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $S^+(n, \mathbb{R})$ des matrices strictement définies positives.

Lemme 12.29.

La partie $S^+(n, \mathbb{R})$ est fermée dans $M(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. En effet si S_k est une suite de matrices symétriques convergeant dans $M(n, \mathbb{R})$ vers la matrice A , les suites $(S_k)_{ij}$ et $(S_k)_{ji}$ des composantes ij et ji sont des suites égales, et donc leurs limites sont égales¹². Donc la limite est symétrique.

En ce qui concerne le spectre, le théorème 6.292 nous permet de diagonaliser : $S_k = Q_k D_k Q_k^{-1}$ où les D_k sont des matrices diagonales remplies de nombres positifs ou nuls. Vu que $O(n)$ est compact¹³, nous avons une sous-suite $Q_{\varphi(k)}$ convergente : $Q_{\varphi(k)} \rightarrow Q$. Pour chaque k , nous avons

$$S_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)} D_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}^{-1}, \quad (12.75)$$

11. Théorème 6.292.

12. Ici nous utilisons le critère de convergence composante par composante et le fait que nous ne sommes pas trop inquiétés par la norme que nous choisissons parce que toutes les normes sont équivalentes par le théorème 6.139.

13. Lemme 12.27.

dont la limite existe et vaut A . Vu que pour tout k , $D_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)}^{-1} S_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}$ et que le produit matriciel est continu, la suite $k \mapsto D_{\varphi(k)}$ est une suite convergente dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Nous notons D sa limite qui est encore une matrice diagonale contenant des nombres positifs ou nuls sur la diagonale.

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{\varphi(k)} = Q D Q^{-1}, \quad (12.76)$$

et donc le spectre de A est la limite de ceux des matrices $D_{\varphi(k)}$. Chacun étant positif, la limite est positive. Donc $A \in S^+(n, \mathbb{R})$. $\square$

Lemme 12.30.

La fermeture de l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives est l'ensemble des matrices définies positives : $\overline{S^{++}(n, \mathbb{R})} = S^+(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Le lemme 12.29 nous a à peine dit que $S^+(n, \mathbb{R})$ était fermé. Nous devons prouver que pour tout élément de $S^+(n, \mathbb{R})$, il existe une suite (S_k) dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$ convergeant vers S .

Si $S \in S^+(n, \mathbb{R})$ alors nous avons la diagonalisation

$$S = Q D Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \quad (12.77)$$

où $\lambda_i \geq 0$ pour tout i . Nous définissons

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \epsilon_k^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + \epsilon_k^{(n)} \end{pmatrix} \quad (12.78)$$

où $\epsilon_k^{(i)}$ est une suite convergent vers 0 telle que $\lambda_i + \epsilon_n^{(i)} > 0$ pour tout n . Typiquement si $\lambda_i > 0$ alors $\epsilon_k^{(i)} = 0$ et sinon $\epsilon_k^{(i)} = 1/k$.

Pour tout k nous avons $Q D_k Q^{-1} \in S^{++}(n, \mathbb{R})$ et de plus $Q D_k Q^{-1} \rightarrow Q D Q^{-1} = S$. $\square$

Théorème 12.31 (Décomposition polaire de matrices symétriques définies positives[170, 171, 172]).

En ce qui concerne les matrices inversibles :

$$\begin{aligned} f: O(n, \mathbb{R}) \times S^{++}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \\ (Q, S) &\mapsto S Q \end{aligned} \quad (12.79)$$

*est un homéomorphisme*¹⁴.

En ce qui concerne les matrices en général :

$$\begin{aligned} g: O(n, \mathbb{R}) \times S^+(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \\ (Q, S) &\mapsto S Q \end{aligned} \quad (12.80)$$

est une surjection mais pas une injection.

De plus les mêmes conclusions tiennent si nous regardons $(Q, S) \mapsto Q S$ au lieu de $S Q$.

Démonstration. Nous commençons par prouver les résultats concernant les matrices inversibles.

Existence et unicité Si $M = S Q$, alors $M M^t = S Q Q^t S^t = S^2$, donc S doit être une racine carré symétrique de la matrice définie positive $M M^t$. La proposition 12.28 nous dit que ça existe et que c'est unique. Donc S est univoquement déterminé par M . Maintenant avoir $Q = M S^{-1}$ est obligatoire (unicité) et fonctionne :

$$Q^t Q = (S^{-1})^t M^t M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = \mathbb{1}, \quad (12.81)$$

14. Cela est en réalité en difféomorphisme, voir la remarque 12.32.

donc Q ainsi défini est orthogonale.

Notons que ceci ne fonctionne pas lorsque M n'est pas inversible parce qu'alors S n'est pas inversible.

Homéomorphisme Le fait que f soit continue n'est pas un problème : c'est un produit de matrice. Nous devons vérifier que f^{-1} est continue. Soit une suite convergente $M_k \rightarrow M$ dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Si nous nommons (Q_k, S_k) la décomposition polaire de M_k et (Q, S) celle de M , nous devons prouver que $Q_k \rightarrow Q$ et $S_k \rightarrow S$. En effet dans ce cas nous aurions

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{-1}(M_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (Q_k, S_k) = (Q, S) = f^{-1}(M). \quad (12.82)$$

Étant donné que $O(n)$ est compact (lemme 12.27), la suite (Q_k) admet une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass, théorème 5.131) que nous nommons

$$Q_{\varphi(k)} \rightarrow F \in O(n). \quad (12.83)$$

Vu que la suite (M_k) converge, sa sous-suite converge vers la même limite : $M_{\varphi(k)} \rightarrow M$ et vu que pour tout k nous avons $S_k = M_k Q_k^{-1}$,

$$S_{\varphi(k)} \rightarrow G = M F^{-1}. \quad (12.84)$$

Vu que chacune des matrices $S_{\varphi(k)}$ est symétrique définie positive, la limite est symétrique et semi-définie positive¹⁵. Donc $G \in S^+(n, \mathbb{R}) \cap \text{GL}(n, \mathbb{R})$ parce que de plus M et F étant inversibles, G est inversible. En ce qui concerne la sous-suite nous avons

$$M_{\varphi(k)} = S_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)} \rightarrow G F = M \quad (12.85)$$

où $F \in O(n)$ et $G \in S^+(n, \mathbb{R})$. Par unicité de la décomposition polaire de M (partie déjà démontrée), nous avons $G = S$ et $F = Q$.

Nous avons prouvé que toute sous-suite convergente de Q_k a Q pour limite. Donc la suite elle-même converge¹⁶ vers Q . Donc $Q_k \rightarrow Q$. Du coup vu que $S_k = M_k Q_k^{-1}$ est un produit de suites convergentes, S_k converge également, vers $S : S_k \rightarrow S$.

Au final l'application f^{-1} est bien continue parce que les égalités (12.82) ont bien lieu.

Nous passons maintenant à la preuve dans le cas des matrices en général.

Soit $A \in \text{M}(n, \mathbb{R})$; par densité (lemme 12.22), il existe une suite (A_k) dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que $A_k \rightarrow A$. Pour chacun des k nous appliquons la décomposition polaire déjà prouvée : $A_k = Q_k S_k$. D'abord (Q_k) est une suite dans le compact¹⁷ $O(n, \mathbb{R})$ et accepte donc une sous-suite convergente. Quitte à redéfinir la suite de départ, nous supposons pour alléger les notations que $Q_k \rightarrow Q \in O(n, \mathbb{R})$. Vu que Q_k est inversible,

$$S_k = Q_k^{-1} A_k \quad (12.86)$$

Le produit matriciel étant continu nous avons $S_k \rightarrow S$ dans $\text{M}(n, \mathbb{R})$. Mais $S^+(n, \mathbb{R})$ étant fermé (lemme 12.29) nous avons aussi $S \in S^+(n, \mathbb{R})$. $\square$

Remarque 12.32.

Pour démontrer que f est différentiable, nous devons utiliser le théorème d'inversion locale 16.128 ; cela est fait dans la proposition 16.132.

Corollaire 12.33.

Toute matrice peut être écrite sous la forme $Q_1 D Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont orthogonale et D est diagonale.

Démonstration. Si $A \in \text{M}(n, \mathbb{R})$ alors la décomposition polaire 12.31 nous donne $A = S Q$ où S est symétrique définie positive et Q est orthogonale. La matrice S peut ensuite être diagonalisée par le théorème 6.292 : $S = R D R^{-1}$ où D est diagonale et R est orthogonale. Avec ces deux décompositions en main, $A = S Q = R D R^{-1} Q$. La matrice $R^{-1} Q$ est orthogonale. $\square$

15. Lemme 12.30

16. Proposition 5.139, pas difficile.

17. Lemme 12.27.

12.2.7 Enveloppe convexe

Définition 12.34.

Sur C est un ensemble convexe, un point $x \in C$ est un **point extrémal** si $C \setminus \{x\}$ est encore convexe.

Théorème 12.35 ([1]).

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires sur E sur lequel nous considérons la norme subordonnée¹⁸ à celle sur E . L'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$ est le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$. Montrons pour commencer que les éléments de $O(n)$ sont extrémaux dans $\mathcal{B}$. D'abord si $A \in O(E)$ alors $\|A\| = 1$ parce que $\|Ax\| = \|x\|$. Supposons maintenant que A n'est pas extrémal, c'est à dire qu'il est le milieu d'un segment joignant deux points (distincts) de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$. Soient donc $T, U \in \mathcal{B}$ tels que $A = \frac{1}{2}(T + U)$. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ nous avons

$$1 = \|x\| = \|Ax\| = \frac{1}{2}\|Tx + Ux\| \leq \frac{1}{2}(\|Tx\| + \|Ux\|) \leq \frac{1}{2}(\|T\| + \|U\|) \leq 1 \quad (12.87)$$

Toutes les inégalités sont en réalité des égalités. En particulier nous avons

$$\|Tx + Ux\| = \|Tx\| + \|Ux\|, \quad (12.88)$$

mais alors nous sommes dans un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz (théorème 6.66) et donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $Tx = \lambda Ux$. Mais de plus les inégalités (12.87) nous donnent

$$\frac{1}{2}(\|Tx\| + \|Ux\|) = 1 \quad (12.89)$$

alors que nous savons que $\|Tx\|, \|Ux\| \leq 1$, donc $\|Tx\| = \|Ux\| = 1$. La seule possibilité est d'avoir $\lambda = 1$ et donc que $U = T$ parce que nous avons $Tx = Ux$ pour tout x de norme 1. Au final A n'est pas le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Nous passons donc à l'inclusion inverse : nous prouvons que les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont dans $O(E)$. Pour cela nous prenons $U \in \mathcal{B} \setminus O(E)$ et nous allons montrer que U n'est pas un point extrémal : nous allons l'écrire comme milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Par la seconde partie du théorème de décomposition polaire 12.31, il existe $Q \in O(n, \mathbb{R})$ et $S \in S^+(n, \mathbb{R})$ tels que $U = QS$. Nous diagonalisons S à l'aide de la matrice orthogonale P :

$$S = PDP^{-1} \quad (12.90)$$

avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$. En termes de normes, nous avons

$$\|U\| = \|S\| = \|D\|. \quad (12.91)$$

En effet vu que Q est orthogonale, $\|Ux\| = \|QSx\| = \|Sx\|$ pour tout x , donc $\|U\| = \|S\|$. De plus pour tout x nous avons

$$\|Sx\| = \|PDP^{-1}x\| = \|DP^{-1}x\|. \quad (12.92)$$

Étant donné que P^{-1} est une bijection, le supremum des $\|Sx\|$ sera le même que celui des $\|Dx\|$ et donc $\|S\| = \|D\|$. Étant donné que par définition $\|U\| \leq 1$, nous avons aussi $\|D\| \leq 1$ et donc $0 \leq \lambda_i \leq 1$ (pour rappel, les valeurs propres de D sont positives ou nulles parce que S est ainsi).

Comme $U \notin O(E)$, au moins une des valeurs propres n'est pas 1, supposons que ce soit λ_1 . Alors nous avons $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ avec $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$ et $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Nous posons alors

$$D_1 = \text{diag}(\alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (12.93a)$$

$$D_2 = \text{diag}(\beta, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (12.93b)$$

18. Définition 6.86.

Nous avons bien $D_1 \neq D_2$ et $D_1 + D_2 = D$. Par conséquent

$$U = \frac{1}{2}(QPD_1P^{-1} + QPD_2P^{-1}) \quad (12.94)$$

avec $QPD_1P^{-1} \neq QPD_2P^{-1}$. La matrice U est donc le milieu d'un segment. Reste à montrer que ce segment est dans $\mathcal{B}$. Pour ce faire, prenons $x \in E$ et calculons :

$$\|QPD_iP^{-1}x\| = \|D_iP^{-1}x\| \leq \|P^{-1}x\| = \|x\| \quad (12.95)$$

parce que $\|D_i\| \leq 1$ et P^{-1} est orthogonale. Au final la norme de QPD_iP est plus petite que 1 et donc U est bien le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$, et donc non extrémal. $\square$

Théorème 12.36 ([173]).

L'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme induite de $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $M(n, \mathbb{R})$ et $\text{Conv}(O(n, \mathbb{R}))$ l'enveloppe convexe de $O(n, \mathbb{R})$. Vu que $\mathcal{B}$ est convexe nous avons $\text{Conv}(O(n)) \subset \mathcal{B}$.

Maintenant nous devons prouver l'inclusion inverse. Pour ce faire nous supposons avoir un élément $A \in \mathcal{B} \setminus \text{Conv}(O(n))$ et nous allons dériver une contradiction.

Remarquons que $O(n)$ est compact par le lemme 12.27 et que par conséquent $\text{Conv}(O(n))$ est compacte par le corollaire 8.33 et donc fermée. Nous considérons un produit scalaire $(X, Y) \mapsto X \cdot Y$ sur M . Vu que $\text{Conv}(O(n))$ est un fermé convexe nous pouvons considérer la projection¹⁹ sur $\text{Conv}(A)$ relativement au produit scalaire choisis.

Nous notons $P = \text{proj}_{\text{Conv}(O(n))}(A)$. En vertu du théorème de projection, nous avons

$$(A - P) \cdot (M - P) \leq 0 \quad (12.96)$$

pour tout $M \in \text{Conv} O(n)$. Notons $B = A - P$ pour alléger les notations. L'équation (12.96) s'écrit

$$B \cdot M \leq B \cdot P. \quad (12.97)$$

D'autre par vu que $B \neq 0$ nous avons $B \cdot B > 0$, c'est à dire $B \cdot (A - P) > 0$ et donc

$$B \cdot A > B \cdot P. \quad (12.98)$$

En combinant avec (12.97),

$$B \cdot M \leq B \cdot P < B \cdot A. \quad (12.99)$$

Nous utilisons maintenant la décomposition polaire, théorème 12.31, pour écrire $B = QS$ avec $Q \in O(n)$ et $S \in S^+(n, \mathbb{R})$. Vu que l'inégalité (12.99) tient pour tout $M \in \text{Conv}(O(n))$, elle tient en particulier pour $Q \in O(n)$. Donc

$$B \cdot Q = B \cdot A. \quad (12.100)$$

Nous nous particulierisons à présent au produit scalaire $(X, Y) \mapsto \text{Tr}(X^t Y)$ de la proposition 6.92. D'abord

$$B \cdot Q = \text{Tr}(B^t Q) = \text{Tr}(S^t Q^t Q) = \text{Tr}(S^t) = \text{Tr}(S), \quad (12.101)$$

et ensuite l'inégalité (12.101) devient

$$\text{Tr}(S) < B \cdot A = \text{Tr}(S^t Q^t A). \quad (12.102)$$

19. Le théorème de projection : théorème 6.235.

Nous choisissons une base $\{e_i\}$ diagonalisant $S : Se_i = \lambda_i e_i$ vérifiant automatiquement $\lambda_i \geq 0$ parce que S est semi-définie positive²⁰. Alors

$$\text{Tr}(S) < \text{Tr}(S^t Q^t A) \quad (12.103a)$$

$$= \sum_i \langle S^t Q^t A e_i, e_i \rangle \quad (12.103b)$$

$$= \sum_i \langle A e_i, Q S e_i \rangle \quad (12.103c)$$

$$\leq \sum_i \|A e_i\| \lambda_i \underbrace{\|Q e_i\|}_{=1} \quad (12.103d)$$

$$\leq \sum_i \lambda_i \quad A \in \mathcal{B} \Rightarrow \|A e_i\| \leq 1 \quad (12.103e)$$

$$= \text{Tr}(S). \quad (12.103f)$$

Il faut noter que la première inégalité est stricte, et donc nous avons une contradiction. $\square$

12.2.8 Décomposition de Bruhat

Théorème 12.37 (Décomposition de Bruhat).

Soit $\mathbb{K}$ un corps ; un élément $M \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$M = T_1 P_\sigma T_2 \quad (12.104)$$

où T_1 et T_2 sont des matrices triangulaires supérieures inversibles et où P_σ est une matrice de permutation $\sigma \in S_n$. De plus il y a unicité de σ .

Démonstration. Afin de rendre les choses plus visuelles, nous nous permettons de donner des exemples au fur et à mesure de la preuve. Nous prenons l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \quad (12.105)$$

Existence Soit $M \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$; vu qu'elle est inversible, on a un indice i_1 maximum tel que $M_{i_1,1} \neq 0$. Nous changeons toutes les lignes jusque là, c'est à dire que nous faisons, pour $1 \leq i < i_1$,

$$L_i \rightarrow L_i - \frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}} L_{i_1}. \quad (12.106)$$

Voir le lemme 12.10(3).

Nous avons donc obtenu une matrice dont la première colonne est nulle sauf la case numéro i_1 . L'opération (12.106) revient à considérer la multiplication par la matrice de transvection

$$T_1^{(i)} = T_{ii_1} \left(-\frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}} \right) \quad (12.107)$$

pour tout $i < i_1$. Pour rappel nous ne changeons que les lignes *au-dessus* de la i_1 . Du coup les matrices $T_1^{(i)}$ sont triangulaires supérieures. Nous avons donc la nouvelle matrice $M_1 = \left(\prod_{i < i_1} T_1^{(i)} \right) M$ pour laquelle toute la première colonne est nulle sauf un élément.

Dans le cas de l'exemple, le «pivot» sera la ligne (2, 5, 6) et la matrice se transforme à l'aide de la matrice $T_1 = T_{12}(-1/2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \quad (12.108)$$

20. Définition 6.294.

Maintenant nous faisons de même avec les colonnes (en renommant M la matrice obtenue à l'étape précédente) :

$$C_j \rightarrow C_j - \frac{M_{i_1 j}}{M_{i_1 1}} C_1, \quad (12.109)$$

qui revient à multiplier à droite par les matrices $T_{1j}(\frac{M_{i_1 j}}{M_{i_1 1}})$ avec $j > 1$. Encore une fois ce sont des matrices triangulaires supérieures.

Dans l'exemple, pour traiter la seconde colonne, nous multiplions (12.108) à droite par la matrice $T_{12}(-5/2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \quad (12.110)$$

Appliquer encore la matrice $T_{13}(-6/2)$ apporte la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \quad (12.111)$$

Enfin nous multiplions la matrice obtenue par $\frac{1}{M_{i_1 1}} \mathbb{1}$ pour normaliser à 1 l'élément «pivot» que nous avons choisit. Dans notre exemple nous multiplions par $1/2$ pour trouver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (12.112)$$

La matrice obtenue jusqu'ici possède une ligne et une colonne de zéros avec un 1 à leur intersection, et elle est de la forme

$$M' = T_1 M T_2 \quad (12.113)$$

où T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures et inversibles, produits de matrices de transvection (et d'une matrice scalaire pour la normalisation).

Il reste à recommencer l'opération avec la seconde colonne (qui n'est pas toute nulle parce que le déterminant est encore non nul) puis la suivante etc. Dans notre exemple de l'équation (12.112), nous éliminerions le $1/4$ et le 4 en utilisant le $7/2$.

Encore une fois tout cela se fait à l'aide de matrices supérieures parce qu'à chaque étape, les colonnes précédant le pivot sont déjà nulles (sauf un 1) et ne doivent donc pas être touchées.

À la fin de ce processus, ce qui reste est une matrice TMT' qui ne contient plus que un seul 1 sur chaque ligne et chaque colonne, c'est à dire une matrice de permutation : $P_\sigma = TMT'$ et donc

$$M = T_\sigma^{-1} (T')^{-1}. \quad (12.114)$$

Unicité Soient $\sigma, \tau \in S'_n$ tels que $T_1 P_\sigma T_2 = S_1 P_\tau S_2$ avec T_i et S_i triangulaires supérieures et inversibles. En posant $T = T_2 S_2^{-1}$ et $S = T_1^{-1} S_1$, nous avons

$$P_\sigma T = S P_\tau \quad (12.115)$$

où S et T sont des matrices triangulaires supérieures et inversibles. Par les calculs de la preuve du lemme 3.86,

$$\begin{cases} (P_\sigma T)_{kl} = T_{\sigma^{-1}(k)l} & (12.116a) \\ (S P_\tau)_{kl} = S_{k\tau(l)}, & (12.116b) \end{cases}$$

et donc

$$T_{\sigma^{-1}(k)l} = S_{k\tau(l)}. \quad (12.117)$$

En écrivant cette équation avec $k = \sigma(i)$ (nous rappelons que σ est bijective),

$$T_{il} = S_{\sigma(i)\tau(l)}. \quad (12.118)$$

Nous savons que les termes diagonaux de T sont non nuls parce que T est triangulaire supérieure et inversible (donc pas de colonnes entières nulles). Nous avons donc, en prenant $i = l = k$,

$$0 \neq T_{kk} = S_{\sigma(k)\tau(k)}. \quad (12.119)$$

La matrice étant triangulaire supérieure, cela implique

$$\sigma(k) \leq \tau(k). \quad (12.120)$$

De la même manière en écrivant (12.117) avec $l = \tau^{-1}(i)$,

$$S_{ki} = T_{\sigma^{-1}(k)\tau^{-1}(i)} \quad (12.121)$$

et donc

$$\sigma^{-1}(k) \leq \tau^{-1}(k). \quad (12.122)$$

En écrivant cela avec $k = \sigma(j)$, nous avons $j \leq \tau^{-1}\sigma(j)$ et en appliquant enfin τ ,

$$\tau(j) \leq \sigma(j). \quad (12.123)$$

En comparant avec (12.120), nous avons $\sigma = \tau$.

□

12.3 Sous-groupes du groupe linéaire

Lemme 12.38 ([1]).

Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$. Soit K un compact convexe de V et G , un sous groupe compact de $\text{GL}(V)$ tel que

$$u(K) \subset K \quad (12.124)$$

pour tout $u \in G$. Alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.

Démonstration. Avant de nous lancer dans la preuve, nous avons besoin d'un petit résultat.

Un pré-résultat Nous commençons par prouver que si $v \in \mathcal{L}(V)$ vérifie $v(K) \subset K$, alors v a un point fixe dans K . Pour cela nous considérons $x_0 \in K$ et la suite

$$x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v^i(x_0). \quad (12.125)$$

Étant donné que K est convexe et stable par v , la suite (x_k) est contenue dans K et accepte une sous-suite convergente²¹ que nous allons noter $x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Soit $a \in K$ la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = a. \quad (12.126)$$

Tant que nous y sommes nous pouvons aussi calculer $v(x_k)$:

$$v(x_k) = v \left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v^i(x_0) \right) \quad (12.127a)$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v^{i+1}(x_0) \quad (12.127b)$$

$$= x_k + \frac{1}{k+1} (v^{k+1}(x_0) - x_0). \quad (12.127c)$$

21. C'est Bolzano-Weierstrass, théorème 5.131.

La norme $\|v^{k+1}(x_0) - x_0\|$ est bornée par le diamètre de K , donc en prenant la limite $k \rightarrow \infty$ le second terme de (12.127c) tend vers zéro. En prenant ces égalités en $k = \varphi(n)$ et en prenant $n \rightarrow \infty$, nous trouvons

$$v(a) = a, \quad (12.128)$$

c'est à dire le résultat que nous voulions dans un premier temps.

Une norme sur V Nous passons maintenant à la preuve du lemme. D'abord nous remarquons que le groupe G agit sur V par $u \cdot x = u(x)$ et de plus, considérant la fonction continue

$$\begin{aligned} \alpha: G &\rightarrow V \\ u &\mapsto u(x), \end{aligned} \quad (12.129)$$

nous voyons que les orbites de cette action sont compactes en tant qu'image par α du compact G (théorème 5.60). Nous posons

$$\begin{aligned} \nu: V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \max_{u \in G} \|u(x)\|. \end{aligned} \quad (12.130)$$

Cette définition a un sens parce que l'orbite $\{u(x) \text{ tel que } u \in G\}$ est compacte dans V et donc l'ensemble des normes est compact dans $\mathbb{R}$ et admet un maximum. De plus cela donne une norme sur V parce que nous vérifions les conditions de la définition 5.31 :

(1) Pour tout $x, y \in V$ nous avons :

$$\nu(x + y) = \max_{u \in G} \|u(x) + u(y)\| \leq \max_{u \in G} (\|u(x)\| + \|u(y)\|) \leq \nu(x) + \nu(y). \quad (12.131)$$

(2) Si $\nu(x) = 0$, alors l'égalité $\max_{u \in G} \|u(x)\| = 0$ nous enseigne que $\|u(x)\| = 0$ pour tout $u \in G$ et donc en particulier avec $u = \text{Id}$ nous trouvons $x = 0$.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in V$,

$$\nu(\lambda x) = \max_{u \in G} \|u(\lambda x)\| = \max_{u \in G} \|\lambda u(x)\| = \max_{u \in G} |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| \nu(x). \quad (12.132)$$

De plus la fonction ν est constante sur les orbites de G .

Un point fixe Pour tout $u \in G$ nous posons

$$F_u = \{x \in K \text{ tel que } u(x) = x\}; \quad (12.133)$$

par le pré-résultat, aucun de ces ensembles n'est vide. Ils sont de plus tous fermés par continuité de u (le complémentaire est ouvert). Nous devons prouver que $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$ parce qu'une intersection serait un point fixe de tous les éléments de G . Supposons donc que $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$. Alors les complémentaires des F_u forment un recouvrement ouvert de K et nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Soient $\{u_i\}_{i=1, \dots, p}$ les éléments qui réalisent ce recouvrement. Alors

$$\bigcap_{i=1}^p F_{u_i} = \emptyset. \quad (12.134)$$

Nous considérons l'opérateur

$$v = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p u_i \in \mathcal{L}(V). \quad (12.135)$$

Vu que K est convexe et stable sous chacun des u_i , nous avons aussi $v(K) \subset K$ et donc il existe $a \in K$ tel que $v(a) = a$. Pour ce a , nous avons

$$\nu(v(a)) = \nu\left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p u_i(a)\right) \quad (12.136a)$$

$$\leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \nu(u_i(a)) \quad (12.136b)$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \nu(a) \quad (12.136c)$$

$$= \nu(a) \quad (12.136d)$$

où nous avons utilisé la constance de ν sur les orbites de G . Par ailleurs nous savons que $v(a) = a$, donc en réalité à gauche dans (12.136a) nous avons $\nu(a)$ et toutes les inégalités sont des égalités. Nous avons en particulier

$$\nu\left(\sum_{i=1}^p u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^p \nu(u_i(a)). \quad (12.137)$$

Notons $u_0 \in G$ l'élément qui réalise le maximum de la définition de ν pour le vecteur $\sum_i u_i(a)$:

$$\nu\left(\sum_i u_i(a)\right) = \|u_0\left(\sum_i u_i(a)\right)\| \leq \sum_i \|u_0 u_i(a)\| \leq \sum_i \nu(u_i(a)). \quad (12.138)$$

Mais nous venons de voir (équation (12.137)) que l'expression de gauche est égale à celle de droite. Donc les inégalités sont des égalités et en particulier la première inégalité devient l'égalité

$$\left\| \sum_i u_0 u_i(a) \right\| = \sum_i \|u_0 u_i(a)\|. \quad (12.139)$$

En vertu du lemme 6.69, il existe des nombres positifs λ_i tels que

$$u_0 u_1(a) = \lambda_2 u_0 u_2(a) = \dots = \lambda_p u_0 u_p(a). \quad (12.140)$$

Du fait que u_0 est inversible nous avons aussi

$$u_1(a) = \lambda_2 u_2(a) = \dots = \lambda_p u_p(a). \quad (12.141)$$

Mais par constance de ν sur les orbites nous avons $\nu(u_i(a)) = \nu(u_j(a))$ pour tout i et j ; en appliquant ν à la série d'égalités (12.141), nous trouvons que tous les λ_i doivent être égaux à 1. En particulier

$$u_1(a) = u_2(a) = \dots = u_p(a). \quad (12.142)$$

Nous récrivons maintenant l'équation $v(a) = a$ avec la définition de v :

$$a = v(a) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p u_i(a) = u_j(a) \quad (12.143)$$

pour n'importe quel j . Donc

$$a \in \bigcap_{i=1}^p F_{u_i}, \quad (12.144)$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ.

□

Proposition 12.39 ([173, 1, 174]).

Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Alors

- (1) Il existe une forme quadratique définie positive q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathrm{O}(q)$.
- (2) Le groupe G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Nous considérons le (pas tout à fait) morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \rho: G &\rightarrow \mathrm{GL}(S(n, \mathbb{R})) \\ u &\mapsto \rho_u: s \rightarrow u^t s u, \end{aligned} \quad (12.145)$$

et tant que nous y sommes à considérer, nous considérons l'ensemble

$$H = \{M^t M \text{ tel que } M \in G\} \subset S(n, \mathbb{R}). \quad (12.146)$$

Cet ensemble est constitué de matrices définies positives parce que si $\langle M^t M x, x \rangle = 0$, alors $0 = \langle M x, M x \rangle = \|M x\|$, mais M étant inversible, cela implique que $x = 0$. Qui plus est cet ensemble est compact dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ en tant qu'image du compact G par l'application continue $M \mapsto M^t M$. L'enveloppe convexe $K = \mathrm{Conv}(H)$ est alors également compacte par le théorème 8.33. Enfin nous considérons $L = \rho(G)$, qui est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(S(n, \mathbb{R}))$ parce que $\rho_u \rho_v = \rho_{vu} \in \rho(G)$. Nous remarquons que ρ_u étant linéaire, elle préserve les combinaisons convexes et donc pour tout $u \in G$, $\rho_u(K) \subset K$.

Bref, L est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ préservant le compact K de $S(n, \mathbb{R})$. Par le lemme 12.38, il existe $s \in K$ tel que $\rho_u(s) = s$ pour tout $u \in G$. Ou encore :

$$u^t s u = s \quad (12.147)$$

pour tout $u \in G$. Fort de ce s bien particulier, nous considérons la forme quadratique associée : $q(x) = x^t s x$. Cette forme est définie positive parce que s l'est. Nous avons $G \subset \mathrm{O}(q)$ parce que si $u \in G$ alors

$$q(ux) = (ux)^t s u x = x^t \underbrace{u^t s u}_{=s} x = q(x). \quad (12.148)$$

Le premier point est prouvé.

La matrice s est symétrique et définie positive. Elle peut donc être diagonalisée²² en $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$, et ensuite transformée en la matrice $\mathbb{1}_n$ par la matrice $\mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_i})$. Nous avons donc une matrice $a \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que $a^t s a = \mathbb{1}_n$. Avec ça, si $u \in G$, nous avons

$$(a^{-1} u a)^t (a^{-1} u a) = (a^{-1} u a)^t \mathbb{1}_n (a^{-1} u a) = a^t u^t (a^t)^{-1} a^t s a a^{-1} u a = a^t u^t s u a = a^t s a = \mathbb{1}, \quad (12.149)$$

ce qui prouve que $a^{-1} u a$ est dans $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, et donc que $a^{-1} G a \subset \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. $\square$

12.4 Isométries de l'espace euclidien

Nous considérons l'espace affine euclidien $A = \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ modelé sur $\mathbb{R}^n$ avec sa métrique usuelle. Un premier grand résultat sera le théorème 12.43 qui dira que les isométries de cet espace sont des applications linéaires²³.

²². Théorème 6.292

²³. Regardez un coup dans le second tome du Landau et Lifchitz voir comment ils démontrent que les transformations de Lorentz doivent être linéaires. Ça vous donnera une idée à quel point notre théorème est cool.

12.4.1 Structure du groupe $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Exemple 12.40

La forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$ donne la norme euclidienne. La forme bilinéaire associée est $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$, qui est le produit scalaire usuel. $\triangle$

Il ne faudrait pas déduire trop vite que la formule $\|x\|^2 = q(x)$ donne une norme dès que q est non dégénérée. En effet q peut ne pas être définie positive. La forme $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ prend des valeurs positives et négatives. A fortiori $d(x, y) = q(x - y)$ ne donne pas toujours une distance.

Définition 12.41.

Une **isométrie** pour la forme q est une application bijective $f: V \rightarrow V$ telle que $q(x - y) = q(f(x) - f(y))$. Dans les cas où q donne une distance, alors c'est une isométrie au sens usuel.

Lemme 12.42.

Soit q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée par le lemme 6.362. Pour une application bijective $f: E \rightarrow E$ telle que $f(0) = 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $b(f(x), f(y)) = b(x, y)$ pour tout $x, y \in E$;
- (2) $q(f(x) - f(y)) = q(x - y)$ pour tout $x, y \in E$.

Démonstration. Dans le sens direct, en posant $x = y$ nous trouvons tout de suite $q(f(x)) = q(x)$; ensuite en utilisant la distributivité de b ,

$$q(f(x) - f(y)) = b(f(x) - f(y), f(x) - f(y)) \quad (12.150a)$$

$$= q(f(x)) - 2b(f(x), f(y)) + q(f(y)) \quad (12.150b)$$

$$= q(x) + q(y) - 2b(x, y) \quad (12.150c)$$

$$= q(x - y). \quad (12.150d)$$

Dans l'autre sens, nous commençons par remarquer que l'hypothèse $f(0) = 0$ donne $q(x) = q(f(x))$. Ensuite nous utilisons l'identité de polarisation (6.871) :

$$b(f(x), f(y)) = \frac{1}{2}[q(f(x)) + q(f(y)) - q(f(x - y))] \quad (12.151a)$$

$$= \frac{1}{2}[q(x) + q(y) - q(x - y)] \quad (12.151b)$$

$$= b(x, y). \quad (12.151c)$$

□

Théorème 12.43 ([175]).

Soit $f: E \rightarrow E$ une bijection telle que

$$q(x - y) = q(f(x) - f(y)) \quad (12.152)$$

pour tout $x, y \in E$. Alors

- (1) si $f(0) = 0$, alors f est linéaire ;
- (2) si $f(0) \neq 0$ alors f est affine²⁴.

Démonstration. Si $f(0) = 0$, nous savons par le lemme 12.42 que $b(f(x), f(y)) = b(x, y)$. Soit $z \in E$; étant donné que f est bijective nous pouvons considérer l'élément $f^{-1}(z) \in E$ et calculer

$$b(f(x + y), z) = b(f(x + y), f(f^{-1}(z))) \quad (12.153a)$$

$$= b(x + y, f^{-1}(z)) \quad (12.153b)$$

$$= b(x, f^{-1}(z)) + b(y, f^{-1}(z)) \quad (12.153c)$$

$$= b(f(x), z) + b(f(y), z) \quad (12.153d)$$

$$= b(f(x) + f(y), z), \quad (12.153e)$$

24. Définition 8.40.

donc $f(x + y) = f(x) + f(y)$ par le lemme 6.368.

De la même façon on trouve $b(f(\lambda x), z) = b(\lambda f(x), z)$ qui prouve que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et donc que f est linéaire.

Si $f(0) \neq 0$, alors nous posons $g(x) = f(x) - f(0)$ qui vérifie $g(0) = 0$ et

$$q(g(x) - g(y)) = q(f(x) - f(0) - f(y) + f(0)) = q(x - y). \quad (12.154)$$

Nous pouvons donc appliquer le premier point à g , déduire que g est linéaire et donc que f est affine. $\square$

Nous pouvons maintenant particulariser tout cela au cas de $\mathbb{R}^n$ pour voir quel résultat nous avons à peine prouvé. Nous notons ici $T(n)$ le groupe des translations sur $\mathbb{R}^n$. Un élément de $T(n)$ est une translation τ_v donnée par un vecteur v et agissant sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} \tau_v: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x + v. \end{aligned} \quad (12.155)$$

Ce groupe est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^n, +)$, et nous allons souvent identifier τ_v à v .

Si vous ne voulez pas savoir ce qu'est un produit semi-direct de groupes, vous pouvez lire seulement le point (1) du théorème suivant, et passer directement à la remarque 12.45.

Théorème 12.44.

Un peu de structure sur $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

(1) *L'application*

$$\begin{aligned} \psi: T(n) \times \text{O}(n) &\rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \\ (v, \Lambda) &\mapsto \tau_v \circ \Lambda \end{aligned} \quad (12.156)$$

est une bijection. Ici, $T(n)$ est le groupe des translations de $\mathbb{R}^n$.

(2) *Un couple $(v, \Lambda) \in T(n) \times \text{SO}(n)$ agit sur $x \in \mathbb{R}^n$ par*

$$(v, \Lambda)x = \Lambda x + v \quad (12.157)$$

au sens où $\psi(v, \Lambda)x = \Lambda x + v$.

(3) *En tant que groupes,*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_{\rho} \text{O}(n) \quad (12.158)$$

où ρ représente l'action adjointe de $\text{O}(n)$ sur $T(n)$ et $\times_{\rho}$ dénotes le produit semi-direct de la définition 2.85.

Démonstration. Point par point.

(1) Prouvons que l'application proposée est injective et surjective. Notons aussi que ce point ne parle pas de structure de groupe, mais seulement d'une bijection en tant qu'ensembles.

Injection Si $\psi(v, \Lambda) = \psi(w, \Lambda')$ alors en appliquant sur $x = 0$ nous avons tout de suite $v = w$. Et ensuite $\Lambda = \Lambda'$ est immédiat.

Surjection Une isométrie $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est une application $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $d(x, y) = d(g(x), g(y))$. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ cela se traduit par

$$\|x - y\| = \|g(x) - g(y)\|, \quad (12.159)$$

Vu que $x \mapsto \|x\|^2$ est une forme quadratique, elle tombe sous le coup du théorème 12.43, ce qui nous permet de dire que g est affine. Or par définition une application est affine lorsqu'elle est la composée d'une translation et d'une application linéaire.

(2) C'est seulement le fait que $(\tau_v \circ \Lambda)x = \tau_v(\Lambda x) = \Lambda x + v$.

(3) Nous allons étudier l'application

$$\psi: T(n) \times_{\rho} \text{O}(n) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^n). \quad (12.160)$$

Le produit semi-direct est bien défini Il faut montrer que

$$\begin{aligned}\rho: O(n) &\rightarrow \text{Aut}(T(n)) \\ \Lambda &\mapsto \mathbf{Ad}(\Lambda)\end{aligned}\quad (12.161)$$

est correcte.

D'abord pour $\Lambda \in O(n)$, nous avons bien $\rho_\Lambda(\tau_v) \in T(n)$ parce qu'en appliquant à $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\Lambda\tau_v\Lambda^{-1})(x) = \Lambda(\tau_v(\Lambda^{-1}x)) = \Lambda(\Lambda^{-1}x + v) = x + \Lambda(v) = \tau_{\Lambda(v)}(x). \quad (12.162)$$

Donc $\rho_\Lambda(\tau_v) = \tau_{\Lambda(v)}$.

De plus, $\rho_\Lambda \in \text{Aut}(T(n))$ parce que

$$\rho_\Lambda(\tau_v \circ \tau_w) = \rho_\Lambda(\tau_v) \circ \rho_\Lambda(\tau_w), \quad (12.163)$$

comme on peut aisément vérifier que les deux membres sont égaux à $\tau_{\Lambda(v+w)}$.

ψ est une bijection Cela est déjà vérifié.

ψ est un homomorphisme Nous avons d'une part

$$\psi((v, g)(w, h)) = \psi(v\rho_g(w), gh) = \tau_v \circ g \circ \tau_w \circ g^{-1} \circ g \circ h = \tau_v \circ g \circ \tau_w \circ h. \quad (12.164)$$

Et d'autre part,

$$\psi(v, g) \circ \psi(w, h) = \tau_v \circ g \circ \tau_w \circ h, \quad (12.165)$$

ce qui est la même chose.

□

Remarque 12.45.

Notons au passage la loi de groupe sur les couples qui est donnée, pour tout $v, v' \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda, \Lambda' \in \text{SO}(n)$, par

$$(v, \Lambda) \cdot (v', \Lambda') = (\Lambda v' + v, \Lambda \Lambda') \quad (12.166)$$

comme le montre le calcul suivant :

$$(v, \Lambda) \cdot (v', \Lambda')x = (v, \Lambda)(\Lambda'x + v') \quad (12.167a)$$

$$= \Lambda \Lambda'x + \Lambda v' + v \quad (12.167b)$$

$$= (\Lambda v' + v, \Lambda \Lambda')x. \quad (12.167c)$$

Proposition 12.46 ([142]).

Soit $n \geq 1$ et un élément R de $O(n)$ de déterminant -1 tel que $R^2 = \text{Id}$. En posant $C_2 = \{\text{Id}, R\}$ nous avons

$$O(n) = \text{SO}(n) \times_\rho C_2 \quad (12.168)$$

Démonstration. Notons que pour R nous pouvons prendre par exemple $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ce que nous allons montrer être un isomorphisme est :

$$\begin{aligned}\psi: \text{SO}(n) \times C_2 &\rightarrow O(n) \\ (A, h) &\mapsto Ah.\end{aligned}\quad (12.169)$$

Injectif Soient $A, B \in \text{SO}(n)$ et $h, k \in C_2$ tels que $\psi(A, h) = \psi(B, k)$, c'est à dire tels que $Ah = Bk$. Vu que $\det(A) = \det(B) = 1$ nous avons $\det(h) = \det(k)$. Mais comme C_2 contient un élément de déterminant 1 et un élément de déterminant -1 , nous avons $h = k$. De là $A = B$.

Surjectif Soit $X \in O(n)$. Si $\det(X) = 1$ alors $X \in \text{SO}(n)$ et $X = \psi(X, \text{Id})$. Si par contre $\det(X) = -1$ alors $XR \in \text{SO}(n)$ parce que $\det(XR) = 1$ et nous avons

$$\psi(XR, R) = XR^2 = X. \quad (12.170)$$

Homomorphisme Nous avons

$$\psi\left((A, h)(B, k)\right) = \psi(A\rho_h(B), hk) = A(hBh^{-1})hk = AhBk, \quad (12.171)$$

tandis que

$$\psi(A, h)\psi(B, k) = AhBk, \quad (12.172)$$

qui est la même chose. □

Lemme 12.47 ([176]).

Si $n \geq 3$, alors toute droite est intersection de deux plans non isotropes.

Proposition 12.48 ([142]).

Si une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixe un ensemble F de points, alors elle fixe l'espace affine engendré par F .

Démonstration. Soit $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ fixant F . Par le théorème 12.43, c'est une application affine et l'ensemble $\text{Fix}(f)$ des points fixés par f est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$, grâce à la proposition 8.41.

Donc $\text{Fix}(f)$ est un espace affine contenant F . Vu que l'espace affine engendré par F est l'intersection de tous les espace affines contenant F , il est en particulier contenu dans $\text{Fix}(f)$. □

Corollaire 12.49.

Si f et g sont des isométries de $\mathbb{R}^n$ qui coïncident sur F , alors elles coïncident sur l'espace affine engendré par F .

Démonstration. Nous considérons $h = g^{-1} \circ f$ qui est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixant F . Elle fixe donc, par la proposition 12.48, l'espace affine engendré par F . Or tout point fixé par h est un point sur lequel g et f coïncident. □

12.4.2 Classification des isométries de $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$; nous notons σ_x la **réflexion** par rapport à x , c'est à dire

$$\sigma_x(y) = 2x - y. \quad (12.173)$$

Théorème 12.50 ([142]).

Toute isométrie de $\mathbb{R}$ est composée d'au plus 2 réflexions. Plus précisément toute isométrie de $\mathbb{R}$ est dans une des trois catégories suivantes :

- l'identité (0 réflexions),
- les réflexions,
- les translations (2 réflexions)

Démonstration. Nous divisons la preuve en fonction du nombre de points fixés par l'isométrie $f \in \text{Isom}(\mathbb{R})$.

f fixe deux points distincts Alors elle fixe l'espace affine engendré par ces deux points par la proposition 12.48. Donc f fixe tout $\mathbb{R}$ et est l'identité.

f fixe un unique point Soit x l'unique point fixé par f et considérons $y \neq x$. Vu que $x = f(x)$ et que f est une isométrie,

$$d(x, f(y)) = d(f(x), f(y)) = d(x, y). \quad (12.174)$$

Donc $f(y)$ est à égale distance de x que y . Autrement dit, $f(y)$ est soit y soit $\sigma_x(y)$. Mais comme x est unique point fixe, $f(y) = \sigma_x(y)$. Ce raisonnement étant valable pour tout $y \neq x$ nous avons $f = \sigma_x$.

f n'a pas de points fixes Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = \frac{x+f(x)}{2}$. Nous posons $g = \sigma_y \circ f$. Alors x est un point fixe de g parce que

$$g(x) = \sigma_y(f(x)) = 2y - f(x) = x. \quad (12.175)$$

Donc soit g est l'identité soit g est une réflexion (par les points précédents). La possibilité $g = \text{Id}$ est exclue parce que cela ferait $f = \sigma_y$ alors que f n'a pas de points fixes. Donc g est une réflexion ; et comme x est un point fixe de g nous avons $g = \sigma_x$. Au final

$$f = \sigma_y \circ \sigma_x. \quad (12.176)$$

Montrons que cela implique que f est une translation :

$$\sigma_y \sigma_x(z) = \sigma_y(2x - z) = 2y - 2x + z = z + 2(y - x). \quad (12.177)$$

Donc $\sigma_y \circ \sigma_x$ est la translation de vecteur $2(y - x)$.

□

12.4.3 Classification des isométries de $\mathbb{R}^2$

Si l est une droite dans $\mathbb{R}^2$, nous notons $\sigma_l \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ la réflexion d'axe l . Cela est une isométrie et donc une application affine par le théorème 12.43. Le lemme suivant détermine comment la réflexion σ_l se décompose en une translation et une application linéaire.

La réflexion d'axe l peut être caractérisée par quelques propriétés.

Lemme 12.51 (Caractérisation des réflexions).

Soit une droite ℓ de $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

- (1) $f(x) = x$ pour tout $x \in \ell$.
- (2) f échange les côtés de ℓ .
- (3) f laisse invariants les droites perpendiculaires à ℓ et les cercles dont le centre est sur ℓ .

Démonstration. Soit x hors de ℓ et p la droite perpendiculaire à ℓ et passant par x . Nous avons $f(x) \in p$. En nommant P l'intersection entre ℓ et p , nous considérons le cercle $S(P, \|Px\|)$ qui est un cercle dont le centre est sur ℓ . Il contient x et donc $f(x) \in S(P, \|Px\|)$.

Donc $f(x) \in p \cap S(P, \|Px\|)$. L'intersection entre un cercle et une droite contient de façon générique deux points. L'un est x , mais $f(x) = x$ n'est pas possible parce que x est hors de ℓ et f doit inverser les côtés de ℓ . Donc $f(x)$ est l'autre.

Cela prouve l'unicité. En ce qui concerne l'existence, il suffit de noter que la réflexion σ_ℓ satisfait les contraintes. □

Lemme 12.52.

Soit une droite ℓ . Alors

$$\sigma_\ell = \tau_{2w} \circ \sigma_{\ell_0} \quad (12.178)$$

où ℓ_0 est la droite parallèle à ℓ passant par l'origine, et w est le vecteur perpendiculaire à ℓ tel que $\ell_0 = \ell + v$.

Démonstration. Il faut trouver trois points non alignés sur lesquels les deux applications coïncident ; cela suffira par le corollaire 12.49.

Pour tous les points de ℓ_0 , l'égalité fonctionne parce que si $x \in \ell_0$,

$$\sigma_\ell(x) = x + 2w, \quad (12.179)$$

tandis que

$$\sigma_{\ell_0}(x) + 2w = x + 2w \quad (12.180)$$

du fait que $\sigma_{\ell_0}(x) = x$.

Si $x \in \ell$, alors

$$\sigma_\ell(x) = x \quad (12.181)$$

tandis que

$$\sigma_{\ell_0}(x) + 2w = x - 2w + 2w = x. \quad (12.182)$$

Donc les applications affines σ_ℓ et $x \mapsto \sigma_{\ell_0}(x) + 2w$ coïncident sur ℓ et ℓ_0 . Elles coïncident donc partout. $\square$

Avant d'aborder la classification des isométries, nous devons parler de l'angle entre deux droites. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux droites, alors il est bien clair deux angles peuvent prétendre être «l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2 ». De plus chacun de ces deux angles sont doubles parce que si α peut prétendre être l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2 , alors $-\alpha$ peut également prétendre.

Lemme-définition 12.53.

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux droites sécantes au point O et si $x \in \ell_1$ n'est pas O , alors il existe un unique $\alpha \in [0, \pi[$ tel que $R_O(\alpha)x \in \ell_2$. La valeur de α ne dépend pas du choix du point $x \in \ell_1$.

Cet angle α est l'**angle** de ℓ_1 à ℓ_2 .

Remarque 12.54.

Nous ne parlons pas de l'angle entre ℓ_1 et ℓ_2 mais bien de l'angle de ℓ_1 à ℓ_2 . L'ordre des droites est important.

12.55.

Pour la suite, $R_O(\alpha)$ est la rotation d'angle α autour du point O tandis que $R(\alpha)$ est la rotation d'angle α autour de l'origine. En termes matriciels, la rotation d'angle α est donnée par

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (12.183)$$

Lemme 12.56 ([8]).

Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et une droite ℓ_1 . Soit ℓ_2 une droite passant par A et intersectant ℓ_1 en O . Alors

$$\sigma_{\ell_1}(A) = R_O(-2\alpha)A \quad (12.184)$$

où α est l'angle de ℓ_1 à ℓ_2 .

Démonstration. Nous allons utiliser des coordonnées autour de O . Il existe un vecteur v tel que

$$A = O + v \quad (12.185)$$

Par définition de l'angle α , la droite ℓ_2 s'obtient par rotation d'angle α depuis la droite ℓ_1 . Donc le point

$$B = R_O(-\alpha)A \quad (12.186)$$

est sur ℓ_1 .

Nous allons prouver que le point

$$D = R_O(-2\alpha)A \quad (12.187)$$

est $D = \sigma_{\ell_1}A$.

Nous commençons par montrer que la droite (DA) est perpendiculaire à ℓ_1 , c'est à dire que

$$(D - A) \cdot (B - O) = 0. \quad (12.188)$$

En utilisant le fait que

$$R_O(\alpha)(O + X) = O + R(\alpha)X, \quad (12.189)$$

nous avons

$$D - A = R_O(-2\alpha)(O + v) - (O + v) = O + R(-2\alpha)v - O - v = R(-2\alpha)v - v \quad (12.190)$$

et de la même façon,

$$B - O = R(-\alpha)v. \quad (12.191)$$

Notons que tous les O se sont simplifiés et qu'il ne reste que des rotations usuelles. En utilisant le fait que $R(\alpha)$ est une isométrie, nous pouvons alors calculer

$$(D - A) \cdot (B - O) = \langle R(-2\alpha)v - v, R(-\alpha)v \rangle \quad (12.192a)$$

$$= \langle R(-\alpha)v - R(\alpha)v, v \rangle. \quad (12.192b)$$

En utilisant la matrice de rotation (12.183) nous trouvons

$$(R(-\alpha) - R(\alpha))v = \begin{pmatrix} 2 \sin(\alpha)v_2 \\ -2 \sin(\alpha)v_1 \end{pmatrix} \quad (12.193)$$

et donc

$$\langle (R(-\alpha) - R(\alpha))v, v \rangle = 0. \quad (12.194)$$

Le point D est bien sur la droite perpendiculaire à ℓ_1 et passant par A . Mais vu que D est obtenu à partir de A par une rotation, le point D est également sur le cercle de rayon $\|OA\|$ et centré en O . Ce cercle possède exactement deux intersections avec cette droite. Le premier est A et le second est $\sigma_{\ell_1}(A)$. Vu que D n'est pas A , nous avons $D = \sigma_{\ell}(A)$. $\square$

Théorème 12.57 ([142]).

Toute isométrie du plan est une composition d'au plus 3 réflexions.

Démonstration. Encore une fois nous décomposons la preuve en fonction du nombre de points fixes.

Si f n'a pas de points fixes Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et l , la médiatrice du segment $[x, f(x)]$. Par construction, $f(x) = \sigma_l(x)$. Nous posons $g = \sigma_l \circ f$, et nous avons

$$g(x) = x. \quad (12.195)$$

Donc nous avons $f = \sigma_l \circ g$ avec $x \in \text{Fix}(g)$.

Si f a un unique point fixe Soit x cet unique point fixe. Soit $y \neq x$ et l la médiatrice de $[y, f(y)]$. En posant $g = \sigma_l \circ f$ nous avons

$$g(y) = y \quad (12.196)$$

et $g(x) = x$ parce que

$$d(x, f(y)) = d(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad (12.197)$$

ce qui donne que x est à égale distance de y et de $f(y)$, c'est à dire que $x \in l$ et par conséquent $g(x) = (\sigma_l \circ f)(x) = \sigma_l(x) = x$.

Donc g fixe x et y et donc toute la droite (xy) .

Si f fixe une droite Soit l une droite fixée par f , et soient $x, y \in l$ et $z \notin l$ (avec $x \neq y$). Le fait que x et y soient des points fixes de f implique

$$\begin{cases} d(x, f(z)) = d(x, z) \\ d(y, f(z)) = d(y, z) \end{cases} \quad (12.198a)$$

$$(12.198b)$$

ce qui signifie que $f(z)$ est sur l'intersection des deux cercles ²⁵ $S(x, d(x, z))$ et $S(y, d(y, z))$, et comme ce sont deux cercles centrés sur la droite l , les intersections sont liées par σ_l . Autrement dit, les intersections sont z et $\sigma_l(z)$.

Si $f(z) = z$ alors f fixe trois points non alignés et fixe donc $\mathbb{R}^2$, c'est à dire $f = \text{Id}$.

Si par contre $f(z) = \sigma_l(z)$ alors les isométries f et σ_l coïncident sur trois points et coïncident donc partout par le corollaire 12.49 : $f = \sigma_l$.

25. L'intersection existe parce que $d(x, z) + d(y, z) > d(x, y)$.

Conclusion Nous avons montré que si $\text{Fix}(f)$ a dimension m , alors il existe une droite pour laquelle $f = \sigma_l \circ g$ avec $\dim(\text{Fix}(g)) > m$. Donc il faut au maximum trois pas pour avoir $\dim(\text{Fix}(g)) = 2$ c'est à dire pour avoir $g = \text{Id}$.

□

Définition 12.58.

Une **réflexion glissée** est une transformation du plan de la forme $\tau_v \circ \sigma_\ell$ où le vecteur v est parallèle à la droite ℓ .

Théorème 12.59 ([142]).

Les isométries du plan sont exactement

- (1) l'identité (composée de 0 réflexions),
- (2) les réflexions,
- (3) les translations (composées de 2 translations d'axes parallèles),
- (4) les réflexions glissées (composées de 3 réflexions)

Démonstration. Nous savons déjà que $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est une composée de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

Zéro réflexions Alors c'est l'identité. Ce n'est pas très profond.

Une réflexion Alors f est une réflexion. Toujours pas très profond.

Deux réflexions Soit $f = \sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}$. Maintenant ça s'approfondit un bon coup.

Nous supposons d'abord que $\ell_1 \parallel \ell_2$. Dans ce cas nous allons prouver que $f = \tau_{2v}$ où v est le vecteur perpendiculaire à ℓ_1 tel que $\ell_1 + v = \ell_2$. Nous allons utiliser le lemme 12.52 pour montrer que $\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} = \tau_{2v}$. Nous avons

$$\ell_1 = \ell_0 + w \quad (12.199a)$$

$$\ell_2 = \ell_0 + w + v \quad (12.199b)$$

où w est un vecteur perpendiculaire à ℓ_1 et ℓ_0 est la droite passant par l'origine et parallèle à ℓ_1 et ℓ_2 . Avec cela,

$$(\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2})(x) = \sigma_{\ell_1}(\sigma_{\ell_0}(x) + 2w) \quad (12.200a)$$

$$= \sigma_{\ell_0}(\sigma_{\ell_0}(x) + 2w) + 2(v + w) \quad (12.200b)$$

$$= x + \underbrace{\sigma_{\ell_0}(2w)}_{-2w} + 2v + 2w \quad (12.200c)$$

$$= x + 2v. \quad (12.200d)$$

Donc si f est composée de deux réflexions d'axes parallèles, alors f est une translation.

Toujours dans le cas où f est composée de deux réflexions, nous supposons que $f = \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$ avec ℓ_1 et ℓ_2 non parallèles. Nous notons O le point d'intersection, et nous allons voir que $f = R_O(2\alpha)$ où α est l'angle de ℓ_1 à ℓ_2 donné par le lemme 12.53.

Soit $x \in \ell_1$. Alors

$$f(x) = \sigma_{\ell_2}(x), \quad (12.201)$$

et le lemme 12.56 nous donne un moyen de calculer $\sigma_{\ell_2}(x)$ parce que ℓ_1 est une droite passant par x et coupant ℓ_2 au point O . Le lemme dit que $\sigma_{\ell_2}(x) = R_O(2\alpha)$. Remarque : c'est bien 2α et non -2α parce qu'il s'agit de l'angle de ℓ_2 à ℓ_1 ; il y a inversion des numéros entre ici et l'énoncé du lemme.

Nous avons donc bien $f(x) = R_O(2\alpha)x$ pour $x \in \ell_1$.

Si $y \in \ell_2$ alors

$$f(y) = \sigma_{\ell_2}(R_O(-2\alpha)y) \quad (12.202)$$

Nous posons $z = \sigma_{\ell_1}(y) = R_O(-2\alpha)y$. Soit la droite ℓ_3 passant par O et z . Vu que $R_O(2\alpha)z = y \in \ell_2$, l'angle de ℓ_3 à ℓ_2 est 2α . Par conséquent

$$\sigma_{\ell_2}(z) = R_O(-2 \times (-2\alpha))z = R_O(4\alpha)z = R_O(4\alpha)R_O(-2\alpha)y = R_O(2\alpha)y. \quad (12.203)$$

Donc les transformations f et $R_O(2\alpha)$ coïncident pour tous les points des droites ℓ_1 et ℓ_2 , qui ne sont pas parallèles. Cela prouve que $f = R_O(2\alpha)$.

Trois réflexions Nous écrivons $f = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}$. Nous allons transformer cela progressivement en une symétrie glissée en passant par plusieurs étapes :

- (1) $f = \sigma_{\ell} \circ \tau_v$,
- (2) $f = \tau_v \circ \sigma_{\ell}$,
- (3) $f = \tau_v \circ \sigma_{\ell}$ avec $v \parallel \ell$.

À chacune de ces étapes, v et ℓ vont changer. La dernière est une réflexion glissée.

Nous commençons par supposer $\ell_2 \parallel \ell_3$. Dans ce cas, $\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2}$ est une translation, comme nous l'avons déjà vu. Alors $f = \tau_v \circ \sigma_{\ell_1}$ et nous sommes déjà dans le cas (2).

Nous supposons que ℓ_2 n'est pas parallèle à ℓ_3 . Dans ce cas, si $O = \ell_2 \cap \ell_3$ nous avons

$$\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} = R_O(2\alpha) \quad (12.204)$$

où α est l'angle de ℓ_2 à ℓ_3 . En réalité tant que l'angle de ℓ'_3 à ℓ'_2 est α nous avons

$$\sigma_{\ell'_3} \circ \sigma_{\ell'_2} = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} = R_O(2\alpha). \quad (12.205)$$

Nous choisissons ℓ'_2 parallèle à ℓ_1 , de telle sorte à ce que $\sigma_{\ell'_2} \circ \sigma_{\ell_1}$ soit une translation. Alors nous avons

$$f = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell'_2} \circ \sigma_{\ell'_1} = \sigma_{\ell_3} \circ \tau_v. \quad (12.206)$$

où v est le vecteur de la translation en question.

Nous avons donc prouvé que toute composition de trois réflexions peut être écrite soit sous la forme (1) soit sous la forme (2).

Nous prouvons à présent que toute transformation de la forme (1) peut être écrite sous la forme (2). Plus précisément nous allons prouver que si ℓ est une droite, v un vecteur et ℓ_0 la droite parallèle à ℓ passant par l'origine, alors

$$\sigma_{\ell} \circ \tau_v = \tau_{\sigma_{\ell_0}(v)} \circ \sigma_{\ell} \quad (12.207)$$

D'abord nous savons que $\sigma_{\ell}(x) = \sigma_{\ell_0}(x) + 2w$ où w est le vecteur tel que $\ell = \ell_0 + w$. Ensuite c'est un simple calcul utilisant le fait que σ_{ℓ_0} est linéaire :

$$(\sigma_{\ell} \circ \tau_v)(x) = \sigma_{\ell}(x + v) = \sigma_{\ell_0}(x) + \sigma_{\ell_0}(v) + 2w, \quad (12.208)$$

et

$$(\tau_{\sigma_{\ell_0}(v)} \circ \sigma_{\ell})(x) = \sigma_{\ell_0}(v) + \sigma_{\ell}(x) = \sigma_{\ell_0}(v) + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w. \quad (12.209)$$

L'égalité est faite.

Nous montrons maintenant que toute transformation de la forme (2) peut être mise sous la forme (3). Soit donc $f = \tau_v \circ \sigma_{\ell}$ où v et ℓ ne sont pas spécialement parallèles.

Pour cela nous décomposons $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \perp \ell$ et $v_2 \parallel \ell$ et nous posons $\ell' = \ell + \frac{1}{2}v_1$. Nous montrons que

- $\tau_v \circ \sigma_{\ell} = \tau_{v_2} \circ \sigma_{\ell'}$
- $v_2 \parallel \ell'$.

Pour le deuxième point, $v_2 \parallel \ell$ et bien entendu $\ell' \parallel \ell$. Donc $v_2 \parallel \ell'$.

Soit ℓ_0 la droite parallèle à ℓ et ℓ' et passant par l'origine. Soit aussi le vecteur w tel que $\ell = \ell_0 + w$. Alors nous avons

$$\begin{cases} \sigma_{\ell} = \sigma_{\ell_0} + 2w & (12.210a) \\ \sigma_{\ell'} = \sigma_{\ell_0} + 2w + v_1 & (12.210b) \end{cases}$$

Nous avons

$$(\tau_v \circ \sigma_{\ell})(x) = v + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w \quad (12.211)$$

et

$$(\tau_{v_2} \circ \sigma_{\ell'})(x) = v_2 + \sigma_{\ell_0}(x) + 2w + v_1 \quad (12.212a)$$

$$= \sigma_{\ell_0}(x) + v + 2w \quad (12.212b)$$

où dans la dernière ligne, nous avons regroupé $v_1 + v_2 = v$. Et voilà. □

12.4.4 Isométries dans $\mathbb{R}^n$

Définition 12.60.

Un **hyperplan** de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de dimension $n - 1$.

Lemme-définition 12.61.

Si un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ est donné, et si $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

(1) $x - y \perp H$,

(2) Le segment $[x, y]$ coupe H en son milieu.

La **réflexion** σ_H est l'application $\sigma_H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à x fait correspondre ce y .

Démonstration. Il faut vérifier que les conditions données définissent effectivement un unique point de $\mathbb{R}^n$. Soit H_0 le sous-espace vectoriel parallèle à H et une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de H_0 . Nous complétons cela en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ avec un vecteur e_n . Si $H = H_0 + v$, quitte à décomposer v en une partie parallèle et une partie perpendiculaire à H , nous avons

$$H = H_0 + \lambda e_n \quad (12.213)$$

pour un certain λ .

Une droite passant par x et perpendiculaire à H est de la forme $t \mapsto x + te_n$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors l'unique point de cette droite à être dans H est le point tel que $x_n e_n + te_n = \lambda e_n$, c'est à dire $t = -x_n$. L'unique point y sur cette droite à être tel que $[x, y]$ coupe H en son milieu est celui qui correspond à $t = -2x_n$. □

Notons au passage que cette preuve donne une formule pour σ_H :

$$\sigma_H(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i - x_n e_n. \quad (12.214)$$

Il s'agit donc de changer le signe de la composante perpendiculaire à H .

Lemme 12.62.

Dans cette même base si H_0 est l'hyperplan parallèle à H et passant par l'origine, nous écrivons $H = H_0 + \lambda e_n$ pour un certain λ . Alors

$$\sigma_H = \sigma_{H_0} + 2\lambda e_n. \quad (12.215)$$

Démonstration. Un élément $x \in \mathbb{R}^n$ peut être décomposé dans la base adéquate en $x = x_H + x_n e_n$. Nous savons de la formule (12.214) que

$$\sigma_H(x) = x_H - x_n e_n. \quad (12.216)$$

Mais vu que $\sigma_{H_0}(x_H) = x_H - 2\lambda e_n$ nous avons

$$\sigma_{H_0}(x) + 2\lambda e_n = \sigma_{H_0}(x_H + x_n e_n) + 2\lambda e_n = x_H - 2\lambda e_n - x_n e_n + 2\lambda e_n = x_H - x_n e_n. \quad (12.217)$$

□

Le lemme suivant est une généralisation du fait que tous les points de la médiatrice d'un segment sont à égale distance des deux extrémités du segment (très utile lorsqu'on étudie les triangles isocèles).

Lemme 12.63 ([142]).

Soient deux points distincts $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $H \subset \mathbb{R}^n$ donné par

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } d(x, x_0) = d(x, y_0)\}. \quad (12.218)$$

Alors H est l'hyperplan orthogonal au vecteur $v = y_0 - x_0$ et H passe par le milieu du segment $[x_0, y_0]$.

Démonstration. Nous savons que

$$d(x, x_0)^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \|x\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x, x_0 \rangle, \quad (12.219)$$

ou encore

$$\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2 = 2\langle x, x_0 - y_0 \rangle. \quad (12.220)$$

En posant $v = y_0 - x_0$ et en considérant la forme linéaire

$$\begin{aligned} \beta: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, v \rangle, \end{aligned} \quad (12.221)$$

Nous avons $x \in H$ si et seulement si $\beta(x) = \frac{1}{2}(\|y_0\|^2 - \|x_0\|^2) = \lambda$. En d'autres termes, $H = \beta^{-1}(\lambda)$. Par la proposition 8.19 la partie H est un sous-espace affine. C'est même un translaté de $\ker(\beta)$, et comme $\ker(\beta)$ est l'espace vectoriel des vecteurs perpendiculaires à v , nous avons $\dim(H) = \dim(\ker(\beta)) = n - 1$.

Le fait que H contienne le milieu du segment $[x_0, y_0]$ est par définition. $\square$

Pour le lemme suivant, et pour que la récurrence se passe bien nous disons que l'ensemble vide est un espace vectoriel de dimension -1 .

Lemme 12.64.

Si $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ satisfait

$$\dim(\text{Fix}(f)) = n - k \quad (12.222)$$

alors f peut être écrit comme composition d'au plus k réflexions hyperplanes.

Démonstration. Nous faisons une récurrence sur $k \geq 0$.

Pour l'initialisation, si $k = 0$ alors $\dim(\text{Fix}(f)) = n$, c'est à dire que f fixe tout $\mathbb{R}^n$, autant dire que f est l'identité, une composition de zéro réflexions.

Pour la récurrence, nous supposons que le lemme est démontré jusqu'à $k \geq 0$. Soit donc $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\dim(\text{Fix}(f)) = n - (k + 1). \quad (12.223)$$

Vu que $k \geq 0$, la dimension de $\text{Fix}(f)$ est strictement plus petite que n , donc il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) \neq x_0$. Nous posons

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } d(x, x_0) = d(x, f(x_0))\}. \quad (12.224)$$

Par le lemme 12.63, ce H est l'hyperplan orthogonal à $v = f(x_0) - x_0$ et passant par le milieu du segment $[x_0, f(x_0)]$.

Nous posons $g = \sigma_H \circ f$. Vu que $g(x_0) = \sigma_H(f(x_0)) = x_0$, ce x_0 est un point fixe de g . Le fait que $\sigma_H(f(x_0)) = x_0$ est vraiment la définition de l'hyperplan H .

Nous avons donc

$$x_0 \in \text{Fix}(g) \setminus \text{Fix}(f). \quad (12.225)$$

Mais nous prouvons de plus que $\text{Fix}(f) \subset \text{Fix}(g)$. En effet si $y \in \text{Fix}(f)$ alors $y \in H$ parce que

$$d(y, x_0) = d(f(y), f(x_0)) = d(y, f(x_0)). \quad (12.226)$$

Vu que $y \in H$ nous avons $y \in \text{Fix}(g)$ parce que

$$g(y) = \sigma_H(f(y)) = \sigma_H(y) = y. \quad (12.227)$$

Tout cela pour dire que l'ensemble $\text{Fix}(g)$ est *strictement* plus grand que $\text{Fix}(f)$. Et comme ce sont des espaces affines nous pouvons parler de dimension :

$$\dim(\text{Fix}(g)) > \dim(\text{Fix}(f)). \quad (12.228)$$

Par hypothèse de récurrence, l'application g peut être écrite comme composition de k réflexions. Donc l'application

$$f = \sigma_H \circ g \quad (12.229)$$

est une composition de $k + 1$ réflexions. $\square$

Lemme 12.65.

Soit un hyperplan H et un vecteur v de $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1} = \sigma_{\tau_v(H)}. \quad (12.230)$$

Démonstration. Pour ce faire nous considérons une base adaptée. Les vecteurs $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ forment une base orthonormée de H_0 et e_n complète en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit H_0 l'hyperplan parallèle à H et passant par l'origine ; nous avons, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$H = H_0 + \lambda e_n \quad (12.231)$$

D'un autre côté, le vecteur v peut être décomposé en $v = v_1 + v_2$ où $v_1 \perp H$ et $v_2 \parallel H$. Alors

$$\tau_v(H) = H + v = H + v_2 = H_0 + \lambda e_n + v_2. \quad (12.232)$$

Nous pouvons maintenant utiliser le lemme 12.62 pour exprimer la transformation $\sigma_{\tau_v(H)}$:

$$\sigma_{\tau_v(H)}(x) = \sigma_{H_0}(x) + 2\lambda e_n + 2v_2 \quad (12.233)$$

Mais d'autre part,

$$(\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1})(x) = v + \sigma_H(x - v) = v + \sigma_{H_0}(x - v) + 2\lambda e_n. \quad (12.234)$$

Vue la décomposition de $v = v_1 + v_2$ nous avons $\sigma_{H_0}(v) = -v_1 + v_2$ et donc

$$(\tau_v \circ \sigma_H \circ \tau_v^{-1})(x) = v + \sigma_{H_0}(x) + v_1 - v_2 + 2\lambda e_n = \sigma_{H_0}(x) + 2v_1 + 2\lambda e_n. \quad (12.235)$$

Les expressions (12.233) et (12.235) coïncident, d'où l'égalité recherchée. $\square$

Théorème 12.66 ([142]).

Toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ peut être écrite comme composition d'au plus $n + 1$ réflexions.

Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ préserve l'orientation si et seulement si est elle composition d'un nombre pair de réflexions.

Démonstration. La première partie de ce théorème n'est rien d'autre que le lemme 12.64 parce que le pire cas est celui où le fixateur de f est réduit à l'ensemble vide, et dans ce cas l'application f est une composition de $n + 1$ réflexions.

Pour la seconde partie nous définissons

$$\begin{aligned} \epsilon: \text{Isom}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \{\pm 1\} \\ \tau_v \circ \alpha &\mapsto \det(\alpha) \end{aligned} \quad (12.236)$$

où nous nous référons à la décomposition unique d'un élément de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ sous la forme $\tau_v \circ \alpha$ avec $\alpha \in O(n)$ donnée par le théorème 12.44(3).

Le noyau de ϵ est alors la partie

$$\ker(\epsilon) = \mathbb{R}^n \times_{\mathbf{Ad}} \text{SO}(n). \quad (12.237)$$

Une isométrie f préserve l'orientation si et seulement si $\epsilon(f) = 1$. Vu que toutes les isométries sont des composition de réflexions (première partie), il nous suffit de montrer que $\epsilon(\epsilon_H) = -1$ pour qu'une isométrie préserve l'orientation si et seulement si elle est composition d'un nombre pair de réflexions.

Nous commençons par prouver que pour tout vecteur v , $\epsilon(\sigma_H) = \epsilon(\sigma_{\tau_v(H)})$. Pour cela nous utilisons le lemme 12.65 et le fait que ϵ est un homomorphisme :

$$\epsilon(\sigma_{\tau_v(H)}) = \epsilon(\tau_v)\epsilon(\sigma_H)\epsilon(\tau_v^{-1}) = \epsilon(\sigma_H) \quad (12.238)$$

parce que la partie linéaire d'une translation est l'identité (et donc $\epsilon(\tau_v) = 1$ pour tout v).

Nous avons donc $\epsilon(\sigma_H) = \epsilon(\sigma_{H_0})$. En ce qui concerne σ_{H_0} , dans la base adaptée la matrice est

$$\sigma_{H_0} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (12.239)$$

dont le déterminant est -1 . □

Pour en savoir plus sur le groupe des isométries, il faut lire le théorème de Cartan-Dieudonné dans [176].

12.4.5 Groupes finis d'isomorphismes

Définition 12.67.

Si X est une partie finie de $\mathbb{R}^n$, le **barycentre** de X est le point

$$B_X = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} x \quad (12.240)$$

où $|X|$ est le cardinal de X .

Cela est à mettre en relation avec la définition dans le cadre affine 8.21.

Lemme 12.68 ([142]).

Soit une partie finie X de $\mathbb{R}^n$ et une application affine $f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f(B_X) = B_{f(X)}. \quad (12.241)$$

Démonstration. Nous savons que toute application affine est une composée de translation et d'une application linéaire : $f = \tau_v \circ g$ avec $v \in \mathbb{R}^n$ et $g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Nous vérifions le résultat séparément pour τ_v et pour g .

D'une part,

$$B_{\tau_v(X)} = \frac{1}{|\tau_v(X)|} \sum_{y \in \tau_v(X)} y = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} (x + v) = B_X + \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} v = B_X + v = \tau_v(B_X). \quad (12.242)$$

Nous avons utilisé le fait que X et $\tau_v(X)$ possèdent le même nombre d'éléments, ainsi que le fait d'avoir une somme de $|X|$ termes tous égaux à v .

D'autre part,

$$B_{g(X)} = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} g(x) = g\left(\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} x\right) = g(B_X) \quad (12.243)$$

où nous avons utilisé la linéarité de g dans tous ses retranchements. □

Proposition 12.69.

Points fixes d'un sous-groupe.

- (1) Soit H un sous-groupe finie de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(v) = v$ pour tout $f \in H$.
- (2) Si H est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ n'acceptant pas de points fixes, alors il est infini.

Démonstration. Le groupe H agit sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$ nous pouvons considérer son orbite Hx , qui est une partie finie de $\mathbb{R}^n$. Considérons son barycentre

$$v = B_{Hx} \quad (12.244)$$

Soit $f \in H$. Alors $f(v) = f(B_{Hx}) = B_{f(Hx)} = B_{Hx} = v$, donc v est fixé par H .

La seconde affirmation n'est rien d'autre que la contraposée de la première. $\square$

Proposition 12.70.

À propos de groupes finis d'isométries.

- (1) Tout sous groupe finie de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe à un sous-groupe fini de $O(n)$.
- (2) Tout sous-groupe fini de $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe à un sous-groupe fini de $SO(n)$.

Démonstration. Soit H un sous-groupe fini de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ un élément fixé par H (comme garantit par la proposition 12.69). Nous posons

$$\begin{aligned} \phi: H &\rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \tau_v^{-1} \circ f \circ \tau_v. \end{aligned} \quad (12.245)$$

ϕ est un homomorphisme Les opération du type $\phi = \mathbf{Ad}(\tau_v)$ sont toujours des homomorphismes.

ϕ consiste à extraire la partie linéaire Si $f = \tau_w \circ g$ alors

$$\phi(f)(x) = (\tau_{-v} \circ \tau_w \circ g \circ \tau_v)(x) \quad (12.246a)$$

$$= \tau_{w-v}(g(x) + g(v)) \quad (12.246b)$$

$$= g(x) + g(v) - v + w \quad (12.246c)$$

Mais $g(v) + w = f(v)$ et nous savons que $f(v) = v$. Donc il ne reste que $\phi(f)(x) = g(x)$.

ϕ est injective Si $f = \tau_w \circ g$ vérifie $\phi(f) = \text{Id}$, il faut en particulier que $g = \text{Id}$. Mais H est fini et ne peut donc pas contenir de translations non triviales. Donc $w = 0$ et $f = \text{Id}$.

Donc ϕ est une injection à valeur dans les transformation linéaires de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, ϕ est un isomorphisme entre H et son image, laquelle image est dans $O(n)$.

En ce qui concerne la seconde partie, si $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi(f)$ y est aussi, tout en étant linéaire. Donc $\phi(f) \in SO(n)$. $\square$

L'extraction de la partie linéaire est injective ? Certe c'est prouvé, mais on peut se demander ce qu'il se passe si H contient deux éléments qui ont la même partie linéaire. Cela n'est pas possible parce si $f_1 = \tau_{w_1} \circ g$ et $f_2 = \tau_{w_2} \circ g$ sont dans H alors $f_1 f_2^{-1} = \tau_{w_1 + w_2}$ est également dans H , ce qui n'est pas possible si H est fini.

Définition 12.71 (Groupe de symétrie d'une partie de $\mathbb{R}^n$ [142]).

Si Y est une partie de $\mathbb{R}^n$, nous définissons le **groupe des symétries** de Y par

$$\text{Sym}(Y) = \{f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } f(Y) = Y\}. \quad (12.247)$$

Nous définissons aussi le **groupe des symétries propres** de Y par

$$\text{Sym}^+(Y) = \{f \in \text{Isom}^+(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } f(Y) = Y\}. \quad (12.248)$$

Théorème 12.72 ([142]).

Soit $Y \subset \mathbb{R}^2$ tel que le groupe $\text{Sym}^+(Y)$ soit fini d'ordre n . Alors c'est un groupe cyclique d'ordre n .

Si $\text{Sym}^+(Y)$ est fini, alors $\text{Sym}(Y)$ est soit cyclique d'ordre n soit isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$.

Démonstration. Nous savons déjà par la proposition 12.70 que $\text{Sym}^+(Y)$ est isomorphe à un sous-groupe H^+ d'ordre n de $\text{SO}(2)$. Vérifions que ce groupe est cyclique. Si $n = 1$, c'est évident. Si $n \geq 2$ alors nous savons que H^+ est constitué de rotations d'angles dans $[0, 2\pi[$ et vu que c'est un ensemble fini, il possède une rotation d'angle minimal (à part zéro). Notons α_0 cet angle.

Nous montrons que H^+ est engendré par la rotation d'angle α_0 . Soit une rotation d'angle α . Étant donné que $\alpha_0 < \alpha$ nous pouvons effectuer la division euclidienne²⁶ de α par α_0 et obtenir

$$\alpha = k\alpha_0 + \beta \quad (12.249)$$

avec $\beta < \alpha_0$. Mézalors $R(\beta) = R(\alpha)R(\alpha_0)^{-k}$ est également un élément du groupe. Cela contredit la minimalité dès que $\beta \neq 0$. Avoir $\beta = 0$ revient à dire que α est un multiple de α_0 , ce qui signifie que le groupe H^+ est cyclique engendré par α_0 .

Notons au passage que nous avons automatiquement $\alpha_0 = \frac{2\pi}{n}$ parce qu'il faut $R(\alpha_0)^n = \text{Id}$. Nous avons prouvé que $\text{Sym}^+(Y)$ est cyclique d'ordre n .

Nous étudions maintenant le groupe $\text{Sym}(Y)$. Par la proposition 12.70 nous avons un homomorphisme injectif

$$\phi: \text{Sym}(Y) \rightarrow \text{O}(2), \quad (12.250)$$

et en posant $H = \phi(\text{Sym}(Y))$ nous avons un isomorphisme de groupes $\phi: \text{Sym}(Y) \rightarrow H$. Nous savons aussi que ce ϕ se restreint en

$$\phi: \text{Sym}^+(Y) \rightarrow H^+ \subset \text{SO}(2) \quad (12.251)$$

où $H^+ = \phi(\text{Sym}^+(Y)) = H \cap \text{SO}(2)$. Le groupe H^+ est cyclique et est engendré par la rotation $R(2\pi/n)$.

Supposons un instant que $H \subset \text{SO}(2)$. Alors nous avons $H = H^+$ et ϕ est un isomorphisme entre $\text{Sym}(Y)$ et le groupe cyclique engendré par $R(2\pi/n)$.

Nous supposons à présente que H n'est pas un sous-ensemble de $\text{SO}(2)$. Quelles sont les isométries de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas de déterminant 1 ? Il faut regarder dans le théorème 12.59 quelles sont les isométries contenant un nombre impair de réflexions. Ce sont les réflexions et les réflexions glissées. Or il ne peut pas y avoir de réflexions glissées dans un groupe fini parce que si f est une réflexion glissée, tous les f^k sont différents.

Nous en déduisons que si H n'est pas inclus à $\text{SO}(2)$, il contient une réflexion que nous nommons σ . Nous allons en déduire que $H \simeq H^+ \times_{\text{Ad}} C_2$ où $C_2 = \{\text{Id}, \sigma\}$. Si $h \in H$ nous pouvons écrire

$$h = (h\sigma^\epsilon)\sigma^\epsilon \quad (12.252)$$

pour n'importe quelle valeur de ϵ , et en particulier pour $\epsilon = \pm 1$.

Si $h \in \text{SO}(2)$ alors nous écrivons $h = h\epsilon^0$ et si $h \notin \text{SO}(2)$ nous écrivons $h = (h\sigma)\sigma$. Vu que $h\sigma \in \text{SO}(2)$, cette dernière écriture est encore de la forme $\text{SO}(2) \times C_2$. Quoi qu'il en soit tout élément de H s'écrit comme un produit

$$H = H^+ C_2. \quad (12.253)$$

Cette décomposition est unique parce que si $h_1 c_1 = h_2 c_2$ alors $h_2^{-1} h_1 = c_2 c_1^{-1}$, et comme $h_2^{-1} h_1 \in H^+$ nous avons $c_2 c_1^{-1} \in H^+$ et donc $c_1 = c_2$. Partant nous avons aussi $h_1 = h_2$. Pour avoir le produit semi-direct il faut encore montrer que $\text{Ad}(C_2)H^+ \subset H^+$. Le seul cas à vérifier est $\text{Ad}(\sigma)H^+ \subset H^+$. Vu que les éléments de H^+ sont caractérisés par le fait d'avoir un déterminant positif, nous avons

$$\text{Ad}(\sigma)R(\alpha) = \sigma R(\alpha)\sigma^{-1} \in H^+. \quad (12.254)$$

□

26. Théorème 2.22.

Remarque 12.73.

Tout ceci est cohérent avec le théorème de Burnside 6.357 parce que le sous-groupe fini de $SO(n)$ engendré par la rotation $R(2\pi/n)$ est un groupe d'exposant fini, à savoir que si h est dans ce groupe, $h^n = \text{Id}$.

12.4.6 Théorème de Sylvester**Théorème 12.74** (de Sylvester).

Soit Q une forme quadratique réelle de signature (p, q) . Alors pour toute base orthonormée on a

$$p = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} \quad (12.255a)$$

$$q = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) < 0\}. \quad (12.255b)$$

Le rang de Q est $p + q$.

Si A est la matrice de Q dans une base, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_q & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.256)$$

12.4.7 Groupe diédral**12.4.7.1 Définition et générateurs : vue géométrique****Définition 12.75.**

Le **groupe diédral** D_n est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ laissant invariant un polygone régulier à n côtés.

Le groupe diédral peut être vu comme le stabilisateur de l'ensemble

$$\{e^{2ik\pi/n}, k = 0, \dots, n-1\} \quad (12.257)$$

dans le groupe des isométries affines de $\mathbb{C}^*$.

Si $f \in D_n$, alors $f(e^{2ik\pi/n})$ doit être l'un des $e^{2ik'\pi/n}$, et vu que f conserve les longueurs dans $\mathbb{C}$, nous devons avoir

$$1 = d(0, e^{2ik\pi/n}) = d(f(0), e^{2ik'\pi/n}). \quad (12.258)$$

Donc $f(0)$ est à l'intersection de tous les cercles de rayon 1 centrés en les $e^{2ik\pi/n}$, ce qui montre que $f(0) = 0$ (dès que $n \geq 3$). Par conséquent notre étude du groupe diédral ne doit prendre en compte que les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes

$$D_n \subset O(2, \mathbb{R}). \quad (12.259)$$

Proposition 12.76 ([177]).

Le groupe D_n contient un sous groupe cyclique d'ordre 2 et un sous groupe cyclique d'ordre n .

Démonstration. Si s est la réflexion d'axe $\mathbb{R}$, alors s est d'ordre 2. De plus s est bien dans D_n parce que

$$s(e^{2ki\pi/n}) = e^{2(n-k)i\pi/n}. \quad (12.260)$$

De la même façon, la rotations d'angle $2\pi/n$, que l'on note r , agit sur les racines de l'unité et engendre un le groupe d'ordre n des rotations d'angle $2k\pi/n$. $\square$

Notons que la conjugaison complexe ne fait pas spécialement partie du groupe D_n . En effet pour $n = 3$ par exemple les points fixes sont $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $A_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. La conjugaison complexe envoie évidemment A_1 sur A_1 , mais pas du tout A_2 sur A_3 .

Proposition 12.77 ([177]).

Nous avons $(sr)^2 = \text{Id}$.

Démonstration. Si $z^n = 1$, alors

$$(sr sr)z = sr se^{2i\pi/n} z = sr(e^{-2\pi i/n} \bar{z}) = s\bar{z} = z. \quad (12.261)$$

□

Proposition 12.78 ([177]).

Le groupe diédral D_n est engendré par s et r . De plus tous les éléments de D_n s'écrivent sous la forme $s \circ r^m$.

Démonstration. Nous considérons les points $A_0 = 1$ et $A_k = e^{2ki\pi/n}$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Par convention, $A_n = A_0$. L'action des éléments s et r sur ces points est

$$r(A_k) = A_{k+1} \quad (12.262a)$$

$$s(A_k) = A_{n-k}. \quad (12.262b)$$

Cette dernière est l'équation (12.260).

Soit $f \in D_n$. Étant donné que c'est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ avec un point fixe (le point 0), f est soit une rotation soit une réflexion.

Supposons pour commencer que un des A_k est fixé par f . Dans ce cas f a deux points fixes : O et A_k et est donc la réflexion d'axe (OA_k) . Dans ce cas, nous avons $f = s \circ r^{n-2k}$. En effet

$$s \circ r^{n-2k}(A_k) = s(A_{k+n-2k}) = s(A_{n-k}) = A_k. \quad (12.263)$$

Donc O et A_k sont deux points fixes de l'isométrie f ; donc f est bien la réflexion sur le bon axe.

Nous passons à présent au cas où f ne fixe aucun des A_k .

(1) Supposons que f soit une rotation. Si $f(A_k) = A_m$, alors l'angle de la rotation est

$$\frac{2(m-k)\pi}{n}, \quad (12.264)$$

et donc $f = r^{m-k}$, qui est de la forme demandée.

(2) Supposons à présent que f soit une réflexion d'axe Δ . Cette fois, Δ ne passe par aucun des points A_k , par contre Δ passe par 0. Nous commençons par montrer que Δ doit être la médiatrice d'un des côtés $[A_p, A_{p+1}]$ du polygone. Vu que Δ passe par O et n'est aucune des droites (OA_k) , cette droite passe par l'intérieur d'un des triangles $OA_p A_{p+1}$ et intersecte donc le côté correspondant.

Notre tâche est de montrer que Δ coupe $[A_p, A_{p+1}]$ en son milieu. Dans ce cas, Δ sera automatiquement perpendiculaire parce que le triangle $OA_p A_{p+1}$ est isocèle en O . Nommons l la longueur des côtés du polygone, $P = \Delta \cap [A_p, A_{p+1}]$, $x = d(A_p, P)$ et $\delta = d(A_p, \Delta)$. Vu que f est la symétrie d'axe Δ , nous avons aussi $d(f(A_p), \Delta) = \delta$ et $d(A_p, f(A_p)) = 2\delta$. D'autre part, par la définition de la distance, $\delta < x$. Si $x < \frac{l}{2}$, alors $\delta < \frac{\delta}{2}$ et donc $d(A_p, f(A_p)) < l$. Or cela est impossible parce que le polygone ne possède aucun sommet à distance plus courte que l de A_p .

De la même manière si $x > \frac{l}{2}$, nous raisonnons avec A_{p+1} pour obtenir une contradiction. Nous en concluons que la seule possibilité est $x = \frac{l}{2}$, et donc $f(A_p) = A_{p+1}$. Montrons alors que $f = s \circ r^{n-2p-1}$. Il faut montrer que c'est une réflexion qui envoie A_p sur A_{p+1} . D'abord c'est une réflexion parce que

$$\det(sr^{n-2p-1}) = \det(s) \det(r^{n-2p-1}) = -1 \quad (12.265)$$

parce que $\det(s) = -1$ alors que $\det(r^k) = 1$ parce que r est une rotation dans $\text{SO}(2)$. Ensuite nous avons

$$s \circ r^{n-2p-1}(A_p) = s(A_{p+n-2p-1}) = s(A_{n-p-1}) = A_{n-(n-p-1)} = A_{p+1}. \quad (12.266)$$

Donc $s \circ r^{n-2p-1}$ est bien une réflexion qui envoie A_p sur A_{p+1} .

□

Corollaire 12.79.

La liste des éléments de D_n est

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \quad (12.267)$$

et $|D_n| = 2n$.

Démonstration. Nous savons par la proposition 12.78 que tous les éléments de D_n s'écrivent sous la forme r^k ou sr^k . Vu que r est d'ordre n , il ne faut considérer que $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Les éléments $1, r, \dots, r^{n-1}$ sont tous différents, et sont (pour des raisons de déterminant) tous différents des sr^k . Les isométries sr^k sont toutes différentes entre elles pour essentiellement la même raison :

$$sr^k(A_p) = s(A_{p+k}) = A_{n-p+k} \quad (12.268)$$

donc si $k \neq k'$, $sr^k(A_p) \neq sr^{k'}(A_p)$. La liste des éléments de D_n est donc

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \quad (12.269)$$

et donc $|D_n| = 2n$. □

Exemple 12.80

Nous considérons le carré $ABCD$ dans $\mathbb{R}^2$ et nous cherchons les isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent le carré invariant. Nous nommons les points comme sur la figure 12.1. La symétrie d'axe vertical est nommée s et la rotation de 90 degrés est notée r .

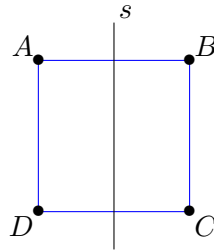


FIGURE 12.1 – Le carré dont nous étudions le groupe diédral.

Il est facile de vérifier que toutes les symétries axiales peuvent être écrites sous la forme $r^i s$. De plus le groupe engendré par s agit sur le groupe engendré par r parce que

$$(srs^{-1})(A, B, C, D) = sr(B, A, D, C) = s(A, D, C, B) = (B, C, D, A), \quad (12.270)$$

c'est à dire $srs^{-1} = r^{-1}$. Nous sommes alors dans le cadre du corollaire 2.87 et nous pouvons écrire que

$$D_4 = \text{gr}(r) \times_{\sigma} \text{gr}(s). \quad (12.271)$$

△

12.4.7.2 Générateurs : vue abstraite

Nous allons montrer que D_n peut être décrit de façon abstraite en ne parlant que de ses générateurs. Nous considérons un groupe G engendré par des éléments a et b tels que

- (1) a est d'ordre 2,
- (2) b est d'ordre n avec $n \geq 3$,
- (3) $abab = e$.

Nous allons prouver que ce groupe doit avoir la même liste d'éléments que celle du corollaire 12.79.

Proposition 12.81 ([177]).

Le groupe G n'est pas abélien.

Démonstration. Nous savons que $abab = e$, donc $abab^{-1} = b^{-2}$, mais $b^{-2} \neq e$ parce que b est d'ordre $n > 2$. Donc $abab^{-1} \neq e$. En manipulant un peu :

$$e \neq abab^{-1} = (ab)(ba^{-1})^{-1} = (ab)(ba)^{-1} \quad (12.272)$$

parce que $a^{-1} = a$. Donc $ab \neq ba$. □

Lemme 12.82 ([177]).

Pour tout k entre 1 et $n - 1$ nous avons

$$Ad(a)b^k = ab^ka^{-1} = ab^ka = b^{-k}. \quad (12.273)$$

Démonstration. Nous faisons la démonstration par récurrence. D'abord pour $k = 1$, nous devons avoir $aba = b^{-1}$, ce qui est correct parce que par construction de G nous avons $abab = e$. Ensuite nous supposons que le lemme tient pour k et nous regardons ce qu'il se passe avec $k + 1$:

$$ab^{k+1}ba = ab^kba = \underbrace{ab^ka}_{b^{-k}} \underbrace{aba}_{b^{-1}} = b^{-k}b^{-1} = b^{-(k+1)}. \quad (12.274)$$

□

Proposition 12.83.

L'élément a n'est pas une puissance de b .

Démonstration. Supposons le contraire : $a = b^k$. Dans ce cas nous aurions

$$e = (ab)(ab) = b^{k+1}b^{k+1} = b^{2k+2} = b^{2k}b^2 = a^2b^2 = b^2, \quad (12.275)$$

ce qui signifierait que b est d'ordre 2, ce qui est exclu par construction. □

Proposition 12.84 ([177]).

La liste des éléments de G est donnée par

$$G = \{1, b, \dots, b^{n-1}, a, ab, \dots, ab^{n-1}\} = \{a^\epsilon b^k\}_{\substack{\epsilon=0,1 \\ k=0,\dots,n-1}} \quad (12.276)$$

Les éléments de ces listes sont distincts.

Démonstration. Étant donné que a n'est pas une puissance de b , les éléments $1, a, b, \dots, b^{n-1}$ sont distincts. De plus si k et $m = k + p$ sont deux éléments distincts de $\{1, \dots, n - 1\}$, nous avons $ab^k \neq ab^m$ parce que si $ab^k = ab^{k+p}$, alors $a = ab^p$ avec $p < n$, ce qui est impossible. Pour la même raison, $ab^k \neq e$, et $ab^k \neq b^m$.

Au final les éléments $1, a, b, \dots, b^{n-1}, ab, \dots, ab^{n-1}$ sont tous différents. Nous devons encore voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Par définition le groupe G est engendré par a et b , donc tout élément $x \in G$ s'écrit $x = a^{m_1}b^{k_1} \dots a^{m_r}b^{k_r}$ pour un certain r et avec pour tout i , $k_i \in \{1, \dots, n - 1\}$ (sauf k_r qui peut être égal à zéro) et $m_i = 1$, sauf m_1 qui peut être égal à zéro. Donc

$$x = a^m b^{k_1} a b^{k_2} a \dots b^{k_{r-1}} a b^{k_r} \quad (12.277)$$

où m et k_r peuvent éventuellement être zéro. En utilisant le lemme 12.82 sous la forme $b^{k_i}a = ab^{-k_i}$, quitte à changer les valeurs des exposants, nous pouvons passer tous les a à gauche et tous les b à droite pour finir sous la forme $x = a^k b^m$.

Donc non, il n'existe pas d'autres éléments dans G que ceux déjà listés. □

Lemme 12.85 ([8]).

Tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme $a^\epsilon b^k$ ou $b^k a^\epsilon$ avec $\epsilon = 0, 1$ et $k = 0, \dots, n - 1$.

Démonstration. Nous commençons par la forme $a^\epsilon b^k$. L'existence est la proposition 12.84. Pour l'unicité nous supposons $a^\epsilon b^k = a^\sigma b^l$ et nous décomposons en 4.

$\epsilon = 0, \sigma = 0$ Alors $b^k = b^l$. Mais b étant d'ordre n et k, l étant égaux au maximum à $n-1$, cette égalité implique $k = l$.

$\epsilon = 0, \sigma = 1$ Alors $b^k = ab^l$, ce qui donne $a = b^{k-l}$, ce qui est interdit par la proposition 12.83.

$\epsilon = 1, \sigma = 0$ Même problème.

$\epsilon = 1, \sigma = 1$ Encore une fois $b^k = b^l$ implique $k = l$.

En ce qui concerne la forme $b^k a^\epsilon$, l'existence est à montrer. Soit l'élément $g = a^\epsilon b^k$ et cherchons à le mettre sous la forme $b^l a^\sigma$. Si $\epsilon = 0$ c'est évident. Sinon $\epsilon = 1$ et nous avons par le lemme 12.82

$$ab^k = b^{-k} a^{-1} = b^{-k} b^n a = b^{-k} a. \quad (12.278)$$

En ce qui concerne l'unicité, nous refaisons 4 cas pour $b^k a^\epsilon = b^l a^\sigma$ comme précédemment et ils se traitent exactement comme précédemment. $\square$

Théorème 12.86.

Les groupes G et D_n sont isomorphes.

Démonstration. Nous utilisons l'application

$$\begin{aligned} \psi: G &\rightarrow D_n \\ a^k b^m &\mapsto s^k r^m. \end{aligned} \quad (12.279)$$

C'est évidemment bien défini et bijectif, mais c'est également un homomorphisme parce que si nous calculons ψ sur un produit, nous devons comparer

$$\psi(a^{k_1} b^{m_1} a^{k_2} b^{m_2}) \quad (12.280)$$

avec

$$\psi(a^{k_1} b^{m_1}) \psi(a^{k_2} b^{m_2}) = s^{k_1} r^{m_1} s^{k_2} r^{m_2}. \quad (12.281)$$

Vu que D_n et G ont les mêmes propriétés qui permettent de permuter a et b ou s et r , l'expression à l'intérieur du ψ dans (12.280) se simplifie en $a^k b^m$ avec les mêmes k et n que l'expression à droite dans (12.281) ne se simplifie en $s^k r^m$. $\square$

Corollaire 12.87.

Toutes les propriétés démontrées pour G sont vraies pour D_n . En particulier, avec quelques redites :

- (1) *Le groupe D_n peut être défini comme étant le groupe engendré par un élément s d'ordre 2 et un élément r d'ordre $n-1$ assujettis à la relation $sr sr = e$.*
- (2) *Le groupe D_n n'est pas abélien.*
- (3) *Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ nous avons $sr^k s = r^{-k}$.*
- (4) *L'élément s ne peut pas être obtenu comme une puissance de r .*
- (5) *La liste des éléments de D_n est*

$$D_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} \quad (12.282)$$

- (6) *Le groupe diédral D_n est d'ordre $2n$.*

Proposition 12.88.

En posant $C_n = \{r^k\}_{k=0, \dots, n-1}$ et $C_2 = \{a^\epsilon\}_{\epsilon=0,1}$, nous pouvons exprimer D_n comme le produit semi-direct

$$D_n = C_n \rtimes_\rho C_2 \quad (12.283)$$

où ρ désigne l'action adjointe.

Démonstration. L'isomorphisme est :

$$\begin{aligned}\psi: C_n \times_{\rho} C_2 &\rightarrow D_n \\ (b^k, a^{\epsilon}) &\mapsto b^k a^{\epsilon}.\end{aligned}\quad (12.284)$$

Action adjointe L'application $\rho_{a^{\epsilon}} = \mathbf{Ad}(a^{\epsilon})$ est toujours un homomorphisme. Vu que a^{ϵ} est soit e soit a , nous allons nous restreindre à a et oublier l'exposant ϵ . Il faut montrer que $\mathbf{Ad}(a) \in \text{Aut}(C_n)$. En utilisant le lemme 12.82,

$$\mathbf{Ad}(a)b^k = ab^k a^{-1} = b^{-k} = b^{n-k}. \quad (12.285)$$

L'application $\mathbf{Ad}(a): C_n \rightarrow C_n$ est donc bijective et homomorphique. Ergo isomorphisme.

Injectif Si $\psi(b^k, a^{\epsilon}) = \psi(b^l, a^{\sigma})$, alors par unicité du lemme 12.85 nous avons $k = l$ et $\epsilon = \sigma$.

Surjectif Par la partie «existence» du lemme 12.85.

Homomorphisme L'homomorphisme est toujours de mise lorsque l'on prend deux sous-groupes d'un même groupe (ici le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$) et que l'on tente de faire un produit semi-direct en utilisant l'action adjointe. Dans notre cas, le calcul est :

$$\psi((b^k, a^{\epsilon})(b^l, a^{\sigma})) = b^k \rho_{a^{\epsilon}}(b^l) a^{\epsilon+\sigma} = b^k a^{\epsilon} b^l a^{-\epsilon} a^{\epsilon+\sigma} = b^k a^{\epsilon} b^l a^{\sigma} = \psi(b^k, a^{\epsilon}) \psi(b^l, a^{\sigma}). \quad (12.286)$$

□

12.4.7.3 Classes de conjugaison

Pour les classes de conjugaison du groupe diédral nous suivons [178].

D'abord pour des raisons de déterminants²⁷, les classes des éléments de la forme r^k et de la forme sr^k ne se mélangent pas. Nous notons $C(x)$ la classe de conjugaison de x , et $y \cdot x = yxy^{-1}$.

Les relations que nous allons utiliser sont

$$sr^k s = r^{-k} \quad (12.287a)$$

$$rs = sr^{-1} = sr^{n-1}. \quad (12.287b)$$

La classe de conjugaison qui ne rate jamais est bien entendu $C(1) = 1$. Nous commençons les vraies festivités $C(r^m)$. D'abord $r^k \cdot r^m = r^m$, ensuite

$$(sr^k) \cdot r^m = sr^k r^m r^{-k} s^{-1} = sr^m s^{-1} = r^{-m}. \quad (12.288)$$

Donc

$$C(r^m) = \{r^m, r^{-m}\}. \quad (12.289)$$

À ce niveau il faut faire deux remarques. D'abord si $m > \frac{n}{2}$, alors $C(r^m)$ est la classe de C^{n-m} avec $n - m < \frac{n}{2}$. Donc les classes que nous avons trouvées sont uniquement à lister avec $m < \frac{n}{2}$. Ensuite si $m = \frac{n}{2}$ alors $r^m = r^{-m}$ et la classe est un singleton. Cela n'arrive que si n est pair.

Nous passons ensuite à $C(s)$. Nous avons

$$r^k \cdot s = r^k sr^{-k} = s sr^k sr^{-k} = sr^{-k} r^{-k} = sr^{n-2k}, \quad (12.290)$$

et

$$(sr^k) \cdot s = \underbrace{sr^k s}_{r^{-k}} r^{-k} s^{-1} = r^{-2k} s = r^{n-2k} s = sr^{(n-1)(n-2k)} = sr^{n^2-2kn-n+2k} = sr^{2k}. \quad (12.291)$$

donc

$$C(s) = \{sr^{n-2k}, sr^{2k}\}_{k=0, \dots, n-1}. \quad (12.292)$$

²⁷. Vous notez qu'ici nous utilisons un argument qui utilise la définition de D_n comme isométries de $\mathbb{R}^2$. Si nous avions voulu à tout prix nous limiter à la définition «abstraite» en termes de générateurs, il aurait fallu trouver autre chose.

Ici aussi l'écriture n'est pas optimale : peut-être que pour certains k il y a des doublons. Nous reportons l'écriture exacte à la discussion plus bas qui distinguera n pair de n impair. Notons juste que si n est pair, l'élément sr n'est pas dans la classe $C(s)$.

Nous en faisons donc à présent le calcul en gardant en tête le fait qu'il n'a de sens que si n est pair. D'abord

$$s \cdot (sr) = ssrs = rs = sr^{n-1}. \quad (12.293)$$

Ensuite

$$(sr^k) \cdot (sr) = sr^k s r r^{-k} s = r^{-2k+1} s = sr^{2k-1}. \quad (12.294)$$

Avec $k = \frac{n}{2}$, cela rend $s \cdot (sr)$, donc pas besoin de le recopier. Nous avons

$$C(sr) = \{sr^{2k-1}\}_{k=1, \dots, n-1}. \quad (12.295)$$

12.4.7.4 Le compte pour n pair

Si n est pair, nous avons les classes

$$C(1) = \{1\} \quad 1 \text{ élément} \quad (12.296a)$$

$$C(r^m) = \{r^m, r^{m-1}\} \quad \text{pour } 0 < m < \frac{n}{2} \quad \frac{n}{2} - 1 \text{ fois } 2 \text{ éléments} \quad (12.296b)$$

$$C(r^{n/2}) = \{r^{n/2}\} \quad 1 \text{ élément} \quad (12.296c)$$

$$C(s) = \{sr^{2k}\}_{k=0, \dots, \frac{n}{2}-1} \quad \frac{n}{2} \text{ éléments} \quad (12.296d)$$

$$C(sr) = \{sr^{2k+1}\}_{k=0, \dots, \frac{n}{2}-1} \quad \frac{n}{2} \text{ éléments.} \quad (12.296e)$$

Au total nous avons bien listé $2n$ éléments comme il se doit, dans $\frac{n}{2} + 3$ classes différentes.

12.4.7.5 Le compte pour n impair

Si n est impair, nous avons les classes

$$C(1) = \{1\} \quad 1 \text{ élément} \quad (12.297a)$$

$$C(r^m) = \{r^m, r^{m-1}\} \quad \text{pour } 0 < m < \frac{n-1}{2} \quad \frac{n-1}{2} \text{ fois } 2 \text{ éléments} \quad (12.297b)$$

$$C(s) = \{sr^k\}_{k=0, \dots, n-1} \quad n \text{ éléments} \quad (12.297c)$$

Au total nous avons bien listé $2n$ éléments comme il se doit, dans $\frac{n+3}{2}$ classes différentes.

12.4.8 Applications : du dénombrement

12.4.8.1 Le jeu de la roulette

Soit une roulette à n secteurs que nous voulons colorier en q couleurs[179]. Nous voulons savoir le nombre de possibilités à rotations près. Soit d'abord E l'ensemble des coloriages possibles sans contraintes ; il y a naturellement q^n possibilités. Sur l'ensemble E , le groupe cyclique G des rotations d'angle $2\pi/n$ agit. Deux coloriages étant identiques si ils sont reliés par une rotation, la réponse à notre problème est donné par le nombre d'orbites de l'action de G sur E qui sera donnée par la formule du théorème de Burnside 2.66.

Nous devons calculer $\text{Card}(\text{Fix}(g))$ pour tout $g \in G$. Soit g , un élément d'ordre d dans G . Si g agit sur la roulette, chaque secteur a une orbite contenant d éléments. Autrement dit, g divise la roulette en n/d secteurs. Un élément de E appartenant à $\text{Fix}(g)$ doit colorier ces n/d secteurs de façon uniforme ; il y a $q^{n/d}$ possibilités.

Il reste à déterminer le nombre d'éléments d'ordre d dans G . Un élément de G est donné par un nombre complexe de la forme $e^{2ik\pi/n}$. Les éléments d'ordre d sont les racines primitives²⁸ d èmes

28. Une racine non primitive 8ième de l'unité est par exemple i . Certes $i^8 = 1$, mais $i^4 = 1$ aussi. Le nombre i est d'ordre 4.

de l'unité. Nous savons que –par définition– il y a $\varphi(d)$ telles racines primitives de l'unité. Bref il y a $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans G .

La formule de Burnside nous donne maintenant le nombre d'orbites :

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) q^{n/d}. \quad (12.298)$$

Cela est le nombre de coloriage possibles de la roulette à n secteurs avec q couleurs.

12.4.8.2 L'affaire du collier

Nous avons maintenant des perles de q couleurs différentes et nous voulons en faire un collier à n perles. Cette fois non seulement les rotations donnent des colliers équivalents, mais en outre les symétries axiales (il est possible de retourner un collier, mais pas une roulette). Le groupe agissant sur E est maintenant le groupe diédral²⁹ D_n conservant un polygone à n sommets.

Nous devons séparer le cas n impair du cas n pair.

Si n est impair, alors les axes de symétries passent par un sommet par le milieu du côté opposé. Le groupe D_n contient n symétries axiales. Nous avons donc maintenant

$$|G| = 2n. \quad (12.299)$$

Nous écrivons la formule de Burnside

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n} \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g)). \quad (12.300)$$

Si g est une rotation, le travail est déjà fait. Si g est une symétrie, nous avons le choix de la couleur du sommet par lequel passe l'axe et le choix de la couleur des $(n-1)/2$ paires de sommets. Cela fait

$$qq^{(n-1)/2} = q^{\frac{n+1}{2}} \quad (12.301)$$

possibilités. Nous avons donc

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{d|n} q^{n/d} \varphi(d) + nq^{\frac{n+1}{2}} \right). \quad (12.302)$$

Si n est pair, les choses se compliquent un tout petit peu. En plus de symétries axiales passant par un sommet et le milieu du côté opposé, il y a les axes passant par deux sommets opposés. Pour colorier un collier en tenant compte d'une telle symétrie, nous pouvons choisir la couleur des deux perles par lesquelles passe l'axe ainsi que la couleur des $(n-2)/2$ paires de perles. Cela fait en tout

$$q^2 q^{\frac{n-2}{2}} = q^{\frac{n+2}{2}}. \quad (12.303)$$

Le groupe G contient $n/2$ tels axes.

Notons que cette fois G ne contient plus que $n/2$ symétries passant par un sommet et un côté. L'ordre de G est donc encore $2n$. La formule de Burnside donne

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{d|n} \varphi(d) q^{n/d} + \frac{n}{2} q^{(n+2)/2} + \frac{n}{2} q^{n/2} \right). \quad (12.304)$$

29. Définition 12.75.

12.5 Théorèmes de Sylow

Lemme 12.89.

Soient H et K des sous-groupes finis de G . Alors

$$\text{Card}(HK) = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}. \quad (12.305)$$

Attention : dans ce lemme, l'ensemble HK n'est pas spécialement un groupe. Ce serait le cas si H normaliserait K , c'est à dire si nous avons $hkh^{-1} \in K$, $\forall h, k \in H \times K$.

Théorème 12.90 (Théorème de Cauchy).

Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$. Alors

- (1) G contient un élément d'ordre p .
- (2) Si G est un p -groupe, il existe un élément central d'ordre p dans G .

Une preuve du premier point est sur wikipedia.

Lemme 12.91 (Théorème de Cayley).

Si G est un groupe d'ordre n alors il est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n .

Démonstration. L'action à gauche de G sur lui-même

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow S_n \\ \varphi(x)g &\mapsto xg \end{aligned} \quad (12.306)$$

est une permutation des éléments de G . Cela donne un morphisme injectif parce que si $\varphi(x) = \varphi(y)$ nous avons $xg = yg$ pour tout g et en particulier pour $g = e$ nous trouvons $x = y$. $\square$

Lemme 12.92.

Soit p un diviseur premier de n . Alors le groupe symétrique S_n se plonge dans $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{F}_p$. Nous avons le morphisme injectif $\varphi: S_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$ donné par $\varphi(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$. $\square$

Remarque 12.93.

En mettant bout à bout les lemmes 12.91 et 12.92, nous trouvons que si p est un diviseur premier de $|G|$, alors G peut être vu comme un sous-groupe de $\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

Définition 12.94.

Soit p un nombre premier. Un **p -groupe** est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre p^m pour un certain m (dépendant de l'élément).

Soit G un groupe fini et p , un diviseur premier de $|G|$. Un **p -Sylow** dans G est un p -sous-groupe d'ordre p^n où p^n est la plus grande puissance de p divisant $|G|$.

Notons que si p est un nombre premier, alors tout groupe d'ordre p^m est un p -groupe.

Lemme 12.95.

Soit G un groupe fini et P, Q des p -sous-groupes. Nous supposons que Q normalise P . Alors PQ est un p -sous-groupe de G .

Si S est un p -Sylow, alors p ne divise pas le nombre $|G : S| = |G|/|S|$.

Proposition 12.96.

Soit le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier). Soit T le sous-ensemble de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures de rang³⁰ n et dont les éléments diagonaux sont 1. Alors T est un p -Sylow de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

30. Définition 6.12.

Démonstration. Nous commençons par étudier le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Pour la première colonne, la seule contrainte à vérifier est qu'elle ne soit pas nulle. Il y a donc $p^n - 1$ possibilités. Pour la seconde, il faut ne pas être multiple de la première. Il y a donc $p^n - p$ possibilités (parce qu'il y a p multiples possibles de la première colonne). Pour la k -ième colonne, il faut éviter toutes les combinaisons linéaires des $(k-1)$ premières colonnes. Il y a p^{k-1} telles combinaisons et donc $p^n - p^{k-1}$ possibilités pour la k -ième colonne. Nous avons donc

$$\mathrm{Card}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)) = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1}) \quad (12.307a)$$

$$= p \cdot p^2 \dots p^{n-1} (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p - 1) \quad (12.307b)$$

$$= p^{\frac{n(n-1)}{2}} m \quad (12.307c)$$

où m est un entier qui ne divise pas p .

En ce qui concerne le cardinal de T , le calcul est plus simple : pour la première ligne nous avons p^{n-1} choix (parce qu'il y a un 1 qui est imposé sur la diagonale), pour la seconde p^{n-2} , etc. En tout nous avons alors

$$|T| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (12.308)$$

et T est un p -Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. $\square$

Proposition 12.97.

Soit p un nombre premier. Un groupe fini G est un p -groupe si et seulement l'ordre de G est p^n pour un certain n .

Démonstration. Supposons que G est un p -groupe. Soit q un nombre premier divisant $|G|$. Par le théorème de Cauchy (12.90), le groupe G contient un élément d'ordre q , soit g un tel élément. Étant donné que G est un p -groupe, $g^{p^n} = g^q = e$ pour un certain n . Donc $q = p^n$ et $q = p$ parce que q est premier. Nous venons de prouver que p est le seul nombre premier qui divise $|G|$. L'ordre de G est par conséquent une puissance de p .

Nous nous intéressons maintenant à l'implication inverse. Nous supposons que $|G| = p^n$ pour un certain entier $n \geq 0$. Soit $g \in G$; nous notons r l'ordre de G . Le sous-groupe $\mathrm{gr}(g)$ est d'ordre r , donc r divise $|G|$ (par le théorème 2.39 de Lagrange). Le nombre r est alors une puissance de p . $\square$

Lemme 12.98.

Soit G , un groupe fini de cardinal $|G| = n$ et p , un diviseur premier de n . Nous notons $n = p^m \cdot r$ où p ne divise pas r . Soit H un sous-groupe de G et S , un p -Sylow de G . Alors il existe $g \in G$ tel que

$$gSg^{-1} \cap H \quad (12.309)$$

soit un p -Sylow de H .

Démonstration. Nous considérons l'ensemble G/S sur lequel H agit. Si $a \in G$, le stabilisateur de $[a]$ dans G/S est

$$\mathrm{Stab}([a]) = \{h \in H \text{ tel que } [ha] = [a]\} \quad (12.310a)$$

$$= \{h \in H \text{ tel que } a^{-1}ha \in S\} \quad (12.310b)$$

$$= aSa^{-1} \cap H. \quad (12.310c)$$

Nous cherchons $a \in G$ tel que l'entier

$$\frac{\mathrm{Card}(H)}{\mathrm{Card}(aSa^{-1} \cap H)} \quad (12.311)$$

soit premier avec p . En effet, dans ce cas le groupe $\mathrm{Stab}([a])$ est un p -Sylow de H parce que $|H : aSa^{-1} \cap H|$ ne divise pas p . La formule des orbites (équation (2.117)) nous dit que

$$\frac{|H|}{|aSa^{-1} \cap H|} = \mathrm{Card}(\mathcal{O}_{[a]}). \quad (12.312)$$

Supposons que toutes les orbites aient un cardinal divisible par p . Étant donné que G/S est une réunion disjointe de ses orbites, nous aurions

$$p \mid \text{Card}(G/S) = \frac{|G|}{|S|} \quad (12.313)$$

alors que S étant un p -Sylow, p ne peut pas diviser $|G|/|S|$. Toutes les orbites n'ont donc pas un cardinal divisible par p , et il existe un $a \in G$ tel que (12.311) soit vérifiée. $\square$

Théorème 12.99 (Théorème de Sylow).

Soit G un groupe fini et p , un diviseur premier de $|G|$. Alors

- (1) G possède des p -Sylow.
- (2) Tout p -sous-groupe de G est contenu dans un p -Sylow.
- (3) Les p -Sylow de G sont conjugués.
- (4) Si n_p est le nombre de p -Sylow de G , alors n_p divise $|G|$ et $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

Démonstration. (1) Nous savons de la remarque 12.93 que G est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et que ce dernier a un p -Sylow par la proposition 12.96. Par conséquent G possède un p -Sylow par le lemme 12.98.

- (2) Soit H un p -sous-groupe de G et S , un p -Sylow de G (qui existe par le point précédent). Par le lemme 12.98 il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p -Sylow de H . Mais H est un p -groupe et un p -Sylow dans un p -groupe est automatiquement le groupe entier. Par conséquent,

$$H = aSa^{-1} \cap H \quad (12.314)$$

et $H \subset aSa^{-1}$, ce qui signifie que H est inclus à un p -Sylow.

- (3) Soit H un p -Sylow. Nous venons de voir que si S est un p -Sylow quelconque, alors H est inclus au p -Sylow aSa^{-1} pour un certain $a \in G$. Donc H est un p -Sylow inclus dans le p -Sylow aSa^{-1} , donc $H = aSa^{-1}$.
- (4) Le fait que n_p divise n est parce que tous les p -Sylow ont le même nombre d'éléments (ils sont conjugués) et sont deux à deux disjoints. Donc ils forment une partition de G et $|G| = n_p|S|$ si S est un p -Sylow quelconque.

Montrons maintenant que n_p est congru à un modulo p . Soit E l'ensemble des p -Sylow de G . Le groupe G agit sur E par conjugaison. Soit S un p -Sylow et considérons l'ensemble

$$E_S = \{T \in E \text{ tel que } s \cdot T = T \forall s \in S\}. \quad (12.315)$$

où l'action est celle par conjugaison. C'est l'ensemble des points fixes de E sous l'action de S . L'ensemble E est la réunion des orbites sous S et chacune de ces orbites a un cardinal qui divise $|S| = p^m$. Par conséquent $|\mathcal{O}_T|$ vaut 1 lorsque $T \in E_S$ et est un multiple de p sinon. Nous avons donc

$$|E| \equiv |E_S| \pmod{p}. \quad (12.316)$$

Nous voulons obtenir $|E_S| = 1$. Évidemment $S \in E_S$ parce que si $s \in S$ alors $sSs^{-1} = S$. Nous voudrions montrer que S est le seul élément de E_S . Soit $T \in E_S$, c'est à dire que T est un p -Sylow de G tel que

$$sTs^{-1} = T \quad (12.317)$$

pour tout $s \in S$. Soit N le groupe engendré par S et T . Montrons que T est normal dans N . Un élément g dans N s'écrit

$$g = s_1 t_1 \cdots s_r t_r \quad (12.318)$$

avec $s_i \in S$ et $t_i \in T$. Si $t \in T$, en utilisant le fait que T est un groupe et le fait que S le normalise, nous avons

$$gtg^{-1} = s_1 t_1 \cdots s_r t_r t t_r^{-1} s_r^{-1} \cdots t_1^{-1} s_1^{-1} \in T. \quad (12.319)$$

Donc T est un sous-groupe normal de N . Mais S et T sont conjugués dans N (parce que ils sont des p -Sylow de N), donc il existe un élément $a \in N$ tel que $aTa^{-1} = S$. Mais étant donné que T est normal,

$$S = aTa^{-1} = T. \quad (12.320)$$

Ceci achève la démonstration des théorèmes de Sylow. □

Proposition 12.100.

Si S est un p -Sylow dans le groupe G alors pour tout $g \in G$, l'ensemble gSg^{-1} est encore un p -groupe.

Démonstration. Si les éléments de S sont d'ordre p^n , alors nous avons

$$(gsg^{-1})^q = gs^qg^{-1} = e. \quad (12.321)$$

Pour avoir $gs^qg^{-1} = e$, il faut et suffit que $gs^q = g$, alors $s^q = e$, c'est à dire $q = p^n$. Donc gSg^{-1} est encore un p -Sylow. □

Les deux résultats 12.101 et 12.102 proviennent de la wikiversité.

Lemme 12.101.

Soit G , un groupe fini et p , un nombre premier. Si H et K sont des groupes distincts d'ordre p , alors $H \cap K = \{e\}$.

Démonstration. L'ensemble $H \cap K$ est un sous-groupe de H . Par conséquent son ordre divise celui de H qui est un nombre premier. Par conséquent soit $|H \cap K| = 1$, soit $|H \cap K| = |H|$. Dans le second cas nous aurions $H = K$, alors que nous avons supposé que H et K étaient distincts. □

Proposition 12.102.

Soit G un groupe fini et n le nombre de sous-groupes d'ordre p dans G . Alors le nombre d'éléments d'ordre p dans G vaut $n(p-1)$.

Démonstration. Si g est un élément d'ordre p dans G , le groupe H engendré par g est d'ordre p . Réciproquement si H est un groupe d'ordre p , tous les éléments de $H \setminus \{e\}$ sont d'ordre p (parce que l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe). Donc l'ensemble des éléments d'ordre p dans G est la réunion des ensembles $H \setminus \{e\}$ où H parcourt les sous-groupes d'ordre p dans G . Chacun de ces ensembles possède $p-1$ éléments et le lemme 12.101 nous assure qu'ils sont disjoints. Par conséquent nous avons $n(p-1)$ éléments d'ordre p dans G . □

Corollaire 12.103.

Un groupe d'ordre premier est cyclique.

Démonstration. Soit p l'ordre de G . Le nombre de sous-groupes d'ordre p est $n = 1$ (et c'est G lui-même). La proposition 12.102 nous dit alors que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est $p-1$. Donc tout élément est générateur. □

Lemme 12.104.

Le groupe A_6 n'accepte pas de sous-groupes normaux d'ordre 60.

Démonstration. Soit G normal dans A_6 , et a , un élément d'ordre 5 dans G (qui existe parce que 5 divise 60). Soit aussi un élément b d'ordre 5 dans A_6 . Les groupes $\text{gr}(a)$ et $\text{gr}(b)$ sont deux 5-Sylow dans A_6 . En effet, 5 un nombre premier et est la plus grande puissance de 5 dans la décomposition de 60; donc $\text{gr}(a)$ est un 5-Sylow dans G . D'autre part, l'ordre de A_6 (qui est $\frac{1}{2}6!$) ne possède également que 5 à la puissance 1 dans sa décomposition.

En vertu du théorème de Sylow 12.99(3), les 5-Sylow $\text{gr}(a)$ et $\text{gr}(b)$ sont conjugués et il existe $\tau \in A_6$ tel que $b = \tau a \tau^{-1}$. Mais G étant normal dans A_6 , l'élément $\tau a \tau^{-1}$ est encore dans G , de telle sorte que $b \in G$. Du coup G doit contenir tous les éléments d'ordre 5 de A_6 .

Les éléments d'ordre 5 de A_6 doivent fixer un des points de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ puis permuter les autres de façon à n'avoir qu'un seul cycle. Un cycle correspond à écrire les nombres 1, 2, 3, 4, 5 dans un certain ordre. Ce faisant, le premier n'a pas d'importance parce qu'on considère la permutation cyclique, par exemple (3, 5, 2, 1, 4) est la même chose que (5, 2, 1, 4, 3). Le nombre de cycles sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est donc de $4!$, et par conséquent le nombre d'éléments d'ordre 5 dans A_6 est $6 \cdot 4! = 144$.

Le groupe G doit contenir au moins 144 éléments alors que par hypothèse il en contient 60 ; contradiction. □

Proposition 12.105 ([180]).

Tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterné A_5 .

Une autre preuve de ce résultat peut être trouvée sur la wikiversité.

Démonstration. Nous avons la décomposition en nombres premiers $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Déterminons pour commencer le nombre n_5 de 5-Sylow dans G . Le théorème de Sylow 12.99(4) nous renseigne que n_5 doit diviser 60 et doit être égal à 1 mod 5. Les deux seules possibilités sont $n_5 = 1$ et $n_5 = 6$. Étant donné que tous les p -Sylow sont conjugués, si $n_5 = 1$ alors le 5-Sylow serait un sous-groupe invariant à l'intérieur de G , ce qui est impossible vu que G est simple. Donc $n_5 = 6$.

Par le point (3) du théorème de Sylow, le groupe G agit transitivement sur l'ensemble des 5-Sylow par l'action adjointe :

$$g \cdot S = gSg^{-1}. \quad (12.322)$$

Cela donne donc un morphisme $\theta: G \rightarrow S_6$. Le noyau de θ est un sous-groupe normal. En effet si $k \in \ker \theta$ et si $g \in G$ nous avons

$$(gkg^{-1}) \cdot S = gkg^{-1}Ggk^{-1}g^{-1} \quad (12.323a)$$

$$= gkTk^{-1}g^{-1} \quad (12.323b)$$

$$= gTg^{-1} \quad (12.323c)$$

$$= S \quad (12.323d)$$

où T est le Sylow $T = g^{-1}Sg$. Étant donné que $k \in \ker \theta$ nous avons utilisé $kTk^{-1} = aT$. Au final $gkg^{-1} \cdot S = S$, ce qui prouve que $gkg^{-1} \in \ker \theta$.

Étant donné que $\ker \theta$ est normal dans G , soit est soit réduit à $\{e\}$ soit il vaut G . La seconde possibilité est exclue parce qu'elle reviendrait à dire que G agit trivialement, ce qui n'est pas correct étant donné qu'il agit transitivement. Nous en déduisons que $\ker \theta = \{e\}$, que θ est injective et que G est isomorphe à un sous-groupe de S_6 .

Par ailleurs le groupe dérivé de G est un sous-groupe normal (et non réduit à l'identité parce que G est non commutatif). Donc $D(G) = G$. Étant donné que $G \subset S_6$, nous avons

$$G = D(G) \subset D(S_6) = A_6 \quad (12.324)$$

parce que le groupe dérivé du groupe symétrique est le groupe alterné (lemme 2.80).

L'ensemble $\theta^{-1}(A_6)$ est distingué dans G . En effet si $\sigma \in A_6$ et si $g \in G$ nous avons

$$\theta(g\theta^{-1}(\sigma)g^{-1}) = \theta(g)\sigma\theta(g)^{-1} \in A_6. \quad (12.325)$$

Nous en déduisons que $\theta^{-1}(A_6)$ est soit G entier soit réduit à $\{e\}$. Si $\theta^{-1}(A_6) = \{e\}$, alors pour tout $g \in G$ nous aurions $g^2 = e$ parce que $\theta(g^2) \in A_6$. L'ordre de G étant 60, il n'est pas possible que tous ses éléments soient d'ordre 2. Nous en déduisons que $\theta(G) \subset A_6$.

Nous nommons $H = \theta(G)$ et nous considérons l'ensemble $X = A_6/H$ où les classes sont prises à gauche, c'est à dire

$$[\sigma] = \{h\sigma \text{ tel que } h \in H\}. \quad (12.326)$$

Évidemment A_6 agit sur X de façon naturelle. Au niveau de la cardinalité,

$$\text{Card}(X) = \frac{|A_6|}{|G|} = \frac{360}{60} = 6. \quad (12.327)$$

Le groupe A_6 agit sur X qui a 6 éléments. Nous avons donc une application $\varphi: A_6 \rightarrow A_6$. Encore une fois, la simplicité de A_6 montre que $\varphi(A_6) = A_6$.

Nous étudions maintenant $\varphi(H)$ agissant sur X . Un élément $x \in A_6$ fixe la classe de l'unité $[e]$ si et seulement si $x \in H$ et par conséquent $\varphi(H)$ est la fixateur de $[e]$ dans X . À la renumérotation près, nous pouvons identifier $\varphi(H)$ au sous-groupe de A_6 agissant sur $\{1, \dots, 6\}$ et fixant 6. Nous avons alors $\varphi(H) = S_5 \cap A_6 = A_5$. Nous venons de prouver que φ fournit un isomorphisme entre A_5 et H . Étant donné que H était isomorphe à G , nous concluons que G est isomorphe à A_6 . $\square$

12.6 Un peu de classification de groupes

Définition 12.106.

Un **nombre premier** est un naturel acceptant exactement deux diviseurs distincts.

Avec cette définition, 0 n'est pas premier, 1 n'est pas premier et 2 est premier.

12.6.1 Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Notons que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{F}_n$ est un groupe pour l'addition tandis que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est un groupe pour la multiplication. Il ne peut donc pas y avoir d'équivoque.

Théorème 12.107 (Wikiversité).

Pour chaque $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \sigma_x: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ y &\mapsto xy. \end{aligned} \quad (12.328)$$

L'application

$$\sigma: ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \quad (12.329)$$

ainsi définie est un isomorphisme de groupes.

L'énoncé de ce théorème s'écrit souvent rapidement par

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \quad (12.330)$$

mais il faut bien garder à l'esprit qu'à gauche on considère le groupe additif et à droite celui multiplicatif.

Démonstration. Nous notons $[x]$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous avons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = [1]$. Soit f un automorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; pour tout $r \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$f([r]) = f(r[1]) = rf([1]) = [r]f([1]). \quad (12.331)$$

En particulier, vu que f est surjective, il existe un r tel que $f([r]) = [1]$. Pour un tel r nous avons $[1] = [r]f([1])$, c'est à dire que nous avons montré que $f([1])$ est inversible dans $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$. Nous montrons à présent que³¹

$$\begin{aligned} \sigma: \text{Aut}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)) &\rightarrow ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot) < ++ > \\ f &\mapsto f([1]) \end{aligned} \quad (12.332)$$

est un isomorphisme.

31. Le σ donné ici est l'inverse de celui donné dans l'énoncé. Cela ne change évidemment rien à la validité de l'énoncé et de la preuve.

Nous commençons par la surjectivité. Soit $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Les éléments $[a]$ et $[1]$ étant tous deux des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, il existe un automorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui envoie $[1]$ sur $[a]$ par le lemme 2.21. Cela prouve la surjectivité de σ .

En ce qui concerne l'injectivité, considérons f_1 et f_2 sont des automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ tels que $f_1([1]) = f_2([1])$. Les automorphismes f_1 et f_2 prennent la même valeur sur un générateur et donc sur tout le groupe. Donc $f_1 = f_2$.

Enfin nous prouvons que σ est un morphisme, c'est à dire que $\sigma(f \circ g) = \sigma(f)\sigma(g)$. Nous avons

$$f(g([1])) = f(g([1])[1j]) = g([1])f([1]) = \sigma(f)\sigma(g). \quad (12.333a)$$

□

Ce dernier résultat s'étend aux groupes cycliques.

Proposition 12.108.

Si G est un groupe cyclique d'ordre n , alors

$$\text{Aut}(G) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*. \quad (12.334)$$

Corollaire 12.109.

Si p divise $q - 1$ alors $\text{Aut}(\mathbb{F}_q)$ possède un unique sous-groupe d'ordre p .

Démonstration. Si a est un générateur de $\mathbb{F}_q^*$ alors le groupe

$$\text{gr} \left(a^{\frac{q-1}{p}} \right) \quad (12.335)$$

est un sous-groupe d'ordre p . En ce qui concerne l'unicité, soit S un sous-groupe d'ordre p . Il est donc d'indice $(q-1)/p$ dans $\mathbb{F}_q^*$ et le lemme 2.44 nous enseigne que le groupe donné en (12.335) est contenu dans S . Il est donc égal à S parce qu'il a l'ordre de S . Le fait que S soit normal est dû au fait que $\mathbb{F}_q^*$ est abélien. □

12.6.2 Groupes abéliens finis

Source : [26].

Nous rappelons que l'exposant d'un groupe fini est le ppcm des ordres de ses éléments. Dans le cas des groupes abéliens finis, l'exposant joue un rôle important du fait qu'il existe un élément dont l'ordre est l'exposant. Cela est le théorème suivant.

Théorème 12.110 (Exposant dans un groupe abélien fini).

Un groupe abélien fini contient un élément dont l'ordre est l'exposant du groupe.

Démonstration. Soit G un groupe abélien fini et $x \in G$, un élément d'ordre maximum m . Nous montrons par l'absurde que l'ordre de tous les éléments de G divise m . Soit donc $y \in G$, un élément dont l'ordre ne divise pas m ; nous notons q son ordre. Vu que q ne divise pas m , le nombre q possède au moins un facteur premier plus de fois que m : soit p premier tel que la décomposition de q contienne p^β et celle de m contienne p^α avec $\beta > \alpha$. Autrement dit,

$$m = p^\alpha m' \quad (12.336a)$$

$$q = p^\beta q' \quad (12.336b)$$

où m' et q' ne contiennent plus le facteur p . L'élément x étant d'ordre m , l'élément x^{p^α} est d'ordre m' . De la même manière, l'élément $y^{q'}$ est d'ordre p^β . Étant donné que p^β et m' sont premiers entre eux, l'élément $x^{p^\alpha} y^{q'}$ est d'ordre $p^\alpha m' > m$. D'où une contradiction avec le fait que x était d'ordre maximal.

Par conséquent l'ordre de tous les éléments de G divise celui de x qui est alors le ppcm des ordres de tous les éléments de G , c'est à dire l'exposant de G . □

Proposition 12.111.

Soit G un groupe abélien fini et $x \in G$, un élément d'ordre maximum. Alors

- (1) Il existe un morphisme $\varphi: G \rightarrow \text{gr}(x)$ tel que $\varphi(x) = x$.
- (2) Il existe un sous-groupe K de G tel que $G = \text{gr}(x) \oplus K$.

Démonstration. Nous notons a l'ordre de x qui est également l'exposant du groupe G .

Nous allons prouver la première partie par récurrence sur l'ordre du groupe. Si $G = \text{gr}(x)$, alors c'est évident. Soit H un sous-groupe propre de G contenant x et tel que le problème soit déjà résolu pour H : il existe un morphisme $\varphi: H \rightarrow \text{gr}(x)$ tel que $\varphi(x) = x$. Soit $y \in G \setminus H$, d'ordre b . Nous allons trouver un morphisme $\hat{\varphi}: \text{gr}(H, y) \rightarrow \text{gr}(x)$ telle que $\hat{\varphi}(x) = x$.

Pour cela nous commençons par construire les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H &\rightarrow \text{gr}(x) \\ (\bar{k}, h) &\mapsto x^{kl}\varphi(h) \end{aligned} \quad (12.337)$$

où l est encore à déterminer, et

$$\begin{aligned} p: \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H &\rightarrow \text{gr}(y, H) \\ (\bar{k}, h) &\mapsto y^k h. \end{aligned} \quad (12.338)$$

Pour que $\tilde{\varphi}$ soit bien définie, il faut que a divise bl . L'application p est bien définie parce que $\bar{k}$ est pris dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et que b est l'ordre de y .

Nous allons construire le morphisme $\hat{\varphi}$ en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \ker(p) & \hookrightarrow & \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H \xrightarrow{p} \text{gr}(y, H) \\ & & \downarrow \tilde{\varphi} \swarrow \hat{\varphi} \\ & & \text{gr}(x) \end{array} \quad (12.339)$$

que l'on voudra être commutatif. Vu que p est surjective, les théorèmes d'isomorphismes nous disent que

$$\text{gr}(y, H) \simeq \frac{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H}{\ker p}. \quad (12.340)$$

Si $[\bar{k}, h]$ est la classe de $(\bar{k}, h)$ modulo $\ker(p)$ alors nous voudrions définir $\hat{\varphi}$ par

$$\hat{\varphi}([\bar{k}, h]) = \tilde{\varphi}(\bar{k}, h). \quad (12.341)$$

Pour que cela soit bien défini, il faut que si $(\bar{r}, z) \in \ker p$,

$$\hat{\varphi}([\bar{k}\bar{r}, hz]) = \hat{\varphi}([\bar{k}, h]), \quad (12.342)$$

c'est à dire que $\tilde{\varphi}(\bar{r}, z) = e$. Du coup la définition (12.341) n'est bonne que si et seulement si

$$\ker(p) \subset \ker(\tilde{\varphi}). \quad (12.343)$$

Nous pouvons obtenir cela en choisissant bien l .

Déterminons d'abord le noyau de p . Pour cela nous considérons un nombre β divisant b tel que $\text{gr}(y) \cap H = \text{gr}(y^\beta)$. Nous aurons $p(\bar{k}, h) = e$ si et seulement si $y^h = e$. En particulier $h = y^{-k} \in \text{gr}(y) \cap H = \text{gr}(y^\beta)$. Si $h = (y^\beta)^m = y^{m\beta}$, alors $k = -m\beta$ et nous avons

$$\ker(p) = \{(-m\beta, y^{m\beta}) \text{ tel que } m \in \mathbb{Z}\}. \quad (12.344)$$

En plus court : $\ker(p) = \text{gr}(\beta, y^{-\beta})$. Nous devons donc fixer l de telle sorte que $\tilde{\varphi}(\beta, y^{-\beta}) = e$. Étant donné que φ prend ses valeurs dans $\text{gr}(x)$, il existe un entier α tel que $\varphi(y^{-\beta}) = x^\alpha$; en utilisant cet α , nous écrivons

$$\tilde{\varphi}(\beta, y^{-\beta}) = x^{\beta l} \varphi(y^{-\beta}) = x^{\beta l + \alpha}. \quad (12.345)$$

Par conséquent nous choisissons $l = -\alpha/\beta$. Nous devons maintenant vérifier que ce choix est légitime, c'est à dire que a divise bl et que α/β est un entier.

Étant donné que y est d'ordre b ,

$$e = \varphi(y^b) = \varphi(y^{-\beta b/\beta}) = \varphi(y^{-\beta})^{b/\beta} = x^{b\beta/\alpha}. \quad (12.346)$$

Par conséquent a divise $\frac{b\alpha}{\beta} = -bl$.

Pour voir que l est entier, nous nous rappelons que a est l'exposant de G (parce que x est d'ordre maximum) et que par conséquent b divise a . Mais a divise $\alpha\frac{b}{\beta}$. Donc α/β est entier.

Nous passons maintenant à la seconde partie de la preuve. Nous considérons un morphisme $\varphi: G \rightarrow \text{gr}(x)$ tel que $\varphi(x) = x$. La première partie nous en assure l'existence. Nous montrons que

$$\begin{aligned} \psi: G &\rightarrow \text{gr}(x) \oplus \ker(\varphi) \\ g &\mapsto (\varphi(g), g\varphi(g)^{-1}) \end{aligned} \quad (12.347)$$

est un isomorphisme. D'abord $g\varphi(g)^{-1}$ est dans le noyau de φ parce que $\varphi(g)^{-1}$ étant dans $\text{gr}(x)$, et φ étant un morphisme,

$$\varphi(g\varphi(g)^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e. \quad (12.348)$$

L'application ψ est un morphisme parce que, en utilisant le fait que G est abélien,

$$\psi(g_1g_2) = (\varphi(g_1g_2), g_1g_2\varphi(g_1g_2)^{-1}) \quad (12.349a)$$

$$= (\varphi(g_1)\varphi(g_2), g_1\varphi(g_1)^{-1}g_2\varphi(g_2)^{-1}) \quad (12.349b)$$

$$= \psi(g_1)\psi(g_2). \quad (12.349c)$$

L'application ψ est injective parce que si $\psi(g) = (e, e)$ alors $\varphi(g) = e$ et $g\varphi(g)^{-1} = e$, ce qui implique $g = e$.

Enfin ψ est surjective parce qu'elle est injective et que les ensembles de départ et d'arrivée ont même cardinal. En effet par le premier théorème d'isomorphisme (théorème 2.17) appliqué à φ nous avons

$$|G| = |\text{gr}(x)| \cdot |\ker(\varphi)|. \quad (12.350)$$

□

Théorème 12.112.

Tout groupe abélien fini (non trivial) se décompose en

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \quad (12.351)$$

avec $d_1 \geq 1$ et d_i divise d_{i+1} pour tout $i = 1, \dots, r-1$.

De plus la liste $(d_1, \dots, d_r)$ vérifiant ces propriétés est unique.

Démonstration. Soit x_1 un élément d'ordre maximal dans G . Soit n_1 son ordre et

$$H_1 = \text{gr}(x_1) = \mathbb{F}_{n_1}. \quad (12.352)$$

D'après la proposition 12.111(2), il existe un supplémentaire K_1 tel que $G = \mathbb{F}_{n_1} \oplus K_1$. Si $K_1 = \{1\}$ on s'arrête et on garde $G = \mathbb{F}_{n_1}$. Sinon on continue de la sorte en prenant x_2 d'ordre maximal dans K_1 etc.

Nous devons maintenant prouver l'unicité de cette décomposition. Soit

$$G = \mathbb{F}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{d_r} = \mathbb{F}_{s_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{s_q}. \quad (12.353)$$

L'exposant de G est d_r et s_q . Donc $d_r = s_q$. Les complémentaires étant égaux nous avons

$$\mathbb{F}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{d_{r-1}} = \mathbb{F}_{s_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{s_{q-1}}. \quad (12.354)$$

En continuant nous trouvons $r = q$ et $d_i = s_i$.

□

12.6.3 Groupes d'ordre pq

Soit G un groupe d'ordre pq où p et q sont des nombres premiers distincts. Nous supposons que $p < q$. Montrons que G ne possède qu'un seul q -Sylow. Soit n_q le nombre de q -Sylow ; par les théorèmes de Sylow nous avons

$$n_q = 1 \pmod{q} \quad (12.355)$$

et n_q divise $|G| = pq$. Donc n_q vaut p , q ou 1 . Avoir $n_q = p$ n'est pas possible parce que $n_q = 1 \pmod{q}$ et $p < q$. Avoir $n_q = q$ n'est pas possible non plus, pour la même raison. Donc $n_q = 1$. Notons H cet unique q -Sylow de G .

Notons que cet unique q -Sylow est un sous-groupe normal dans G qui n'est égal ni à $\{1\}$ ni à $\{G\}$ parce que

$$1 < p = |H| < pq = |G|. \quad (12.356)$$

Par conséquent G n'est pas simple.

Théorème 12.113.

Soit G un groupe d'ordre pq où $q > p$ sont des nombres premiers distincts³².

Si $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ alors G est cyclique et plus précisément $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

Si $q \equiv 1 \pmod{p}$, alors soit G est abélien et est le groupe cyclique $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, soit G n'est pas abélien et

$$G \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (12.357)$$

où $\varphi(\bar{1})$ est d'ordre p dans $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

De plus tous les produits semi-directs non triviaux de la forme (12.357) sont isomorphes entre eux, c'est à dire que si $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont d'ordre pq , alors ils sont isomorphes.

En particulier si p et q sont premiers entre eux, le produit est direct.

Démonstration. Soient H , un q -Sylow et K , un p -Sylow de G . Ils existent parce que p et q sont des diviseurs premiers de $|G|$ (théorème de Sylow 12.99). Si n_q est le nombre de q -Sylow dans G alors n_q divise $|G|$ et $n_q = 1 \pmod{q}$. Donc d'abord n_q vaut 1 , p ou q . Ensuite $n_q = q$ est exclu par la condition $n_q = 1 \pmod{q}$; la possibilité $n_q = p$ est également impossible parce que $p = 1 \pmod{q}$ est impossible avec $p < q$. Donc $n_q = 1$ et H est normal dans G .

L'ensemble $H \cap K$ est un sous-groupe à la fois de H et de K , ce qui entraîne que (théorème de Lagrange 2.39) $|H \cap K|$ divise à la fois p et q . Nous en déduisons que $|H \cap K| = 1$ et donc que $H \cap K = \{e\}$.

Étant donné que H est normal, l'ensemble HK est un sous-groupe de G . De plus l'application

$$\begin{aligned} \psi: H \times K &\rightarrow HK \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned} \quad (12.358)$$

est une bijection. Nous ne devons vérifier seulement l'injectivité. Supposons que $hk = h'k'$. Alors $e = h^{-1}h'k'k^{-1}$, et donc

$$h^{-1}h' = (k'k^{-1})^{-1} \in H \cap K = \{e\}. \quad (12.359)$$

Par conséquent $|pq| = |H \times K| = |HK|$, et $HK = G$. Le corollaire 2.87 nous indique que

$$G = H \rtimes_{\varphi} K \quad (12.360)$$

où φ est l'action adjointe. Nous devons maintenant identifier cette action. En d'autres termes, nous savons que $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que $\varphi: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un morphisme. Nous devons déterminer les possibilités pour φ .

Soit n_p le nombre de p -Sylow de G . Comme précédemment, n_p vaut 1 , p ou q et la possibilité $n_p = p$ est exclue. Donc n_p est 1 ou q .

32. Le cas $p = q$ sera traité par la proposition 12.116.

Supposons $q \not\equiv 1 \pmod p$, c'est à dire $q \notin [1]_p$. Dans ce cas $n_p = q$ est impossible parce que $n_p \in [1]_p$. Donc $n_p = 1$ et K est également normal dans G . Du coup le produit semi-direct (12.360) est en réalité un produit direct (φ est triviale) et nous avons

$$G = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}. \quad (12.361)$$

Supposons à présent³³ que $q \equiv 1 \pmod p$. Cette fois $n_p = 1$ et $n_p = q$ sont tous deux possibles. Ce que nous savons est que $\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Par le premier théorème d'isomorphisme 2.17, nous avons

$$|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|}{|\ker \varphi|}, \quad (12.362)$$

ce qui signifie que $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ divise $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$. Par conséquent, $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ est égal à 1 ou p . Si c'est 1, alors l'action est triviale et le produit est direct.

Nous supposons que $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = p$. Le corollaire 12.109 nous indique que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ possède un unique sous-groupe d'ordre p que nous notons Γ ; c'est à dire que $\Gamma = \text{Image}(\varphi)$. Vu que $\varphi: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un morphisme, Γ est généré par $\varphi(\bar{1})$ qui est alors un élément d'ordre p , comme annoncé.

Nous nous attaquons maintenant à l'unicité. Soient φ et φ' deux morphismes non triviaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Étant donné que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ ne possède qu'un seul sous-groupe d'ordre p , nous savons que $\text{Image}(\varphi) = \text{Image}(\varphi') = \Gamma$. Nous pouvons donc parler de φ'^{-1} en tant qu'application de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans Γ . Nous montrons que

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ (h, k) &\mapsto (h, \alpha(k)) \end{aligned} \quad (12.363)$$

où $\alpha = \varphi'^{-1} \circ \varphi$ est un isomorphisme de groupes. Le calcul est immédiat :

$$f(h_1, k_1)f(h_2, k_2) = (h_1, \alpha(k_1))(h_2, \alpha(k_2)) \quad (12.364a)$$

$$= (h_1\varphi'(\alpha(k_1))h_2, \alpha(k_1k_2)) \quad (12.364b)$$

$$= f(h_1\varphi(k_1)h_2, k_1k_2) \quad (12.364c)$$

$$= f((h_1, k_1), (h_2, k_2)). \quad (12.364d)$$

Par conséquent $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Proposition 12.114 ([15]).

Soit G un groupe fini d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers distincts vérifiant

$$\begin{cases} p \not\equiv 1 \pmod q \\ q \not\equiv 1 \pmod p \end{cases} \quad (12.365a)$$

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod q \\ q \equiv 1 \pmod p \end{cases} \quad (12.365b)$$

Alors G est cyclique, abélien et

$$G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}. \quad (12.366)$$

Démonstration. Soient n_p et n_q les nombres de p -Sylow et q -Sylow. Par le théorème de Sylow 12.99, n_p divise pq et $n_p \equiv 1 \pmod p$. Le second point empêche n_p de diviser p . Par conséquent n_p divise q et donc n_p vaut 1 ou q . La possibilité $n_p = q$ est exclue par l'hypothèse $q \not\equiv 1 \pmod p$. Donc $n_p = 1$, et de la même façon nous obtenons $n_q = 1$.

Soient S l'unique p -Sylow et T , l'unique q -Sylow. Pour les mêmes raisons que celles exposées plus haut, ce sont deux sous-groupes normaux dans G . Étant donné que S est d'ordre p^n pour un certain n et que l'ordre de S doit diviser celui de G , nous avons $|S| = p$. De la même façon, $|T| = q$. Par conséquent S est un groupe cyclique d'ordre p et nous considérons x , un de ses générateurs. De la même façon soit y , un générateur de T .

Nous montrons maintenant que x et y commutent, puis que xy engendre G . Nous savons que $S \cap T$ est un sous-groupe à la fois de S et de T , de telle façon que $|S \cap T|$ divise à la fois $|S| = p$

33. Note : il existe des nombres premiers p et q tels que $q \equiv 1 \pmod p$. Par exemple $7 \equiv 1 \pmod 3$.

et $|T| = q$. Nous avons donc $|S \cap T| = 1$ et donc $S \cap T$ se réduit au neutre. Par ailleurs, S et T sont normaux, donc

$$(xyx^{-1})y^{-1} \in T \quad (12.367a)$$

$$x(yx^{-1})y^{-1} \in S, \quad (12.367b)$$

donc $xyx^{-1}y^{-1} = e$, ce qui montre que $xy = yx$.

Montrons que xy engendre G . Soit $m > 0$ tel que $(xy)^m = e$. Pour ce m nous avons $x^m = y^{-m}$ et $y^{-m} = x^m$, ce qui signifie que x^m et y^m appartiennent à $S \cap T$ et donc $x^m = y^m = e$. Les nombres p et q divisent donc tous deux m ; par conséquent $\text{ppcm}(p, q) = pq$ divise m . Nous en concluons que xy est d'ordre pq (il ne peut pas être plus) et qu'il est alors générateur.

Pour la suite nous allons d'abord prouver que $G = ST$ puis que $G \simeq S \times T$. Nous savons déjà que $|S \cap T| = 1$, ce qui nous amène à dire que $|ST| = |S||T|$. En effet si $s, s' \in S$ et $t, t' \in T$ et si $st = s't'$, alors $t = s^{-1}s't'$, ce qui voudrait dire que $s^{-1}s' \in T$ et donc que $s^{-1}s' = e$. Au final nous avons

$$|ST| = |S||T| = pq = |G|. \quad (12.368)$$

Par conséquent $G = ST$. En nous rappelant du fait que $S \cap T = \{e\}$ et que S et T sont normaux, le lemme 2.11 nous dit que $G \simeq S \times T$. Le groupe S étant cyclique d'ordre p nous avons $S = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pour T , nous avons la même chose : $T = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Nous concluons que

$$G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}. \quad (12.369)$$

□

Théorème 12.115 (Théorème de Burnside[26]).

Le centre d'un p -groupe non trivial est non trivial.

Démonstration. Soit G un p -groupe non trivial. Nous considérons l'action adjointe G sur lui-même. Les points fixes de cette action sont les éléments du centre :

$$\mathcal{Z}_G = \{z \in G \text{ tel que } \sigma_x(z) = z \forall x \in G\} = \text{Stab}_G(G). \quad (12.370)$$

Nous utilisons l'équation aux classes (2.64) pour dire que $|G| = |\mathcal{Z}_G| \pmod{p}$. Mais $|\mathcal{Z}_G|$ n'est pas vide parce qu'il contient l'identité. Donc $|\mathcal{Z}_G|$ est au moins d'ordre p . □

Proposition 12.116.

Si p est un nombre premier, tout groupe d'ordre p ou p^2 est abélien.

Rappel : un groupe d'ordre p ou p^2 est automatiquement un p -groupe.

Démonstration. Si $|G| = p$, alors le théorème de Cauchy 12.90 nous donne l'existence d'un élément d'ordre p . Cet élément est alors automatiquement générateur, G est cyclique et donc abélien.

Si par contre G est d'ordre p^2 , alors les choses se compliquent (un peu). D'après le théorème de Burnside 12.115, le centre $\mathcal{Z}$ n'est pas trivial; il est alors d'ordre p ou p^2 . Supposons qu'il soit d'ordre p et prenons $x \in G \setminus \mathcal{Z}$. Alors le stabilisateur de x pour l'action adjointe contient au moins $\mathcal{Z}$ et x , c'est à dire que $|\text{Stab}_G(x)| \geq p + 1$. Étant donné que $\text{Stab}_G(x)$ est un sous-groupe, son ordre est automatiquement 1, p ou p^2 . En l'occurrence, il doit être p^2 (parce que plus grand que p), et donc x doit être central, ce qui est une contradiction. □

12.6.4 Groupe monogène

Théorème 12.117.

Un groupe monogène est abélien. Plus précisément,

(1) *un groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$,*

(2) *un groupe monogène fini est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain n .*

Un groupe monogène d'ordre n possède $\varphi(n)$ générateurs.

Démonstration. Le groupe est abélien parce que $g = a^n$, $g' = a^{n'}$ implique $gg' = a^{n+n'} = g'g$. Nous considérons un générateur a de G (qui existe parce que G est monogène) et le morphisme surjectif

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\rightarrow G \\ p &\mapsto a^p. \end{aligned} \quad (12.371)$$

Si G est infini, alors f est injective parce que si $a^n = a^{n'}$, alors $a^{n-n'} = e$, ce qui rendrait G cyclique et par conséquent non infini. Nous concluons que si G est infini, alors f est une bijection et donc un isomorphisme $\mathbb{Z} \simeq G$.

Si G est fini, alors f n'est pas injective et a un noyau $\ker f$. Étant donné que $\ker f$ est un sous-groupe de G , il existe un (unique) n tel que $\ker f = n\mathbb{Z}$ et le premier théorème d'isomorphisme (théorème 2.17) nous indique que

$$\mathbb{Z}/\ker f = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{Image } f = G. \quad (12.372)$$

Dans ce cas, le fait qu'un groupe monogène d'ordre n possède $\varphi(n)$ générateurs est le contenu de la proposition 3.17. $\square$

12.6.5 Fonction indicatrice d'Euler

Corollaire 12.118.

L'indicatrice d'Euler est multiplicative : si p est premier avec q , alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. De plus si p et q sont premiers entre eux,

$$\varphi(pq) = (p-1)(q-1). \quad (12.373)$$

Démonstration. Nous savons que si p et q sont premiers entre eux, alors le théorème 12.113 nous donne l'isomorphisme de groupe

$$(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +). \quad (12.374)$$

Un élément (x, y) est générateur du produit si et seulement si x est générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et y est générateur de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Par la proposition 3.17, il y a $\varphi(p)\varphi(q)$ tels éléments. Par ailleurs le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ est $\varphi(pq)$, d'où l'égalité.

Si p est premier, nous avons $\varphi(p) = p-1$ parce que tous les entiers de $\{1, \dots, p-1\}$ sont premiers avec p . $\square$

12.7 Nombres premiers

Dans $\mathbb{N}$, il y a assez bien de nombres premiers. Nous allons voir maintenant que la somme des inverses des nombres premiers diverge. Pour comparaison, la somme des inverses des carrés converge. Il y a donc plus de nombres premiers que de carrés.

Lemme 12.119.

Un entier $n \geq 1$ se décompose de façon unique en produit de la forme $n = qm^2$ où q est un entier sans facteurs carrés et m , un entier.

Démonstration. Pour $n = 1$, c'est évident. Nous supposons $n \geq 2$.

En ce qui concerne l'existence, nous décomposons n en facteurs premiers³⁴ et nous séparons les puissances paires des puissances impaires :

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^s q_j^{2\beta_j+1} \quad (12.375a)$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{i=1}^r p_i^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^s q_j^{2\beta_j} \right)}_{m^2} \underbrace{\prod_{j=1}^s q_j}_{q}. \quad (12.375b)$$

34. Théorème 3.6.

Nous passons à l'unicité. Supposons que $n = q_1 m_1^2 = q_2 m_2^2$ avec q_1 et q_2 sans facteurs carrés (dans leur décomposition en facteurs premiers). Soit $d = \text{pgcd}(m_1, m_2)$ et k_1, k_2 définis par $m_1 = dk_1$, $m_2 = dk_2$. Par construction, $\text{pgcd}(k_1, k_2) = 1$. Étant donné que

$$n = q_1 d^2 k_1^2 = q_2 d^2 k_2^2, \quad (12.376)$$

nous avons $q_1 k_1^2 = q_2 k_2^2$ et donc k_1^2 divise $q_2 k_2^2$. Mais k_1 et k_2 n'ont pas de facteurs premiers en commun, donc k_1^2 divise q_2 , ce qui n'est possible que si $k_1 = 1$ (parce que k_1^2 n'a que des facteurs premiers alors que q_2 n'en a pas). Dans ce cas, $d = m_1$ et m_1 divise m_2 . Si $m_2 = l m_1$ alors l'équation (12.376) se réduit à $n = q_1 m_1^2 = q_2 l^2 m_1^2$ et donc

$$q_1 = q_2 l^2, \quad (12.377)$$

ce qui signifie $l = 1$ et donc $m_1 = m_2$. □

Théorème 12.120.

Soit P , l'ensemble des nombres premiers. Alors la somme $\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$ diverge et plus précisément,

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P}} \frac{1}{p} \geq \ln(\ln(x)) - \ln(2). \quad (12.378)$$

Démonstration. Nous posons

$$S_x = \{q \leq x \text{ avec } q \text{ sans facteurs carrés}\} \quad (12.379)$$

et

$$P_x = \{p \in P \text{ tel que } p \leq x\}. \quad (12.380)$$

Si

$$K_x = \{(q, m) \text{ tels que } q \text{ n'a pas de facteurs carrés et } qm^2 \leq x\}, \quad (12.381)$$

alors nous avons

$$K_x = \bigcup_{q \in S_x} \bigcup_{m \leq \sqrt{x/q}} (q, m). \quad (12.382)$$

Par définition et par le lemme 12.119 nous avons aussi

$$\{n \leq x\} = \{qm^2 \text{ tel que } (q, m) \in K_x\}. \quad (12.383)$$

Tout cela pour décomposer la somme

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \sum_{q \in S_x} \sum_{m \leq \sqrt{x/q}} \frac{1}{m^2} \leq \sum_{q \in S_x} \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2}}_{=C}. \quad (12.384)$$

Nous avons aussi

$$\prod_{p \in P_x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 1 + \sum_{p \in P_x} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p, q \in P_x \\ p < q}} \frac{1}{pq} + \sum_{\substack{p, q, r \in P_x \\ p < q < r}} \frac{1}{pqr} + \dots \quad (12.385a)$$

$$\geq 1 + \sum_{p \in P_x} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p, q \in P_x \\ pq \leq x}} \frac{1}{pq} + \sum_{\substack{p, q, r \in P_x \\ pqr \leq x}} \frac{1}{pqr} + \dots \quad (12.385b)$$

Les sommes sont finies. Les sommes s'étendent sur toutes les façons de prendre des produits de nombres premiers distincts de telle sorte de conserver un produit plus petit que x ; c'est à dire que les sommes se résument en une somme sur les éléments de S_x :

$$\exp\left(\sum_{p \in P_x} \frac{1}{p}\right) \geq \prod_{p \in P_x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \geq \sum_{q \in S_x} \frac{1}{q}. \quad (12.386)$$

La première inégalité est simplement le fait que $1 + u \leq e^u$ si $u \geq 0$. Nous prolongeons maintenant les inégalités

$$\ln(x) \leq \sum_{n \leq x} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n \geq x} \frac{1}{n} \quad (12.387)$$

avec les inégalités (12.384) et (12.386) :

$$\ln(x) \leq \sum_{n \geq x} \frac{1}{n} \leq C \sum_{q \in S_x} \frac{1}{q} \leq C \leq \exp \left(\sum_{p \in P_x} \frac{1}{p} \right). \quad (12.388)$$

En passant au logarithme,

$$\ln(\ln(x)) \leq \ln(C) + \sum_{p \in P_x} \frac{1}{p}. \quad (12.389)$$

Ceci montre la divergence de la série de droite. Nous cherchons maintenant une borne pour C . Pour cela nous écrivons

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} \quad (12.390a)$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad (12.390b)$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{N} \quad (12.390c)$$

$$\leq 2. \quad (12.390d)$$

Donc $C \leq 2$. □

Ce théorème prend une nouvelle force en considérant le théorème de Müntz 16.99 qui dit qu'alors l'ensemble $\text{Span}\{x^p \text{ tel que } p \text{ est premier}\}$ est dense dans les fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme ou $\|\cdot\|_2$.

12.8 Chiffrement RSA

Ce passage sur RSA provient en bonne partie de la la page Wikipédia.

Alice veut envoyer un message à Bob. L'idée est que Bob va donner à Alice une clef publique qui va permettre de chiffrer le message tandis que Bob va garder pour lui une clef privée qui permet de déchiffrer.

12.8.1 Mise en place par Bob

Bob se crée une paire de clef publique, clef privée de la façon suivante.

- (1) Bob choisit deux nombres premiers distincts p, q .
- (2) Il calcule $n = pq$.
- (3) Par le corollaire 12.118, l'indicatrice d'Euler $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ est facile à calculer pour Bob.
- (4) Bob choisit $e \in \mathbb{N}$ premier avec $\varphi(n)$, puis d tel que $ed \in [1]_{\varphi(n)}$.

Maintenant la paire est : clef publique (n, e) et clef privée (n, d) ³⁵.

Bob envoie la paire (n, e) à Alice.

Remarque 12.121.

Ici nous ne supposons pas que la communication soit sûre. Une tierce personne peut intercepter le message. D'ailleurs en principe les gens publient leurs clef publique sur leurs sites, voire sur des sites dédiés. Le problème de l'identification reste à résoudre à l'ancienne.

³⁵. Le fait que e soit public et d soit privé est une convention. e comme *encryption* et d comme *decryption*.

12.8.2 Chiffrement

Nous chiffons en utilisant la clef publique (n, e) . D'abord Alice se débrouille pour transformer son message en un nombre plus petit que n . Soit M ce message. Alice code M en

$$C = M^e \pmod{n}. \quad (12.391)$$

Tout le truc est que nous allons voir que l'application $x \mapsto x^e$ est une bijection de $\mathbb{F}_n$ et que l'inverse est facile à calculer par Bob et difficile pour les autres. Alice envoie C à Bob. Encore une fois, nous ne supposons pas que cette communication soit privée. Le nombre C peut être intercepté.

12.8.3 Déchiffrement

Nous allons montrer que $M = C^d \pmod{n}$, et donc que Bob, connaissant (n, d) , peut déchiffrer. D'abord

$$C^d = (M^e)^d = M^{ed}, \quad (12.392)$$

mais nous savons qu'il existe k tel que

$$ed = 1 + k\varphi(n) = 1 + k(p-1)(q-1). \quad (12.393)$$

L'étape astucieuse est de remarquer que

$$M^{1+k(p-1)(q-1)} \in [M]_p \cap [M]_q. \quad (12.394)$$

Pour montrer cela nous utilisons le petit théorème de Fermat 4.19 et la remarque 4.20.

— Si M est premier avec p , alors $M^{p-1} \in [1]_p$.

— Si M n'est pas premier avec p , alors M est multiple de p et on sait que $M^{p-1} \in [0]_p = [M]_p$.

Dans les deux cas nous avons (12.394). Le nombre $M^{1+k\varphi(n)} - M$ est donc à la fois multiple de p et de q .

Le lemme chinois 4.29 nous dit immédiatement³⁶ qu'alors

$$M^{1+k\varphi(n)} - M \quad (12.395)$$

est un multiple de $pq = n$, c'est à dire que

$$C^d = M^{ed} \in [M]_n. \quad (12.396)$$

Si on ne croit pas au lemme chinois, on peut utiliser le lemme de Gauss. Posons

$$M^{1+k\varphi(n)} - M = ap = bq. \quad (12.397)$$

Dans ce cas p divise bq , mais q est premier avec p , donc le lemme de Gauss 3.70 nous enseigne³⁷ que p divise b .

12.8.4 Une imprudence à ne pas commettre

Nous avons pris deux cas selon que M soit ou non premier avec p . Une question qui se pose est la suivante : est-ce que c'est une bonne idée d'envoyer un message qui ne soit pas premier avec p ?

Si nous savons que M n'est pas premier avec p , alors nous avons $M^e = l^e p^e$ et $n = pq$ qui sont publics. Donc un calcul de PGCD permettrait de trouver p .

Il faut cependant savoir que

— La probabilité que ça arrive est infime : vu que M est entre 0 et $n = pq$, les multiples de p possibles sont $p, 2p, \dots, pq$. Il y a donc une chance sur p que cela arrive. Typiquement avec des p de l'ordre de 10^{120} , on peut utiliser RSA chaque milliseconde sur chaque atome de l'univers depuis le début des temps que ça ne se serait presque certainement pas encore produit.

36. C'est ici qu'il est important que p ne soit pas égal à q . Si $p = q$, alors le lemme chinois ne fonctionne pas.

37. Ici aussi, si $p = q$, ça ne marche pas.

- De toutes façons Alice ne sait pas vérifier si son message est premier avec p parce qu'elle ne connaît pas p .
- En conclusion la partie de la preuve qui montre que $M^{1+\varphi(n)} \in [M]_p \cap [M]_q$ dans le cas M non premier avec p est, à toutes fins pratiques, inutile parce que ce cas de figure ne se présentera jamais dans toutes l'histoire de l'univers, même pas avec une civilisation intelligente autour de chaque étoile.

Problèmes et choses à faire

Est-ce que ces trois points sont corrects ?

12.8.5 Problèmes calculatoires

Pour implémenter RSA, il faut pouvoir faire (au moins) trois choses :

- (1) Trouver de grands nombres premiers.
- (2) Trouver des couples de Bézout.
- (3) Calculer M^e lorsque e est très grand.

En ce qui concerne le problème de trouver des nombres premiers, c'est compliqué, mais il faut savoir qu'il y en a plein. À 120 chiffres, il y a environ autant de nombres premiers que d'atomes dans 10^{20} fois l'univers connu. Cela rend impossible toute tentative de factoriser un grand nombre en essayant toutes les possibilités. Même pas en science-fiction³⁸.

Trouver des nombres u et v tels que $Au + Bv = \text{pgcd}(A, B)$ est un problème expliqué en 2.5.3.

En ce qui concerne le calcul de M^e lorsque e est grand, il n'est évidemment pas pensable de faire $M \cdot M \cdot \dots \cdot M$ avec e facteurs. Un truc pour calculer en moins d'étapes est l'**exponentiation rapide**. Si $e = 2k$ est pair, nous calculons

$$M^e = (M^k)^2; \quad (12.398)$$

si $e = 2k + 1$ alors nous calculons

$$M^e = M(M^k)^2. \quad (12.399)$$

Le calcul prend alors seulement environ $\log_2(e)$ étapes. Pour donner une idée,

$$\log_2(10^{120}) \simeq 400. \quad (12.400)$$

Très raisonnable, mais un ordinateur reste indispensable.

12.8.6 La solidité de RSA

La solidité de la méthode repose sur deux conjectures (non démontrées!!) :

- Pour déchiffrer il *faut* connaître p et q .
- La difficulté de trouver p et q en partant de $n = pq$ est exponentielle en n .

Dans la méthode de déchiffrement proposée ici, p et q sont utilisés pour calculer d qui est solution de $ed = [1]_{\varphi(n)}$. La seule formule connue pour calculer $\varphi(n)$ est $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Si on trouve plus simple, alors RSA peut être craqué.

12.8.7 Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme

Il est souvent dit que différents systèmes de chiffrement peuvent aider à avoir des discussions «discrètes» dans les régimes totalitaires. La technologie au service de la démocratie, voilà qui enthousiasme la jeunesse³⁹. La réalité est qu'il est souvent possible de craquer un système de chiffrement arbitrairement complexe, même sans connaître le petit théorème de Fermat ...
... tout dépend du contexte.

³⁸. Cela donne une idée des connaissances en math des klingons, dont le docteur Spock parvient à craquer le code mentalement en deux heures.

³⁹. Cela dit, le navigateur Tor, qui est un pur produit de RSA, permet effectivement d'accéder en France aux sites bloqués pour apologie du terrorisme (mars 2015).

12.9 Représentations et caractères

Une représentation est **fidèle** si elle est injective en tant que application $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Ce ne sont pas chacun des $\rho(g)$ qui doivent être injectifs. La dimension de V est le **degré** de la représentation (V, ρ) .

Si G est un groupe, l'ensemble des homomorphismes $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ est un groupe pour la multiplication. Un élément de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ est un **caractère abélien**. Le nom «abélien» vient du fait que le caractère prenne ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Nous notons $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

Théorème 12.122.

Soit G un groupe abélien fini. Alors G est isomorphe à $\hat{G}$.

L'isomorphisme n'est pas canonique.

Démonstration. Étant donné la structure des groupes abéliens finis donnée par le théorème 12.112, nous commençons par nous concentrer sur $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq U_n = \{\xi \in \mathbb{C} \text{ tel que } \xi^n = 1\}. \quad (12.401)$$

Pour cela nous avons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \psi: \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned} \quad (12.402)$$

Notons que si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, alors $f(k) = f(1)^k$, donc ψ est bien un isomorphisme. Cela nous amène à définir

$$\begin{aligned} \varphi: \mathrm{Hom}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}^* n \cdot)\right) &\rightarrow U_n \\ g &\mapsto f(1). \end{aligned} \quad (12.403)$$

Remarquons que pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ on a bien $f(1)^n = 1$. En effet si $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $f([k]) = f(1)^k$ et en particulier

$$f(1)^n = f([n]) = f(0) = 1. \quad (12.404)$$

Donc $f(1) \in U_n$. Le φ est injective parce que si $f(1) = g(1)$ alors $f = g$ du fait que $f(k) = f(1)^k = g(1)^k = g(k)$.

Nous en sommes à avoir prouvé que $\mathbb{Z}/\hat{n}\mathbb{Z} \simeq U_n$. Il faudrait encore montrer que $U_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour cela nous nous rappelons du lemme 3.8 nous ayant raconté que le groupe U_n des racines de l'unité était cyclique et d'ordre n . Il est donc bien isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Passons au cas où

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}. \quad (12.405)$$

Dans ce cas nous montrons que

$$\begin{aligned} \alpha: \bigtimes_{i=1}^k \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\rightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \\ \alpha(\chi_1, \dots, \chi_k)(g_1, \dots, g_k) &= \chi_1(g_1) \dots \chi_k(g_k). \end{aligned} \quad (12.406)$$

Ce α est injectif parce qu'en appliquant l'égalité

$$\alpha(\chi_1, \dots, \chi_k) = \alpha(\chi'_1, \dots, \chi'_k) \quad (12.407)$$

à l'élément $g = (9, \dots, 1, \dots, 0)$ alors nous trouvons $\chi_i(1) = \chi'_i(1)$ parce que $\chi_j(0) = 1$. Du coup $\chi_i = \chi'_i$.

L'application α est en plus surjective. En effet si $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, alors nous définissons

$$\chi_i(g_i) = \chi(0, \dots, g_i, \dots, 0), \quad (12.408)$$

et nous avons alors $\alpha(\chi_1, \dots, \chi_k) = \chi$.

Nous devons encore montrer que α est un homomorphisme. Si $\chi, \chi' \in \times_{i=1}^k \text{Hom}(\mathbb{F}_{d_i}, \mathbb{C}^*)$, alors

$$\alpha(\chi\chi')(g_1, \dots, g_k) = (\chi_1\chi'_1)(g_1) \dots (\chi_k\chi'_k)(g_k) \quad (12.409a)$$

$$= \chi_1(g_1) \dots \chi_k(g_k) \chi'_1(g_1) \dots \chi'_k(g_k) \quad (12.409b)$$

$$= \alpha(\chi)(g_1, \dots, g_k) \alpha(\chi')(g_1, \dots, g_k) \quad (12.409c)$$

$$= (\alpha(\chi)\alpha(\chi'))(g_1, \dots, g_k). \quad (12.409d)$$

Donc $\alpha(\chi\chi') = \alpha(\chi)\alpha(\chi')$. □

Théorème 12.123.

Soit G un groupe abélien fini. Les groupes G et $\hat{G}$ sont isomorphes et un isomorphisme canonique est donné par $\alpha: g \mapsto f_g$ donné par

$$f_g(\chi) = \chi(g). \quad (12.410)$$

Démonstration. D'abord f_g est bien un caractère de $\hat{G}$ parce que

$$f_g(\chi\chi') = (\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g) = f_g(\chi)f_g(\chi'). \quad (12.411)$$

Le fait que α soit un homomorphisme de groupes est direct :

$$f_{gg'}(\chi) = \chi(gg') = \chi(g)\chi(g') = f_g(\chi)f_{g'}(\chi) = (f_g f_{g'}) (\chi). \quad (12.412)$$

D'autre part nous savons que G et $\hat{G}$ ont le même cardinal. Il suffit donc de prouver l'injectivité de α pour être sûr de la bijectivité. Pour cela nous devons prouver que si $g \neq e$ alors $f_g \neq f_e$. Nous savons que pour tout caractère $\chi \in \hat{G}$, $f_e(\chi) = \chi(e) = 1$. Donc pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, nous devons trouver $\chi \in \hat{G}$ tel que $\chi(g) \neq 1$.

En vertu de ce que nous connaissons sur la structure des groupes abéliens finis (théorème 12.112), nous commençons $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons le caractère donné par $\chi([1]) = e^{2\pi i/n}$. Ce χ est un isomorphisme entre G et $\text{U}(n)$; nous n'avons $\chi([k]) = 0$ que si $[k] = [n] = [0]$. Pour rappel dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le neutre est $e = 0$ et non $e = 1$.

Passons au cas général :

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \quad (12.413)$$

Si $g = (g_1, \dots, g_k)$ est non nul dans G , alors il existe i tel que $g_i \neq 0$ et on prend

$$\chi(g_1, \dots, g_k) = \chi_i(g_i) \quad (12.414)$$

où χ_i est le caractère $\chi_i([1]) = e^{2\pi i/n_i}$. Ce χ est alors un caractère non trivial de G . □

12.9.1 Crochet de dualité et transformée de Fourier

Si G est un groupe abélien, nous définissons le crochet de dualité entre G et $\hat{G}$ par

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: G \times \hat{G} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ \langle g, \chi \rangle &= \chi(g). \end{aligned} \quad (12.415)$$

Notons que l'image de ce crochet n'est pas $\mathbb{C}^*$ entier, mais seulement le groupe unitaire $\text{U}(n)$ où n est l'exposant⁴⁰ de G .

Si f, g sont des applications de G dans $\mathbb{C}$, alors on leur associe le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s) \overline{g(s)}. \quad (12.416)$$

40. Définition 2.12.

Lemme 12.124.

Les caractères de G forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$ pour ce produit scalaire.

Démonstration. Étant donné que les $\chi(s)$ sont des nombres complexes de module 1, nous avons $\chi(s)\overline{\chi(s)} = 1$ et par conséquent $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Si par contre $\chi \neq \chi'$, alors il existe $s_0 \in G$ tel que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$. Dans ce cas en effectuant un changement de variable $s \rightarrow s_0 s$ dans la sommation,

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi(s) \overline{\chi'(s)} \quad (12.417a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi(s_0 s) \overline{\chi'(s_0 s)} \quad (12.417b)$$

$$= \frac{1}{|G|} \chi(s_0) \overline{\chi'(s_0)} \sum_{s \in G} \chi(s) \overline{\chi'(s)}. \quad (12.417c)$$

Donc nous avons trouvé

$$\langle \chi, \chi' \rangle (1 - \chi(s_0) \overline{\chi'(s_0)}) = 0. \quad (12.418)$$

Mais vu que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$, la parenthèse est non nulle (pour rappel $\chi(s_0)$ est un complexe de module 1) et par conséquent $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

Nous déduisons immédiatement que les caractères forment une famille libre parce que si $\sum_i \chi_i = 0$ (la somme est sur tous les caractères), alors en prenant le produit scalaire avec χ_k ,

$$\sum_i a_i \langle \chi_k, \chi_i \rangle = 0, \quad (12.419)$$

et donc $a_k = 0$.

Les caractères forment donc un système libre orthonormé. De plus l'espace engendré à la bonne dimension parce que le cardinal de l'ensemble des caractères est la dimension (complexe) de l'espace des fonction de G dans $\mathbb{C}$ parce que, en utilisant l'isomorphisme entre G et $\hat{G}$,

$$\text{Card } \hat{G} = \text{Card}(G) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^G. \quad (12.420)$$

La première □

Du fait que les caractères forment une base orthonormée, nous pouvons écrire, pour toute application $f: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle \chi, f \rangle \chi. \quad (12.421)$$

À une fonction $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ nous associons la **transformée de Fourier**

$$\begin{aligned} \hat{f}: \hat{G} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \langle \chi, f \rangle. \end{aligned} \quad (12.422)$$

Nous avons donc aussi une espèce de formule d'inversion

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi \quad (12.423)$$

qui n'est qu'une réécriture de 12.421.

12.9.2 Groupes non abéliens

Nous avons vu que le groupe des caractères $\hat{G}$ contenait toute l'information sur un groupe abélien. Malheureusement, pour les groupes non abéliens, ça ne va pas suffire, et nous allons introduire la notion de représentations, dont les caractères seront un cas particulier de dimension un.

Proposition 12.125.

Soit G un groupe (pas spécialement abélien). Nous avons

$$\hat{G} \simeq \text{Hom}(G/D(G), \mathbb{C}^*). \quad (12.424)$$

Démonstration. Ce qui fait fonctionner la preuve est le fait que si $f: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme, alors f s'annule sur $D(G)$. L'isomorphisme est

$$\begin{aligned} \psi: \hat{G} &\rightarrow \text{Hom}(G/D(G), \mathbb{C}^*) \\ \psi(f)[g] &= f(g). \end{aligned} \quad (12.425)$$

Cette application est bien définie parce que si f est un homomorphisme,

$$f(gklk^{-1}l^{-1}) = f(g). \quad (12.426)$$

D'autre part ψ est un homomorphisme de groupe parce que

$$\psi(f_1 f_2)[g] = (f_1 f_2)(g) = f_1(g) f_2(g) = \psi(f_1)[g] \psi(f_2)[g] = (\psi(f_1) \psi(f_2))[g]. \quad (12.427)$$

Pour l'injectivité de ψ , soit f_1 et f_2 telles que $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. Alors pour tout $g \in G$ nous avons

$$\psi(f_1)[g] = \psi(f_2)[g] \quad (12.428)$$

et donc $f_1(g) = f_2(g)$.

Enfin ψ est surjective. En effet, soit $\bar{f} \in \text{Hom}(G/D(G), \mathbb{C}^*)$. Alors nous obtenons $\psi(f) = \bar{f}$ en posant

$$f(g) = \bar{f}[g]. \quad (12.429)$$

Il faut juste vérifier que le f ainsi défini est dans $\hat{G}$, c'est à dire que $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$. $\square$

Cette proposition nous montre que

$$\hat{G} = \widehat{G/D(G)}, \quad (12.430)$$

alors que $G/D(G)$ est abélien; il n'est donc pas tellement possible que $\hat{G}$ contienne beaucoup d'informations intéressantes sur G .

12.9.3 Représentations linéaires des groupes finis

Soit V , un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Une **représentation** linéaire de G dans V est un homomorphisme $\rho: G \rightarrow \text{End}(V)$. Nous notons (V, ρ) cette représentation. Voire ρ tout court si l'espace vectoriel n'est pas ambigu.

Si $\dim V = 1$, alors $\text{GL}(V) = \mathbb{C}^*$ et les représentation sont les caractères abéliens.

Exemple 12.126

Considérons le triangle équilatéral A, B, C , par exemple donné par les points

$$A = 1 \quad (12.431a)$$

$$B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (12.431b)$$

$$C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (12.431c)$$

$$(12.431d)$$

Dans la base (pas orthonormée) $\{A, B\}$ de $\mathbb{R}^2$, ces trois points sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (12.432)$$

Le groupe symétrique S_3 agit sur le triangle par permutation des sommets. Vues dans la base $\{A, B\}$, les transpositions correspondent aux matrices

$$(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.433a)$$

$$(A, C) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.433b)$$

$$(B, C) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12.433c)$$

La permutation (A, B, C) s'écrit comme $(A, B, C) = (A, C)(A, B)$ et on lui associe la matrice

$$(A, B, C) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12.434)$$

C'est bien le produit des matrices de (A, C) et de (A, B) . De la même façon nous avons

$$(BAC) < ++ > \quad (12.435)$$

$< ++ >$

$\triangle$

Si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations du groupe G , alors nous définissons la **somme directe** par $(V \oplus V', \rho \oplus \rho')$ donné par

$$(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix} \in \text{GL}(V \oplus V'). \quad (12.436)$$

Nous noterons souvent $2V$ pour la représentations $(V, \rho) \oplus (V, \rho)$ et plus généralement l'écriture

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \quad (12.437)$$

signifiera la représentation somme de k_i termes de la représentation W_i . Ici encore un abus est commis entre la représentation (ρ_i, W_i) et l'espace W_i .

12.9.4 Module

Nous considérons la $\mathbb{C}$ -algèbre $G[\mathbb{C}]$ des combinaisons (formelles) d'éléments de G à coefficients dans G , c'est à dire l'ensemble

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{s \in G} a_s s \right\} \quad (12.438)$$

avec le produit hérité de la bilinéarité :

$$\sum_{s \in G} \sum_{t \in G} a_s b_t st = \sum_s \sum_t a_s b_{s^{-1}t} t, \quad (12.439)$$

et la somme

$$\left(\sum_s a_s s \right) + \sum_t b_t t = \sum_{s \in G} (a_s + b_s) s. \quad (12.440)$$

Le tout est une $\mathbb{C}$ -algèbre agissant sur V par

$$\left(\sum_s a_s s \right) v = \sum_{s \in G} a_s \rho(s) v \in V \quad (12.441)$$

Les sous-modules indécomposables seront les représentations irréductibles.

Définition 12.127.

La représentation (V, ρ) du groupe G est **irréductible** si les seuls sous-espaces invariants de V sous $\rho(G)$ sont V et $\{0\}$.

Exemple 12.128

La représentation de S_3 sur $\mathbb{R}^2$ donnée par les permutations des sommets d'un triangle équilatéral donnée dans l'exemple 12.126 est irréductible. $\triangle$

La question qui vient est de savoir si une représentation possédant des sous-espaces invariants peut être écrite comme la somme de représentations irréductibles.

Proposition 12.129.

Soit (V, ρ) une représentation linéaire de dimension finie d'un groupe fini⁴¹. Si W_1 est un sous-espace stable⁴², alors il existe un sous-espace W_2 également stable et tel que $V = W_1 \oplus W_2$.

Toute représentation linéaire est décomposable en représentations irréductibles.

Démonstration. Soit $P: V \rightarrow V$ un projecteur sur W_1 , c'est à dire que $P^2 = P$ et $P(V) = W_1$. Pour construire un tel projecteur, on peut par exemple prendre un supplémentaire de W_1 dans V puis utiliser la décomposition⁴³. Nous considérons l'opérateur

$$P_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}. \quad (12.442)$$

Prouvons que ce P_G est encore un projecteur. D'abord pour tout $g \in G$ nous avons

$$\rho(g)P_G\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(gs)P\rho(gs)^{-1} = P_G. \quad (12.443)$$

La dernière égalité est un changement de variables dans la somme⁴⁴. Cela signifie que $P_G\rho = \rho P_G$. Nous avons même $P_GP = P$ parce que si $v \in W_1$, alors

$$P_G(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(s)P \underbrace{\rho(s)^{-1}v}_{\in W_1} \quad (12.444a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_s \rho(s)\rho(s)^{-1}v \quad (12.444b)$$

$$= v. \quad (12.444c)$$

Avec cela nous pouvons conclure que $P_G^2 = P_G$ parce que

$$P_G \circ P_G = \frac{1}{|G|} \sum_g P_G\rho(g)P\rho(g)^{-1} \quad (12.445a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g)P_GP\rho(g)^{-1} \quad (12.445b)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g)P\rho(g)^{-1} \quad (12.445c)$$

$$= P_G. \quad (12.445d)$$

Donc P_G est un projecteur, est stable sous les conjugaisons par $\rho(g)$ et commute avec $\rho(g)$. Nous décomposant Id de façon évidente en

$$\text{Id} = P_G + (\text{Id} - P_G). \quad (12.446)$$

Étant donné que l'opérateur P_G commute avec tous les $\rho(g)$, les noyaux de P_G et $\text{Id} - P_G$ sont des sous-espaces invariants. Vu que P_G est un projecteur, nous avons $q(P_G) = 0$ avec $q(X) = X^2 - X$.

41. La démonstration marche aussi pour les groupes compacts, mais il faudrait des intégrales.

42. c'est à dire si ρ n'est pas irréductible.

43. Ou encore prendre une base de W_1 , l'étendre en une base de V et définir P comme l'annulation des coefficients des vecteurs «complétant» la base.

44. Et c'est ça qui demande un peu de technique pour écrire la preuve dans le cas d'un groupe compact : il faut une mesure de Haar.

Pour appliquer le lemme des noyaux (théorème 6.237), nous remarquons que $q(X) = X(X - 1)$ et donc

$$V = \ker P_G \oplus \ker(P_G - \mathbb{1}). \quad (12.447)$$

Si nous posons $W_2 = \ker P_G$, il reste à voir que $\ker(P_G \mathbb{1}) = W_1$. D'abord $W_1 \subset \ker(P_G - \text{Id})$ parce que si $w \in W_1$, ce dernier étant stable,

$$P_G w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P \underbrace{\rho(g)^{-1} w}_{\in W_1} \quad (12.448a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w \quad (12.448b)$$

$$= w. \quad (12.448c)$$

Pour prouver l'inclusion inverse, nous savons que P_G et P sont des projecteurs tels que $P_G P = P$, ce qui signifie que l'image de P_G est incluse à celle de P , c'est à dire à W_1 . Mais $\text{Image}(P_G) = \ker(\mathbb{1} - P_G)$, donc

$$\ker(\mathbb{1} - P_G) = \text{Image}(P_G) \subset \text{Image}(P) = W_1. \quad (12.449)$$

La représentation ρ se décompose donc en deux sous-représentations (ρ, W_1) et ρ, W_2 . Si l'une des deux n'est pas irréductible, le processus peut recommencer. Vu que la dimension de V est finie, toute représentation se décompose en une somme finie de représentation irréductibles. $\square$

12.9.5 Structure hermitienne

Soit (ρ, V) une représentation de G sur un espace vectoriel complexe V . Nous voulons munir V d'un produit scalaire hermitien (définition 6.272) tel que les opérateurs $\rho(g)$ soient tous des isométries. C'est à dire que nous voudrions définir $\langle u, v \rangle_G$ de telle sorte à avoir

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle_G = \langle u, v \rangle_G \quad (12.450)$$

pour tout $g \in G$. Nous commençons par considérer un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quelconque et puis nous définissons

$$\langle u, v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle. \quad (12.451)$$

Nous devons vérifier que c'est un produit. La seule des conditions dont la vérification n'est pas immédiate est celle de positivité. Pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$, nous avons $\langle \rho(g)v, \rho(g)v \rangle$ est positif et nul si et seulement si $\rho(g)v = 0$. Étant donné que $\rho(e)v = v$, parmi les termes de la somme

$$\langle u, u \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)v \rangle, \quad (12.452)$$

au moins un est strictement positif (pourvu que $v \neq 0$); les autres sont positifs ou nuls. Par conséquent $\langle v, v \rangle_G = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Donc les groupes finis peuvent être vus comme des parties de groupes d'isométrie. De la même façon, en utilisant une mesure de Haar pour faire la moyenne, nous pouvons plonger les groupes compacts dans des groupes unitaires.

12.9.6 Caractères

Soit (V, ρ) une représentation linéaire du groupe G . Le **caractère** de ρ est la fonction

$$\begin{aligned} \chi_\rho: G &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto \text{Tr}(\rho(s)). \end{aligned} \quad (12.453)$$

Par invariance de la trace, nous avons

$$\chi_\rho(sts^{-1}) = \chi_\rho(t), \quad (12.454)$$

ce qui fait que le caractère est une fonction constante sur les classes de conjugaison.

Un **caractère irréductible** est un caractère d'une représentation irréductible.

Définition 12.130.

Une application $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ est **centrale** si elle est constante sur les classes de conjugaison.

Les traces sont des applications centrales.

L'ensemble des fonctions centrales sur un groupe fini (ou tout au moins ayant un nombre fini de classes de conjugaison) est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension égale au nombre de classes, et nous pouvons mettre le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s) \overline{g(s)}. \quad (12.455)$$

C'est une forme hermitienne sur l'espace des fonction centrales.

12.10 Équivalence de représentations et caractères

Cette section prend des éléments des articles lemme de Schur, caractère d'une représentation, fonction centrale et trace de wikipédia.

Nous disons que les deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont **équivalentes** si il existe une bijection linéaire $f: V \rightarrow V'$ telle que

$$f \circ \rho = \rho' \circ f. \quad (12.456)$$

Nous disons alors que f **entrelace** ρ et ρ' .

Théorème 12.131 (Théorème de Schur).

Si (V, ρ) et (V', ρ') sont des représentations irréductibles non équivalentes alors la seule application linéaire $f: V \rightarrow V'$ entretenant ρ et ρ' est la fonction nulle.

En d'autres termes, soit les représentations sont équivalentes (et il y a un isomorphisme), soit il n'y a même pas un homomorphisme.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(V, V')$ telle que $f \circ \rho = \rho' \circ f$. Alors $\ker f$ est un sous-espace stable sous $\rho(G)$, et $\text{Image}(f)$ est un sous-espace de V' stable par $\rho'(G)$. Par irréductibilité, nous avons que $\ker(f) = \{0\}$ ou V . Même chose pour $\text{Image}(f)$. Il y a deux possibilités.

- (1) Si $\ker(f) = \{0\}$, alors $\text{Image}(f) \neq \{0\}$ et alors $\text{Image}(f) = V'$. Du coup f est injective et surjective, c'est à dire est un isomorphisme.
- (2) Si $\ker(f) = V$, alors $f = 0$.

□

Corollaire 12.132 (Schur pour les représentations sur $\mathbb{C}$).

Soit (V, ρ) une représentation irréductible, alors l'ensemble

$$\text{End}_G(V, \rho) = \{f \in \text{End}(V) \text{ tel que } \rho \circ f = f \circ \rho\} \quad (12.457)$$

est l'ensemble des homothéties.

Démonstration. Soit $f \in \text{End}_G(V, \rho)$. Vu que l'espace est sur $\mathbb{C}$, l'endomorphisme f a une valeur propre λ . L'opérateur $g = f - \lambda \mathbb{1}$ est aussi un opérateur d'entrelacement de ρ alors que $\ker(g) \neq \{0\}$ par définition de valeur propre. Du coup $\ker(g) = V$, ce qui signifie que f est l'isométrie de rapport λ : $f = \lambda \text{Id}$. □

Lemme 12.133.

Si (ρ, V) et (ρ', V') sont des représentations équivalentes de caractères χ et χ' , alors $\chi = \chi'$.

Démonstration. Si $A: V \rightarrow V'$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entre ρ et ρ' , c'est à dire si pour tout g , $\rho'(g)A = A\rho(g)$, alors $\rho'(g) = A\rho(g)A^{-1}$ et

$$\chi'(g) = \text{Tr}(\rho'(g)) = \text{Tr}(A\rho(g)A^{-1}) = \text{Tr}(\rho(g)) \quad (12.458)$$

parce que la trace est un invariant de similitude (lemme 6.346). $\square$

Lemme 12.134.

Si χ est le caractère de la représentation complexe (V, ρ) du groupe fini G , alors pour tout $g \in G$ nous avons $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Démonstration. Par le corollaire 2.40 au théorème de Lagrange, nous avons $g^{|G|} = e$ et donc en tant qu'opérateur, $\rho(g)^{|G|} = \mathbb{1}$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont donc des racines de l'unité. Si nous notons λ_i ces valeurs propres, alors $\chi(g) = \sum_i \lambda_i$, et en considérant la matrice dans sa base de diagonalisation (lemme de Schur complexe, 6.288), nous voyons que

$$\chi(g^{-1}) = \text{Tr}(\rho(g)^{-1}) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i}. \quad (12.459)$$

Mais λ_i étant une racine de l'unité nous avons $\frac{1}{\lambda_i} = \bar{\lambda}_i$, ce qui fait que

$$\chi(g^{-1}) = \sum_i \bar{\lambda}_i = \overline{\chi(g)}. \quad (12.460)$$

$\square$

Proposition 12.135.

Soient deux représentations irréductibles complexes (V, ρ) et (V', ρ') du même groupe fini G , et χ et χ' leurs caractères respectifs. Nous avons

- (1) $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ si ρ et ρ' ne sont pas équivalentes.
- (2) $\langle \chi, \chi' \rangle = 1$ si les représentations sont équivalentes.

Démonstration. Nous considérons les bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V et $\{f_1, \dots, f_m\}$ de V' . Puis nous considérons la matrice $F(k, l) = E_{kl} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ où pour rappel, E_{kl} est la matrice de composantes $(E_{kl})_{ij} = \delta_{ki}\delta_{lj}$. Nous posons

$$F_G(k, l) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ F(k, l) \circ \rho'(g)^{-1}. \quad (12.461)$$

En nous permettant de ne pas réécrire les indices k et l de F et F_G , nous montrons que F_G entrelace ρ et ρ' :

$$F_G \circ \rho'(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(s) \circ F \circ \rho'(s^{-1}) \circ \rho(t) \quad (12.462a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_s \rho(s) F \rho'(s^{-1}t) \quad (12.462b)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_k \rho(tk) F \rho'(k^{-1}) \quad (12.462c)$$

$$= \frac{1}{|G|} \rho(t) \sum_k \rho(k) F \rho'(k^{-1}) \quad (12.462d)$$

$$= \rho(t) \circ F_G. \quad (12.462e)$$

Dans ce calcul nous avons effectué le changement de variables $k = (s^{-1}t)^{-1}$ qui donne $s = tk$.

Par ailleurs nous avons

$$\left(\rho(g)F(k, l)\rho'(g^{-1})\right)_{ij} = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m \rho(g)_{ir} F(k, l)_{rs} \rho'(g^{-1})_{sj} \quad (12.463a)$$

$$= \sum_{rs} \rho(g)_{ir} \delta_{kr} \delta_{ls} \rho'(g^{-1})_{sj} \quad (12.463b)$$

$$= \rho(g)_{ik} \rho'(g^{-1})_{lj}, \quad (12.463c)$$

et par conséquent

$$F_G(k, l)_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)_{ik} \rho'(g^{-1})_{lj}. \quad (12.464)$$

Si χ et χ' sont les caractères de ρ et ρ' , alors nous avons le produit (12.455) qui donne

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi'(g)} \quad (12.465a)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g) \chi'(g^{-1}) \quad \text{lemme 12.134} \quad (12.465b)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_g \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \rho(g)_{ii} \rho'(g^{-1})_{jj} \quad (12.465c)$$

$$= \sum_{ij} F_G(i, j)_{ij} \quad \text{par (12.464).} \quad (12.465d)$$

Si les représentations ρ et ρ' ne sont pas équivalentes, le fait que F_G en soit un opérateur d'entrelacement implique par le théorème de Schur 12.131 que $F_G = 0$ et donc $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

Si au contraire les représentations sont équivalentes, alors le lemme 12.133 nous dit que $\chi = \chi'$ et nous reprenons la définition :

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = 1 \quad (12.466)$$

parce que les nombres $\chi(g)$ sont des racines de l'unité. $\square$

12.10.1 Représentation régulière

Nous notons λ la **représentation régulière gauche**, agissant sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions $G \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$(\lambda(g)f)(g) = f(g^{-1}h). \quad (12.467)$$

D'autre part nous considérons la fonction $\delta_g : G \rightarrow \mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou pire) définie par

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (12.468)$$

La représentation régulière agit sur les fonctions δ_s de la façon suivante :

$$\lambda(g)\delta_s = \delta_{gs} \quad (12.469)$$

parce que $(\lambda(g)\delta_s)(h) = \delta_s(g^{-1}h) = \delta_{gs}(h)$.

Lemme 12.136.

Le caractère de la représentation régulière gauche est donné par

$$\chi_\lambda = |G|\delta_e. \quad (12.470)$$

Démonstration. Appliquer l'équation (12.470) fonctionne parce que $\chi_\lambda(e)$ est la dimension de l'espace des fonctions sur G , c'est à dire $|G|$. Si par contre $g \neq e$, alors $\lambda(g)$ est une matrice de permutation (dans la base des δ_h) et a donc tous ses éléments diagonaux nuls. $\square$

Si ρ est une représentation et si f est une fonction sur le groupe, alors nous considérons l'opérateur

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g). \quad (12.471)$$

Proposition 12.137 ([181]).

Si (ρ, V) est une représentation irréductible et si f est une fonction centrale sur G , alors l'opérateur ρ_f est une homothétie de V de rapport

$$\frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) \quad (12.472)$$

où χ est le caractère de ρ .

Démonstration. Nous commençons par voir que ρ_f entrelace ρ . En effet,

$$\rho(t)^{-1} \circ \rho_f \circ \rho(t) = \sum_g f(g) \rho(t^{-1}gt) \quad (12.473a)$$

$$= \sum_h f(tht^{-1}) \rho(g) \quad h = t^{-1}gt \quad (12.473b)$$

$$= \sum_h f(h) \rho(h) \quad (12.473c)$$

$$= \rho_f \quad (12.473d)$$

où en écrivant $f(tht^{-1}) = f(h)$, nous avons utilisé le fait que f était centrale. Étant donné que ρ_f entrelace une représentation irréductible, le lemme de Schur (12.131) nous indique que ρ_f est une homothétie. Soit k le facteur d'homothétie. Alors d'une part $\text{Tr}(\rho_f) = nk$. D'autre part,

$$\text{Tr}(\rho_f) = \text{Tr} \left(\sum_g f(g) \rho(g) \right) \quad (12.474a)$$

$$= \sum_g f(g) \text{Tr}(\rho(g)) \quad (12.474b)$$

$$= \sum_g f(g) \chi(g). \quad (12.474c)$$

Du coup effectivement

$$k = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g). \quad (12.475)$$

$\square$

12.10.2 Caractères et représentations : suite et fin

Lemme 12.138.

Un groupe fini n'a (à équivalence près) qu'un nombre fini de représentations irréductibles.

Démonstration. Les caractères irréductibles forment un système orthonormé (proposition 12.135) et donc libre parmi les fonctions centrales. Donc il y a au plus autant de caractères irréductibles que la dimension de l'espace des fonctions centrales ; et ce dernier est de dimension finie donnée par le nombre de classes de conjugaison de G . $\square$

Nous savons que les caractères de deux représentations irréductibles sont égaux. Étant donné qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations irréductibles, il existe un nombre fini de caractères irréductibles. Nous pouvons donc fixer les notations suivantes. Les caractères irréductibles seront notés $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, h}$ et nous noterons (σ_i, W_i) une représentation ayant le caractère φ_i .

Théorème 12.139 ([181]).

Soit (ρ, V) une représentation de G de caractère χ . Alors sa décomposition en représentations irréductibles est donnée par

$$(V, \rho) = \bigoplus_{i=1}^h k_i (W_i, \sigma_i) \quad (12.476)$$

avec $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$. En particulier, à permutation près des facteurs, la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles est unique.

Démonstration. La décomposition de χ en caractères irréductibles est donnée par $\chi = \sum_i k_i \varphi_i$; en prenant le produit de cette égalité avec φ_j et en tenant compte de l'orthonormalité des caractères irréductibles,

$$\langle \chi, \varphi_j \rangle = \sum_i k_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = k_j. \quad (12.477)$$

□

Le théorème suivant est ce qui nous permet de dire que l'étude des caractères et l'étude des représentations, c'est la même chose.

Théorème 12.140.

Soit G un groupe fini⁴⁵.

- (1) Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractères.
- (2) Si χ est un caractère, alors
 - (a) $\langle \chi, \chi \rangle \in \mathbb{N}$
 - (b) $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si c'est un caractère irréductible.

Démonstration. Nous démontrons chaque point séparément.

- (1) Le fait que deux représentations équivalentes aient même caractère est le lemme 12.133. Nous montrons l'autre sens. Si (ρ, V) et (ρ', V') sont deux représentations irréductibles de décompositions

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \quad (12.478a)$$

$$V' = \bigoplus_i k'_i W_i, \quad (12.478b)$$

alors si $\chi = \chi'$, nous avons $k_i = k'_i$ et les représentations sont identiques.

- (2) Soit (ρ, V) une représentation ayant χ comme caractère. En posant $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$ nous avons la décomposition en représentations irréductibles

$$V = \bigoplus_i k_i W_i, \quad (12.479)$$

et aussi

$$\langle \chi, \chi \rangle = \left\langle \sum_i k_i \varphi_i, \sum_j k_j \varphi_j \right\rangle = \sum_i k_i^2 \in \mathbb{N}. \quad (12.480)$$

Ce nombre est de plus égal à 1 si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls sauf un qui vaudrait 1. Ce cas donne une représentation irréductible.

□

Proposition 12.141.

Si (λ, R) est la représentation régulière gauche de décomposition en représentations irréductibles

$$R = \bigoplus_i k_i W_i, \quad (12.481)$$

alors

45. Nous sommes depuis longtemps dans l'étude des représentations des groupes finis.

- (1) $k_i = \dim W_i$,
 (2) $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$,
 (3) pour tout $g \in G$, $\sum_i (\dim W_i) \varphi_i(g) = 0$ ⁴⁶.
 (4) Une autre façon d'énoncer le résultat (3) est de dire que si $\{(n_i, \varphi_i)\}$ est la liste des couples dimension, caractère des représentations irréductibles non équivalentes, alors pour tout $s \in G \setminus \{e\}$ nous avons $\sum_{i=1}^p n_i \varphi_i(s) = 0$ où la somme porte sur les représentations irréductibles non équivalentes.

Démonstration. Nous notons r le caractère de la représentation régulière gauche. Nous avons

$$k_i = \langle r, \varphi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r(s) \overline{\varphi_i(s)} = \overline{\varphi_i(e)}. \quad (12.482)$$

Mais $\varphi_i(e) = \dim W_i \in \mathbb{R}$, donc nous avons bien $k_i = \dim W_i$. Le caractère de la représentation régulière peut alors s'exprimer de deux façons :

$$|G| \delta_e = \sum_i (\dim W_i) \varphi_i. \quad (12.483)$$

En évaluant cette égalité en e nous trouvons directement

$$|G| = \sum_i (\dim W_i)^2, \quad (12.484)$$

et en l'évaluant en $s \neq e$, nous trouvons

$$0 = \sum_i (\dim W_i) \varphi_i(s). \quad (12.485)$$

□

Le théorème suivant est valable pour les groupes finis (comme toute cette section).

Théorème 12.142 ([181]).

Les caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_h$ forment une base orthonormée des fonctions centrales sur G .

Démonstration. Nous savons déjà qu'ils forment un système orthonormé. Considérons le sous-espace $H = \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, h}$ de l'espace des fonctions centrales sur G . En vertu de la proposition 6.28, il nous suffit de prouver que $H^\perp = 0$. Soit donc f , une fonction centrale appartenant à $H^\perp$. Pour tout i , nous avons $\langle f, \varphi_i \rangle = 0$ et donc aussi $\langle \bar{f}, \bar{\varphi}_i \rangle = 0$.

Considérant une représentation irréductible (σ, W) de caractère φ , nous savons par la proposition 12.137 que l'opérateur

$$\sigma_{\bar{f}} = \sum_g \bar{f}(g) \varphi(g) \quad (12.486)$$

est une homothétie de rapport $\langle \bar{f}, \bar{\varphi} \rangle / \dim W = 0$. Étant donné que toutes les représentations sont des sommes directes de représentations irréductibles, en réalité l'opérateur $\rho_{\bar{f}}$ est nul pour toute représentation ρ . En particulier pour la représentation régulière,

$$0 = \lambda_{\bar{f}}(\delta_t) = \sum_{g \in G} \bar{f}(g) \lambda(g)(\delta_t) = \sum_g \bar{f}(g) \delta_{gt}. \quad (12.487)$$

En écrivant cette égalité avec $t = e$ et puis en appliquant à $k \in G$ nous trouvons

$$0 = \sum_g \bar{f}(g) \delta_g(k) = \bar{f}(k). \quad (12.488)$$

Donc $\bar{f} = 0$ et f est nulle.

□

⁴⁶. Cette propriété est appelée «orthogonalité des colonnes» pour une raison qui apparaîtra au moment de compléter le tableau (12.510).

Corollaire 12.143.

Le nombre de représentations irréductibles non équivalentes d'un groupe fini est égal à son nombre de classes de conjugaison.

Démonstration. Le nombre de classes de conjugaison est la dimension de l'espace des fonctions centrales qui elle-même est égale au nombre de caractères irréductibles par le théorème 12.142. Enfin deux caractères irréductibles sont égaux si et seulement si les représentations sous-jacentes sont équivalentes. $\square$

12.11 Représentation produit tensoriel

Soient ρ et ϕ , deux représentations d'un groupe G sur des espaces vectoriels V et W . La représentation **produit tensoriel** est la représentation

$$\begin{aligned} \rho \otimes \phi: G &\rightarrow \text{GL}(V \otimes W) \\ (\rho \otimes \phi)(g)(v \otimes w) &= \rho(g)v \otimes \phi(g)w. \end{aligned} \quad (12.489)$$

Pour trouver son caractère, nous considérons une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{e_\alpha\}$ de W , et la base $\{e_i \otimes e_\alpha\}$ de $V \otimes W$. Donc

$$(\rho \otimes \phi)(g)(e_i \otimes e_\alpha) = \rho(g)e_i \otimes \phi(g)e_\alpha. \quad (12.490)$$

Nous devons savoir quelle est la composante « $e_i \otimes e_\alpha$ » de cette dernière expression, et c'est évidemment

$$\rho(g)_{ii} \phi(g)_{\alpha\alpha}, \quad (12.491)$$

ce qui nous amène à dire que

$$\text{Tr}(\rho \otimes \phi)(g) = \sum_i \sum_\alpha \rho(g)_{ii} \phi(g)_{\alpha\alpha} = \text{Tr}(\rho(g)) \text{Tr}(\phi(g)), \quad (12.492)$$

c'est à dire au final que

$$\chi_{\rho \otimes \phi} = \chi_\rho \chi_\phi. \quad (12.493)$$

12.12 Exemple sur le groupe symétrique

Soit $G = S_3$, un des premiers groupes finis non abéliens. On en a une représentation de dimension deux en tant que permutation des sommets d'un triangle équilatéral, donnée dans l'exemple 12.126; nous notons ρ cette représentation.

Nous y avons aussi la représentation de signature donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon: S_3 &\rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto \epsilon(\sigma) \text{Id}. \end{aligned} \quad (12.494)$$

Et enfin il y a la représentation triviale. Ce sont les trois représentations irréductibles; pour rappel il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison (corollaire 12.143).

Classe de conjugaison	taille	χ_1	χ_ϵ	χ_ρ
Id	1	1	1	2
(A, B)	3	1	-1	0
(A, B, C)	2	1	1	-1

Nous calculons par exemple le produit scalaire

$$\langle \chi_1, \chi_\epsilon \rangle = \frac{1}{6} (1 \cdot \chi_1(\text{Id}) \overline{\chi_\epsilon(\text{Id})} + 3 \cdot \chi_1(A, B) \overline{\chi_\epsilon(A, B)} + 2 \cdot \chi_1(A, B, C) \overline{\chi_\epsilon(A, B, C)}) \quad (12.495a)$$

$$= 0. \quad (12.495b)$$

D'autre part nous avons aussi

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{6} (1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1. \quad (12.496)$$

12.13 Table des caractères du groupe symétrique S_4

Pour la table des caractères de S_4 , voir [1].

Nous savons que les classes de conjugaison dans S_4 sont caractérisées par la structure des décompositions en cycles (proposition 2.73). Elles sont données dans l'exemple 2.75.

Nous avons donc 5 classes de conjugaison, et il nous faut donc 5 représentations irréductibles non équivalentes (corollaire 12.143) dont nous allons chercher les caractères.

La première est la représentation triviale de dimension 1 ; nous notons χ_1 son caractère et nous avons la ligne

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & \text{dimension} & \parallel & \text{Id} & (12) & (123) & (1234) & (12)(34) \\ \hline \chi_1 & 1 & \parallel & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (12.497)$$

Ensuite nous avons la signature qui est un morphisme non trivial $\epsilon: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$. Nous avons alors la ligne

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & \text{dimension} & \parallel & \text{Id} & (12) & (123) & (1234) & (12)(34) \\ \hline \chi_\epsilon & 1 & \parallel & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \quad (12.498)$$

Une troisième représentation pas trop compliquée à trouver est celle

$$\begin{aligned} \rho_p: S_4 &\rightarrow \text{GL}(4, \mathbb{C}) \\ \rho_p(\sigma)e_i &= e_{\sigma(i)}. \end{aligned} \quad (12.499)$$

Cela n'est pas une représentation irréductible parce que $\mathbb{C}^4$ se décompose en deux sous-espaces stables :

$$D = \text{Span}(1, 1, 1, 1) \quad (12.500a)$$

$$H = \{x \in \mathbb{C}^4 \text{ tel que } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}. \quad (12.500b)$$

La représentation induite sur D est la représentation triviale. Puis sur H , elle induit une autre représentations que nous allons noter ρ_s . Nous avons la décomposition $\rho_p = \rho_1 \oplus \rho_s$ et donc

$$\chi_p = \chi_1 + \chi_s. \quad (12.501)$$

Nous savons déjà χ_1 . Le caractère χ_p n'est pas très compliqué parce que $\chi_p(\sigma)$ est une matrice de permutation des vecteurs de base. Donc la matrice $\rho_p(\sigma)$ a un 1 sur la diagonale pour les i tels que $\sigma(i) = i$. Nous avons donc

$$\chi_p(\text{Id}) = 4 \quad \chi_p(12) = 2 \quad (12.502a)$$

$$\chi_p((12)(34)) = 0 \quad \chi_p(123) = 1 \quad (12.502b)$$

$$\chi_p(1234) = 0. \quad (12.502c)$$

Le caractère χ_s peut être calculé par simple soustraction :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & \text{dimension} & \parallel & \text{Id} & (12) & (123) & (1234) & (12)(34) \\ \hline \chi_s & 3 & \parallel & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \quad (12.503)$$

Avant d'ajouter cette ligne au tableau des représentations irréductibles nous devons savoir si ρ_s en est une. Pour cela, tant que nous avons son caractère nous pouvons utiliser le critère du théorème 12.140 :

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma \in S_4} \chi_s(\sigma)^2. \quad (12.504)$$

Nous avons tout de suite $|S_4| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ et puis

$$24\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 24, \quad (12.505)$$

donc oui, le caractère est irréductible parce que $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$. Et nous pouvons donc ajouter la ligne (12.503) à notre tableau. Par ailleurs, nous notons qu'elle est de dimension 3.

Pour le reste nous savons qu'il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison, de telle sorte qu'il ne manque que deux représentations irréductibles. De plus la proposition 12.141 nous dit que si n_i est la dimension de la i^e représentation irréductible, alors

$$|S_4| = \sum_i n_i^2. \quad (12.506)$$

Dans notre situation, si nous nommons n_1 et n_2 les dimensions des deux représentations qui nous manquent, nous avons $24 = n_1^2 + n_2^2 + (1^2 + 1^2 + 3^2)$, c'est à dire $n_1^2 + n_2^2 = 13$. Il n'y a pas des tonnes de sommes de deux carrés qui font 13. Il y a $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$, et c'est tout.

Nous recherchons donc encore une représentation de dimension 2 et une de dimension 3. Pour cela nous allons un peu regarder les produits tensoriels qui s'offrent à nous. Pour faire une dimension 3, il faut faire le produit d'une de dimension 1 par une de dimension 3. Là encore le choix est très limité et nous demande d'essayer

$$\rho_W = \rho_s \otimes \rho_\epsilon \quad (12.507)$$

qui agit sur l'espace $V_2 \otimes V_\epsilon$ par

$$\rho_W(g)(v \otimes x) = \rho_s(g)v \otimes \rho_\epsilon(g)x. \quad (12.508)$$

Pour savoir son caractère nous utilisons la petite formule toute simple (12.493) : nous multiplions case par case les tableaux (12.503) et (12.498) :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_W	3	3	-1	0	1	-1

(12.509)

Avant de réellement ajouter cette ligne au tableau, nous devons nous assurer qu'elle est bien irréductible. Nous utilisons le même critère : $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$, donc c'est bon.

Pour trouver le dernier caractère, que nous nommerons χ_u , il ne faut pas beaucoup d'imagination. Il suffit d'utiliser les relations d'orthogonalité du théorème 12.142, en sachant que la dimension est 2 et qu'alors $\chi_W(\text{Id}) = 2$, c'est pas trop compliqué :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	b	c	d	e

(12.510)

Les relations d'orthogonalité des colonnes de la propriété 12.141 nous permettent de calculer les coefficients manquants. En pratique, il suffit de prendre le produit scalaire de chaque ligne avec la première et d'égaliser avec zéro. Nous trouvons $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, et $e = 2$. Le tableau final est :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	0	-1	0	2

(12.511)

Notons que nous sommes parvenus à remplir la dernière ligne sans rien savoir de la représentation qui va avec.

12.14 Table de caractères du groupe diédral

Cette section vient de [1] ; nous avons comme but d'établir la table des caractères des représentations complexes du groupe diédral D_n .

12.14.1 Représentations de dimension un

Nous nous occupons des représentations de D_n sur $\mathbb{C}$. Les applications linéaires $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sont seulement les multiplications par des nombres complexes. Nous cherchons donc $\psi: D_n \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Nous savons que D_n est généré⁴⁷ par s et r . Vu que $s^2 = 1$, nous avons

$$\psi(s)^2 = \psi(s^2) = \psi(1) = 1, \quad (12.512)$$

donc $\psi(s) \in \{-1, 1\}$. Nous savons aussi que $srsr = 1$, donc

$$\psi(s)^2 \psi(r)^2 = 1, \quad (12.513)$$

ce qui donne $\psi(r) \in \{-1, 1\}$.

Nous avons donc quatre représentations de dimension un données par

	$\psi(r) = 1$	$\psi(r) = -1$
$\psi(s) = 1$	ρ^{++}	ρ^{+-}
$\psi(s) = -1$	ρ^{-+}	ρ^{--}

Attention au fait que nous devons aussi avoir la relation $\psi(r)^n = \psi(r^n) = 1$. Donc $\psi(r)$ doit être une racine n^e de l'unité. Nous allons donc devoir avoir un compte différent selon la parité de n . Nous en reparlerons à la fin, au moment de faire les comptes. En ce qui concerne les caractères correspondants,

	r^k	sr^k
χ^{++}	1	1
χ^{+-}	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ^{-+}	1	-1
χ^{--}	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Étant donné qu'ils sont tous différents, ce sont des représentations deux à deux non équivalentes, lemme 12.133.

12.14.2 Représentations de dimension deux

Nous cherchons maintenant les représentations $\rho: D_n \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^2)$. Ici nous supposons connue la liste des éléments de D_n donnée par le corollaire 12.79. Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $h \in \mathbb{Z}$; nous considérons la représentation $\rho^{(h)}$ de D_n définie par

$$\rho^{(h)}(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix} \quad (12.514a)$$

$$\rho^{(h)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.514b)$$

Cela donne bien $\rho^{(h)}$ sur tous les éléments de D_n par la proposition 12.78. Nous pouvons restreindre le domaine de h en remarquant d'abord que $\rho^{(h)} = \rho^{(h+n)}$, et ensuite que les représentations $\rho^{(h)}$ et $\rho^{(-h)}$ sont équivalentes. Un opérateur d'entrelacement est donné par $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et il est facile

de vérifier que $T\rho^{(h)}(x) = \rho^{(-h)}(x)T$ avec $x = r^k$ puis avec $x = sr^k$.

Donc $\rho^{(h)} \simeq \rho^{(-h)} \simeq \rho^{(n-h)}$ et nous pouvons restreindre notre étude à $0 \leq h \leq \frac{n}{2}$.

Nous allons séparer les cas $n = 0$, $h = n/2$ et les autres. En effet si nous notons par commodité $a = \omega^h$, alors un vecteur (x, y) est vecteur propre de $\rho^{(h)}(s)$ et de $\rho^{(h)}(r)$ si et seulement si il vérifie les systèmes d'équations

$$\begin{cases} ax = \lambda x \\ \frac{1}{a}y = \lambda y \end{cases} \quad (12.515a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a}y = \lambda y \\ ax = \lambda x \end{cases} \quad (12.515b)$$

47. Voir proposition 12.78 et tout ce qui suit.

et

$$\begin{cases} \frac{1}{a}y = \mu x \\ ax = \mu y \end{cases} \quad (12.516a)$$

$$(12.516b)$$

avec λ et μ des nombres non nuls. Une représentation sera réductible si et seulement si ces deux systèmes acceptent une solution non nulle commune. Il est vite vu que si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $a^2 = 1$, ce qui signifie $h = 0$ ou $h = n/2$. Sinon, il n'y a pas de solutions, et la représentation associée est irréductible.

(1) $h = 0$. Nous avons

$$\rho^{(0)}(r^k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho^{(0)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.517)$$

donc le caractère de cette représentation est $\chi^{(0)}(r^k) = 2$ et $\chi^{(0)}(sr^k) = 0$. Donc nous avons

$$\chi^{(0)} = \chi^{++} + \chi^{-+}. \quad (12.518)$$

Il y a maintenant (au moins) quatre façons de voir que la représentation $\rho^{(0)}$ est réductible.

Première méthode Trouver un opérateur d'entrelacement. Pour cela nous calculons les matrices :

$$S(r) = (\rho^{++} \oplus \rho^{-+})(r^k) = \begin{pmatrix} \rho^{++}(r^k) & 0 \\ 0 & \rho^{-+}(r^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.519a)$$

$$S(sr^k) = (\rho^{++} \oplus \rho^{-+})(sr^k) = \begin{pmatrix} \rho^{++}(sr^k) & 0 \\ 0 & \rho^{-+}(sr^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.519b)$$

$$(12.519c)$$

Nous cherchons une matrice T telle que $TS(r^k) = \rho^{(0)}(r^k)T$ et $TS(sr^k) = \rho^{(0)}(sr^k)T$. Étant donné que $S(r^k) = \mathbb{1} = \rho^{(0)}(r^k)$, la première contrainte n'en est pas une. Nous pouvons vérifier qu'avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, nous avons bien

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.520)$$

Donc ce T entrelace $\rho^{++} \oplus \rho^{-+}$ avec $\rho^{(0)}$ qui sont donc deux représentations équivalentes. Donc $\rho^{(0)}$ est réductible et ça ne nous intéresse pas de la lister.

Seconde méthode Invoquer le théorème 12.140(1) pour dire que si les caractères étant égaux, les représentations sont équivalentes.

Troisième méthode Utiliser le théorème 12.140(2) et nous calculer $\langle \chi^{(0)}, \chi^{(0)} \rangle$. Nous avons

$$\langle \chi^{(0)}, \chi^{(0)} \rangle = \frac{1}{|D_n|} \sum_{g \in D_n} |\chi^{(0)}(g)|^2 \quad (12.521a)$$

$$= \frac{1}{2n} (4 + 0 + 4(n-1)) \quad (12.521b)$$

$$= 2. \quad (12.521c)$$

Ici le 4 est pour le 1, le zéro est pour les termes sr^k et $4(n-1)$ est pour les $n-1$ termes r^k . Vu que le résultat n'est pas 1, la représentation $\rho^{(0)}$ n'est pas irréductible.

Quatrième méthode Regarder les solutions des systèmes (12.515) et (12.516) dont nous avons parlé plus haut.

La première méthode a l'avantage d'être simple et ne demander aucune théorie particulière à part les définitions. La seconde méthode est la plus rapide, mais demande un théorème très puissant. La troisième utilise également un théorème assez avancé, mais a l'avantage sur les deux autres méthodes de ne pas avoir besoin de savoir a priori un candidat décomposition de $\rho^{(0)}$; cette méthode est applicable même sans faire la remarque que $\chi^{(0)} = \chi^{++} + \chi^{-+}$.

Quoi qu'il en soit, nous ne listons pas $\chi^{(0)}$ dans notre table de caractères.

(2) $h = n/2$. Vu que $\omega^{n/2} = e^{i\pi} = -1$, nous avons

$$\rho^{(n/2)}(r^k) = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \quad \rho^{(n/2)}(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.522)$$

et donc

$$\chi^{(n/2)}(r^k) = 2(-1)^k \quad (12.523a)$$

$$\chi^{(n/2)}(sr^k) = 0. \quad (12.523b)$$

Il est vite vu que $\chi^{(n/2)} = \chi^{+-} + \chi^{-+}$. Ergo la représentation $\rho^{(n/2)}$ n'est pas irréductible.

(3) $0 < h < \frac{n}{2}$. Dans ce cas nous avons $\omega^h \neq \omega^{-h}$, et en regardant les systèmes d'équations donnés plus haut, nous voyons que $\rho^{(h)}(s)$ et $\rho^{(h)}(r)$ n'ont pas de vecteurs propres communs. Donc ces représentations sont irréductibles.

Nous devons cependant encore vérifier si elles sont deux à deux non équivalentes. Supposons que pour $h \neq h'$ nous ayons une matrice $T \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que $T\rho^{(h)}(r)T^{-1} = \rho^{(h')}(r)$. Cela impliquerait en particulier que les matrices $\rho^{(h)}(r)$ et $\rho^{(h')}(r)$ aient même valeurs propres. Nous aurions donc $\{\omega^h, \omega^{-h}\} = \{\omega^{h'}, \omega^{-h'}\}$. Mais cela est impossible avec $0 < h < h' < \frac{n}{2}$. Donc toutes ces représentations sont distinctes.

Le caractère de la représentation $\rho^{(h)}$ est $\chi^{(h)}(r^k) = \omega^{hk} + \omega^{-hk} = 2 \cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$.

Nous ajoutons donc la ligne suivante à notre liste :

	r^k	sr^k
$\chi^{(h)}$	$2 \cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$	0

12.14.3 Le compte pour n pair

Nous avons 4 représentations de dimension 1 puis $\frac{n}{2} - 1$ représentations de dimension 2. En tout nous avons

$$\frac{n}{2} + 3 \quad (12.524)$$

représentations irréductibles modulo équivalence. Cela fait le compte en vertu des classes de conjugaisons listées en 12.4.7.4. Pour rappel, le nombre de représentations non équivalentes est égal au nombre de classes de conjugaison par le corollaire 12.143. Notons que c'est cela qui justifie le fait que nous ne devons pas chercher d'autres représentations. Nous sommes sûrs de les avoir toutes trouvées.

12.14.4 Le compte pour n impair

Nous avons fait mention plus haut du fait que si ψ est une représentation de dimension 1, le nombre $\psi(r)$ devait être une racine n^e de l'unité. Donc en dimension 1 nous avons seulement les représentations ρ^{++} et ρ^{-+} . Pour celles de dimension 2, nous en avons $\frac{n-1}{2}$. En tout nous avons donc

$$\frac{n+3}{2} \quad (12.525)$$

représentations irréductibles modulo équivalence. Cela fait le compte en vertu des classes de conjugaisons listées en 12.4.7.5.

Chapitre 13

Intégration

13.1 Théorème de la moyenne

Théorème 13.1 ([8]).

Soit Q un compact connexe par arcs et une fonction continue $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$. Si λ est la mesure de Lebesgue, alors il existe $a \in Q$ tel que

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda \quad (13.1)$$

Démonstration. En posant $I = \int_Q f d\lambda$ nous avons immédiatement

$$\min(f)\lambda(Q) \leq I \leq \max(f)\lambda(Q) \quad (13.2)$$

où le minimum et le maximum existent parce que f est continue sur un compact. Si une des deux inégalités est une égalité alors la fonction est constante. En effet supposons que la première inégalité soit une égalité; si la fonction n'était pas constante, il existerait une boule sur laquelle f serait strictement supérieure à $\min(f)$. En intégrant d'abord sur cette boule et ensuite sur le complémentaire nous obtenons une intégrale plus grande que $\min(f)\lambda(Q)$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha, \beta \in Q$ tels que $f(\alpha) \leq \min(f) + \epsilon$ et $f(\beta) \geq \max(f) - \epsilon$. Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow Q$ un chemin continu tel que $\gamma(0) = \alpha$ et $\gamma(1) = \beta$. La fonction $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est alors continue et vérifie $(f \circ \gamma)(0) \leq \min(f) + \epsilon$ et $(f \circ \gamma)(1) \geq \max(f) - \epsilon$.

Si ϵ est assez petit et vu que les inégalités (13.2) sont strictes,

$$\lambda(Q)(f \circ \gamma)(0) \leq \min(f)\lambda(Q) + \epsilon\lambda(Q) < I < \max(f)\lambda(Q) - \epsilon\lambda(Q) \leq \lambda(Q)(f \circ \gamma)(1). \quad (13.3)$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires 11.50, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\lambda(Q)(f \circ \gamma)(t_0) = I$. Le point $a = \gamma(t_0)$ vérifie

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda. \quad (13.4)$$

□

13.2 Mesure à densité

13.2.1 Théorème de Radon-Nikodym

Proposition 13.2 (Produit d'une mesure par une fonction).

Si $(S, \mathcal{F}, m_1)$ est un espace mesuré, et si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, et si B est un ensemble mesurable, nous définissons fm_1 par

$$m_2(B) = (fm_1)(B) = \int_B f(t) dm_1(t). \quad (13.5)$$

Cela est une mesure positive sur $(S, \mathcal{F})$.

Démonstration. D'abord pour l'ensemble vide : $m_2(\emptyset) = \int_{\emptyset} f dm_1 = 0$.

Si A_n sont des éléments disjoints de $\mathcal{F}$ tels que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$. Alors en utilisant la proposition 7.122, nous avons le calcul suivant :

$$m_2\left(\bigcup_n A_n\right) = \int_{\bigcup_n A_n} f(t) dm_1(t) = \sum_n \int_{A_n} f(t) dm_1(t) = \sum_n m_2(A_n). \quad (13.6)$$

□

Définition 13.3 ([182]).

Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Nous disons que la mesure μ est **dominée** par ν si pour tout ensemble mesurable A , $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$.

Si ν est une mesure positive et μ une mesure, nous disons que μ est **absolument continue** par rapport à ν si $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$. On note aussi $\mu \ll \nu$.

La mesure μ est **portée** par l'ensemble $E \in \mathcal{A}$ si pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E). \quad (13.7)$$

Nous écrivons que $\mu \perp \nu$ si il existe un ensemble $E \in \mathcal{A}$ tel que μ soit porté par E et ν soit porté par $\mathbb{C}E$.

Théorème 13.4 (Radon-Nikodym[183]).

Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur un espace métrisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

(1) Il existe un unique couple de mesures μ_1 et μ_2 telles que

(a) $\mu = \mu_1 + \mu_2$

(b) μ_1 est dominé par ν

(c) $\mu_2 \perp \nu$.

Dans ce cas, les mesures μ_1 et μ_2 sont positives et σ -finies.

(2) À égalité ν -presque partout près, il existe une unique fonction mesurable positive f telle que pour tout mesurable A ,

$$\mu_1(A) = \int_A d\mu_1 = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A f d\nu. \quad (13.8)$$

(3) À égalité ν -presque partout près, il existe une unique fonction positive mesurable h telle que $\mu_1 = h\nu$.

Corollaire 13.5.

Si μ est une mesure σ -finie dominée par la mesure σ -finie m , alors μ possède une unique fonction de densité.

Corollaire 13.6.

Soient μ et m , deux mesures positives σ -finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors m domine μ si et seulement si μ possède une densité par rapport à m .

Démonstration. Si μ est dominée par m , alors la décomposition $\mu = \mu + 0$ satisfait le théorème de Radon-Nikodym. Par conséquent il existe une fonction f telle que

$$\mu(A) = \int_A f dm. \quad (13.9)$$

Cette fonction est alors une densité pour μ par rapport à m .

Pour la réciproque, nous supposons que μ a une densité f par rapport à m , et que A est une ensemble de m -mesure nulle :

$$m(A) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A dm = 0. \quad (13.10)$$

Cela signifie que la fonction $\mathbb{1}_A$ est m -presque partout nulle. La fonction produit $\mathbb{1}_A f$ est également nulle m -presque partout, et par conséquent

$$\mu(A) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A f dm = 0. \quad (13.11)$$

□

Problèmes et choses à faire

Est-ce que la démonstration de cela ne demande pas la convergence monotone d'une façon ou d'une autre ?

13.2.2 Mesure complexe

Définition 13.7 (Mesure complexe[184]).

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, une **mesure complexe** est une application $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (2) μ est sous-additive : si les ensembles $A_i \in \mathcal{A}$, alors $\sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i)$.

Notons que la série $\sum_i \mu(A_i)$ est alors nécessairement absolument convergente. En effet changer l'ordre de la somme ne change pas l'union, et donc ne change pas la valeur de la somme. Si $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une permutation,

$$\sum_i \mu(A_{\sigma(i)}) = \mu\left(\bigcup_i A_{\sigma(i)}\right) = \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i). \quad (13.12)$$

Le théorème 6.183 dit alors que la somme doit être absolument convergente.

Théorème 13.8 (Radon-Nikodym complexe¹).

Soit μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et ν une mesure complexe. Alors

- (1) Il existe un unique couple de mesures complexes ν_a, ν_s sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tel que
 - (a) $\nu = \nu_a + \nu_s$
 - (b) $\nu_a \ll \mu$
 - (c) $\nu_s \perp \mu$.
- (2) Ces mesures satisfont alors $\nu_a \perp \nu_s$.
- (3) Il existe une fonction intégrable $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\nu_a = h\mu$.
- (4) La fonction h est unique à μ -équivalence près.
- (5) Si de plus $\nu \ll \mu$ alors $\nu = h\mu$.

Démonstration. No proof.

□

Remarque 13.9.

Le point (5) est souvent utilisé sous la forme

$$\nu(A) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) h(\omega) d\mu(\omega) = \int_A h(\omega) d\mu(\omega). \quad (13.13)$$

1. L'histoire du nom de ce théorème est intéressante. Lorsque monsieur et madame Rémédernonnikodym apprirent que leurs amis, les Rémédelaoulechevelue avaient appelé leur fils Théo, ils décidèrent d'en faire autant. C'est en souvenir de ces circonstances que monsieur Nikodym (prénomné Radon) décida de faire des math.

13.2.3 Théorème d'approximation

Théorème 13.10 (Théorème d'approximation[128]).

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré où $\mathcal{B}$ sont les boréliens de X . Soit $A \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset W$ où W est un ouvert avec $\mu(W) < \infty$. Soit aussi $\epsilon > 0$.

(1) Il existe un fermé F et un ouvert V tels que $\mu(V) < \infty$ et

$$F \subset A \subset V \quad (13.14)$$

et $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.

(2) Il existe $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ nulle hors de W vérifiant $0 \leq f \leq 1$ et

$$\int_X |\mathbb{1}_A - f|^p d\mu(x) < \epsilon. \quad (13.15)$$

13.2.4 Mesure à densité

Si μ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, une fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une **densité** si pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ nous avons

$$\mu(A) = \int_A f(x) dx \quad (13.16)$$

où dx est la mesure de Lebesgue.

13.3 Constructions plus naïves de la mesure et de l'intégrale dans le cas réel

Les sections 7.2 et 7.7 ont donné une construction très complète de la mesure de Lebesgue, et nous avons défini la théorie de l'intégration sur un espace mesuré quelconque dans la définition 7.113.

Dans cette section nous allons donner différentes choses plus rapides qui servent souvent de définition dans les cours moins avancés.

13.3.1 Mesure de Lebesgue, version rapide

Nous construisons à présent la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Un **pavé** dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]; \quad (13.17)$$

le volume d'un tel pavé est défini par $\text{Vol}(B) = \prod_i (b_i - a_i)$. Soit maintenant $A \subset \mathbb{R}^n$. La **mesure externe** de A est le nombre

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{B \in \mathcal{F}} \text{Vol}(B) \text{ où } \mathcal{F} \text{ est un ensemble dénombrable de pavés dont l'union recouvre } A. \right\} \quad (13.18)$$

Définition 13.11.

Nous disons que A est **mesurable** au sens de Lebesgue si pour tout ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ nous avons l'égalité

$$m^*(S) = m^*(A \cap S) + m^*(S \setminus A). \quad (13.19)$$

Dans ce cas nous disons que la mesure de Lebesgue de A est $m(A) = m^*(A)$.

Proposition 13.12.

Deux fonctions continue égales presque partout pour la mesure de Lebesgue² sont égales.

2. Définition 13.11.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in D$. La fonction $h = f - g$ est alors presque partout nulle et nous devons prouver qu'elle est nulle sur tout D . La fonction h est continue; si $h(a) \neq 0$ pour un certain $a \in D$ alors h est non nulle sur un ouvert autour de a par continuité et donc est non nulle sur un ensemble de mesure non nulle. $\square$

13.3.2 Pavés et subdivisions

Définition 13.13.

Nous appelons **pavé** de $\mathbb{R}^p$ toute partie de $\mathbb{R}^p$ obtenue comme produit de p intervalles de $\mathbb{R}$. Plus explicitement, une partie R est un pavé de $\mathbb{R}^p$ si il s'écrit sous la forme

$$R = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_i \in \mathcal{I}_i, i = 1, \dots, p\},$$

où $\mathcal{I}_i$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

On appelle pavé fermé de $\mathbb{R}^p$ le produit de p intervalles fermés

$$R = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i].$$

On définit de même le pavé ouvert

$$S = \prod_{i=1}^p]a_i, b_i[.$$

Un pavé $R = \prod_{i=1}^p \mathcal{I}_i$ est dit borné si tous les intervalles $\mathcal{I}_i$ sont bornés dans $\mathbb{R}$. Les pavés non bornés sont des produits d'intervalles où un (ou plusieurs) des intervalles n'est pas borné. Par exemple,

$$N =]-\infty, 5] \times [0, 13].$$

L'espace $\mathbb{R}^p$, lui-même, est un pavé de $\mathbb{R}^p$.

Définition 13.14.

Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite **pavable** s'il existe une famille finie de pavés bornés R_j , $j = 1, \dots, n$, et deux à deux disjoints tels que

$$A = \bigcup_{j=1}^n R_j.$$

Un exemple d'ensemble pavable dans $\mathbb{R}^2$ est donné à la figure 13.1. Il existe beaucoup d'ensembles dans $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas pavables, par exemple les ellipses.

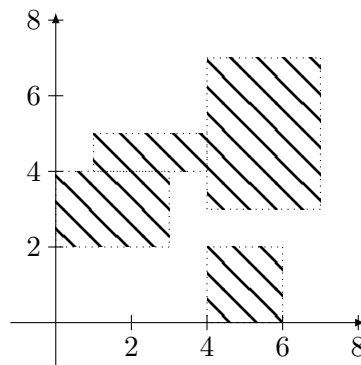


FIGURE 13.1 – Un ensemble pavable.

Le complémentaire d'un pavé est un ensemble pavable et, en particulier, tout complémentaire d'un pavé borné est une réunion de pavés non bornés. Toute union finie et toute intersection d'ensembles pavables est pavable.

Définition 13.15.

Soit R un pavé borné de $\mathbb{R}^p$, pour fixer les idées on peut penser $R = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$. On appelle **longueur** de l' i -ème arête de R le nombre $b_i - a_i$. La **mesure p -dimensionnelle** de R , $m(R)$, est le produit des longueurs

$$m(R) = \prod_{i=1}^p (b_i - a_i).$$

Exemple 13.16

Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $R = [-1, 1] \times [3, 4] \times [0, 2]$ est un pavé fermé de mesure

$$m(R) = (1 + 1) \cdot (4 - 3) \cdot (2 - 0) = 4.$$

Il s'agit du volume usuel du parallélépipède rectangle. $\triangle$

Exemple 13.17

L'ensemble $R =]-1, 1[\times [3, 4] \times [0, 2]$ est un pavé de $\mathbb{R}^3$. Il n'est ni fermé ni ouvert, sa mesure est encore 4. $\triangle$

Si R est un pavé non borné on peut encore définir sa mesure. La notion de mesure se généralise en deux étapes. D'abord on dit que la longueur d'une arête non bornée est ∞ . Ensuite, on adopte la convention $0 \cdot \infty = 0$. Il faut remarquer que avec cette généralisation tout point et toute droite dans $\mathbb{R}^2$ ont mesure nulle.

Afin de définir les intégrales, nous allons intensivement faire appel à la notion de subdivision d'intervalles, voir définition 14.11 et la discussion qui suit.

Lorsqu'on considère un pavé borné $R = \prod_{i=1}^p \mathcal{I}_i$ de $\mathbb{R}^p$, on note $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $\mathcal{I}_i$. La notion de subdivision se généralise au cas des pavés.

Définition 13.18.

Soit R un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^p$, pour fixer les idées on peut penser à $R = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$. On appelle **subdivision finie** de R les éléments de l'ensemble $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^p \mathcal{S}_i$,

$$\mathcal{S} = \left\{ (Y_1, \dots, Y_p) \mid Y_i = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i} \in \mathcal{S}_i, i = 1, \dots, p \right\}.$$

On peut définir de même l'ensemble des subdivisions d'un pavé non borné.

Souvent, une subdivision d'un pavé $R = \prod_{i=1}^p \mathcal{I}_i$ sera noté $\sigma = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i}$. Dans cette notation, on sous-entend que pour chaque i fixé, les nombres $y_{i,j}$ (il y en a n_i) forment une subdivision de l'intervalle $\mathcal{I}_i$. Afin de vous familiariser avec ces notations, repérez bien tous les éléments de la figure 13.2.

Définition 13.19.

Si σ est une subdivision d'un pavé R , un **raffinement** de σ est une subdivision de R obtenue en fixant plus de points dans chaque intervalle.

La subdivision σ de R détermine $n_1 n_2 \dots n_p$ pavés fermés de la forme

$$R_{(k_1, \dots, k_p)} = \{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid y_{i, k_i-1} \leq x_i \leq y_{i, k_i} \},$$

où k_i est dans $\{1, \dots, n_i\}$ et i dans $\{1, \dots, p\}$. On les appelle **cellules** de σ . On remarque que les cellules de σ sont toujours deux à deux disjointes (sauf au plus sur leurs bords).

Lemme 13.20.

Soit R un pavé borné de $\mathbb{R}^p$ et soit $\sigma = (y_{i,j})_{j=1}^{n_i}$ une subdivision de R . On a

$$m(R) = \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in K} m(R_{(k_1, \dots, k_p)}),$$

où $K = \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{1, \dots, n_p\}$.

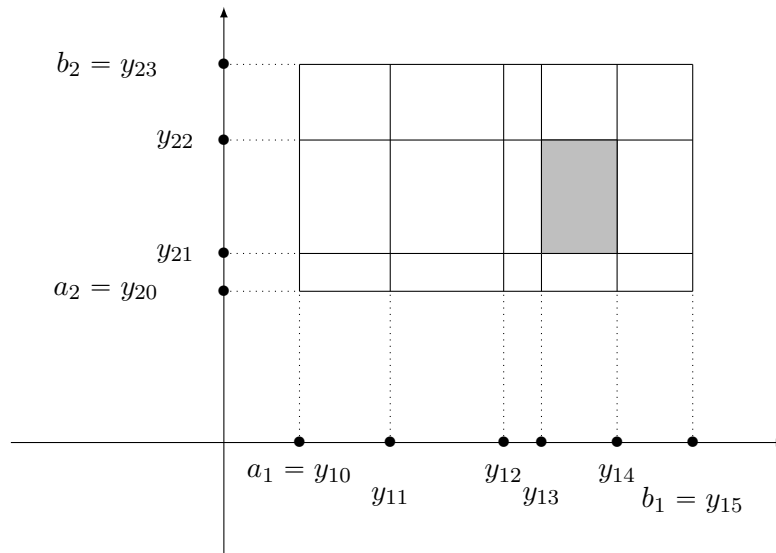


FIGURE 13.2 – Une cellule d’une subdivision d’un pavé de $\mathbb{R}^2$. La cellule grisée est $R_{(4,2)}$.

Le lemme 13.20 suggère de définir la mesure d’un ensemble borné pavable $P = \cup_{j=1}^n R_j$ comme la somme des mesures des pavés disjoints R_j , $j = 1, \dots, n$.

Définition 13.21.

Une application $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **application en escalier** sur $\mathbb{R}^m$ si

- f est une application bornée,
- il existe une subdivision σ de $\mathbb{R}^p$ telle que la restriction de f est une application constante sur toute cellule R_k de σ

$$f|_{R_k} = C_k, \quad C_k \in \mathbb{R},$$

Une telle subdivision σ est dite **associée** à f .

Exemple 13.22

La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in [0, 3] \times [-1, 2], \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13.20)$$

est une application en escalier. Exercice : donner une subdivision de $\mathbb{R}^2$ associée à cette fonction.

△ **Exemple 13.23**

La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{m^2 + n^2}, & \text{si } (x, y) \in [m, m+1] \times [n, n+1], \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.21)$$

est une application en escalier. Observez que, dans ce cas, il n’existe pas une subdivision finie de $\mathbb{R}^2$ associée à f . △

Remarque 13.24.

Si la subdivision σ est associée à f alors tout raffinement de σ (c’est à dire, toute subdivision obtenue en fixant plus de points dans chaque intervalle) a la même propriété.

Si f et g sont deux application en escalier sur R et σ_f et σ_g sont des subdivisions de R associées respectivement à f et g , alors on peut construire une troisième subdivision de R qui est associée à f et à g en même temps. Soient $\sigma_f = (Y_1, \dots, Y_p)$ et $\sigma_g = (Z_1, \dots, Z_p)$, où $Y_i = (y_{i,j})_{j=1}^{m_i}$ et $Z_i = (z_{i,j})_{j=1}^{n_i}$ sont des subdivision de l’intervalle $[a_i, b_i]$, pour $i = 1, \dots, p$. La subdivision de

$[a_i, b_i]$ obtenue par l'union de Y_i et Z_i est encore une subdivision finie, qu'on appellera $\bar{Y}_i$. La subdivision $\bar{\sigma} = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_p)$ de R est un raffinement de σ_f et de σ_g , donc elle est associée à la fois à f et à g .

Cela nous permet de prouver que si f et g sont des application en escalier, alors $f + g$, fg , $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ et $|f|$ sont des applications en escalier.

13.3.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 13.25.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le **support** de f est la fermeture de l'ensemble des points x tels que $f(x) \neq 0$.

Définition 13.26.

Une application en escalier f est dite **intégrable** si son support est compact.

Soit f une application en escalier sur $\mathbb{R}^p$. Soit σ une subdivision de $\mathbb{R}^p$ associée à f et appelons R_k les cellules de σ , avec $k = (k_1, \dots, k_p)$ dans $K = \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{1, \dots, n_p\}$. Alors

$$f|_{R_k} = C_k, \quad C_k \in \mathbb{R}.$$

Définition 13.27.

On définit l'**intégrale** de f sur $\mathbb{R}^p$ par

$$\int_{\mathbb{R}^p} f dV = \sum_{k \in K} C_k m(R_k).$$

L'intégrale ainsi définie est un nombre réel. La proposition suivante nous dit que l'intégrale est «bien définie», au sens que sa valeur ne dépend pas de la subdivision associée à f qu'on utilise dans le calcul.

Proposition 13.28.

Soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^p$. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $\mathbb{R}^p$ associées à f . L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision choisie.

On ne donne pas une preuve complète de cette proposition. En fait elle est une conséquence de la formule de réduction introduite dans la suite de ce chapitre.

13.3.4 Intégrales partielles

Soit f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ une fonction continue, nulle hors du pavé borné R . Posons $R = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$, pour fixer les idées. Pour chaque i dans $\{1, \dots, p\}$ fixé, on peut associer à f la fonction F_i de $p-1$ variables définie par

$$F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) = \int_{a_i}^{b_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) dy.$$

La fonction F_i est l'intégrale partielle de f par rapport à la i -ème variable. En particulier, si $f(x_1, \dots, x_p) = g(x_i)h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$ on obtient

$$F_i = \int_{a_i}^{b_i} g(y)h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) dy = h \cdot \int_{a_i}^{b_i} g dy.$$

La fonction d'une seule variable qu'on obtient à partir de f en fixant $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$ et qui associe à x_i la valeur $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$, est appelée x_i -ème section de f en $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$. **Exemple 13.29**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 3y & \text{si } (x, y) \in [9, 10] \times]\pi, 5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13.22)$$

Les intégrales partielles de f sont

$$F_1(y) = \int_9^{10} x + 3y \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3xy \right]_{x=9}^{x=10} = \frac{19}{2} + 3y,$$

$$F_2(x) = \int_{\pi}^5 x + 3y \, dy = \left[xy + \frac{3y^2}{2} \right]_{y=\pi}^{y=5} = x(5 - \pi) + \frac{3}{2}(25 - \pi^2).$$

△

13.3.5 Réduction d'une intégrale multiple

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un pavé fermé et borné de $\mathbb{R}^2$ et soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^2$ telle que le support de f soit contenu dans R . On considère la subdivision σ de R définie par les subdivisions

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b,$$

$$c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n = d.$$

Les cellules de σ sont

$$R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad i = 0, \dots, m-1, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

La mesure de R est la somme des mesures des $R_{i,j}$

$$\begin{aligned} m(R) &= \sum_{(i,j) \in \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}} m(R_{i,j}) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (y_{j+1} - y_j) = \\ &= (b - a) \cdot (d - c). \end{aligned} \tag{13.23}$$

Si f est constante sur chaque cellule de σ on peut écrire f de la forme suivante

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j} \chi_{R_{i,j}}$$

où les $C_{i,j}$ sont des constantes réelles et $\chi_{R_{i,j}}$ est la **fonction caractéristique** de $R_{i,j}$

$$\chi_{R_{i,j}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in R_{i,j}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13.24}$$

Comme (x, y) est dans $R_{i,j}$ si et seulement si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et $y \in [y_j, y_{j+1}]$, on vérifie que la fonction $\chi_{R_{i,j}}$ est égal au produit des fonctions caractéristiques des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ et $[y_j, y_{j+1}]$

$$\chi_{R_{i,j}}(x, y) = \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y).$$

On peut donc écrire la fonction f de la façon suivante

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j} \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y).$$

Comme on suppose que le support de f est une partie de R , l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, dV = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j} m(R_{i,j}) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j). \tag{13.25}$$

Cette intégrale peut être réduite à la composition de deux intégrales partielles. Il suffit de remarquer que la valeur de l'intégrale de la fonction caractéristique d'un intervalle est la longueur de l'intervalle,

$$\begin{aligned} C_{i,j}(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) &= \\ &= C_{i,j} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) dx \right) \cdot \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y) dy \right) = \\ &= C_{i,j} \left(\int_a^b \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y) dy \right), \end{aligned} \quad (13.26)$$

et utiliser les propriétés de linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f dV &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j} \left(\int_a^b \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y) dy \right) = \\ &= \int_c^d \int_a^b \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j} \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y) dx dy = \\ &= \int_c^d \int_a^b f dx dy. \end{aligned} \quad (13.27)$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f dV &= \int_a^b \int_c^d \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} C_{i,j} \chi_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \cdot \chi_{[y_j, y_{j+1}]}(y) dx dy = \\ &= \int_a^b \int_c^d f dx dy. \end{aligned} \quad (13.28)$$

En général, on prouve la proposition suivante

Proposition 13.30.

Soit f une application en escalier intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et soit R un pavé borné dans $\mathbb{R}^p$ qui contient le support de f . Comme d'habitude, pour fixer les idées nous écrivons $R = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} f(x_1, \dots, x_p) dV &= \int_{a_p}^{b_p} \int_{a_{p-1}}^{b_{p-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p = \\ &= \int_{a_{s_p}}^{b_{s_p}} \int_{a_{s_{p-1}}}^{b_{s_{p-1}}} \cdots \int_{a_{s_1}}^{b_{s_1}} f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p, \end{aligned} \quad (13.29)$$

pour toute permutation $(s_1, \dots, s_p)$ de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$.

13.3.6 Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions en escalier intégrables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, et soient a et b dans $\mathbb{R}$.

Linéarité de l'intégrale :

— Additivité : $f + g$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}^p} (f + g) dV = \int_{\mathbb{R}^p} f dV + \int_{\mathbb{R}^p} g dV,$$

— Homogénéité : λf est intégrable pour tout réel λ

$$\int_{\mathbb{R}^p} \lambda f dV = \lambda \int_{\mathbb{R}^p} f dV,$$

Monotonie Si $f \leq g$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^p} f dV \leq \int_{\mathbb{R}^p} g dV,$$

Inégalité fondamentale

$$\left| \int_{\mathbb{R}^p} f \, dV \right| \leq \int_{\mathbb{R}^p} |f| \, dV.$$

Cette dernière inégalité s'obtient de la façon suivante :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^p} f \, dV \right| = \left| \sum_{k \in K} C_k m(R_k) \right| \leq \sum_{k \in K} |C_k| m(R_k) = \int_{\mathbb{R}^p} |f| \, dV.$$

Inégalité de Čebičeff Si f est une application en escalier alors pour tout $a > 0$ dans $\mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p : |f(x)| \geq a\}$ est pavable et borné, et l'inégalité suivante est satisfaite

$$m(\{x \in \mathbb{R}^p : |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^p} |f| \, dV.$$

13.3.7 Intégrales multiples, cas général

Nous voulons généraliser la définition d'intégrale multiple au cas des domaines non pavables et de fonctions qui ne sont pas en escalier. Il y a plusieurs méthodes de le faire et ici on ne considère qu'une seule, introduite par Riemann.

Définition 13.31.

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour toute application en escalier intégrable f_* telle que $f_* \leq f$, l'intégrale de f_* est dit une **somme inférieure** de f .
- Pour toute application en escalier intégrable f^* telle que $f_* \geq f$, l'intégrale de f^* est dit une **somme supérieure** de f .

Soient $\Sigma_* f$ et $\Sigma^* f$ les ensembles des sommes inférieures et supérieures de f . Grâce à la propriété de monotonie de l'intégrale on sait que si a est dans $\Sigma_* f$ et b est dans $\Sigma^* f$ alors $a \leq b$.

Définition 13.32.

La fonction f est intégrable (au sens de Riemann) si $\Sigma_* f$ et $\Sigma^* f$ ne sont pas vides et

$$\inf \Sigma^* f = I = \sup \Sigma_* f.$$

Dans ce cas, la valeur I est appelée intégrale de f sur $\mathbb{R}^p$.

Remarque 13.33.

Toute fonction intégrable est bornée et à support compact. En effet, si le support de la fonction n'est pas compact alors soit $\Sigma_* f$ soit $\Sigma^* f$ doit être vide !

L'intégrale qu'on vient de définir possède toutes les propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier. Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Il y a des cas où l'intégrabilité d'une fonction n'est pas évidente. Cependant, dans la plupart des exercices et des exemples de ce cours, nous nous aidons avec le critère suivant

Proposition 13.34.

Toute fonction continue à support compact est intégrable.

Cette proposition n'est a priori pas étonnante, vu qu'une fonction continue sur un support compact est bornée (théorème de Weierstrass 5.133).

13.3.8 Réduction d'une intégrale multiple

On n'utilise jamais la définition pour calculer la valeur d'une intégrale multiple. La méthode plus efficace, en pratique, est de réduire l'intégrale à la composition de plusieurs intégrales d'une variable.

Théorème 13.35 (de Fubini).

Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout x dans $\mathbb{R}$ la section $f(x, \cdot)$ est intégrable par rapport à y , alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

De même, si pour tout y dans $\mathbb{R}$ la section $f(\cdot, y)$ est intégrable par rapport à x , alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx.$$

En général, on ne peut pas dire que les sections d'une fonction intégrable sont intégrables, donc il faut vraiment se souvenir des hypothèses du théorème 13.35. En dimension plus haute, on a le même résultat

Théorème 13.36.

Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $(p-1)$ -uple $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$ dans $\mathbb{R}^{p-1}$ la section $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_p)$ est intégrable par rapport à x_i , alors

$$\int_{\mathbb{R}^p} f dV = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{p-1}} f dV \right) dx_i.$$

Si f est une fonction positive et intégrable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on peut interpréter l'intégrale de f comme le volume du solide au-dessous du graphe de f . Avec cette interprétation, l'intégrale partielle par rapport à x pour $y = y_0$ fixé est l'aire de la tranche qu'on obtient en coupant le solide par le plan $y = y_0$.

Exemple 13.37

Le premier exemple à faire est celui d'une fonction en escalier intégrable et positive. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in R_1 =]-1, 3] \times [4, 5] \\ 3 & \text{si } (x, y) \in R_2 =]13, 15[\times [0, 2[\\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \quad (13.30)$$

L'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ est $1 \cdot m(R_1) + 3 \cdot m(R_2) = 16$. On voit tout de suite qu'il s'agit de la somme du volume des deux parallélépipèdes de hauteurs respectives 1 et 3 et bases R_1 et R_2 . $\triangle$

Exemple 13.38

On veut calculer le volume du solide S , borné par le paraboloïde elliptique $x^2 + 2y^2 + z = 16$ et le plans $x = 2$, $x = 0$, $y = 2$, $y = 0$, $z = 0$. On observe que la portion de paraboloïde elliptique qui nous intéresse est le graphe de la fonction $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ pour (x, y) dans $R = [0, 2] \times [0, 2]$. La fonction f est continue ainsi que ses sections, donc on peut appliquer le théorème 13.35 et décomposer l'intégrale double en deux intégrales simples :

$$\begin{aligned} \int_R 16 - x^2 - 2y^2 dV &= \int_0^2 \int_0^2 f(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^2 \left[(16 - 2y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} dy = \\ &= \left[\left(32 - \frac{8}{3} \right) y - \frac{4y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} = 64 - \frac{16 + 32}{3} = 48. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Vérifiez, comme exercice, qu'on obtient le même résultat en intégrant d'abord par rapport à y et puis par rapport à x . $\triangle$

Exemple 13.39

Dans les hypothèses du théorème 13.35 l'ordre des intégrations partielles ne change pas la valeur

de l'intégrale. En fait, si les calculs sont faites par des êtres humains l'ordre d'intégration peut faire une certaine différence comme dans cet exemple. On veut évaluer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dV$$

où

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin(x, y) & \text{si } (x, y) \in [1, 2,] \times [0, \pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13.32)$$

Les deux section de $f(x, y) = y \sin(xy)$ sont continues. Si on intègre d'abord par rapport à y on obtient

$$-\int_1^2 \frac{\pi \cos(\pi x)}{x} dx + \int_1^2 \frac{\sin(\pi x)}{x^2} dx,$$

qui n'est pas du tout immédiat, alors que, si on intègre d'abord par rapport à x on obtient

$$\int_0^\pi \cos y - \cos(2y) dy.$$

△

13.3.9 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$

On veut évaluer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ sur son domaine, la boule unité $B((0, 0), 1)$. La théorie introduite jusqu'ici n'est pas suffisante pour résoudre ce problème, parce que $B((0, 0), 1)$ n'est pas pavable. Les parties bornées de $\mathbb{R}^p$ sur lesquelles on peut intégrer des fonction sont dites mesurables (au sens de Riemann) parce que, comme on verra dans la suite, la mesure d'une partie de $\mathbb{R}^p$ est l'intégrale (s'il existe) de sa fonction caractéristique.

On peut dire que une partie de $\mathbb{R}^p$ est mesurable si son bord est «assez régulier». Dans $\mathbb{R}^2$ il est suffisant que le bord de A soit une réunion finie de courbes paramétrées continues. En particulier, on est très souvent dans un des deux cas suivantes

Régions du premier type A est borné et contenu entre les graphes de deux fonctions continues de x

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

avec g_1 et g_2 continues.

Régions du deuxième type A est borné et contenu entre les graphes de deux fonctions continues de y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

avec h_1 et h_2 continues.

Exemple 13.40

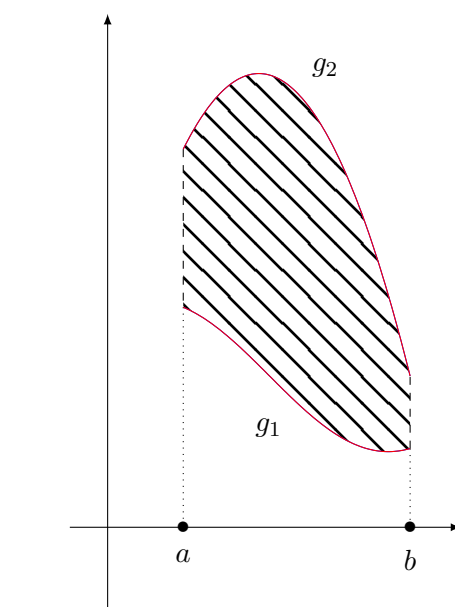
Il y a des régions qui sont des deux types au même temps, comme les boules centrées à l'origine, le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, a)$ et $(b, 0)$, ou la région C délimité par les courbes $y = 2x$ et $y = x^2$. Cette dernière admet les représentations suivantes

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x\},$$

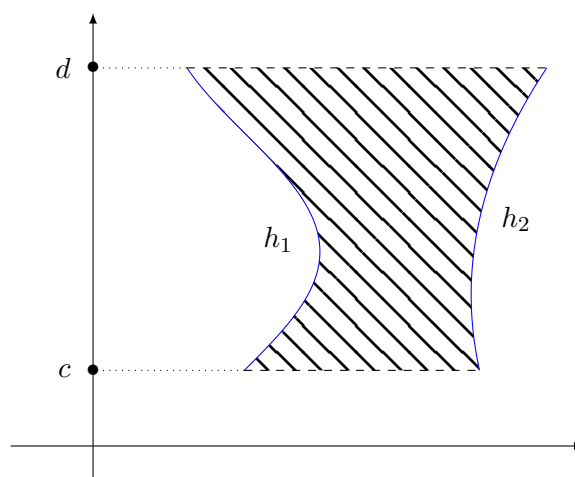
et

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y/2 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

△



(a) Une region du premier type



(b) Une region du deuxième type

FIGURE 13.3 – Régions du premier et du deuxième type

Définition 13.41.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont le support A est une région du premier ou du deuxième type. On définit la fonction $\bar{f}$ comme

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \in A, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13.33)$$

La fonction f est dite **intégrable** si $\bar{f}$ est intégrable, et la valeur de son intégrale est

$$\int_A f dV = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f} dV.$$

Une fonction continue définie sur une région du premier ou du deuxième type est toujours intégrable.

Pour fixer les idées on suppose ici que A est du premier type et contenue dans le pavé borné

$R = [a, b] \times [c, d]$. En suivant la définition on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_A f dV &= \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f} dV = \\
 &= \int_a^b \int_c^d \bar{f} dy dx = \\
 &= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} \bar{f} dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \bar{f} dy + \int_{g_2(x)}^d \bar{f} dy \right) dx = \\
 &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f dy dx.
 \end{aligned} \tag{13.34}$$

De même, si A est du deuxième type on obtient

$$\int_A f dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f dx dy. \tag{13.35}$$

Exemple 13.42

On peut maintenant résoudre notre problème de départ, évaluer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1-x^2}$ sur $B((0, 0), 1)$. Nous choisissons de décrire la boule unité de $\mathbb{R}^2$ comme une région du premier type : $B((0, 0), 1) = \{(x, y) : x \in [-1, 1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

$$I = \int_B \sqrt{1-x^2} dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx \tag{13.36}$$

La première intégrale à effectuer, par rapport à y , est l'intégrale d'une fonction constante. Ne pas oublier que l'on intègre $\sqrt{1-x^2}$ par rapport à y ; c'est bien une constante et l'intégrale consiste seulement à multiplier par y :

$$I = \int_{-1}^1 \left[y\sqrt{1-x^2} \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx. \tag{13.37}$$

Cela est à nouveau une intégrale simple à effectuer. Le résultat est

$$2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{8}{3}. \tag{13.38}$$

△

Remarque 13.43.

Toutes les techniques d'intégration à une variable restent valables. Par exemple, lorsqu'une des intégrales est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à zéro, l'intégrale vaut zéro.

13.44.

Par le lemme 7.115 nous savons que la mesure d'une région bornée de $\mathbb{R}^2$ est l'intégrale de sa fonction caractéristique, si elle existe.

La mesure d'une région bornée de $\mathbb{R}^2$ est dite son **aire**, et celle d'une région bornée de $\mathbb{R}^3$ est son **volume**. Voir aussi la remarque 14.18.

Exemple 13.45

On veut calculer l'aire de la région de la figure 13.4 définie par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 - 1 \leq y \leq x\}.$$

On considère l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_A dV = \int_0^1 \int_{x^3+1}^x 1 dy dx = \int_0^1 -x^3 + x + 1 dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}.$$

△

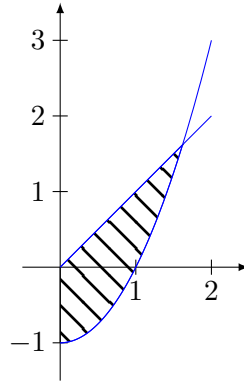


FIGURE 13.4 – La région A de l'exemple 13.45

Exercice 1

Parfois la région sur laquelle on veut intégrer peut être décrite indifféremment en deux façons, mais la fonction à intégrer nous force à choisir un ordre particulier. Vérifiez que la fonction $f(x, y) = \sin(y^2)$ sur la région triangulaire de sommets $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ doit être intégrée d'abord par rapport à x .

Si une région bornée n'est pas de premier ou de deuxième type on peut normalement la découper en morceaux plus faciles à décrire. On utilise alors la propriété suivante.

Lemme 13.46.

Soit A un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ et soient B_1 et B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et $B_1 \cup B_2 = A$. Alors, pour toute fonction f intégrable sur A (et en particulier pour sa fonction caractéristique) on a

$$\int_A f dV = \int_{B_1} f dV + \int_{B_2} f dV.$$

Exemple 13.47

La région D que nous voyons sur la figure 13.5 est bornée par la parabole $y^2 = 2x + 6$ et la droite $y = x - 1$. La région D est une région du deuxième type. Nous pouvons aussi la décrire comme l'union de deux régions du premier type D_1 et D_2 ,

$$D_1 = \{(x, y) : -3 \leq x \leq -1, -\sqrt{2x+6} \leq y \leq \sqrt{2x+6}\},$$

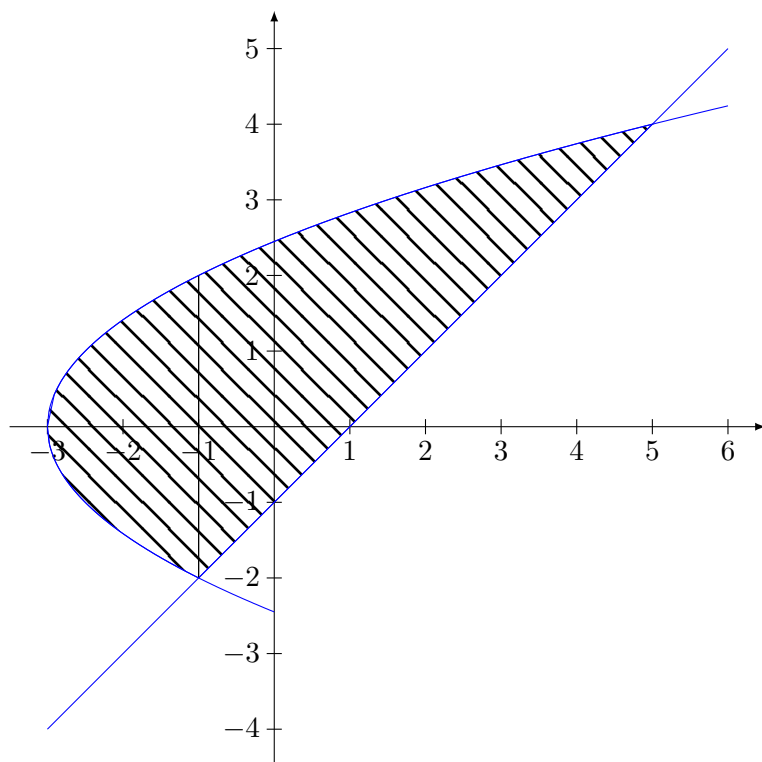
et

$$D_2 = \{(x, y) : -3 \leq x \leq -1, x-1 \leq y \leq \sqrt{2x+6}\}.$$

△

13.3.10 Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$

Dans ces notes nous n'avons pas l'ambition de traiter d'une façon rigoureuse l'étude des ensemble mesurables de $\mathbb{R}^3$. Comme dans la section précédente on se limitera à considérer des cas particuliers.

FIGURE 13.5 – La région D de l'exemple 13.47**Définition 13.48.**

Soit E une région de $\mathbb{R}^3$. On dit que E est une **région solide de premier type** si E est contenue entre les graphes de deux fonctions continues de x et y .

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Le sous-ensemble de A de $\mathbb{R}^2$ qui apparaît dans la définition 13.48 est la projection (ou l'ombre) de E sur le plan x - y . **Exemple 13.49**

La région E donnée par une portion de sphère collée à un cône est une région solide de premier type

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \bar{B}((0, 0), 1), \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

L'ombre de E est la boule unité de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$ est un cône posé sur sa pointe tandis que l'ensemble $z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ est la demi-sphère. L'ensemble E contient les points entre les deux, voir la figure 13.6.

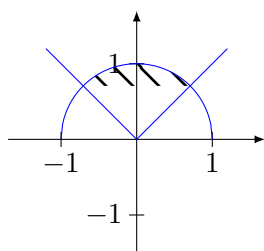


FIGURE 13.6 – Il faut voir ça en trois dimensions.

△ Si la fonction f , à intégrer sur E , et ses sections sont intégrables alors on peut réduire

l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_E f(x, y, z) dV &= \int_A \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dV = \\ &= \int_A (F(x, y, u_2(x, y)) - F(x, y, u_1(x, y))) dV, \end{aligned} \quad (13.39)$$

où F est une primitive de f par rapport à la variable z , c'est à dire en considérant x et y comme des constantes. Il faut ensuite évaluer la partie qui reste comme dans la section précédente. Comme le calcul des aires dans $\mathbb{R}^2$, le calcul des volumes dans $\mathbb{R}^3$ est fait par des intégrales. En fait le **volume** d'une région solide dans $\mathbb{R}^3$ est sa mesure.

Définition 13.50.

La mesure d'une région de $\mathbb{R}^3$ est l'intégrale de sa fonction caractéristique.

Soit E une région solide du premier type, nous pouvons évaluer son volume par l'intégrale

$$\int_A (u_2(x, y) - u_1(x, y)) dV.$$

Parfois c'est plus intéressant de calculer le volume avec la formule de réduction contraire : l'intégrale double d'abord et puis l'intégrale simple par rapport à z . On parle alors de calcul de volume «par tranche».

Exemple 13.51

On veut calculer le volume de la boule de rayon a , centrée à l'origine $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$. On peut décrire B par

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_a, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\},$$

où D_a est le disque de rayon a centré en $(0, 0)$, donc le volume B sera

$$2 \int_{D_a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dV.$$

Cet intégrale est un peu ennuyeuse à calculer. On peut simplifier le calcul en observant que pour $\bar{z}$ fixé dans l'intervalle $[-a, a]$ la section de la boule au niveau $\bar{z}$ est un disque de rayon $\sqrt{a^2 - \bar{z}^2}$. L'aire d'un tel disque est $\pi(a^2 - \bar{z}^2)$. Si on réduit l'intégrale de volume de la façon

$$\int_B 1 dV = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - z^2} dz,$$

on obtient tout de suite la valeur cherchée : le volume de B est $4/3\pi a^3$. $\triangle$ **Exemple 13.52**

On calcule l'intégrale de $f(x, y, z) = z$ sur la pyramide P bornée par les plans $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $x + y + z/2 = 1$. On remarque tout de suite que les plans $x + y + z = 1$, $x + y + z/2 = 1$ se coupent en la droite $x + y = 1$, $z = 0$ (on se souvient qu'une droite dans $\mathbb{R}^3$, c'est deux équations). Cela veut dire que la projection de P sur le plan $x-y$ est le triangle T borné par les droites $x = z = 0$, $y = z = 0$ et $x + y = 1$, $z = 0$. On décrit donc P par

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, 1 - 2x - 2y \leq z \leq 1 - x - y\}$$

et T par

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

donc l'intégrale de f sur P est

$$\int_P f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{1-2x-2y}^{1-x-y} z dz dy dx = -\frac{1}{24}.$$

Notez que lorsque x et y sont entre 0 et 1, nous avons bien $1 - 2x - 2y < 1 - x - y$, d'où le fait que nous mettons $1 - 2x - 2y$ dans la borne inférieure de l'intégrale. $\triangle$

De façon analogue on définit les régions solides du deuxième et du troisième type.

13.3.11 Intégrales de fonctions non bornées sur des ensembles non bornés

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, une fonction positive. On dit qu'elle est **intégrable** sur $E \subset \mathbb{R}^n$ si

- (1) $\forall r > 0$, la fonction $f_r(x) = f(x)\mathbb{1}_{f < r}$ est intégrable sur E_r ;
- (2) la limite $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E_r} f_r$ est finie.

Dans ce cas, on pose

$$\int_E f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E_r} f_r. \quad (13.40)$$

Théorème 13.53 (Page I.38).

Soit E mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Si f est mesurable et si il existe $g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ intégrable sur E telle que $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in E$, alors f est intégrable sur E .

Réciproquement, si f est intégrable sur E , alors f est mesurable.

Lemme 13.54.

Si f est une fonction sur $[a, \infty[$, alors nous avons la formule

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \quad (13.41)$$

au sens où si un des deux membres existe, alors l'autre existe et est égal.

Démonstration. Supposons que le membre de gauche existe. Cela signifie que la fonction

$$\psi(x) = \int_a^x f \quad (13.42)$$

est bornée. Soit M , un majorant. Pour toute fonction simple φ dominant f , on a que $\int \varphi \leq M$, donc l'ensemble sur lequel on prend le supremum pour calculer $\int_a^\infty f$ est majoré par M et possède donc un supremum. Nous avons donc

$$\int_a^\infty f \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f. \quad (13.43)$$

□

13.4 Propriétés

Théorème 13.55 ([131]).

Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application mesurable $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$. Soit encore μ , une mesure positive sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$.

Si $f: S_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable alors,

- (1) f est $\varphi(\mu)$ -intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ -intégrable.
- (2) dans le cas où f est $\varphi(\mu)$ -intégrable, nous avons

$$\int_{S_2} f d(\varphi(\mu)) = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \quad (13.44)$$

Démonstration. L'intégrabilité est la définition 7.116, et demande que $|f|$ soit intégrable. L'égalité (13.44) a un sens si les deux membres sont infinis. Tant que les fonctions considérées sont positives, le point (1) est immédiat. Ce n'est qu'au moment où les fonctions considérées deviennent à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ que l'intégrabilité de $|f|$ commence à jouer parce qu'il faut que f^+ et f^- soient séparément intégrables.

Nous allons prouver la formule (13.44) pour des fonctions de plus en plus générales. Pour la suite nous notons $\mu' = \varphi(\mu)$.

Pour $f = \mathbb{1}_B$, B mesurable Soit $B \in \mathcal{F}_2$. Nous avons $\mathbb{1}_B \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$. Donc en utilisant le lemme 7.115 nous avons

$$\int_{S_2} \mathbb{1}_B d\mu' = \mu'(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \int_{S_1} \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \int_{S_1} (\mathbb{1}_B \circ \varphi) d\mu. \quad (13.45)$$

f est étagée positive La fonction f peut être écrite sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{B_k} \quad (13.46)$$

avec $B_k \in \mathcal{F}_2$ et $a_k \in \mathbb{R}^+$. Nous avons alors, en utilisant la sous-additivité de l'intégrale du théorème 7.119(3),

$$\int_{S_2} f d\mu' = \sum_k a_k \int_{S_2} \mathbb{1}_{B_k} d\mu' \quad (13.47a)$$

$$= \sum_k a_k \int_{S_1} (\mathbb{1}_{B_k} \circ \varphi) d\mu \quad (13.47b)$$

$$= \int_{S_1} \left(\sum_k a_k \mathbb{1}_{B_k} \right) \circ \varphi d\mu \quad (13.47c)$$

$$= \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \quad (13.47d)$$

f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ Vu que f est mesurable, par le théorème 7.107 il existe une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers f . Soit donc cette suite, $f_n: S_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$. Les fonction $f_n \circ \varphi$ sont étagées et positives et nous avons aussi la limite ponctuelle et croissante $f_n \circ \varphi \rightarrow f \circ \varphi$ parce que φ est continue. Le théorème de la convergence monotone (théorème 7.129) permet d'écrire ceci :

$$\int_{S_2} f d\mu' = \lim \int_{S_2} f_n d\mu' = \lim \int_{S_1} (f_n \circ \varphi) d\mu = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \quad (13.48)$$

Pour $f: S_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ C'est maintenant que l'intégrabilité va jouer. Nous avons $|f| \circ \varphi = |f \circ \varphi|$, donc

$$\int_{S_2} |f| d\mu' = \int_{S_1} |f| \circ \varphi d\mu = \int_{S_1} |f \circ \varphi| d\mu, \quad (13.49)$$

ce qui montre que f est μ' -intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ -intégrable.

De plus si $f = f^+ - f^-$ alors $f^+ \circ \varphi = (f \circ \varphi)^+$, $f^- \circ \varphi = (f \circ \varphi)^-$, et de façon similaire pour les parties imaginaires et réelles.

□

13.5 Primitives et intégrales

- (1) L'existence d'une primitive pour toute fonction continue est le théorème 16.93.
- (2) La définition d'une primitive est la définition 11.102.

En termes de notations, si $a < b$ nous posons

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f. \quad (13.50)$$

Si par contre $a > b$ nous posons $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Proposition 13.56 (Primitive et intégrale).

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et continue sur $]a, b[$. Alors la fonction

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{[a, x]} f(t) dt. \quad (13.51)$$

est une primitive de f sur $]a, b[$.

Démonstration. Nous devons prouver que F est dérivable et que pour tout $x_0 \in]a, b[$ nous avons $F'(x_0) = f(x_0)$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x_0 , il existe une fonction $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha(h) \quad (13.52)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. De plus il existe un $\delta > 0$ tel que $|\alpha(h)| < \epsilon$ pour tout $h < \delta$. À partir de maintenant nous ne considérons plus que de tels h .

Nous calculons la dérivée de F en x_0 . Pour cela,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \quad (13.53a)$$

$$= \int_0^h f(x_0 + t) dt \quad (13.53b)$$

$$= \int_0^h [f(x_0) + \alpha(t)] dt \quad (13.53c)$$

$$= hf(x_0) + \int_0^h \alpha(t) dt. \quad (13.53d)$$

Nous avons donc, pour tout $h < \delta$,

$$hf(x_0) - h\epsilon \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq hf(x_0) + h\epsilon. \quad (13.54)$$

En divisant par h et en prenant la limite $h \rightarrow 0$,

$$F'(x_0) \in B(f(x_0), \epsilon). \quad (13.55)$$

Cela étant valable pour tout $\epsilon > 0$ nous en déduisons que

$$F'(x_0) = f(x_0). \quad (13.56)$$

□

Remarque 13.57.

Le lien entre primitive et intégrale est fondamentalement lié à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, et non à la construction précise de cette mesure. Mais en même temps, la mesure de Lebesgue est l'unique à être invariante par translation.

Remarque 13.58.

Une primitive est forcément une fonction continue parce qu'une primitive est dérivable.

Ce petit résultat nous donne une façon «pratique» de calculer des intégrales en cherchant des primitives. Nous rappelons qu'en vertu du corollaire 11.103, une fonction ne possède qu'une seule primitive à constante près.

Proposition 13.59 ([185]).

Soient des fonction $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert I de $\mathbb{R}$ telles que $f^2 + g^2 = 1$. Soit $t_0 \in I$ et θ_0 tel que $f(t_0) = \cos(\theta_0)$ et $g(t_0) = \sin(\theta_0)$.

Alors il existe une unique fonction continue $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \theta(t_0) = \theta_0 & (13.57a) \\ f = \cos \circ \theta & (13.57b) \\ g = \sin \circ \theta. & (13.57c) \end{cases}$$

Démonstration. Nous commençons par l'existence, en passant par les nombres complexes. Soit $h: I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $h = f + ig$. Nous avons $h\bar{h} = 1$ et nous définissons

$$\theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t h'(s) \overline{h(s)} ds. \quad (13.58)$$

Cette intégrale existe pour tout t parce que les fonctions f et g étant de classe C^∞ , elles sont bornées sur le compact $[t_0, t]$. De plus θ est une fonction continue parce que c'est une primitive (proposition 13.56)³.

La dérivée de θ est la fonction $s \mapsto -ih'(s)\overline{h(s)}$.

Calculons

$$\frac{d}{dt} [he^{-i\theta}]_{t=0} = e^{-i\theta} (h' - h\theta') = e^{-i\theta} (h' - ih(-i)h'\bar{h}) = 0. \quad (13.59)$$

Par conséquent il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $he^{-i\theta} = c$. Mais $h(t_0) = f(t_0) + ig(t_0) = \cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0) = e^{i\theta_0}$, du coup

$$h(t_0)e^{-i\theta(t_0)} = c \quad (13.60)$$

donne immédiatement $c = 1$, ou encore $e^{i\theta(t)} = h(t)$, c'est à dire que

$$f + ig = \cos \circ \theta + i \sin \circ \theta, \quad (13.61)$$

ce qu'il fallait pour l'existence.

Pour l'unicité nous supposons avoir une autre fonction, α qui satisfait aux exigences. Pour tout $t \in I$ nous avons

$$e^{i\theta(t)} = e^{i\alpha(t)}. \quad (13.62)$$

Il existe donc une fonction $n: I \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\theta(t) = \alpha(t) + 2n(t)\pi$. Par continuité de θ et α , la fonction n doit être constante, mais vu que $\theta(t_0) = \alpha(t_0)$ nous avons $n = 1$. $\square$

Le théorème suivant est à utiliser pour calculer des intégrales des fonctions réelle lorsqu'on a des primitives sur un domaine strictement plus large que le domaine sur lequel nous voulons intégrer.

Théorème 13.60 (Théorème fondamental du calcul intégral).

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I contenant strictement l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I . Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad (13.63)$$

Une version pour les intégrales impropres sera donnée au corollaire 13.75.

Démonstration. Nous avons vu par la proposition 13.56 que la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{F}: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \quad (13.64)$$

3. En réalité nous appliquons la proposition 6.68 à chacune des parties réelles et imaginaires de la fonction $s \mapsto h'(s)\overline{h(s)}$.

était une primitive de f ; c'est même l'unique⁴ primitive de f sur $[a, b]$ à s'annuler pour $x = a$. Nous avons évidemment

$$\int_a^b f(t)dt = \tilde{F}(b). \quad (13.65)$$

Si F est une primitive quelconque, il suffit de soustraire sa valeur en $x = a$: $\tilde{F}(x) = F(x) - F(a)$ et donc

$$\int_a^b f(t)dt = \tilde{F}(b) = F(b) - F(a), \quad (13.66)$$

comme il fallait le prouver. $\square$

13.5.1 Primitives et intégrales

Définition 13.61 (Primitive).

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Une **primitive** de f sur I est une fonction définie sur I dont la dérivée est f .

Les deux propriétés fondamentales sont les suivantes.

Proposition 13.62.

À propos de primitives.

- (1) Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive (sur cet intervalle).
- (2) Deux primitives d'une même fonction sur le même intervalle ne diffèrent que d'une constante.

Démonstration. La première partie est relativement compliquée et nous ne la traitons pas ici. En ce qui concerne la seconde partie, supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de la fonction f sur l'intervalle I . Alors $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. La fonction $F_1 - F_2$ est donc une fonction dont la dérivée est nulle ; elle est donc constante. Nous avons donc $F_1 - F_2 = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et y admettant des primitives, nous notons

$$\int f(x)dx \quad (13.67)$$

l'ensemble des primitives de f sur I :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\} \quad (13.68)$$

où F est une quelconque primitive de f .

Exemple 13.63

Une primitive bien connue de $f: x \mapsto x^2$ est la fonction $F: x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Nous écrivons donc

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \quad (13.69)$$

$\triangle$

Définition 13.64 (Intégrale).

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et $a \neq b$ deux nombres dans I . Si F est une primitive de f sur I nous définissons l'**intégrale** de a à b de la fonction f comme étant le nombre $F(b) - F(a)$.

En termes de notations, nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t) \right]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \quad (13.70)$$

4. Corollaire 11.103.

Remarque 13.65.

La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive qu'on choisi pour le calculer, car si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 = F_2 + C$ et $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

Remarque 13.66.

Si l'intervalle d'intégration est réduit à un seul point alors la valeur de l'intégrale est zéro, car $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$.

Remarque 13.67.

Conformément à ce que nous montre la figure 13.25, si une fonction continue est positive sur l'intervalle $[a, b]$, alors le nombre $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la portion de plan comprise entre les droites verticales $x = a$, $x = b$, la courbe représentant la fonction f et l'axe des abscisses.

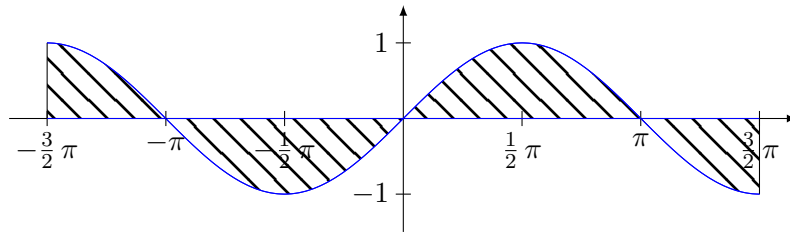
Si la fonction est négative : l'aire est comptée négativement.

Exemple 13.68

Comme nous le voyons sur le dessin suivant,

$$\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sin(x) dx = 0 \quad (13.71)$$

parce que les deux parties bleues s'annulent avec les deux parties rouges (qui sont comptées comme des aires négatives).



△

Remarque 13.69.

Toute intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle.

Proposition 13.70 (Intégrale et primitive).

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et un élément $a \in I$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} F: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt. \end{aligned} \quad (13.72)$$

Alors F est l'unique primitive de f s'annulant en $x = a$.

13.5.2 Intégrales impropres**Définition 13.71** ([85]).

Une fonction $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur un intervalle I si f est intégrable sur tout intervalle compact contenu dans I .

Proposition 13.72.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f. \quad (13.73)$$

Démonstration. Notons que la valeur de f en b n'a strictement aucune importance parce que l'intégrale de Lebesgue ne dépend pas du choix de la valeur de la fonction en un ensemble de mesure nulle; et en même temps la limite à gauche de (13.73) ne dépend pas non plus de la valeur de f en b . Bref si f n'est pas définie en b , nous pouvons poser $f(b) = 42$.

Notons de plus que du point de vue de l'intégrale de Lebesgue, $\int_{[a,b]}$ et $\int_{[a,b[}$ sont identiques et valent toutes les deux $\int_a^b$ (lorsque ça existe).

Supposons d'abord que f est positive. Alors nous posons $f_n = f \mathbb{1}_{[a, b - \frac{1}{n}]}$. Ponctuellement nous avons la limite croissante $f_n \rightarrow f$ et de plus

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_{[a,x]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n. \quad (13.74)$$

Chacun des f_n est intégrable sur $[a, b]$. Le théorème de Beppo-Levi 7.129 implique que f est intégrable sur $[a, b]$ et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \quad (13.75)$$

Cela montre que dans le cas d'une fonction f positive nous avons bien (13.73).

Si f n'est pas positif, alors nous la décomposons en partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ et par définition de l'intégrale d'une fonction non positive,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_{[a,x]} f = \lim \int f^+ - \lim \int f^-. \quad (13.76)$$

□

Il peut cependant arriver que la limite $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^b f$ existe alors que f n'est pas intégrable sur $[a, b]$. C'est l'ennui des fonctions non positives. Un exemple classique est

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (13.77)$$

Définition 13.73 ([186]).

Si

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^b f \quad (13.78)$$

existe alors nous disons que l'intégrale est **convergente** en b . Ce procédé de limite est l'intégrale **impropre** de f sur $[a, b]$.

Exemple 13.74(Intégrale impropre)

Nous considérons la fonction $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-2, 2n-1[\\ -\frac{1}{n} & \text{si } x \in [2n-1, 2n[. \end{cases} \quad (13.79)$$

Par la divergence de la série harmonique, $\int_0^\infty |f|$ n'existe pas. La fonction f n'est donc pas intégrable au sens de Lebesgue (définition 7.116).

Cependant pour tout n pair nous avons

$$\int_0^n f = 0. \quad (13.80)$$

Du coup pour tout $x \geq 0$ nous avons

$$\int_0^x f = \int_{2n}^x f \quad (13.81)$$

où $2n$ est le plus grand nombre pair inférieur à x . Nous avons $|x - 2n| \leq 2$ et $|f(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour $x \in [2n, x]$. Donc

$$\int_{2n}^x f \leq \frac{2}{n}. \quad (13.82)$$

Nous avons par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f = 0, \quad (13.83)$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur $[0, \infty[$ converge au sens des intégrales impropres. $\triangle$

L'intégrale (13.77) est une intégrale convergente mais la fonction n'est pas intégrable (parce que pour être intégrable il faut que $|f|$ soit intégrable). Nous pouvons ainsi dire que cette intégrale converge mais n'existe pas.

Le corollaire suivant nous autorise à utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 13.60 même dans les cas limites.

Corollaire 13.75.

Si f est localement intégrable sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f sur tout ouvert de $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a). \quad (13.84)$$

Démonstration. Pour chaque x dans $[a, b[$ nous avons

$$\int_a^x f = F(x) - F(a). \quad (13.85)$$

La proposition 13.72 nous explique que la limite $x \rightarrow b^-$ du membre de gauche existe et vaut $\int_a^b f$. Donc également le membre de droite :

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a). \quad (13.86)$$

□

La convergence des intégrales de fonctions $\frac{1}{x^\alpha}$ en 0 et ∞ est une question classique de l'intégration. De plus ces fonctions servent souvent à utiliser un théorème de comparaison (type intégrale dominée de Lebesgue).

Proposition 13.76.

Deux intégrales remarquables.

(1) Nous avons

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \infty \quad (13.87)$$

si et seulement si $\alpha \geq 1$.

(2) Nous avons

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = \infty \quad (13.88)$$

si et seulement si $\alpha \leq 1$.

Démonstration. La fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ admet la primitive $F(x) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur tout compact de $]0, \infty[$. Le corollaire 13.75 nous permet⁵ de dire que $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ vaudra

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}}. \quad (13.89)$$

Cela est strictement plus petit que ∞ si et seulement si $\alpha < 1$. □

5. Tout ce que nous avons fait avec la borne b de l'intégrale $\int_a^b$ reste valable avec la borne a .

13.6 Théorème de Fubini

13.6.1 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini

Il existe plusieurs résultats similaires.

- le théorème de Fubini-Tonelli 13.77 demande que la fonction soit mesurable et positive ;
- le théorème de Fubini 13.78 demande que la fonction soit intégrable (mais pas spécialement positive) ;
- le corollaire 13.79 demande l'intégrabilité de la valeur absolue des intégrales partielles pour déduire que la fonction elle-même est intégrable.

Nous rappelons que $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue est un espace mesuré σ -fini, conformément à la définition 7.23.

Théorème 13.77 (Fubini-Tonelli[125]).

Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ -finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit une fonction $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive (valant éventuellement ∞ à certains endroits) Alors :

(1) Les fonction

$$F_1: x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \quad (13.90)$$

et

$$F_2: y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \quad (13.91)$$

sont mesurables.

(2) Toutes les intégrales imaginables existent et sont égales :

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \quad (13.92a)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). \quad (13.92b)$$

Démonstration. Commençons par prouver le théorème dans le cas d'une fonction caractéristique d'un ensemble mesurable : $f(x, y) = \mathbb{1}_A(x, y)$ pour un certain ensemble $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dans ce cas,

$$F_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x, y) d\mu_2(y) = \int_{\omega_2} \mathbb{1}_{A_1(y)}(x) d\mu_2(y) = \mu_2(A_1(x)), \quad (13.93)$$

et nous avons déjà vu au théorème 7.147 que cette fonction F_1 était alors mesurable. En utilisant maintenant les égalités (7.414) ainsi que le fait que $\mathbb{1}_A(x, y) = \mathbb{1}_{A_2(x)}(y)$ nous avons

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} \mathbb{1}_A(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \quad (13.94a)$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2(A_2(x)) d\mu_1(x) \quad (13.94b)$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_2(x)}(y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \quad (13.94c)$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x, y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x). \quad (13.94d)$$

Le théorème étant valable pour les fonctions caractéristiques, il est valable pour les fonctions simples (définition 7.103) par linéarité de l'intégrale.

Si f n'est pas une fonction simple, alors la proposition 7.107 nous donne une suite croissante de fonctions simples et positives convergeant ponctuellement vers f . La partie du théorème sur les fonctions simples dit que pour chaque n l'intégrale

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) \quad (13.95)$$

peut être décomposée comme il faut en suivant la formule (13.92). Il faut pouvoir permuter la limite et l'intégrale dans chacun de cas. D'abord le théorème de la convergence monotone 7.129 appliqué à l'espace $\Omega_1 \times \Omega_2$ dit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y). \quad (13.96)$$

Ensuite, pour chaque $x \in \Omega_1$, les fonctions

$$\sigma_n(y) = \int_{\Omega_1} f_n(x, y) d\mu_1(x) \quad (13.97)$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables ; nous leur appliquons encore le théorème de la convergence monotone :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f_n(x, y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} \sigma_n(y) d\mu_2(y) \quad (13.98a)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} f_n(x, y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y) \quad (13.98b)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y) \quad (13.98c)$$

où nous avons utilisé une seconde fois Beppo-Levi. $\square$

Théorème 13.78 (Fubini[134]).

Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ -finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit

$$f \in L^1((\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{R}), \quad (13.99)$$

c'est à dire une fonction à valeurs réelles mesurable et intégrable sur Ω . Alors :

(1) Pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est $L^1(\Omega_2)$.

(2) Si nous posons

$$\varphi_f(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y); \quad (13.100)$$

alors $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$.

(3) Nous avons la formule d'inversion d'intégrale

$$\int_{\Omega} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 \quad (13.101a)$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \quad (13.101b)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). \quad (13.101c)$$

Si la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ satisfait aux hypothèse du théorème de Fubini alors

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)g(y) dx \otimes dy = \left(\int_{\Omega_1} f(x) dx \right) \left(\int_{\Omega_2} g(y) dy \right). \quad (13.102)$$

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous cette forme.

Corollaire 13.79.

Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ -finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit⁶. Soit une fonction mesurable $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

$$(1) \quad f \in L^1(\Omega),$$

(2)

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| d\mu_2 \right] d\mu_1 < \infty, \quad (13.103)$$

(3)

$$\int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} |f| d\mu_1 \right] d\mu_2 < \infty. \quad (13.104)$$

En pratique, lorsqu'on ne sait pas a priori si f est intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, nous testons l'intégrabilité en chaîne de $|f|$, et si c'est bon, alors nous savons que f est intégrable sur le produit et qu'on peut permuter les intégrales.

Exemple 13.80

Nous montrons que le théorème ne tient pas si une des deux mesures n'est pas σ -finie. Soit $I = [0, 1]$. Nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{Bor}(I), \lambda) \quad (13.105)$$

où $\mathcal{Bor}(I)$ est la tribu des boréliens sur I et λ est la mesure de Lebesgue (qui est σ -finie). D'autre part nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{P}(I), m) \quad (13.106)$$

où $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble des parties de I et m est la mesure de comptage. Cette dernière n'est pas σ -finie parce que les seuls ensembles de mesure finie pour la mesure de comptage sont des ensembles finis, or une union dénombrable d'ensembles finis ne peut pas recouvrir l'intervalle I .

Nous allons montrer que dans ce cadre, l'intégrale de la fonction indicatrice de la diagonale sur I^2 ne vérifie pas le théorème de Fubini. Étant donné que $\mathcal{Bor}(I) \subset \mathcal{P}(I)$ nous avons

$$\mathcal{Bor}(I^2) \subset \mathcal{Bor}(I) \otimes \mathcal{P}(I). \quad (13.107)$$

Soit $\Delta = \{(x, x) \text{ tel que } x \in I\}$. La fonction

$$\begin{aligned} g: I^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x - y \end{aligned} \quad (13.108)$$

est continue et $\Delta = g^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans I^2 . L'ensemble Δ est donc un borélien de I^2 et par conséquent un élément de la tribu $\mathcal{Bor}(I) \otimes \mathcal{P}(I)$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_\Delta$ est alors mesurable pour l'espace mesuré

$$(I \times I, \mathcal{Bor}(I) \otimes \mathcal{P}(I), \lambda \otimes m). \quad (13.109)$$

Pour x fixé nous avons

$$\mathbb{1}_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases} = \mathbb{1}_{\{x\}}(y), \quad (13.110)$$

et donc

$$A_1 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) dm(y) \right) d\lambda(x) \quad (13.111a)$$

$$= \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_{\{x\}}(y) dm(y) \right) d\lambda(x) \quad (13.111b)$$

$$= \int_I \left(m(\{x\}) \right) d\lambda(x) \quad (13.111c)$$

$$= \int_I 1 d\lambda(x) \quad (13.111d)$$

$$= 1. \quad (13.111e)$$

6. Définition 7.149.

Par contre le support de $\mathbb{1}_\Delta$ étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, nous avons

$$\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) d\lambda(x) = 0 \quad (13.112)$$

et par conséquent

$$A_2 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x, y) d\lambda(x) \right) dm(y) = 0. \quad (13.113)$$

Nous voyons donc que le théorème de Fubini ne s'applique pas. $\triangle$

Exemple 13.81

Nous nous proposons de calculer l'intégrale suivante en utilisant le théorème de Fubini :

$$G = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx, \quad (13.114)$$

alors que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ n'a pas de primitives parmi les fonctions élémentaires.

Par symétrie nous pouvons nous contenter de calculer

$$G_+ = \int_0^\infty e^{-x^2} dx. \quad (13.115)$$

L'astuce est de passer par l'intermédiaire

$$H = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (13.116a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy \quad (13.116b)$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx \right)^2 \quad (13.116c)$$

$$= G_+^2 \quad (13.116d)$$

L'intégrale (13.116a) se calcule en passant aux coordonnées polaires et le résultat est $H = \frac{\pi}{4}$. Nous avons alors $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (13.117)$$

$\triangle$

Exemple 13.82

Une variante, qui n'applique pas Fubini sur un domaine non borné. Nous commençons par écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \quad (13.118)$$

et puis nous faisons le calcul

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy \right) \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right) \end{aligned} \quad (13.119)$$

où K est le carré de demi côté R centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes et C_R est le cercle de rayon R centré à l'origine.

La première étape à justifier est simplement l'application de Fubini. Pour le passage de l'intégrale du carré vers le cercle, définissons

$$I_K(r) = \int_{K_r} f, \quad I_C(r) = \int_{C_r} f \quad (13.120)$$

où K_r est le carré de demi côté r et C_r est le cercle de rayon r . Le demi côté du carré inscrit à C_r est $\sqrt{2}$, donc pour tout r nous avons

$$I_K(\sqrt{2}r) \leq I_C(r) < I_K(r), \quad (13.121)$$

et en prenant la limite, nous avons évidemment

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_K(\sqrt{2}r) = \lim_{r \rightarrow \infty} I_C(r), \quad (13.122)$$

et donc cette limite est également égale à $\lim_{r \rightarrow \infty} I_C(t)$.

Il ne reste qu'à calculer la dernière intégrale sur le cercle en passant aux coordonnées polaires :

$$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-R^2}). \quad (13.123)$$

La limite donne π , nous en déduisons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (13.124)$$

△

Le théorème de Fubini-Tonelli nous permet également d'inverser des sommes et des séries. En effet une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale pour la mesure de comptage :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_{\mathbb{N}} a_n dm(n). \quad (13.125)$$

La proposition suivante montre comment il faut faire.

Proposition 13.83.

Soient les espaces mesurés $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue ainsi qu'une suite de fonctions positives $f_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Nous supposons de plus que la fonction f_n soit intégrable pour tout n et que les résultats forment une suite sommable. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) dx. \quad (13.126)$$

Démonstration. Nous pouvons la récrire le membre de gauche sous la forme

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(n, x) dx \right) dm(n) \quad (13.127)$$

avec la notation évidente $f(n, x) = f_n(x)$. Prouvons que la fonction $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est une fonction mesurable pour l'espace mesuré

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m \otimes \lambda). \quad (13.128)$$

Si $A \subset \mathbb{R}$, nous avons

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times f_n^{-1}(A). \quad (13.129)$$

Chacun des ensembles dans l'union appartient à la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^d)$ tandis que les tribus sont stables sous les unions dénombrables. La fonction f est donc mesurable. Comme nous avons supposé que f était positive, le théorème de Fubini-Tonelli s'applique et nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n, x) dm(n) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) dx. \quad (13.130)$$

□

Théorème 13.84 (Fubini).

Soit $(x, t) \mapsto f(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable sur $B_n \times B_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ où B_n et B_m sont des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Alors :

- (1) pour tout $x \in B_n$, sauf éventuellement en les points d'un ensemble $G \subset B_n$ de mesure nulle, la fonction $y \in B_m \mapsto f(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}$ est intégrable sur B_m
- (2) la fonction

$$x \in B_n \setminus G \mapsto \int_{B_m} f(x, y) dy \in \mathbb{R} \quad (13.131)$$

est intégrable sur $B_n \setminus G$

- (3) On a

$$\int_{B_n \times B_m} f(x, y) dx dy = \int_{B_n} \left(\int_{B_m} f(x, y) dy \right) dx. \quad (13.132)$$

Notons en particulier que si $f(x, y) = \varphi(x)\phi(y)$, alors $\int_{B_m} \varphi(y) dy$ est une constante qui peut sortir de l'intégrale sur B_n , et donc

$$\int_{B_n \times B_m} \varphi(x)\phi(y) dx dy = \int_{B_n} \varphi(x) dx \int_{B_m} \phi(y) dy. \quad (13.133)$$

13.7 Interprétation géométrique du déterminant

13.7.1 Par rapport à la mesure de Lebesgue

Dans la suite, Q_0 désigne le cube unité : $Q_0 = ([0, 1])^N$.

Théorème 13.85 (Interprétation géométrique du déterminant[138]).

Soit une application linéaire $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$,

$$\lambda_N(T(B)) = |\det(T)| \lambda_N(B). \quad (13.134)$$

Démonstration. Nous considérons la mesure positive μ donnée par $\mu(B) = \lambda_N(T(B))$, qui est bien une mesure par la proposition 7.75. Cette mesure est invariante par translation parce que λ_N l'est :

$$\mu(B + a) = \lambda_N(T(B) + a) = \lambda_N(T(B)) = \mu(B). \quad (13.135)$$

De plus, $T(Q_0)$ est borné et nous notons $\mu(Q_0) = C$. Nous avons $\mu = C\lambda_N$ par le corollaire 7.189.

$C(T_1 T_2) = C(T_1)C(T_2)$ Par définition,

$$C(T_1 T_2) \lambda_N(B) = \lambda_N((T_1 T_2)(B)) = \lambda_N(T_1(T_2 B)) = C(T_1) \lambda_N(T_2(B)) = C(T_1) C(T_2) \lambda_N(B). \quad (13.136)$$

Par conséquent la fonction C est multiplicative :

$$C(T_1 T_2) = C(T_1) C(T_2). \quad (13.137)$$

Et en plus, $C(\text{Id}) = 1$.

Matrice diagonale Nous considérons pour $T = D$ l'application linéaire diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$ qui fait

$$T(Q_0) = [0, d_1[\times \dots \times [0, d_N[\quad (13.138)$$

La mesure de cela est $|d_1 \cdots d_N|$, ce qui nous donne

$$C(D) = |d_1 \cdots d_N| = |\det(D)|. \quad (13.139)$$

Matrice orthogonale Nous considérons maintenant $T = U$ où U est une matrice orthogonale ($UU^t = 1$). Une matrice orthogonale est une isométrie⁷ qui conserve donc la boule unité : $UB(0, 1) = B(0, 1)$. Nous avons

$$\lambda_N(B(0, 1)) = \lambda_N(UB(0, 1)) = C(U)\lambda_N(B(0, 1)) \quad (13.140)$$

par conséquent $C(U) = 1$, et 1 est justement le déterminant de U .

Matrice quelconque Nous savons par le corollaire 12.33 de la décomposition polaire que toute matrice peut être écrite sous la forme $T = U_1 D U_2$ où U_i sont orthogonales et D est diagonale. Donc $C(T) = C(U_1)C(D)C(U_2) = \det(U_1)\det(D)\det(U_2) = \det(U_2 D U_2) = \det(T)$ parce que le déterminant est multiplicatif (proposition 6.49(1)).

□

Ce théorème donne une interprétation géométrique du déterminant en tant que facteur de dilatation des volumes lors de l'utilisation d'une application linéaire. Si T est une application linéaire quelconque,

$$\lambda_N(T(Q_0)) = |\det(T)|\lambda_N(Q_0) = |\det(T)|. \quad (13.141)$$

Le déterminant de T est le volume de l'image du cube unité par l'application T .

De la même façon, en utilisant l'application linéaire $T(x) = ax$ nous avons pour tout borélien B :

$$\lambda_N(aB) = a^N \lambda_N(B). \quad (13.142)$$

Une dilatation d'un facteur a des longueurs provoque une multiplication par a^N des volumes.

13.7.2 En petite dimension

Le déterminant d'une matrice et d'une application linéaire est la définition 6.48, et les principales propriétés algébriques sont données dans la proposition 6.49.

En dimension deux, le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb. \quad (13.143)$$

Ce nombre détermine entre autres le nombre de solutions que va avoir le système d'équations linéaires associé à la matrice.

Pour une matrice 3×3 , nous avons le même concept, mais un peu plus compliqué. Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (13.144)$$

est le nombre

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (13.145)$$

La proposition suivante énumère des conséquences de la proposition 6.49.

7. Proposition 6.61.

Proposition 13.86.

Quelques propriétés du déterminant vu de la matrice.

- (1) Si on permute deux lignes ou deux colonnes d'une matrice, alors le déterminant change de signe.
- (2) Si on multiplie une ligne ou une colonne d'une matrice par un nombre λ , alors le déterminant est multiplié par λ .
- (3) Si deux lignes ou deux colonnes sont proportionnelles, alors le déterminant est nul.
- (4) Si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, alors le déterminant ne change pas (idem pour les colonnes).

13.7.3 Produit vectoriel

Une application importante du déterminant 3×3 est qu'il détermine le **produit vectoriel** entre deux vecteurs. Pour cela nous introduisons les vecteurs de base

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13.146)$$

Ensuite, si v et w sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, nous définissons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - w_y v_z) e_x \\ &\quad - (v_x w_z - w_x v_z) e_y \\ &\quad + (v_x w_y - w_x v_y) e_z \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (13.147)$$

Ce produit vectoriel peut aussi être écrit sous la forme

$$v \times w = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} v_i w_j e_k. \quad (13.148)$$

où ϵ_{ijk} est défini par $\epsilon_{xyz} = 1$ et ensuite ϵ_{ijk} est 1 ou -1 suivant que la permutation des x, y et z est paire ou impaire. C'est à dire que ϵ_{ijk} est la signature de la permutation qui amène $(1, 2, 3)$ sur (i, j, k) .

Un grand intérêt du produit vectoriel est qu'il fournit un vecteur qui est simultanément perpendiculaire aux deux vecteurs donnés.

Proposition 13.87.

Le vecteur $v \times w$ est perpendiculaire à v et à w .

Proposition 13.88.

Le produit vectoriel est une opération antisymétrique, c'est à dire

$$v \times w = -w \times v. \quad (13.149)$$

En particulier $v \times v = 0$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$.

Proposition 13.89.

Le produit vectoriel est linéaire. Pour tout vecteurs a, b, c et pour tout nombre α et β nous avons

$$\begin{aligned} a \times (\alpha b + \beta c) &= \alpha(a \times b) + \beta(a \times c) \\ (\alpha a + \beta b) \times c &= \alpha(a \times c) + \beta(b \times c). \end{aligned} \quad (13.150)$$

Les trois vecteurs de base e_x , e_y et e_z ont des produits vectoriels faciles à retenir :

$$\begin{aligned} e_x \times e_y &= e_z \\ e_y \times e_z &= e_x \\ e_z \times e_x &= e_y \end{aligned} \quad (13.151)$$

Exemple 13.90

Calculons le produit vectoriel $v \times w$ avec

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (13.152)$$

Les vecteurs s'écrivent sous la forme $v = 3e_x - e_y + e_z$ et $w = e_x + 2e_y - e_z$. Le produit vectoriel s'écrit

$$\begin{aligned} (3e_x - e_y + e_z) \times (e_x + 2e_y - e_z) &= 6e_x \times e_y - 3e_x \times e_z \\ &\quad - e_y \times e_x + e_y \times e_z \\ &\quad + e_z \times e_x + 2e_z \times e_y \\ &= 6e_z + 3e_y + e_z + e_x + e_y - 2e_x \\ &= -e_x + 4e_y + 7e_z. \end{aligned} \quad (13.153)$$

△

13.7.4 Produit mixte

Si a , b et c sont trois vecteurs, leur **produit mixte** est le nombre $a \cdot (b \times c)$. En écrivant le produit vectoriel sous forme de somme de trois déterminants 2×2 , nous avons

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= (a_1e_x + a_2e_y + a_3e_z) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} e_z \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (13.154)$$

Le produit mixte s'écrit donc sous forme d'un déterminant. Nous retenons cette formule :

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (13.155)$$

Proposition 13.91.

Le produit vectoriel $a \times b$ est un vecteur orthogonal à a et b .

Démonstration. Vérifions que $a \perp (a \times b)$. Pour cela, nous calculons $a \cdot (a \times b)$, c'est à dire le produit mixte

$$a \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.156)$$

L'annulation de ce déterminant est due au fait que deux de ses lignes sont égales. □

Proposition 13.92.

Nous avons

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin(\theta) \quad (13.157)$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle formé par a et b .

Démonstration. En utilisant la décomposition du produit vectoriel, nous avons

$$\begin{aligned} \|a \times b\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2 \\ &= \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2(\theta) \\ &= \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\ &= \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2(\theta). \end{aligned} \quad (13.158)$$

D'où le résultat. □

Remarque 13.93.

Le nombre $\|a\| \|b\| \sin(\theta)$ est l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs a et b , comme cela se voit sur la figure 13.7.

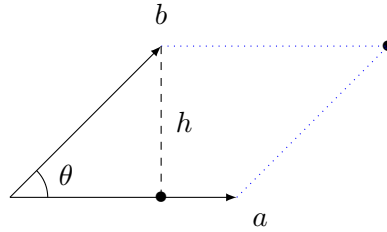


FIGURE 13.7 – Calculer l'aire d'un parallélogramme.

Ces résultats admettent une intéressante généralisation.

Lemme 13.94.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ ainsi que $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Alors

(1) Nous avons

$$\det(X, v_1, \dots, v_{n-1}) = X \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \quad (13.159)$$

(2) Le vecteur

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \quad (13.160)$$

est orthogonal à tous les v_i .

Démonstration. Vu que les deux côtés de (13.159) vus comme fonctions de X , sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier l'égalité sur une base.

Nous posons $\tau_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\tau_i(v)_k = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } k \geq i. \end{cases} \quad (13.161)$$

et nous avons d'une part

$$e_k \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \tau_k v_1 \\ \vdots \\ \tau_k v_{n-1} \end{pmatrix} \quad (13.162)$$

et d'autre part,

$$\det(e_k, v_1, \dots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \det(\tau_k v_1, \dots, \tau_k v_{n-1}). \quad (13.163)$$

La première assertion est démontrée.

En ce qui concerne la seconde, il suffit d'appliquer la première et se souvenir qu'un déterminant est nul lorsque deux lignes sont égales. En effet :

$$v_k \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det(v_k, v_1, \dots, v_n) = 0. \quad (13.164)$$

□

13.7.5 Déterminant en dimension deux

La valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (13.165)$$

est l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. En effet, d'après la remarque 13.93, l'aire de ce parallélogramme est donnée par la norme du produit vectoriel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_z, \quad (13.166)$$

donc la norme $\|a \times b\|$ est bien donnée par la valeur absolue du déterminant (13.165).

13.7.6 Déterminant en dimension trois

Si les vecteurs a , b et c ne sont pas coplanaires, alors la valeur absolue du produit mixte (voir équation (13.155)) $a \cdot (b \times c)$ donne le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs a , b et c .

En effet si φ est l'angle entre $b \times c$ et a , alors la hauteur du parallélépipède vaut $\|a\| \cos(\varphi)$ parce que la direction verticale est donnée par $b \times c$, et la hauteur est alors la «composante verticale» de a . Par conséquent, étant donné que $\|b \times c\|$ est l'aire de la base, le volume du parallélépipède vaut

$$V = \|b \times c\| \|a\| \cos(\varphi). \quad (13.167)$$

Or cette formule est le produit scalaire de a par $b \times c$; ce dernier étant donné par le déterminant de la matrice formée des composantes de a , b et c grâce à la formule (13.155).

13.8 Changement de variables dans une intégrale multiple

Dans ce qui suit, U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi: U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme. Nous notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des cubes fermés dans U dont les cotés sont parallèles aux axes.

13.8.1 Des lemmes

Lemme 13.95 ([138]).

Soient μ et ν deux mesures de Borel sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^N$. Si $\mu(Q) \leq \nu(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{Q}$ alors $\mu(B) \leq \nu(B)$ pour tout borélien B .

Démonstration. Si Q est un cube semi-ouvert, c'est à dire de la forme

$$Q = \prod_{i=1}^N [a_n, a_n + h[\subset U \quad (13.168)$$

alors Q est une réunion croissante de cubes fermés du type $[a_n + \epsilon, a_n + h - \epsilon]$, et donc $\mu(Q) \leq \nu(Q)$ par le lemme 7.27(1). La propriété est donc vraie pour les cubes semi-ouverts.

Si Ω est un ouvert, alors il est réunion disjointe dénombrable de cubes semi-ouverts par la proposition 7.179. Donc pour tout ouvert $\Omega \subset U$ nous avons $\mu(\Omega) \leq \nu(\Omega)$. En vertu de la proposition 7.79 et de la remarque 7.80, les mesures μ et ν sont régulières, et l'inégalité au niveau des ouverts se répercute en inégalité pour tout boréliens de U :

$$\mu(B) \leq \nu(B) \quad (13.169)$$

pour tout $B \in \mathcal{Bor}(U)$. Notons que U étant ouvert dans $\mathbb{R}^N$, les boréliens de U sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}^N$ inclus à U par le corollaire 7.74. $\square$

Lemme 13.96 ([138]).

Soit une application $\theta: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 où U est ouvert dans $\mathbb{R}^N$. Pour tout $Q \in \mathcal{Q}$ nous avons

$$\lambda_N(\theta(Q)) \leq \sup_{s \in Q} \|d\theta_s\|^N \lambda_N(Q). \quad (13.170)$$

Démonstration. Nous notons h la longueur du côté du cube. Le théorème des accroissements finis 11.187, pour la composante θ_i donne, pour $u, v \in Q$:

$$|\theta_i(u) - \theta_i(v)| \leq \sup_{s \in Q} \|(d\theta_i)_s\| \|u - v\| \leq \sum_{s \in Q} \|(d\theta_i)_s\| h. \quad (13.171)$$

D'autre part nous avons (nous écrivons pour $N = 2$ pour être plus court) :

$$d\theta_s(u) = \frac{d}{dt} [\theta_1(s + tu)e_1 + \theta_2(s + tu)e_2]_{t=0} = (d\theta_1)_s(u)e_1 + (d\theta_2)_s(u)e_2. \quad (13.172)$$

Donc pour chaque i : $\|d\theta_s\| \geq \|(d\theta_i)_s\|$, et nous continuons la majoration (13.171) :

$$|\theta_i(u) - \theta_i(v)| \leq \sum_{s \in Q} \|(d\theta_i)_s\| h \leq \sup_{s \in Q} \|d\theta_s\| h. \quad (13.173)$$

Les points $\theta(u)$ et $\theta(v)$ sont donc dans un cube de côté $\sup_{s \in Q} \|d\theta_s\| h$, ce qui permet de majorer $\lambda_N(\theta(Q))$ par

$$\lambda_N(\theta(Q)) \leq \left(\sup_{s \in Q} \|d\theta_s\| h \right)^N = \left(\sup_{s \in Q} \|d\theta_s\| \right)^N \lambda_N(Q) \quad (13.174)$$

où le dernier facteur provient de l'égalité $h^N = \lambda_N(Q)$. $\square$

13.8.2 Le théorème et sa démonstration

Théorème 13.97 (Changement de variable[137, 138]).

Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ ainsi qu'un C^1 -difféomorphisme $\phi: U \rightarrow V$.

(1) Si $E \subset U$ est borélien, alors $\phi(E)$ est borélien et

$$\lambda_N(\phi(E)) = \int_E |J_\phi| d\lambda_N, \quad (13.175)$$

c'est à dire $\phi^{-1}(\lambda_N) = |J_\phi| \cdot \lambda_N$.

(2) Si $f: V \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable alors la fonction

$$(f \circ \phi) \times |J_\phi|: U \rightarrow [0, \infty] \quad (13.176)$$

l'est également et⁸

$$\int_V f d\lambda_N = \int_U (f \circ \phi)(x) |J_\phi(x)| d\lambda_N(x). \quad (13.177)$$

(3) Si $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable alors elle est intégrable si et seulement si $(f \circ \phi) \times |J_\phi|: U \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable. Si c'est le cas, alors nous avons encore la formule de changement de variables :

$$\int_V f d\lambda_N = \int_U (f \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N. \quad (13.178)$$

Démonstration. Attention : la preuve va être longue.

(1) Le fait que $\phi(E)$ soit borélien lorsque E l'est est la proposition 7.184. En ce qui concerne la formule annoncée, il faut travailler.

Inégalité dans un sens (cubes) Nous commençons par prouver l'inégalité

$$\lambda_N(\phi(Q)) \leq \int_Q |J_\phi(x)| dx \quad (13.179)$$

pour tout $Q \in \mathcal{Q}$. On peut diviser le côté du cube Q en k éléments de longueurs égales. Le cube est alors divisé en k^N petits cubes d'intérieurs disjoints. Nous les nommons Q_i ($i = 1, \dots, k^N$) Nous avons alors

$$\sum_i \lambda_N(Q_i) = \sum_i \lambda_N(\text{Int}(Q_i)) = \lambda_N\left(\bigcup_i \text{Int}(Q_i)\right) \leq \lambda_N(Q) \leq \sum_i \lambda_N(Q_i). \quad (13.180)$$

La dernière inégalité est le fait que les intersections ne sont pas disjointes. Toutes ces inégalités sont en réalité des égalités et en particulier : $\lambda_N(Q) = \sum_i \lambda_N(Q_i)$.

Soit $a \in Q_i$ et posons

$$\begin{aligned} \theta: U &\rightarrow U \\ \theta &= (d\phi_a)^{-1} \circ \phi \end{aligned} \quad (13.181)$$

Cela appelle deux commentaires. D'abord l'application $d\phi_a: U \rightarrow V$ est inversible parce que ϕ est un difféomorphisme (lemme 6.225). Ensuite, l'application θ est la composée de $(d\phi_a)$ (qui est linéaire) et de ϕ qui est de classe C^1 ; donc θ est de classe C^1 . Donc le lemme 13.96 s'applique. La différentielle de θ n'est pas trop compliquée à écrire parce que nous avons la formule de différentielle d'une composée (théorème 6.222) et le fait que $(d\phi_a)^{-1}$ qui est linéaire et donc sa propre différentielle (lemme 6.219). Nous avons donc $d\theta = (d\phi_a)^{-1} \circ d\phi$, et le lemme donne

$$\lambda_N((d\phi_a)^{-1}\phi(a)) \leq \sup_{s \in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i) \quad (13.182)$$

8. L'intégrabilité d'une fonction est la définition 7.116 qui stipule que l'intégrale de $|f(x)|$ est finie. L'égalité proposée a un sens si les deux membres sont infinis. Il n'y a donc pas d'hypothèses d'intégrabilité obligatoire pour écrire une intégrale lorsque la fonction a des valeurs positives.

Étant donné que $(d\phi_a)^{-1}$ est une application linéaire, la proposition 13.85 s'applique, et donc

$$\lambda_N((d\phi_a)^{-1}\phi(a)) = |\det(d\phi_a)^{-1}| \lambda_N(\phi(a)). \quad (13.183)$$

Le déterminant d'une application réciproque est donné par la proposition 6.49(4) :

$$\det((d\phi_a)^{-1}) = \frac{1}{\det(d\phi_a)} = \frac{1}{J_\phi(a)}. \quad (13.184)$$

Recollant les morceaux,

$$\lambda_N(\phi(Q_i)) \frac{1}{J_\phi(a)} \leq \sup_{s \in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i), \quad (13.185)$$

ou encore :

$$\lambda_N(\phi(Q_i)) \leq |J_\phi(a)| \sup_{s \in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i). \quad (13.186)$$

Vu que a et s sont proches l'un de l'autre (on peut choisir encore la taille du cube), nous pouvons espérer que $(d\phi_a)^{-1}$ ne soit pas loin d'être l'inverse de $d\phi_s$. Et c'est en effet le cas. Pour s'en assurer, remarquons que l'application

$$d\phi: Q_i \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad (13.187)$$

est continue et même uniformément continue parce que Q_i est compact. De plus la composition de différentielles étant un produit de matrices nous pouvons permuter la limite dans le calcul suivant :

$$\lim_{s \rightarrow a} (d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s = (d\phi_a)^{-1} \circ \lim_{s \rightarrow a} d\phi_s = \mathbb{1}. \quad (13.188)$$

Donc si $\epsilon > 0$ est donné, il existe δ tel que pour tout $s \in B(a, \delta)$, $\|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s - \mathbb{1}\| \leq \epsilon$. En ce qui concerne les normes, si $\|A - \mathbb{1}\| \leq \epsilon$ alors $\|A\| \leq \|A - \mathbb{1}\| + \|\mathbb{1}\| \leq \epsilon + 1$.

Cela étant dit, nous nous souvenons que nous avons découpé U en un nombre fini de cubes Q_i d'égales dimensions; il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la diagonale des cubes soit plus petite que le minimum des δ_i . Avec un tel découpage,

$$\sup_{s \in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\| \leq 1 + \epsilon \quad (13.189)$$

et par conséquent

$$\lambda_N(\phi(Q_i)) \leq (1 + \epsilon)^N |J_\phi(a_i)| \lambda_N(Q_i) \quad (13.190)$$

où nous avons ajouté un indice i au point a pour nous rappeler que nous avons choisi $a \in Q_i$.

Le théorème des valeurs intermédiaires 13.1 appliqué à l'intégrale $\int_{Q_i} |J_\phi(t)| d\lambda_N(t)$ donne l'existence d'un $a_i \in Q_i$ tel que

$$|J_\phi(a_i)| = \frac{1}{\lambda_N(Q_i)} \int_{Q_i} |J_\phi| d\lambda_N. \quad (13.191)$$

Ce point a_i vérifie l'inégalité (13.190) comme tout point de Q_i . Nous sommes ces inégalités sur tous les i :

$$\lambda_N(\phi(Q)) \leq \sum_i \lambda_N(\phi(Q_i)) \quad (13.192a)$$

$$\leq (1 + \epsilon)^N \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_N(Q_i) \int_{Q_i} |J_\phi| d\lambda_N} \right) \lambda_N(Q_i) \quad (13.192b)$$

$$= (1 + \epsilon)^N \sum_i \int_{Q_i} |J_\phi| d\lambda_N \quad (13.192c)$$

$$= (1 + \epsilon)^N \int_Q |J_\phi| d\lambda_N \quad (13.192d)$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathbb{1}_Q = \sum_i \mathbb{1}_{Q_i}$ presque partout. En prenant le limite $\epsilon \rightarrow 0$ nous trouvons

$$\lambda_N(\phi(Q)) \leq \int_Q |J_\phi| d\lambda_N. \quad (13.193)$$

L'inégalité (13.179) est prouvée.

Inégalité pour les boréliens Soit B un borélien de U . Vu que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$, les mesures de Lebesgue sur U et sur V sont les mêmes que celles sur $\mathbb{R}^n$ par le corollaire 7.74.

Par les définitions 7.137 et 7.75, les applications μ et ν définies par $\mu = \phi^{-1}(\lambda_N)$ et $\nu = |J_\phi| \lambda_N$ sont des mesures positives sur U (de Borel, qui plus est). L'inégalité (13.179) à peine prouvée s'écrit $\mu(Q) \leq \nu(Q)$ pour tout cube Q . Le lemme 13.95 nous dit alors que l'inégalité tient pour tout borélien.

Inégalité dans l'autre sens En utilisant la notation de la mesure image et du produit d'une mesure par une fonction⁹, nous pouvons écrire l'inégalité prouvée sous la forme $\phi^{-1}(\lambda_N) \leq |J_\phi| \lambda_N$. En inversant les rôles de U et V (et donc de ϕ et ϕ^{-1}) nous avons aussi

$$\phi(\lambda_N) \leq |J_{\phi^{-1}}| \lambda_N. \quad (13.194)$$

En y appliquant ϕ^{-1} et le lemme 7.75,

$$\lambda_N \leq \phi^{-1}(|J_{\phi^{-1}}| \lambda_N). \quad (13.195)$$

Nous prouvons à présent que $\phi^{-1}(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N) = (|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)$ en appliquant à un borélien B de U . D'une part

$$\phi^{-1}(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N)(B) = (|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N)\phi(B) \quad (13.196a)$$

$$= \int_{\phi(B)} |J_{\phi^{-1}}| d\lambda_N, \quad (13.196b)$$

et d'autre part,

$$(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)B = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x) (|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi)(x) d(\phi^{-1}(\lambda_N))(x) \quad (13.197a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(\phi^{-1}(x)) (|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi)(\phi^{-1}(x)) d\lambda_N(x) \quad (13.197b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)} |J_{\phi^{-1}}| \quad (13.197c)$$

$$= \int_B |J_{\phi^{-1}}| d\lambda_N. \quad (13.197d)$$

Justification :

— Pour (13.197b), le théorème 13.55(2).

L'équation (13.195) devient alors

$$\lambda_N \leq (|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \quad (13.198)$$

Nous allons faire le produit de cette mesure par $|J_\phi|$ en nous souvenant que $J_\phi(x) = \det(d\phi_x)$. Par le lemme 6.225 nous avons aussi $(d\phi_x)^{-1} = d\phi_{\phi(x)}^{-1}$ et donc, par la propriété 6.49(3) du déterminant,

$$J_\phi(x) = \frac{1}{\det(d\phi_{\phi(x)}^{-1})} = \frac{1}{J_{\phi^{-1}}(\phi(x))}. \quad (13.199)$$

9. Définition 7.75 et 7.137

Nous avons

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leq |J_\phi| \cdot (|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \quad (13.200)$$

En utilisant la proposition 7.138, il s'agit de multiplier la mesure $\phi^{-1}(\lambda_N)$ par la fonction

$$x \mapsto |J_\phi(x)J_{\phi^{-1}}(\phi(x))| = 1. \quad (13.201)$$

Nous avons donc bien

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leq \phi^{-1}(\lambda_N), \quad (13.202)$$

et donc l'égalité

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N = \phi^{-1}(\lambda_N), \quad (13.203)$$

c'est à dire le point (1).

- (2) Le fait que la fonction proposée soit mesurable est le fait que la mesurabilité n'est pas affectée par produit et composition (propositions 7.96 et 7.66), et le fait que pour les mêmes raisons, l'application $J_\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ est également mesurable. En ce qui concerne la formule nous allons la démontrer dans le cas de fonctions de plus en plus générales.

Pour les fonctions indicatrices Soit B un borélien de U , et considérons la fonction $f = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. Alors

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}(y) \mathbb{1}_V(y) d\lambda_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)} d\lambda_N = \lambda_N(\phi(B)). \quad (13.204)$$

parce que $V = \phi(U)$ et $B \subset U$, donc $\mathbb{1}_{\phi(B)} \mathbb{1}_{\phi(U)} = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. D'autre part, pour calculer l'autre membre de (13.177) nous remarquons que $f = \mathbb{1}_{\phi(B)} = \mathbb{1}_B \circ \phi^{-1}$, ce qui donne

$$\int_U f(\phi(x)) |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) = \int_U \mathbb{1}_B |J_\phi| d\lambda_N = \int_B |J_\phi| d\lambda_N. \quad (13.205)$$

L'ensemble B étant borélien, il est extrêmement mesurable, ce qui fait que le point (1) s'applique : les expressions (13.204) et (13.205) sont égales.

Pour les fonctions étagées Soit $f: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction étagée :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \quad (13.206)$$

Nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\int_V f d\lambda_N = \int_V \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N \quad (13.207a)$$

$$= \sum_i a_i \int_V \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N \quad (13.207b)$$

$$= \sum_i \int_U (\mathbb{1}_{A_i} \circ \phi)(x) |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \quad (13.207c)$$

$$= \sum_i a_i \int_U \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)} |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \quad (13.207d)$$

$$= \int_V \underbrace{\sum_i a_i \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)}(x)}_{=(f \circ \phi)(x)} |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \quad (13.207e)$$

$$= \int_V (f \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N. \quad (13.207f)$$

Justifications :

- Pour (13.207b) : linéarité de l'intégrale, théorème 7.119(2)¹⁰
- Pour (13.207c) : le cas des fonctions indicatrices est utilisé pour chaque i entre 1 et n .

Fonction mesurable positive Soit $f: V \rightarrow [0, \infty]$. Par le théorème fondamental d'approximation 7.107, il existe une suite croissante de fonctions étagées et mesurables $\varphi_n: V \rightarrow [0, \infty[$ dont la limite ponctuelle est f . Nous avons alors le calcul suivant :

$$\int_V f d\lambda_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_V \varphi_n d\lambda_N \quad (13.208a)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_U (\varphi_n \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N \quad (13.208b)$$

$$= \int_U \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N \quad (13.208c)$$

$$= \int_U (f \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N. \quad (13.208d)$$

Justifications :

- Pour (13.208a), c'est le théorème de la convergence monotone 7.129.
 - Pour (13.208b), c'est le présent théorème pour la fonction étagée φ_n .
 - Pour (13.208c), c'est encore la convergence dominée, justifiée par le fait que $\varphi_n \circ \phi$ est également une suite croissante : si $x \in U$ alors $\varphi_{n+1}(\phi(x)) \geq \varphi_n(\phi(x))$.
 - Pour (13.208d), c'est la limite ponctuelle $\varphi_n(\phi(x)) \rightarrow f(\phi(x))$.
- (3) La partie sur l'intégrabilité repose sur le fait (ici $|\cdot|$ est le module et non une valeur absolue) $|f| \circ \phi = |f \circ \phi|$. Les faits suivants sont équivalents :
- la fonction $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable
 - la fonction $|f|: V \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable
 - la fonction $(|f| \circ \phi) |J_\phi|: U \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable (par le point (2)).
 - la fonction $(f \circ \phi) |J_\phi|: U \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable.

En ce qui concerne la formule, il s'agit seulement d'appliquer le point (2) aux parties positives, négatives, imaginaires et réelles de f .

□

13.98.

La formule de changement de variables peut être comprise de la façon suivante. Si ϕ est linéaire alors le facteur $|J_\phi|$ est la mesure de l'image par ϕ d'une portion de $\mathbb{R}^p$ de mesure 1, sinon $|J_\phi|$ est le rapport entre la mesure de l'image d'un élément infinitésimal de volume de $\mathbb{R}^p$ et sa mesure originale.

Soit $\phi(u, v) = g(u, v)e_1 + h(u, v)e_2$ un difféomorphisme dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) l'image par ϕ de (u_0, v_0) . On considère le petit rectangle R de sommets (u_0, v_0) , $(u_0 + \Delta u, v_0)$, $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ et $(u_0, v_0 + \Delta v)$. L'image de R n'est pas un rectangle en général, mais peut être bien approximée par le rectangle de sommets (x_0, y_0) , $(x_0, y_0) + \phi_u \Delta u$, $(x_0, y_0) + \phi_u \Delta u + \phi_v \Delta v$ et $(x_0, y_0) + \phi_v \Delta v$ et son aire est $\|\phi_u \times \phi_v\| \Delta u \Delta v$. La valeur $|\phi_u \times \phi_v|$ est exactement $|J_\phi|$.

13.8.3 Exemples

Exemple 13.99

Soit V la région trapézoïdale de sommets $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$, comme à la figure 13.8(a). Calculons ensemble l'intégrale double

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}} dV,$$

10. Il est remarquable que nous n'utilisons cette linéarité que pour les fonction étagées.

avec le changement de variable $\psi(x, y) = (x + y, x - y)$. C'est à dire que nous considérons les nouvelles variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y. \end{cases} \quad (13.209a)$$

$$(13.209b)$$

Il faut remarquer d'abord que le changement de variable proposé est dans le mauvais sens. On écrit alors $\phi(u, v) = \psi^{-1}(u, v) = ((u + v)/2, (u - v)/2)$, c'est à dire

$$\begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2}. \end{cases} \quad (13.210a)$$

$$(13.210b)$$

La région qui correspond à V est U , le trapèze de sommets $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(-2, 2)$, qu'on voit sur la figure 13.8(b) et qu'on décrit par

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}.$$

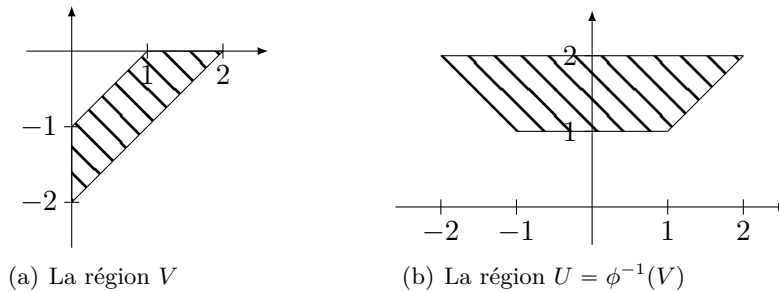


FIGURE 13.8 – Avant et après le changement de variables

On observe que U est une région du premier type tandis que V n'est pas du premier ou du deuxième type. Le déterminant de la matrice jacobienne de ψ^{-1} est $J_{\psi^{-1}}$,

$$J_{\psi^{-1}}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \quad (13.211)$$

On a alors

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}} dV = \int_U e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} dV = \int_1^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}).$$

△

Exemple 13.100

Coordonnées polaires : On veut évaluer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur la région V suivante :

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0\}.$$

On peut faire le calcul directement,

$$\int_V f(x, y) dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 + y^2 dy dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} dx$$

mais c'est un peu ennuyeux. On peut simplifier beaucoup les calculs avec un changement de variables vers les coordonnées polaires. Dans ce cas, on sait bien que le difféomorphisme à utiliser est $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Le jacobien J_ϕ est

$$J_\phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r, \quad (13.212)$$

qui est toujours positif. La fonction f peut s'écrire comme $f(\phi(r, \theta)) = r^2$ et $\phi^{-1}(V) =]0, 1] \times]0, \pi/2[$. La formule du changement de variables nous donne

$$\int_V f(x, y) dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

△

Exemple 13.101

Coordonnées cylindriques : On veut calculer le volume de la région A définie par l'intersection entre la boule unité et le cylindre qui a pour base un disque de rayon $1/2$ centré en $(0, 1/2)$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1/4\}.$$

On peut décrire A en coordonnées cylindriques

$$A = \left\{ (r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times [-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \mid \right. \\ \left. -\pi/2 < \theta < \pi, 0 < r \leq \sin \theta, -\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2} \right\}. \quad (13.213)$$

Le jacobien de ce changement de variables, J_{cyl} , est

$$J_{cyl}(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \quad (13.214)$$

qui est toujours positif. Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z) dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = \frac{2\pi}{8} + \frac{8}{9}.$$

△

Exemple 13.102

Volume d'un solide de révolution : Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive. On dit que le solide A décrit par

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a, b], \sqrt{x^2 + y^2} \leq g^2(z) \right\}$$

est un solide de révolution. Afin de calculer son volume, on peut décrire A en coordonnées cylindriques,

$$A = \left\{ (r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times [-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \mid a \leq z \leq b, 0 < r^2 \leq g^2(z) \right\}.$$

Le jacobien de ce changement de variables est $J_{cyl} = r$, comme dans l'exemple précédent. Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{g(z)} r dr d\theta dz = \int_a^b \pi g^2(z) dz.$$

Cette formule peut être utilisée pour tout solide de révolution.

△

Exemple 13.103

Coordonnées sphériques : On veut calculer le volume du cornet de glace A

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{S}^2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}.$$

On peut décrire A en coordonnées sphériques.

$$A = \{(\rho, \theta, \phi) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times [0, \pi[\mid 0 < \phi \leq \pi/4, 0 < \rho \leq 1\}.$$

Le jacobien de ce changement de variables J_{sph} est

$$J_{sph}(\rho, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \rho \cos \theta \cos \phi & \rho \sin \theta \cos \phi & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi, \quad (13.215)$$

Le volume de A est donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \chi_A(x, y, z) dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

△

13.8.4 Récapitulatif des changements de variables

En pratique, nous retiendrons les formules suivantes :

13.8.4.1 Coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (13.216a)$$

$$(13.216b)$$

avec $r \in]0, \infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Le jacobien vaut r .

13.8.4.2 Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (13.217a)$$

$$(13.217b)$$

$$(13.217c)$$

avec $r \in]0, \infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$. Le jacobien vaut r .

13.8.4.3 Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad (13.218a)$$

$$(13.218b)$$

$$(13.218c)$$

avec $\rho \in]0, \infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\phi \in [0, \pi[$. Le jacobien vaut $-\rho^2 \sin(\phi)$.

N'oubliez pas que lorsqu'on effectue un changement de variables dans une intégrale, la *valeur absolue* du jacobien apparaît.

Cependant notre convention de coordonnées sphériques fait venir $\sin(\phi)$ avec $\phi \in [0, \pi[$; vu que le signe de $\sin(\phi)$ y est toujours positif, cette histoire de valeur absolue est sans grandes conséquences. Ce n'est pas le cas de toutes les conventions possibles.

13.8.5 Changement de variables

Le domaine $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 < 1\}$ s'écrit plus facilement $E = \{(r, \theta) \text{ tel que } r < 1\}$ en coordonnées polaires. Le passage aux coordonnées polaire permet de transformer une intégration sur un domaine rond à une intégration sur le domaine rectangulaire $]0, 2\pi[\times]0, 1[$. La question est évidemment de savoir si nous pouvons écrire

$$\int_E f = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta. \quad (13.219)$$

Hélas, non ; la vie n'est pas aussi simple.

Théorème 13.104.

Soit $g: A \rightarrow B$ un difféomorphisme. Soient $F \subset B$ un ensemble mesurable et borné et $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable. Supposons que $g^{-1}(F)$ soit borné et que Jg soit borné sur $g^{-1}(F)$. Alors

$$\int_F f(x) dy = \int_{g^{-1}(F)} f(g(x)) |Jg(x)| dx \quad (13.220)$$

Pour rappel, Jg est le déterminant de la matrice jacobienne (aucun lien de parenté) donnée par

$$Jg = \det \begin{pmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 \end{pmatrix}. \quad (13.221)$$

Un **difféomorphisme** est une application $g: A \rightarrow B$ telle que g et $g^{-1}: B \rightarrow A$ soient de classe C^1 .

13.8.5.1 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont données par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} g:]0, \infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (13.222)$$

où D est la demi droite $y = 0, x \geq 0$. Le fait que les coordonnées polaires ne soient pas un difféomorphisme sur tout $\mathbb{R}^2$ n'est pas un problème pour l'intégration parce que le manque de difféomorphisme est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. Le jacobien est donné par

$$Jg = \det \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r. \quad (13.223)$$

Exemple 13.105

Montrons comment intégrer la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sur le domaine délimité par la droite $y = x$ et le cercle $x^2 + y^2 = y$, représenté sur la figure 13.9. Pour trouver le centre et le rayon du cercle $x^2 + y^2 = y$, nous commençons par écrire $x^2 + y^2 - y = 0$, et ensuite nous reformons le carré : $y^2 - y = (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

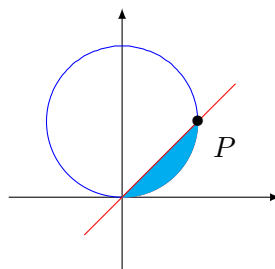


FIGURE 13.9 – Passage en polaire pour intégrer sur un morceau de cercle.

Le passage en polaire transforme les équations du bord du domaine en

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \sin(\theta) \\ r^2 &= r \sin(\theta).\end{aligned}\tag{13.224}$$

L'angle θ parcourt donc $]0, \pi/4[$, et le rayon, pour chacun de ces θ parcourt $]0, \sin(\theta)[$. La fonction à intégrer se note maintenant $f(r, \theta) = \sqrt{1 - r^2}$. Donc l'intégrale à calculer est

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sin(\theta)} \sqrt{1 - r^2} r dr \right). \tag{13.225}$$

Remarquez la présence d'un r supplémentaire pour le jacobien.

Notez que les coordonnées du point P sont $(1, 1)$. $\triangle$

13.8.5.2 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r \in]0, \infty[\\ \theta \in]0, 2\pi[\\ \varphi \in]0, \pi[. \end{cases} \tag{13.226}$$

Le jacobien associé est $Jg(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin \varphi$. Rappelons que ce qui rentre dans l'intégrale est la valeur absolue du jacobien.

Si nous voulons calculer le volume de la sphère de rayon R , nous écrivons donc

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi r^2 \sin(\varphi) d\varphi = 4\pi R = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{13.227}$$

Ici, la valeur absolue n'est pas importante parce que lorsque $\varphi \in]0, \pi[,$ le sinus de φ est positif.

Des petits malins pourraient remarquer que le changement de variable (13.226) est encore une paramétrisation de $\mathbb{R}^3$ si on intervertit le domaine des angles :

$$\begin{aligned}\theta &: 0 \rightarrow \pi \\ \varphi &: 0 \rightarrow 2\pi,\end{aligned}\tag{13.228}$$

alors nous paramétrons encore parfaitement bien la sphère, mais hélas

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) d\varphi = 0. \tag{13.229}$$

Pourquoi ces «nouvelles» coordonnées sphériques sont-elles mauvaises ? Il y a que quand l'angle φ parcourt $]0, 2\pi[$, son sinus n'est plus toujours positif, donc la *valeur absolue* du jacobien n'est plus $r^2 \sin(\varphi)$, mais $r^2 \sin(\varphi)$ pour les φ entre 0 et π , puis $-r^2 \sin(\varphi)$ pour φ entre π et 2π . Donc l'intégrale (13.229) n'est pas correcte. Il faut la remplacer par

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi r^2 \sin(\varphi) d\varphi - \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_\pi^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{13.230}$$

13.8.6 Coordonnées polaires

Soit T la fonction de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ définie par

$$\begin{aligned}T : \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),\end{aligned}\tag{13.231}$$

Cette fonction est surjective. Elle est bijective sur chaque bande de la forme $]0, +\infty[\times [a - \pi, a + \pi[$. Si $a = 0$ l'inverse de T est la fonction $T^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x))$. Soit $P = (x, y)$ un élément

dans $\mathbb{R}^2$, on dit que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le rayon de P et que $\theta = \arctg(y/x)$ est son argument principal. L'origine ne peut pas être décrite en coordonnées polaires parce que si son rayon est manifestement zéro, on ne peut pas lui associer une valeur univoque de l'angle θ .

Exemple 13.106

L'équation du cercle de rayon a et centre $(0, 0)$ en coordonnées polaires est $r = a$. $\triangle$

Exemple 13.107

Une équation possible pour la demi-droite $x = y$, $x > 0$, est $\theta = \pi/4$. $\triangle$

13.8.7 Coordonnées cylindriques

Soit T la fonction de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ définie par

$$\begin{aligned} T : \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ (r, \theta, z) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \end{aligned} \quad (13.232)$$

Cette fonction est surjective. Elle est bijective sur chaque bande de la forme $]0, +\infty[\times [a - \pi, a + \pi[\times \mathbb{R}$, a dans $\mathbb{R}$. Il n'y a presque rien de nouveau par rapport aux coordonnées polaires. Les coordonnées cylindriques sont intéressantes si on décrit un objet invariant par rapport aux rotations autour de l'axe des z .

Exemple 13.108

Il faut savoir ce que décrivent les équations les plus simples en coordonnées cylindriques,

- $r \leq a$, pour a constant dans $]0, +\infty[$, est le cylindre de hauteur infinie qui a pour axe l'axe des z et pour base le disque de rayon a centré à l'origine,
- $r = a$ est la surface du cylindre,
- $\theta = b$ est un demi-plan ouvert et sa fermeture contient l'axe des z ,
- $z = c$ est un plan parallèle au plan x - y .

 $\triangle$ **Exemple 13.109**

Un demi-cône qui a son sommet en l'origine et pour axe l'axe des z est décrit par $z = dr$. Si d est positif il s'agit de la moitié supérieure du cône, si $d < 0$ de la moitié inférieure. $\triangle$

Exemple 13.110

De même, la sphère de rayon a et centrée à l'origine est l'assemblage des calottes $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ et $z = -\sqrt{a^2 - r^2}$. $\triangle$

13.8.8 Coordonnées sphériques

Soit T la fonction de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ définie par

$$\begin{aligned} T : \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \\ (\rho, \theta, \phi) &\mapsto (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi), \end{aligned} \quad (13.233)$$

Cette fonction est surjective. Elle est bijective sur chaque bande de la forme $]0, +\infty[\times [a - \pi, a + \pi[\times [b - \pi/2, b + \pi/2[$, a et b dans $\mathbb{R}$. Si $a = 0$ et $b = -\pi/2$ la fonction inverse T^{-1} est donnée

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\rightarrow]0, +\infty[\times [-\pi, \pi[\times [0, \pi[\\ (x, y, z) &\mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arctg \frac{y}{x}, \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (13.234)$$

Soit P un point dans $\mathbb{R}^3$. L'angle ϕ est l'angle entre le demi-axe positif des z et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, ρ est la norme de $\overrightarrow{OP}$ et θ est l'argument en coordonnées polaires de la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur le plan $x-y$.

Remarque 13.111.

Dans la littérature, les angles θ et ϕ sont parfois inversés (voire, changent de nom, par exemple φ au lieu de ϕ). Il faut donc être très prudent lorsqu'on veut utiliser dans un cours des formules données dans un autre cours.

Exemple 13.112

Il faut connaître le sens des équations plus simples,

- $\rho \leq a$, pour a constant dans $]0, +\infty[$, est la boule fermée de rayon a centrée à l'origine,
- $\rho = a$ est la sphère de rayon a centrée à l'origine,
- $\theta = b$ est un demi-plan ouvert et sa fermeture contient l'axe des z ,
- $\phi = c$ est un demi-cône qui a son sommet à l'origine et pour axe l'axe des z . Si c est positif il s'agit de la moitié supérieure du cône, si $c < 0$ de la moitié inférieure.

△

13.9 Forme différentielle

Nous parlerons de formes différentielles exactes et fermées dans la section 13.192.

Définition 13.113.

Soit D , un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une **1-forme différentielle** ω sur D est une application

$$\begin{aligned} \omega: D &\rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ x &\mapsto \omega_x. \end{aligned} \tag{13.235}$$

Étant donné que $\{dx_i\}$ est une base de $(\mathbb{R}^n)^*$, pour chaque $x \in D$, il existe des uniques réels $a_i(x)$ tels que

$$\omega_x = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n. \tag{13.236}$$

Lemme 13.114.

Une 1-forme différentielle est **continue** si les fonctions a_i sont continues. La forme sera C^k quand les a_i seront C^k .

Remarque 13.115.

L'ensemble des 1-formes différentielles forment un espace vectoriel avec les définitions

$$\begin{aligned} (\lambda\omega)_x(v) &= \lambda\omega_x(v) \\ (\omega + \mu)_x(v) &= \omega_x(v) + \mu_x(v). \end{aligned} \tag{13.237}$$

Nous connaissons la **base duale** de $(\mathbb{R}^n)^*$, ce sont les formes e_i^* définies par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Dans le cadre du cours d'analyse, nous allons noter ces formes¹¹ par dx_i :

$$\begin{aligned} e_1^* &= dx_1: v \mapsto v_1 \\ &\vdots \\ e_n^* &= dx_n: v \mapsto v_n \end{aligned} \tag{13.239}$$

11. Parce que ce sont les différentielles des fonctions de projection

$$\begin{aligned} x_i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i \end{aligned} \tag{13.238}$$

Toute forme différentielle s'écrit

$$\omega_x = \sum_{i=0}^n a_i(x) dx_i \quad (13.240)$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont les composantes de ω dans la base usuelle, et sont des fonctions à valeurs réelles. Pour un vecteur $v = (v_1, \dots, v_n)$ on a donc par définition de dx_i

$$\omega_x v = \sum_{i=0}^n a_i(x) v_i. \quad (13.241)$$

Ces fonctions a_i peuvent être trouvées en appliquant ω aux éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$a_j(x) = \omega_x(e_j) \quad (13.242)$$

parce que $\omega_x(e_j) = \sum_i a_i(x) dx_i(e_j) = \sum_i a_i(x) \delta_{ij} = a_j(x)$.

Exemple 13.116

Un exemple type de forme différentielle est la différentielle d'une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, la différentielle d'une telle fonction est l'application linéaire

$$\begin{aligned} df: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y. \end{aligned} \quad (13.243)$$

△

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle d'une 1-forme, nous avons une formule de Leibnitz

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega. \quad (13.244)$$

En particulier,

$$d(fdx) = df \wedge dx + f \underbrace{d(dx)}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial x} dx \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx. \quad (13.245)$$

Si $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^2 , sa différentielle est la forme

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy. \quad (13.246)$$

Si nous nommons f et g les fonctions $\partial_x F$ et $\partial_y F$, nous avons donc

$$Df = f dx + g dy, \quad (13.247)$$

qui vérifie

$$\partial_y f = \partial_x g, \quad (13.248)$$

parce que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Ce que nous avons donc prouvé, c'est que

Lemme 13.117.

Si $f dx + g dy$ est la différentielle d'une fonction de classe C^2 , alors $\partial_y f = \partial_x g$.

13.9.0.1 L'isomorphisme musical

Si G est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} G_x^\flat: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle G(x), v \rangle \end{aligned} \quad (13.249)$$

Pour chaque x , l'application $G_x^\flat$ est une forme sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Nous écrivons que

$$G_x^\flat \in (\mathbb{R}^n)^*. \quad (13.250)$$

Nous pouvons ainsi déterminer le développement de $G^\flat$ dans la base des dx_i en faisant le calcul

$$G_x^\flat(e_i) = \langle G(x), e_i \rangle = G_i(x), \quad (13.251)$$

donc les composantes de $G^\flat$ dans la base dx_i sont exactement les composantes de G dans la base e_i :

$$G_x^\flat = G_1(x)dx_1 + \dots + G_n(x)dx_n. \quad (13.252)$$

La construction inverse existe également. Si ω est une 1-forme différentielle, nous pouvons définir le champ de vecteur $\omega^\sharp$ par la formule (implicite)

$$\omega_x(v) = \langle \omega^\sharp(x), v \rangle \quad (13.253)$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $(\omega^\sharp)^\flat = \omega$.

Lemme 13.118.

En composantes nous avons :

$$\omega^\sharp(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)). \quad (13.254)$$

Si G est un champ de vecteurs, alors $(G^\flat)^\sharp = G$.

13.10 Intégrale sur une variété

13.10.1 Mesure sur une carte

Nous considérons dans cette section uniquement des variétés M de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. Une particularité de $\mathbb{R}^3$ (par rapport aux autres $\mathbb{R}^n$) est qu'il existe le produit vectoriel.

Si $v, w \in \mathbb{R}^3$, alors le vecteur $v \times w$ est un vecteur normal au plan décrit par v et w qui jouit de l'importante propriété suivante :

$$\text{aire du parallélogramme} = \|v \times w\|. \quad (13.255)$$

L'aire du parallélogramme construit sur v et w est donnée par la norme du produit vectoriel. Afin de donner une mesure infinitésimale en un point $p \in M$, nous voudrions prendre deux vecteurs tangents à M en p , et puis considérer la norme de leur produit vectoriel. Cette idée se heurte à la question du choix des vecteurs tangents à considérer.

Dans $\mathbb{R}^2$, le choix est évident : nous choisissons e_x et e_y , et nous avons $\|e_x \times e_y\| = 1$. L'idée est donc de choisir une carte $F: W \rightarrow F(w)$ autour du point $p = F(w)$, et de choisir les vecteurs tangents qui correspondent à e_x et e_y via la carte, c'est à dire les vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial x}(w), \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(w). \quad (13.256)$$

L'élément infinitésimal de surface sur M au point $p = F(w)$ est alors défini par

$$d\sigma_F = \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w) \right\| dw, \quad (13.257)$$

et si la partie $A \subset M$ est entièrement contenue dans $F(W)$, nous définissons la **mesure** de A par

$$\mu_2(A) = \int_{F^{-1}(A)} d\sigma_F = \int_{F^{-1}(A)} \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w) \right\| dw. \quad (13.258)$$

Remarque 13.119.

Afin que cette définition ait un sens, nous devons prouver qu'elle ne dépend pas du choix de la carte F . En effet, les vecteurs $\partial_x F$ et $\partial_y F$ dépendent de la carte F , donc leur produit vectoriel (et sa norme) dépendent également de la carte F choisie. Il faudrait donc un petit miracle pour que le nombre $\mu_2(A)$ donné par (13.258) soit indépendant du choix de F . Nous allons bientôt voir comme cas particulier du théorème 13.122 que c'est en fait le cas. C'est à dire que si F et $\tilde{F}$ sont deux cartes qui contiennent A , alors

$$\int_{F^{-1}(A)} d\sigma_F = \int_{\tilde{F}^{-1}(A)} d\sigma_{\tilde{F}}. \quad (13.259)$$

13.10.1.1 Exemple : la mesure de la sphère

Nous nous proposons maintenant de calculer la surface de la sphère $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. L'application $F: B((0,0), R) \rightarrow R^3$ donnée par

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \quad (13.260)$$

est une carte pour une demi sphère. Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}. \quad (13.261)$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs tangents donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\alpha} e_1 + \frac{y}{\alpha} e_2 + e_3 \quad (13.262)$$

où $\alpha = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. En calculant la norme, nous trouvons

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad (13.263)$$

et en passant aux coordonnées polaires, nous écrivons l'intégrale (13.258) sous la forme

$$\int_B \|\partial_x F \times \partial_y F\| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dr = 2\pi R^2, \quad (13.264)$$

qui est bien la mesure de la demi sphère.

13.10.2 Intégrale sur une carte

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'une fonction sur une carte de la variété M .

Définition 13.120.

Soit $F: W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, une carte pour une variété M . Soit A , une partie de $F(W)$ telle que $A = F(B)$ où $B \subset W$ est mesurable. Soit encore $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. L'intégrale de f sur A est le nombre

$$\int_A f = \int_A f d\sigma_F = \int_{F^{-1}(A)} (f \circ F)(w) \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(w) \times \frac{\partial F}{\partial y}(w) \right\| dw \quad (13.265)$$

Remarque 13.121.

L'intégrale (13.265) n'est pas toujours bien définie. Étant donné que F est C^1 et que f est continue, l'intégrande est continue. L'intégrale sera donc bien définie par exemple lorsque B est borné et si la fermeture $\bar{A}$ est un compact contenu dans $F(w)$.

Le théorème suivant montre que le travail que nous avons fait jusqu'à présent ne dépend en fait pas du choix de carte F effectué.

Théorème 13.122.

Soient $F: W \rightarrow F(w)$ et $\tilde{F}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{F}(\tilde{W})$, deux cartes de la variété M . Soit une partie $A \subset F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})$ telle que $A = F(B)$ avec $B \subset W$ mesurable. Alors $A = \tilde{F}(\tilde{B})$ avec $\tilde{B} \subset \tilde{W}$ mesurable.

Si f est une fonction continue, et si $\int_A f d\sigma_F$ existe, alors $\int_A f d\sigma_{\tilde{F}}$ existe et

$$\int_A f d\sigma_F = \int_A f d\sigma_{\tilde{F}}. \quad (13.266)$$

13.10.3 Exemples

Intégrons la fonction $f(x, y, z)$ sur le carré $K =]0, 1[\times]0, 2[\times \{1\}$. La première carte que nous pouvons utiliser est

$$\begin{aligned} F:]0, 1[\times]0, 2[&\rightarrow K \\ (x, y) &\mapsto (x, y, 1). \end{aligned} \quad (13.267)$$

Nous trouvons aisément les vecteurs tangents qui forment l'élément de surface :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.268)$$

donc $d\sigma_F = 1 \cdot dx dy$, et

$$\int_K f d\sigma_F = \int_{]0, 1[\times]0, 2[} f(x, y, 1) \cdot 1 \cdot dx dy. \quad (13.269)$$

Nous pouvons également utiliser la carte

$$\begin{aligned} \tilde{F}:]0, \frac{1}{2}[\times]0, 6[&\rightarrow K \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) &\mapsto (2\tilde{x}, \frac{\tilde{y}}{3}, 1). \end{aligned} \quad (13.270)$$

Les vecteurs tangents sont maintenant

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.271)$$

et nous avons donc $d\sigma_{\tilde{F}} = \|\frac{2}{3}e_3\| = \frac{2}{3}$. Cette fois, l'intégrale de f sur K s'écrit

$$\int_K f d\sigma_{\tilde{F}} = \int_{]0, \frac{1}{2}[\times]0, 6[} f(2\tilde{x}, \frac{\tilde{y}}{3}, 1) \cdot \frac{2}{3} \cdot d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (13.272)$$

Conformément au théorème 13.122, cette dernière intégrale est égale à l'intégrale (13.269) parce qu'il s'agit juste d'un changement de variable.

13.10.4 Orientation

Soient $F: W \rightarrow F(w)$ et $\tilde{F}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{F}(\tilde{W})$, deux cartes de la variété M . Nous pouvons considérer la fonction $h = \tilde{F}^{-1} \circ F$, définie uniquement sur l'intersection des cartes :

$$h: F^{-1}(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})) \rightarrow \tilde{F}^{-1}(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W})). \quad (13.273)$$

Nous disons que F et $\tilde{F}$ ont même **orientation** si

$$J_h(w) > 0 \quad (13.274)$$

pour tout $w \in F^{-1}(F(W) \cap \tilde{F}(\tilde{W}))$.

Considérons les deux cartes suivantes pour le même carré :

$$\begin{aligned} F:]0, 1[\times]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned} \quad (13.275)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{F}:]0, \frac{1}{2}[\times]0, \frac{1}{3}[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (2x, 3y, 0) \end{aligned} \quad (13.276)$$

Ici, $h(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{3})$ et nous avons $J_h = \frac{1}{6} > 0$. Ces deux cartes ont même orientation. Notez que

$$\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} = e_3, \quad (13.277)$$

tandis que

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \times \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = 6e_3. \quad (13.278)$$

Les vecteurs normaux à la paramétrisation pointent dans le même sens.

Si par contre nous prenons la paramétrisation

$$\begin{aligned} G:]0, 1[\times]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, (1 - y), 0), \end{aligned} \quad (13.279)$$

nous avons

$$\frac{\partial G}{\partial x} \times \frac{\partial G}{\partial y} = -e_3, \quad (13.280)$$

et si $g = G^{-1} \circ F$, alors $J_g = -1$.

L'orientation d'une carte montre donc si le vecteur normal à la surface pointe d'un côté ou de l'autre de la surface.

Définition 13.123.

Une variété M est **orientable** si il existe un atlas de M tel que deux cartes quelconques ont toujours même orientation. Une variété est **orientée** lorsque qu'un tel choix d'atlas est fait.

Proposition 13.124.

Soit M , une variété orientable et un atlas orienté $\{F_i: W_i \rightarrow \mathbb{R}^3\}$. Alors le vecteur unitaire

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\|} \quad (13.281)$$

ne dépend pas du choix de F parmi les F_i .

Démonstration. Considérons deux cartes F_1 et F_2 , ainsi que l'application $h = F_2^{-1} \circ F_1$. Écrivons le vecteur $\partial_x F_1 \times \partial_y F_1$ en utilisant $F_1 = F_2 \circ h$. D'abord, par la règle de dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial(F_2 \circ h)}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x}. \quad (13.282)$$

Après avoir fait le même calcul pour $\frac{\partial(F_2 \circ h)}{\partial y}$, nous pouvons écrire

$$\partial_x(F_2 \circ h) \times \partial_y(F_2 \circ h) = (\partial_x h_1 \partial_x F_2 + \partial_x h_2 \partial_y F_2) \times (\partial_y h_1 \partial_x F_2 + \partial_y h_2 \partial_y F_2). \quad (13.283)$$

Dans cette expression, les facteurs $\partial_i h_j$ sont des nombres, donc ils se factorisent dans les produits vectoriels. En tenant compte du fait que $\partial_x F_2 \times \partial_x F_2 = 0$ et $\partial_y F_2 \times \partial_y F_2 = 0$, ainsi que de l'antisymétrie du produit vectoriel, l'expression se réduit à

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \times \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) (\partial_x h_1 \partial_y h_2 - \partial_x h_2 \partial_y h_1). \quad (13.284)$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \times \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(F_2 \circ h)}{\partial x} \times \frac{\partial(F_2 \circ h)}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \times \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \det J_h. \quad (13.285)$$

Donc, tant que J_h est positif, les vecteurs unitaires correspondants au membre de gauche et de droite sont égaux. $\square$

Corollaire 13.125.

Si nous avons choisit un atlas orienté pour la variété M , nous avons une fonction continue $G: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\|G(p)\| = 1$ pour tout $p \in M$. Cette fonction est donnée par

$$G(F(x, y)) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\|} \quad (13.286)$$

sur l'image de la carte F .

Démonstration. La fonction G est construite indépendamment sur chaque carte $F(W)$ en utilisant la formule (13.286). Cette fonction est une fonction bien définie sur tout M parce que nous venons de démontrer que sur $F_1(W_1) \cap F_2(W_2)$, les fonctions construites à partir de F_1 et à partir de F_2 sont égales. $\square$

Il est possible que prouver, bien que cela soit plus compliqué, que la réciproque est également vraie.

Proposition 13.126.

Une variété M de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ est orientable si et seulement si il existe une fonction continue $G: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $p \in M$, le vecteur $G(p)$ soit de norme 1 et normal à M au point p .

13.10.5 Formes différentielles

Nous allons donner une toute petite introduction aux formes différentielles sur des variétés compactes.

Lemme 13.127 ([187]).

Soit ω une k -forme sur $\mathbb{R}^n$ et f , une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Alors $d(f^*\omega) = f^*d\omega$.

Démonstration. Nous effectuons la preuve par récurrence sur le degré de la forme. Soit d'abord une 0-forme, c'est à dire une fonction $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons

$$d(d^*g)X = d(g \circ f)X = (dg \circ df)X = dg(dfX) = (f^*dg)(X). \quad (13.287)$$

Supposons maintenant que le résultat soit exact pour toute les $p - 1$ formes et montrons qu'il reste valable pour les p -formes. Par linéarité de la différentielle nous pouvons nous contenter de considérer la forme différentielle

$$\omega = g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p \quad (13.288)$$

où g est une fonction C^∞ . Pour soulager les notations nous allons noter $dx^I = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1}$. Nous avons

$$d(f^*\omega) = d(f^*(g dx^I \wedge dx^p)) \quad (13.289a)$$

$$= d(f^*(g dx^I) \wedge f^*dx^p) \quad (13.289b)$$

$$= d(f^*(g dx^I)) \wedge f^*dx^p + (-1)^{p-1} f^*(g dx^I) \wedge (f^*dx^p) \quad (13.289c)$$

$$= f^*(d(g dx^I)) \wedge f^*dx^p \quad (13.289d)$$

$$= f^*(d(g dx^I) \wedge dx^p) \quad (13.289e)$$

$$= f^*d\omega \quad (13.289f)$$

Justifications : (13.289c) est la formule de Leibnitz. (13.289d) est parce que le second terme est nul : $d(f^*dx^p) = f^*(d^2x^p) = 0$. Nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence et le fait que $d^2 = 0$. L'étape (13.289f) est une utilisation à l'envers de la règle de Leibnitz en tenant compte que $d^2x^p = 0$. $\square$

Soit M une variété de dimension n et ω une n -forme différentielle

$$\omega_p = f(p)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (13.290)$$

Si (U, φ) est une carte ($U \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi: U \rightarrow M$) alors nous définissons

$$\int_{\varphi(U)} \omega = \int_U f(\varphi(x))dx_1 \dots dx_n. \quad (13.291)$$

Lorsque nous voulons intégrer sur une partie plus grande qu'une carte nous utilisons une partition de l'unité.

Lemme 13.128.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de M par un nombre fini d'ouverts¹². Alors il existe une famille de fonctions $f_i \in C^\infty(M)$ telle que

- (1) $\text{supp } f_i \subset U_i$,
- (2) pour tout i , nous avons $f_i \geq 0$,
- (3) pour tout $p \in M$ nous avons $\sum_i f_i(p) = 1$.

La famille (f_i) est une **partition de l'unité** subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$.

Définition 13.129 (Intégrale d'une forme sur une variété).

Si $\{f_i\}$ est une partition de l'unité subordonnée à un atlas de M nous définissons

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega. \quad (13.292)$$

Il est possible de montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la partition de l'unité.

Remarque 13.130.

Nous ne définissons pas d'intégrale de k -forme différentielle sur une variété de dimension $n \neq k$. Le seul cas où cela se fait est le cas de 0-formes (les fonctions), mais cela n'est pas vraiment un cas particulier vu que les 0-formes sont associées aux n -formes de façon évidente.

13.10.6 Intégrale d'une fonction sur une variété

Nous supposons à présent que M est une variété compacte de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. La compacité fait que M possède un atlas contenant un nombre fini de cartes $F_i: W_i \rightarrow F_i(W_i)$.

Si $A \subset M$ est tel que pour chaque i , $A \cap F_i(W_i) = F_i(V_i)$ pour un ensemble V_i mesurable dans $\mathbb{R}^2$, alors nous considérons

$$A_1 = A \cap F_1(W_2) = F_1(V_1). \quad (13.293)$$

Ensuite, nous construisons A_2 en considérant $F_A(W_2)$ et en lui retranchant A_1 :

$$A_2 = (A \cap F_2(W_2)) \cap F_1(V_1). \quad (13.294)$$

En continuant de la sorte, nous construisons la décomposition

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_p \quad (13.295)$$

de A en ouverts disjoints, chacun de ouverts A_p étant compris dans une carte.

Il est possible de prouver que dans ce cas, la définition suivante a un sens et ne dépend pas du choix de l'atlas effectué.

12. Si M n'est pas compacte, alors il faut utiliser une version un peu plus élaborée du lemme[187].

Définition 13.131.

Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'**intégrale** est le nombre

$$\int_A f = \sum_{i=1}^p \int_{A_i} f d\sigma_{F_i}. \quad (13.296)$$

13.11 Intégrales curvilignes**13.11.1 Chemins de classe C^1** **Définition 13.132.**

Soit $p, q \in \mathbb{R}^n$. Un **chemin** C^1 par morceaux joignant p à q est une application continue

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \quad (13.297)$$

pour laquelle il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$ telle que :

- (1) la restriction de γ sur chaque ouvert $]t_i, t_{i+1}[$ est de classe C^1 ;
- (2) pour tout $0 \leq i \leq r$, γ' possède une limite à gauche (sauf pour $i = 0$) et une limite à droite (sauf pour $i = r$) en t_i .

Le **chemin** γ est (**globalement**) **de classe C^1** si la subdivision peut être choisie de « longueur » $r = 1$.

Remarque 13.133.

Si a et b sont des points de $\mathbb{R}^n$, on peut créer le chemin particulier

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (1 - t)a + tb \quad (13.298)$$

qui relie ces points par un segment de droite.

13.11.2 Intégrer une fonction**Définition 13.134.**

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ un chemin C^1 . On définit l'**intégrale de f sur γ** par

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt. \quad (13.299)$$

Exemple 13.135

Soit l'hélice

$$\begin{aligned} \sigma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13.300)$$

et la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. L'intégrale de f sur σ est

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \|\sigma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right). \end{aligned} \quad (13.301)$$

△

Remarque 13.136.

Si $f = 1$, alors nous tombons sur

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt, \quad (13.302)$$

Nous verrons par le théorème 14.17 que cette dernière intégrale est la longueur de la courbe. Il est un fait général que l'intégrale de la fonction 1 sur un ensemble en donne la «mesure». Cela est à mettre en rapport avec le lemme 7.115 en gardant en tête que $\int_{\gamma} 1$ n'est pas la mesure de l'image de γ dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 13.137 (Indépendance en la paramétrisation).

La valeur de l'intégrale de f sur γ ne dépend pas du paramétrage (équivalent ou pas) choisi.

Démonstration. Soit donc un chemin $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ainsi que $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$, une reparamétrisation de classe C^1 , strictement monotone et le chemin σ définit par $\gamma(s) = \sigma(\varphi(s))$ avec $s \in [c, d]$. En supposant que $\varphi'(s) \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} I = \int_{\gamma} f &= \int_c^d f(\gamma(s)) \|\gamma'(s)\| ds \\ &= \int_c^d f(\sigma(\varphi(s))) \|\sigma'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds. \end{aligned} \quad (13.303)$$

Pour cette intégrale, nous posons $t = \varphi(s)$, et par conséquent $dt = \varphi'(s)ds$. Étant donné que $\varphi'(s) \geq 0$, nous pouvons supprimer les valeurs absolues, et obtenir

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \\ &= \int_{\sigma} f. \end{aligned} \quad (13.304)$$

Essayez de faire le cas $\varphi'(s) \leq 0$. □

Remarque 13.138.

Attention : les intégrales sur des chemins dans $\mathbb{C}$ ne sont la même chose. En effet $\mathbb{C}$ doit être souvent plutôt traité comme $\mathbb{R}$ que comme $\mathbb{R}^2$. Si γ est un chemin dans $\mathbb{C}$, l'intégrale

$$\int_{\gamma} f \quad (13.305)$$

doit être comprise comme une généralisation de $\int_a^b f(x)dx$ et non comme l'intégrale sur un chemin. La différence est qu'en retournant les bornes d'une intégrale usuelle sur $\mathbb{R}$ on change le signe, alors qu'en retournant un chemin dans $\mathbb{R}^2$, on ne change pas. Bref, la définition est que si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, alors

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \quad (13.306)$$

Si on veut savoir la longueur d'une courbe donnée sous la forme d'une fonction $y = y(x)$, un chemin qui trace la courbe est évidemment donné par

$$\gamma(t) = (t, y(t)), \quad (13.307)$$

et le vecteur tangent au chemin est $\gamma'(t) = (1, y'(t))$. Donc

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + y'(t)^2}, \quad (13.308)$$

et

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}. \quad (13.309)$$

13.11.3 Intégrer un champ de vecteurs

Définition 13.139.

Un **champ de vecteur** est une application $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On définit l'intégrale de G sur un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\int_{\gamma} G \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Remarque 13.140.

Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie, mais le signe change selon le sens du chemin.

Si $\sigma'(t) \neq 0$, nous pouvons considérer le vecteur unitaire tangent à la courbe :

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}. \quad (13.310)$$

Si F est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$, la circulation de F le long de σ sera donnée par

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} dt = \int_{\sigma} F \cdot T ds \quad (13.311)$$

où dans la dernière expression, $F \cdot T$ est vu comme fonction $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z) \cdot T(x, y, z)$. L'intégrale d'un champ de vecteurs sur une courbe n'est donc rien d'autre que l'intégrale de la composante tangentielle du champ de vecteurs.

13.11.4 Intégrer une forme différentielle sur un chemin

La formule d'intégration d'un champ de vecteur¹³,

$$\int_{\gamma} G = \int_{[a,b]} \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt, \quad (13.312)$$

contient quelque chose d'intéressant : la combinaison $\langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$. Cette combinaison sert à transformer le vecteur tangent $\gamma'(t)$ en un nombre en utilisant le produit scalaire avec le vecteur $G(\gamma(t))$.

Si G est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous pouvons utiliser l'isomorphisme musical (définition 13.249)

$$\begin{aligned} G_x^b : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle G(x), v \rangle \end{aligned} \quad (13.313)$$

pour écrire de façon plus compacte :

$$\int_{\gamma} G = \int_{[a,b]} G_{\gamma(t)}^b(\gamma'(t)) dt. \quad (13.314)$$

L'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin est définie par

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)} \gamma'(t) dt \quad (13.315)$$

Remarque 13.141.

Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie, mais le signe change selon le sens du chemin.

13. Définition 13.139.

13.11.5 Intégration d'une forme différentielle sur un chemin

Les formes intégrales que nous avons déjà vues sont celles de fonctions et de champs de vecteur sur des chemins. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est le chemin, les formules sont

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f &= \int_{[a,b]} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ \int_{\gamma} G &= \int_{[a,b]} \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.\end{aligned}\tag{13.316}$$

Dans les deux cas, le principe est que nous disposons de quelque chose (la fonction f ou le vecteur G), et du vecteur tangent $\gamma'(t)$, et nous essayons d'en tirer un nombre que nous intégrons. Lorsque nous avons une 1-forme, la façon de l'utiliser pour produire un nombre avec le vecteur tangent est évidemment d'appliquer la 1-forme au vecteur tangent. La définition suivante est donc naturelle.

Définition 13.142.

Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, un chemin de classe C^1 tel que son image est contenue dans le domaine D . Si ω est une 1-forme différentielle sur D , nous définissons l'intégrale de ω le long de γ le nombre

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b [a_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + a_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)] dt.\end{aligned}\tag{13.317}$$

Cette définition est une bonne définition parce que si on change la paramétrisation du chemin, on ne change pas la valeur de l'intégrale, c'est la proposition suivante.

Proposition 13.143.

Si γ et β sont des chemins équivalents, alors

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\beta} \omega,\tag{13.318}$$

c'est à dire que l'intégrale est invariante sous les reparamétrisation du chemin.

Démonstration. Deux chemins sont équivalents quand il existe un difféomorphisme C^1 $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tel que $\gamma(t) = (\beta \circ h)(t)$. En remplaçant γ par $(\beta \circ h)$ dans la définition de $\int_{\gamma} \omega$, nous trouvons

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b \omega_{(\beta \circ h)(t)}((\beta \circ h)'(t)) dt.\tag{13.319}$$

Un changement de variable $u = h(t)$ transforme cette dernière intégrale en $\int_{\beta} \omega$, ce qui prouve la proposition. $\square$

Remarque 13.144.

Si γ est une somme de chemins, $\gamma = \gamma^{(1)} + \dots + \gamma^{(n)}$, où chacun des $\gamma^{(i)}$ est un chemin, alors

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega\tag{13.320}$$

parce que ω est linéaire.

Remarque 13.145.

Si $-\gamma$ est le chemin

$$\begin{aligned}-\gamma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(b - (t - a)),\end{aligned}\tag{13.321}$$

alors

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega,\tag{13.322}$$

c'est à dire que si l'on parcourt le chemin en sens inverse, alors on change le signe de l'intégrale.

L'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin est compatible avec l'intégrale déjà connue d'un champ de vecteur sur le chemin parce que si G est un champ de vecteurs,

$$\int_{\gamma} G^{\flat} = \int_{\gamma} G. \quad (13.323)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} G^{\flat} &= \int_a^b G_{\gamma(t)}^{\flat}(\gamma'(t)) \\ &= \int_a^b [G_1(\gamma(t))dx_1 + \dots + G_n(\gamma(t))dx_n](\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \\ &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \int_{\gamma} G. \end{aligned} \quad (13.324)$$

Proposition 13.146.

Soit $\omega = df$, une 1-forme exacte et continue sur le domaine D . Alors la valeur de $\int_{\gamma} df$ ne dépend que des valeurs de f aux extrémités de γ .

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} ((f \circ \gamma)(t)) dt \\ &= (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a). \end{aligned} \quad (13.325)$$

□

13.11.6 Interprétation physique : travail

Définition 13.147.

Une force $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **conservative** si elle dérive d'un potentiel, c'est à dire si il existe une fonction $V \in C^1(D, \mathbb{R})$ telle que

$$F(x) = (\nabla V)(x). \quad (13.326)$$

Étant donné que F est un champ de vecteurs, nous avons une forme différentielle associée $F^{\flat}$,

$$F_x^{\flat}: x \mapsto \langle F(x), v \rangle. \quad (13.327)$$

Lemme 13.148.

Le champ F est conservatif si et seulement si la 1-forme différentielle $F^{\flat}$ est exacte.

Démonstration. Supposons que la force F soit conservative, c'est à dire qu'il existe une fonction V telle que $F = \nabla V$. Dans ce cas, il est facile de prouver que $F^{\flat}$ est exacte et est donnée par $F_x^{\flat} = dV(x)$. En effet,

$$\begin{aligned} F_x^{\flat}(v) &= \langle F(x), v \rangle \\ &= F_1(x)v_1 + \dots + F_n(x)v_n \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)v_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)v_n \\ &= dV(x)v. \end{aligned} \quad (13.328)$$

Pour le sens inverse, supposons que $F^{\flat}$ soit exacte. Dans ce cas, nous avons une fonction V telle que $F^{\flat} = dV$. Il est facile de prouver qu'alors, $F = \nabla V$. □

En résumé, nous avons deux façons équivalentes d'exprimer que la force F dérive du potentiel V : soit nous disons $F = \nabla V$, soit nous disons $F^\flat = dV$.

Proposition 13.149.

Si F est une force conservative, alors le travail de F lors d'un déplacement ne dépend pas du chemin suivi.

Démonstration. Le travail d'une force le long d'un chemin n'est autre que l'intégrale de la force le long du chemin, et le calcul est facile :

$$W_\gamma(F) = \int_\gamma F = \int_\gamma dV = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)). \quad (13.329)$$

Donc si β est un autre chemin tel que $\beta(a) = \gamma(a)$ et $\beta(b) = \gamma(b)$, nous avons $W_\beta(F) = W_\gamma(F)$. $\square$

13.11.7 Intégrer un champs de vecteurs sur un bord en 2D

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est tel que ∂D est une variété de dimension 1 et tel que D accepte un champ de vecteur normal extérieur unitaire ν . Si nous voulons définir

$$\int_{\partial D} G, \quad (13.330)$$

le mieux est de prendre une paramétrisation $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et de calculer

$$\int_0^1 \langle G_{\gamma(t)}, \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \rangle dt. \quad (13.331)$$

Hélas, cette définition ne fonctionne pas parce que son signe dépend du sens de la paramétrisation γ . Si la paramétrisation tourne dans l'autre sens, il y a un signe de différence.

Nous allons définir

$$\int_{\partial D} G = \int_0^1 \langle G_{\gamma(t)}, T(t) \rangle dt \quad (13.332)$$

où $T(t) = \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$ et où γ est choisit de telle façon que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ amène ν sur T . Cela fixe le choix de sens.

Ce choix de sens aura des répercussions dans l'application de la formule de Green et du théorème de Stokes.

13.11.8 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 2D

Nous n'allons pas chercher très loin :

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \omega^\sharp, \quad (13.333)$$

c'est à dire que l'intégrale de la forme différentielle est celle du champ de vecteur associé. Le membre de droite est défini par (13.332), avec le choix d'orientation qui va avec.

13.11.9 Intégrer une forme différentielle sur un bord en 3D

Nous allons maintenant intégrer une forme différentielle sur certains chemins fermés dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F(D) \subset \mathbb{R}^3$, une variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ où $F: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la carte. Nous supposons que D vérifie les hypothèses de la formule de Green. Alors nous définissons

$$\int_{F(\partial D)} \omega = \int_{\partial D} F^* \omega \quad (13.334)$$

où $F^* \omega$ est la forme différentielle définie sur ∂D par $(F^* \omega)(v) = \omega(dF(v))$.

Cette définition est très abstraite, mais nous n'allons, en pratique, jamais l'utiliser, grâce au théorème de Stokes.

13.11.10 Intégrer d'un champ de vecteurs sur un bord en 3D

Encore une fois, nous n'allons pas chercher bien loin :

$$\int_{F(\partial D)} G = \int_{F(\partial D)} G^\flat \quad (13.335)$$

où $G^\flat$ est la forme différentielle associée au champ de vecteur. Le membre de droite est défini par l'équation (13.334).

13.11.11 Dérivées croisées et forme différentielle exacte

Nous considérons le problème suivant : trouver une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = b(x, y) \end{cases} \quad (13.336a)$$

$$\quad (13.336b)$$

où a et b sont des fonctions supposées suffisamment régulières. Nous savons que ce problème n'a pas de solutions lorsque

$$\frac{\partial a}{\partial y} \neq \frac{\partial b}{\partial x} \quad (13.337)$$

parce que cela impliquerait $\partial_{xy}^2 f \neq \partial_{yx}^2 f$. Nous sommes en droit de nous demander si la condition

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \quad (13.338)$$

impliquerait qu'il existe une solution au problème (13.336). La réponse est oui, et nous allons brièvement la justifier. Pour plus de détails nous vous demandons de chercher un peu sur internet les mots-clefs *forme différentielles exacte*. Vous consulterez également avec profit [188].

Proposition 13.150.

Si a et b sont des fonctions qui satisfont à la condition

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (13.339)$$

alors la fonction

$$f(x, y) = \int_0^x a(t, 0) dt + \int_0^y b(x, t) dt \quad (13.340)$$

répond au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = b(x, y) \end{cases} \quad (13.341a)$$

$$\quad (13.341b)$$

La preuve qui suit n'en est pas complètement une parce qu'il manque des justifications, notamment au moment de permuter la dérivée et l'intégrale.

Démonstration. La clef de la preuve est le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dt = f(x, y) \quad (13.342)$$

et son pendant par rapport à y :

$$\int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt = f(x, y). \quad (13.343)$$

En appliquant ces version du théorème fondamental, nous obtenons immédiatement.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b(x, y). \quad (13.344)$$

En ce qui concerne la dérivée par rapport à y ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) dt \quad (13.345a)$$

$$= a(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial a}{\partial y}(x, t) dt \quad (13.345b)$$

$$= a(x, 0) + [a(x, t)]_{t=0}^{t=y} \quad (13.345c)$$

$$= a(x, y). \quad (13.345d)$$

□

En ce qui concerne l'unicité, supposons que f et g soient deux solutions au problème. L'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (13.346)$$

implique que

$$f(x, y) = g(x, y) + C(y) \quad (13.347)$$

où C est une fonction seulement de y . L'autre équation implique

$$f(x, y) = g(x, y) + D(x) \quad (13.348)$$

où D est seulement une fonction de x . En égalisant nous voyons que les fonctions C et D doivent être des constantes.

Par conséquent la fonction f est donnée à une constante près et en réalité la fonction (13.340) est suffisante pour répondre au problème de trouver toutes les fonctions dont les dérivées partielles sont données par les fonctions a et b .

La fonction f ainsi créée est un **potentiel** pour le champ de force

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}. \quad (13.349)$$

Notez que ce champ de vecteurs est le gradient de f . La question initiale aurait donc pu être posée en les termes suivants : trouver une fonction f dont le gradient est donné par

$$\nabla f = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}. \quad (13.350)$$

13.12 Surfaces paramétrées

De la même façon qu'un chemin dans $\mathbb{R}^3$ est décrit comme une application $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, une surface dans $\mathbb{R}^3$ sera vue comme une application $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Une **surface paramétrée** dans $\mathbb{R}^3$ est une application

$$\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}. \quad (13.351)$$

Nous allons parler de la «surface φ » pour désigner l'image de φ dans $\mathbb{R}^3$.

Si on fixe le paramètre $u - u_0$, alors l'application

$$v \mapsto \varphi(u_0, v) \quad (13.352)$$

est un chemin dans la surface. Un vecteur tangent à ce chemin sera tangent à la courbe :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}. \quad (13.353)$$

De même, en fixant v_0 , on considère le chemin

$$u \mapsto \varphi(u, v_0). \quad (13.354)$$

Le vecteur tangent à ce chemin est également tangent à la surface :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \quad (13.355)$$

Définition 13.151.

Nous disons que la surface est **régulière** si les vecteurs $\partial_u \varphi(u_0, v_0)$ et $\partial_v \varphi(u_0, v_0)$ sont non nuls et non colinéaires.

Si la surface est régulière, les vecteurs tangents à la paramétrisation forment le plan tangent à la surface au point $\varphi(u_0, v_0)$.

Un vecteur orthogonal à la surface (et donc au plan tangent) est donc donné par le produit vectoriel :

$$n(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0). \quad (13.356)$$

L'équation du plan tangent est alors obtenue par

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot n(u_0, v_0) = 0 \quad (13.357)$$

où $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$.

13.12.1 Graphe d'une fonction

Soit la fonction $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est l'ensemble des points de la forme

$$(x, y, f(x, y)) \quad (13.358)$$

tels que $(x, y) \in D$. Cela est une surface paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.359)$$

Les vecteurs tangents sont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (13.360)$$

La surface est donc partout régulière parce que ces deux vecteurs ne sont jamais nuls ou colinéaires. Un vecteur normal à cette surface au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par le produit vectoriel

$$n = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)e_x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)e_y + e_z. \quad (13.361)$$

En suivant l'équation (13.357), nous avons l'équation suivante pour le plan :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (13.362)$$

c'est à dire

$$-(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0, \quad (13.363)$$

ce qui revient à

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (13.364)$$

Nous retrouvons donc l'équation du plan tangent à un graphe.

Exemple 13.152

La sphère de rayon R peut être paramétrée par les angles sphériques :

$$\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \varphi \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (13.365)$$

avec $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Tentons d'en trouver le plan tangent au point $(x, y, z) = (R, 0, 0)$. Un petit dessin nous montre que c'est un plan vertical d'équation $x = R$. Montrons cela en utilisant la théorie que nous venons de découvrir. D'abord le point $(R, 0, 0)$ correspond à $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$. Les vecteurs tangents sont

$$T_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(R, \frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}, \quad (13.366)$$

et

$$T_\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}(R, \frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.367)$$

Cela sont de toute évidence bien les deux vecteurs tangents à la sphère au point $(x, y, z) = (R, 0, 0)$. Le vecteur normal est

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & -R \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = R^2 e_x. \quad (13.368)$$

Ici encore, nous avons le vecteur que nous attendions sur un dessin. L'équation du plan tangent est maintenant

$$\begin{pmatrix} x - R \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (13.369)$$

c'est à dire $R^2(x - R) = 0$ et donc $x = R$. △

13.13 Intégrales de surface

13.13.1 Intégrale d'une fonction

Soit M une variété de dimension n dans $\mathbb{R}^m$. Soit $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ une paramétrisation d'un ouvert relatif de M .

Si f est une fonction définie sur un sous-ensemble $A \subset F(W)$ tel que $F^{-1}(A)$ est mesurable, l'intégrale de f sur A est définie par

$$\int_A f = \int_{F^{-1}(A)} f(F(w)) \sqrt{\det(J_F(w)^t J_F(w))} dw$$

où l'intégrale est l'intégration usuelle (de Lebesgue) sur $F^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$. On écrit parfois cette intégrale $\int_{F^{-1}(A)} f(F(w)) d\sigma$ où

$$d\sigma = \sqrt{\det(J_F(w)^t J_F(w))} dw$$

est l'élément infinitésimal de volume de la variété.

Si $m = 3$ et $n = 2$, l'élément infinitésimal de volume vaut

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial F}{\partial w_1} \times \frac{\partial F}{\partial w_2} \right\| dw$$

où $\times$ représente le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, et (w_1, w_2) sont les coordonnées sur $W \subset \mathbb{R}^2$. Dans la suite, nous ne regarderons plus que ce cas.

13.13.2 Intégrale d'un champ de vecteurs

Dans l'intégration curviligne, on a noté que si l'intégrale d'une fonction ne dépendait pas de l'orientation du chemin, l'intégrale d'un champ de vecteurs ou d'une forme différentielle en dépendait. Ce problème d'orientation apparaît également dans l'intégration sur des surfaces de l'espace.

Une *orientation* sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est le choix d'un champ de vecteurs continu $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la norme en tout point de S vaut 1. On remarque qu'ayant fait un tel choix d'orientation $\nu(x)$ en un point x , le seul autre choix possible en x est $-\nu(x)$. Si S est le bord d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^3$, l'*orientation induite par D sur S* est, si elle existe, l'orientation qui pointe hors de D en tout point de S . Plus précisément, il faut que pour tout $x \in D$ il existe $\epsilon > 0$ vérifiant, pour tout $0 < t < \epsilon$, la relation $t\nu(x) \notin D$. Dans ce cas, le champ de vecteurs ν est appelé le *vecteur normal unitaire extérieur* à D et il est forcément unique.

Soit G un champ de vecteurs défini sur une surface orientée par un champ ν . L'intégrale de G sur S , aussi appelée le *flux de G à travers S* , est

$$\iint_S G \cdot dS \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \langle G, \nu \rangle d\sigma. \quad (13.370)$$

Si on suppose que la surface est paramétrée par une application

$$F : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))$$

alors un vecteur unitaire ν peut s'écrire sous la forme

$$\nu = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\|}$$

et grâce à cette paramétrisation l'intégrale (13.370) devient

$$\iint_S G \cdot dS = \iint_W \left\langle G(F(u, v)), \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\rangle du dv.$$

où on utilise l'expression de $d\sigma$ obtenue précédemment dans le cas qui nous intéresse (surface dans l'espace).

13.14 Intégrales de surface

13.14.1 Aire d'une surface paramétrée

Lorsque nous avons vu la longueur d'une courbe paramétrée, nous avons pris comme «élément de longueur» la norme du vecteur tangent. Il est donc naturel de prendre comme «élément de surface» une petite surface que l'on peut construire à partir des deux vecteurs tangents à la surface.

Au point $\varphi(u_0, v_0)$, nous avons les deux vecteurs tangents

$$T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0). \quad (13.371)$$

L'élément de surface que nous pouvons construire à partir de ces deux vecteurs est la surface du parallélogramme, donnée par la norme du produit vectoriel :

$$dS = \|T_u \times T_v\|. \quad (13.372)$$

L'aire de la surface donnée par $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sera donc donnée par

$$\text{Aire}(\varphi(D)) = \iint_D \|T_u \times T_v\| du dv. \quad (13.373)$$

Exemple 13.153

Calculons l'aire de la sphère. Les vecteurs tangents ont déjà été calculés aux équations (13.366) et (13.367) :

$$T_\theta = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.374)$$

Le produit vectoriel vaut

$$\begin{aligned} T_\theta \times T_\varphi &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi) e_x + (R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi) e_y \\ &\quad + (R^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi) e_z. \end{aligned} \quad (13.375)$$

La norme demande quelques calculs et mises en évidences. Le résultat est :

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = R^2 \sin \theta. \quad (13.376)$$

L'aire de la sphère est donc donnée par

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi R^2. \quad (13.377)$$

Il est bon de se souvenir que, en coordonnées sphériques,

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = R^2 \sin \theta. \quad (13.378)$$

Or nous savons que ce vecteur est dirigé dans le sens de e_r parce que ce dernier est le vecteur qui est constamment dirigé radialement. En coordonnées sphériques nous avons donc

$$T_\theta \times T_\varphi = R^2 \sin(\theta) e_r. \quad (13.379)$$

△

Remarque 13.154.

L'équation (13.376) donne l'élément de surface pour la sphère. Notez que cela est justement l'expression du jacobien des coordonnées sphériques. Cela n'est évidemment pas une coïncidence.

Exemple 13.155

Nous pouvons donner l'aire du graphe d'une fonction quelconque. La surface est paramétrée par

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}. \quad (13.380)$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}. \quad (13.381)$$

Le produit vectoriel est donné par

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & \partial_x f \\ 0 & 1 & \partial_y f \end{vmatrix} = (-\partial_x f)e_x - (\partial_y f)e_y + e_z. \quad (13.382)$$

L'élément de surface est par conséquent

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}, \quad (13.383)$$

et la surface du graphe sera

$$Aire = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1} dx dy \quad (13.384)$$

△

13.14.2 Intégrale d'une fonction sur une surface

Si S est une surface dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) \in S, \end{aligned} \quad (13.385)$$

et si f est une fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie au moins sur S , l'intégrale de f sur S est logiquement définie par

$$\int_S f dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| du dv \quad (13.386)$$

où $T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. La quantité

$$\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| du dv \quad (13.387)$$

est appelé **élément de surface**.

Encore une fois, si on prend $f = 1$, alors on retrouve la surface de S :

$$\int_S dS = Aire(S). \quad (13.388)$$

Remarque 13.156.

Le nombre $\int_S f dS$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie pour S .

13.14.3 Aire d'une surface de révolution

Soit γ une courbe dans le plan xy , paramétrée par

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.389)$$

avec $u \in [a, b]$. Nous supposons que la courbe est toujours positive, c'est à dire $y(u) > 0$ pour tout u .

Nous voulons considérer la surface obtenue en effectuant une rotation de cette ligne autour de l'axe X . Chaque point de la courbe va parcourir un cercle de rayon $y(u)$ dans le plan YX et centré en $(x(u), 0, 0)$. La surface est donc donnée par

$$\varphi(u, \theta) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \cos \theta \\ y(u) \sin \theta \end{pmatrix} \quad (13.390)$$

avec $(u, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. Notez que la courbe de départ correspond à $\theta = 0$.

Les vecteurs tangents à la surface pour cette paramétrisation sont

$$T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \cos \theta \\ y'(u) \sin \theta \end{pmatrix} \quad T_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y(u) \sin \theta \\ y(u) \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (13.391)$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs vaut

$$\begin{aligned} T_u \times T_\theta &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x' & y' \cos \theta & y' \sin \theta \\ 0 & -y \sin \theta & y \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= y'(u)y(u) e_x - x'(u)y(u) \cos \theta e_y + x'(u)y(u) \sin \theta e_z. \end{aligned} \quad (13.392)$$

En ce qui concerne la norme :

$$dS = \|T_u \times T_\theta\| = \sqrt{(y'y)^2 + (x'y)^2} = |y(u)|\sqrt{y'(u)^2 + x'(u)^2}. \quad (13.393)$$

Étant donné que nous avons supposé que $y(u) > 0$, nous pouvons supprimer les valeurs absolues, et l'aire de la surface de révolution devient :

$$\begin{aligned} Aire(S) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b y(u) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du \\ &= 2\pi \int_a^b y(u) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du. \end{aligned} \quad (13.394)$$

Exemple 13.157

Calculons la surface du cône de révolution de rayon (à la base) R et de hauteur h . La courbe de départ est le segment droite qui part de $(0, 0)$ et qui termine en (R, h) de la figure 13.10.

Ce segment peut être paramétré par

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} Ru \\ hu \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.395)$$

avec $u \in [0, 1]$. Cela donne $x(u) = Ru$, $y(u) = hu$ et par conséquent

$$Aire = 2\pi \int_0^1 hu \sqrt{R^2 + h^2} = \pi h \sqrt{R^2 + h^2}. \quad (13.396)$$

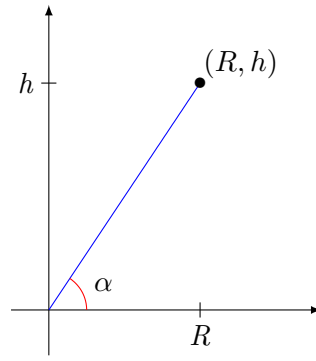


FIGURE 13.10 – En faisant tourner cette droite autour de l'axe X , nous obtenons un cône.

Nous pouvons aussi exprimer ce résultat en fonction de l'angle, en sachant que $h = \sqrt{h^2 + R^2} \sin(\alpha)$:

$$\text{Aire} = \pi(R^2 + h^2) \sin(\alpha). \quad (13.397)$$

△

Exemple 13.158

Calculons la surface latérale du tore obtenu par révolution du cercle de la figure 13.11.

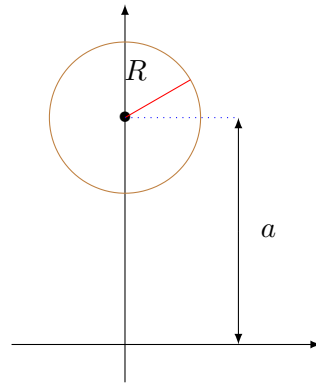


FIGURE 13.11 – Si nous tournons ce cercle autour de l'axe X , nous obtenons un tore de rayon «externe» a et de rayon «interne» R .

Le chemin qui détermine le cercle de départ est

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ a + R \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.398)$$

c'est à dire $x(u) = R \cos(u)$, $y(u) = a + R \sin(u)$ avec $u \in [0, 2\pi]$. Nous avons donc l'aire

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= 2\pi \int_0^{2\pi} (a + R \sin(u)) R \, du \\ &= 2\pi R (2\pi a + R[-\cos(u)]_0^{2\pi}) \\ &= 4\pi^2 a R. \end{aligned} \quad (13.399)$$

△

13.14.4 Intégrale d'une 2

Nous considérons ω , une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 13.159.

Si $\omega_{(x,y)} = u(x,y)dx \wedge dy$ et si D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors nous définissons

$$\int_D \omega = \int_D u(x,y)dx dy. \quad (13.400)$$

Nous voulons maintenant intégrer une 2-forme sur une surface dans $\mathbb{R}^3$. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$, une surface orientée (c'est à dire que nous avons un choix continu d'un vecteur normal unitaire n). Nous supposons de plus avoir un paramétrage $\phi: D \rightarrow S$ de S avec D ouvert dans $\mathbb{R}^2$ compatible avec l'orientation, c'est à dire que pour tout $(t,s) \in D$,

$$n(\phi(t,s)) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s). \quad (13.401)$$

Définition 13.160.

Pour intégrer ω sur S nous faisons

$$\int_S \omega = \int_D \phi^* \omega \quad (13.402)$$

où $\phi^* \omega$ est de la forme $F(t,s)dt \wedge ds$.

Montrons ce que cela fait. Soient u, v des vecteurs de D et calculons

$$(\phi^* \omega)(u, v) = \omega(d\phi(u), d\phi(v)) \quad (13.403a)$$

$$= \omega \left(u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, v_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right). \quad (13.403b)$$

Les termes en $u_1 v_1$ et $u_2 v_2$ sont nuls ; par exemple :

$$\omega \left(u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, v_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) = u_1 v_1 \omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (13.404)$$

parce que ω est antisymétrique. Il nous reste donc

$$(\phi^* \omega)(u, v) = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \quad (13.405a)$$

$$= \omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) (dt \wedge ds)(u, v). \quad (13.405b)$$

Cette dernière ligne est bien de la forme $\phi^* \omega = F(t,s)dt \wedge ds$.

13.15 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Nous voulons construire un moulin à eau. Comment placer les pales pour maximiser le travail de la pression de l'eau ? On n'a pas attendu l'invention du calcul intégral pour répondre à cette question. Trois paramètres rentrent en ligne de compte :

- (1) plus il y a d'eau, plus ça pousse ;
- (2) plus la surface de la palle est grande, plus on va utiliser d'eau ;
- (3) plus la palle est perpendiculaire au courant, plus on va en profiter.

Nous voyons sur la figure 13.12 que lorsque la palle du moulin est inclinée, non seulement elle prend moins d'eau sur elle, mais qu'en plus elle la prend avec un moins bon angle : une partie de la force ne sert pas à la faire tourner.

See also the subfigure 13.12(a) See also the subfigure 13.12(b)

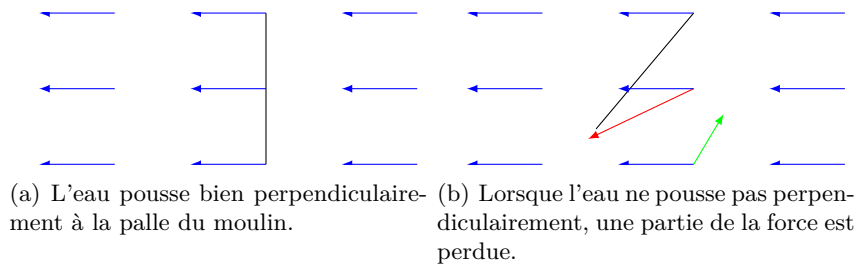


FIGURE 13.12 – La partie rouge de la force est perdue si l'eau ne pousse pas perpendiculairement. De plus lorsque la pale est inclinée, elle prend moins d'eau sur elle.

L'idée du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface est de savoir quelle est la quantité «utile» de vecteurs qui traverse la surface. Ce sera simplement l'intégrale sur la surface de la composante du champ de vecteurs normale à la surface. Il reste deux problèmes à régler : le premier est de savoir quel est le vecteur normal à la surface, et le second est de savoir comment «sélectionner» la composante normale d'un champ de vecteurs F .

Le problème de trouver un vecteur normal est résolu par le produit vectoriel des vecteurs tangents. Si la surface est donnée par $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, les vecteurs tangents sont $T_u = \partial_u \varphi(u, v)$ et $T_v = \partial_v \varphi(u, v)$. Le normal de norme 1 est donné par :

$$n(u, v) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}. \quad (13.406)$$

Si p est un point de la surface $\varphi(D)$, la composante de $F(p)$ qui est normale à la surface au point p est donnée par le produit scalaire

$$F(p)_\perp = F(p) \cdot n(p). \quad (13.407)$$

C'est ce nombre là que nous intégrons sur la surface.

Définition 13.161.

Le **flux du champ de vecteurs** à travers la surface $S = \varphi(D)$ est

$$\int F \cdot dS = \int F \cdot n \, dudv. \quad (13.408)$$

Une petite simplification se produit lorsqu'on veut calculer effectivement cette intégrale. En effet $F \cdot n$ est, en soi, une fonction sur S . Pour l'intégrer, il faut donc la multiplier par $\|T_u \times T_v\|$ (c'est la définition de l'intégrale d'une fonction sur une surface). Donc, étant donné que $n = (T_u \times T_v) / \|T_u \times T_v\|$, nous avons

$$\int F \cdot dS = \iint_D F(\varphi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) \, dudv \quad (13.409)$$

où $T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

Exemple 13.162

Soit le champ de vecteurs

$$F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}. \quad (13.410)$$

Calculons son flux au travers de la sphère de rayon R .

Nous choisissons de paramétrer la sphère en coordonnées sphériques avec $\phi(\theta, \varphi)$. Nous pouvons reprendre le résultat (13.379) :

$$T_\theta \times T_\varphi = R^2 \sin(\theta). \quad (13.411)$$

Nous savons aussi que

$$F(\phi(\theta, \varphi)) = 2e_r. \quad (13.412)$$

L'intégrale à calculer est donc

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi 2e_r \cdot (R^2 \sin(\theta)e_r). \quad (13.413)$$

Vu que le produit scalaire $e_r \cdot e_r$ vaut 1, nous calculons

$$I = 4\pi R^2 \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 8\pi R^2. \quad (13.414)$$

△

Exemple 13.163

Calculons le flux du champ de force de gravitation d'une masse au travers de la sphère de centre R centrée autour la masse. À un coefficient constant près, le champ vaut

$$G(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} e_r. \quad (13.415)$$

Sur la sphère de rayon R , nous avons

$$G(\phi(\theta, \varphi)) = \frac{1}{R^2} e_r. \quad (13.416)$$

L'intégrale est donc

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} e_r \cdot (R^2 \sin(\theta)e_r) d\varphi = 8\pi. \quad (13.417)$$

Ce flux ne dépend pas de R .

△

Exemple 13.164

Soit S le disque de rayon 5 placé horizontalement à la hauteur 12. Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x, y, z) = xe_x + ye_y + ze_z. \quad (13.418)$$

Les équations de la surface sont $z = 12$, $x^2 + y^2 \leq 25$. Nous prenons le paramétrage en coordonnées cylindriques :

$$\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 12 \end{pmatrix}. \quad (13.419)$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.420)$$

Le vecteur normal est alors

$$T_r \times T_\theta = re_z. \quad (13.421)$$

Sur la surface, le champ de vecteurs s'écrit

$$F(\varphi(r, \theta)) = r \cos(\theta)e_x + r \sin(\theta)e_y + 12e_z. \quad (13.422)$$

Par conséquent

$$F \cdot (T_r \times T_\theta) = 12r. \quad (13.423)$$

L'intégrale à calculer est

$$\begin{aligned}\int_0^5 dr \int_0^{2\pi} 12r d\theta &= 12 \cdot 2\pi \int_0^5 r dr \\ &= \frac{25}{2} 24\pi \\ &= 300\pi.\end{aligned}\tag{13.424}$$

△

13.16 Divergence, Green, Stokes

Le théorème de Stokes (et ses variations) peut se voir comme une généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui stipule que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

c'est-à-dire qui relie l'intégrale de f' sur $I = [a, b]$ aux valeurs de f sur le bord $\partial I = \{a, b\}$. Le signe $-$ qui apparaît vient de l'orientation ; celle-ci requiert de la prudence dans l'utilisation des théorèmes.

Voici, pour votre culture générale, un énoncé général :

Théorème 13.165.

Si M est une variété orientable de dimension n avec un bord noté ∂M , alors pour toute forme différentielle ω de degré $n - 1$ on a

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

où $d\omega$ désigne la différentielle extérieure de ω .

Attention : la différentielle extérieure n'est pas la différentielle usuelle. Certes dans le cas d'une 0-forme (c'est à dire d'une fonction), les deux notions coïncident, mais ça ne va pas plus loin. La différentielle extérieure vérifie $d^2\omega = 0$ pour tout ω , y compris pour les fonctions : si $\omega = df$ alors $d\omega = 0$.

Nous allons maintenant voir quelques cas particuliers.

Une des nombreuses formes du théorème de Stokes (théorème 13.165) est que si la forme différentielle ω est exacte alors son intégrale est facile.

Théorème 13.166.

Si γ est un chemin de classe C^1 dans un ouvert Ω et si ω est la forme différentielle exacte $\omega = df$, alors

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).\tag{13.425}$$

Cela est également une extension du théorème fondamental du calcul différentiel.

13.16.1 Théorème de la divergence

Si nous considérons une surface dans $\mathbb{R}^n$ et un champ de vecteurs, il est bon de se demander quelle « quantité de vecteurs » traverse la surface. Soit D , un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ telle que ∂D soit une variété de dimension $n - 1$, et G , un champ de vecteurs défini sur $\bar{D}$. Afin de compter combien de G traverse ∂D , il faudra faire en sorte de ne considérer que la composante de G normale à ∂D : pas question d'intégrer par exemple la norme de G sur ∂D .

Comme nous le savons, la composante du vecteur v dans la direction w est le produit scalaire $v \cdot 1_w$ où 1_w est le vecteur de norme 1 dans la direction w . Nous allons donc introduire le concept de vecteur normal extérieur. Soit $x \in \partial D$ et $\nu \in \mathbb{R}^n$, nous disons que ν est un **vecteur normal extérieur** de ∂D si

- (1) $\langle \nu, v \rangle = 0$ pour tout vecteur tangent v à ∂D au point x . Pour rappel, ∂D étant une variété de dimension $n - 1$, il y a $n - 1$ tels vecteurs v linéairement indépendants.
- (2) Il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall t \in]0, \delta[$, nous avons $c + t\nu \notin \bar{D}$ et $x - t\nu \in D$.

Nous pouvons maintenant définir le concept de flux. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que ∂D soit une variété de dimension $n - 1$ qui admette un vecteur normal extérieur $\nu(x)$ en chaque point. Soit aussi $G: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, un champ de vecteur de classe C^1 . Le **flux** de G au travers de ∂D est le nombre

$$\int_{\partial D} \langle G(x), \nu(x) \rangle d\sigma(x). \quad (13.426)$$

Cette intégrale est en général très compliquée à calculer parce qu'il faut trouver le champ de vecteur normal, puis une paramétrisation de la surface ∂D et ensuite appliquer la méthode décrite au point 13.13.1.

Heureusement, il y a un théorème qui nous permet de calculer plus facilement : sans devoir trouver de vecteurs normaux.

Il n'est pas plus contraignant d'énoncer ce théorème dans le cadre d'une hypersurface de $\mathbb{R}^n$, ce que nous faisons donc :

Théorème 13.167 (Formule de la divergence).

Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est « assez régulier par morceaux », c'est-à-dire :

$$\partial D = A_1 \cup \dots \cup A_p \cup N \quad (13.427)$$

où

- (1) $A_1, \dots, A_p, N$ sont deux à deux disjoints,
- (2) pour tout $i \leq p$, A_i est un ouvert relatif d'une certaine variété M_i de dimension $(n - 1)$
- (3) $\bar{A}_i \subset M_i$
- (4) N est un compact contenu dans une réunion finie de variétés de dimensions $(n - 2)$.

Supposons également qu'en chaque point de $A_1 \cup \dots \cup A_p$ il existe un vecteur normal extérieur ν .

Si G est un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\bar{D}$ alors

$$\int_D \nabla \cdot G = \sum_{i=1}^p \int_{A_i} \langle G, \nu \rangle. \quad (13.428)$$

L'intégrale du membre de gauche est l'intégrale sur un ouvert d'une simple fonction.

13.16.2 Formule de Green

Pour rappel, un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **régulier** si il est C^1 et si $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ pour tout t . Le chemin est de **Jordan** si $\gamma(1) = \gamma(0)$ et si $\gamma:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective.

La formule de Green est un cas particulier du théorème de la divergence dans le cas $n = 2$, légèrement reformulé :

Théorème 13.168.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert borné tel que son bord est la réunion finie d'un certain nombre de chemins de classe C^1 de Jordan réguliers. Supposons qu'en chaque point de son bord, D possède un vecteur normal unitaire extérieur ν . Soient P et Q deux fonctions réelles de classe C^1 sur $\bar{D}$. Alors

$$\iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy \quad (13.429)$$

où chaque chemin γ formant le bord de D est orienté de sorte que $T\nu = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$ où T représente la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Justifions le fait que cela soit un cas particulier de la formule de Stokes du théorème 13.165. Nous considérons la forme différentielle

$$\omega = Pdx + Qdy, \quad (13.430)$$

et sa différentielle

$$d\omega = \sum_i d\omega_i \wedge dx_i \quad (13.431a)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \quad (13.431b)$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad (13.431c)$$

Intégrons cette forme $d\omega$ sur le domaine ouvert D que nous paramétrons de façon triviale par

$$\begin{aligned} \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (u, v). \end{aligned} \quad (13.432)$$

Ce que nous avons est

$$\iint_D d\omega = \iint_D d\omega_{(u,v)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dudv \quad (13.433)$$

Nous avons aussi $T_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$(dx \wedge dy)(T_u, T_v) = dx(T_u)dy(T_v) - dx(T_v)dy(T_u) = 1 - 0 = 1. \quad (13.434)$$

L'intégrale (13.433) se développe donc en

$$\iint_D d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(u, v) \right) (dx \wedge dy)(T_u, T_v) dudv = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dudv. \quad (13.435)$$

Par conséquent la formule de Stokes nous donne la formule (13.429).

La formule de Green nous permet de calculer l'aire de la surface délimitée par une courbe fermée en termes de l'intégrale d'une forme bien choisie le long du contour. Pour cela nous prenons la forme

$$\omega = -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy, \quad (13.436)$$

de telle sorte que $\partial_x Q - \partial_y Q = 1$ et que

$$\iint_D d\omega = \iint_D ddudv = S, \quad (13.437)$$

et au final l'aire est donnée par

$$S = \int_{\partial D} \left(-\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy \right). \quad (13.438)$$

Lorsque le bord de D est paramétré par

$$\begin{aligned} \gamma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13.439)$$

nous avons

$$(Pdx + Qdy)\gamma'(u) = Px' + Qy', \quad (13.440)$$

et alors

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x(u), y(u))x'(u) + Q(x(u), y(u))y'(u)du. \quad (13.441)$$

En ce qui concerne l'aire de la surface, nous prenons les P et Q de la forme 13.436 :

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b \left(-y(u)x'(u) + x(u)y'(u) \right) du. \quad (13.442)$$

13.16.3 Formule de Stokes

La formule de Stokes est la version classique, qui permet d'exprimer la circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe de $\mathbb{R}^3$ comme le flux de son rotationnel à travers n'importe quel surface dont le bord est la courbe. La version présentée ici suppose que la surface peut se paramétrer en un seul morceau :

Théorème 13.169 (Formule de Stokes).

Soit $F : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation (carte) d'une surface dans $\mathbb{R}^3$, supposée de classe C^2 . Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les hypothèses de la formule de Green, et tel que $\bar{D} \subset W$. Soit G un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur $F(\bar{D})$, et soit N le champ normal unitaire donné par la paramétrisation

$$N = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \right\|} \quad (13.443)$$

alors

$$\iint_{F(D)} \langle \nabla \times G, N \rangle d\sigma_F = \int_{F(\partial D)} G \quad (13.444)$$

où les chemins formant le bord ∂D sont orientés comme dans le théorème de Green.

Notons, juste pour avoir une bonne nouvelle de temps en temps, que

$$d\sigma_F = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\| du dv, \quad (13.445)$$

mais cette norme apparaît exactement au dénominateur de N . Il ne faut donc pas la calculer parce qu'elle se simplifie.

Sous forme un peu plus physicienne¹⁴, la formule (13.444) s'écrit

$$\int_{F(D)} \langle \nabla \times G, N(x) \rangle d\sigma_F(x) = \int_{F(\gamma)} \langle G, T \rangle ds \quad (13.446)$$

où T est le vecteur unitaire tangent à $F(\gamma)$.

13.16.3.1 Quelle est la bonne orientation ?

Le signe du vecteur normal N dépend du choix de l'ordre des coordonnées dans la carte. Supposons que je veuille paramétrer la surface $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Nous prenons naturellement comme carte le cercle C de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ et la carte

$$F(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13.447)$$

Mais nous aurions aussi pu mettre les coordonnées r et θ dans l'autre ordre :

$$\tilde{F}(\theta, r) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13.448)$$

Les vecteurs normaux ne sont pas les mêmes : la carte F donnera $\partial_r F \times \partial_\theta F$, tandis que l'autre donnera $\partial_\theta \tilde{F} \times \partial_r \tilde{F}$. Le signe change !

Il faut savoir laquelle choisir. Le cercle $C \subset \mathbb{R}^2$ a une orientation donnée par le théorème de Green. Nous choisissons l'ordre des coordonnées pour que 1_θ et 1_r soient dans la même orientation que les vecteurs ν et T tels que donnés par le théorème de Green, et tels que dessinés sur la figure 13.13.

Plus généralement, nous choisissons l'ordre des coordonnées u et v pour que la base $(1_u, 1_v)$ ait la même orientation que (ν, T) où T a le sens convenu dans le théorème de Green.

14. et surtout plus explicite.

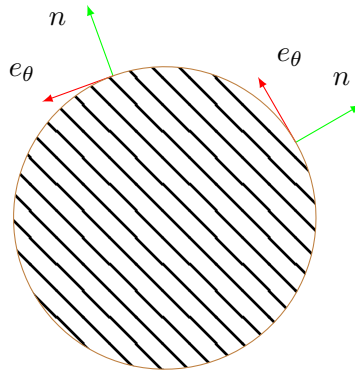


FIGURE 13.13 – L’orientation sur le cercle. Si nous les prenons dans l’ordre, les vecteurs $(1_r, 1_\theta)$ ont la même orientation que celle donnée par les vecteurs (ν, T) donnés par la convention de Green.

13.17 Résumé des intégrales vues

Nous sommes maintenant capables de revoir tous les types d’intégrales vues jusqu’ici de façon très cohérentes. Nous commencerons par les intégrales de fonctions et nous ferons ensuite les intégrales de champs de vecteurs.

13.17.1 L’intégrale d’une fonction sur les réels

Si $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction usuelle, son intégrale est

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (13.449)$$

où F est une primitive de f .

13.17.2 Intégrale d’une fonction sur un chemin

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^3$ et si $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un chemin dans $\mathbb{R}^3$, l’intégrale de f sur σ est, par définition,

$$\int f d\sigma = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt. \quad (13.450)$$

13.17.3 Intégrale d’une fonction sur une surface

Nous devons paramétrer la surface S par une application $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. À partir d’une telle paramétrisation, nous construisons un élément de surface en prenant le produit vectoriel des deux vecteurs tangents :

$$dS = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} du dv. \quad (13.451)$$

L’intégrale est

$$\int f dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv. \quad (13.452)$$

Il ne faut pas rajouter de jacobien : la norme du produit vectoriel *est* le jacobien.

Remarque 13.170.

La formule (13.452) est autant valable pour des surfaces dans $\mathbb{R}^2$ que dans $\mathbb{R}^3$. Si nous considérons une surface dans $\mathbb{R}^2$, nous la voyons dans $\mathbb{R}^3$ en ajoutant un zéro comme troisième composante.

Exemple 13.171

Les coordonnées polaires sont données par

$$\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.453)$$

Les vecteurs tangents à cette paramétrisation sont

$$T_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.454)$$

Le vecteur normal est

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r e_z. \quad (13.455)$$

Nous trouvons donc que l'élément de surface est la norme de $r e_z$, c'est à dire r , le jacobien connu. $\triangle$

13.17.4 Intégrale d'une fonction sur un volume

Si V est un volume dans $\mathbb{R}^3$, nous effectuons la même procédure : nous trouvons une paramétrisation, et nous formons un élément de volume avec les vecteurs tangents de la paramétrisation. Nous avons donc un volume déterminé par l'application

$$\varphi: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (13.456)$$

et ses trois vecteurs tangents

$$\begin{aligned} T_u &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ T_v &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ T_w &= \frac{\partial \varphi}{\partial w}. \end{aligned} \quad (13.457)$$

Comment former un volume avec trois vecteurs ? Réponse : le produit mixte. L'intégrale de f sur V sera

$$\int f dV = \iiint_D f(\varphi(u, v, w)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right\| du dv dw. \quad (13.458)$$

Encore une fois, le produit mixte est le jacobien. Prenons les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad (13.459)$$

Les trois vecteurs tangents seront

$$T_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (13.460a)$$

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -r \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (13.460b)$$

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.460c)$$

Nous avons vu que le produit mixte revient à mettre toutes les composantes dans une matrice. Ici nous avons donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \quad (13.461)$$

Cela est précisément le jacobien dont nous parlions plus haut.

13.17.5 Conclusion pour les fonctions

Lorsque nous intégrons une fonction sur un chemin, une surface ou un volume, la technique est toujours la même :

- (1) Trouver une paramétrisation à une, deux ou trois variables.
- (2) Dériver la paramétrisation par rapport à ses variables.
- (3) Construire un élément de longueur, surface ou volume à partir des vecteurs que l'on a. Cela se fait en prenant la norme, le produit vectoriel ou le produit mixte.

13.17.6 Circulation d'un champ de vecteurs

Pour les champs de vecteurs, nous faisons la même chose, mais au lieu de *multiplier* par l'élément de longueur ou de surface, nous prenons le produit scalaire. Si nous considérons la courbe paramétrée $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et le champ de vecteurs F , nous avons donc

$$\int_{\sigma} F = \int F \cdot d\sigma = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt. \quad (13.462)$$

13.17.7 Flux d'un champ de vecteurs

Si la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est paramétrée par

$$\begin{aligned} \phi: D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \phi(u, v), \end{aligned} \quad (13.463)$$

et si F est un champ de vecteurs, alors on a

$$\int_S F = \int_S F \cdot dS = \iint_D F(\phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) du dv. \quad (13.464)$$

13.17.8 Conclusion pour les champs de vecteurs

La circulation et le flux ne représentent pas tout à fait la même chose. En effet pour la circulation, nous sélectionnons la composante *tangente* à la courbe, c'est à dire la partie du vecteurs qui «circule» le long de la courbe. Une force perpendiculaire au mouvement ne travaille pas.

La situation est exactement le contraire pour le flux. Étant donné que le vecteur

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \quad (13.465)$$

est normal à la surface, le fait de prendre le produit scalaire du champ de vecteurs avec lui sélectionne la composante *normale* à la surface, c'est à dire la partie du vecteur qui traverse la surface.

13.17.9 Attention pour les surfaces fermées !

Si nous considérons une surface fermée, il faut faire attention à choisir une *orientation*. Les vecteurs normaux doivent soit tous pointer vers l'intérieur soit tous vers l'extérieur. En effet, en tant que vecteur normal, nous avons choisi de prendre

$$T_u \times T_v. \quad (13.466)$$

Mais le vecteur $T_v \times T_u$ est tout aussi normal ! Il n'y a pas a priori de façon standard pour choisir l'un ou l'autre. Il faut juste être cohérent : il faut que si on divise la surface en plusieurs morceaux, tous les vecteurs pointent dans le même sens.

Notez que si vous faites un choix et que votre voisin fait le choix inverse, vous obtiendrez des réponses qui diffèrent d'un signe. Sans plus de précisions¹⁵, les deux réponses sont correctes.

Un exemple de ce problème est donné dans l'exercice 2.

Exercice 2

Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x, y, z) = e_x \quad (13.467)$$

au travers du cylindre de rayon R et de hauteur h autour de l'axe z .

Même question si le cylindre est autour de l'axe x .

Remarque : ces cylindres sont considérés *avec* leur «couvercles».

Correction de l'exercice 2

Une paramétrisation du cylindre autour de l'axe z est

$$\phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ z \end{pmatrix}. \quad (13.468)$$

Les vecteurs tangents sont

$$T_\theta = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, T_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13.469)$$

Le vecteur normal est donc

$$T_\theta \times T_z = R \cos(\theta) e_x + R \sin(\theta) e_y. \quad (13.470)$$

C'est un vecteur dirigé vers l'extérieur.

Le champ de vecteurs considéré est constant : $F(\theta, z) = e_x$. Nous avons donc

$$F(\theta, z) \cdot (T_\theta \times T_z) = R \cos(\theta) \quad (13.471)$$

et le flux vaut

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h R \cos(\theta) dz = 0. \quad (13.472)$$

En ce qui concerne les couvercles haut au bas, ils sont paramétrés par

$$\phi_1(r, \theta) = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \\ h \end{pmatrix}, \phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.473)$$

Les vecteurs normaux correspondants sont dans la direction de e_z , de façon que le produit scalaire avec $F(r, \theta)$ soit nul. Le flux total est donc nul.

15. Il faudrait définir ce qu'est une surface *orientable* et choisir une orientation.

Regardons maintenant le cylindre le long de l'axe x . Une paramétrisation est

$$\phi(\theta, x) = \begin{pmatrix} x \\ R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad (13.474)$$

et les vecteurs tangents sont

$$T_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix}, T_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.475)$$

Le vecteur normal est alors donné par

$$T_\theta \times T_x = R \cos(\theta) e_y + R \sin(\theta) e_z. \quad (13.476)$$

Nous avons par conséquent $F(\theta, x) \cdot (T_\theta \times T_x) = 0$. Pas de flux par le côté du cylindre.

Regardons les «couvercles». Le premier est donné par la paramétrisation

$$\phi_1(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (13.477)$$

Le vecteur normal serait $T_r \times T_\theta = r e_x$, et le flux

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr = \pi R^2. \quad (13.478)$$

Le second couvercle est donné par

$$\phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} h \\ r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (13.479)$$

Le vecteur normal est encore $r e_x$, et le flux est à nouveau πR^2 .

Le flux total serait donc $2\pi R^2$.

Cela n'est pas possible parce que tous les vecteurs qui «rentrent» d'un côté doivent «sortir» de l'autre côté. L'erreur est que le premier vecteur normal est un vecteur qui pointe vers l'intérieur du cylindre, tandis que le second pointe vers l'extérieur. Si nous choisissons, par convention, de prendre uniquement les vecteurs extérieurs, il faut changer le vecteur normal du premier couvercle en $-r e_x$. Le premier flux vaudra donc

$$-\pi R^2, \quad (13.480)$$

de telle sorte que le flux total sera nul.

13.18 Intégrales convergeant uniformément

13.18.1 Définition et propriété

Définition 13.172.

Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Nous disons que l'intégrale

$$\int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.481)$$

converge uniformément en x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ tel que pour tout compact K tel que $K_\epsilon \subset K$ nous avons

$$\left| \int_{\Omega \setminus K} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| \leq \epsilon. \quad (13.482)$$

Le point important est que le choix de K_ϵ ne dépend pas de x .

Lemme 13.173.

Soit

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega), \quad (13.483)$$

une intégrale uniformément convergente. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous considérons un compact K_k tel que

$$\left| \int_{\Omega \setminus K_k} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| \leq \frac{1}{k}. \quad (13.484)$$

Alors la suite de fonctions F_k définie par

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.485)$$

converge uniformément vers F .

Démonstration. Nous avons

$$|F_k(x) - F(x)| = \left| \int_{K_k} f(x, \omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| \quad (13.486a)$$

$$= \left| \int_{\Omega \setminus K_k} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| \quad (13.486b)$$

$$\leq \frac{1}{k}. \quad (13.486c)$$

□

13.18.2 Critères de convergence uniforme

Afin de tester l'uniforme convergence d'une intégrale, nous avons le **critère de Weierstrass** :

Théorème 13.174.

Soit $f(x, t) : [\alpha, \beta] \times [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, une fonction dont la restriction à toute demi-droite $x = \text{cst}$ est mesurable. Si $|f(x, t)| < \varphi(t)$ et $\int_a^\infty \varphi(t) dt$ existe, alors l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x, t) dt \quad (13.487)$$

est uniformément convergente.

Le théorème suivant est le **critère d'Abel** :

Théorème 13.175.

Supposons que $f(x, t) = \varphi(x, t)\psi(x, t)$ où φ et ψ sont bornée et intégrables en t au sens de Riemann sur tout compact $[a, b]$, $b \geq a$. Supposons que :

- (1) $|\int_a^T \varphi(x, t) dt| \leq M$ où M est indépendant de T et de x ,
- (2) $\psi(x, t) \geq 0$,
- (3) pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $\psi(x, t)$ est une fonction décroissante de t ,
- (4) les fonctions $x \mapsto \psi(x, t)$ convergent uniformément vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Alors l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x, t) dt \quad (13.488)$$

est uniformément convergente.

Remarque 13.176.

Étant donné que la fonction sinus est bornée, il est tentant de l'utiliser comme φ dans le critère d'Abel (théorème 13.175). Hélas,

$$\int_0^T \sin(xt) dt = -\frac{1}{x}(\cos(xT) - \cos(x)), \quad (13.489)$$

qui n'est pas bornée pour tout x ! Poser $\varphi(x, t) = \sin(xt)$ ne fonctionne pas pour assurer la convergence uniforme sur un intervalle qui contient des x arbitrairement proches de 0. Le critère d'Abel avec $\varphi(x, t) = \sin(xt)$ ne permet que de conclure à l'uniforme convergence *sur tout compact* ne contenant pas 0. Cela est toutefois souvent suffisant pour étudier la continuité ou la dérivabilité en se servant du fameux coup du compact.

13.19 Fonctions définies par une intégrale

Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Nous nous demandons dans quel cas l'intégrale

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\omega \quad (13.490)$$

définit une fonction F continue, dérivable ou autre.

Dans la suite nous allons considérer des fonctions f à valeurs réelles. Quitte à passer aux composantes, nous pouvons considérer des fonctions à valeurs vectorielles. Par contre le fait que x soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$ n'est pas spécialement une chose facile à traiter.

13.19.1 Continuité sous l'intégrale

Nous allons présenter deux théorèmes donnant la continuité de F .

- (1) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x , nous avons le théorème 13.177,
- (2) si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 13.178.

Théorème 13.177.

Soit (Ω, μ) est un espace mesuré, soit $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $f: U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où U est ouvert dans $\mathbb{R}^m$. Nous supposons que

- (1) La fonction $f(x, \cdot)$ est dans $L^1(\Omega, \mu)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$.
- (2) La fonction $f(\cdot, \omega)$ est continue en x_0 pour tout $\omega \in \Omega$.
- (3) Il existe une fonction $G \in L^1(\Omega)$ telle que

$$|f(x, \omega)| \leq G(\omega) \quad (13.491)$$

pour tout $x \in U$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F: U &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \end{aligned} \quad (13.492)$$

est continue en x_0 .

Démonstration. Soit (x_n) une suite convergente vers x_0 . Nous considérons la suite de fonctions $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(\omega) = f(x_n, \omega). \quad (13.493)$$

sur qui nous pouvons utiliser le théorème de la convergence dominée (théorème 7.134) pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x_n, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.494a)$$

$$= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.494b)$$

$$= \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.494c)$$

$$= F(x). \quad (13.494d)$$

Nous avons utilisé la continuité de $f(., \omega)$. $\square$

Si nous avons un peu de compatibilité entre la topologie et la mesure, alors nous pouvons utiliser l'uniforme convergence d'une intégrale pour obtenir la continuité d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 13.178.

Soit (Ω, μ) un espace topologique mesuré tel que tout compact est de mesure finie. Soit une fonction $f: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (1) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x, .)$ est $L^1(\Omega, \mu)$.
- (2) Pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $f(., \omega)$ est continue en x_0 .
- (3) L'intégrale

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.495)$$

est uniformément convergente¹⁶.

Alors la fonction F est continue en x_0 .

Démonstration. Nous reprenons les notations du lemme 13.173. Les fonctions

$$F_k(x) = \int_{K_k} f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.496)$$

existent parce que les fonctions $f(x, .)$ sont dans $L^1(\Omega)$. Montrons que les fonctions F_k sont continues. Soit une suite $x_k \rightarrow x_0$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_k(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_k} f(x_n, \omega) d\mu(\omega). \quad (13.497)$$

Nous pouvons inverser la limite et l'intégrale en utilisant le théorème de la convergence dominée. Pour cela, la fonction $f(x_n, \omega)$ étant continue sur le compact K_k , elle y est majorée par une constante. Le fait que les compacts soient de mesure finie (hypothèse) implique que les constantes soient intégrales sur K_k . Le théorème de la convergence dominée implique alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_k(x_n) = \int_{K_k} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, \omega) d\mu(\omega) = \int_{K_k} f(x_0, \omega) d\mu(\omega) = F_k(x_0). \quad (13.498)$$

Nous avons utilisé le fait que $f(., \omega)$ était continue en x_0 .

Le lemme 13.173 nous indique alors que la convergence $F_k \rightarrow F$ est uniforme. Les fonctions F_k étant continues, la fonction F est continue. $\square$

Pour finir, citons ce résultat concernant les fonctions réelles.

Théorème 13.179.

Nous considérons $F(x) = \int_a^{\infty} f(x, t) dt$. Si f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, \alpha[$ et l'intégrale converge uniformément, alors $F(x)$ est continue.

16. Définition 13.172.

13.19.2 Le coup du compact

Nous avons vu des fonctions définies par toute une série de processus de limite (suites, séries, intégrales). Une des questions centrales est de savoir si la fonction limite est continue, dérivable, intégrale, etc. étant donné que les fonctions sont continues.

Pour cela, nous inventons le concept de *convergence uniforme*. Si la limite (série, intégrale) est uniforme, alors la fonction limite sera continue. Il arrive qu'une limite ne soit pas uniforme sur un intervalle ouvert $]0, 1]$, et que nous voulions quand même prouver la continuité sur cet intervalle. C'est à cela que sert la notion de convergence uniforme *sur tout compact*. En effet, la notion de continuité est une notion locale : savoir ce qu'il se passe dans un petit voisinage autour de x est suffisant pour savoir la continuité en x (idem pour sa dérivée).

Si nous avons une convergence uniforme sur tout compact de $]0, 1]$, mais pas une convergence uniforme sur cet intervalle, la limite sera quand même continue sur $]0, 1]$. En effet, si $x \in]0, 1]$, il existe un ouvert autour de x contenu dans un compact contenu dans $]0, 1]$. L'uniforme convergence sur ce compact suffit à prouver la continuité en x .

Déduire la continuité sur un ouvert à partir de l'uniforme convergence sur tout compact de l'ouvert est appelé faire le **coup du compact**.

13.19.3 Dérivabilité sous l'intégrale

Nous traitons à présent de la dérivabilité de la fonction F définie comme intégrale de f .

Théorème 13.180 (Dérivation sous le signe intégral[134]).

Soit (Ω, μ) un espace mesuré et une fonction $f: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont nous voulons étudier la dérivabilité en $a \in \mathbb{R}$. Nous supposons qu'il existe $\delta > 0$, A mesurable de mesure nulle dans Ω tels que

- (1) $f(x, \cdot)$ soit dans $L^1(\Omega)$.
- (2) L'application $x \mapsto f(x, \omega)$ est dérivable pour tout $x \in B(a, \delta)$ et pour tout $\omega \in \mathbb{C}A$.
- (3) Il existe une fonction G intégrable sur Ω telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) \right| \leq G(\omega) \quad (13.499)$$

pour tout $x \in B(a, \delta)$ et pour tout $\omega \in \mathbb{C}A$.

Alors la fonction

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.500)$$

est dérivable en a et nous pouvons permuter la dérivée et l'intégrale :

$$F'(a) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(a, \omega) d\mu(\omega). \quad (13.501)$$

Démonstration. Soit une suite (x_n) dans $B(a, \delta)$ telle que $x_n \neq a$ et $x_n \rightarrow a$. Si la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(a) - F(x_n)}{a - x_n} \quad (13.502)$$

existe et ne dépend pas de la suite choisie, alors la fonction F est dérivable en a et sa dérivée vaut cette limite. Par linéarité de l'intégrale, nous devons étudier la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(a, \omega) - f(x_n, \omega)}{a - x_n} d\omega, \quad (13.503)$$

montrer qu'elle existe, ne dépend pas de la suite choisie et vaut $\int_{\Omega} \partial_x f(a, \omega) d\omega$. Nous sommes donc dans un problème d'inversion de limite et de dérivée pour lequel nous allons utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. D'abord nous posons

$$g_n(\omega) = \frac{f(x_n, \omega) - f(a, \omega)}{x_n - a}. \quad (13.504)$$

Cela est une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ parce qu'à la fois a et x_n sont dans $B(a, \delta)$. De plus nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, \omega) \quad (13.505)$$

parce que nous savons que f est dérivable en a pour tout $\omega \in \mathbb{C}A$. En ce qui concerne la majoration de g_n , nous utilisons le théorème des accroissements finis (théorème 11.99) sur le numérateur de (13.504). Pour tout n et pour tout $\omega \in \mathbb{C}A$, il existe un $\theta_{n,\omega}$ dans $]a, x_n[$ tel que

$$f(x_n, \omega) - f(a, \omega) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_{n,\omega}, \omega)(x_n - a), \quad (13.506)$$

donc

$$|g_n(\omega)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_{n,\omega}, \omega) \right| \leq G(\omega). \quad (13.507)$$

La dernière inégalité provient des hypothèses. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 7.134) nous permet alors de calculer la limite (13.503) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(\omega) d\omega = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega) d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(a, \omega) d\omega. \quad (13.508)$$

Notons que l'existence de la dernière intégrale fait partie du théorème de la convergence dominée.

Nous avons donc prouvé que la limite de gauche existait et ne dépendait pas de la suite choisie. Donc F est dérivable en a et la dérivée vaut cette limite :

$$F'(a) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(a, \omega) d\mu(\omega). \quad (13.509)$$

□

Théorème 13.181.

Supposons f continue et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, \alpha[$. Supposons que $F(x) = \int_a^x f(x, t) dt$ converge et que $\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x} dt$ converge uniformément. Alors F est C^1 sur $[\alpha, \beta]$ et

$$\frac{dF}{dx} = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x} dt. \quad (13.510)$$

En ce qui concerne les fonctions dans $\mathbb{R}^n$, il y a les propositions 13.187 et 13.188 qui parlent de différentiabilité sous l'intégrale.

13.19.4 Absolue continuité

Définition 13.182.

Une fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **absolument continue** sur $[a, b]$ si il existe une fonction f sur $[a, b]$ telle que

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (13.511)$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 13.183.

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω , un espace mesuré. Soit une fonction $f: A \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\omega. \quad (13.512)$$

Nous supposons les points suivants.

- (1) La fonction f est mesurable en tant que fonction $A \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in A$, la fonction $f(x, \cdot)$ est intégrable sur Ω .
- (2) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $f(x, \omega)$ est une fonction absolument continue de x .

(3) La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est localement intégrable, c'est à dire que pour tout $[a, b] \subset A$,

$$\int_a^b \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) \right| d\omega dx < \infty. \quad (13.513)$$

Alors la fonction F est absolument continue et pour presque tout $x \in A$, la dérivée est donné par

$$\frac{d}{dx} \int_{\Omega} f(x, \omega) d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) d\omega. \quad (13.514)$$

La proposition suivante sera utilisée entre autres pour montrer que sous l'hypothèse d'une densité continue, la loi exponentielle est sans mémoire, proposition 26.82.

Proposition 13.184.

Soit $f(x, t)$ une fonction continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $] \alpha, \beta[\times [a, b]$. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, des fonctions continues de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée continue sur $] \alpha, \beta[$. Alors la fonction

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \quad (13.515)$$

admet une dérivée continue sur $] \alpha, \beta[$ et

$$\frac{dF}{dx} = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, \psi(x)) \cdot \frac{d\psi}{dx} - f(x, \varphi(x)) \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (13.516)$$

L'exemple qui suit devrait pouvoir être rendu rigoureux en utilisant des distributions correctement.

Exemple 13.185

Si g est une fonction continue, la fonction suivante est une primitive de g :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) \mathbb{1}_{t < x}(t) dt. \quad (13.517)$$

Nous nous proposons de justifier *de façon un peu heuristique* le fait que ce soit bien une primitive de g en considérant la fonction

$$f(t, x) = g(t) \mathbb{1}_{t < x}(t). \quad (13.518)$$

Nous posons

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(x, t) dt, \quad (13.519)$$

et nous calculons F' en permutant la dérivée et l'intégrale¹⁷. D'abord,

$$f(t, x) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \in [0, x] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13.520)$$

La dérivée de f par rapport à x est donnée par la distribution

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0) = g(t_0) \delta(t_0 - x_0). \quad (13.521)$$

Donc

$$F'(x_0) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt = \int_0^{\infty} g(t) \delta(t - x_0) dt = g(x_0), \quad (13.522)$$

comme attendu. △

Cet exemple est rendu rigoureux par la proposition suivante.

17. Ceci n'est pas rigoureux : il faudrait avoir un théorème à propos de distributions qui permet de le faire.

Proposition 13.186.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (13.523)$$

est presque partout dérivable et pour les points où elle l'est nous avons $F'(x) = f(x)$.

13.19.5 Différentiabilité sous l'intégrale

Le théorème suivant est restrictif sur l'ensemble d'intégration (qui doit être compact), mais accepte des fonctions de plusieurs variables, ce qui est un premier pas vers la différentiabilité.

Proposition 13.187 (Dérivation sous l'intégrale).

Supposons $A \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Nous considérons une fonction $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. Si pour un $i \in \{1, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A \times B$ et est continue, alors la fonction

$$F(x) = \int_B f(x, t)dt \quad (13.524)$$

admet une dérivée partielle dans la direction x_i sur A . Cette dérivée partielle y est continue et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t)dt, \quad (13.525)$$

pour tout a dans l'ouvert A .

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes.

F est dérivable Nous voulons prouver que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a, t)$ existe. Pour cela nous posons

$$g_l(t) = \frac{f(a_1, \dots, a_i + \epsilon_l, \dots, a_n, t) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, t)}{\epsilon_l} \quad (13.526)$$

où ϵ_l est une suite de nombres tendant vers zéro. La fonction f est dérivable dans la direction x_i si et seulement si $\lim_{l \rightarrow \infty} g_l(t)$ existe et ne dépend pas du choix de la suite. À ce moment, la valeur de la dérivée partielle sera cette limite. Dans notre cas, nous savons que f admet une dérivée partielle dans la direction x_i et donc nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) = \lim_{l \rightarrow \infty} g_l(t). \quad (13.527)$$

De la même façon pour F nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_B g_l(t)dt. \quad (13.528)$$

Sous-entendu : si la limite de droite ne dépend pas de la suite choisie, alors $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existe et vaut cette limite.

Vu la continuité de f , le seul point à vérifier pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue est l'existence d'une fonction intégrable de t majorant g_l . Pour cela le théorème de accroissements finis (théorème 11.99) appliqué à la fonction $\epsilon \mapsto f(a_1, \dots, a_i + \epsilon, \dots, a_n)$ nous dit que

$$f(a_1, \dots, a_i + \epsilon_l, \dots, a_n, t) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, t) = \epsilon_l \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n, t) \quad (13.529)$$

pour un certain $\theta \in B(a_i, \epsilon_l)$. Notons que ce θ dépend de t mais pas de l . Vu que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue par rapport à ses deux variables, si K est un voisinage compact autour de a , il existe $M > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \right| < M \quad (13.530)$$

pour tout $x \in K$ et tout $t \in B$. La valeur de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n, t)$ est donc bien majorée par rapport à θ et par rapport à t en même temps par une constante qui n'a pas de mal à être intégrée sur le compact B .

Le théorème de la convergence dominée (théorème 7.134) s'applique donc bien et nous avons

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_B g_l(t) dt = \int_B \lim_{l \rightarrow \infty} g_l(t) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) dt. \quad (13.531)$$

Le membre de droite ne dépendant pas de la suite ϵ_l choisie, le membre de gauche est bien la dérivée de F par rapport à x_i et nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, t) dt. \quad (13.532)$$

Cela prouve la première partie de la proposition.

La dérivée est continue Soit K un voisinage compact autour de a et U' un ouvert tel que $a \in U' \subset K$. Nous avons encore la majoration (13.530) sur U' et donc le théorème de continuité sous l'intégrale 13.177 nous indique que la fonction

$$\begin{aligned} U' &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt \end{aligned} \quad (13.533)$$

est continue en a .

□

Une conséquence de la proposition 13.187 est que si elle fonctionne pour tous les i , alors F est différentiable et même de classe C^1 , et la différentielle de F s'obtient comme intégrale de la différentielle de f .

Proposition 13.188.

Supposons $A \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans $A \times B$ et est continue, alors F est de classe C^1 et

$$(dF)_a = \int_B (df_t)_a dt \quad (13.534)$$

où $f_t(x) = f(x, t)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 13.187, toutes les dérivées partielles de F sont continues. Cela implique que F est de classe C^1 par la proposition 11.183 et que la différentielle s'écrit en terme des dérivées partielles avec la formule usuelle. Nous avons alors

$$(dF)_a(u) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) u_k \quad (13.535a)$$

$$= \int_B \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a, t) dt \quad (13.535b)$$

$$= \int_B \sum_k \frac{\partial f_t}{\partial x_k}(a) u_k dt \quad (13.535c)$$

$$= \int_B (df_t)_a(u) dt. \quad (13.535d)$$

Cela est la formule annoncée.

□

Un autre théorème tourne autour du pot, et me semble inutile.

Théorème 13.189.

Soit (Ω, μ) un espace mesuré, une fonction $f: \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons la fonction

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega). \quad (13.536)$$

Pour chaque $k = 1, \dots, n$ nous supposons avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) = F'_{|k}(a) = \int_{\Omega} \frac{\partial f_{|k}}{\partial t}(a_k, \omega) d\mu(\omega) \quad (13.537)$$

où $F_{|k}(t) = F(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ et $f_{|k}$ est définie de façon similaire.

Nous supposons de plus que les fonctions $\partial_{x_k} F$ sont continues.

Alors F est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par

$$df_a = \int_{\Omega} (df_{\omega})_a d\omega \quad (13.538)$$

où f_{ω} est définie par $f_{\omega}(x) = f(x, \omega)$.

Démonstration. Étant donné que les dérivées partielles de F en a existent et sont continues, la proposition 11.183 dit que F est différentiable et que

$$dF_a(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) u_k. \quad (13.539)$$

La linéarité de l'intégrale et les hypothèses nous donnent alors

$$df_a(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) u_k \quad (13.540a)$$

$$= \int_{\Omega} \sum_k \frac{\partial f_{|k}}{\partial t}(a_k; \omega) u_k d\mu(\omega) \quad (13.540b)$$

$$= \int_{\Omega} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a; \omega) u_k d\mu(\omega) \quad (13.540c)$$

$$= \int_{\Omega} (df_{\omega})_a(u) d\mu(\omega), \quad (13.540d)$$

et donc $df_a = \int_{\Omega} (df_{\omega})_a d\mu(\omega)$. □

Notons qu'en passant aux composantes, ce théorème fonctionne tout aussi bien pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie plutôt que dans $\mathbb{R}$.

Lemme 13.190 (Hadamard[189]).

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p avec $p \geq 1$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ il existe des fonctions $g_1, \dots, g_n$ de classe C^{p-1} telles que

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) g_i(x). \quad (13.541)$$

Démonstration. Vu que f est de classe C^1 , le théorème fondamental de l'analyse 13.60 fonctionne et

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[f(a + t(x - a)) \right] dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a)) (x_i - a_i) dt. \quad (13.542)$$

Plus de détails : la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt} \left[f(a + t(x - a)) \right]$ possède comme primitive la fonction $F(t) = f(a + t(x - a))$.

Nous posons

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a)) dt \quad (13.543)$$

Le fait que l'intégrale existe est simplement le fait qu'il s'agit d'une fonction continue sur un compact et donc majorée par une constante. Pour voir que g_i est de classe C^{p-1} nous pouvons calculer $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ en permutant dérivée et intégrale par la proposition 13.187 :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x - a)) \right) dt = \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a + t(x - a)) dt. \quad (13.544)$$

Nous pouvons ainsi permuter $p-1$ dérivées tout en gardant une fonction continue dans l'intégrale. Le théorème 13.177 nous donne alors une fonction continue. Ainsi toutes les fonctions

$$\frac{\partial^{p-1} g_i}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{p-1}}} \quad (13.545)$$

sont continues et g_i est de classe C^{p-1} par la proposition 11.201.

En repartant de (13.542) nous avons alors bien ce qui était annoncé :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - a_i). \quad (13.546)$$

□

Corollaire 13.191.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\phi^{(k)}(x_0) = 0$ pour tout $k \leq n$. Alors il existe une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\phi(x) = (x - x_0)^{n+1} \psi(x) \quad (13.547)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En utilisant le lemme de Hadamard 13.190 avec $a = x_0$, $n = 1$ et $f(x_0) = 0$, nous avons une fonction g_1 à support compact telle que

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0)g_1(x). \quad (13.548)$$

Alors $\phi'(x) = g_1(x) + (x - x_0)g_1'(x)$, ce qui donne immédiatement $g_1(x_0) = 0$ et donc une fonction g_2 telle que $g_1(x) = (x - x_0)g_2(x)$. En injectant dans (13.548) nous avons

$$\phi(x) = (x - x_0)^2 g_2(x). \quad (13.549)$$

Il suffit de continuer ainsi tant que les dérivées de ϕ s'annulent. □

13.20 Formes différentielles exactes et fermées

Nous avons déjà parlé de formes différentielles et de leurs intégrales sur un chemin dans la section 13.9.

Définition 13.192.

La forme différentielle ω est **exacte** si il existe une fonction f telle que $\omega = df$; elle est dite **fermée** si $d\omega = 0$.

Dire que la forme différentielle $\omega = f dx + g dy$ est fermée, c'est dire que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (13.550)$$

Il est naturel de se demander si toutes les formes différentielles sont des différentielles de fonctions. Une réponse complète est délicate à établir, mais a d'innombrables conséquences en physique,

notamment en ce qui concerne l'existence d'un potentiel vecteur pour le champ magnétique dans les équations de Maxwell.

Le fait qu'une forme exacte soit fermée est relativement facile à établir ; c'est la proposition suivante. La question plus délicate est la réciproque : sous quelles conditions une forme fermée est-elle exacte ?

Proposition 13.193.

Si ω est une 1-forme exacte de classe C^1 , alors ω est fermée.

Démonstration. Le fait que ω soit exacte implique l'existence d'une fonction f telle que $\omega = df$, c'est à dire

$$\omega_x = \sum_i a_i(x) dx_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \quad (13.551)$$

c'est à dire que $a_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. L'hypothèse que ω est C^1 implique que f est C^2 , et donc que nous pouvons inverser l'ordre de dérivation pour les dérivées secondes $\partial_{ij}^2 f = \partial_{ji}^2 f$. Nous pouvons donc faire le calcul suivant :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \quad (13.552)$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

La réciproque est vraie sur un ouvert simplement connexe.

Théorème 13.194.

Supposons que $D \subset \mathbb{R}^n$ soit un ouvert simplement connexe. Alors toute forme différentielle de degré 1 et de classe C^1 sur D qui est fermée est exacte.

Nous allons prouver ce théorème dans un cas un peu moins général : celui d'un domaine étoilé de $\mathbb{R}^2$ plutôt que simplement connexe de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 13.195.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert étoilé, et ω , une 1-forme fermée de classe C^1 . Alors ω est exacte.

Démonstration. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert étoilé par rapport à l'origine. Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions de classe C^1 telles que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (13.553)$$

sur D , et

$$F(x, y) = \int_0^1 [f(tx, ty)x + g(tx, ty)y] dt \quad (13.554)$$

pour tout $(x, y) \in D$.

Étant donné que nous ne définissons $F(x, y)$ que pour des $(x, y) \in D$, la fonction $t \mapsto f(tx, ty)$ est C^1 sur tout le compact $[0, 1]$ et aucune divergence de l'intégrale n'est à craindre. Nous sommes donc dans le cadre de la proposition 13.187, et nous pouvons dériver sous le signe intégral.

Nous calculons, en utilisant la règle de dérivation de fonctions composées

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) &= \int_0^1 \left[f \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + f(tx, ty) + t \frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty)y \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[t \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \right) + f(tx, ty) \right] dt \end{aligned} \quad (13.555)$$

où nous avons utilisé l'hypothèse $\partial_y f = \partial_x g$. Ce qui se trouve dans la parenthèse n'est autre que $\partial_t(f(tx, ty))$, plus précisément, si nous posons $\mathcal{F}(x, y, t) = f(tx, ty)$, nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x, y, t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty). \quad (13.556)$$

En recopiant le résultat (13.555) en termes de $\mathcal{F}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) &= \int_0^1 \left(t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(x, y, t) + \mathcal{F}(x, y, t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \partial_t (t \mathcal{F}(x, y, t)) dt \\ &= [t \mathcal{F}(x, y, t)]_0^1 \\ &= \mathcal{F}(x, y, 1) \\ &= f(x, y).\end{aligned}\tag{13.557}$$

Le résultat correspondant pour $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g(x, y)$ s'obtient de la même manière. Nous avons donc obtenu que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g.\tag{13.558}$$

En ayant prouvé cela, nous avons prouvé que si $\omega = f dx + g dy$ avec $\partial_y f = \partial_x g$, alors $\omega = dF$ où F est définie par (13.554). $\square$

Démonstration alternative du théorème 13.195. Nous posons $u = tx$ et $v = ty$, ainsi que $\mathcal{F}(x, y, t) = f(u, v)$ et $\mathcal{G}(x, y, t) = g(u, v)$. Avec cette notation, nous avons $F(x, y) = \int_0^1 (x \mathcal{F}(x, y, t) + y \mathcal{G}(x, y, t)) dt$, et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = t \frac{\partial f}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= t \frac{\partial g}{\partial u}.\end{aligned}\tag{13.559}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \int_0^1 \left(x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \mathcal{F} + y \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(xt \frac{\partial f}{\partial u} + \mathcal{F} + yt \frac{\partial g}{\partial u} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left[t \left(x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \mathcal{F} \right] dt.\end{aligned}\tag{13.560}$$

où nous avons utilisé le fait que, par hypothèse, $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v}$. Nous calculons par ailleurs que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}.\tag{13.561}$$

Donc, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^1 \left(t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{F} \right) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t \mathcal{F}) dt.\tag{13.562}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = [t \mathcal{F}]_0^1 = \mathcal{F}(x, y, 1) = f(x, y).\tag{13.563}$$

Le même genre de calculs fournit $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$. $\square$

13.21 Théorème d'Abel angulaire

Théorème 13.196 (Abel angulaire[1]).

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence plus grand ou égal à 1 et de somme f . Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Nous posons

$$\Delta_{\theta_0} = \{z = 1 - \rho e^{i\varphi} \text{ tel que } \rho > 0, \varphi \in [\theta_0, \theta_0], |z| < 1\}.\tag{13.564}$$

Nous supposons de plus que $\sum_n a_n$ converge. Alors

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_0}} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \quad (13.565)$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est que l'on peut calculer la limite $z \rightarrow 1$ avec des chemins contenus dans un domaine de la forme de celui dessiné à la figure 13.14.

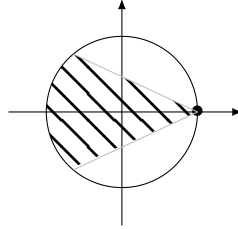


FIGURE 13.14 – La zone dans laquelle peut être le chemin qui va vers $z = 1$.

De façon très classique nous posons

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad (13.566)$$

et $R_n = S - S_n$. En particulier $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Le but du théorème est de montrer que $\sum a_n z^n$ converge vers S lorsque z converge vers 1 à l'intérieur de Δ_{θ_0} . Pour cela nous calculons pour un N donné la différence $\sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N$ en triant les termes par ordre de R_n , en isolant le terme R_0 et le terme R_N :

$$\sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^N a_n (z^n - 1) \quad (13.567a)$$

$$= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \quad (13.567b)$$

$$= R_0(z - 1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1 - z^n + 1) + R_N(z^N - 1) \quad (13.567c)$$

$$= R_0(z - 1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n z^n (z - 1) + R_N(z^N - 1) \quad (13.567d)$$

$$= (z - 1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n + R_N(z^N - 1). \quad (13.567e)$$

Cela est valable pour tout N et $|z| < 1$. Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N = (z - 1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n + R_N(z^N - 1). \quad (13.568)$$

Par hypothèse nous avons $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$. Et de plus le membre de gauche converge parce que chacun des deux termes converge séparément. En passant à la limite nous avons pour tout $|z| < 1$:

$$f(z) - S = (z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n. \quad (13.569)$$

Nous voudrions étudier le comportement de la différence $f(z) - S$ lorsque z tend vers 1. Pour cela nous nous fixons $\epsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $|R_n| < \epsilon$ dès que $n \geq N$. Alors pour tout $|z| < 1$ nous

avons

$$|f(z) - S| \leq |z - 1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \underbrace{|z^n|}_{\leq 1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{|R_n|}_{\leq \epsilon} |z^n| \right) \quad (13.570a)$$

$$\leq |z - 1| \sum_{n=0}^N |R_n| + \epsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \quad (13.570b)$$

où nous avons utilisé la somme de la série géométrique (6.347) et l'égalité $|z^n| = |z|^n$. Avant de nous particulariser à $z \in \Delta_{\theta_0}$ nous devons anticiper un problème au dénominateur en multipliant par le binôme conjugué :

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} = \frac{|z - 1|(1 + |z|)}{1 - |z|^2}. \quad (13.571)$$

C'est maintenant que nous nous particularisons à $z \in \Delta_{\theta_0}$ en posant $z = \rho e^{i\varphi}$ et en remarquant que $|z|^2 = 1 - 2\rho \cos(\varphi) + \rho^2$. Nous avons le calcul suivant :

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} = \frac{\rho(1 + |z|)}{2\rho \cos(\varphi) - \rho^2} \quad (13.572a)$$

$$= \frac{1 + |z|}{2 \cos(\varphi) - \rho} \quad (13.572b)$$

$$\leq \frac{2}{2 \cos(\varphi) - \rho} \quad (13.572c)$$

$$\leq \frac{2}{2 \cos(\varphi) - \cos(\theta_0)} \quad (13.572d)$$

$$\leq \frac{2}{2 \cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \quad (13.572e)$$

$$= \frac{2}{\cos(\theta_0)}. \quad (13.572f)$$

Quelque justifications.

— Vu que nous avons dans l'idée de faire $\rho \rightarrow 0$ nous supposons que $\rho < \cos(\theta_0)$.

— Nous avons $\cos(\varphi) > \cos(\theta_0)$ parce que z est dans Δ_{θ_0} .

Nous avons donc, pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ que

$$|f(z) - S| \leq |z - 1| \sum_{n=0}^N |R_n| + \epsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}. \quad (13.573)$$

Il suffit de prendre ρ assez petit pour que

$$|z - 1| \sum_{n=0}^N |R_n| < \epsilon \quad (13.574)$$

et nous avons

$$|f(z) - S| \leq \epsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right). \quad (13.575)$$

Nous avons donc bien $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_0}} f(z) = S$, comme nous le voulions. $\square$

La réciproque du théorème d'Abel angulaire est que si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ sur $B(0, 1)$ se prolonge par continuité en $z = 1$ alors cette prolongation se fait par $f(1) = \sum_n a_n$. Cela est faux comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 13.197

Nous considérons la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ qui converge¹⁸ vers

$$f(z) = \frac{1}{1 + z} \quad (13.576)$$

18. C'est la série géométrique de raison $-z$.

sur $B(0, 1)$. De plus nous avons

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}. \quad (13.577)$$

Donc la fonction converge bien vers quelque chose lorsque z tend vers 1. La fonction f se prolonge par continuité en 1. Pourtant la série des coefficients $\sum_n (-1)^n$ ne converge pas. $\triangle$

Le théorème suivant donne une espèce d'inverse au théorème d'Abel angulaire. En effet il dit que si la série converge en allant vers 1 le long de l'axe réel, alors ça converge vers la somme des coefficients. Il faut cependant une hypothèse en plus sur les a_n .

Théorème 13.198 (Théorème taubérien faible[1]).

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f . Nous supposons

$$(1) \text{ Il existe } S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in]-1, 1[}} f(x) = S.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et vaut S .

Démonstration. Nous notons $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $M = \sup_{k \geq 1} k|a_k|$, qui est fini par hypothèse. Pour $x \in]0, 1[$ et $n \geq 0$ nous avons

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^n a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k. \quad (13.578)$$

Nous utilisons la série géométrique sous la forme $1 - x^k = (1 - x) \sum_{i=0}^{k-1} x^i$ pour écrire

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^n a_k (1 - x) \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} x^i}_{\leq k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \quad (13.579a)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n k a_k (1 - x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \quad (13.579b)$$

donc en passant à la norme

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x) M n + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k \quad (13.580a)$$

$$\leq (1 - x) M n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{n} |a_k|}_{\leq M/n} x^k \quad (13.580b)$$

$$\leq (1 - x) M n + \frac{M}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \quad (13.580c)$$

$$\leq (1 - x) M n + \frac{M}{n} \frac{1}{1 - x}. \quad (13.580d)$$

Ce que nous cherchons à étudier est le comportement $x \rightarrow 1$ et montrer que $S_n \rightarrow S$, ce qui nous incite à calculer $|S_n - f(1 - \frac{\epsilon}{n})|$ avec $0 < \epsilon < 1$:

$$|S_n - f(1 - \frac{\epsilon}{n})| \leq \epsilon M + \epsilon. \quad (13.581)$$

Nous choisissons N_1 tel que $\frac{M}{n} \leq \epsilon^2$ dès que $n \geq N_1$. En sus nous savons que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(1 - \epsilon) = S. \quad (13.582)$$

Nous choisissons N_2 de telle sorte à avoir

$$\left| f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S \right| < \epsilon, \quad (13.583)$$

et en prenant $n \geq \max(N_1, N_2)$ nous avons

$$|S_n - S| \leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S \right| \leq \epsilon M + 2\epsilon. \quad (13.584)$$

Il suffit de choisir ϵ suffisamment petit (en particulier pour que ϵM soit petit) pour montrer que $|S_n - S|$ est borné par un nombre arbitrairement petit. $\square$

13.21.1 Passage à la limite sous le signe intégral

Un autre résultat très important pour l'étude de l'intégrabilité est le théorème de la **convergence dominée de Lebesgue** :

Théorème 13.199.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable et $\{f_k\}$, une suite de fonctions intégrables sur E qui converge simplement vers une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une fonction g intégrable sur E telle que pour tout k ,

$$|f_k(x)| \leq g(x) \quad (13.585)$$

pour tout $x \in E$. Alors f est intégrable sur E et

$$\int_E f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k. \quad (13.586)$$

13.21.2 Intégrale en dimension un

Proposition 13.200 (Critère de comparaison).

Soit f mesurable sur $]a, \infty[$ et bornée sur tout $]a, b]$, et supposons qu'il existe un $X_0 \geq a$, tel que sur $]X_0, \infty[$,

$$|f(x)| \leq g(x) \quad (13.587)$$

où $g(x)$ est intégrable. Alors $f(x)$ est intégrable sur $]a, \infty[$.

Corollaire 13.201 (Critère d'équivalence).

Soient f et g des fonctions mesurables et positives ou nulles sur $]a, \infty[$, bornées sur tout $]a, b]$, telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad (13.588)$$

existe dans $\bar{\mathbb{R}}$.

- (1) Si $L \neq \infty$ et $\int_a^\infty g(x)$ existe, alors $\int_a^\infty f(x)dx$ existe,
- (2) Si $L \neq 0$ et si $\int_a^\infty f(x)dx$ existe, alors $\int_a^\infty g(x)dx$ existe,

Corollaire 13.202 (Critère des fonctions test).

Soit $f(x)$ une fonction mesurable et positive ou nulle sur $]a, \infty[$ et bornée pour tout $]a, b]$. Nous posons

$$L(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x), \quad (13.589)$$

et nous supposons qu'elle existe.

- (1) Si il existe $\alpha > 1$ tel que $L(\alpha) \neq \infty$, alors $\int_a^\infty f(x)dx$ existe,
- (2) Si il existe $\alpha \leq 1$ et $L(\alpha) \neq 0$, alors $\int_a^\infty f(x)dx$ n'existe pas.

Corollaire 13.203.

Soit $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, positive ou nulle, et bornée sur $[a + \epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$. Si $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)^\alpha f(x) = L$ existe, alors

- (1) Si $\alpha < 1$ et $L \neq \infty$, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe,
- (2) Si $\alpha \geq 1$ et $L \neq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$ n'existe pas.

13.21.3 Intégrales convergentes

Définition 13.204.

Soit f , une fonction mesurable sur $[a, \infty[$, bornée sur tout intervalle $[a, b]$. On dit que l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad (13.590)$$

converge si la limite

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_a^X f \quad (13.591)$$

existe et est finie.

13.21.4 La méthode de Rothstein-Trager

Mes sources pour parler d'intégration de fractions rationnelles : [190].

Théorème 13.205 (Rothstein-Trager[191]).

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ premiers entre eux avec $\text{pgcd}(P, Q) = 1$ et $\deg(P) < \deg(Q)$. Nous supposons que Q est unitaire et sans facteurs carrés. Supposons que nous puissions écrire, dans une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{Q}$ la primitive de P/Q de la façon suivante :

$$\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n c_i \ln(P_i) \quad (13.592)$$

où les c_i sont des constantes non nulles et deux à deux distinctes et où les P_i sont des polynômes unitaires non constants sans facteurs carrés et premiers deux à deux entre eux dans $\mathbb{K}[X]$.

Alors les c_i sont les racines distinctes du polynôme

$$R(Y) = \text{res}_X(P - YQ', Q) \in \mathbb{K}[Y] \quad (13.593)$$

et

$$P_i = \text{pgcd}(P - c_i Q', Q). \quad (13.594)$$

Démonstration. Nous posons

$$U_i = \prod_{j \neq i} P_j. \quad (13.595)$$

Question de division Ensuite nous dérivons formellement l'équation (13.592) et nous multiplions les deux côtés du résultat par $\prod_{j=1}^n P_j$:

$$P \prod_{j=1}^n P_j = Q \sum_{i=1}^n c_i \frac{P'_i}{P_i} \prod_{j=1}^n P_j = Q \sum_{i=1}^n c_i P'_i U_i. \quad (13.596)$$

Une première chose que nous en tirons est que Q divise le produit $P \prod_{j=1}^n P_j$; mais P et Q étant premiers entre eux,

$$Q \mid \prod_{j=1}^n P_j \quad (13.597)$$

par le théorème de Gauss 4.17.

Une seconde chose que nous tirons de (13.596) est que P_j divise $Q \sum_{i=1}^n c_i P'_i U_i$. De cette somme, à cause du U_i qui est divisé par P_j pour tout i sauf $i = j$, le polynôme P_j divise tous les termes sauf peut-être un. Donc il les divise tous et en particulier

$$P_j \mid Q c_j P'_j U_j \quad (13.598)$$

En nous souvenant que les P_k sont premiers entre eux, P_j ne divise pas U_j . De plus P_j étant sans facteurs carrés, les polynômes P_j et P'_j sont premiers entre eux. Il ne reste que Q . Nous en déduisons que

$$P_j \mid Q \quad (13.599)$$

pour tout $1 \leq j \leq n$. Et vu que les P_i sont premiers entre eux, le fait que chacun divise Q implique que leur produit divise Q , c'est à dire

$$\prod_{j=1}^n P_j \mid Q. \quad (13.600)$$

Or nous avons déjà prouvé la division contraire. Du fait que les deux polynômes sont unitaires nous en déduisons qu'ils sont en réalité égaux :

$$Q = \prod_{j=1}^n P_j. \quad (13.601)$$

Nous pouvons simplifier les deux membres de (13.596) par cela :

$$P = \sum_{i=1}^n c_i P'_i U_i. \quad (13.602)$$

Encore un peu de division En dérivant (13.601) nous trouvons

$$Q' = \sum_{j=1}^n P'_j U_j, \quad (13.603)$$

et en écrivant P sous sa forme (13.602),

$$P - c_i Q' = \sum_{j=1}^n c_j P'_j U_j - \sum_{j=1}^n c_i P'_j U_j = \sum_{j=1}^n (c_j - c_i) P'_j U_j. \quad (13.604)$$

Le terme $i = j$ de la somme est nul ; en ce qui concerne les autres termes, ils sont divisés par P_i parce que $P_i \mid U_j$. Donc P_i divise tous les termes de la somme et nous avons

$$P_i \mid P - c_i Q'. \quad (13.605)$$

Un pgcd pour continuer Nous montrons à présent que $P_i = \text{pgcd}(P - c_i Q', Q)$. Pour cela nous utilisons la multiplicativité du PGCD lorsque les facteurs sont premiers entre eux :

$$\text{pgcd}(P - c_i Q', Q) = \text{pgcd}(P - c_i Q', \prod_{j=1}^n P_j) = \prod_{j=1}^n \text{pgcd}(P - c_i Q', P_j). \quad (13.606)$$

Nous remplaçons $P - c_i Q'$ par son expression (13.604) et nous écrivons un des facteurs du produit :

$$\text{pgcd}(P - c_i Q', P_j) = \text{pgcd}\left(\sum_{k=1}^n (c_k - c_i) P'_k U_k, P_j\right) \quad (13.607)$$

Le polynôme P_j divise tous les U_k sauf celui avec $k = j$. Donc le lemme 3.108 nous permet de dire

$$\text{pgcd}(P - c_i Q', P_j) = \text{pgcd}((c_j - c_i) P'_j U_j, P_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ P_j & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (13.608)$$

La seconde ligne provient du fait que nous avons déjà montré que $P_j \mid P - c_j Q'$. En fin de compte,

$$\text{pgcd}(P - c_i Q', Q) = P_i. \quad (13.609)$$

Une histoire de résultant Les nombres c_i sont tels que les polynômes $P - c_i Q'$ et Q ne sont pas premiers entre eux. Vu que les P_i sont non nuls, la proposition 6.56 nous dit que le résultant

$$\text{res}_X(P - c_i Q', Q) = 0. \quad (13.610)$$

Donc les c_i sont des racines du polynôme (en Y)

$$R(Y) = \text{res}_X(P - Y Q', Q). \quad (13.611)$$

Nous n'avons pas prouvé qu'ils étaient *toutes* les racines¹⁹.

Toutes les racines Nous allons maintenant montrer que les c_i étaient toutes les racines imaginables du polynôme (13.611) dans toutes les extensions de $\mathbb{Q}$. Soit donc c une racine de R dans une extension $\hat{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ qui ne soit pas parmi les c_i de la formule (13.592). Étant donné que c est racine du résultat, les polynômes $P - c Q'$ et Q ont un PGCD non trivial, c'est à dire non constant. Donc

$$\text{pgcd}(P - c Q', Q) = s \in \hat{\mathbb{K}}[X] \quad (13.612)$$

est un polynôme non constant. Si T un facteur irréductible de S , alors T divise $P - c Q'$ et Q , mais $Q = \prod_{i=1}^n P_i$ avec les P_i premiers entre eux. Donc T ne peut diviser que l'un (et exactement un) d'entre eux²⁰. Soit P_{i_0} celui qui est divisé par T . La relation (13.604) dans ce contexte donne :

$$P - c Q' = \sum_{j=1}^n (c_j - c) P'_j U_j \quad (13.613)$$

Le polynôme T divise tous les U_j avec $j \neq i_0$, mais comme en plus il divise $P - c Q'$, il divise aussi le dernier terme de la somme :

$$T \mid (c_{i_0} - c) P'_{i_0} U_{i_0}. \quad (13.614)$$

Le polynôme T ne divisant pas U_{i_0} et $(c_{i_0} - c)$ étant non nul, nous concluons que T divise P'_{i_0} . Mais cela n'est pas possible parce que nous avons supposé que P_{i_0} était sans facteur carré, ce qui voulait entre autres dire que P_{i_0} et P'_{i_0} n'ont pas de facteurs communs.

□

Ce théorème suggère la méthode suivante pour trouver la primitive de la fraction rationnelle P/Q (si elle vérifie les hypothèses)

- (1) Écrire le résultant $R(y) = \text{res}_X(P - y Q', Q)$ et en trouver les racines $\{c_i\}_{i=1, \dots, n}$.
- (2) Calculer les $P_p = \text{pgcd}(P - c_i Q', Q)$.
- (3) Écrire la réponse :

$$\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n c_i \ln(P_i). \quad (13.615)$$

Notons que le polynôme $R(Y)$ est de degré $\deg(Q)$ (pour le voir, faire un peu de comptage de lignes et colonnes dans la matrice de Sylvester), donc il n'est a priori pas pire à factoriser que Q lui-même²¹. Mais il se peut que nous ayons de la chance et que R soit plus facile que Q .

À part qu'on a peut-être plus de chance avec R qu'avec Q , l'avantage de la méthode est qu'elle permet d'éviter de passer par des extensions de $\mathbb{Q}$ non nécessaires²².

19. De plus, nous n'avons pas de garanties que ces racines soient dans $\mathbb{Q}$, et en fait il y a des cas dans lesquels les c_i n'y sont pas.

20. On ne peut pas diviser deux trucs qui sont premiers entre eux ; c'est une question de cohérence, madame !

21. C'est de la factorisation de Q qu'on a besoin pour utiliser la méthode de décomposition en fractions simples.

22. J'imagine que pour un ordinateur, c'est plus facile d'éviter les extensions.

Exemple 13.206([191])

Prenons la fraction rationnelle $\frac{x}{x^2-3}$. L'intégration via les fraction simples est :

$$\int \frac{x}{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln(x-\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \ln(x+\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \ln(x^2-3). \quad (13.616)$$

Nous voyons que dans la réponse, il n'y a pas de racines. Passer par l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est par conséquent peut-être un effort inutile. Voyons comment les choses se mettent avec la méthode Rothstein-Trager.

D'abord

$$R(Y) = \text{res}_X(X - 2YX, X^2 - 3) \quad (13.617a)$$

$$= \text{res}_X((1 - 2Y)X, X^2 - 3) \quad (13.617b)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 - 2Y & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2Y & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (13.617c)$$

$$= (1 - 2Y)(-3(1 - 2Y)) \quad (13.617d)$$

$$= -3(1 - 2Y)^2, \quad (13.617e)$$

dont les solutions sont faciles : il n'y a que la racine double $y = \frac{1}{2}$. La somme (13.592) sera donc réduite à un seul terme avec $c_1 = \frac{1}{2}$. Nous calculons P_1 :

$$P_1 = \text{pgcd}(X - \frac{1}{2}2X, X^2 - 3) = \text{pgcd}(0, X^2 - 3) = X^2 - 3, \quad (13.618)$$

et par conséquent

$$\int \frac{X}{X^2 - 3} = \frac{1}{2} \ln(X^2 - 3). \quad (13.619)$$

À aucun moment nous ne sommes sortis de $\mathbb{Q}$. △

Comme vu sur cet exemple, l'intérêt du théorème de Rothstein-Trager est de permettre, lorsqu'on a de la chance, d'en profiter, et non de nous en rendre compte à la fin en remarquant bêtement que la réponse pouvait s'écrire dans $\mathbb{Q}[X]$.

Remarque 13.207.

Afin d'utiliser cette méthode, il faut s'assurer que Q soit sans facteurs carrés. Si nous devons intégrer un $\frac{P}{Q}$ quelconque, nous devons commencer par écrire

$$Q = Q_1 Q_2^2 Q_3^3 \dots Q_r^r, \quad (13.620)$$

et ensuite il y a moyen de ramener l'intégrale de P/Q à des intégrales de $\frac{P}{Q_1 \dots Q_r}$. Cela ne demande pas de factoriser complètement Q , mais seulement de trouver ses facteurs irréductibles Q_i dans $\mathbb{Q}[X]$.

Dans l'exemple donné plus haut, $Q = X^2 - 3$ a des facteurs irréductibles autres que Q lui-même dans $\mathbb{R}[X]$, mais nous n'en avons pas besoin.

Voici une exemple où nous évitons de passer par les complexes.

Exemple 13.208([192])

D'abord le calcul en décomposant complètement en fractions simples :

$$\int \frac{1}{x^3 + x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1/2}{x-i} - \frac{1/2}{x+i} \right) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x-i) - \frac{1}{2} \ln(x+i) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1). \quad (13.621)$$

Ici encore nous passons par l'extension $\mathbb{Q}[i]$ alors que la réponse ne contient que des polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$. En ce qui concerne la méthode de Rothstein-Trager, nous commençons par calculer le résultant (qui est tout de même un peu de calcul) :

$$P(y) = \text{res}_X (-3yX^2 - y + 1, X^3 - X) \quad (13.622a)$$

$$= \det \begin{pmatrix} -3y & 0 & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & -3y & 0 & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & -3y & 0 & 1-y \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.622b)$$

$$= -(y-1)^2(2y+1)^2 \quad (13.622c)$$

```
-----
| Sage Version 5.7, Release Date: 2013-02-19                               |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.             |
| Type "help()" for help.                                                  |
-----

sage: y=var('y')
sage: R=matrix(5,5,[-3*y,0,1-y,0,0,0,-3*y,0,1-y,0,0,0,-3*y,0,1-y,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0])
sage: R.determinant().factor()
-(y - 1)*(2*y + 1)^2
```

Les solutions sont $c_1 = 1$ et $c_2 = -\frac{1}{2}$. Nous pouvons alors calculer les P_i :

$$P_1 = \text{pgcd}(-3X^2, X^3 + X) = X \quad (13.623)$$

et

$$P_2 = \text{pgcd}\left(\frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}, X^3 + X\right) = X^2 + 1, \quad (13.624)$$

et finalement

$$\int \frac{1}{X^3 + X} = \ln(X) - \frac{1}{2} \ln(X^2 + 1). \quad (13.625)$$

△

Notons qu'il n'y a pas de miracles : lorsque la réponse contient des racines, nous ne pouvons pas couper à passer par des extensions et factoriser un peu à la dure.

Exemple 13.209([192])

Nous voulons calculer

$$\int \frac{1}{X^2 + 1}. \quad (13.626)$$

Nous posons donc $P = 1$ et $Q = X^2 + 1$. Le résultant à calculer est

$$P(y) = \text{res}_X (-2yX + 1, X^2 + 1) = \det \begin{pmatrix} -2y & 1 & 0 \\ 0 & -2y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4y^2 + 1. \quad (13.627a)$$

Les racines de cela sont complexes et il n'y a donc pas d'échappatoires : $c_1 = \frac{i}{2}$, $c_2 = -\frac{i}{2}$. Ensuite, étant donné que $X^2 + 1 = (X + i)(X - i) = i(-iX + 1)(X - 1)$ nous avons

$$P_1 = \text{pgcd}(-iX + 1, X^2 + 1) = X + i. \quad (13.628)$$

Notons que de façon naturelle, nous aurions écrit $P_1 = 1 - iX$, mais par convention nous considérons le PGCD unitaire. Cela ne change rien à la réponse parce que changer P_i en kP_i ne fait que rajouter une constante $\ln(k)$ à la primitive trouvée.

De la même façon,

$$P_2 = \text{pgcd}(1 + iX, X^2 + 1) = X - i. \quad (13.629)$$

Au final nous écrivons

$$\int \frac{1}{X^2 + 1} = \frac{i}{2} \ln(X + i) - \frac{i}{2} \ln(X - i). \quad (13.630)$$

△

Remarque 13.210.

Tout cela est si nous voulons absolument écrire la primitive avec des logarithmes de polynômes. Pour celui de l'exemple 13.209, nous avons trouvé

$$\int \frac{1}{X^2 + 1} = \frac{i}{2} \ln(X + i) - \frac{i}{2} \ln(X - i). \quad (13.631)$$

Mais

```
sage: f(x)=1/(x**2+1)
sage: f.integrate(x)
x |--> arctan(x)
```

Si nous acceptons de passer aux fonctions trigonométriques (inverses), la primitive prend un tour très différent et bien réel. Ces deux visions de l'univers sont bien entendu²³ compatibles. En effet, afin de tomber juste, nous allons prendre la primitive

$$f(x) = \frac{i}{2} \ln(ix - 1) - \frac{i}{2} \ln(ix + 1) \quad (13.632)$$

au lieu de (13.631). Il s'agit seulement de multiplier l'intérieur des logarithmes, ce qui ne donne qu'une constante de différence. Ensuite nous passons à la forme trigonométrique des nombres complexes : $ix - 1 = \sqrt{x^2 + 1}e^{i \arctan(-x)}$ et $ix + 1 = \sqrt{x^2 + 1}e^{i \arctan(x)}$. Avec un peu de calcul,

$$f(x) = -\frac{1}{2} \left(\arctan(-x) - \arctan(x) \right) = \arctan(x). \quad (13.633)$$

13.22 Ellipsoïde de John-Loewer

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de q est diagonale. Dans cette base, la forme q est donnée par la proposition 6.365 :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \quad (13.634)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de q .

Plus généralement nous notons $\text{mat}_{\mathcal{B}}(q)$ la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 13.211.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et l'application²⁴

$$\begin{aligned} D: Q(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(q)). \end{aligned} \quad (13.635)$$

Alors :

(1) La valeur de D ne dépend pas du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$.

23. Si on croit que la mathématique est cohérente.

24. L'ensemble $Q(E)$ est l'ensemble des formes quadratiques sur E .

(2) La fonction D est donnée par la formule $D(q) = \prod_i \lambda_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de q .

(3) La fonction D est continue.

Démonstration. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation de q :

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \quad (13.636)$$

où les x_i sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$. Par définition, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de q .

Nous considérons aussi $\mathcal{B}_1$, une autre base orthonormées de $\mathbb{R}^n$. Nous notons $S = \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(q)$; étant symétrique, cette matrice se diagonalise par une matrice orthogonale : il existe $P \in O(n, \mathbb{R})$ telle que

$$S = P \text{mat}_{\mathcal{B}}(q) P^t; \quad (13.637)$$

donc $\det(S) = \det(P P^t) \det(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 \dots \lambda_n$. Ceci prouve en même temps que D ne dépend pas du choix de la base et que sa valeur est le produit des valeurs propres.

Passons à la continuité. L'application déterminant $\det: S_n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue car polynôme en les composantes. D'autre par l'application $\text{mat}_{\mathcal{B}}: Q(\mathbb{R}^n) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue par la proposition 6.364. L'application D étant la composée de deux applications continues, elle est continue. $\square$

Proposition 13.212 (Ellipsoïde de John-Loewner[1]).

Soit K compact dans $\mathbb{R}^n$ et d'intérieur non vide. Il existe une unique ellipsoïde²⁵ (pleine) de volume minimal contenant K .

Démonstration. Nous subdivisons la preuve en plusieurs parties.

À propos de volume d'un ellipsoïde Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde. La proposition 6.377 et son corollaire 6.378 nous indiquent que

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leq 1\} \quad (13.638)$$

pour une certaine forme quadratique strictement définie positive q . De plus il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \quad (13.639)$$

où $x_i = \langle e_i, x \rangle$ et les a_i sont tous strictement positifs. Nous nommons $\mathcal{E}_q$ l'ellipsoïde associée à la forme quadratique q et V_q son volume que nous allons maintenant calculer²⁶ :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < 1} dx \quad (13.640)$$

Cette intégrale est écrite de façon plus simple en utilisant le C^1 -difféomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{E}_q &\rightarrow B(0, 1) \\ x &\mapsto (x_1 \sqrt{a_1}, \dots, x_n \sqrt{a_n}). \end{aligned} \quad (13.641)$$

Le fait que φ prenne bien ses valeurs dans $B(0, 1)$ est un simple calcul : si $x \in \mathcal{E}_q$, alors

$$\sum_i \varphi(x)_i^2 = \sum_i a_i x_i^2 < 1. \quad (13.642)$$

²⁵. Définition 6.375.

²⁶. Le volume ne change pas si nous écrivons l'inégalité stricte au lieu de large dans le domaine d'intégration ; nous le faisons pour avoir un domaine ouvert.

Cela nous permet d'utiliser le théorème de changement de variables 13.97 :

$$V_q = \int_{\sum_i a_i x_i^2 < 1} dx = \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \int_{B(0,1)} dx. \quad (13.643)$$

La dernière intégrale est le volume de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$; elle n'a pas d'importance ici et nous la notons V_0 . La proposition 13.211 nous permet d'écrire V_q sous la forme

$$V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}. \quad (13.644)$$

Existence de l'ellipsoïde Nous voulons trouver un ellipsoïde contenant K de volume minimal, c'est à dire une forme quadratique $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $D(q)$ soit maximal
- $q(x) \leq 1$ pour tout $x \in K$.

Nous considérons l'ensemble des candidats semi-définis positifs.

$$A = \{q \in Q^+ \text{ tel que } q(x) \leq 1 \forall x \in K\}. \quad (13.645)$$

Nous allons montrer que A est convexe, compact et non vide dans $Q(\mathbb{R}^n)$; il aura ainsi un maximum de la fonction continue D définie sur $Q(\mathbb{R}^n)$. Nous montrerons ensuite que le maximum est dans Q^{++} . L'unicité sera prouvée à part.

Non vide L'ensemble K est compact et donc borné par $M > 0$. La forme quadratique $q: x \mapsto \|x\|^2/M^2$ est dans A parce que si $x \in K$ alors

$$q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2} \leq 1. \quad (13.646)$$

Convexe Soient $q, q' \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons encore $\lambda q + (1 - \lambda)q' \in Q^+$ parce que

$$\lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \geq 0 \quad (13.647)$$

dès que $q(x) \geq 0$ et $q'(x) \geq 0$. D'autre part si $x \in K$ nous avons

$$\lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1. \quad (13.648)$$

Donc $\lambda q + (1 - \lambda)q' \in A$.

Fermé Pour rappel, la topologie de $Q(\mathbb{R}^n)$ est celle de la norme (6.872). Nous considérons une suite (q_n) dans A convergeant vers $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ et nous allons prouver que $q \in A$, de sorte que la caractérisation séquentielle de la fermeture (proposition 5.123) conclue que A est fermé. En nommant e_x le vecteur unitaire dans la direction x nous avons

$$|q(x)| = \|\|x\|^2 q(e_x)\| \leq \|x\|^2 N(q), \quad (13.649)$$

de sorte que notre histoire de suite convergente donne pour tout x :

$$|q_n(x) - q(x)| \leq \|x\|^2 N(q_n - q) \rightarrow 0. \quad (13.650)$$

Vu que $q_n(x) \geq 0$ pour tout n , nous devons aussi avoir $q(x) \geq 0$ et donc $q \in Q^+$ (semi-définie positive). De la même manière si $x \in K$ alors $q_n(x) \leq 1$ pour tout n et donc $q(x) \leq 1$. Par conséquent $q \in A$ et A est fermé.

Borné La partie K de $\mathbb{R}^n$ est borné et d'intérieur non vide, donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(a, r)} \subset K$. Si par ailleurs $q \in A$ et $x \in \overline{B(0, r)}$ nous avons $a + x \in K$ et donc $q(a + x) \leq 1$. De plus $q(-a) = q(a) \leq 1$, donc

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leq \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2 \quad (13.651)$$

par l'inégalité de Minkowski 6.373. Cela prouve que si $x \in \overline{B(0, r)}$ alors $q(x) \leq 4$. Si par contre $x \in \overline{B(0, 1)}$ alors $rx \in \overline{B(0, r)}$ et

$$0 \leq q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}, \quad (13.652)$$

ce qui prouve que $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$ et que A est borné.

L'ensemble A est compact parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 5.107. L'application continue $D: Q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ de la proposition 13.211 admet donc un maximum sur le compact A . Soit q_0 ce maximum.

Nous montrons que $q_0 \in Q^{++}(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que l'application $f: x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans A et que $D(f) > 0$. Vu que q_0 est maximale pour D , nous avons

$$D(q_0) \geq D(f) > 0. \quad (13.653)$$

Donc $q_0 \in Q^{++}$.

Unicité Si il existe une autre ellipsoïde de même volume que celle associée à la forme quadratique q_0 , nous avons une forme quadratique $q \in Q^{++}$ telle que $q(x) \leq 1$ pour tout $x \in K$. C'est à dire que nous avons $q_0, q \in A$ tels que $D(q_0) = D(q)$.

Nous considérons la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ et nous posons $S = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(q)$, $S_0 = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(q_0)$. Étant donné que A est convexe, $(q_0 + q)/2 \in A$ et nous allons prouver que cet élément de A contredit la maximalité de q_0 . En effet

$$D\left(\frac{q + q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S + S_0}{2}\right) \quad (13.654)$$

Nous allons utiliser le lemme 11.225 qui dit que le logarithme est log-concave sous la forme de l'équation (11.530) avec $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$D\left(\frac{q + q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S + S_0}{2}\right) > \sqrt{\det(S)}\sqrt{\det(S_0)} = \det(S_0) = D(q_0). \quad (13.655)$$

Nous avons utilisé le fait que $D(q_0) = D(q)$ qui signifie que $\det(S_0) = \det(S)$. L'inéquation (13.655) contredit la maximalité de $D(q_0)$ et donne donc l'unicité. $\square$

13.23 Rappel sur les intégrales usuelles

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f: [a, b] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \quad (13.656)$$

L'intégrale de f sur le segment $[a, b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$ est le nombre égal à l'aire de la surface située entre le graphe de f et l'axe des x , comme indiqué à la figure 13.15.

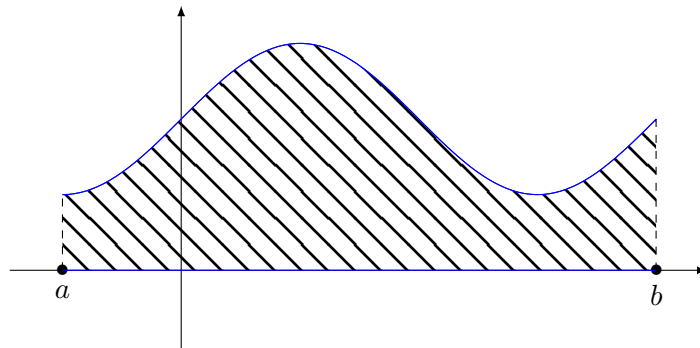


FIGURE 13.15 – L'intégrale de f entre a et b représente la surface sous la fonction.

Définition 13.213.

Si f est une fonction de une variable à valeurs réelles, une **primitive** de f est une fonction F telle que $F' = f$.

Toute fonction continue admet une primitive.

Théorème 13.214 (Théorème fondamental du calcul intégral).

Si f est une fonction positive et continue, et si F est une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (13.657)$$

Remarque 13.215.

Si f est une fonction continue par morceaux, l'intégrale de f se calcule comme la somme des intégrales de ses morceaux. Plus précisément si nous avons $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et si f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout i , alors nous posons

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx. \quad (13.658)$$

Sur chacun des morceaux, l'intégrale se calcule normalement en passant par une primitive.

13.24 Intégrales le long de chemins

13.24.1 Circulation d'un champ de vecteur

Définition 13.216.

Soit $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs et un chemin $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. On appelle **circulation** de F le long du chemin σ le scalaire

$$\int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt. \quad (13.659)$$

Il existe de nombreuses notations pour cela ; entre autres :

$$\int_{\sigma} F = \int_{\sigma} F \cdot ds. \quad (13.660)$$

En physique, la circulation de la force le long d'un chemin est le travail de la force.

Exemple 13.217

À la surface de la Terre, le champ de gravitation est donné par

$$G(x, y, z) = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13.661)$$

Si nous considérons un mobile qui monte à vitesse constante jusqu'à la hauteur h , c'est à dire le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad (13.662)$$

avec $t \in [0, h]$. Le travail de la gravitation est alors donné par

$$W = \int_0^h G(\sigma(t)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mg \int_0^h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mgh. \quad (13.663)$$

Cela est bien le résultat usuel de l'énergie potentielle. Nous allons voir bientôt que nous nommons la fonction mgh énergie *potentielle* précisément parce que la force dérive de ce potentiel. $\triangle$

Exemple 13.218

Soit le chemin

$$\begin{aligned}\sigma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{13.664}$$

et le champ de vecteurs

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\tag{13.665}$$

La circulation de ce champ de vecteur le long de l'hélice σ est

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (F \circ \sigma)(t) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2.\end{aligned}\tag{13.666}$$

△

Proposition 13.219.

La circulation d'un champ de vecteurs le long d'un chemin ne dépend pas de la paramétrisation. En d'autres termes, si σ_1 et σ_2 sont deux chemins équivalents, alors

$$\int_{\sigma_1} F = \int_{\sigma_2} F.\tag{13.667}$$

Démonstration. Soient deux chemins $\sigma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\sigma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ équivalents, c'est à dire tels que

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(\varphi(t))\tag{13.668}$$

où $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ strictement croissante. En utilisant le fait que $\sigma_1(t) = \varphi'(t)\sigma_2'(\varphi(t))$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1} F \cdot ds &= \int_a^b F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\sigma_2(\varphi(t))) \cdot \sigma_2'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F(\sigma_2(s)) \cdot \sigma_2'(s) ds \\ &= \int_c^d F(\sigma_2(s)) \cdot \sigma_2'(s) ds \\ &= \int_{\sigma_2} F \cdot ds.\end{aligned}\tag{13.669}$$

où nous avons effectué le changement de variables $s = \varphi(t)$, $ds = \varphi'(t)dt$.

□

Remarque 13.220.

Si σ_2 est le chemin opposé de σ , alors

$$\int_{\sigma_2} F = - \int_{\sigma_1} F. \quad (13.670)$$

13.25 Circulation d'un champ conservatif

Si nous avons une fonction scalaire $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, nous pouvons construire un champ de vecteur en prenant le gradient :

$$F(x) = \nabla V(x). \quad (13.671)$$

On dit que le champ de vecteur F **dérive** de V , et on dit que V est le **potentiel** de F . Nous posons la définition suivante :

Définition 13.221.

Un champ de vecteurs $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ **conservatif** si il existe une fonction $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = \nabla V(x). \quad (13.672)$$

Nous disons aussi parfois que le champ V dérive d'un potentiel ou bien qu'il s'agit d'un champ de gradient.

Les champs de vecteurs conservatifs sont particulièrement importants parce que presque toutes les forces connues en physiques dérivent d'un potentiel. Nous verrons que la terminologie «conservatif» provient du fait que les forces de ce type conservent l'énergie associée.

Proposition 13.222.

Considérons une fonction $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (que nous appellerons potentiel) et le champ de vecteur qui en dérive :

$$F = \nabla V. \quad (13.673)$$

Alors

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = V(\sigma(b)) - V(\sigma(a)). \quad (13.674)$$

Autrement dit, le travail nécessaires pour déplacer un objet d'un point à un autre dans un champ de force conservatif vaut la différence de potentiel entre le point de départ et le point d'arrivée.

Démonstration. Par définition,

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt. \quad (13.675)$$

Nous pouvons transformer l'intégrante de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= \nabla V(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(\sigma(t)) \sigma'_x(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\sigma(t)) \sigma'_y(t) + \frac{\partial V}{\partial z}(\sigma(t)) \sigma'_z(t) \\ &= \frac{d}{dt} [V(\sigma(t))] \end{aligned} \quad (13.676)$$

où nous avons posé

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_x(t) \\ \sigma_y(t) \\ \sigma_z(t) \end{pmatrix} \quad (13.677)$$

et utilisé à l'envers la formule de dérivation de fonction composée pour

$$\frac{d}{dt} [V(\sigma(t))] = ((V \circ \sigma)(t))'. \quad (13.678)$$

En remettant ces expressions dans l'intégrale (13.675),

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b \frac{d}{dt} [V(\sigma(t))] dt = V(\sigma(b)) - V(\sigma(a)). \quad (13.679)$$

□

Exemple 13.223

Nous savons que le champ de gravitation dérive d'un potentiel. À la surface de la Terre, le potentiel de gravitation vu par une masse m est donné par la fonction $V(x, y, z) = mgz$. Si nous voulons soulever cette masse d'une hauteur h , cela demandera toujours une énergie mgh , quel que soit le chemin suivi : en ligne droite vertical, en diagonal, en hélice, ... $\triangle$

Exemple 13.224

À plus grande échelle, le champ de gravitation est encore un champ qui dérive d'un potentiel. En coordonnées sphériques,

$$V(\rho, \theta, \varphi) = k \frac{m}{\rho} \quad (13.680)$$

Lorsqu'un satellite a une orbite de rayon R autour la Terre, il reste sur la sphère $\rho = R$. Donc il reste sur une surface sur laquelle V est constante. Il n'y a donc pas de travail de la force de gravitation ! C'est pour cela qu'un satellite peut tourner pendant des siècles sans apport énergétique. $\triangle$

Exemple 13.225

Soit le champ de vecteurs

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (13.681)$$

et le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^4/4 \\ \sin^3(t\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \quad (13.682)$$

Nous voulons calculer la circulation de F le long du chemin σ entre $t = 0$ et $t = 1$.

La première chose à voir est que $F = \nabla V$ avec $V(x, y) = xy$. Donc la circulation sera donnée par

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = V(\sigma(1)) - V(\sigma(0)) = V\left(\frac{1}{4}, 1\right) - V(0, 0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}. \quad (13.683)$$

Nous n'avons pas réellement calculé l'intégrale. $\triangle$

13.26 Intégration de fonction à deux variables

13.26.1 Intégration sur un domaine rectangulaire

Soit une fonction positive

$$\begin{aligned} f: [a, b] \times [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto f(x, y). \end{aligned} \quad (13.684)$$

L'intégrale de f sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est le volume sous le graphe de la fonction. C'est à dire le volume de l'ensemble

$$\{(x, y, z) \text{ tel que } (x, y) \in [a, b] \times [c, d], z \leq f(x, y)\}. \quad (13.685)$$

Théorème 13.226 (Théorème de Fubini).

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Alors

$$\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (13.686)$$

En pratique, nous utilisons le théorème de Fubini pour calculer les intégrales sur des rectangles.

Exemple 13.227

Nous voudrions intégrer la fonction $f(x, y) = 4 + x^2 + y^2$ sur le rectangle de la figure 13.16.

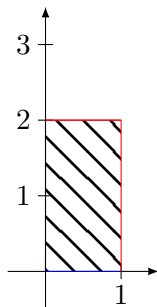


FIGURE 13.16 – Intégration sur un rectangle

L'ensemble sur lequel nous intégrons est donné par le produit cartésien d'intervalles $E = [0, 1] \times [0, 2]$. Le théorème de Fubini montre que nous pouvons intégrer séparément sur l'intervalle horizontal et vertical :

$$\int_{E=[0,1] \times [0,2]} f = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,2]} (4 - x^2 - y^2) dy \right) dx. \quad (13.687)$$

Ces intégrales sont maintenant des intégrales usuelles qui s'effectuent en calculant des primitives :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 (4 - x^2 - y^2) dy dx &= \int_0^1 \left[4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(8 - 2x^2 - \frac{8}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{16x}{3} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{14}{3}. \end{aligned} \quad (13.688)$$

Avec Sage, on peut faire comme ceci :

```
-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11 |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
|-----|
sage: f(x,y)=4-x**2-y**2
sage: f.integrate(y,0,2).integrate(x,0,1)
(x, y) |--> 14/3
```

△

13.26.2 Intégration sur un domaine non rectangulaire

Nous voulons maintenant intégrer la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le triangle de la figure 13.17.

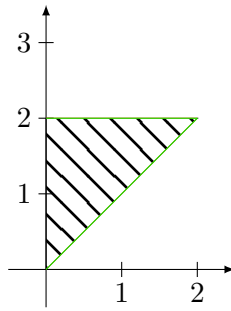


FIGURE 13.17 – Intégration sur un triangle

Étant donné que y varie de 0 à 2 et que *pour chaque* y , la variable x varie de 0 à y , nous écrivons l'intégrale sur le triangle sous la forme :

$$\int_{\text{triangle}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right) dy. \quad (13.689)$$

Il existe principalement deux types de domaines non rectangulaires : les «horizontaux» et les «verticaux», voir figure 13.18.

Les surfaces horizontales sont de la forme

$$D = \{(x, y) \text{ tel que } x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad (13.690)$$

où φ_1 et φ_2 sont les deux fonctions qui bornent le domaine. Le domaine D est la région comprise entre les graphes de φ_1 et φ_2 . Pour un tel domaine nous avons

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (13.691)$$

Les surfaces verticales sont de la forme

$$D = \{(x, y) \text{ tel que } y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \quad (13.692)$$

où φ_1 et φ_2 sont les deux fonctions qui bornent le domaine. Le domaine D est la région comprise entre les graphes de φ_1 et φ_2 . Dans ces cas nous avons

$$\iint_D f = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (13.693)$$

Proposition 13.228.

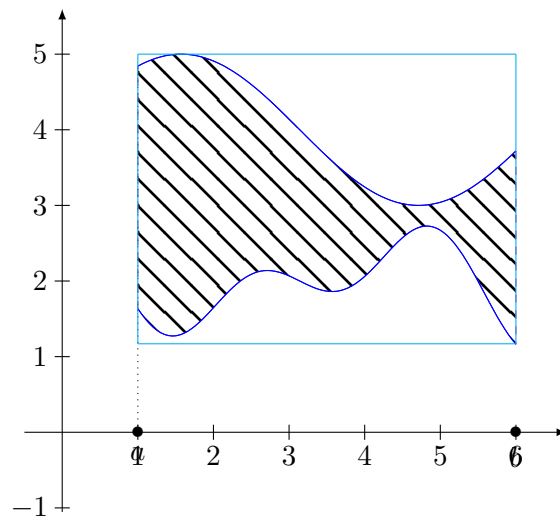
L'aire du domaine D vaut l'intégrable de la fonction $f(x, y) = 1$ sur D :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy. \quad (13.694)$$

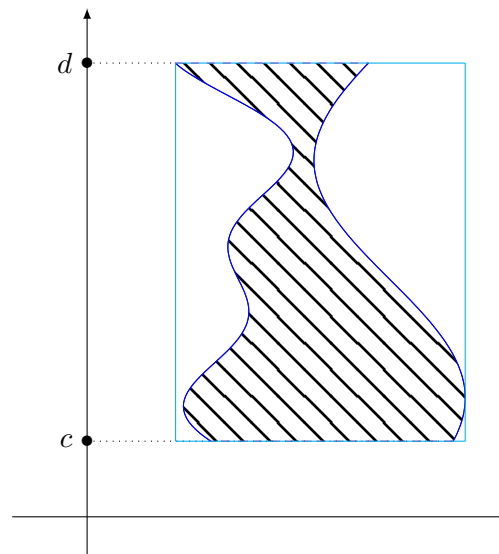
Démonstration. Supposons que le domaine soit du type «horizontal». En utilisant le théorème de Fubini avec $f(x, y) = 1$ nous avons

$$\iint_D dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right] dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx. \quad (13.695)$$

Cela représente l'aire sous φ_2 moins l'aire sous φ_1 , et par conséquent l'aire contenue entre les deux. $\square$



(a) Un domaine horizontal.



(b) Un domaine vertical.

FIGURE 13.18 – Deux types de surfaces. Nous avons tracé un rectangle qui contient chacune des deux surfaces. L'intégrale sur un domaine sera l'intégrale sur le rectangle de la fonction qui vaut zéro en dehors du domaine.

Exemple 13.229

Cherchons la surface du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dessinée à la figure 13.19.

Le domaine est donné par $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ et $x \in [-r, r]$ où $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ et $\varphi_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. L'aire est donc donnée par

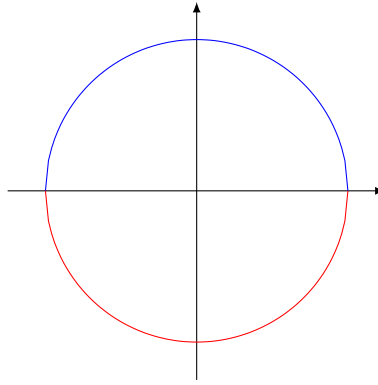
$$A = \int_{-r}^r [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \quad (13.696)$$

Nous effectuons le premier changement de variables $x = ru$, donc $dx = r du$. En ce qui concerne les bornes, si $x = 0$, alors $u = 0$ et si $x = r$, alors $u = 1$. L'intégrale à calculer devient

$$A = 4 \int_0^1 \sqrt{r^2 - r^2 u^2} r du = 4r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du. \quad (13.697)$$

Cette dernière intégrale se calcule en posant

$$\begin{aligned} u &= \sin(t) & du &= \cos(t) dt \\ u &= 0 & t &= 0 \\ u &= 1 & t &= \pi/2. \end{aligned} \quad (13.698)$$

FIGURE 13.19 – En bleu, la fonction $\sqrt{r^2 - x^2}$ et en rouge, la fonction $-\sqrt{r^2 - x^2}$.

Nous avons

$$A = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt. \quad (13.699)$$

En utilisant la formule $2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, nous avons

$$A = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \pi r^2. \quad (13.700)$$

△

13.26.3 Changement de variables

Comme dans les intégrales simples, il y a souvent moyen de trouver un changement de variables qui simplifie les expressions. Le domaine $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 < 1\}$ par exemple s'écrit plus facilement $E = \{(r, \theta) \text{ tel que } r < 1\}$ en coordonnées polaires. Le passage aux coordonnées polaire permet de transformer une intégration sur un domaine rond à une intégration sur le domaine rectangulaire $]0, 2\pi[\times]0, 1[$. La question est évidemment de savoir si nous pouvons écrire

$$\int_E f = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta. \quad (13.701)$$

Hélas ce n'est pas le cas. Il faut tenir compte du fait que le changement de base dilate ou contracte certaines surfaces.

Soit $\varphi: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D_2 \subset \mathbb{R}^2$ une fonction bijective de classe C^1 dont l'inverse est également de classe C^1 . On désigne par x et y ses composantes, c'est à dire que

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad (13.702)$$

avec $(u, v) \in D_1$.

Théorème 13.230.

Soit une fonction continue $f: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$\iint_{\varphi(D_1)} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x(u, v), y(u, v)) |J_\varphi(u, v)| du dv \quad (13.703)$$

où J_φ est le Jacobien de φ .

Pour rappel,

$$J_\varphi(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (13.704)$$

Ne pas oublier de prendre la valeur absolue lorsqu'on utilise le Jacobien dans un changement de variables.

13.26.3.1 Le cas des coordonnées polaires

La fonction qui donne les coordonnées polaires est

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.705)$$

Son Jacobien vaut

$$J_\varphi(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r. \quad (13.706)$$

Exemple 13.231

Calculons la surface du disque D de rayon R . Nous devons calculer

$$\iint_D dx dy. \quad (13.707)$$

Pour passer au polaires, nous savons que le disque est décrit par

$$D = \{(r, \theta) \text{ tel que } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}. \quad (13.708)$$

Nous avons donc

$$\iint_D dx dy = \iint_D r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = 2\pi \int_0^R r dr = \pi R^2. \quad (13.709)$$

△

Exemple 13.232

Montrons comment intégrer la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sur le domaine délimité par la droite $y = x$ et le cercle $x^2 + y^2 = y$, représenté sur la figure 13.20. Pour trouver le centre et le rayon du cercle $x^2 + y^2 = y$, nous commençons par écrire $x^2 + y^2 - y = 0$, et ensuite nous reformons le carré : $y^2 - y = (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

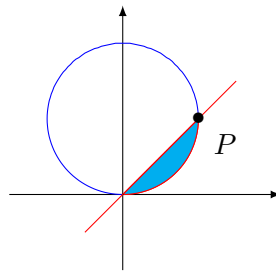


FIGURE 13.20 – Passage en polaire pour intégrer sur un morceau de cercle.

Le passage en polaire transforme les équations du bord du domaine en

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \sin(\theta) \\ r^2 &= r \sin(\theta). \end{aligned} \quad (13.710)$$

L'angle θ parcourt donc $]0, \pi/4[$, et le rayon, pour chacun de ces θ parcourt $]0, \sin(\theta)[$. La fonction à intégrer se note maintenant $f(r, \theta) = \sqrt{1 - r^2}$. Donc l'intégrale à calculer est

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sin(\theta)} \sqrt{1 - r^2} r dr \right). \quad (13.711)$$

Remarquez la présence d'un r supplémentaire pour le jacobien.

Notez que les coordonnées du point P sont $(1, 1)$.

△

En pratique, lors du passage en coordonnées polaires, le « $dx dy$ » devient « $r dr d\theta$ ».

13.26.3.2 Les coordonnées cylindriques

En ce qui concerne les coordonnées cylindriques, le Jacobien est donné par

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \quad (13.712)$$

Nous avons donc $dx dy dz = r dr d\theta dz$.

13.26.3.3 Coordonnées sphériques

Le calcul est un peu plus long :

$$\begin{aligned} J(\rho, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (13.713)$$

Donc

$$dx dy dz = \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\theta d\varphi. \quad (13.714)$$

13.26.3.4 Un autre système utile

Un changement de variables que l'on voit assez souvent est

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y. \end{cases} \quad \begin{aligned} (13.715a) \\ (13.715b) \end{aligned}$$

Afin de calculer son jacobien, il faut d'abord exprimer x et y en fonctions de u et v :

$$\begin{cases} x = (u + v)/2 \\ y = (u - v)/2. \end{cases} \quad \begin{aligned} (13.716a) \\ (13.716b) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (13.717)$$

Le déterminant vaut $-\frac{1}{2}$. Nous avons donc

$$dx dy = \frac{1}{2} du dv. \quad (13.718)$$

Nous insistons sur le fait que c'est $\frac{1}{2}$ et non $-\frac{1}{2}$ qui intervient parce que la formule du changement de variable demande d'introduire la *valeur absolue* du jacobien.

Exemple 13.233

Calculer l'intégrale de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ sur le domaine représenté sur la figure 13.21.

Les droites qui délimitent le domaine d'intégration sont

$$\begin{aligned} y &= -x + 2 \\ y &= x - 2 \\ y &= x \\ y &= -x \end{aligned} \quad (13.719)$$

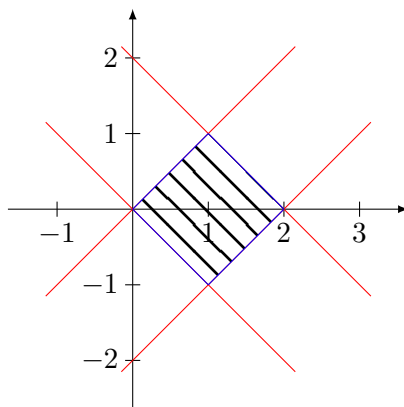


FIGURE 13.21 – Un domaine qui s’écrit étonnamment bien avec un bon changement de coordonnées.

Le domaine est donc donné par les équations

$$\begin{cases} y + x < 2 & (13.720a) \\ y - x > -2 & (13.720b) \\ y - x < 0 & (13.720c) \\ y + x > 0. & (13.720d) \end{cases}$$

En utilisant le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$ nous trouvons le domaine $0 < u < 2$, $0 < v < 2$. En ce qui concerne la fonction, $f(x, y) = (x + y)(x - y)$ et par conséquent

$$f(u, v) = uv. \quad (13.721)$$

L’intégrale à calculer est simplement

$$\int_0^2 \int_0^2 uv \, du \, dv = \int_0^2 u \, du \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^2 = 2 \int_0^2 u \, du = 4. \quad (13.722)$$

△

13.27 Les intégrales triples

Les intégrales triples fonctionnent exactement de la même manière que les intégrales doubles. Il s’agit de déterminer sur quelle domaine les variables varient et d’intégrer successivement par rapport à x , y et z . Il est autorisé de permuter l’ordre d’intégration²⁷ à condition d’adapter les domaines d’intégration.

Exemple 13.234

Soit le domaine parallélépipédique rectangle

$$R = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 4]. \quad (13.723)$$

27. En toute rigueur, cela n’est pas vrai, mais nous ne considérons seulement des cas où cela est autorisé.

Pour intégrer la fonction $f(x, y, z) = x^2 y \sin(z)$ sur R , nous faisons

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_R x^2 y \sin(z) \, dx dy dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^4 x^2 y \sin(z) dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_1^2 x^2 y (1 - \cos(4)) dy \\
 &= \int_0^1 \frac{3}{2} (1 - \cos(4)) x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \cos(4)).
 \end{aligned} \tag{13.724}$$

```

-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.  |
-----
sage: f(x,y,z)=x**2*y*sin(z)
sage: f.integrate(x,0,1).integrate(y,1,2).integrate(z,0,4)
(x, y, z) |--> -1/2*cos(4) + 1/2

```

△

Exemple 13.235

Soit D la région délimitée par le plan $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ et la surface d'équation

$$z = x^2 + y^2. \tag{13.725}$$

Cherchons à calculer $\iiint_D x \, dx \, dy \, dz$. Ici, un dessin indique que le volume considéré est $z \geq x^2 + y^2$. Il y a plusieurs façon de décrire cet ensemble. Une est celle-ci :

$$\begin{aligned}
 z &: 0 \rightarrow 2 \\
 x &: 0 \rightarrow \sqrt{z} \\
 y &: 0 \rightarrow \sqrt{z - x^2}.
 \end{aligned} \tag{13.726}$$

Cela revient à dire que z peut prendre toutes les valeurs de 0 à 2, puis que pour chaque z , la variable x peut aller de 0 à $\sqrt{z}$, mais que pour chaque z et x fixés, la variable y ne peut pas dépasser $\sqrt{z - x^2}$. En suivant cette méthode, l'intégrale à calculer est

$$\int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_0^{\sqrt{z-x^2}} f(x, y, z) dy. \tag{13.727}$$

```

-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.  |
-----
sage: f(x,y,z)=x
sage: assume(z>0)
sage: assume(z-x**2>0)
sage: f.integrate(y,0,sqrt(z-x**2)).integrate(x,0,sqrt(z)).integrate(z,0,2)
(x, y, z) |--> 8/15*sqrt(2)

```

Notez qu'il a fallu aider Sage en lui indiquant que $z > 0$ et $z - x^2 > 0$.

Une autre paramétrisation serait

$$\begin{aligned} x &: 0 \rightarrow \sqrt{2} \\ y &: 0 \rightarrow \sqrt{2 - x^2} \\ z &: x^2 + y^2 \rightarrow 2. \end{aligned} \tag{13.728}$$

```
-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11 |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
|-----|
sage: f(x,y,z)=x
sage: assume(2-x**2>0)
sage: f.integrate(y,0,sqrt(z-x**2)).integrate(x,0,sqrt(z)).integrate(z,0,2)
(x, y, z) |--> 8/15*sqrt(2)
```

Écrivons le détail de cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^2 x dz \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx x \left[(2-x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3} x(2-x^2)^{3/2} dx. \end{aligned} \tag{13.729}$$

Ici nous effectuons le changement de variable $u = x^2$, $du = 2x dx$. Ne pas oublier de changer les bornes de l'intégrale :

$$I = \frac{1}{3} \int_0^2 (2-u)^{3/2} du. \tag{13.730}$$

Le changement de variable $t = 2 - u$, $dt = -du$ fait venir (attention aux bornes!!)

$$I = -\frac{1}{3} \int_2^0 t^{3/2} dt = \frac{1}{3} \left[\frac{t^{5/2}}{5/2} \right]_0^2 = \frac{8}{15} \sqrt{2}. \tag{13.731}$$

△

13.27.1 Volume

Parmi le nombreuses interprétations géométriques de l'intégrale triple, notons celle-ci :

Proposition 13.236.

Soit $D \subset \mathbb{R}^3$. Le volume de D est donné par

$$\text{Vol}(D) = \iiint_D dx dy dz. \tag{13.732}$$

C'est à dire l'intégrale de la fonction $f(x, y, z) = 1$ sur D .

Suivant les points de vue, cette proposition peut être considérée comme une *définition* du volume.

Exemple 13.237

Calculons le volume de la sphère de rayon R . Le domaine de variation des variables x , y et z pour la sphère est

$$\begin{aligned} x &: -R \rightarrow R \\ y &: -\sqrt{R^2 - x^2} \rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \\ z &: -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \rightarrow \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (13.733)$$

Par conséquent nous devons calculer l'intégrale

$$V = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz. \quad (13.734)$$

La première intégrale est simple :

$$V = 2 \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy. \quad (13.735)$$

Afin de simplifier la notation, nous posons $a = R^2 - x^2$. Ceci n'est pas un changement de variables : juste une notation provisoire le temps d'effectuer l'intégration sur y . Étudions donc

$$I = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \sqrt{a - y^2} dy, \quad (13.736)$$

ce qui est la surface du demi-disque de rayon $\sqrt{a}$. Nous avons donc

$$I = \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2 - x^2), \quad (13.737)$$

et

$$V = 2 \int_{-R}^R \frac{\pi}{2}(R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (13.738)$$

△

Exemple 13.238

Nous pouvons calculer le volume de la sphère en utilisant les coordonnées sphériques. Les bornes des variables pour la sphère de rayon R sont

$$\begin{aligned} \rho &: 0 \rightarrow R \\ \theta &: 0 \rightarrow \pi \\ \varphi &: 0 \rightarrow 2\pi. \end{aligned} \quad (13.739)$$

En n'oubliant pas le jacobien $\rho^2 \sin(\theta)$, l'intégrale à calculer est

$$V = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \rho^2 \sin(\theta) d\theta \quad (13.740)$$

L'intégrale sur φ fait juste une multiplication par 2π . Celle sur ρ vaut

$$\int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3}{3}. \quad (13.741)$$

L'intégrale sur θ donne

$$\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = [-\cos(\theta)]_0^\pi = 2. \quad (13.742)$$

Le tout fait par conséquent

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (13.743)$$

Sans contestes, le passage aux coordonnées sphériques a considérablement simplifié le calcul par rapport à celui de l'exemple 13.237. △

13.28 Un petit peu plus formel

13.28.1 Intégration sur un domaine non rectangulaire

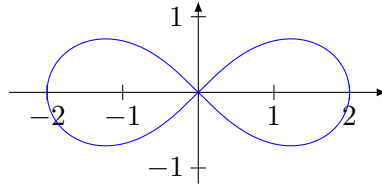


FIGURE 13.22 – Intégrer sur des domaines plus complexes.

La méthode de Fubini ne fonctionne plus sur un domaine non rectangulaire tel que celui de la figure 13.22. Nous allons donc utiliser une astuce. Considérons le domaine

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a < x < b \text{ et } \alpha(x) < y < \beta(x)\} \quad (13.744)$$

représenté sur la figure 13.22. Nous considérons la fonction

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (13.745)$$

Ensuite intégrons $\tilde{f}$ sur un rectangle qui englobe la surface à intégrer à l'aide de Fubini. Étant donné que $\tilde{f} = f$ sur la surface et que $\tilde{f}$ est nulle en dehors, nous avons

$$\int_E f = \int_E \tilde{f} = \int_{\text{rectangle}} \tilde{f} = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (13.746)$$

Dans le cas de l'intégrale de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur le triangle de la figure 13.17, nous avons

$$\int_{\text{triangle}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right) dy. \quad (13.747)$$

Remarque 13.239.

Le nombre $\iint_D f(x, y) dx dy$ ne dépend pas du choix du rectangle englobant D .

En pratique, nous calculons l'intégrale en utilisant une extension du théorème de Fubini :

Théorème 13.240.

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue où D est un domaine de type vertical ou horizontal.

(1) Si D est vertical, alors

$$\iint_D f = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (13.748)$$

(2) Si D est horizontal, alors

$$\iint_D f = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (13.749)$$

13.28.2 Changement de variables

Le théorème du changement de variable est le suivant.

Théorème 13.241.

Soit $g: A \rightarrow B$ un difféomorphisme. Soient $F \subset B$ un ensemble mesurable et borné et $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable. Supposons que $g^{-1}(F)$ soit borné et que Jg soit borné sur $g^{-1}(F)$. Alors

$$\int_F f(x) dy = \int_{g^{-1}(F)} f(g(x)) |Jg(x)| dx \quad (13.750)$$

Pour rappel, Jg est le déterminant de la matrice jacobienne (aucun lien de parenté) donnée par

$$Jg = \det \begin{pmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 \end{pmatrix}. \quad (13.751)$$

Un **difféomorphisme** est une application $g: A \rightarrow B$ telle que g et $g^{-1}: B \rightarrow A$ soient de classe C^1 .

13.28.2.1 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont données par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} g:]0, \infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (13.752)$$

où D est la demi droite $y = 0, x \geq 0$. Le fait que les coordonnées polaires ne soient pas un difféomorphisme sur tout $\mathbb{R}^2$ n'est pas un problème pour l'intégration parce que le manque de difféomorphisme est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. Le jacobien est donné par

$$Jg = \det \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} = r. \quad (13.753)$$

13.28.2.2 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont données par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r \in]0, \infty[\\ \theta \in]0, 2\pi[\\ \varphi \in]0, \pi[. \end{cases} \quad (13.754)$$

Le jacobien associé est $Jg(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin \varphi$. Rappelons que ce qui rentre dans l'intégrale est la valeur absolue du jacobien.

Si nous voulons calculer le volume de la sphère de rayon R , nous écrivons donc

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi r^2 \sin(\varphi) d\varphi = 4\pi R = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (13.755)$$

Ici, la valeur absolue n'est pas importante parce que lorsque $\varphi \in]0, \pi[,$ le sinus de φ est positif.

Des petits malins pourraient remarquer que le changement de variable (13.754) est encore une paramétrisation de $\mathbb{R}^3$ si on intervertit le domaine des angles :

$$\begin{aligned} \theta: 0 &\rightarrow \pi \\ \varphi: 0 &\rightarrow 2\pi, \end{aligned} \quad (13.756)$$

alors nous paramétrons encore parfaitement bien la sphère, mais hélas

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) d\varphi = 0. \quad (13.757)$$

Pourquoi ces «nouvelles» coordonnées sphériques sont-elles mauvaises ? Il y a que quand l'angle φ parcourt $]0, 2\pi[,$ son sinus n'est plus toujours positif, donc la *valeur absolue* du jacobien n'est plus $r^2 \sin(\varphi)$, mais $r^2 \sin(\varphi)$ pour les φ entre 0 et π , puis $-r^2 \sin(\varphi)$ pour φ entre π et 2π . Donc l'intégrale (13.757) n'est pas correcte. Il faut la remplacer par

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi r^2 \sin(\varphi) d\varphi - \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_\pi^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (13.758)$$

13.29 Primitives et surfaces

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, et $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, nous pouvons considérer le nombre $F(x)$ défini par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (13.759)$$

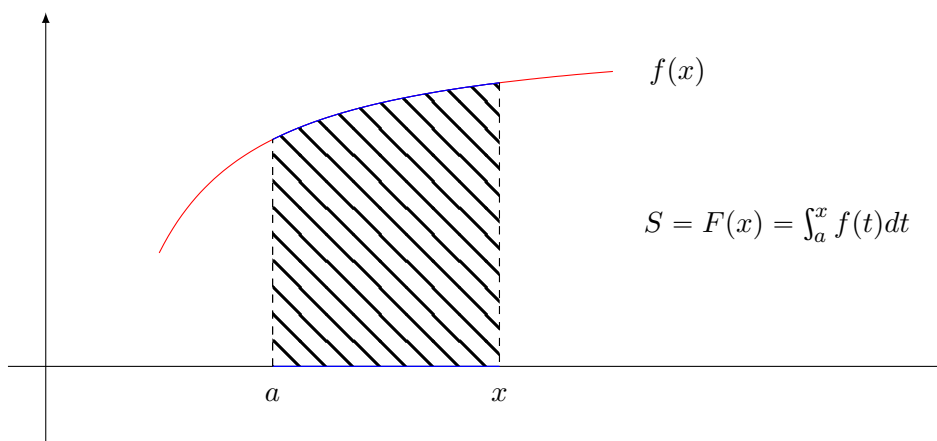


FIGURE 13.23 – Surface sous une courbe

La fonction F ainsi définie a deux importantes propriétés :

- (1) C'est une primitive de f ,
- (2) Elle donne la surface en dessous de f entre les points a et x , voir la figure 13.23.

Notons que tant que f est positive, la surface est croissante.

La manière de calculer la surface comprise entre deux fonctions est dessinée à la figure 13.24.

La surface entre les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ se calcule comme suit.

- (1) On calcule les intersections entre y_1 et y_2 . Notons a et b les ordonnées obtenues.
- (2) La surface demandée est la différence entre la surface sous la fonction y_1 (la plus grande) et la surface sous la fonction y_2 (la plus petite), donc

$$S = \int_a^b y_1 - \int_a^b y_2. \quad (13.760)$$

13.29.1 Longueur d'arc de courbe

La longueur de l'arc de courbe de la fonction $y = f(x)$ entre les abscisses x_0 et x_1 est donné par la formule

$$l(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt. \quad (13.761)$$

Lorsque la courbe est donnée sous forme paramétrique

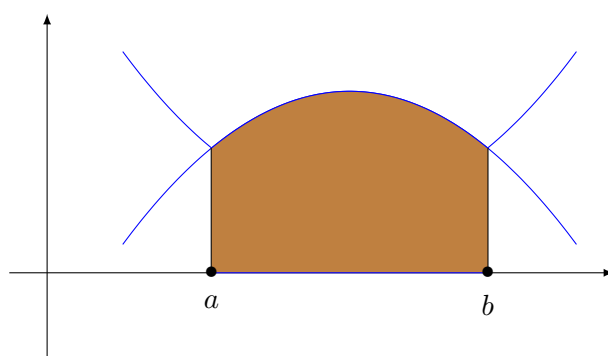
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad (13.762a)$$

$$(13.762b)$$

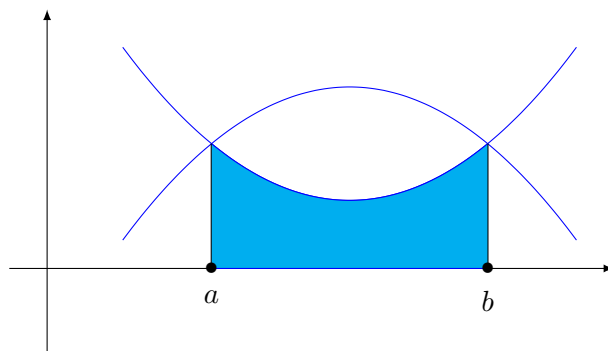
alors la formule devient

$$l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt, \quad (13.763)$$

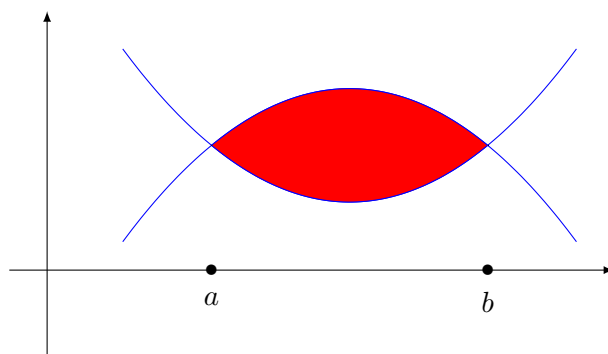
où $\dot{x}(t) = x'(t)$.



(a) La grande surface.



(b) La surface à soustraire.



(c) La surface entre les deux fonctions.

FIGURE 13.24 – Le calcul de la surface comprise entre deux fonctions.

13.29.2 Aire de révolution

Pour savoir l'aire engendrée par la ligne $y = f(x)$ entre a et b autour de l'axe Ox , on utilise la formule

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} f(x) dx. \quad (13.764)$$

13.30 L'aire en dessous d'une courbe

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Nous voudrions pouvoir calculer l'aire au-dessous du graphe de la fonction f . Nous notons $S_f(x)$ l'aire là-dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x , c'est à dire l'aire bleue de la figure 13.25.

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x + \Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x + \Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle

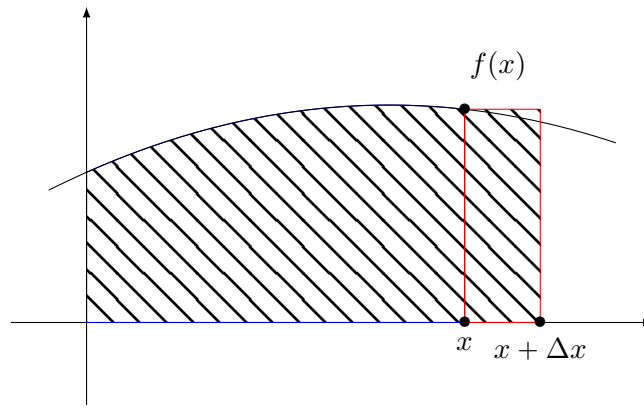


FIGURE 13.25 – L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime de combien la surface augmente lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$.

de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x + \Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \quad (13.765)$$

ou encore

$$f(x) = \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \quad (13.766)$$

Nous formalisons la notion de «lorsque Δx est très petit» par une limite :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \quad (13.767)$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire là-dessous de f . Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

13.31 Propriétés des intégrales

Proposition 13.242 (Relations de Chasles).

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I . Si $a, b, c \in I$ nous avons

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \quad (13.768)$$

Sur la figure 13.26, la surface de a à c est évidemment égale à la somme des surfaces de a à b et de b à c .

Corollaire 13.243.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx. \quad (13.769)$$

Proposition 13.244 (Linéarité de l'intégrale).

Si f et g sont deux fonction continues sur $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad (13.770)$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \quad (13.771)$$

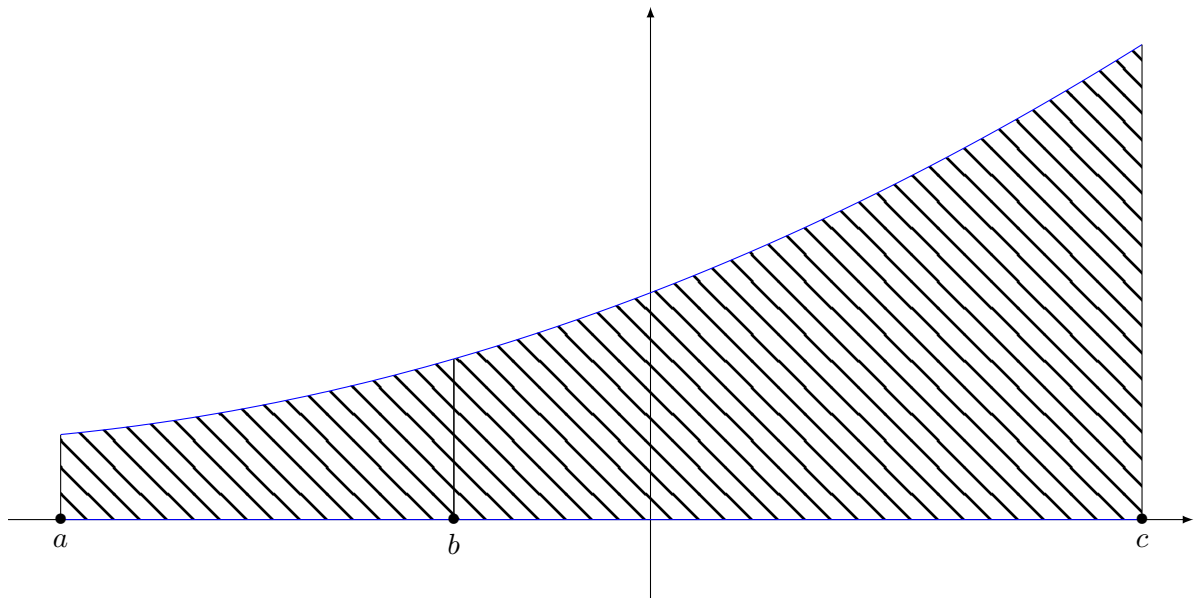


FIGURE 13.26 – Illustration pour les relations de Chasles.

Proposition 13.245 (L'intégrale est monotone).

Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx. \quad (13.772)$$

Corollaire 13.246 (Positivité).

Si $a < b$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0. \quad (13.773)$$

Ce résultat n'est qu'une application de la proposition 13.245 car il consiste à prendre comme fonction g la fonction nulle.

13.32 Techniques d'intégration

Par la définition 13.64 le calcul d'une intégrale consiste essentiellement à trouver une primitive de la fonction à intégrer. Il est donc indispensable de bien connaître les dérivées des fonctions usuelles.

Voici un tableau des primitives à connaître.

Fonction $f(x)$	Primitive $\int f(x) dx$	Ensemble de définition de f	Remarques
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	dépend de α ²⁸	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$x \neq 0$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$] -1, 1[$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	$] -1, 1[$	
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$	
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$	in intervalle de la forme $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi$	

Notez que au signe près, les fonctions arcsin et arccos ont la même dérivée.

Si la fonction à intégrer est une combinaison linéaire de fonctions usuelles alors sa primitive peut être calculée en utilisant la proposition 13.244. Dans les sections suivantes on abordera deux autres cas où la fonction à intégrer peut s'écrire en termes de fonctions dont on connaît une primitive.

13.32.1 Intégration par parties

Proposition 13.247.

Si u et v sont deux fonctions dérivables de dérivées continues sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (13.774)$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser à l'envers la formule de dérivation d'un produit :

$$uv' = (uv)' - u'v. \quad (13.775)$$

Les fonctions à gauche et à droite étant égales, elles ont même intégrale sur $[a, b]$ et par linéarité, voir proposition 13.244, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x) - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (13.776)$$

La fonction uv est évidemment une primitive de $(uv)'$, de telle sorte que l'on puisse un peu simplifier cette expression :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \quad (13.777)$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Exemple 13.248

Un cas typique d'utilisation de l'intégrale par parties est le suivant. Soit à calculer

$$\int_0^\pi x \cos(x)dx. \quad (13.778)$$

Nous devons écrire $x \cos(x)$ comme un produit $u(x)v'(x)$. Il y a (au moins) deux moyens de le faire :

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \cos(x). \end{cases} \quad \begin{matrix} (13.779a) \\ (13.779b) \end{matrix}$$

ou

$$\begin{cases} u = \cos(x) \\ v' = x. \end{cases} \quad \begin{matrix} (13.780a) \\ (13.780b) \end{matrix}$$

Nous allons choisir le premier²⁹. Nous avons donc

$$\begin{aligned} u &= x, & v' &= \cos(x) \\ u' &= 1 & v &= \sin(x). \end{aligned} \quad (13.781)$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^\pi x \cos(x)dx = [x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \times \sin(x)dx = \pi \sin(\pi) - [-\cos(x)]_0^\pi = -2. \quad (13.782)$$

$\triangle$

29. Mais nous conseillons vivement au lecteur d'essayer le deuxième pour se rendre compte qu'il ne fonctionne pas.

Le plus souvent, pour alléger les notations, il est plus pratique d'utiliser l'intégration par parties pour déterminer une primitive. Nous utilisons pour cela la formule (sans doute plus simple à retenir)

$$\int uv' = uv - \int u'v. \quad (13.783)$$

Exemple 13.249

Nous reprenons l'exemple 13.248 en déterminant cette fois une primitive de $x \cos(x)$:

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (13.784)$$

Nous retrouvons le résultat numérique de l'exemple précédent en ajoutant les extrêmes d'intégration

$$\int_0^\pi x \cos(x) dx = [x \sin(x) + \cos(x)]_0^\pi = -2. \quad (13.785)$$

△

Remarque 13.250.

Lorsqu'on calcule des intégrales, il est bon de passer par la primitive (c'est à dire en suivant l'exemple 13.249 et non 13.248) parce qu'il est alors facile de vérifier le résultat en calculant la dérivée de la primitive trouvée.

Par exemple pour vérifier si (13.784) est correct, il suffit de dériver $x \sin(x) + \cos(x)$:

$$(x \sin(x) + \cos(x))' = \sin(x) + x \cos(x) - \sin(x) = x \cos(x). \quad (13.786)$$

La fonction $x \sin(x) + \cos(x)$ est donc bien une primitive de $x \cos(x)$.

Voici un exemple d'utilisation ingénieuse de l'intégration par parties.

Exemple 13.251

Trouver la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$. Pour calculer

$$\int \ln(x) dx \quad (13.787)$$

nous écrivons $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$ et nous posons $u' = 1$ et $v = \ln(x)$, c'est à dire

$$\begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln(x) \\ u = x & v' = \frac{1}{x}. \end{array} \quad (13.788)$$

La formule d'intégration par parties donne donc

$$\int \ln(x) = x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} = x \ln(x) - \int 1 = x \ln(x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (13.789)$$

Il est facile de vérifier par un petit calcul que

$$(x \ln(x) - x)' = \ln(x). \quad (13.790)$$

△

13.32.2 Changement de variables – pour trouver des primitives

De la même manière que l'utilisation «à l'envers» de la formule de dérivation du produit avait donné la méthode d'intégration par parties, nous allons voir que l'utilisation «à l'envers» de la formule de dérivation d'une fonction composée donne lieu à la méthode d'intégration par changement de variables.

Proposition 13.252.

Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction $u: I \rightarrow J$ qui est dérivable de dérivée continue. Soit $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F . Alors la fonction

$$x \mapsto F(u(x)) \quad (13.791)$$

est une primitive de

$$f(u(x))u'(x). \quad (13.792)$$

Démonstration. Cela est une utilisation immédiate de la formule de dérivée des fonctions composées. $\square$

Exemple 13.253

Soit à calculer

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx. \quad (13.793)$$

La fonction $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ est le produit de x et de $\sqrt{1-x^2}$. On remarque que la dérivée de $1-x^2$ est $-2x$: nous avons alors, à un facteur -2 près, une expression de la forme (13.792) où la racine carrée joue le rôle de f , $f(t) = \sqrt{t}$, et $1-x^2$ le rôle de u . Une primitive de la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ est $F(t) = 2t^{3/2}/3$.

Donc la fonction $\frac{2u(x)^{3/2}}{3} = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}$ est primitive de $-2x\sqrt{1-x^2} = -2g(x)$. Autrement dit,

$$\int -2x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3} + C, \quad (13.794)$$

et en divisant par -2 nous trouvons la primitive demandée :

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + C. \quad (13.795)$$

$\triangle$

L'exemple suivant donne une façon plus économe de retenir la méthode du changement de variables. **Exemple 13.254**

Soit à calculer

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx. \quad (13.796)$$

Vu qu'il y a beaucoup de fonctions trigonométriques dans la fonction à intégrer, nous allons poser $u(x) = \sin(x)$, et remplacer élément par élément tout ce qui contient du « x » dans l'intégrale demandée par la quantité correspondante en termes de u .

La difficulté est de savoir ce que nous allons faire du « dx » dans l'intégrale. Ce dx marque une variation (infinitésimale) de x . La formule des accroissements finis dit que si x augmente de la valeur dx , alors $u(x)$ augmente de $u'(x)dx$, c'est à dire que

$$du = \cos(x)dx. \quad (13.797)$$

Nous avons donc les substitutions suivantes à faire :

$$\sin(x) = u \quad (13.798a)$$

$$du = \cos(x)dx \quad (13.798b)$$

$$dx = \frac{du}{\cos(x)}. \quad (13.798c)$$

La chose «magique» est que le $\cos(x)$ se trouvant dans la fonction se simplifie avec le cosinus qui arrive lorsqu'on remplace dx par $\frac{du}{\cos(x)}$. Les substitutions faites nous restons avec

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} dx = \int e^u du = e^u + C, \quad \text{où } u = \sin(x). \quad (13.799)$$

Attention : la réponse doit être impérativement donnée en termes de x et non de u .

Nous écrivons donc

$$\int \cos(x)e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} + C. \quad (13.800)$$

△

13.32.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales

La définition 13.64 fixe la relation entre la recherche des primitives de f et la calcul de l'intégrale de f sur l'intervalle d'extrêmes a et b . On a vu dans la section précédente comment utiliser le changement de variable pour trouver une primitive de f . Il faut maintenant comprendre comment appliquer ce qu'on a vu dans le calcul d'une intégrale.

En effet nous avons le choix entre

- trouver une primitive de f comme dans la section précédente et appliquer ensuite la formule dans 13.64 ;
- écrire une intégrale pour la nouvelle variable $u = u(x)$ sur l'intervalle entre $u(a)$ et $u(b)$.

Nous allons voir ces deux méthodes dans des exemples.

Exemple 13.255

Soit à calculer

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (13.801)$$

Les primitives $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ ont été trouvées dans l'exemple 13.254. Une primitive est

$$F(x) = \int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}. \quad (13.802)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale de $x\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[1/3, 1/2]$ par la définition

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2} dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \quad (13.803)$$

△

Remarque 13.256.

Pour que le calcul d'intégrale donne quelque chose de sensé il faut absolument que la primitive soit écrite en tant que fonction de x et non comme fonction de u . La méthode que nous allons voir dans l'exemple suivant réduit grandement la probabilité d'oublier ce détail, d'où le fait qu'elle soit de loin la plus utilisée.

Exemple 13.257

Calculons à nouveau

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (13.804)$$

Cette fois nous allons toucher à l'intervalle d'intégration en même temps que faire le changement de variables. Nous savons déjà les substitutions

$$\begin{cases} u = 1 - x^2 & (13.805a) \\ du = -2x dx & (13.805b) \\ dx = \frac{du}{-2x}. & (13.805c) \end{cases}$$

En ce qui concerne les extrêmes d'intégration, si $x = 1/3$ alors $u = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ et si $x = \frac{1}{2}$ alors $u = \frac{3}{4}$. Nous avons donc encore les substitutions suivantes :

$$\begin{cases} x = 1/3 \rightarrow u = 8/9 \\ x = 1/2 \rightarrow u = 3/4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (13.806a) \\ (13.806b) \end{matrix}$$

Le calcul est alors

$$\int_{1/3}^{1/2} x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2} \int_{8/9}^{3/4} \sqrt{u}du = -\frac{1}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_{8/9}^{3/4} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{16\sqrt{2}}{81}. \quad (13.807)$$

Attention : la dernière égalité n'est pas immédiate ; elle demande quelques calculs et une bonne utilisation des règles de puissances. $\triangle$ La deuxième méthode est plus utilisée et, avec un peu d'exercice, plus rapide à mettre en place que la première.

Jusqu'à présent nous avons utilisé des changements de variables dans lesquels nous exprimions u en termes de x . Comme le montre l'exemple suivant, il est parfois fructueux d'utiliser le changement de variable dans le sens inverse : avec x exprimé en termes d'un paramètre.

Exemple 13.258

À calculer :

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx. \quad (13.808)$$

Nous posons $x = \sin(\theta)$ parce que nous savons que $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$; nous espérons que le changement de variables simplifie l'expression³⁰. Les substitutions à faire dans l'intégrale sont :

$$\begin{cases} x = \sin(\theta) \\ dx = \cos(\theta)d\theta, \end{cases} \quad \begin{matrix} (13.809a) \\ (13.809b) \end{matrix}$$

et en ce qui concerne les bornes, si $x = 1/2$ alors $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, c'est à dire $\theta = \frac{\pi}{6}$. Si $x = \sqrt{3}/2$ alors $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \cos(\theta)d\theta. \quad (13.810)$$

Nous avons $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ et vu que $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ nous avons toujours $\cos(\theta) > 0$, ce qui donne $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$. Nous devons donc calculer

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta. \quad (13.811)$$

Pour celle-là, il faut utiliser une formule de trigonométrie³¹ :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}. \quad (13.812)$$

Donc

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta, \quad (13.813)$$

Pour calculer proprement la dernière intégrale nous effectuons un autre changement de variable (facile) en posant $t = 2\theta$, $dt = 2d\theta$, $t(\pi/6) = \pi/3$ et $t(\pi/3) = 2\pi/3$, nous avons alors

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2(\theta)d\theta = \left[\frac{\theta}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos(t)}{4}dt = \left[\frac{\theta}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}, \quad (13.814)$$

30. Lorsqu'on fait un changement de variables, il s'agit toujours d'espérer que l'expression se simplifie. Il n'y a pas moyen de savoir a priori si tel changement de variable va être utile. Il faut essayer.

31. En fait, il y a moyen de terminer le calcul en intégrant deux fois par parties, mais c'est plus compliqué.

parce que $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Au final,

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{12}. \quad (13.815)$$

△

13.32.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites

Définition 13.259.

Une **fraction rationnelle** est un quotient de deux polynômes à coefficients réels ou complexes.

Par exemple

$$\frac{x^5 + 7x^4 - \frac{x^3}{2} + x}{x^2 - 1} \quad (13.816)$$

est une fraction rationnelle.

Il sera expliqué dans le cours d'algèbre que toute fraction rationnelle peut être écrite sous forme d'une somme d'éléments simples, c'est à dire de fractions rationnelles d'un des deux types suivants :

$$\frac{\alpha}{(x-a)^m}, \quad \alpha, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \quad (13.817a)$$

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^m}; \quad \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, a^2 - 4b < 0. \quad (13.817b)$$

Nous allons nous contenter de donner un exemple de chaque type.

- (1) En ce qui concerne le cas (13.817a) avec $m = 1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \ln(|x-3|) + C. \quad (13.818)$$

Si vous voulez en être tout à fait sûr, effectuez d'abord le changement de variables $u = x-3$ qui donne $dx = du$.

- (2) En ce qui concerne le cas (13.817a) avec $m \neq 1$, nous avons par exemple

$$\int \frac{1}{(x-1)^4} dx = -\frac{1}{3(x-1)^3} + C. \quad (13.819)$$

Encore une fois, pour s'en convaincre, utiliser le changement de variables $u = x-1$, $dx = du$:

$$\int \frac{1}{(x-1)^4} dx = \int \frac{1}{u^4} du = \int u^{-4} du = -\frac{u^{-3}}{3} + C = -\frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^3} + C. \quad (13.820)$$

- (3) En ce qui concerne le cas (13.817b) avec $\alpha \neq 0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C. \quad (13.821)$$

Pour ce faire, il faut faire le changement de variables $u = x^2+4$, $du = 2x dx$, $dx = \frac{du}{2x}$ qui donne

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln(|u|) + C = \frac{1}{2} \ln(|x^2+4|) + C. \quad (13.822)$$

Dans ce cas nous pouvons oublier d'écrire la valeur absolue dans le logarithme parce que de toutes façons, x^2+4 est toujours positif.

- (4) En ce qui concerne le cas (13.817b) avec $\alpha = 0$, nous avons par exemple

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C. \quad (13.823)$$

où nous avons utilisé la primitive $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x)$ du tableau de la page 917. Pour vous en convaincre vous pouvez faire la dernière étape avec le changement de variables $u = x/2$, $dx = 2du$.

13.32.5 Quelques formules à connaître

À retenir 13.260

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx. \quad (13.824a)$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx. \quad (13.824b)$$

$$\int f'(u(x))u'(x) dx = \int f(t) dt, \quad \text{avec } t = u(x). \quad (13.824c)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C, \quad \text{c'est un cas particulier de la formule précédente.} \quad (13.824d)$$

13.33 Trucs et astuces de calcul d'intégrales

Afin d'alléger le texte de calculs parfois un peu longs, nous regroupons ici les intégrales à une variable que nous devons utiliser dans les autres parties du cours.

13.33.1 Quelques intégrales «usuelles»

(1) L'intégrale

$$I = \int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) \quad (13.825)$$

se fait par partie en posant

$$\begin{aligned} u &= \ln(x), & dv &= x dx \\ du &= \frac{1}{x} dx, & v &= \frac{x^2}{2}, \end{aligned} \quad (13.826)$$

et ensuite

$$I = \ln(x) \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right). \quad (13.827)$$

(2) L'intégrale

$$I = \int x \ln(x^2) dx = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}. \quad (13.828)$$

En utilisant le fait que $\ln(u^2) = 2 \ln(u)$, nous retombons sur une intégrale du type (1) :

$$I = x^2 \ln(x) - \frac{x^2}{2}. \quad (13.829)$$

(3) L'intégrale

$$I = \int x \ln(1 + x^2) dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)(x^2 + 1) - x^2 - \frac{1}{2} \quad (13.830)$$

se traite en posant $v = 1 + x^2$ de telle sorte à avoir $dx = \frac{dv}{2x}$ et donc

$$I = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)(x^2 + 1) - x^2 - \frac{1}{2}. \quad (13.831)$$

(4) L'intégrale

$$I = \int \cos(\theta) \sin(\theta) \ln \left(1 + \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) d\theta \quad (13.832)$$

demande le changement de variable $u = \cos(\theta)$, $d\theta = -\frac{du}{\sin(\theta)}$. Nous tombons sur l'intégrale

$$I = - \int u \ln \left(\frac{1+u^2}{u^2} \right) = - \int u \ln(1+u^2) + \int u \ln(u^2), \quad (13.833)$$

qui sont deux intégrales déjà faites. Nous trouvons

$$I = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin^2(\theta) - 1}{\sin^2(\theta) - 2} \right) \sin^2(\theta) - \ln(\sin^2(\theta) - 2) + \frac{1}{2} \ln(\sin^2(\theta) - 1) \quad (13.834)$$

(5) L'intégrale

$$\boxed{\int \frac{r^3}{1+r^2} dr = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1).} \quad (13.835)$$

commence par faire la division euclidienne de r^3 par $r^2 + 1$; ce que nous trouvons est $r^3 = (r^2 + 1)r - r$. Il reste à intégrer

$$\int \frac{r^3}{1+r^2} dr = \int r dr - \int \frac{r}{1+r^2} dr. \quad (13.836)$$

La fonction dans la seconde intégrale est $\frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f(r)}$ où $f(r) = 1 + r^2$, et donc $\int \frac{r}{1+r^2} = \frac{1}{2} \ln(1+r^2)$. Au final,

$$I = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1). \quad (13.837)$$

(6) L'intégrale

$$\boxed{I = \int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{\sin^2(\theta)}{2}} \quad (13.838)$$

se traite par le changement de variable $u = \sin(\theta)$, $du = \cos(\theta) d\theta$, et donc

$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2(\theta)}{2}. \quad (13.839)$$

(7) L'intégrale

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(x)} \quad (13.840)$$

s'obtient en effectuant le changement de variable $u = \sinh(\xi)$.

(8) L'intégrale

$$\boxed{\int \cos^2(x) \sin^2(x) dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}} \quad (13.841)$$

s'obtient à coups de formules de trigonométrie. D'abord, $\sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} \sin^2(2t)$ fait en sorte que la fonction à intégrer devient

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin^2(x). \quad (13.842)$$

Ensuite nous utilisons le fait que $\sin^2(t) = (1 - \cos(2t))/2$ pour transformer la formule à intégrer en

$$f(x) = \frac{1 - \cos(4x)}{8}. \quad (13.843)$$

Cela s'intègre facilement en posant $u = 4x$, et le résultat est

$$\int f(x) dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}. \quad (13.844)$$

(9) La fonction

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (13.845)$$

est le **sinus cardinal** de x . Nous allons montrer que

$$\boxed{\int_0^\infty |\text{sinc}(x)| dx = \infty}. \quad (13.846)$$

D'abord nous avons

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{n\pi} dt, \quad (13.847)$$

mais par périodicité,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin(t)| dt = \int_0^\pi \sin(t) dt = 2. \quad (13.848)$$

Par conséquent

$$\int_0^{n\pi} |\text{sinc}(t)| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (13.849)$$

ce qui diverge lorsque $n \rightarrow \infty$.

(10) Les intégrales, pour $\epsilon > 0$,

$$\boxed{\int_0^\infty \cos(kx) e^{-\epsilon x} dx = \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2}} \quad (13.850)$$

et

$$\boxed{\int_0^\infty \sin(kx) e^{-\epsilon x} dx = \frac{k}{k^2 + \epsilon^2}} \quad (13.851)$$

se calculent deux fois par partie. Nous posons

$$I = \int_0^\infty \cos(kx) e^{-\epsilon x} dx \quad (13.852a)$$

$$J = \int_0^\infty \sin(kx) e^{-\epsilon x} dx. \quad (13.852b)$$

L'intégrale I s'effectue par partie en posant $u = \cos(kx)$ et $v' = e^{-\epsilon x}$. Un peu de calcul montre que

$$I = \frac{1}{\epsilon} - \frac{k}{\epsilon} J. \quad (13.853)$$

Par ailleurs l'intégrale J se fait également par partie pour obtenir

$$J = \frac{k}{\epsilon} I. \quad (13.854)$$

En résolvant pour I et J les deux équations déduites, nous trouvons

$$I = \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} \quad (13.855a)$$

$$J = \frac{k}{k^2 + \epsilon^2}. \quad (13.855b)$$

13.33.2 Reformuler un carré au dénominateur

Lorsqu'on a un second degré au dénominateur, le bon plan est de reformer un carré parfait. Par exemple :

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1. \quad (13.856)$$

Ensuite, le changement de variable $t = x + 1$ est pratique parce que cela donne $t^2 + 1$ au dénominateur.

Cherchons

$$I = \int \frac{1-x}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1-x}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{1-(t-1)}{t^2+1} \quad (13.857)$$

où nous avons fait le changement de variable $t = x + 1$, $dt = dx$. L'intégrale se coupe maintenant en deux parties :

$$I = \int \frac{-t}{t^2+1} + \int \frac{2}{t^2+1}. \quad (13.858)$$

La seconde est dans les formulaires et vaut

$$2 \arctan(t) = 2 \arctan(x+1), \quad (13.859)$$

tandis que la première est presque de la forme f'/f :

$$\int \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} = \frac{1}{2} \ln(t^2+1) = \frac{1}{2} \ln(u^2+2u+2). \quad (13.860)$$

13.33.3 Décomposer en fractions simples

Il y a la méthode de Rothstein-Trager décrite 13.21.4 qui permet de l'éviter lorsqu'on a de la chance.

Il est possible de décomposer une fraction rationnelle en fractions dites «simples». Si $|z| < 1$ nous avons par exemple la décomposition

$$\frac{1}{1-z^r} = \sum_{\omega \in U_r} \frac{A_\omega}{\omega - z} \quad (13.861)$$

où U_r est le groupe des racines r^e de l'unité défini en (3.13). Les nombres A_ω peuvent alors être déterminés en effectuant la somme. Le dénominateur commun sera $1 - z^2$ tandis que les A_ω sont déterminés en égalant le numérateur à 1.

Exemple 13.261

Pour décomposer la fraction $\frac{1}{1-x^2}$ nous savons que les racines sont ± 1 . Donc nous écrivons

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}. \quad (13.862)$$

Nous trouvons les valeurs de A et B en effectuant la somme :

$$\frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2} = \frac{A+B + (A-B)x}{1-x^2}. \quad (13.863)$$

Les coefficients A et B doivent donc vérifier $A+B=1$ et $A-B=0$. Au final,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}. \quad (13.864)$$

△

Chapitre 14

Arc paramétré

14.1 Définitions, quelques exemples remarquables

Définition 14.1.

Un **arc paramétré** dans $\mathbb{R}^p$ est un couple (I, γ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et γ est une application continue de I dans $\mathbb{R}^p$. Nous disons que (I, γ) est un arc paramétré **compact** (ou un **chemin** dans $\mathbb{R}^p$) lorsque I est compact dans $\mathbb{R}$.

L'intervalle I d'un arc paramétré compact est toujours de la forme $[a, b]$, étant donné que tous les intervalles compacts de $\mathbb{R}$ sont de cette forme. Un **sous arc** de (I, γ) est un arc de la forme (I_0, γ) avec $I_0 \subset I$.

Le grand avantage des arcs paramétrés par rapports aux graphes de fonctions est le le graphe peut «faire des retours en arrière», ou bien des auto intersections. Outre les deux exemples typiques de la la figure 14.1, un exemple classique est la droite verticale. Les fonctions $y = ax + b$ permettent de décrire toutes les droites, sauf les droites verticales. Dans le cadre des courbes paramétrées, les droites verticales et horizontales sont sur pied d'égalité. Quelques exemples classiques :

Droite horizontale Une droite horizontale à la hauteur a est donnée par la courbe paramétrée $\gamma(t) = (t, a)$, avec $t \in I = \mathbb{R}$.

Droite verticale Une droite verticale à la distance b de l'origine est donnée par la courbe paramétrée $\gamma(t) = (b, t)$, avec $t \in I = \mathbb{R}$.

Graphe d'une fonction Le graphe d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par l'arc $\gamma(t) = (t, f(t))$.

Un cercle Le cercle de rayon R est donné par l'arc $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$.

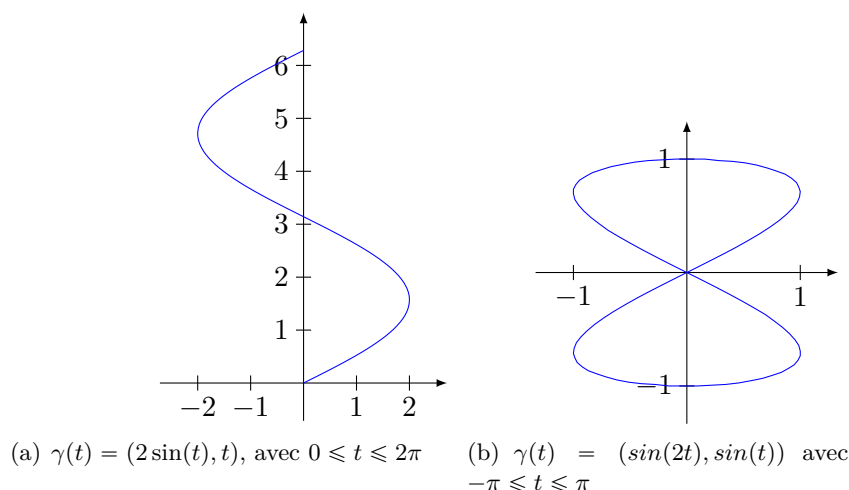


FIGURE 14.1 – Des exemples d'arcs paramétrés. Ceux ne sont pas des graphes.

Remarque 14.2.

Afin d'alléger la notation, nous allons le plus souvent désigner l'arc (I, γ) simplement par la fonction γ . Il est cependant toujours *très* important de savoir sur quel intervalle nous considérons le chemin. Cela dépendra le plus souvent du contexte, et nous indiquerons l'intervalle I explicitement lorsqu'une ambiguïté est à craindre.

Par exemple, lorsque nous considérons le cercle $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, le plus souvent l'intervalle de variation de t sera $I = [0, 2\pi]$. Par contre, si nous considérons la droite $\gamma(t) = (t, 2t)$, l'intervalle de variation de t sera naturellement $I = \mathbb{R}$.

14.2 Courbes paramétrés**14.2.1 Définitions et exemples****Définition 14.3.**

Un **chemin** dans $\mathbb{R}$ est une application continue

$$\begin{aligned} \sigma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \sigma(t). \end{aligned} \quad (14.1)$$

La fonction $\sigma'(t)$ est la **vitesse** du chemin σ . Si la fonction $t \mapsto \sigma(t)$ est dérivable, on dit que $\sigma''(t)$ est l'**accélération**. Les points $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ sont les extrémités du chemin. L'ensemble

$$\{\sigma(t) \text{ tel que } t \in [a, b]\} \quad (14.2)$$

est la **courbe** σ .

Exemple 14.4

Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Le chemin

$$\sigma(t) = x_0 + tv \quad (14.3)$$

est une droite. Sa vitesse est $\sigma'(t) = v$. △

Exemple 14.5

La courbe

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (14.4)$$

avec $t \in [0, 2\pi[$ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Notez que si on prend $t \in [0, 4\pi[$, nous avons un *autre* chemin ; c'est le même cercle unité, mais parcouru *deux* fois. Même si le «dessin» (le graphe) des deux est le même, le chemin n'est pas le même.

Le chemin

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

est le cercle unité parcouru une fois dans le sens inverse. Encore une fois le «dessin» est le même, mais le chemin n'est pas le même. △

Exemple 14.6

Le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (14.6)$$

est un chemin dont l'image est la parabole d'équation $y = x^2$. △

L'importance de la dérivée du chemin réside en le fait qu'elle donne la tangente. En effet le vecteur $\sigma'(t)$ est tangent au graphe de σ au point $\sigma(t)$.

Corollaire 14.7.

La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon.

Démonstration. Nous savons que pour un cercle,

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \quad (14.7)$$

Un point général du cercle a pour abscisse $x = R \cos(\theta)$. En remplaçant nous trouvons le coefficient directeur suivant pour la tangente :

$$y'(R \cos(\theta)) = -\frac{1}{\tan(\theta)}. \quad (14.8)$$

Par conséquent une droite perpendiculaire à la tangente aurait comme coefficient directeur le nombre $\tan(\theta)$. Or cela est bien le coefficient directeur du rayon qui joint le point $(0, 0)$ au point $(R \cos(\theta), R \sin(\theta))$. □

Exemple 14.8

Pour le cercle,

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad (14.9)$$

la dérivée est donnée par

$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}. \quad (14.10)$$

Le produit scalaire $\sigma(t) \cdot \sigma'(t)$ est nul. Le vecteur $\sigma'(t)$ est donc bien tangent (corollaire 14.7). △

Exemple 14.9

Le courbe donnée par le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad (14.11)$$

est une hélice. Sa vitesse est

$$\sigma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.12)$$

Notez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$. △

Remarque 14.10.

Lorsqu'on parle d'une courbe dans l'espace, l'intervalle sur lequel on considère la variation du paramètre est une donnée fondamentale. Elle fait partie intégrante de la définition de la courbe.

14.3 Longueur d'arc

Nous voulons définir et étudier la notion de longueur d'un arc paramétré. Pour cela, le plus raisonnable est d'approcher l'arc par des petits segments de droites (dont les longueurs sont évidentes), et d'extraire la «meilleure» approximation.

Une des notions clefs pour la suite est celle de subdivision d'intervalles. Cette notion sera encore utilisée par la suite à propos des intégrales.

Définition 14.11.

Si I est un intervalle d'extrêmes a et b avec $a < b$, nous appelons **subdivision finie** de I un choix de nombres t_i tels que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b. \quad (14.13)$$

Nous disons qu'une subdivision σ' est **plus fine** que la subdivision σ si l'ensemble des points de σ est inclus à celui des points de σ' . Dans ce cas, la subdivision σ' est un **raffinement** de σ . Nous désignons par $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des subdivisions finies de l'intervalle I .

Dans la suite, toutes les subdivisions que nous considérons seront des subdivisions finies. Aussi nous parlerons simplement de *subdivisions* sans préciser. Nous allons souvent noter $\sigma = (t_i)_{i=1}^n$ pour désigner la subdivision formée par les nombres t_i . Il faut garder en tête que dans une subdivision, les nombres *sont ordonnés*.

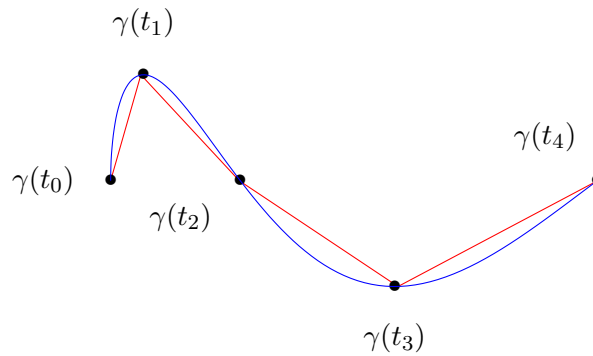


FIGURE 14.2 – La longueur d'un découpage. La somme des longueurs des segments droits est facile à calculer.

Définition 14.12.

Soit un arc paramétré compact (I, γ) et une subdivision $\sigma = (t_i)_{i=1}^n$ de $I = [a, b]$. À partir de γ et du découpage σ nous définissons le nombre (voir figure 14.2)

$$l_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|. \quad (14.14)$$

On appelle **longueur** de l'arc γ le nombre

$$l(\gamma) = \sup_{\sigma} l_\sigma \in [0, \infty]. \quad (14.15)$$

Nous disons que γ est **rectifiable** lorsque $l(\gamma) < \infty$.

Lorsque nous voulons spécifier sur quel intervalle nous considérons l'arc, nous noterons $l(I, \gamma)$ au lieu de $l(\gamma)$ pour être plus précis.

Par l'inégalité triangulaire, si σ_1 est plus fine que σ , nous avons

$$l_\sigma(\gamma) \leq l_{\sigma_1}(\gamma), \quad (14.16)$$

Comme cela peut être vu sur la figure 14.3.

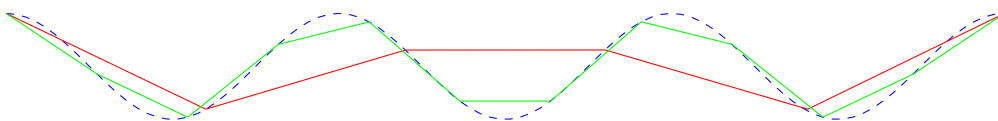


FIGURE 14.3 – Il est visible que la longueur donnée par l'approximation par des petits segments (verts) est plus longue et plus précise que celle donnée par les longs segments (rouge).

Dans la vie réelle, il est souvent difficile et peu pratique de calculer le supremum «à la main». C'est pourquoi nous allons travailler à exprimer la longueur d'un arc à l'aide d'une intégrale (théorème 14.17).

Lemme 14.13.

Nous avons $l(\gamma) = 0$ si et seulement si $\gamma(t)$ est un vecteur constant.

Démonstration. Si l'application $\gamma(t)$ est constante, le résultat est évident. Supposons maintenant que γ ne soit pas constante. Cela signifie qu'il existe t_1 et t_2 dans I tels que $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Dans ce cas, si nous prenons le découpage $\sigma = \{a, t_1, t_2, b\}$, la somme (14.14) contient au moins le terme non nul $\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|$, et donc $l_\sigma(\gamma) > 0$. Par définition du supremum, nous avons alors $l(\gamma) \geq l_\sigma(\gamma) > 0$. $\square$

Proposition 14.14.

Soit (I, γ) un arc paramétré compact.

(1) Si $\gamma' = (I', \gamma)$ avec $I' \subset I$, alors $l(\gamma') \leq l(\gamma)$.

(2) Soit $c \in [a, b]$, et considérons les arcs $\gamma_1 = ([a, c], \gamma)$ et $\gamma_2 = ([c, b], \gamma)$. Alors

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \quad (14.17)$$

En particulier, γ est rectifiable si et seulement si γ_1 et γ_2 le sont.

Démonstration. (1) Nous notons $I = [a, b]$ et $I' = [a', b']$. Étant donné que $I' \subset I$, nous avons

$$a \leq a' < b' \leq b. \quad (14.18)$$

Pour chaque subdivision $\sigma_0 : a' = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b'$ de I' , nous pouvons construire une subdivision de I en «ajoutant» les points a et b , c'est à dire

$$\sigma : a \leq t_0 < \dots < t_n \leq b. \quad (14.19)$$

Si nous calculons $l_\sigma(\gamma)$, nous avons tous les termes qui arrivent dans $l_{\sigma_0}(\gamma')$ plus le premier et dernier terme : $\|\gamma(t_0) - \gamma(a)\|$ et $\|\gamma(b) - \gamma(t_n)\|$. Nous avons donc

$$l_{\sigma_0}(\gamma') \leq l_\sigma(\gamma) \leq \sup_{\sigma} l_\sigma(\gamma) = l(\gamma). \quad (14.20)$$

Étant donné que pour toute subdivision σ_0 nous avons $l_{\sigma_0}(\gamma') \leq l(\gamma)$, en prenant le supremum sur les subdivision σ_0 de I' , nous avons comme annoncé

$$l(\gamma') \leq l(\gamma). \quad (14.21)$$

(2) Soit $\sigma = \{t_i\}$ une subdivision de $[a, b]$. Nous considérons les subdivision σ_1 et σ_2 définies comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: \{t_i \text{ tel que } t_i < c\} \cup \{c\}, \\ \sigma_2 &: \{t_i \text{ tel que } t_i > c\} \cup \{c\}. \end{aligned} \quad (14.22)$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$l_\sigma(\gamma) \leq l_{\sigma \cup \{c\}}(\gamma) = l_{\sigma_1}(\gamma_1) + l_{\sigma_2}(\gamma_2) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \quad (14.23)$$

Nous avons donc

$$l(\gamma) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \quad (14.24)$$

Nous prouvons maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Étant donné que $l(\gamma_1)$ est le supremum des quantités $l_{\sigma_1}(\gamma_1)$ lorsque σ_1 parcourt toutes les subdivision possibles, il existe une partition σ_1^ε telle que (idem pour γ_2)

$$\begin{aligned} l_{\sigma_1^\varepsilon}(\gamma_1) + \frac{\varepsilon}{2} &> l(\gamma_1), \\ l_{\sigma_2^\varepsilon}(\gamma_2) + \frac{\varepsilon}{2} &> l(\gamma_2), \end{aligned} \quad (14.25)$$

où σ_1^ε est une subdivision de $[a, c]$ et σ_2^ε en est une de $[c, b]$. En faisant la somme des deux équations (14.25), nous trouvons

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) < l_{\sigma_1^\varepsilon}(\gamma_1) + l_{\sigma_2^\varepsilon}(\gamma_2) + \varepsilon = l_{\sigma_1^\varepsilon \cup \sigma_2^\varepsilon}(\gamma) \leq l(\gamma) + \varepsilon. \quad (14.26)$$

L'inégalité $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) < l(\gamma) + \varepsilon$ étant valable pour tout ε , nous avons

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma). \quad (14.27)$$

Cette inégalité, combinée avec l'inégalité (14.24), donne bien $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. □

14.4 Abscisse curviligne

Définition 14.15.

Soit (I, γ) un arc rectifiable compact avec $I = [a, b]$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto l([a, t], \gamma) \end{aligned} \quad (14.28)$$

est la **longueur d'arc** de γ .

Cette fonction nous permet de calculer la distance (suivant la courbe) entre deux points arbitraires parce que si $a \leq t < u \leq b$, nous avons

$$l([t, u], \gamma) = \varphi(u) - \varphi(t). \quad (14.29)$$

En effet,

$$\varphi(u) - \varphi(t) = l([a, u], \gamma) - l([a, t], \gamma), \quad (14.30)$$

mais en utilisant la proposition 14.14, nous avons

$$l([a, u], \gamma) = l([a, t], \gamma) + l([t, u], \gamma). \quad (14.31)$$

Proposition 14.16.

La longueur d'arc d'un arc rectifiable compact est une fonction continue et croissante.

Démonstration. Soit (I, γ) un arc paramétré rectifiable compact avec $I = [a, b]$. Afin de montrer que φ est croissante, prenons $t \in I$ ainsi que $h > 0$ et montrons que $\varphi(t+h) \geq \varphi(t)$. La proposition 14.14 implique que

$$l([a, t+h], \gamma) = l([a, t], \gamma) + l([t, t+h], \gamma), \quad (14.32)$$

c'est à dire

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + l([t, t+h], \gamma) \geq \varphi(t). \quad (14.33)$$

Pour la continuité, soit t fixé dans $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Il nous faut démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si s est dans $[0, \eta]$ alors

$$|\varphi(t+s) - \varphi(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Étant donné que $l([t, b], \gamma)$ est le supremum des $l_\sigma([t, b], \gamma)$, il existe une subdivision $\sigma : t, t_1, \dots, t_{n-1}, b$ telle que

$$l_\sigma([t, b], \gamma) > l([t, b], \gamma) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(b) - \varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.34)$$

La continuité de γ implique qu'il existe un η tel que

$$s \in [0, \eta] \Rightarrow \|\gamma(t+s) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (14.35)$$

Quitte à prendre η encore plus petit, nous supposons que $t + \eta < t_1$. Soit $s \in [0, \eta]$ et considérons la subdivision de $[t, b]$ donnée par $\sigma' = \sigma \cup \{t + s\}$. Étant donné que σ' est plus fine que σ , le nombre $l_\sigma([t, b], \gamma)$ est inférieur ou égal à $l_{\sigma'}([t, b], \gamma)$. Nous avons donc les inégalités

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq l_\sigma([t, b], \gamma) \\ &\leq l_{\sigma'}([t, b], \gamma) \\ &= \|\gamma(t + s) - \gamma(t)\| + l_{\sigma' \setminus \{t\}}([t + s, b], \gamma) \\ &\leq \|\gamma(t + s) - \gamma(t)\| + \varphi(b) - \varphi(t + s) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(b) - \varphi(t + s). \end{aligned} \quad (14.36)$$

Au final, nous avons trouvé que

$$\varphi(t + s) - \varphi(t) \leq \varepsilon, \quad (14.37)$$

ce qui prouve que φ est continue au point t . $\square$

En guise de paramètre sur un arc, nous pouvons utiliser la longueur d'arc elle-même. En effet si (I, γ) est un arc de longueur l , nous pouvons donner le même arc avec le couple $([0, l], g)$ où g est la fonction qui au réel s fait correspondre l'élément $\gamma(\varphi^{-1}(s))$ de $\mathbb{R}^n$. Dire

$$P = (\gamma \circ \varphi^{-1})(s) \quad (14.38)$$

revient à dire que le point P est le point sur la courbe sur lequel on tombe après avoir marché une distance s sur la courbe.

Nous allons revenir sur ce «changement de paramètre» plus tard, en particulier dans la section 14.6.

14.4.1 Formule intégrale de la longueur

Nous pouvons voir un chemin γ comme étant la trajectoire d'une particule en fonction du temps. Sa vitesse à l'instant t est le vecteur $\gamma'(t)$, tandis que sa vitesse *scalair*e est le nombre $\|\gamma'(t)\|$. Une question naturelle est de savoir quelle est la longueur de la trajectoire parcourue entre $t = a$ et $t = b$.

Si nous prenons un petit intervalle de temps dt , nous pouvons supposer que le mobile avance à la vitesse constante $\|\gamma'(t)\|$. Cela ferait un trajet parcouru de longueur $\|\gamma'(t)\|dt$. Nous nous attendons donc à une formule de la forme suivante pour la longueur de γ :

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (14.39)$$

Plus explicitement, si $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, alors nous aurions la formule

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (14.40)$$

Théorème 14.17.

Soit (I, γ) un arc paramétré compact de classe $\mathcal{C}^1$. Alors γ est rectifiable et

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma 1, \quad (14.41)$$

où $I = [a, b]$.

Démonstration. L'égalité avec l'intégrale le long de γ de la fonction 1 est simplement la définition 13.134 de l'intégrale curviligne.

Si $\sigma = \{t_i\}$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\begin{aligned} l_\sigma(\gamma) &= \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned} \quad (14.42)$$

Cela prouve déjà que

$$l(\gamma) = \sup_\sigma l_\sigma(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (14.43)$$

Nous devons maintenant prouver l'inégalité inverse.

Notons φ l'abscisse curviligne $\varphi(t) = l([a, t], \gamma)$. Cette dernière vérifie

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = l([t, t+h], \gamma) \geq \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|, \quad (14.44)$$

et en particulier

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\| \leq \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}. \quad (14.45)$$

D'autre part, en utilisant (14.43) sur le segment $[t, t+h]$, nous avons

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = l([t, t+h], \gamma) \leq \int_t^{t+h} \|\gamma'(u)\| du. \quad (14.46)$$

Cela nous permet de continuer l'inéquation (14.45) en

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\| \leq \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(u)\| du. \quad (14.47)$$

Prenons la limite $h \rightarrow 0$. À gauche nous reconnaissons la formule de la dérivée, et nous obtenons $\|\gamma'(t)\|$; au centre nous avons $\varphi'(t)$ et à droite, si $n(u)$ représente une primitive de la fonction $u \mapsto \|\gamma'(u)\|$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{n(t+h) - n(t)}{h} = n'(t) = \|\gamma'(t)\|. \quad (14.48)$$

Au final,

$$\|\gamma'(t)\| \leq \varphi'(t) \leq \|\gamma'(t)\|, \quad (14.49)$$

c'est à dire $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ et donc par le théorème fondamental du calcul intégral 13.60,

$$\varphi(t) - \varphi(a) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \quad (14.50)$$

Par construction de la longueur d'arc, $\varphi(a) = 0$ et en posant $t = b$ nous obtenons la relation recherchée :

$$l(\gamma) = \varphi(b) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du. \quad (14.51)$$

□

Remarque 14.18.

Cela est cohérent avec 13.44, mais il faut garder en tête que $l(\gamma)$ n'est pas la mesure de Lebesgue de l'image de γ dans $\mathbb{R}^2$. Cette dernière est nulle.

Exemple 14.19

Soient donc a et b deux points de $\mathbb{R}^m$, et γ la droite joignant a à b , c'est à dire

$$\gamma(t) = (1 - t)a + tb \quad (14.52)$$

avec $t \in [0, 1]$. Le théorème 14.17 nous enseigne que la longueur de ce chemin est

$$l([0, 1], \gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \| -a + b \| = \|b - a\|, \quad (14.53)$$

qui est bien la distance entre a et b . $\triangle$

Exemple 14.20

Considérons l'arc de cercle de rayon R interceptée par l'angle θ présenté sur la figure 14.4.

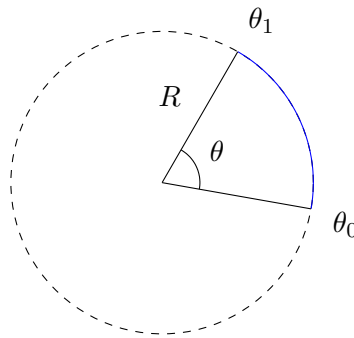


FIGURE 14.4 – Quelle est la longueur de la partie bleue de ce cercle de rayon R ?

Par définition, cette longueur sera

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} dt = R(\theta_1 - \theta_0). \quad (14.54)$$

Le radian comme unité de mesure d'angle est donc l'unité parfaite : elle est la longueur d'arc interceptée (si le rayon est $R = 1$). $\triangle$

Exemple 14.21

La longueur de l'hélice

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ \sqrt{5}t \end{pmatrix} \quad (14.55)$$

pour $t \in [0, 2\pi]$ est donnée par

$$l(\sigma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{4 \sin^2(2t) + 4 \cos^2(2t) + 5} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{9} = 12\pi. \quad (14.56)$$

$\triangle$

Définition 14.22.

Soit $\sigma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, un chemin et $\sigma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, un autre chemin. On dit que ces chemins sont **équivalents** si il existe une fonction $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ strictement croissante telle que $\sigma_1(t) = \sigma_2(\varphi(t))$.

Deux chemins équivalents parcourent la même courbe dans le même sens. Ils ne le parcourent toutefois pas à la même vitesse. On dit que les chemins sont **opposée** si la fonction φ de la définition est strictement décroissante. Dans ce cas, ils ont la même image, mais parcourue dans le sens

opposés. Nous disons que deux chemins équivalents sont un **changement de paramétrisation** pour la même courbe.

Dans le cas d'une paramétrisation équivalente, nous avons $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$. Les points de départ et d'arrivée des deux paramètres coïncident. Dans le cas d'un paramètre qui va dans le sens opposé par contre nous avons automatiquement $\varphi(a) = d$ et $\varphi(b) = c$.

Proposition 14.23.

La longueur d'une courbe ne dépend pas du paramètre (équivalent ou opposé) choisi.

Démonstration. Soient $\sigma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\sigma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(\varphi(t)) \quad (14.57)$$

où $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ est une bijection strictement monotone. Par définition on a

$$l(\sigma_1) = \int_a^b \|\sigma_1'(t)\| dt. \quad (14.58)$$

Nous pouvons exprimer la dérivée de σ_1 en termes de celle de σ_2 en dérivant la relation (14.57) :

$$\sigma_1'(t) = \varphi'(t) \sigma_2'(\varphi(t)). \quad (14.59)$$

En ce qui concerne la norme,

$$\|\sigma_1'(t)\| = |\varphi'(t)| \|\sigma_2'(\varphi(t))\|. \quad (14.60)$$

Notez dans cette relation que $\varphi'(t)$ est un nombre (et non un vecteur). Étant donné que nous avons supposé que φ était monotone, soit elle est monotone croissante et $\|\varphi'(t)\| = \varphi'(t)$ pour tout t , soit elle est monotone décroissante et $\|\varphi'(t)\| = -\varphi'(t)$ pour tout t .

Considérons d'abord le premier cas, c'est à dire $\|\varphi'(t)\| = \varphi'(t)$. Nous posons $s = \varphi(t)$, $ds = \varphi'(t)dt$. En remplaçant cela dans la formule de la longueur est

$$\begin{aligned} l(\sigma_1) &= \int_a^b \varphi'(t) \|\sigma_2'(\varphi(t))\| dt \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \|\sigma_2'(s)\| ds \\ &= \int_c^d \|\sigma_2'(s)\| ds \\ &= l(\sigma_2). \end{aligned} \quad (14.61)$$

Si nous considérons maintenant une paramétrisation strictement décroissante. Dans ce cas, $\varphi'(t) \leq 0$ et $\|\varphi'(t)\| = -\varphi'(t)$. Nous posons encore une fois $s = \varphi(t)$, $ds = \varphi'(t)dt$. Ici il ne faut pas oublier que $\varphi(a) = d$ et $\varphi(b) = c$. Le calcul est à part cela le même en faisant attention au signe :

$$\begin{aligned} l(\sigma_1) &= \int_a^b \varphi'(t) \|\sigma_2'(\varphi(t))\| dt \\ &= - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \|\sigma_2'(s)\| ds \\ &= - \int_d^c \|\sigma_2'(s)\| ds \\ &= \int_c^d \|\sigma_2'(s)\| ds \\ &= l(\sigma_2). \end{aligned} \quad (14.62)$$

Nous avons changé le signe en changeant l'ordre des bornes. □

14.5 Éléments de longueur

14.5.1 Éléments de longueur : cartésiennes

Étant donné que la longueur d'arc d'une courbe paramétrée (I, γ) est donnée par l'intégrale de $\|\gamma'(t)\|$, il est naturel d'appeler le nombre $\|\gamma'(t)\| dt$, **l'élément de longueur** de la courbe γ au point $\gamma(t)$.

En coordonnées cartésiennes dans le plan, une courbe paramétrée est donnée par

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad (14.63)$$

et l'élément de longueur est

$$\|x'(t)\| dt = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2} dt. \quad (14.64)$$

14.5.2 Éléments de longueur : polaires (1)

En coordonnées polaires, une courbe est donnée par

$$\gamma(t) = (\rho(t), \theta(t)), \quad (14.65)$$

et le passage aux cartésiennes se fait via les formules

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos(\theta(t)) \\ y(t) = \rho(t) \sin(\theta(t)). \end{cases} \quad (14.66a)$$

$$(14.66b)$$

L'élément de longueur se trouve directement en remplaçant $x(t)$ et $y(t)$ dans la formule (14.64). Les dérivées sont données par

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \theta'(t) \sin \theta(t) \\ y'(t) &= \rho'(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \theta'(t) \cos \theta(t), \end{aligned} \quad (14.67)$$

et un calcul montre que

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (\rho'(t))^2 + (\rho(t))^2 (\theta'(t))^2. \quad (14.68)$$

Nous reviendrons plus en détail sur le concept de changement de paramétrisation (ici, les polaires) à la section 14.6.

14.5.3 Éléments de longueur : polaires (2)

Parfois on utilise θ comme paramètre. L'équation de la courbe est alors donnée en coordonnées polaires sous la forme

$$\rho(\theta) = f(\theta), \quad (14.69)$$

où f est une fonction réelle et il faut comprendre que nous parlons de la courbe $(\rho(\theta), \theta)$ en coordonnées polaires. En coordonnées cartésiennes, cette courbe est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin(t) \end{cases} \quad (14.70a)$$

$$(14.70b)$$

avec t qui parcourt le plus souvent l'intervalle $[0, 2\pi]$. Notez qu'il se peut que le domaine ne soit pas toujours $[0, 2\pi]$; cela peut dépendre des circonstances. Quoi qu'il en soit, la donnée du domaine fait partie de la donnée d'une courbe, et il ne peut donc pas y avoir d'équivoques à ce niveau.

Nous utilisons à nouveau la formule (14.64) en y mettant les valeurs (14.70) :

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t) \cos(t) - \rho(t) \sin(t) \\ y'(t) = \rho'(t) \sin(t) + \rho(t) \cos(t), \end{cases} \quad (14.71a)$$

$$(14.71b)$$

et

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \rho'(t)^2 + \rho(t)^2. \quad (14.72)$$

Remarque 14.24.

N'oubliez pas, en utilisant ces formules, que ce qui rentre dans l'intégrale est la *racine carrée* de $(x')^2 + (y')^2$.

Exemple 14.25

Calculons la circonférence du cercle. En coordonnées polaires, le graphe du cercle correspond à l'équation

$$(\rho(t), \theta(t)) = (R, t) \quad (14.73)$$

où R est constante (le rayon du cercle) et t va de 0 à 2π . En substituant dans l'équation (14.68), l'élément de longueur à intégrer est seulement

$$\sqrt{R^2} = R \quad (14.74)$$

parce que $\rho'(t) = 0$ et $\theta'(t) = 1$. La longueur du cercle est alors directement donnée par

$$l = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R. \quad (14.75)$$

Nous pouvions aussi faire le calcul en coordonnées cartésiennes. Alors la courbe est donnée par les équations

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(t) \\ y(t) &= R \sin(t) \end{aligned} \quad (14.76)$$

et $t \in [0, 2\pi]$. La circonférence du cercle est alors

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R. \quad (14.77)$$

△

Remarque 14.26.

Il faut bien comprendre que quand on parle de courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes on pense à une courbe dont le paramètre est, par exemple, t et les équations de la courbe sont $(x(t), y(t))$. Cela ne veut pas dire que x ou y soit le paramètre. Le cas où x ou y est le paramètre est un cas particulier qui est possible seulement pour certaines courbes et notamment pour les graphes. Le cercle de rayon 1 n'est pas un graphe, donc si on veut utiliser x ou y comme paramètre il faut d'abord découper la courbe en deux morceaux, par exemple, la moitié inférieure ($y < 0$) et la moitié supérieure ($y > 0$).

Exemple 14.27

Une **cycloïde** est une courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad (14.78a)$$

$$(14.78b)$$

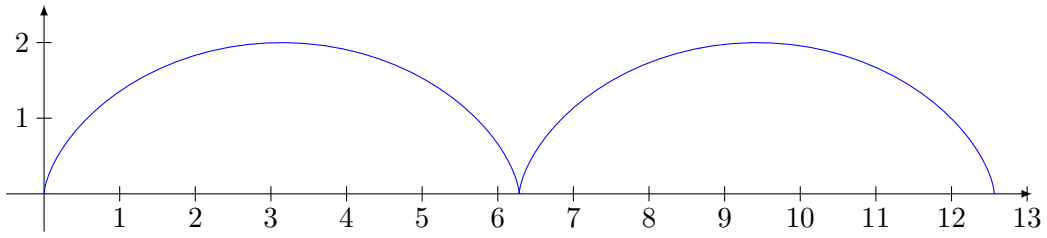
avec $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Comme montré sur la figure 14.5, la cycloïde donne lieu à un graphe périodique. Il est possible de montrer (le faire) que le premier arc correspond à $t \in [0, 2\pi]$. Nous voulons donc calculer la longueur de l'arc sur cet intervalle.

Nous avons $x'(t) = a(1 - \cos(t))$ et $y'(t) = a \sin(t)$, de telle façon que

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = a\sqrt{2 - 2\cos(t)} = a\sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|. \quad (14.79)$$

La longueur est donc donnée par

$$\int_0^{2\pi} 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 4a \int_0^{\pi} \sin(t) dt = 8a. \quad (14.80)$$

FIGURE 14.5 – La cycloïde de paramètre $a = 1$ entre 0 et 4π .

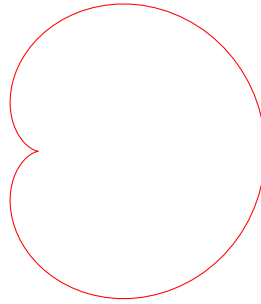
△

Exemple 14.28

La **cardioïde** est la courbe donnée par

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta)). \quad (14.81)$$

avec $\theta \in [-\pi, \pi]$. Le nom de cette courbe provient de son graphe illustré à la figure 14.6.

FIGURE 14.6 – Une cardioïde, $\rho = 1 + \cos(\theta)$.

L'équation (14.81) est donnée sous la forme (14.69), c'est à dire que $\theta(t) = t$ et $\theta'(t) = 1$, et par conséquent l'élément de longueur est donné par

$$\begin{aligned} (\rho')^2 + (\rho)^2 &= (-a \sin(\theta))^2 + a^2(1 + \cos(\theta))^2 \\ &= a^2 \sin^2(\theta) + a^2(1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) \\ &= a^2(1 + 1 + 2\cos(\theta)) \\ &= 2a^2(1 + \cos(\theta)) \\ &= 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (14.82)$$

La longueur d'arc est donc donnée par

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) 2dt = 8a. \quad (14.83)$$

△

14.5.4 Approximation de la longueur par des cordes**Définition 14.29.**

Soit un arc paramétré (I, γ) . Un point $t \in I$ est dit **régulier** si $\gamma'(t) \neq 0$, et il est dit **critique** si $\gamma'(t) = 0$. Le point $t \in I$ est dit **birégulier** si les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants et non nuls.

Par extension, nous dirons également que le point $\gamma(t)$ lui-même est régulier, critique ou birégulier. Un arc est dit régulier lorsque tous ses points sont réguliers.

Note : dans le lemme 14.63 et ses dépendances, nous utilisons effectivement que l'arc γ est de classe C^2 .

Nous savons que la longueur d'une courbe est donné par le supremum sur toutes les subdivision de la longueur des cordes correspondantes. De plus l'inégalité triangulaire nous enseigne que plus la subdivision est fine, plus la longueur sera grande. Il est donc naturel de penser que sur un petit intervalle, la longueur de la courbe ne doit pas être très différente de la longueur de la corde correspondante.

La proposition suivante est un énoncé précis et quantitatif de ce fait.

Proposition 14.30.

Soit (I, γ) un arc de classe C^1 et $t_0 \in I$ un point régulier (c'est à dire $\gamma'(t_0) \neq 0$). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un $\delta > 0$ tel que on trouve $t, t' \in I \cap (t_0, \delta)$ tels que

$$\left| \int_t^{t'} \|\gamma'(u)\| du - \|\gamma(t) - \gamma(t')\| \right| \leq 2\varepsilon |t - t'|. \quad (14.84)$$

Intuitivement, cette proposition signifie qu'au voisinage de t_0 , la longueur d'arc est équivalente à celle de la corde.

Démonstration. Par la continuité de γ' (parce que γ est C^1), pour tout ε , il existe un δ tel que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)\| \leq \varepsilon. \quad (14.85)$$

Nous considérons la fonction

$$u \mapsto \gamma(u) - \gamma(t_0) - (u - t_0)\gamma'(t_0), \quad (14.86)$$

dont la dérivée (par rapport à u) est

$$\gamma'(u) - \gamma'(t_0). \quad (14.87)$$

Nous y appliquons la formule des accroissements finis entre t et t' choisis dans $I \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Il existe un u entre t et t' tel que

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(t_0) - (t - t_0)\gamma'(t_0) - \gamma(t') + \gamma(t_0) + (t' - t_0)\gamma'(t_0)\| \\ = |t - t'| \|\gamma'(u) - \gamma'(t_0)\| \\ \leq \varepsilon |t - t'|. \end{aligned} \quad (14.88)$$

En simplifiant ce qui peut être simplifié dans le membre de gauche, nous trouvons

$$\|\gamma(t) - \gamma(t') - (t - t')\gamma'(t_0)\| \leq \varepsilon |t - t'|. \quad (14.89)$$

Le membre de gauche peut être minoré en utilisant la proposition 5.32 :

$$\left| \|\gamma(t) - \gamma(t')\| - \|(t - t')\gamma'(t_0)\| \right| \leq \varepsilon |t - t'|. \quad (14.90)$$

D'autre part, les inégalités (5.13) montrent que

$$-\|\gamma'(u) - \gamma'(t_0)\| \leq \|\gamma'(u)\| - \|\gamma'(t_0)\| \leq \|\gamma'(u) - \gamma'(t_0)\|. \quad (14.91)$$

Si de plus u est compris entre t et t' , ces inégalités sont encore coincées entre $-\varepsilon$ et ε . En intégrant (14.91) par rapport à u entre t et t' , nous obtenons

$$\left| \int_t^{t'} \|\gamma'(u)\| du - (t - t')\|\gamma'(t_0)\| \right| \leq \varepsilon |t - t'|. \quad (14.92)$$

Afin d'alléger les notations pour la ligne suivante, nous notons A le nombre positif $\int_t^{t'} \|\gamma'(u)\| du$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left| A - \|\gamma(t) - \gamma(t')\| \right| &= \left| A - |t - t'| \|\gamma'(t_0)\| + |t - t'| \|\gamma'(t_0)\| - \|\gamma(t) - \gamma(t')\| \right| \\ &\leq \left| A - |t - t'| \|\gamma'(t_0)\| \right| + \left| |t - t'| \|\gamma'(t_0)\| - \|\gamma(t) - \gamma(t')\| \right|. \end{aligned} \quad (14.93)$$

L'équation (14.90) montre que le second terme est plus petit ou égal à $\varepsilon|t - t'|$. En ce qui concerne le premier terme, étant donné que A est positif,

$$\left| A - |t - t'| \|\gamma'(t_0)\| \right| \leq \left| A - (t - t') \|\gamma'(t_0)\| \right| \leq \varepsilon|t - t'|. \quad (14.94)$$

Au final, l'inéquation (14.93) donne

$$\left| A - \|\gamma(t) - \gamma(t')\| \right| \leq 2\varepsilon|t - t'|, \quad (14.95)$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

14.6 Arc géométrique

Définition 14.31.

Soient (I, γ) et (J, g) deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$. On dit qu'ils sont **équivalents** si il existe une bijection $\theta: I \rightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^k$, d'inverse de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $g = \gamma \circ \theta$. Nous notons $\gamma \sim g$ lorsque γ et g sont équivalents (les ensembles I et J sont sous-entendus).

Le passage d'une paramétrisation (I, γ) à une autre (J, g) se fait selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow \theta & \nearrow g & \\ J & & \end{array} \quad (14.96)$$

Proposition 14.32.

La relation donnée dans la définition 14.31 est une relation d'équivalence.

Démonstration. Les trois points d'une relation d'équivalence se vérifient en utilisant le fait que θ est inversible, et que l'inverse θ^{-1} jouit des mêmes propriétés de continuité ($\mathcal{C}^k$) que θ .

Réflexivité Nous avons $\gamma \sim \gamma$ avec $\theta = \text{Id}$.

Symétrie Si $\gamma \sim g$, alors nous avons une application θ telle que $g = \gamma \circ \theta$, et donc $\gamma = g \circ \theta^{-1}$, ce qui montre que $g \sim \gamma$.

Transitivité Si $\gamma \sim g$ et $g \sim h$ avec $g = \gamma \circ \theta$ et $h = g \circ \omega$, alors $h = \gamma \circ (\theta \circ \omega)$, ce qui montre que $\gamma \sim h$. $\square$

Si les arcs (I, γ) et (J, g) sont équivalents, les images dans $\mathbb{R}^n$ sont identiques, et décrivent donc «le même dessin». Nous allons préciser cette notion plus loin.

Définition 14.33.

Pour cette raison les classes d'équivalences sont appelées des **arcs géométriques** (de classe $\mathcal{C}^k$).

Si Γ est un arc géométrique, ses représentants sont dits des **paramétrages admissibles** ou, plus simplement *paramétrisation*. On dit que l'application $\theta: J \rightarrow I$ est un **changement de variable**. Nous disons que un arc géométrique est *compact* quand ses représentants sont compacts.

Lemme 14.34.

Dans le cas d'un arc $\mathcal{C}^1$, les changements de variables sont strictement monotones (croissants ou décroissants).

Démonstration. Nous considérons (I, γ) et (J, g) , deux paramétrisations différentes du même arc géométrique, et $\theta \in \mathcal{C}^1(J, I)$ le changement de variable. Nous allons noter t la variable sur I et s la variable sur J . Par définition, $\theta(\theta^{-1}(t)) = t$, et par conséquent,

$$\theta'(\theta^{-1}(t))(\theta^{-1})'(t) = 1. \quad (14.97)$$

En particulier $\theta'(\theta^{-1}(t))$ ne s'annule pas pour aucune valeur de t . Mais $\theta^{-1}(t)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans J , donc nous avons $\theta'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Cela signifie bien que θ est strictement monotone. En effet, θ' étant continue, elle ne peut pas changer de signe sans passer par zéro (théorème 11.50 des valeurs intermédiaires). $\square$

Théorème 14.35.

La longueur d'un arc est indépendante de sa paramétrisation, c'est à dire que les représentants d'un arc géométrique compact de classe C^1 ont même longueur.

Démonstration. Nous utilisons les mêmes notations que celles du lemme 14.34. Nous savons déjà que le changement de variable $\theta: J \rightarrow I$ est strictement monotone. Supposons que θ soit croissante. En effectuant un changement de variable dans l'intégrale qui donne la longueur¹ nous avons

$$\begin{aligned}
 l(\gamma) &= \int_I \|\gamma'(t)\| dt \\
 &= \int_J \|\gamma'(\theta(s))\| \theta'(s) ds \\
 &= \int_J \|\gamma'(\theta(s))\theta'(s)\| ds \\
 &= \int_J \left\| \frac{d}{ds}(\gamma \circ \theta)(s) \right\| ds \\
 &= \int_J \|g'(s)\| ds \\
 &= l(J, g).
 \end{aligned} \tag{14.98}$$

$\square$

Définition 14.36.

Nous nommons **longueur** d'un arc géométrique la longueur commune de tous ses représentants. On dit que l'arc géométrique est **rectifiable** si sa longueur est $< \infty$.

14.6.1 Abscisse curviligne et paramétrisation normale

Définition 14.37.

Soit (I, γ) un arc paramétré continu rectifiable. Nous appelons **abscisse curviligne** de γ toute application $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $t, t' \in I$ avec $t < t'$, nous ayons

$$l([t, t'], \gamma) = |\phi(t') - \phi(t)|. \tag{14.99}$$

Si il existe un $t_0 \in I$ tel que $\phi(t_0) = 0$, alors nous disons que t_0 est l'**origine** de l'abscisse ϕ .

Un arc paramétré (I, γ_N) continu rectifiable est dit **normal** si l'identité est une abscisse curviligne. Dans ce cas, pour tout choix de t et t' dans I avec $t < t'$, nous avons

$$l([t, t'], \gamma_N) = t' - t. \tag{14.100}$$

14.38.

Si γ est de classe C^1 et est une paramétrisation normale, alors pour tout x_1, x_2 dans le domaine nous avons

$$l([x_1, x_2], \gamma) = \int_{x_1}^{x_2} \|\gamma'(t)\| dt = x_2 - x_1. \tag{14.101}$$

Cela implique $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t .

1. Théorème 14.17.

Exemple 14.39

Le cercle unitaire est donné par l'arc

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad (14.102)$$

et $t \in [0, 2\pi]$. Pour tout choix de t et t' dans $[0, 2\pi]$, nous avons

$$l([t, t'], \gamma) = \int_t^{t'} \sqrt{\sin^2(u) + \cos^2(u)} du = t' - t. \quad (14.103)$$

Les angles exprimés en radians forment donc une paramétrisation normale du cercle de rayon 1.
△

Lemme 14.40.

Pour un arc paramétré compact, la longueur d'arc est une abscisse curviligne.

Démonstration. Par définition de la longueur d'arc φ , nous avons

$$\varphi(t') - \varphi(t) = l([a, t'], \gamma) - l([a, t], \gamma) = \diamond. \quad (14.104)$$

Supposons pour fixer les idées que $t' > t$. En utilisant la proposition 14.14, nous avons

$$l([a, t'], \gamma) = l([a, t], \gamma) + l([t, t'], \gamma), \quad (14.105)$$

et donc après simplification de deux termes,

$$\diamond = l([t, t'], \gamma), \quad (14.106)$$

ce qui est précisément la propriété demandée pour être une abscisse curviligne. □

Proposition 14.41.

Pour tout arc paramétré C^1 sans points critiques, il existe un changement de coordonnées qui rend l'arc normal.

Démonstration. Soit (I, γ) un arc de classe C^1 . Nous devons montrer qu'il existe un intervalle J et une application $\theta: J \rightarrow I$ de classe C^1 et d'inverse C^1 tel que l'arc (J, γ_N) soit C^1 où $\gamma_N = \gamma \circ \theta$.

Si $I = [a, b]$, nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \phi: I &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{aligned} \quad (14.107)$$

Étant définie par l'intégrale d'une fonction C^0 , la fonction ϕ est C^1 , et nous avons $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ pour tout $t \in I$. Vue comme application $\phi: [a, b] \rightarrow [0, l(\gamma)]$, l'application ϕ est bijective et d'inverse C^1 . Voyons cela point par point.

- (1) La fonction ϕ est injective parce que strictement croissante.
- (2) Elle est surjective parce que $\phi(a) = 0$ et $\phi(b) = l(\gamma)$.
- (3) La continuité de l'inverse est plus délicate. Soit $l \in [0, l(\gamma)]$ et $\varepsilon > 0$. Pour prouver la continuité de ϕ^{-1} en s , nous devons trouver un δ tel que

$$|s - s'| < \delta \Rightarrow |\phi^{-1}(s) - \phi^{-1}(s')| < \varepsilon. \quad (14.108)$$

Étant donné que s et s' sont dans l'image de ϕ , nous considérons les uniques t et t' tels que $s = \phi(t)$ et $s' = \phi(t')$. La quantité $\phi(t) - \phi(t')$ devient

$$\int_a^t \|\gamma'(u)\| du - \int_a^{t'} \|\gamma'(u)\| du = \int_t^{t'} \|\gamma'(u)\| du. \quad (14.109)$$

D'autre part, $\phi^{-1}(s) = t$ et $\phi^{-1}(s') = t'$, donc la condition (14.109) devient

$$\left| \int_{t'}^t \|\gamma'(u)\| du \right| \leq \delta \Rightarrow |t - t'| < \varepsilon. \quad (14.110)$$

Cela revient à la continuité des fonctions définies par des intégrales.

(4) La dérivée de son inverse est donnée par ²

$$(\phi^{-1})'(s) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(s))}. \quad (14.111)$$

Nous avons vu que ϕ^{-1} et ϕ' étaient continues. La fonction $(\phi^{-1})'$ étant exprimée en termes de ces deux fonctions elle est également continue.

Nous considérons l'arc paramétré (J, γ_N) avec $J = [0, l(\gamma)]$ et

$$\gamma_N(s) = (\gamma \circ \phi^{-1})(s). \quad (14.112)$$

Nous montrons maintenant que cette nouvelle paramétrisation est normale. Soient $0 \leq s \leq s' \leq l(\gamma)$,

$$\begin{aligned} l([s, s'], g) &= \int_s^{s'} \|\gamma'_N(u)\| du \\ &= \int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')} \|(\gamma'_N \circ \phi)(t)\| \phi'(t) dt \\ &= \int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')} \|(\gamma_N \circ \phi)'(t)\| dt \\ &= \int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(s')} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{\phi^{-1}(s')} \|\gamma'(t)\| dt - \int_0^{\phi^{-1}(s)} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \phi(\phi^{-1}(s')) - \phi(\phi^{-1}(s)) \\ &= s' - s, \end{aligned} \quad (14.113)$$

ce qui prouve que la paramétrisation (J, γ_N) est normale. $\square$

Nous retenons que la paramétrisation normale de γ est donnée par (J, γ_N) avec $J = [0, l(\gamma)]$ et

$$\gamma_N(s) = (\gamma \circ \phi^{-1})(s) \quad (14.114)$$

où

$$\begin{aligned} \phi: I &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{aligned} \quad (14.115)$$

Notons aussi que ϕ est une fonction croissante, étant l'intégrale d'une fonction positive.

Exemple 14.42

Trouvons les coordonnées normales pour la cycloïde donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)), \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad (14.116a)$$

$$(14.116b)$$

et $t \in]0, 2\pi[$. Relire l'exemple 14.27.

2. Pour obtenir cette formule, dérivez les deux membres de l'équation $\phi(\phi^{-1}(s)) = s$.

D'abord nous trouvons ϕ avec la formule (14.115) avec $a = 0$. En utilisant le bout de calcul (14.79), nous avons

$$\phi(t) = 2a \int_0^t \sin \frac{u}{2} du = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right). \quad (14.117)$$

Pour trouver $\phi^{-1}(s)$, nous résolvons l'équation

$$s = \phi(\phi^{-1}(s)) \quad (14.118)$$

par rapport à $\phi^{-1}(s)$. Dans un premier temps, nous trouvons

$$1 - \frac{s}{4a} = \cos \frac{\phi^{-1}(s)}{2}, \quad (14.119)$$

donc $\frac{\phi^{-1}(s)}{2} = \arccos(\frac{4a-s}{4a})$, et finalement

$$\phi^{-1}(s) = 2 \arccos \left(\frac{4a-s}{4a} \right). \quad (14.120)$$

Il nous reste à injecter cela dans les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ pour trouver $(\gamma_N)_x(s)$ et $(\gamma_N)_y(s)$. D'abord,

$$(\gamma_N)_x(s) = a[\phi^{-1}(s) - \sin(\phi^{-1}(s))]. \quad (14.121)$$

Nous utilisons maintenant la formule trigonométrique $\sin(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ afin de simplifier les expression :

$$\begin{aligned} (\gamma_N)_x &= a \left[2 \arccos \left(\frac{4a-s}{4a} \right) - 2 \sin \left(\arccos \left(\frac{4a-s}{4a} \right) \right) \cos \left(\arccos \left(\frac{4a-s}{4a} \right) \right) \right] \\ &= a \left[2 \arccos \left(\frac{4a-s}{4a} \right) - \frac{4a-s}{2a} \sqrt{1 - \left(\frac{4a-s}{4a} \right)^2} \right] \\ &= 2a \arccos \left(\frac{4a-s}{4a} \right) - \sqrt{8as - s^2} \frac{4a-s}{8a} \end{aligned} \quad (14.122)$$

où nous avons utilisé la formule $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Ensuite, pour obtenir $(\gamma_N)_y$ nous devons calculer

$$(\gamma_N)_y(s) = a[1 - \cos(\phi^{-1}(s))]. \quad (14.123)$$

Encore une fois, il est intéressant d'exprimer le cosinus en termes des angles divisés par deux : $\cos(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} (\gamma_N)_y &= a \left[1 - \cos^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2} + \sin^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2} \right] \\ &= a \left[2 - 2 \cos^2 \frac{\phi^{-1}(s)}{2} \right] \\ &= 2a \left[1 - \left(\frac{4a-s}{4a} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (14.124)$$

Dans cette paramétrisation, $s \in]0, 8a[$.

△

Exemple 14.43

La cardioïde $\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$ avec θ entre $-\pi$ et π . Avant d'utiliser la formule (14.115), nous devons trouver l'élément de longueur de la cardioïde. Étant donné la façon dont l'équation de la cardioïde nous est donnée, l'élément de longueur est donné par³ (14.72) :

$$\begin{aligned} \|\gamma'(u)\|^2 &= a^2 \sin^2(u) + a^2(1 + \cos(u))^2 \\ &= 2a^2(1 + \cos(u)), \end{aligned} \quad (14.125)$$

3. Nous vous déconseillons d'étudier cette formule par cœur. Sachez cependant la retrouver assez vite.

et par conséquent ⁴

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \int_0^t \sqrt{2a^2(1 + \cos(u))} du \\
 &= \int_0^t \sqrt{2a^2 \left(1 + \cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}\right)} du \\
 &= 2a \int_0^t \cos \frac{u}{2} du \\
 &= 4a \sin \frac{t}{2}.
 \end{aligned} \tag{14.126}$$

Pour trouver l'inverse, nous résolvons $\phi(\phi^{-1}(s)) = s$ par rapport à $\phi^{-1}(s)$:

$$\begin{aligned}
 4a \sin \left(\frac{\phi^{-1}(s)}{2} \right) &= s, \\
 \phi^{-1}(s) &= 2 \arcsin \left(\frac{s}{4a} \right).
 \end{aligned} \tag{14.127}$$

Avant d'écrire trop brutalement $\gamma_N(s) = (\gamma \circ \phi^{-1})(s)$, il faut comprendre comment est γ . Nous avons reçu la courbe sous forme polaire, c'est à dire

$$\gamma(t) = (\gamma_r(t), \gamma_\theta(t)) = (a(1 + \cos(t)), t). \tag{14.128}$$

C'est comme cela qu'il faut comprendre la donnée $\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$. Maintenant la formule $\gamma_N(s) = (\gamma \circ \phi^{-1})(s)$ devient

$$\begin{cases} (\gamma_N)_r(s) = \gamma_r(\phi^{-1}(s)) \\ (\gamma_N)_\theta(s) = \gamma_\theta(\phi^{-1}(s)). \end{cases} \tag{14.129a}$$

$$\tag{14.129b}$$

Étant donné que $\gamma_\theta(t) = t$, la seconde est facile :

$$(\gamma_N)_\theta(s) = 2 \arcsin \left(\frac{s}{4a} \right). \tag{14.130}$$

Pour la première,

$$(\gamma_N)_r(s) = a \left[1 + \cos \left(2 \arcsin \frac{s}{4a} \right) \right] = \frac{16a^2 - s^2}{8a}. \tag{14.131}$$

Nous écrivons donc le nouveau paramétrage en coordonnées polaires sous la forme

$$\left(\frac{16a^2 - s^2}{8a}, 2 \arcsin \frac{s}{4a} \right). \tag{14.132}$$

La question qui arrive maintenant est de savoir quel intervalle parcourt la nouvelle variable s . D'après le résultat de l'exemple 14.81, la longueur de la cardioïde est de $8a$ et nous avons donc $s \in [0, 8a]$. Cependant, la condition d'existence de arcsin nous interdit d'avoir s plus grand que $4a$ en valeur absolue. Où est le problème ?

Le problème est que nous avons changé l'origine de notre paramètre en donnant $\phi(t)$ comme une intégrale à partir de 0 au lieu de $-\pi$. Cela se voit en regardant de quel point nous partons : en $s = 0$ nous sommes sur le point $(2a, 0)$ tandis qu'avec le paramètre original, c'est à dire $\theta \in [-\pi, \pi]$, nous avons pour $\theta = -\pi$ le point $(0, -\pi)$.

Il se passe donc que si nous commençons à parcourir la cardioïde avec $s = 0$, nous partons du milieu, et nous ne parcourons donc pas tout. Étant donné que le «premier» point de la cardioïde est le point $(0, -\pi)$, le paramètre s commence en $s = -4a$, et nous avons comme intervalle :

$$s \in [-4a, 4a], \tag{14.133}$$

ce qui est en accord avec la conditions d'existence. $\triangle$

Quel enseignement tirer de cet exemple ? Lorsqu'on calcule $\phi(t)$ pour trouver les coordonnées normales, il y a deux solutions.

4. L'utilisation stricte de la formule (14.115) demanderait d'intégrer à partir de $-\pi$. Pour plus de simplicité, nous intégrons à partir de zéro, et nous verrons plus tard comment adapter l'intervalle du nouveau paramètre.

- (1) Utiliser strictement la formule $\phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$, en prenant bien comme borne de départ le point de départ de la paramétrisation de γ . À ce moment la coordonnée normale construite aura $[0, l(\gamma)]$ comme intervalle de variation.
- (2) Faire commencer l'intervalle d'intégration en zéro (ou ailleurs). Un bon choix peut simplifier quelques calculs, mais alors il faudra bien choisir la valeur de départ de la nouvelle coordonnées pour que le «premier» point de la courbe soit correct. Dans ce cas, la longueur de l'intervalle sera quand même $l(\gamma)$. Il n'y a donc pas de problèmes pour trouver la valeur du bout de l'intervalle de variation du paramètre normal.

Dans tous les cas, il faut bien préciser l'intervalle de variation du paramètre lorsqu'on donne une courbe paramétrée.

14.6.2 Tangente à une courbe paramétrée

Définition 14.44.

Soit (I, γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$. Nous disons que la courbe admet une **tangente** en $\gamma(t_0) \in \mathbb{R}^n$ lorsque les deux conditions suivantes sont remplies

- (1) $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ pour tout t dans un voisinage de t_0 ;
- (2) la direction de la droite qui passe par $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ admet une limite lorsque $t \rightarrow t_0$.

Dans ce cas, la tangente sera la droite passant par le point $\gamma(t_0)$ et dont la direction est donnée par la limite.

Dans cette définition, par **direction** d'une droite, nous entendons le vecteur de norme 1 parallèle à celle-ci sans tenir compte du signe. La tangente sera donc la droite passant par $\gamma(t_0)$ et parallèle au vecteur

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}. \quad (14.134)$$

Évidemment si nous avons écrit $\gamma(t_0) - \gamma(t)$, ça n'aurait pas changé la droite. Par abus de langage, nous parlerons souvent de «la direction u » même lorsque u n'est pas de norme 1.

Formellement, une direction est une classe d'équivalence de vecteurs pour la relation $u \sim v$ si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda v$, mais nous n'aurons pas besoin de cette précision ici.

Sans surprises, la tangente est à peu près toujours donnée par la dérivée lorsqu'elle existe. Plus précisément nous avons le

Théorème 14.45.

Soit (I, γ) , un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) et $t_0 \in I$ tel que

$$\gamma'(t_0) = \gamma''(t_0) = \dots = \gamma^{(q-1)}(t_0) = 0 \quad (14.135)$$

et

$$\gamma^{(q)}(t_0) \neq 0 \quad (14.136)$$

pour un entier $1 \leq q \leq k$. Alors γ admet une tangente en $\gamma(t_0)$ de direction $\gamma^{(q)}(t_0)$.

Démonstration. Le développement de $\gamma(t)$ en série de Taylor autour de t jusqu'à l'ordre q est

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)|t - t_0| + \frac{\gamma''(t_0)}{2}|t - t_0|^2 + \dots + \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{q!}|t - t_0|^q \\ &\quad + \varepsilon(t)|t - t_0|^q \end{aligned} \quad (14.137)$$

où ε est une application $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$. En utilisant les hypothèses, nous éliminons la majorité des termes dans le développement (14.137) :

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \frac{1}{q!} \gamma^{(q)}(t_0) |t - t_0|^q + \varepsilon(t) |t - t_0|^q. \quad (14.138)$$

La direction de la droite qui joint $\gamma(t)$ à $\gamma(t_0)$ est donc donnée par

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \frac{\frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q}{\|\frac{1}{q!}\gamma^{(q)}(t_0)|t - t_0|^q + \varepsilon(t)|t - t_0|^q\|} \quad (14.139)$$

et la limite lorsque $t \rightarrow t_0$ donne $\gamma^{(q)}(t_0)$ comme direction de la tangente. $\square$

Lorsque le théorème s'applique, le vecteur

$$\tau = \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{\|\gamma^{(q)}(t_0)\|} \quad (14.140)$$

est appelé le **vecteur unitaire tangent** en $\gamma(t_0)$ à l'arc paramétré γ .

Corollaire 14.46.

Si (I, γ) est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ régulier (c'est à dire $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t) alors l'arc admet une tangente en tout point et le vecteur unitaire de la tangente est donné par

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad (14.141)$$

pour tout t dans I .

Corollaire 14.47.

Si $\gamma = (J, \gamma_N)$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, normal, alors le vecteur unitaire de la tangente au point $\gamma_N(s)$ est donné par $\tau(s) = \gamma'_N(s)$.

Démonstration. Nous devons démontrer que dans le cas d'une paramétrisation normale nous avons $\|\gamma'_N(s)\| = 1$ pour tout s . Par définition,

$$l([s, s'], g) = \int_s^{s'} \|\gamma'_N(u)\| du = s' - s. \quad (14.142)$$

Par conséquent,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|\gamma'_N(u)\| du = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s + h - s}{h} = 1. \quad (14.143)$$

Cela implique que $\|\gamma'_N(s)\| = 1$, et donc en particulier que (J, γ_N) est un arc régulier. Le corollaire précédent montre alors que $\tau(s) = \gamma'_N(s)/\|\gamma'_N(s)\| = \gamma'_N(s)$. $\square$

Exemple 14.48

Considérons la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, et cherchons la tangente en $t_0 = 0$. En dérivant nous avons successivement

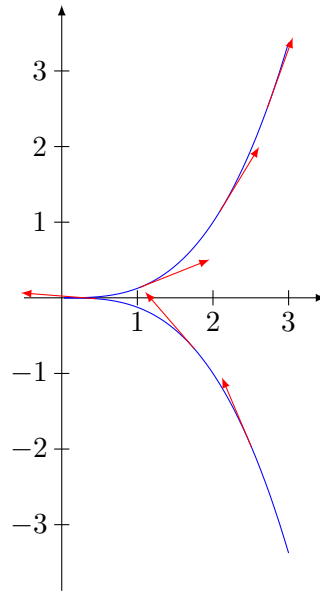
$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (t^2, t^3) \\ \gamma'(t) &= (2t, 3t^2) \\ \gamma''(t) &= (2, 6t). \end{aligned} \quad (14.144)$$

En posant $t = 0$, nous trouvons que $\gamma'(0) = 0$ mais $\gamma''(0) = (2, 0) \neq 0$. Le théorème nous dit donc que la direction de la tangente est horizontale. Nous pouvons faire le calcul directement :

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \frac{(t^2, t^3)}{\sqrt{t^4 + t^6}} = \frac{(t^2, t^3)}{t^2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{(1, t)}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad (14.145)$$

dont la limite $t \rightarrow 0$ est bien le vecteur horizontal $(1, 0)$.

La figure 14.7 montre quelque tangente, c'est à dire quelques vecteurs dans la direction $\gamma'(t)$ (pour les $t \neq 0$, il ne faut pas aller à la dérivée seconde). Nous remarquons que de part et d'autres du sommet, les vecteurs ne sont pas dirigés dans le même sens. *En tant que vecteurs* de norme 1,

FIGURE 14.7 – Quelques tangentes de la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.

ces vecteurs n'ont pas de limites quand $t \rightarrow 0$. Ce sont bien les *directions* qui ont une limite, parce que la direction ne tient pas compte du sens.

△

14.7 Repère de Frenet

Dans cette section, nous ne considérons que des courbes dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 14.49.

Soit $\gamma = (J, \gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^2$. Alors pour toute valeur de s dans J , nous avons

$$\tau(s) \cdot \tau'(s) = 0 \quad (14.146)$$

où $\tau(s) = \gamma'_N(s)$. C'est à dire que la dérivée seconde est perpendiculaire à la dérivée première.

Démonstration. La paramétrisation étant normale, nous avons

$$\|\gamma'_N(s)\|^2 = \sum_{i=1}^n x'_i(s)^2 = 1; \quad (14.147)$$

ce qui implique, en dérivant les deux membres, que

$$0 = 2 \sum_{i=1}^n x'_i(s) x''_i(s), \quad (14.148)$$

c'est à dire exactement $\gamma'_N(s) \cdot \gamma''_N(s) = 0$; d'où la thèse. □

Remarque 14.50.

Si nous n'utilisons pas des coordonnées normales, la proposition 14.49 n'est pas spécialement vraie. Prenons par exemple la courbe qui donne la parabole :

$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad (14.149a)$$

$$\gamma'(t) = (1, 2t) \quad (14.149b)$$

$$\gamma''(t) = (0, 2) \quad (14.149c)$$

Nous avons $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 4t$. Par conséquent, la dérivée seconde n'est la normale à la courbe que en $t = 0$. Cela est une propriété très intéressante des coordonnées normales : la dérivée seconde d'une coordonnées normale donne un vecteur normal à la courbe, c'est à dire perpendiculaire à la tangente.

Définition 14.51.

Soit $\gamma = (J, \gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^2$.

- (1) Le **vecteur unitaire tangent** est donné par le corollaire 14.46 : $\tau(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$.
 (2) La **normale principale** est le vecteur $\tau'(s)$. Le **vecteur unitaire normal** est le vecteur

$$\nu(s) = \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{\gamma_N''(s)}{\|\gamma_N''(s)\|}. \quad (14.150)$$

Nous déduirons une formule plus pratique en dehors des coordonnées normales en (14.178).

- (3) La **courbure** au point $\gamma_N(s)$ est le réel

$$c(s) = \|\tau'(s)\| = \|\gamma_N''(s)\|. \quad (14.151)$$

Note : il y a une notion de courbure signée qui sera donnée dans la définition 14.65.

- (4) Le **rayon de courbure** est le réel

$$R(s) = \frac{1}{c(s)} = \frac{1}{\|\gamma_N''(s)\|}. \quad (14.152)$$

Par la proposition 14.49, nous avons $\nu(s) \cdot \tau(s) = 0$. En combinant toutes les formules, nous avons les différentes expressions suivantes pour le vecteur normal unitaire :

$$\nu(s) = \frac{\gamma_N''(s)}{c(s)} = \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{\tau'(s)}{c(s)} = R(s)\tau'(s) = R(s)\gamma_N''(s). \quad (14.153)$$

Proposition 14.52.

La fonction courbure s'écrit $c = \|\gamma_N' \times \gamma_N''\|$.

Démonstration. Par le point (4) de la proposition 6.99, nous avons

$$\langle \gamma_N', \gamma_N'' \rangle^2 + \|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N'\|^2 \|\gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N''\|^2 \quad (14.154)$$

parce que, la paramétrisation étant normale, $\|\gamma_N'\| = 1$. Mais $\langle \gamma_N', \gamma_N'' \rangle = 0$, donc il reste $\|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2 = \|\gamma_N''\|^2$, d'où

$$c(s) = \|\gamma_N''(s)\| = \|\gamma_N'(s) \times \gamma_N''(s)\| \quad (14.155)$$

pour chaque s dans J . □

Définition 14.53.

Soit s un point birégulier (c'est à dire $\gamma_N'(s) \neq 0$ et $\gamma_N''(s) \neq 0$) de l'arc normal $\gamma = (J, \gamma_N)$. Le **vecteur unitaire de la binormale** est le vecteur

$$\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s) \quad (14.156)$$

Par leurs définitions, τ et ν sont unitaires, tandis que la proposition 14.49 montre qu'ils sont également orthogonaux. Les propriétés du produit vectoriel font que β est également unitaire, et simultanément orthogonal à τ et à ν .

Définition 14.54.

Le repère orthonormal $\{\gamma_N(s), \tau(s), \beta(s)\}$ est le **repère de Frenet** au point $\gamma_N(s)$.

Lemme 14.55.

Le vecteur unitaire normal est donné par $\nu(s) = \beta(s) \times \tau(s)$.

Démonstration. Ceci est une application de la formule d'expulsion (6.274) et de l'orthonormalité de la base de Frenet :

$$\beta \times \tau = (\tau \times \nu) \times \tau = -(\nu \cdot \tau)\tau + (\tau \cdot \tau)\nu = \nu. \quad (14.157)$$

□

14.7.1 Torsion

Décomposons le vecteur $\beta'(s)$ dans la base de Frenet. Pour cela nous allons utiliser la proposition 6.383 et montrer que $\beta'(s) \cdot \tau(s) = \beta'(s) \cdot \beta(s) = 0$, ce qui voudra dire que, dans la base de Frenet, les composantes de β' le long de τ et β sont nulles. Le vecteur β' sera donc colinéaire à ν .

D'abord, étant donné que la norme de $\beta(s)$ est constante par rapport à s , nous avons

$$0 = \frac{d}{ds} \|\beta(s)\|^2 = 2\beta'(s) \cdot \beta(s). \quad (14.158)$$

Ensuite, nous dérivons la définition $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$ en utilisant la formule de Leibnitz (6.273) :

$$\beta'(s) = \tau'(s) \times \nu(s) + \tau(s) \times \nu'(s). \quad (14.159)$$

Mais $\tau'(s) = \gamma_N''(s)$ tandis que $\nu(s) = \frac{\gamma_N''(s)}{\|\gamma_N''(s)\|}$, de telle sorte que $\tau'(s) \times \nu(s) = 0$. Nous restons donc avec $\beta'(s) = \tau(s) \times \nu'(s)$, ce qui prouve que $\beta'(s)$ est perpendiculaire à $\tau(s)$ et donc que $\beta'(s) \cdot \tau(s) = 0$.

Le vecteur $\beta'(s)$ est donc un multiple de $\nu(s)$. Nous notons $t(s)$ le facteur de proportionnalité :

$$\beta'(s) = t(s)\nu(s). \quad (14.160)$$

Définition 14.56.

Soit $\gamma = (J, \gamma_N)$ un arc paramétré normal de classe $\mathcal{C}^3$. La **torsion** de γ au point $\gamma_N(s)$ est le réel

$$t(s) = \|\beta'(s)\| = \|\tau(s) \times \nu'(s)\|. \quad (14.161)$$

Lorsque $t(s) \neq 0$, le réel $T(s) = \frac{1}{t(s)}$ est le **rayon de torsion** de γ en $\gamma_N(s)$.

Étant donné que pour chaque s , l'ensemble $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ est une base, il est naturel de vouloir décomposer leurs dérivées dans cette base. D'abord, par définition de c et de t , nous avons

$$\begin{aligned} \tau'(s) &= c(s)\nu(s) \\ \beta'(s) &= t(s)\nu(s). \end{aligned} \quad (14.162)$$

Il reste à décomposer $\nu'(s)$. Définissons α_τ , α_ν et α_β (qui peuvent dépendre de s) par

$$\nu'(s) = \alpha_\tau \tau(s) + \alpha_\nu \nu(s) + \alpha_\beta \beta(s). \quad (14.163)$$

En vertu de la proposition 6.383, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_\tau &= \langle \nu'(s), \tau(s) \rangle = -\langle \nu(s), \tau'(s) \rangle = -\langle \nu(s), c(s)\nu(s) \rangle = -c(s), \\ \alpha_\nu &= \langle \nu'(s), \nu(s) \rangle = 0, \\ \alpha_\beta &= \langle \nu'(s), \beta(s) \rangle = -\langle \nu(s), \beta'(s) \rangle = -t(s), \end{aligned} \quad (14.164)$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle \nu(s), \nu(s) \rangle = \|\nu(s)\|^2 = 1$. Si nous mettons ces résultats sous forme matricielle, nous avons les **formules de Frenet** :

$$\begin{pmatrix} \tau'(s) \\ \nu'(s) \\ \beta'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c(s) & 0 \\ -c(s) & 0 & -t(s) \\ 0 & t(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(s) \\ \nu(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}. \quad (14.165)$$

Proposition 14.57.

Si s est un point birégulier, alors la torsion est donnée par

$$t(s) = -\frac{(\gamma_N' \times \gamma_N'') \times \gamma_N'''}{\|\gamma_N'(s) \times \gamma_N''(s)\|^2}. \quad (14.166)$$

Démonstration. Par l'équation (14.153), nous avons $\gamma_N''(s) = c'(s)\nu(s)$, et par conséquent

$$\gamma_N'''(s) = c'(s)\nu(s) + c(s)\nu'(s) = c'(s)\nu(s) + c(s)[-c(s)\tau(s) - t(s)\beta(s)], \quad (14.167)$$

où nous avons utilisé la formule de Frenet pour $\nu'(s)$. Par ailleurs, sachant le corollaire 14.47 et la formule de Frenet pour τ' , nous avons

$$\gamma_N' \times \gamma_N'' = \tau(s) \times \tau'(s) = \tau(s) \times c(s)\nu(s) = c(s)\beta(s). \quad (14.168)$$

En combinant les deux dernières équations, et en se souvenant que la base de Frenet et orthonormale,

$$(\gamma_N' \times \gamma_N'') \cdot \gamma_N'''(s) = -c(s)^2 t(s), \quad (14.169)$$

et donc, en remplaçant $c(s)$ par la formule (14.155),

$$t(s) = -\frac{(\gamma_N' \times \gamma_N'') \cdot \gamma_N'''}{\|\gamma_N' \times \gamma_N''\|^2}. \quad (14.170)$$

□

14.8 Hors des coordonnées normales

Remarque 14.58.

Notons que la définition de τ est donnée pour tout arc $\mathcal{C}^1$ régulier (I, γ) par $\tau(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$. La propriété $\tau = \gamma_N'$ n'est valable que lorsque la paramétrisation est normale. Les autres définitions ont toutes été données dans le cas d'une paramétrisation normale.

La remarque 14.58 nous incite à exprimer toute la base de Frenet en terme de γ lorsque la paramétrisation n'est pas normale. Étant donné que nous pouvons toujours faire le changement de variable $\gamma(t) = \gamma_N(\phi(t))$ (proposition 14.41), il est possible d'exprimer les vecteurs τ , ν et β ainsi que les réels c et t en fonction de γ et de ses dérivées.

Nous allons maintenant travailler à écrire les formules.

Pour plus de facilité, nous collectons les définitions. Afin d'alléger la notation, nous n'exprimons pas explicitement les dépendances en s :

Vecteur unitaire tangent Par le corollaire 14.47, τ est donné par $\tau = \gamma_N'$.

Vecteur unitaire normal Par la définition 14.51, ν est donné par $\nu = \frac{\tau'}{\|\tau'\|}$.

Vecteur unitaire de la binormale Par la définition 14.51, β est donné par $\beta = \tau \times \nu$.

Courbure Par la définition 14.51, c est donné par $c = \|\tau'\|$.

Torsion Par la définition 14.56, t est donné par $t = \|\beta'\|$.

Le schéma du changement de variable est

$$\begin{array}{ccc} t \in I & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \phi \downarrow & \nearrow g & \\ s \in J & & \end{array} \quad (14.171)$$

La difficulté ne sera pas d'éliminer γ_N de toutes les formules, mais bien de se débarrasser des fonctions ϕ qui arrivent quand nous exprimons γ_N en termes de γ , et en particulier lorsque nous voulons exprimer les dérivées de γ_N en termes de γ et de ses dérivées.

Regardons d'abord comment les dérivées de γ_N s'expriment en termes de γ . En utilisant le fait que $\gamma_N(s) = (\gamma \circ \phi^{-1})(s)$ et que $\|\gamma_N'(s)\| = 1$, nous avons

$$\gamma_N'(s) = \frac{\gamma_N'(s)}{\|\gamma_N'(s)\|} = \frac{(\gamma \circ \phi^{-1})'(s)}{\|(\gamma \circ \phi^{-1})'(s)\|} = \frac{\gamma'(\phi^{-1}(s))(\phi^{-1})'(s)}{\|\gamma'(\phi^{-1}(s))\| \|(\phi^{-1})'(s)\|} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad (14.172)$$

où nous avons utilisé le fait que ϕ^{-1} étant croissante (parce que l'inverse d'une fonction croissante est croissante), $(\phi^{-1})'(s) = |(\phi^{-1})'(s)|$. Pourquoi écrivons nous $|\phi^{-1}(s)|$ et non $\|\phi^{-1}(s)\|$?

Pour la dérivée seconde, nous dérivons la relation (14.172) :

$$\gamma_N''(s) = \frac{\gamma''(\phi^{-1}(s))(\phi^{-1})'(s)}{\|\gamma'(\phi^{-1}(s))\|} + \gamma'(\phi^{-1}(s)) \frac{d}{ds} \left[\|\gamma'(\phi^{-1}(s))\| \right]. \quad (14.173)$$

Le petit calcul suivant va nous permettre de simplifier cette expression :

$$(\phi^{-1})'(s) = (\phi^{-1})'(\phi(t)) = \frac{1}{\phi'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}. \quad (14.174)$$

Donc

$$\gamma_N''(s) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} + \gamma'(t) \frac{d}{ds} \left[\|\gamma'(t)\| \right] \quad (14.175)$$

où il est entendu que $t = \phi^{-1}(s)$. Avec cette expression, nous ne nous sommes pas encore débarrassés de la fonction ϕ , mais nous allons voir que cela nous sera suffisant.

Pour le vecteur unitaire tangent $\tau(s)$, nous avons donc immédiatement

$$\tau(s) = \gamma_N'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \quad (14.176)$$

Ici encore il est sous-entendu que le t dans le membre de droite est lié au s du membre de gauche par $t = \phi^{-1}(s)$. Il est donc naturel de nous demander si nous avons gagné quelque chose, étant donné que la formule (14.176) contient encore la fonction ϕ .

Géométriquement, le vecteur $\tau(s)$ est le vecteur normal unitaire de la courbe au point $\gamma_N(s)$. En utilisant les relations du diagramme (14.171), nous avons en réalité $\gamma_N(s) = \gamma_N(\phi(t)) = \gamma(t)$. Le vecteur $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ représente donc le vecteur normal tangent au point $\gamma(t)$.

Pour calculer la courbure, nous devons d'abord calculer le produit vectoriel

$$\begin{aligned} \gamma_N'(s) \times \gamma_N''(s) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \times \left(\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} + \gamma'(t) \frac{d}{ds} \left[\|\gamma'(t)\| \right] \right) \\ &= \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \end{aligned} \quad (14.177)$$

parce que le deuxième terme dans la parenthèse est un multiple de $\gamma'(t)$, de telle sorte à ce que son produit vectoriel avec $\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$ soit nul. En prenant la norme,

$$c(s) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (14.178)$$

Encore une fois, cette équation nous enseigne que la courbure au point $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par le membre de droite, qui ne dépend que de t .

Le vecteur unitaire binormal est donné par $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$. En utilisant (14.176) et (14.153),

$$\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s) = \gamma_N'(s) \times \frac{\gamma_N''(s)}{c(s)}. \quad (14.179)$$

Les formules (14.177) pour le produit vectoriel et (14.178) pour la courbure donnent ensuite

$$\beta(s) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \cdot \frac{1}{c(s)} = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \quad (14.180)$$

Cela donne le vecteur unitaire binormal au point $\gamma(t)$ en terme de $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$.

La torsion demande d'utiliser la dérivée troisième de γ_N . Nous avons

$$\begin{aligned}
 \gamma_N'''(s) &= (\gamma \circ \phi^{-1})'''(s) \\
 &= \left(\gamma'(\phi^{-1}(s))(\phi^{-1})'(s) \right)'' \\
 &= \left(\gamma''(\phi^{-1}(s))(\phi^{-1})'(s)^2 + \gamma'(\phi^{-1}(s))(\phi^{-1})''(s) \right)' \\
 &= \gamma'''(\phi^{-1}(s))(\phi^{-1})'(s)^3 + v \\
 &= \frac{\gamma'''(\phi^{-1}(s))}{\|\gamma'(t)\|^3} + v \quad \text{par (14.174)}
 \end{aligned} \tag{14.181}$$

où v est un élément de $\langle \gamma''(\phi^{-1}(s)), \gamma'(\phi^{-1}(s)) \rangle$. Le vecteur v est donc perpendiculaire à $\gamma' \times \gamma''$ et donc à $\gamma'_N \times \gamma''_N$ à cause de la relation (14.177) qui montre que $\gamma' \times \gamma''$ est parallèle à $\gamma'_N \times \gamma''_N$. De ce fait, lorsque nous calculons $(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma_N'''$, la partie v de γ_N''' n'entre pas en ligne de compte.

Nous avons donc le calcul suivant, en remplaçant les diverses occurrences de $\gamma'_N \times \gamma''_N$ par sa valeur (14.177) en termes de γ ,

$$\begin{aligned}
 t(s) &= -\frac{(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma_N'''}{\|\gamma'_N \times \gamma''_N\|^2} \\
 &= -\frac{(\gamma'_N \times \gamma''_N) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'_N \times \gamma''_N\|^2 \|\gamma'(t)\|^2} \\
 &= -\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.
 \end{aligned} \tag{14.182}$$

Dans cette expression, il est sous-entendu que tous les γ_N sont fonctions de s et tous les γ sont fonction de t où s et t sont liés par $s = \phi(t)$.

Ce que nous avons prouvé est le

Théorème 14.59.

Pour tout représentant (I, γ) , les éléments métriques (τ, ν, β, c, t) au point $\gamma(t)$ s'expriment en fonction de $\gamma(t)$, $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ et $\gamma'''(t)$.

Lemme 14.60.

Si γ est le graphe de la fonction y alors la courbure de γ est donnée par la formule

$$c(\gamma(t)) = \frac{|y''(t)|}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}} \tag{14.183}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\gamma(t) = (t, y(t)) \tag{14.184a}$$

$$\gamma'(t) = (1, y'(t)) \tag{14.184b}$$

$$\gamma''(t) = (0, y''(t)). \tag{14.184c}$$

Il s'agit maintenant seulement d'utiliser la formule (14.178) en se souvenant comment on calcule un produit vectoriel⁵ :

$$\gamma' \times \gamma'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & y' & 0 \\ 0 & y'' & 0 \end{vmatrix} = y'' e_3. \tag{14.185}$$

□

5. Définition 6.97.

14.9 Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$

Nous allons maintenant voir comment les concepts introduits nous aident à effectivement tracer des courbes dans le plan. Les courbes que nous regardons sont de la forme $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, et nous supposons que ces fonctions soient suffisamment régulières (disons trois fois continument dérivables). Nous ne supposons pas que la courbe soit donnée en coordonnées normales, en particulier, $\gamma''(t)$ n'est pas le vecteur normal en $\gamma(t)$.

La notion clef qui va jouer est le **cercle osculateur** de la courbe γ au point $\gamma(t)$. Sans rentrer dans les détails, disons que c'est le cercle qui «colle» le mieux possible la courbe. Le rayon de ce cercle est le rayon de courbure :

$$R(t) = \frac{\|\gamma(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \quad (14.186)$$

En pratique, le produit vectoriel se calcule comme ceci :

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (x'y'' - x''y')e_z. \quad (14.187)$$

Le centre du cercle osculateur va se trouver quelque part sur la normale. Le vecteur normal est donné par

$$n(t) = J \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad (14.188)$$

où J est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$J \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}. \quad (14.189)$$

Cela nous laisse deux possibilités pour le centre du cercle osculateur : $\gamma(t) + R(t)n(t)$ ou bien $\gamma(t) - R(t)n(t)$. Il faut savoir de quel côté de la courbe est situé le centre du cercle osculateur. Il faut choisir le côté de la concavité, c'est à dire le côté de la dérivée seconde.

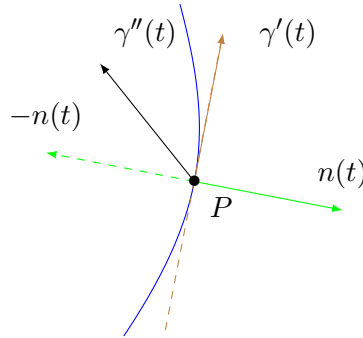


FIGURE 14.8 – De quel côté de $\gamma'(t)$ se trouvent $n(t)$ et $-n(t)$?

La difficulté maintenant est de savoir qui de $n(t)$ ou $-n(t)$ est du côté de $\gamma''(t)$. Il faut savoir si $n(t)$ est du même côté de la droite tangente que $\gamma''(t)$ ou non. Par construction, si nous regardons la figure 14.8, le vecteur $n(t)$ sera toujours à gauche de $\gamma'(t)$. Le fait que $\gamma''(t)$ soit à gauche ou à droite de $\gamma'(t)$ est donné par le signe du produit vectoriel $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$. Si ce produit vectoriel est positif, il faut choisir $-n(t)$ et si il est négatif, il faut choisir $n(t)$.

Le truc pour obtenir le signe de $x'y'' - x''y'$ est de faire

$$\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot e_z}{\|\gamma' \times \gamma''\|}. \quad (14.190)$$

Le centre de courbure sera donc situé à la position

$$\Omega(t) = \gamma(t) - n(t) \frac{\|\gamma(t)\|^3}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} (\gamma' \times \gamma'') \cdot e_z \quad (14.191)$$

Nous pouvons écrire cela plus explicitement en nous souvenant que $\gamma' \times \gamma'' = (x'y'' - x''y')e_z$, par conséquent $\frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot e_z}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{1}{x'y'' - x''y'}$. Nous avons

$$\Omega_x(t) = x(t) - y'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \quad (14.192a)$$

$$\Omega_y(t) = y(t) + x'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \quad (14.192b)$$

Quelques exemples de cercles osculateurs sont sur la figure 14.9.

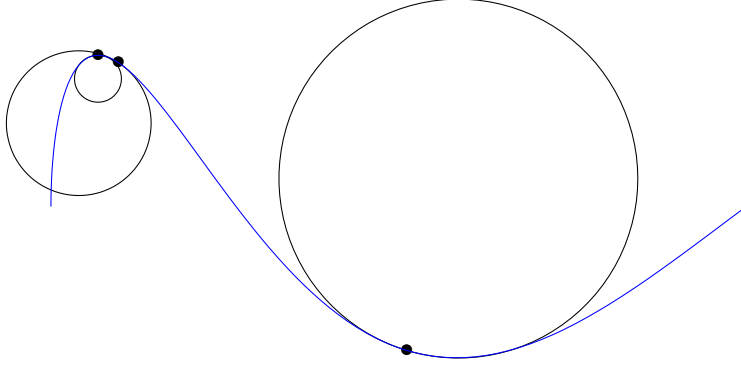


FIGURE 14.9 – Exemple de cercles osculateurs.

14.10 Courbes planes

Définition 14.61.

Une courbe $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **fermée** si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Elle est **simple** si $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ dès que $t, t' \in]a, b[$ et $t \neq t'$.

Définition 14.62.

Nous disons qu'une courbe fermée est continue, de classe C^1 , de classe C^2 ou autre condition de régularité si son extension périodique comme application $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a cette régularité.

14.10.1 Angle

Lemme 14.63 ([185]).

Soient des courbes régulières γ et σ de classe C^2 de l'intervalle ouvert I vers $\mathbb{R}^2$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\gamma'(t_0) \cdot \sigma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\| \|\sigma'(t_0)\|} = \cos(\theta_0) \quad (14.193a)$$

$$\frac{\gamma'(t_0) \cdot J\sigma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\| \|\sigma'(t_0)\|} = \sin(\theta_0). \quad (14.193b)$$

Alors il existe une unique fonction différentiable $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\gamma'(t) \cdot \sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\| \|\sigma'(t)\|} = \cos(\theta(t)) \quad (14.194a)$$

$$\frac{\gamma'(t) \cdot J\sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\| \|\sigma'(t)\|} = \sin(\theta(t)). \quad (14.194b)$$

Démonstration. Il suffit de prendre

$$f(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot \sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\| \|\sigma'(t)\|} \quad (14.195)$$

et

$$g(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot J\sigma'(t)}{\|\gamma'(t)\| \|\sigma'(t)\|} \quad (14.196)$$

dans la proposition 13.59. Ces courbes sont de classe C^1 parce que γ et σ sont de classe C^2 . $\square$

14.10.2 Courbure signée

Nous avons déjà défini la courbure d'une courbe en la définition 14.51. Nous introduisons maintenant la courbure signée qui est propre à la dimension deux.

Définition 14.64.

La *structure complexe* sur $\mathbb{R}^2$ est l'application

$$\begin{aligned} J: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-y, x). \end{aligned} \quad (14.197)$$

Définition 14.65.

La *courbure signée* de la courbe $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (I est un intervalle dans $\mathbb{R}$) est la fonction

$$\kappa(t) = \frac{\gamma''(t) \cdot J\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad (14.198)$$

où J est la structure complexe de la définition 14.64.

Cette définition est motivée par le fait qu'en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, l'application J revient à l'application $z \mapsto iz$.

Si $v, w \in \mathbb{R}^2$ nous avons formellement

$$v \times w = -(v \cdot Jw)e_3. \quad (14.199)$$

En particulier pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$v \cdot Jv = 0. \quad (14.200)$$

Lemme 14.66.

Soit une courbe régulière $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $h: [c, d] \rightarrow [a, b]$. Si nous posons $\sigma = \gamma \circ h$ alors

$$\kappa_\sigma(u) = \operatorname{sgn}(h'(u))\kappa_\gamma(h(u)). \quad (14.201)$$

Démonstration. Nous utilisons la définition (14.198) de la courbure signée. La règle de dérivation en chaîne donne :

$$\sigma'(u) = \gamma'(h(u))h'(u) \quad (14.202a)$$

$$\sigma''(u) = \gamma''(h(u))h'(u)^2 + \gamma'(h(u))h''(u). \quad (14.202b)$$

La numérateur de $\kappa_\sigma(u)$ est :

$$(\gamma'' \circ h)h'^2 \cdot J(\gamma' \circ h)h' + h''(\gamma' \circ h) \cdot J(\gamma' \circ h)h' \quad (14.203)$$

dont le second terme est nul parce que $v \cdot Jv = 0$. Il nous reste donc

$$\kappa_\sigma(u) = \frac{(h')^3 (\gamma'' \circ h) \cdot J(\gamma' \circ h)}{|h'|^3 \|\gamma' \circ h\|^3} = \operatorname{sgn}(h')\kappa_\gamma(h(u)). \quad (14.204)$$

$\square$

Lemme 14.67 ([185]).

Si γ_N est un arc paramétré normal, alors

$$\gamma_N''(s) = \kappa(s)J\gamma_N'(s). \quad (14.205)$$

Démonstration. Vu que la paramétrisation est normale, $\gamma'_N \cdot \gamma'_N = 1$, et en dérivant, $\gamma''_N \cdot \gamma'_N = 0$. Donc γ''_N est un multiple de $J\gamma'$. En tenant compte du fait que la paramétrisation est normale, la courbure est

$$\kappa(s) = \gamma''_N(s) \cdot J\gamma'(s). \quad (14.206)$$

En y injectant $\gamma''(s) = \lambda(s)J\gamma'(s)$ nous trouvons

$$\kappa(s) = \lambda(s)J\gamma'(s) \cdot J\gamma'(s) = \lambda(s). \quad (14.207)$$

Donc le facteur de proportionnalité est $\kappa(s)$. $\square$

Théorème 14.68.

Soit une courbe $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 .

(1) γ est une partie de droite si et seulement si $\kappa(t) = 0$ pour tout t .

(2) γ est une partie d'un cercle de rayon $r > 0$ si et seulement si $|\kappa(s)| = \frac{1}{r}$.

Démonstration. Si γ est une droite, la dérivée seconde est nulle et la courbure est nulle. Supposons pour la réciproque que $\kappa(t) = 0$ pour tout t . Nous utilisant une paramétrisation normale de γ , ce qui ne change pas que la courbure reste nulle. Nous avons par le lemme 14.67 que $\gamma''(s) = 0$ et donc l'existence de $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $\gamma(t) = at + b$.

Passons au cas du cercle. Si γ est un cercle, la paramétrisation normale est

$$\gamma(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{R}) \\ \sin(\frac{t}{R}) \end{pmatrix} \quad (14.208a)$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{t}{R}) \\ \cos(\frac{t}{R}) \end{pmatrix} \quad (14.208b)$$

$$\gamma''(t) = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{R}) \\ \sin(\frac{t}{R}) \end{pmatrix}. \quad (14.208c)$$

Avec tout cela nous avons $\kappa(s) = \gamma''(s) \cdot J\gamma'(s) = \frac{1}{R}$.

Nous supposons enfin que $\kappa(t) = 1/R$ et que le paramétrage soit normal (encore une fois, un reparamétrage ne change pas la courbure lorsqu'elle est constante). Nous définissons la courbe

$$\begin{aligned} \beta: [b, c] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) + rJ\gamma'(t). \end{aligned} \quad (14.209)$$

Nous avons $\beta'(t) = \gamma'(t) + rJ\gamma''(t)$. Mais par le lemme 14.67 nous avons $\gamma'' = kJ\gamma' = \frac{1}{r}J\gamma'$. Donc

$$\beta'(t) = \gamma'(t) - \gamma'(t) = 0. \quad (14.210)$$

Du coup β est constante : $\beta(t) = a$. Alors $a = \gamma(t) + rJ\gamma'(t)$ et en particulier

$$\|\gamma(t) - a\| = \|rJ\gamma'(t)\| = r. \quad (14.211)$$

Donc effectivement γ reste sur un cercle de rayon r et de centre a . $\square$

Définition 14.69 ([185]).

La **courbure totale** de la courbe $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est le nombre

$$K = \int_a^b \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt. \quad (14.212)$$

Lemme 14.70.

La courbure signée ne change pas sous reparamétrisation positive, et change de signe sous reparamétrisation négative.

Démonstration. Soit la courbe $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$. Il s'agit d'intégrer la relation (14.201) en effectuant le changement de variables $t = h(u)$:

$$K_\gamma = \int_a^b \kappa_\gamma(t) \|\gamma'(t)\| dt \quad (14.213a)$$

$$= \int_c^d \underbrace{\kappa_\gamma(h(u))}_{\kappa_\sigma(u)} \|\gamma'(h(u))\| h'(u) du. \quad (14.213b)$$

En utilisant le fait que $\sigma'(u) = \gamma'(h(u))h'(u)$ nous avons alors

$$K_\gamma = \int_c^d \kappa_\sigma(u) \left\| \frac{\sigma'(u)}{h'(u)} \right\| h'(u) du \quad (14.214a)$$

$$= \int_c^d \kappa_\sigma(u) \|\sigma'(u)\| \frac{h'(u)}{|h'(u)|} du \quad (14.214b)$$

$$= \operatorname{sgn}(h') K_\sigma. \quad (14.214c)$$

□

Lemme-définition 14.71 ([185]).

Soit une courbe régulière $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 et t_0 dans l'intérieur de I . Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)). \quad (14.215)$$

Alors il existe une unique fonction différentiable $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(t_0) = \theta_0$ et

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad (14.216)$$

pour tout $t \in I$.

Cette fonction est l'**angle** de γ déterminé par θ_0 .

Démonstration. Soit $\beta(t) = (t, 0)$; alors $\beta'(t) = (1, 0)$ et nous avons

$$\gamma' \cdot \beta' = \gamma'_x \quad (14.217a)$$

$$\gamma' \cdot J\beta' = \gamma'_y. \quad (14.217b)$$

Par la proposition 14.63 il existe une unique fonction $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(t_0) = \theta_0$ et

$$\begin{cases} \cos(\theta(t)) = \frac{\gamma' \cdot \beta'}{\|\gamma'\| \|\beta'\|} = \frac{\gamma'_x}{\|\gamma'\|} \end{cases} \quad (14.218a)$$

$$\begin{cases} \sin(\theta(t)) = \frac{\gamma' \cdot J\beta'}{\|\gamma'\| \|\beta'\|} = \frac{\gamma'_y}{\|\gamma'\|}. \end{cases} \quad (14.218b)$$

Une telle fonction est bien celle que l'on demande ici. □

Lemme 14.72.

Si γ est une courbe régulière de classe C^2 , alors sa courbure et son angle vérifient la relation

$$\theta'(t) = \|\gamma'(t)\| \kappa(t). \quad (14.219)$$

Démonstration. Par définition de l'angle (lemme 14.71) nous avons

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)). \quad (14.220)$$

Dérivant cela,

$$\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|} + \gamma'(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \right) = \theta'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad (14.221a)$$

$$= \theta'(t) J \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad (14.221b)$$

$$= \theta'(t) \frac{J\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \quad (14.221c)$$

Nous prenons le produit scalaire de cette égalité avec $J\gamma'$ en tenant compte du fait que $\gamma' \cdot J\gamma' = 0$:

$$\frac{\gamma'' \cdot J\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{\theta'}{\|\gamma'\|} J\gamma' \cdot J\gamma'. \quad (14.222)$$

En remarquant que $Jv \cdot Jv = \|v\|^2$ nous trouvons $\theta'\|\gamma'\| = \|\gamma'\|^2 \kappa_\gamma$ et donc

$$\theta'(t) = \|\gamma'(t)\| \kappa_\gamma(t), \quad (14.223)$$

ce qu'il fallait prouver. $\square$

Ce lemme nous fournit la formule attendue pour la courbure totale.

Lemme 14.73 ([185]).

Soit une courbe régulière de classe C^2 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Sa courbure totale est donnée par

$$K = \theta(b) - \theta(a). \quad (14.224)$$

Démonstration. Il suffit de remplacer dans la définition (14.212) de la courbure totale l'intégrande par son expression du lemme 14.72 :

$$K = \int_a^b \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a) \quad (14.225)$$

par le théorème 13.60. $\square$

14.10.3 Degré, indice et homotopie

Définition 14.74 ([185]).

Le **nombre de tours** d'une courbe fermée de classe C^1 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est le nombre

$$\text{Turn}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt \quad (14.226)$$

où κ est la courbure signée définie en 14.65.

Lemme-définition 14.75.

Soit une application continue $\phi: S^1 \rightarrow S^1$. Un **relèvement** de σ est une application $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\phi(\cos(t), \sin(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}. \quad (14.227)$$

Le **degré** est l'entier $\deg(\phi)$ tel que

$$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2 \deg(\phi) \pi. \quad (14.228)$$

Ce nombre ne dépend pas du choix du relèvement φ .

Démonstration. Soient φ_1 et φ_2 , deux application qui satisfont les contraintes. Nous avons une fonction continue $n: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 2\pi n(t). \quad (14.229)$$

La fonction n ne pouvant prendre que des valeurs entières et étant continue, elle est constante. Par conséquent

$$\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0) = \varphi_2(2\pi) - \varphi_2(0), \quad (14.230)$$

ce que nous voulions. $\square$

Définition 14.76.

Soit une courbe fermée $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Nous posons

$$\Phi_\gamma(t) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} \quad (14.231)$$

où $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\frac{L}{2\pi}u)$. L'**indice de rotation** de γ est le degré de Φ_γ , c'est à dire

$$\text{Ind}(\gamma) = \deg(\Phi_\gamma). \quad (14.232)$$

Notons que dans cette définition, Φ_γ n'est rien d'autre que le vecteur unitaire tangent à γ , ramené à $[0, 2\pi]$.

Proposition 14.77.

Pour une courbe fermée de classe⁶ C^2 , l'indice de rotation est égal au nombre de tours.

Démonstration. Soit $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe vérifiant les hypothèses. Par définition, $\text{Ind}(\gamma) = \deg(\Phi_\gamma)$ où

$$\Phi_\gamma(t) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}(t) \\ \sin \tilde{\theta}(t) \end{pmatrix} \quad (14.233)$$

où nous avons noté $\tilde{\theta}$ l'angle tournant⁷ de $\tilde{\gamma}$ et θ celui de γ . Vu que $\tilde{\theta}$ vérifie les hypothèses de la définition 14.75 nous pouvons calculer le degré de Φ_γ par

$$\deg(\Phi_\gamma) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{\theta}(2\pi) - \tilde{\theta}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\theta}'(s) ds. \quad (14.234)$$

Il faut trouver le lien entre θ et $\tilde{\theta}$. Pour cela nous notons que

$$\frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} = \frac{\gamma'(\frac{L}{2\pi}t)}{\|\gamma'(\frac{L}{2\pi}t)\|}. \quad (14.235)$$

En comparant avec (14.233) il vient

$$\tilde{\theta}(t) = \theta\left(\frac{L}{2\pi}t\right) \quad (14.236)$$

et

$$\tilde{\theta}'(s) = \frac{L}{2\pi} \theta' \left(\frac{L}{2\pi} s \right). \quad (14.237)$$

Le changement de variables $t = \frac{L}{2\pi}s$ est donc tout vu dans l'intégrale (14.234) :

$$\deg(\Phi_\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{L}{2\pi} \theta' \left(\frac{L}{2\pi} s \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \theta'(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa_\gamma(t) \|\gamma'(t)\| dt = \text{Turn}(\gamma) \quad (14.238)$$

où nous avons aussi utilisé le lemme 14.72 qui donne le lien entre θ' et κ . $\square$

6. La dérivée seconde arrive dans la définition de la courbure ; il faudrait donc supposer au moins C^2 pour avoir la continuité de la courbure.

7. Définition 14.71.

Définition 14.78 (homotopie de chemins fermés).

Les courbes fermées $\gamma_0, \gamma_1: [0, L] \rightarrow Y$ (Y est un espace topologique) sont **homotopes** si il existe une application continue

$$F: [0, 1] \times [0, L] \rightarrow Y \quad (14.239)$$

telle que

- (1) $F(0, t) = \gamma_0(t)$ pour tout t ,
- (2) $F(1, t) = \gamma_1(t)$ pour tout t ,
- (3) $F(u, L) = F(u, 0)$ pour tout u .

L'application F est l'homotopie entre γ_0 et γ_1 .

Proposition 14.79 (Homotopie, degré et indice[185]).

Il y a deux résultats à ne pas confondre.

- (1) Si $\phi_i: S^1 \rightarrow S^1$ sont homotopes, alors $\deg(\phi_1) = \deg(\phi_2)$.
- (2) Si $\gamma_i: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont homotopes, alors $\text{Ind}(\phi_1) = \text{Ind}(\phi_2)$.

Démonstration. Nous allons décomposer la preuve en deux parties.

Le degré pour les applications $S^1 \rightarrow S^1$ Nous supposons avoir deux applications homotopes $\gamma_i: S^1 \rightarrow S^1$. Si F est l'homotopie⁸ entre γ_0 et γ_1 , nous posons $\gamma_u(t) = F(u, t)$ qui est encore une courbe fermée $\gamma_u: S^1 \rightarrow S^1$. Nous pouvons donc considérer le degré de γ_u . C'est un entier n_u qui vérifie

$$\tilde{\gamma}_u(2\pi) - \tilde{\gamma}_u(0) = 2\pi n_u. \quad (14.240)$$

Le membre de gauche est une fonction continue de u ; dans le membre de droite n_u ne pouvant prendre que des valeurs entières, elle est alors constante.

Indice de rotation pour des courbes dans $\mathbb{R}^2$ Soient maintenant γ_0 et γ_1 deux courbes homotopes de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}^2$. Par définition, $\text{Ind}(\gamma_i) = \deg(\Phi_{\gamma_i})$. Prouvons alors que Φ_{γ_0} et homotope à Φ_{γ_1} . De cette façon, la première partie de la preuve conclura à

$$\text{Ind}(\gamma_0) = \deg(\Phi_{\gamma_0}) = \deg(\Phi_{\gamma_1}) = \text{Ind}(\gamma_1). \quad (14.241)$$

Nous savons que

$$\Phi_\gamma = \frac{\gamma'(\frac{L}{2\pi}t)}{\|\gamma'(\frac{L}{2\pi}t)\|}, \quad (14.242)$$

donc en posant

$$\Phi_F(u, t) = \frac{\gamma'_u(\frac{L}{2\pi}t)}{\|\gamma'_u(\frac{L}{2\pi}t)\|} \quad (14.243)$$

nous avons une homotopie entre Φ_{γ_0} et Φ_{γ_1} .

□

Théorème 14.80 ([185]).

Le nombre de tours d'une courbe simple fermée de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$ est ± 1 .

Démonstration. Soit une telle courbe γ et son image Γ .

Choix d'un point et d'une tangente Si ℓ est une droite dans le plan, soit p le point de Γ le plus proche de ℓ . Il n'est peut-être pas unique, mais la parallèle à ℓ passant par p est une tangente à Γ telle que tout Γ se trouve d'un seul côté de ℓ_p . Pour voir cela, il suffit de choisir un système d'axes pour lequel ℓ est l'axe $y = 0$. La distance entre ℓ et les points de Γ est donnée par γ_y , et donc les extrema sont atteints là où $\gamma'_y = 0$, c'est à dire pour les points sur lesquels la tangente est parallèle à ℓ .

Étant donné qu'il y a (au moins) un maximum et un minimum distincts, pour pouvons choisir le point p de telle sorte que pour tout point $q \in \Gamma$, l'angle du vecteur $q - p$ soit entre

8. Définition 14.78.

α_0 et $\alpha_0 + \pi$ et non entre $\alpha_0 - \pi$ et α_0 . Ce choix revient à choisir p de telle sorte que Γ soit d'un côté ou de l'autre de ℓ_p .

Pour simplifier les notations plus tard nous choisissons ℓ_p horizontale, de telle sorte que $\alpha_0 = 0$, et que Γ est au dessus de ℓ_p . Les angles des vecteurs $q - p$ pour $q \in \Gamma$ sont donc tous entre 0 et π .

Définition de Σ Soit L la longueur⁹ de γ et β , une paramétrisation de γ telle que $\beta(0) = p$. Nous considérons le triangle

$$\mathcal{T} = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\} \quad (14.244)$$

et l'application sécante $\Sigma: \mathcal{T} \rightarrow S^1$ définie par

$$\Sigma(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} & \text{si } t_1 = t_2 = t \\ -\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} & \text{si } t_1 = 0 \text{ et } t_2 = L \\ \frac{\beta(t_2) - \beta(t_1)}{\|\beta(t_2) - \beta(t_1)\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (14.245)$$

Continuité de Σ Nous devons prouver les limites¹⁰ suivantes :

$$\lim_{\substack{(t_1, t_2) \rightarrow (t, t) \\ 0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq L}} \frac{\beta(t_1) - \beta(t_2)}{\|\beta(t_1) - \beta(t_2)\|} = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} \quad (14.246a)$$

$$\lim_{\substack{(t_1, t_2) \rightarrow (0, L) \\ 0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq L}} \frac{\beta(t_1) - \beta(t_2)}{\|\beta(t_1) - \beta(t_2)\|} = -\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} \quad (14.246b)$$

Nous commençons par (14.246a) en multipliant et divisant par $t_2 - t_1$:

$$\frac{\beta(t_2) - \beta(t_1)}{\|\beta(t_2) - \beta(t_1)\|} = \frac{\beta(t_2) - \beta(t_1)}{t_2 - t_1} \frac{t_2 - t_1}{\|\beta(t_2) - \beta(t_1)\|}. \quad (14.247)$$

Si chacune des limites des deux facteurs existent dans $\mathbb{R}$, la limite du produit sera le produit des limites. Pour le premier facteur nous développons $\beta(t_2)$ autour de $t = t_1$ via la formulation (11.458) :

$$\beta(t_2) = \beta(t_1) + (t_2 - t_1)\beta'(t_1) + \alpha(t_2 - t_1) \quad (14.248)$$

où α est une fonction ayant la propriété $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0$. Nous avons à calculer la limite de

$$\frac{(t_2 - t_1)\beta'(t_1) + \alpha(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \beta'(t_1) + \frac{\alpha(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (14.249)$$

Prendre la limite $(t_1, t_2) \rightarrow (t, t)$ donne bien $\beta'(t)$ parce que β est de classe C^1 . En ce qui concerne la limite de la deuxième partie, nous allons la faire plus en détail pour la limite (14.246b).

La limite (14.246b). Nous prenons la prolongation périodique de β . Alors si $t_2 = L - \epsilon$ nous pouvons écrire $\beta(-\epsilon)$ au lieu de $\beta(t_2)$. Nous développons $\beta(t_1)$ autour de $t = -\epsilon$ (parce que t_1 est petit) :

$$\beta(t_1) = \beta(-\epsilon) + (t_1 + \epsilon)\beta'(-\epsilon) + \alpha(t_1 + \epsilon). \quad (14.250)$$

Après multiplication et division par $t_1 + \epsilon$, la première limite à calculer est celle de

$$\frac{\beta(-\epsilon) - \beta(t_1)}{t_1 + \epsilon} = -\beta'(-\epsilon) + \frac{\alpha(t_1 + \epsilon)}{t_1 + \epsilon}, \quad (14.251)$$

9. Définition 14.12.

10. Limite au sens de la définition 5.48, en sachant qu'elle est unique par la proposition 5.51.

pour $(\epsilon, t_1) \rightarrow (0, 0)$. Cela donne bien $-\beta'(0)$. La seconde limite à calculer est celle de

$$\frac{t_1 + \epsilon}{\|\beta(-\epsilon) - \beta(t_1)\|} = \frac{t_1 + \epsilon}{\|-(t_1 + \epsilon)\beta'(-\epsilon) - \alpha(t_1 + \epsilon)\|} = \frac{t_1 + \epsilon}{\|(t_1 + \epsilon)\beta'(-\epsilon) + \alpha(t_1 + \epsilon)\|}. \quad (14.252)$$

Nous calculons la limite de l'inverse (qui, si elle est non nulle donnera la réponse en inversant à nouveau) en nous souvenant de la formule

$$|a - b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|. \quad (14.253)$$

Nous avons l'encadrement

$$\frac{|(t_1 + \epsilon)\beta'(-\epsilon) - \alpha(t_1 + \epsilon)|}{t_1 + \epsilon} \leq \frac{\|(t_1 + \epsilon)\beta'(-\epsilon) + \alpha(t_1 + \epsilon)\|}{t_1 + \epsilon} \leq \frac{|(t_1 + \epsilon)\beta'(-\epsilon) + \alpha(t_1 + \epsilon)|}{t_1 + \epsilon} \quad (14.254)$$

Les limites des deux extrêmes existent et valent $\beta'(0)$; la règle de l'étau 11.26 conclut.

Deux chemins homotopes Nous considérons dans $\mathcal{T}$ les points $A = (0, 0)$, $B = (0, L)$ et $C = (L, L)$. Nous allons considérer les chemins direct de A à C et celui passant via B . Et comme ces chemins doivent être paramétrés de 0 à 2π , il faut faire un peu attention. Nous définissons les chemins

$$\sigma_i: S^1 \rightarrow S^1 \quad (14.255)$$

par

$$\sigma_1(t) = \Sigma\left(\frac{L}{2\pi}t, \frac{L}{2\pi}t\right) = \frac{\beta'(tL/2\pi)}{\|\beta'(tL/2\pi)\|} = \frac{\tilde{\beta}'(t)}{\|\tilde{\beta}'(t)\|} = \Phi_\beta \quad (14.256a)$$

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} \Sigma(0, \frac{L}{\pi}t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ \Sigma(\frac{L}{\pi}(t - \pi), L) & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad (14.256b)$$

où nous avons repris les notations de la définition 14.76. Notons que pour σ_2 , en $t = \pi$ les deux expressions donnent

$$\sigma_2(\pi) = \Sigma(0, L) = -\frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|}. \quad (14.257)$$

Ce sont des chemins fermés parce que

$$\sigma_1(2\pi) = \Sigma(L, L) = \frac{\beta'(L)}{\|\beta'(L)\|} = \frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} = \Sigma(0, 0) = \sigma_1(0). \quad (14.258)$$

Notons que dans toutes ces définitions et calculs, nous avons utilisé de façon assez cruciale la définition 14.62 pour définir la dérivée de β en $t = 0$.

Les chemins σ_1 et σ_2 sont homotopes par construction.

Indices et degrés La proposition 14.79(1) nous donne $\deg(\sigma_1) = \deg(\sigma_2)$. Nous avons alors la chaîne d'égalités

$$\deg(\sigma_2) = \deg(\sigma_1) = \deg(\Phi_\beta) = \text{Ind}(\beta) = \text{Ind}(\gamma) = \text{Turn}(\gamma) \quad (14.259)$$

où les justifications sont :

- (1) $\deg(\sigma_2) = \deg(\sigma_1)$ par homotopie : proposition 14.79.
- (2) $\deg(\sigma_1) = \deg(\Phi_\beta)$ parce que $\sigma_1 = \Phi_\beta$.
- (3) $\deg(\Phi_\beta) = \text{Ind}(\beta)$ par définition 14.76 de l'indice.
- (4) $\text{Ind}(\beta) = \text{Ind}(\gamma)$ par invariance de l'indice sous reparamétrisation.
- (5) $\text{Ind}(\gamma) = \text{Turn}(\gamma)$ par la proposition 14.77.

Il nous reste à montrer que $\deg(\sigma_2) = \pm 1$.

La géométrie de σ_2 Notons que par définition les valeurs de $\sigma_2(t)$ sont les vecteurs (unitaires) joignant p aux points de Γ lorsque $0 \leq t \leq \pi$, et les vecteurs inverses pour $\pi \leq t \leq 2\pi$. Plus précisément nous avons, si $0 < a < \pi$:

$$\sigma_2(a) = \Sigma(0, \frac{L}{\pi}a) = \frac{\beta(\frac{L}{\pi}a) - \beta(L)}{\|\beta(\frac{L}{\pi}a) - \beta(L)\|} \quad (14.260)$$

et

$$\sigma_2(\pi + a) = \Sigma(\frac{L}{\pi}a, L) = \frac{\beta(L) - \beta(\frac{L}{\pi}a)}{\|\beta(L) - \beta(\frac{L}{\pi}a)\|}. \quad (14.261)$$

En sachant que $\beta(0) = \beta(L)$ nous avons alors

$$\sigma_2(\pi + a) = -\sigma_2(a). \quad (14.262)$$

Notons aussi que le fait que γ soit une courbe simple assure que le numérateur et le dénominateur de σ_2 ne s'annulent pas autrement que pour $t = L$ ou $t = 0$.

Un relèvement pour σ_2 Ces propriétés motivent cette idée pour le relèvement de σ_2 :

$$\begin{aligned} \theta: [0, 2\pi[&\rightarrow [0, 2\pi[\\ t &\mapsto \text{l'angle du vecteur } \sigma_2(t), \end{aligned} \quad (14.263)$$

avec $\theta(2\pi)$ défini par continuité. Nous allons cependant voir, en étant plus prudent, que cette définition n'assure pas la continuité (surtout en $t = \pi$).

Soyons donc plus prudent et construisons θ petit à petit.

Étant donné que ℓ_p est tangente à Γ au point p , la droite ℓ_p est parallèle à $\beta'(0)$, et l'angle entre ℓ_p et $\beta'(0)$ est soit 0 soit π . Donc $\theta(0)$ devrait valoir soit 0 soit π .

Nous commençons par définir ceci :

$$\begin{aligned} \theta: [0, \pi[&\rightarrow [0, \pi[\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t) = \arccos(\sigma_2(t)_x). \end{aligned} \quad (14.264)$$

C'est le choix d'avoir ℓ_p horizontale et Γ au dessus de ℓ_p qui nous assure que pour tout $t \in [0, \pi]$, l'angle de $\sigma_2(t)$ peut être choisi entre 0 et π . De plus cette fonction est continue en tant que partie de la fonction $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ qui est elle-même continue par la proposition 5.173.

Le fait que θ soit continue est assuré par le fait que σ_2 est C^∞ .

Si $\theta(0) = 0$ Cela correspond à la situation des vecteurs rouges sur la figure 14.10.

Vu que $\sigma_2(\pi) = -\sigma_2(0)$, l'angle de σ_2 en $t = \pi$ est le supplémentaire de celui en $t = 0$. Mais pour $0 \leq t < \pi$, $\theta(t)$ prend ses valeurs entre 0 et π , le seul supplémentaire de 0 à être disponible est $\theta(\pi) = \pi$ (et non $\theta(\pi) = -\pi$ par exemple). Nous définissons donc $\theta(\pi) = \pi$ pour la continuité.

En ce qui concerne les $\pi < t < 2\pi$ nous savons que $\sigma_2(\pi + a) = -\sigma_2(a)$. Les angles sont donc les supplémentaires de ceux pour $0 \leq t \leq \pi$. Pour assurer la continuité en $t = \pi$ nous sélectionnons la place $]\pi, 2\pi]$; et nous définissons

$$\begin{aligned} \theta:]\pi, 2\pi[&\rightarrow]\pi, 2\pi[\\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t). \end{aligned} \quad (14.265)$$

Le nombre $\theta(2\pi)$ est défini par continuité. Il doit valoir $\theta(2\pi) = 2\pi$.

La fonction θ ainsi définie est un relèvement pour σ_2 , et le degré peut être calculé :

$$\deg(\sigma_2) = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0)) = 1. \quad (14.266)$$

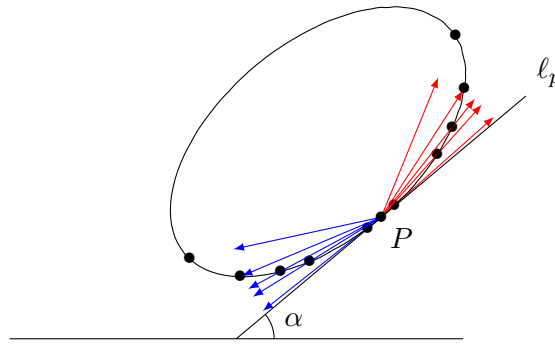


FIGURE 14.10 – Les vecteurs représentant σ_2 dans le cas où $\beta'(0)$ est dans le sens de ℓ_p ou dans le sens inverse. Pour le sport nous avons dessiné la situation avec une droite ℓ quelconque plutôt que horizontale.

Si $\theta(0) = \pi$ Cela correspond à la situation des vecteurs bleus sur la figure 14.10.

Alors $\theta(\pi) = 0$ est obligatoire parce qu'il doit être supplémentaire à $\theta(0)$. Les angles atteints par $\sigma_2(t)$ pour $t \in]\pi, 2\pi[$ sont encore les complémentaires, mais cette fois la continuité en $t = \pi$ nous impose de les chercher dans $]-\pi, 0]$ et nous définissons

$$\begin{aligned} \theta:]\pi, 2\pi[&\rightarrow]-\pi, 0] \\ t &\mapsto \text{angle de } \sigma_2(t). \end{aligned} \quad (14.267)$$

Par continuité nous devons avoir $\theta(2\pi) = \theta(\pi) - \pi$ et donc $\theta(2\pi) = -\pi$.

Le degré de σ_2 est alors

$$\deg(\sigma_2) = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0)) = -1. \quad (14.268)$$

Conclusion Nous avons montré que le degré de σ_2 est 1 ou -1 , et en remontant les égalités (14.259) nous déduisons que $\text{Turn}(\gamma) = \pm 1$. □

14.11 Courbes fermées planes

14.11.1 Cercle circonscrit

La proposition suivante est dans le même esprit que l'ellipse de John-Loewer¹¹.

Proposition-définition 14.81 (Cercle circonscrit[193, 8]).

Soit une courbe fermée simple et continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Soit Γ son image. Il existe un unique cercle de rayon minimum contenant Γ . Ce cercle est le **cercle circonscrit** à γ .

Il a les propriétés suivantes :

- (1) Le cercle circonscrit à γ coupe Γ en au moins deux points distincts.
- (2) Tout arc du cercle circonscrit plus grand que le demi-cercle intersection Γ .

Démonstration. Division de la preuve.

Existence L'application γ étant continue, l'ensemble Γ est compact (théorème 5.60). Nous considérons l'ensemble Q des formes quadratiques de la forme

$$q_{a,r}(x) = \|a - x\|^2 - r^2 \quad (14.269)$$

avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}$. Nous mettons sur cet ensemble la topologie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Le nombre $q_{a,r}(x)$ est continu en a , r et x . Soit A l'ensemble des formes quadratiques de cette forme et vérifiant

$$q(\gamma(t)) \leq 0 \quad (14.270)$$

¹¹. Proposition 13.212.

pour tout $t \in [0, 1]$.

Cet ensemble A est non vide parce que Γ est compact et donc borné ; il existe donc une boule qui contient Γ en son intérieur.

Montrons que A est fermé dans Q . Si $q_{a,r} \notin A$ alors il existe t_0 tel que $q_{a,r}(\gamma(t_0)) > 0$. Par continuité, il existe un voisinage de (a, r) dans $\mathbb{R}^3$ et donc de $q_{a,r}$ dans Q tel que $q_{a',r'}(\gamma(t_0))$ reste strictement positif pour tout (a', r') dans ce voisinage.

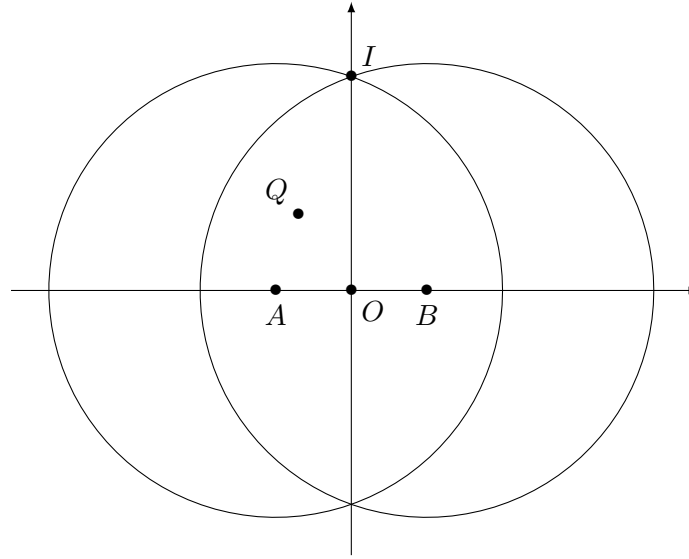
En particulier l'ensemble

$$\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \exists (a, r) \text{ tel que } q_{a,r} \in A\} \quad (14.271)$$

est fermé et borné vers le bas. De plus $r = 0$ n'est pas dans cet ensemble. Il possède donc un minimum strictement positif. Le cercle correspondant donne l'existence.

Unicité En ce qui concerne l'unicité, si Γ est contenu dans les boules $B(a, R)$ et $B(b, R)$ alors

$$\Gamma \subset B(a, R) \cap B(b, R). \quad (14.272)$$



Nous choisissons les axes comme indiqué sur le dessin et nous montrons que l'intersection est dans le cercle de centre O et de rayon $\|OI\| < R$. Soit Q un point de l'intersection ; par symétrie il est suffisant de supposer $Q_x < 0$ et $Q_y > 0$. Vu que Q est dans le cercle de centre B et de rayon R , il doit satisfaire

$$(B_x - Q_x)^2 + Q_y^2 < R. \quad (14.273)$$

D'autre part le point I est d'abscisse $I_x = 0$ et d'ordonnée donnée par $I_y^2 = R^2 - B_x^2$.

Nous devons prouver que $Q_x^2 + Q_y^2 \leq I_y^2$. Il s'agit simplement de calculer

$$Q_x^2 + Q_y^2 \leq Q_x^2 + R^2 - B_x^2 + 2B_x Q_x - Q_x^2 = R^2 - B_x^2 + 2B_x Q_x \leq R^2 - B_x^2 = I_y^2 \quad (14.274)$$

parce que $B_x > 0$ et $Q_x < 0$.

Nous concluons que Γ est inclus à un cercle de rayon plus petit que R et donc que R n'est pas minimum. D'où l'unicité.

Au moins deux intersections Nous nommons C le cercle circonscrit à γ , et nous écrivons, pour $p \in \Gamma$

$$r(p) = d(p, C) \quad (14.275)$$

la distance entre p et C . Cela est une fonction continue sur le compact Γ . Elle atteint donc ses bornes sur Γ .

Si $C \cap \Gamma = \emptyset$ alors $r(p) > 0$ pour tout p et le minimum est également strictement positif. Soit r_0 ce minimum. Alors le cercle C_2 même centre que C mais de rayon $r_0/2$ n'intersecte pas non plus Γ parce que

$$d(p, C) \leq d(p, C_2) + d(C_2, C) \quad (14.276)$$

où $d(p, C) = r(p)$ et $d(C_2, C) = r_0/2$.

$$d(p, C_2) \geq r(p) - \frac{r_0}{2} \geq \frac{r_0}{2} > 0. \quad (14.277)$$

Si $C \cap \Gamma = \{q\}$ alors un choix d'axe place le centre de C en $(0, 0)$, le point q en $(1, 0)$ et fixe le rayon de C à 1. Pour $p \in \Gamma$ nous notons $r(p)$ la distance entre p et le point de C situé sur sa gauche, c'est à dire, si $p = (p_x, p_y)$,

$$r(p) = \sqrt{1 - p_y^2} + p_x. \quad (14.278)$$

Cela est encore une fonction continue sur Γ qui atteint son minimum valant r_0 . Alors le cercle de centre $(\frac{r_0}{2}, 0)$ et de même rayon contient encore Γ mais n'a plus de points d'intersection avec Γ .

Enfin, tout nombre de points d'intersection entre C et Γ est possible à partir de 2. Pour en avoir deux, prendre une ellipse, et pour en avoir plus, prendre des polynôme dont les angles sont un peu modifiés de façon à rester C^1 .

Intersection avec les demi-arcs Supposons, en fixant encore les axes, que le cercle circonscrit soit encore centré en $(0, 0)$ et que Γ n'intersecte pas le demi-cercle $x < 0$. Alors pour tout $p \in \Gamma$ la distance entre p et ce demi-cercle est strictement positive. Il y a un minimum r_0 . En décalant le centre du cercle de $r_0/2$ vers la droite, nous obtenons un nouveau cercle contenant Γ mais ne l'intersectant pas. □

14.11.2 Description locale

Lemme 14.82 ([8]).

Soit une courbe simple, convexe $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que nous supposons être de classe C^1 . Nous notons Γ l'image de γ . Alors Γ est localement le graphe d'une fonction convexe (définition 11.211).

Démonstration. Soit $p \in \Gamma$ et l_p la tangente à Γ en p . Nous considérons un système d'axe centré en p de telle sorte que l_p soit l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées soit dirigé de tel manière que Γ se trouve dans la partie $y > 0$. De plus nous paramétrons γ de telle sorte à avoir $\gamma(0) = p = (0, 0)$.

Vu que $l_p \equiv y = 0$ est la tangente à Γ nous avons $\gamma'_y = 0$ et $\gamma'_x(0) > 0$. Nous en déduisons que $\gamma'_x(t) > 0$ pour tout $t \in B(0, \delta)$ pour δ suffisamment petit. Nous posons alors

$$g(x) = \gamma_y(\gamma_x^{-1}(x)) \quad (14.279)$$

qui est bien définie parce que γ_x est une bijection entre $B(0, \delta)$ et son image. La fonction g est continue par la proposition 5.174 et même dérivable par la proposition 11.73. De plus, vu la formule (11.171), la fonction g^{-1} est de classe C^1 parce que $(g^{-1})'$ est une composée d'applications continues.

Si g est C^2 Dans ce cas, g'' ne peut pas changer de signe, sinon la tangente coupe le graphe.

Par positivité de g (et le fait que $g(0) = g'(0) = 0$), il n'est pas possible d'avoir $g'' < 0$ partout. Donc $g'' \geq 0$ partout. Cela prouve que g est convexe par la caractérisation 11.217.

Si g est seulement de classe C^1 Le graphe de g correspond au graphe de Γ . Nous montrons que g est convexe en utilisant la caractérisation de la proposition 11.222.

La tangente au graphe de g en $x = x_0$, que nous notons l_0 , est la tangente à Γ en $t = \gamma_x^{-1}(x_0)$. Le graphe de g , qui est une partie de Γ se trouve donc d'un seul côté de l_0 .

Nous nous restreignons g à un compact I et nous considérons la fonction

$$d_a(x) = g(x) - l_a(x) \quad (14.280)$$

qui donne la distance entre le graphe de g et la tangente à g en $x = a$. Cela est une fonction continue en x et en a . Le graphe de g est au dessus de la tangente en $x = 0$ (par construction des axes). Supposons que le graphe de g soit en dessous de la tangente en $x = x_2$. Alors nous avons, pour tout x :

$$\begin{cases} d_0(x) \geq 0 \\ d_{x_1}(x) \leq 0. \end{cases} \quad (14.281a)$$

$$(14.281b)$$

Nous posons

$$s(a) = \sup_{x \in I} d_a(x), \quad (14.282)$$

qui est une fonction continue par la proposition 11.66. Vu les définitions, $s(0) \geq 0$ et $s(x_2) \leq 0$. Il existe donc $m \in [0, m_2]$ tel que $s(m) = 0$. À ce moment nous avons $g(x) = l_m(x)$ pour tout $x \in I$ et donc g est une droite, et en réalité toutes les inégalités sont des égalités. La fonction g est alors bien convexe (mais pas strictement). □

14.11.3 Enveloppe convexe

Proposition 14.83 ([194, 8]).

Soit une courbe simple, fermée et convexe $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que nous supposons être de classe C^2 . Nous notons Γ l'image de γ . Alors il existe un convexe D tel que $\partial D = \Gamma$.

Démonstration. Pour $p \in \Gamma$ nous notons l_p la tangente à Γ en p et H_p le demi-plan (fermé) contenant Γ . Nous posons

$$D = \bigcap_{p \in \Gamma} H_p. \quad (14.283)$$

Cet ensemble est convexe comme intersection de convexes et fermé comme intersection de fermés. Nous prouvons que $\Gamma = \partial D$.

L'inclusion $\Gamma \subset \partial D$ est la plus facile. Si $p \in \Gamma$ alors p est dans chacun des H_q et donc dans D . De plus tout voisinage de p contient des points en dehors de H_p , donc p n'est pas dans l'intérieur de D . Ce dernier étant fermé, un point hors de l'intérieur est sur le bord. Ergo $p \in \partial D$.

Pour l'inclusion inverse, soit $p \in \partial D$.

Il existe q tel que $p \in l_q$ Vu que D est fermé, le point p est dans D , et donc dans tous les H_q .

Supposons qu'il soit dans l'intérieur de tous les H_q . Alors nous considérons la fonction

$$r(q) = \frac{d(p, H_q)}{2} \quad (14.284)$$

définie sur Γ . C'est une fonction continue¹² strictement positive définie sur le compact Γ qui possède donc un minimum strictement positif. Si r_0 est ce minimum, alors $B(p, r_0)$ est incluse à tous les H_q , ce qui ferait que p est à l'intérieur de D . Nous concluons à l'existence de $q \in \Gamma$ tel que $p \in l_q$.

Le point où ça décolle Nous supposons que $p \notin \Gamma$, sinon ce serait trop facile. Nous paramétrisons γ de telle sorte à avoir $q = \gamma(0)$ et nous posons

$$T = \{t \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } l_{\gamma(t)} = l_q\}. \quad (14.285)$$

Cela est un fermé dans $\mathbb{R}$ parce que γ est de classe C^1 . Nous posons $t_0 = \inf(T^c)$ et pour tout ϵ suffisamment petit,

$$\begin{cases} l_{\gamma(t_0+\epsilon)} \neq l_q, \\ l_{\gamma(t_0-\epsilon)} = l_q. \end{cases} \quad (14.286a)$$

$$(14.286b)$$

12. L'équation de la droite l_q a des coefficients continus parce que γ est de classe C^1 .

La seconde est parce que si $l_{\gamma(t_0-\epsilon)} \neq l_q$ nous aurions $t_0 - \epsilon \in T^c$. Soit $r = \gamma(t_0)$; nous avons $l_r = l_q$ parce que si $l_r \neq l_q$ alors par continuité de γ' nous aurions $l_{r'} \neq l_q$ pour tout $r' \in \gamma(B(t_0, \delta))$.

Graphe d'une fonction strictement convexe En suivant le lemme 14.82, l'ensemble Γ est localement (autour de r) le graphe d'une fonction convexe au-dessus de l_r . Soit $g: B(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ cette fonction convexe.

Soit $\epsilon > 0$. Si $g''(x) = 0$ sur $]0, \epsilon]$ alors g' y est constante. Mais $g'(0) =$, ce qui signifierait que sur $[0, \epsilon]$ nous ayons $g'(x) = 0$ et donc $g(x) = 0$. Cela ferait que $l_{r'} \equiv y = 0$ pour tout r' de la forme $(x, 0)$ avec $x \in [0, \epsilon]$ (qui sont des points de Γ). Cela est en contradiction avec la définition de r . Donc il existe un point $x \in [0, \epsilon[$ tel que $g''(x) > 0$.

Rappelons que $p \in l_q$, ce qui fait que p a pour coordonnées $(p_x, 0)$. Nous restreignons δ et ϵ de telle sorte que p_x soit plus grand à la fois que ϵ et δ .

Il existe donc un intervalle $[a, b]$ avec $a, b \geq 0$ et $a, b < p_x$ sur lequel g est strictement convexe.

La tangente qui tue En particulier $g(b) > 0$ et le théorème de des accroissements finie 11.99(1) nous donne l'existence de $m \in [0, b]$ tel que la tangente à g en $x = m$ est parallèle au segment joignant $(0, 0)$ à $(b, f(b))$. Cette tangente, que nous nommons l_m , est en dessous de la corde, par strict convexité. En particulier, son point d'intersection avec $y = 0$ est strictement entre 0 et m .

L'ensemble D est d'un seul côté de l_m . Ce côté est forcément celui de $q = (0, 0)$ (parce que $q \in \Gamma \subset D$), et donc les points de coordonnées $(x, 0)$ avec $x > m$ ne sont pas dans D . Pas de chance, p est un point de ce type.

La contradiction Nous avons prouvé que si $p \in \partial D \setminus \Gamma$ alors p n'est pas dans D , ce qui est impossible parce que, l'ensemble D étant fermé, nous avons $\partial D \subset D$.

□

Remarque 14.84.

Bien que cela puisse paraître évident dès le début, nous ne démontrerons que dans la proposition 14.86 que D est l'enveloppe convexe de Γ .

Corollaire 14.85.

Si $p \in \text{Int}(D)$ alors toute droite passant par p intersecte Γ en exactement 2 points.

Démonstration. Vu que la partie D est bornée, toute droite passant par son intérieur coupe ∂D en au moins deux points (un dans chaque sens, et en utilisant le lemme de passage de douane 5.162).

Soit ℓ une droite passant par p et supposons qu'elle coupe Γ en trois points distincts. Alors au moins deux d'entre eux sont du même côté de p . Soient q_1 et q_2 ces points. Nous avons donc dans l'ordre $p \in \text{Int}(D)$, $q_1 \in \partial D$ et $q_2 \in \partial D$.

Vu que tout Γ est d'un seul côté de ses tangentes, lesdites tangentes ne passent pas par l'intérieur de D . Ni p ni q_2 ne sont sur ℓ_{q_1} , parce que si $q_2 \in \ell_{q_1}$ alors $\ell_{q_1} = \ell$, ce qui est impossible parce que ℓ passe par $p \in \text{Int}(D)$.

Or p et q_2 sont de part et d'autres de ℓ_{q_1} , ce qui est impossible parce que Γ est d'un seul côté de cette droite.

□

Proposition 14.86.

Soit D l'ensemble défini en (14.283).

(1) $D = \text{Conv}(\Gamma)$ ($\text{Conv}(\Gamma)$ désigne l'enveloppe convexe de Γ)

(2) $\partial \text{Conv}(\Gamma) = \Gamma$.

Pour la définition d'enveloppe convexe, voir la définition 8.29.

Démonstration. L'ensemble D est un convexe contenant Γ . Donc $\text{Conv}(\Gamma) \subset D$. L'inclusion inverse est à prouver.

Soit $x \in D$. Si $x \in \partial D$ alors $x \in \Gamma$ (proposition 14.83) et donc $x \in \text{Conv}(\Gamma)$. Nous ne devons donc traiter que le cas $x \in \text{Int}(D)$.

Le corollaire 14.85 nous dit que toute droite passant par x coupe Γ en exactement deux points. Soient p et q ces points. Alors $p, q \in \Gamma \subset \text{Conv}(\Gamma)$. Vu que $\text{Conv}(\Gamma)$ est convexe, tout le segment $[p, q]$ est dans $\text{Conv}(\Gamma)$, et en particulier $p \in \text{Conv}(\Gamma)$.

Nous passons à la seconde affirmation. Nous savons que $D = \text{Conv}(\Gamma)$. En prenant le bord des deux côtés, $\partial D = \partial \text{Conv}(\Gamma)$, donc $\Gamma = \partial \text{Conv}(\Gamma)$. $\square$

Lemme 14.87 (Des tangentes parallèles[195]).

Une courbe fermée γ de classe C^1 est convexe si et seulement si elle ne possède pas 3 tangentes parallèles distinctes.

Démonstration. Si le graphe Γ possédait trois tangentes parallèles distinctes, une serait entre les deux autres et le graphe Γ serait de part et d'autres des cette tangente. Dans ce cas, γ n'est pas convexe.

Nous montrons maintenant que si γ n'est pas convexe, alors elle possède trois tangentes parallèles distinctes. Pour $p \in \Gamma$ tel que Γ soit des deux côtés de l_p .

Soient Γ_1 et Γ_2 les parties de Γ délimitées par l_p . Nous notons q_i le point de Γ_i le plus éloigné de la droite l_p , il existe parce que G est compact et que la fonction distance à l_p est continue sur Γ . Les points p, q_1 et q_2 sont distincts (sinon l_p ne couperait pas Γ en deux parties).

Montrons que $l_{q_i} \parallel l_p$. Pour cela nous choisissons un système d'axe dans lequel $l_p \equiv y = 0$. Dans ce système, la distance entre $\gamma(t)$ et l_p est $\gamma_y(t)$ et les extrema de cette fonction ont lieu aux points t tels que $\gamma'_y(t) = 0$, c'est à dire aux points sur lesquels la tangente est parallèle à l_p .

À quel moment avons nous utilisé le fait que la courbe soit fermée? Au moment de dire que le point le plus éloigné devait vérifier $\gamma'_y(t) = 0$. En effet un extrema peut ne pas vérifier cette condition si il n'est pas à l'intérieur du domaine. Dans notre cas, nous avons $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est fermée : $\gamma(0) = \gamma(1)$. Donc en réalité nous pouvons considérer $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et tous les points du domaine sont intérieurs au domaine. L'extremum doit donc vérifier la condition d'annulation de la dérivée. $\square$

Exemple 14.88

Si la courbe n'est pas fermée, alors le lemme 14.87 ne tient pas comme le montre le contre-exemple du graphe de $f(x) = x^3 - x$. Il est non convexe et pourtant ne présente que 2 tangentes parallèles (dans chaque directions). $\triangle$

Lemme 14.89.

Soit γ une courbe convexe et ℓ une droite qui intersecte Γ mais qui n'est pas tangente. Alors l'intersection entre ℓ et Γ comprend au maximum 2 points.

Démonstration. Supposons que ℓ coupe Γ en trois points p, q, r (dans cet ordre). Vu que ℓ n'est pas tangente à Γ , la tangente ℓ_q est distincte de ℓ (et intersecte ℓ en l'unique point q). Les points p et r sont dans Γ et sont pourtant de deux côtés différents de ℓ_q . Contradiction avec la convexité de γ . $\square$

La proposition suivante nous dit que si deux points de Γ ont la même tangente, alors entre ces deux points, Γ est le segment de droite les joignant.

Proposition 14.90 ([8]).

Soit $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple et convexe de classe C^1 . Si la tangente en $p = \gamma(s_p)$ et la tangente en $q = \gamma(s_q)$ sont identiques (pas seulement parallèles), alors soit

$$\gamma([s_p, s_q]) = [p, q] \quad (14.287)$$

soit

$$\gamma([s_q, L]) = [p, q] \quad (14.288)$$

Démonstration. Nous considérons un système d'axe dans lequel $p = (0, 0)$, $\ell_p = \ell_q \equiv y = 0$ et tel que $\gamma_y(t) \geq 0$ pour tout t . Nous choisissons enfin une paramétrisation de γ telle que $p = \gamma(0)$.

Si $\gamma_y([0, s_q]) = \{0\}$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires 11.50, tous les points du type $(t, 0)$ avec $0 \leq t \leq s_q$ sont atteints par $\gamma(t)$ avec $0 \leq t \leq s_q$. De plus aucun autre point ne peut être atteint parce que γ étant simple, elle ne peut pas faire de retour en arrière.

Nous supposons donc que γ_y n'est pas identiquement nulle sur $[0, s_q]$; il existe donc un s_M avec $0 < s_M < s_q$ qui maximise γ_y sur $[0, s_q]$. La tangente à Γ en $\gamma(s_M)$ est horizontale. Les droites $y = 0$ et $y = \gamma_y(s_M)$ sont donc deux tangentes parallèles à Γ . Par le lemme des tangentes parallèles 14.87, il n'y a pas d'autres tangentes horizontales. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ la droite $y = \frac{1}{n}$ n'est tangente nulle part¹³ à Γ .

Par le lemme 14.89, la droite $y = \frac{1}{n}$ ne peut intersecter Γ qu'en seulement deux points. Or le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à γ_y sachant que $\gamma_y(0) = \gamma_y(s_q) = 0$ et $\gamma_y(s_M) > 0$ nous donne a_n, b_n tels que

$$0 < a_n < s_M \quad (14.289a)$$

$$s_M < b_n < s_q \quad (14.289b)$$

et $\gamma_y(a_n) = \gamma_y(b_n) = \frac{1}{n}$. Donc la droite $y = \frac{1}{n}$ intersecte γ deux fois dans $[0, s_q]$. En conséquence de quoi $\gamma_y(t) < \frac{1}{n}$ pour tout $t \in [q_q, L]$. Cela étant valable pour tout n nous avons $\gamma_y([s_q, L]) = \{0\}$ et nous sommes ramenés essentiellement au premier cas. $\square$

Proposition 14.91.

Soit une courbe fermée simple γ de classe C^1 et une droite ℓ . Alors il existe au moins deux points distincts q_1, q_2 tels que $\ell_{q_1} \parallel \ell_{q_2} \parallel \ell$ avec $\ell_p \neq \ell_q$.

Démonstration. Pour $p \in \Gamma$ nous considérons le nombre $r(p) = d(p, \ell)$. En tant que fonction continue sur un compact, elle possède un minimum et un maximum. Dans un système d'axe pour lequel $\ell \equiv y = 0$, la fonction r s'écrit $r(p) = p_y$ et les extrema arrivent en $\gamma(s)$ avec $\gamma'_y(s) = 0$, ce qui signifie que les tangentes aux extrema sont parallèles à ℓ . Vu que le maximum et le minimum ne peuvent pas être égaux (sinon la courbe serait horizontale et pas simple), les tangentes en ces points sont distinctes. $\square$

Corollaire 14.92.

Soit une courbe convexe fermée simple γ de classe C^2 . L'ensemble $\text{Conv}(\Gamma)$ est compact.

Démonstration. Nous savons que $\text{Conv}(\Gamma)$ n'est autre que D par la proposition 14.86. Nous savons déjà que D est fermé. Il nous suffit donc de prouver qu'il est borné (théorème de Borel-Lebesgue 5.107). Nous considérons deux droites perpendiculaires et les 4 tangentes correspondantes par la proposition 14.91. Vu que Γ est d'un seul côté de chacune de ces tangentes, elle est contenue dans le rectangle délimité par ces 4 droites. $\square$

14.11.4 Courbure et convexité

Lemme 14.93.

Soit $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe simple, fermée en paramétrisation normale. Alors l'application

$$\sigma: [0, L] \rightarrow S^1, s \mapsto \gamma(s) \quad (14.290)$$

est surjective.

Démonstration. Le théorème 14.80 nous dit que si $\theta(0) = a$ alors $\theta(2\pi) = a + 2\pi$ ou $a - 2\pi$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors que θ prend toutes les valeurs entre a et $a + 2\pi$ ou $a - 2\pi$. $\square$

13. À part $n = 0$ et si par manque de chance, $\gamma_y(s_M)$ est un nombre de la forme $1/n$.

Proposition 14.94 ([195]).

Une courbe fermée simple de classe C^2 est convexe si et seulement si sa courbure est soit toujours positive, soit toujours négative.

Démonstration. Nous considérons la courbe γ munie d'un paramétrage de vitesse 1, c'est à dire avec $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout t . Si θ est sa fonction d'angle, alors nous avons $\theta' = \kappa$ par le lemme 14.72. Donc la fonction θ est monotone si et seulement si la courbure ne change pas de signe. Nous allons montrer que θ est monotone si et seulement si γ est convexe.

$\Rightarrow$ Nous supposons que θ est monotone et γ non convexe. Soient $p \in \Gamma$ tel que Γ soit des deux côtés de ℓ_p , et soient les points q_1, q_2 donnés par le lemme des tangentes parallèles 14.87 tels que $\ell_p \parallel \ell_{q_1} \parallel \ell_{q_2}$. Parmi les vecteurs tangents en p, q_1 et q_2 , deux au moins ont la même direction ; supposons que ce sont q_1 et q_2 . C'est à dire que si $p = \gamma(s_0)$, $q_1 = \gamma(s_1)$ et $q_2 = \gamma(s_2)$ alors nous avons $\gamma'(s_1) = \gamma'(s_2)$ et donc aussi

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) + 2n\pi \quad (14.291)$$

pour un certain n . Mais θ est monotone et la différence entre sa première et sa dernière valeur doit valoir 2π ou -2π par le théorème 14.80. Donc n ne peut valoir que $-1, 0$ et 1 .

Si $n = 0$ alors θ est constante sur $[s_1, s_2]$. Si $n = 1$ alors $\theta(s_1) = \theta(s_2) + 2\pi$ alors que sur toute la courbe, θ ne peut faire que 2π . Donc θ est constant sur $[0, s_1]$ et sur $[s_2, L]$ (où L est le bord de la paramétrisation). Si $n = -1$, même conclusion.

Dans tous les cas, Γ contient une ligne droite, soit de q_1 à q_2 , soit de q_2 à q_1 . Et dans ces cas nous avons $\ell_{q_1} = \ell_{q_2}$, ce qui est contraire à la construction de q_i .

Nous concluons que γ est convexe.

$\Leftarrow$ Nous supposons que γ est convexe, mais que θ n'est pas monotone. Il existe donc $s_1 < s_0 < s_2$ tels que

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0). \quad (14.292)$$

Et vu le lemme 14.93, il existe s_3 tel que $\gamma'(s_3) = -\gamma'(s_1)$.

Donc en s_1, s_2 et s_3 nous avons trois tangentes parallèles. La proposition 14.87 est alors formelle, γ étant convexe, deux de ces tangentes doivent être identiques.

La proposition 14.90 dit qu'entre deux points dont les tangentes sont identiques, la courbe doit être un segment de droite. Or sur un segment de droite, $\kappa = 0$ et θ est constante.

— La partie $\gamma([s_1, s_2])$ ne peut pas être droite parce que nous avons supposé l'existence d'un $s_0 \in]s_1, s_2[$ tel que $\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0)$.

— La partie $\gamma([s_1, s_3])$ ne peut pas être droite parce que $\theta(s_3) \neq \theta(s_1)$.

— La partie $\gamma([s_2, s_3])$ ne peut pas être droite parce que $\theta(s_2) \neq \theta(s_1)$.

Nous sommes donc devant une contradiction.

Nous en concluons que θ doit être monotone.

□

14.11.5 Théorème des quatre sommets**Lemme 14.95.**

Soit une droite ℓ du plan. Il existe $a, c \in \mathbb{R}^2$ avec $c \neq 0$ tels que $z \in \ell$ si et seulement si $(z - a) \cdot c = 0$.

Démonstration. Une droite est paramétrée par $\gamma(t) = p + tq$. En posant $a = p$ et $c = Jq$ nous avons la réponse. En effet nous allons montrer qu'avec ces valeurs de a et c , nous avons $z \in \Gamma$ si et seulement si $(z - a) \cdot c = 0$.

D'abord un point de γ est de la forme $z = \gamma(t) = p + tq$. Nous avons :

$$(\gamma(t) - a) \cdot c = (\gamma(t) - p) \cdot Jq = tq \cdot Jq = 0. \quad (14.293)$$

Et dans l'autre sens, si $(z-a) \cdot c = 0$ nous devons prouver que $z \in \Gamma$. Nous avons : $(z-p) \cdot Jq = 0$, ce qui fait que $z-p$ est un multiple de q . Autrement dit : $z-p = \lambda q$ ou encore $z = \alpha q + p$, qui est sur la droite Γ . $\square$

Définition 14.96.

Un **sommet** d'une courbe est un point d'extremum local de la courbure.

Théorème 14.97 (Théorème des quatre sommets[1, 185]).

Soit un arc paramétrique $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ fermé, simple et convexe¹⁴ de classe C^3 et T -périodique.

Alors γ possède au moins 4 points critiques sur chaque période.

Démonstration. Nous supposons que la paramétrisation de γ soit normale.

Si la courbure κ est constante sur une partie ouverte de la (paramétrisation de la) courbe, alors tous les points de cette partie sont des sommets et le théorème est fait. Nous supposons que κ n'est pas constante et en particulier que Γ ne contient ni bouts de droites ni bouts de cercles (théorème 14.68).

La fonction κ étant de classe C^1 sur le compact Γ , elle admet au moins un maximum et un minimum distincts. Vu que ces points sont intérieurs, ils correspondent au changement de signe de κ' . Soient p et q ces points. Pour la simplicité nous supposons que γ est paramétré de telle sorte que $\gamma(0) = p$, et $q = \gamma(s_q)$ avec $0 < s_q < T$.

Nous supposons que p et q sont les seuls points de changement de signe de κ' .

Soit ℓ la droite passant par p et q . Tous les points du segment $[p, q]$ (qui sont dans $\text{Conv}(\Gamma)$) ne peuvent pas être sur Γ (sinon nous aurions un morceau de droite). Donc certains points sont dans l'intérieur de $\text{Conv}(\Gamma)$. Donc la droite ℓ passe par l'intérieur de $\text{Conv}(\Gamma)$ et le corollaire 14.85 nous dit que la droite ℓ ne coupe Γ en seulement deux points.

Par conséquent, les ensembles $\gamma([0, s_q])$ et $\gamma([s_q, T])$ sont de part et d'autre de Γ . Vu qu'en ces points, κ' change de signe et qu'il ne change de signe en aucun autre points, la fonction κ' est positive d'un côté de ℓ et négative de l'autre.

D'autre part par le lemme 14.95, il existe $a \in \mathbb{R}^2$ et $c \neq 0$ tels que $z \in \ell$ si et seulement si $(z-a) \cdot c = 0$. La fonction $z \mapsto (z-a) \cdot c$ est donc positive d'un côté de ℓ et négative de l'autre.

En résumé les fonctions

$$s \mapsto \kappa'(s) \tag{14.294a}$$

$$s \mapsto (\gamma(s) - a) \cdot c \tag{14.294b}$$

changent de signe en même temps et le produit a donc un signe constant. Ce produit n'est de plus pas nul parce que κ' n'est nul sur aucun intervalle (sinon κ y serait constant et Γ un segment de droite) et $(\gamma(s) - a) \cdot c$ ne s'annule pour aucun s sauf ceux qui correspondent à p et q .

14. Par la proposition 14.94 nous pouvons aussi bien demander à la courbure d'être toujours strictement positive, comme le fait [1].

Nous avons donc

$$0 \neq \int_0^T \kappa'(s)(\gamma(s) - a) \cdot c \, ds \quad (14.295a)$$

$$= \underbrace{\left[(\gamma(s) - a) \cdot c \kappa(s) \right]_0^T}_{A=0} - \int_0^T \kappa(s) \gamma'(s) \cdot c \, ds \quad (14.295b)$$

$$= - \int_0^T \kappa(s) (\gamma'(s) \cdot c) \, ds \quad (14.295c)$$

$$= \int_0^T J \gamma''(s) \cdot c \, ds \quad (14.295d)$$

$$= J \int_0^T \gamma''(s) \cdot c \, ds \quad (14.295e)$$

$$= J [\gamma'(s) \cdot c]_0^T \quad (14.295f)$$

$$= 0. \quad (14.295g)$$

Justifications :

— L'expression A est nulle parce que les valeurs en 0 et en T sont identiques.

— Nous utilisons le lemme 14.67 pour faire $-\kappa(s)\gamma'(s) = J\gamma''(s)$.

Le tout est une contradiction de la forme $0 \neq a = 0$.

Nous avons donc au moins un troisième point de changement de signe de κ' . Vu que la courbe est périodique, il en faut un nombre pair et donc un quatrième. $\square$

L'exemple de l'ellipse montre qu'il n'y a pas lieu de chercher d'autres extrema de κ à part les 4 déjà trouvés.

Exemple 14.98

Nous trouvons les sommets de l'ellipse.

$$\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) \quad (14.296a)$$

$$\gamma'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t)) \quad (14.296b)$$

$$\gamma''(t) = -(a \cos(t), b \sin(t)) \quad (14.296c)$$

$$(14.296d)$$

La courbure est

$$\kappa(t) = \frac{\gamma'' \cdot J\gamma'}{\|\gamma'\|^3} \quad (14.297a)$$

$$= \frac{-1}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}} \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \cos(t) \\ -a \sin(t) \end{pmatrix} \quad (14.297b)$$

$$= \frac{ab}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}}. \quad (14.297c)$$

Vu que $ab > 0$, les extrema de cela sont ceux du dénominateur et il suffit donc d'étudier les extrema de

$$f(t) = a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t). \quad (14.298)$$

Nous avons

$$f'(t) = 2(a^2 - b^2) \cos(t) \sin(t), \quad (14.299)$$

fonction qui s'annule effectivement 4 fois sur une période. Deux maxima et deux minima. $\triangle$

14.11.6 Le théorème de Jordan

Définition 14.99 ([196]).

Une **courbe de Jordan** est une courbe simple fermée dans le plan.

Le théorème suivant a un énoncé relativement simple, mais la démonstration est en réalité très longue.

Théorème 14.100 (Théorème de Jordan[196]).

Le complémentaire d'une courbe de Jordan Γ dans un plan affine réel est formé de exactement deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe Γ .

Chapitre 15

Analyse vectorielle

15.1 Le théorème de Green

Soit un champ de vecteurs

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (15.1)$$

et un chemin $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (15.2)$$

Nous avons défini la circulation de F le long de σ par

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} F \cdot d\sigma &= \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[F_1(\sigma(t))x'(t) + F_2(\sigma(t))y'(t) + F_3(\sigma(t))z'(t) \right] dt \\ &= \int_{\sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \end{aligned} \quad (15.3)$$

La dernière ligne est juste une notation compacte¹. Elle sert à se souvenir qu'on va mettre x' à côté de F_1 , y' à côté de F_2 et z' à côté de F_3 . L'avantage de cette notation est qu'on peut écrire d'autres combinaisons.

Si f et g sont deux fonctions sur $\mathbb{R}^3$, nous pouvons écrire

$$\int_{\sigma} f dy + g dz. \quad (15.4)$$

Cela signifie

$$\int_a^b \left[f(\sigma(t))y'(t) + g(\sigma(t))z'(t) \right] dt. \quad (15.5)$$

Soit D une région du plan et σ , son contour que nous prenons, par convention², dans l'orientation trigonométrique, comme indiqué sur la figure 15.1. Nous supposons également que le domaine D n'a pas de trous intérieurs.

Nous notons par $\sigma = \partial D$ le bord de D , c'est à dire le contour dont nous venons de parler.

1. Il y aurait beaucoup de choses à dire là-dessus, mais la vie est trop courte pour parler de formes différentielles, et c'est dommage.

2. Il y aurait beaucoup de choses à dire sur ça aussi, mais...

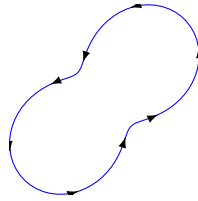


FIGURE 15.1 – Un contour avec son orientation.

Théorème 15.1 (Théorème de Green).

Soient $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 . Alors

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (15.6)$$

Pour rappel, l'intégrale du membre de gauche signifie

$$\int_a^b \left[P(\sigma(t))\sigma'_x(t) + Q(\sigma(t))\sigma'_y(t) \right] dt. \quad (15.7)$$

Ce n'est d'ailleurs rien d'autre que l'intégrale du champ de vecteurs $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Corollaire 15.2.

L'aire du domaine D est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (xdy - ydx). \quad (15.8)$$

Démonstration. L'intégrale $\int_{\partial D} (xdy - ydx)$ se traite avec le théorème de Green où l'on pose $P = -y$ et $Q = x$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} -ydx + xdy &= \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_D 2 dxdy. \end{aligned} \quad (15.9)$$

La dernière ligne est bien le double de la surface. □

Exemple 15.3

Calculons (encore une fois) l'aire du disque de rayon R . Il s'agit de calculer l'intégrale

$$I = \frac{1}{2} \int_{\sigma} (xdt - ydx) \quad (15.10)$$

où σ est le cercle donné par

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} \quad (15.11)$$

Le calcul est

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{R \cos(\theta)}_x \underbrace{R \cos(\theta)}_{y'} - \underbrace{R \sin(\theta)}_y \underbrace{(-R \sin(\theta))}_{x'} d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi R^2. \end{aligned} \quad (15.12)$$

△

Exemple 15.4

Calculons l'aire de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (15.13)$$

dont le bord est donné par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t). \end{cases} \quad (15.14a)$$

$$(15.14b)$$

Le terme xdy devient $a \cos(t)b \cos(t) = ab \cos^2(t)$ et le terme ydx devient $b \sin(t)(-a \sin(t)) = -ab \sin^2(t)$. L'intégrale qui donne la surface est donc

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab = \pi ab. \quad (15.15)$$

△

Le théorème de Green peut être mis sous une autre forme.

Théorème 15.5 (Théorème de Green, forme vectorielle).

Si G est un champ de vecteurs sur D , nous avons

$$\int_{\partial D} G \cdot d\sigma = \iint_D (\nabla \times G) \cdot dS \quad (15.16)$$

où le second membre est le flux de $\nabla \times G$ sur la surface D .

Démonstration. Analysons le membre de droite. Nous savons que D est une surface dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le vecteur normal à la surface est donc simplement le vecteur (constant) e_z . Le produit scalaire $(\nabla \times F) \cdot dS$ est donc $(\nabla \times F) \cdot e_z$ et se réduit à la troisième composante du rotationnel, c'est à dire

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (15.17)$$

Cela est bien le membre de droite de l'équation (15.6). Le membre de gauche de cette dernière est bien le membre de gauche de (15.16). □

Exemple 15.6

Soit le champ de vecteurs $F(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y + x \end{pmatrix}$, et soit à calculer

$$\iint_D \nabla \times F \cdot dS \quad (15.18)$$

où D est la région comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = x$ pour $x \geq 0$ (voir la figure 15.2).

Nous pouvons calculer cette intégrale directement en calculant le rotationnel de F :

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 2xy \end{pmatrix}. \quad (15.19)$$

Par conséquent l'intégrale à effectuer est

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (1 - 2xy) dy = \frac{1}{12}. \quad (15.20)$$

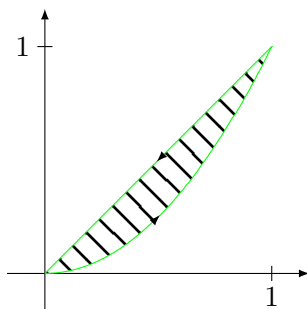


FIGURE 15.2 – Le contour d'intégration pour l'exemple 15.6.

```
-----
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                               |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.                 |
|-----|
sage: f(x,y)=1-2*x*y
sage: f.integrate(y,x**2,x).integrate(x,0,1)
(x, y) |--> 1/12
```

L'autre façon de calculer l'intégrale est d'utiliser le théorème de Green et de calculer la circulation de F le long de ∂D :

$$I = \int_{\partial D} F \cdot \sigma. \quad (15.21)$$

Le chemin $\sigma = \partial D$ est composé de la parabole $y = x^2$ et du segment de droite $x = y$. Attention : il faut respecter l'orientation. Nous avons

$$\sigma_1(t) = (t, t^2) \quad (15.22)$$

et

$$\sigma_2(t) = (1 - t, 1 - t). \quad (15.23)$$

Notez bien que le second chemin est $(1 - t, 1 - t)$ et non (t, t) parce qu'il faut le parcourir dans le bon sens (voir le dessin).

Commençons par le premier chemin :

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (t, t^2) \\ \sigma_1'(t) &= (1, 2t) \\ F(\sigma_1(t)) &= \begin{pmatrix} t^5 \\ t + t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15.24)$$

et par conséquent

$$F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = t^5 + 2t^2 + 2t^3, \quad (15.25)$$

et le premier morceau de la circulation vaut

$$\int_{\sigma_1} F \cdot d\sigma_1 = \int_0^1 t^5 + 2t^2 + 2t^3 = \frac{4}{3}. \quad (15.26)$$

Pour le second chemin :

$$\begin{aligned} \sigma_2(t) &= (1 - t, 1 - t) \\ \sigma_2'(t) &= (-1, -1) \\ F(\sigma_2(t)) &= \begin{pmatrix} (1 - t)^3 \\ 2(1 - t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Par conséquent

$$F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2(t) = -(1-t)^2 - 2(1-t). \quad (15.28)$$

Le second morceau de la circulation est par conséquent

$$\int_0^1 -(1-t)^2 - 2(1-t) dt = -\frac{5}{4}. \quad (15.29)$$

La circulation de F le long de σ est donc égale à

$$\frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}. \quad (15.30)$$

Comme prévu, nous obtenons le même résultat. $\triangle$

15.2 Théorème de la divergence dans le plan

15.2.1 La convention de sens de parcours

Soient D , un domaine dans le plan et une paramétrisation

$$\begin{aligned} \sigma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15.31)$$

une paramétrisation du bord ∂D de D . La normale à σ est perpendiculaire à la tangente, donc la normale extérieure de norme 1 vaut

$$n = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \quad \text{ou} \quad n- = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}. \quad (15.32)$$

Comment faire le choix ?

Nous prenons comme convention que le sens *du chemin* doit être tel que le vecteur normal extérieur soit

$$n = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}. \quad (15.33)$$

Donc si le chemin σ donne lieu à un vecteur n pointant vers l'intérieur, il faut utiliser le chemin qui va dans le sens contraire : $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(1-t)$.

Les vecteurs tangents et normaux d'un contour sont dessinés sur la figure 15.3.

15.2.2 Théorème de la divergence

Théorème 15.7 (Théorème de la divergence).

Soit F un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Le flux de F à travers le bord de D est égal à l'intégrale de la divergence de F sur D . En formule :

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \iint_D \nabla \cdot F \, dx dy. \quad (15.34)$$

Remarque 15.8.

Tant $F \cdot n$ que $\nabla \cdot F$ sont des fonctions. Le membre de gauche est donc l'intégrale d'une fonction sur un chemin et le membre de droite est l'intégrale d'une fonction sur une surface.

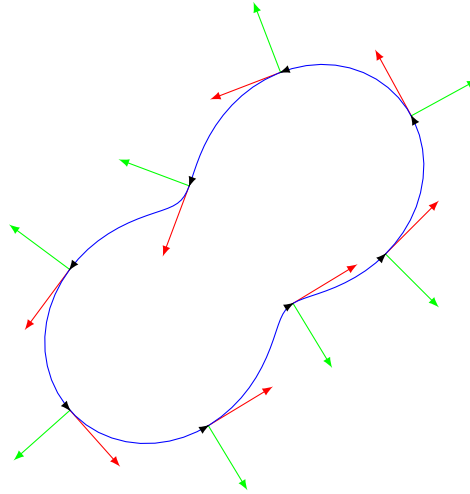


FIGURE 15.3 – Le champ de vecteurs tangents est dessiné en rouge tandis qu'en vert nous avons le champ de vecteurs normaux extérieurs.

Démonstration. Notre convention de sens de parcours du chemin permet d'écrire le produit scalaire $F \cdot n$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 F \cdot n &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\|\sigma'\|} (F_x y' - F_y x') \\
 &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'.
 \end{aligned} \tag{15.35}$$

Par conséquent, la *fonction*

$$F \cdot n \tag{15.36}$$

est la même que la *fonction*

$$\frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'. \tag{15.37}$$

L'intégrale de cette dernière fonction sur le chemin σ est

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\sigma} F \cdot n \\
 &= \int_{\sigma} \frac{1}{\|\sigma'\|} \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma' \\
 &= \int_a^b \frac{1}{\|\sigma'(t)\|} \begin{pmatrix} -F_y(\sigma(t)) \\ F_x(\sigma(t)) \end{pmatrix} \cdot \sigma'(t) \|\sigma'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \cdot \sigma'(t) dt.
 \end{aligned} \tag{15.38}$$

Cette dernière intégrale est la circulation du champ de vecteurs $\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}$ sur le chemin σ . Le théorème de Green 15.5 nous enseigne que la circulation le long d'un chemin est égale au flux du rotationnel à travers la surface. Par conséquent,

$$I = \iint_D \left(\nabla \times \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix} \right) \cdot dS = \iint_D \nabla \cdot F \, dx dy \tag{15.39}$$

□

15.3 Théorème de Stokes

Nous nous mettons maintenant dans $\mathbb{R}^3$, et nous y considérons une surface paramétrée S donc le bord est ∂S .

Théorème 15.9 (Théorème de Stokes).

Alors le flux du rotationnel de F à travers S est égal à la circulation de F le long du bord. En formule :

$$\iint_S \nabla \times F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot d\sigma. \quad (15.40)$$

Nous pouvons nous donner une idée du pourquoi ce théorème est vrai. D'abord, si la surface est plate, cela est exactement le théorème de Green 15.5. Supposons maintenant que le bord reste plat, mais que la surface se déforme un petit peu. Le chemin

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15.41)$$

est tout autant le bord du disque plat de rayon 1 que celui de la demi-sphère

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}. \quad (15.42)$$

Le champ de vecteur que nous considérons est $G = \nabla \times F$. Il a un certain flux à travers le disque plat, et ce plus est égal à la circulation de F sur σ . Quel est le flux de G à travers la demi-sphère ? Étant donné que $\nabla \cdot G = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$, le champ de vecteurs G est incompressible, de telle façon que tout ce qui rentre dans la demi-sphère doit en sortir. Le flux de G à travers la demi-sphère doit par conséquent être égal à celui à travers le disque plat.

Exemple 15.10

Soit C l'intersection entre le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et le plan $x + y + z = 1$. Calculer la circulation de

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} \quad (15.43)$$

le long de C .

Au lieu de calculer directement

$$\int_C F \cdot d\sigma, \quad (15.44)$$

nous allons calculer

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS \quad (15.45)$$

où S est une surface dont C est le bord. Cette intégrale est à calculer avec la formule (13.464).

La première chose à faire est de trouver une surface dont le bord est C et en trouver une paramétrisation ϕ . Le plus simple est de prendre le graphe du plan sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Une paramétrisation de cette surface est simplement

$$\begin{aligned} \phi: D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.46)$$

où D est le disque de rayon 1. Étant donné que cela paramètre le plan $x + y + z - 1 = 0$, le vecteur normal est $n = e_x + e_y + z_z$. Nous pouvons cependant calculer ce vecteur normal en suivant la recette usuelle. D'abord les vecteurs tangents sont

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (15.47)$$

Et le vecteur normal est donné par le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} n &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= e_x + e_y + z_z. \end{aligned} \quad (15.48)$$

Ensuite, le rotationnel de F est donné par

$$\nabla \times F = 3(x^2 + y^2)e_z. \quad (15.49)$$

Par conséquent,

$$\nabla \times F \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 3(x^2 + y^2). \quad (15.50)$$

L'intégrale à calculer est donc

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot dS &= \iint_D (\nabla \times F)(\phi(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 3 \int_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned} \quad (15.51)$$

Cette dernière intégrale est l'intégrale d'une fonction sur le disque de rayon 1. Elle s'effectue en passant aux coordonnées polaires :

$$3 \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2) r dr = \frac{3\pi}{2}. \quad (15.52)$$

△

15.4 Théorème de Gauss

Soit V une partie de $\mathbb{R}^3$ délimitée par une surface S sur laquelle nous considérons la normale extérieure. Soit F un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème 15.11 (Théorème de la divergence ou de Gauss).

Le flux d'un champ de vecteur F à travers une surface fermée est égale à l'intégrale de la divergence sur le volume correspondant :

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \iiint_V \nabla \cdot F dx dy dz. \quad (15.53)$$

Ce théorème signifie que la quantité de fluide qui s'accumule dans le volume (le flux est ce qui rentre moins ce qui sort) est égal à l'intégrale de $\nabla \cdot F$ sur le volume, alors que nous savons que, localement, la quantité $\nabla \cdot F(x, y, z)$ est la quantité de fluide qui s'accumule au point (x, y, z) .

Remarque 15.12.

Ce théorème ne fonctionne qu'avec des surfaces fermées. Essayer de l'appliquer au calcul de flux à travers des surfaces ouvertes n'a pas de sens parce qu'une surface ouverte ne délimite pas un volume.

Exemple 15.13

Calculer le flux du champ de vecteurs

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \quad (15.54)$$

à travers la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. Nous utilisons le théorème de la divergence

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_B \nabla \cdot F \, dx dy dz \quad (15.55)$$

où S est la sphère et B est la boule (la sphère pleine). La divergence de F se calcule :

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2 + 2x + 2y. \quad (15.56)$$

L'intégrale est donc en trois termes :

$$\begin{aligned} \iiint_B 2 \, dV &= 2 \text{Volume}(B) = \frac{8\pi}{3} \\ \iiint_B y \, dV &= 0 \\ \iiint_B z \, dV &= 0. \end{aligned} \quad (15.57)$$

△

Dans certains cas le théorème de Gauss permet de simplifier le calcul de l'intégrale d'une fonction sur une surface.

Exemple 15.14

Soit à calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\partial B} (x^2 + y + z) \, dS, \quad (15.58)$$

c'est à dire l'intégrale de la fonction $x^2 + y + z$ sur la sphère. Le vecteur normal à la sphère est

$$n = xe_x + ye_y + ze_z. \quad (15.59)$$

Étant donné que nous sommes sur la sphère de rayon 1, ce vecteur est même normé. La fonction que nous regardons n'est rien d'autre que $F \cdot n$ avec

$$F = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15.60)$$

Nous pouvons donc simplement intégrer $\nabla \cdot F$ sur toute la boule :

$$I = \iiint_B \nabla \cdot F \, dx dy dz = \iiint_B 1 \, dx dy dz = \frac{4\pi}{3}. \quad (15.61)$$

△

15.5 Coordonnées curvilignes

15.5.1 Base locale

Les coordonnées sphériques et cylindriques sont deux systèmes de coordonnées «un peu courbe» qui existent sur $\mathbb{R}^3$. Il en existe de nombreux autres, que nous appelons **coordonnées curvilignes**. Des coordonnées curvilignes sur $\mathbb{R}^3$ est n'importe quel³ système qui permet de repérer un point de $\mathbb{R}^3$ à partir de trois nombres.

Il s'agit donc d'un ensemble de trois applications

$$x_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (15.62)$$

Les coordonnées cylindriques sont

$$\begin{cases} x_1(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ x_2(r, \theta, z) = r \sin \theta \\ x_3(r, \theta, z) = z \end{cases} \quad \begin{matrix} (15.63a) \\ (15.63b) \\ (15.63c) \end{matrix}$$

Soit donc un système général $q = (q_1, q_2, q_3)$ et

$$M(q) = \begin{pmatrix} x_1(q) \\ x_2(q) \\ x_3(q) \end{pmatrix}. \quad (15.64)$$

Si nous fixons q_2 et q_3 et que nous laissons varier q_1 , nous obtenons une courbe⁴ dont nous pouvons considérer le vecteur vitesse, c'est à dire le vecteur tangent. En chaque point nous avons ainsi trois vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial q_i}(q). \quad (15.65)$$

Nous disons que le système de coordonnées curviligne est **orthogonal** si ces trois vecteurs sont orthogonaux. Dans la suite nous supposons que c'est toujours le cas.

Nous posons

$$h_i = \left\| \frac{\partial M}{\partial q_i} \right\| \quad (15.66)$$

et nous considérons les trois vecteurs normés

$$e_i = h_i^{-1} \frac{\partial M}{\partial q_i}. \quad (15.67)$$

Les trois vecteurs $\{e_1, e_2, e_3\}$ forment une base orthonormée dite **base locale**. Ce sont des vecteurs liés⁵ au point M .

15.5.2 Importance de l'orthogonalité

Nous avons dit que nous nous restreignons au cas où les vecteurs e_i sont orthogonaux. En termes de produits scalaires, cela signifie

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}. \quad (15.68)$$

Nous en étudions maintenant quelque conséquence. L'équation (15.67) peut s'écrire plus explicitement sous la forme

$$e_i = \sum_k h_i^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} 1_k. \quad (15.69)$$

3. Nous n'entrons pas dans les détails de régularité.

4. Dans le cas des sphériques, c'est une demi-droite horizontale d'angle q_2 et de hauteur q_3 .

5. En géométrie différentielle on dira que ce sont des éléments de l'espace tangent, mais c'est une toute autre histoire.

Notez que pour chaque k et i , la quantité $h_i^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}$ est un simple nombre. Nous allons les mettre dans une matrice :

$$A_{ki} = h_i^{-1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}. \quad (15.70)$$

Cela nous donne le changement de base

$$e_i = \sum_k A_{ki} 1_k. \quad (15.71)$$

Le produit $e_i \cdot e_j$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= \sum_{kl} A_{ki} A_{lj} \underbrace{1_k \cdot 1_l}_{=\delta_{kl}} \\ &= \sum_{kl} A_{ki} A_{lj} \delta_{kl} \\ &= \sum_k A_{ki} A_{kj} \\ &= \sum_k (A^T)_{ik} A_{kj}. \end{aligned} \quad (15.72)$$

Or cela doit valoir δ_{ij} . Par conséquent

$$A^T = A^{-1}. \quad (15.73)$$

Le fait que les coordonnées curvilignes considérées soient orthogonales s'exprime donc par le fait que la matrice de changement de base est une matrice orthogonale.

Cette circonstance nous permet d'inverser le changement de base (15.71) en multipliant cette équation par $(A^{-1})_{il}$ des deux côtés et en faisant la somme sur i :

$$\sum_i (A^{-1})_{il} e_i = \sum_{kl} A_{ki} (A^{-1})_{il} 1_k, \quad (15.74)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\delta_{kl}}$

par conséquent

$$\sum_i (A^T)_{il} e_i = 1_l, \quad (15.75)$$

et

$$1_l = \sum_i A_{li} e_i = \sum_i h_i^{-1} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} e_i. \quad (15.76)$$

Armés de cette importante formule, nous pouvons exprimer les quantités que nous connaissons dans la base canonique en termes de la base locale.

Une autre conséquence du fait que e_1, e_2 et e_3 est une base orthonormée est que, éventuellement en réordonnant les vecteurs, on a

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned} \quad (15.77)$$

Ces trois relations s'écrivent en une seule avec

$$e_i \times e_j = \sum_k \epsilon_{ijk} e_k \quad (15.78)$$

où

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i, j \text{ et } k \text{ ne sont pas tous différents} \\ 1 & \text{si } ijk \text{ se ramène à } 123 \text{ par un nombre pair de permutations} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ se ramène à } 123 \text{ par un nombre impair de permutations} \end{cases} \quad (15.79)$$

est le **symbole de Levi-Civita**. La formule du produit vectoriel peut également être utilisée à l'envers sous la forme

$$e_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} e_i \times e_j. \quad (15.80)$$

Le symbole de Levi-Civita possède de nombreuses formules. En voici certaines, facilement démontrables en considérant tous les cas :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \delta_{kl}|\epsilon_{ijk}|. \quad (15.81)$$

Grâce au symboles de Levi-Civita, le produit mixte des vecteurs de base a une belle forme :

$$e_l \cdot (e_i \times e_j) = \sum_k \epsilon_{ijk} e_l \times e_k = \sum_k \epsilon_{ijk} \delta_{lk} = \epsilon_{ijl}. \quad (15.82)$$

15.5.3 Coordonnées polaires

Les coordonnées curvilignes polaires sont données par

$$M(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad (15.83)$$

et par conséquent

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (15.84)$$

Nous avons les normes $h_r = 1$ et $h_\theta = r$, et donc les vecteurs de la base locale en (r, θ) sont

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta)e_x + \sin(\theta)e_y \quad (15.85)$$

ainsi que

$$e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = -\sin(\theta)e_x + \cos(\theta)e_y. \quad (15.86)$$

Ces vecteurs sont représentés à la figure 15.4. Notez qu'il y en a une paire différente en chaque point.

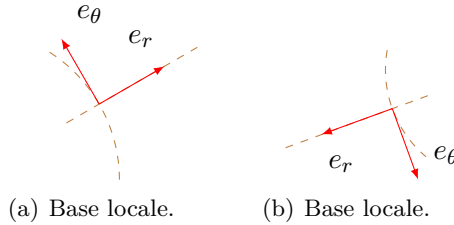


FIGURE 15.4 – En brun, les lignes que le point suivrait si on ne variait qu'une coordonnées polaire à la fois. Les vecteurs rouges sont les vecteurs e_r et e_θ .

15.5.4 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont les mêmes que les coordonnées polaires à part qu'il faut écrire

$$M(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \quad (15.87)$$

et nous avons le vecteur de base supplémentaire

$$e_z = \frac{\partial M}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15.88)$$

parce que $h_z = 1$.

15.5.5 Coordonnées sphériques

Les coordonnées curvilignes sphériques sont données par

$$M(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (15.89)$$

dont les dérivées sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \rho} &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, & \frac{\partial M}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\rho \sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.90)$$

Les normes de ces vecteurs sont $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ et $h_\varphi = \rho \sin(\theta)$. Les vecteurs de la base locale en (ρ, θ, φ) sont donc

$$\begin{aligned} e_r &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, & e_\theta &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ e_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.91)$$

15.5.6 Gradient en coordonnées curvilignes

Soit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une fonction sur $\mathbb{R}^3$. Nous pouvons la composer avec les coordonnées curvilignes q pour obtenir la fonction

$$\tilde{f}(q_1, q_2, q_3) = f(x_1(q), x_2(q), x_3(q)). \quad (15.92)$$

Nous disons que $\tilde{f}$ est l'expression de f dans les coordonnées q . Nous savons déjà comment calculer le gradient de f en coordonnées cartésiennes :

$$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y, z) \\ \partial_y f(x, y, z) \\ \partial_z f(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (15.93)$$

Cela est un vecteur lié au point (x, y, z) . Nous voudrions exprimer ce vecteur dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. En d'autres termes, nous voudrions trouver les nombres $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ et $\tilde{F}_3$ tels que

$$F(x, y, z) = F(x(q), y(q), z(q)) = \tilde{F}_1 e_1 + \tilde{F}_2 e_2 + \tilde{F}_3 e_3. \quad (15.94)$$

Ces nombres seront des fonctions de (q_1, q_2, q_3) .

Par définition,

$$\nabla f = \sum_l \frac{\partial f}{\partial x_l} 1_l. \quad (15.95)$$

En remplaçant 1_l par sa valeur en termes des e_i par la formule (15.76),

$$\begin{aligned} \nabla f &= \sum_l \frac{\partial f}{\partial x_l} 1_l \\ &= \sum_l \frac{\partial f}{\partial x_l} \sum_i h_i^{-1} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} e_i \\ &= \sum_{il} \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} e_i \\ &= \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i} e_i. \end{aligned} \quad (15.96)$$

Plus explicitement,

$$\nabla f(x(q), y(q), z(q)) = \sum_i \frac{1}{h_i(q)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i}(q) e_i \quad (15.97)$$

où

$$h_i(q) = \left\| \frac{\partial M}{\partial q_i}(q) \right\|. \quad (15.98)$$

Le plus souvent nous n'allons pas noter explicitement la dépendance de h_i en q .

Quelques formulaires intéressants sont en appendice de [149].

15.5.6.1 Coordonnées sphériques

Nous pouvons exprimer le gradient d'une fonction en coordonnées sphériques en utilisant la formule (15.97) :

$$\nabla \tilde{f}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} r_\varphi. \quad (15.99)$$

Cette expression peut paraître peu pratique parce que les vecteurs e_ρ , e_θ et e_φ eux-mêmes changent en chaque point. Elle est effectivement peu adaptée au dessin, mais elle est très pratique pour des fonctions ayant des symétries.

Exemple 15.15

Le potentiel de la gravitation est la fonction

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (15.100)$$

En coordonnées sphériques elle s'écrit

$$\tilde{V}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho}. \quad (15.101)$$

En voilà une fonction qu'elle est facile à dériver, contrairement à V ! En suivant la formule (15.99), nous avons immédiatement

$$\nabla \tilde{V} = -\frac{1}{\rho^2} e_\rho. \quad (15.102)$$

Nous voyons immédiatement que cela est un champ de vecteurs dont la norme diminue comme le carré de la distance à l'origine et qui est en permanence dirigé vers l'origine. $\triangle$

15.5.7 Divergence en coordonnées curvilignes

Nous savons que

$$\nabla \tilde{f} = \sum_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_j} e_j. \quad (15.103)$$

Nous pouvons en particulier considérer la fonction $f(q) = q_i$. De la même manière que nous avons noté x_i la fonction $x \mapsto x_i$, nous notons q_i la fonction $q \mapsto q_i$. Le gradient de cette fonction est donné par

$$\nabla q_i = \sum_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} e_j, \quad (15.104)$$

mais $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$, donc

$$\nabla q_i = \frac{e_i}{h_i}, \quad (15.105)$$

ou encore

$$e_i = h_i \nabla q_i. \quad (15.106)$$

Cela n'est pas étonnant : la direction dans laquelle la coordonnées q_i varie le plus est le vecteur e_i qui donne la tangente à la courbe obtenue lorsque *seul* q_i varie.

Commençons par calculer la divergence de e_i . En utilisant la formule (15.80),

$$\nabla \cdot e_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \nabla \cdot (e_i \times e_j). \quad (15.107)$$

Nous avons, en utilisant les règles de Leibnitz (11.628),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (e_i \times e_j) &= \nabla \cdot (h_i \nabla q_i \times h_j \nabla q_j) \\ &= \nabla(h_i h_j) \cdot (\nabla q_i \times \nabla q_j) + h_i h_j \nabla \cdot (\nabla q_i \times \nabla q_j) \\ &= \nabla(h_i h_j) \cdot (\nabla q_i \times \nabla q_j) \\ &\quad + h_i h_j \nabla q_j \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla q_i)}_{=0} \\ &\quad + h_i h_j \nabla q_i \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla q_j)}_{=0} \end{aligned} \quad (15.108)$$

Cela nous fait

$$\nabla \cdot e_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \frac{\nabla(h_i h_j)}{h_i h_j} \cdot (e_i \times e_j). \quad (15.109)$$

parce que $\nabla q_i = h_i^{-1} e_i$. Nous pouvons développer le gradient qui intervient :

$$\nabla(h_i h_j) = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial}{\partial q_l} (h_i h_j) e_l. \quad (15.110)$$

Nous voyons donc arriver le produit mixte $e_l \cdot (e_i \times e_j)$. En utilisant la formule (15.82), cela s'exprime directement sous la forme ϵ_{ijl} .

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e_k &= \frac{1}{2} \sum_{ijl} \frac{1}{h_i h_j h_l} \frac{\partial}{\partial q_l} (h_i h_j) \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ijl} \delta_{kl} |\epsilon_{ijk}| \frac{\partial}{\partial q_l} (h_i h_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{|\epsilon_{ijk}|}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial q_k} (h_i h_j). \end{aligned} \quad (15.111)$$

Par exemple,

$$\nabla \cdot e_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3). \quad (15.112)$$

Nous devons maintenant chercher le gradient d'un champ général

$$F(q) = \sum_k F_k(q) e_k. \quad (15.113)$$

La première chose à faire est d'utiliser la formule de Leibnitz :

$$\nabla \cdot F = \sum_k \nabla F_k(q) \cdot e_k + \sum_k F_k(q) \nabla \cdot e_k. \quad (15.114)$$

Afin d'alléger les notations, nous allons nous concentrer sur le terme numéro k et ne pas écrire la somme. Si i et j sont les nombres tels que $\epsilon_{ijk} = 1$, alors ce que la formule (15.111) signifie, c'est que

$$\nabla \cdot e_k = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_k} (h_i h_j). \quad (15.115)$$

Nous savons déjà par la formule (15.97) que

$$\nabla F_k = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial F_k}{\partial q_l} e_l, \quad (15.116)$$

par conséquent

$$\nabla F_k \cdot e_k = \sum_l \frac{1}{h_l} \frac{\partial F_k}{\partial q_l} \delta_{kl} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial F_k}{\partial q_k}. \quad (15.117)$$

Pour obtenir cela nous avons utilisé le fait que $e_l \cdot e_k = \delta_{lk}$. Le terme numéro k de la somme (15.114) est donc

$$\frac{1}{h_k} \frac{\partial F_k}{\partial q_k} + \frac{F_k}{h_k h_i h_j} \frac{\partial(h_i h_j)}{\partial q_k} = \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial(F_k h_i h_j)}{\partial q_k} \quad (15.118)$$

où il est entendu que i et j représentent les nombres tels que $\epsilon_{ijk} = 1$.

Au final, nous avons

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{ijk} |\epsilon_{ijk}| \frac{\partial(F_k h_i h_j)}{\partial q_k}. \quad (15.119)$$

Ici, la somme sur i et j consiste seulement à sélectionner les termes tels que i et j ne sont pas k . En écrivant la somme explicitement,

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right]. \quad (15.120)$$

15.5.7.1 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, nous avons déjà vu que $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$. La divergence est donc donnée par

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r F_z) \right]. \quad (15.121)$$

Par exemple si

$$F(r, \theta, z) = r e_\theta + e_z, \quad (15.122)$$

nous avons

$$(\nabla \cdot F)(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r) + \frac{\partial}{\partial z} (r) \right] = 0. \quad (15.123)$$

Cela est logique parce que $r e_\theta$ est à peu près le champ dont nous avons parlé dans l'exemple (11.247), qui était à divergence nulle. En réalité, le champ dont on parlait dans cet exemple était exactement $-e_\theta$. Le champ e_z est également à divergence nulle parce qu'il est constant.

15.5.7.2 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, nous avons $h_\rho = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\varphi = r \sin \theta$, donc

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sin \theta F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \sin \theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho F_\varphi) \right]. \quad (15.124)$$

si $F(\rho, \theta, \varphi) = F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi$.

15.5.8 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales

Soit une fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Le **Laplacien** de f est donné par

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f). \quad (15.125)$$

En utilisant les formules données, nous avons

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (15.126)$$

Dans cette expression, la fonction f est donnée comme fonction de q_1 , q_2 et q_3 .

En coordonnées cylindriques, cela s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (15.127)$$

Dans cette expression, f est fonction de r , θ et z .

En coordonnées sphériques, cela devient

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right]. \quad (15.128)$$

Dans cette expression, f est fonction de ρ , θ et φ .

15.5.9 Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales

Nous voulons calculer le rotationnel de $F(q) = \sum_k F_k(q) e_k$. Pour cela nous commençons par écrire $e_k = h_k \nabla q_k$ et nous utilisons la formule (11.629) avec $F_k h_k$ en guise de f :

$$\begin{aligned}\nabla \times F_k e_k &= \nabla \times (F_k h_k \nabla q_k) \\ &= F_k h_k \underbrace{\nabla \times (\nabla q_k)}_{=0} + \nabla (F_k h_k) \times \nabla q_k \\ &= \frac{1}{h_k} \nabla (F_k h_k) \times e_k.\end{aligned}\quad (15.129)$$

Nous utilisons à présent la formule (15.97) du gradient et le formule $e_j \times e_k = \sum_l \epsilon_{jkl} e_l$:

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_k e_k) &= \sum_j \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial}{\partial q_j} (F_k h_k) e_j \times e_k \\ &= \sum_{jl} \frac{1}{h_j h_k} \epsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial q_j} (F_k h_k) e_l.\end{aligned}\quad (15.130)$$

Le rotationnel s'écrit donc

$$\nabla \times F = \sum_{jkl} \frac{1}{h_j h_k} \epsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial q_j} (F_k h_k) e_l. \quad (15.131)$$

Devant e_1 par exemple nous avons seulement les termes $j = 2, k = 3$ et $j = 3, k = 2$. Étant donné que $\epsilon_{231} = 1$ et $\epsilon_{321} = -1$, le coefficient de e_1 sera simplement

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (F_2 h_2) \right). \quad (15.132)$$

La formule complète devient

$$\begin{aligned}\nabla \times \sum_k F_k e_k &= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (F_2 h_2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (F_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (F_3 h_3) \right) \\ &\quad + \frac{1}{h_2 h_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (F_1 h_1) \right).\end{aligned}\quad (15.133)$$

15.5.9.1 Coordonnées cylindriques

En utilisant $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (F_\theta r)}{\partial z} \right) e_r \\ &+ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) e_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) e_z.\end{aligned}\quad (15.134)$$

15.5.9.2 Coordonnées sphériques

En utilisant $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ et $h_\varphi = \rho \sin \theta$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\nabla \times (F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi) &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial (F_\varphi) \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) e_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial (F_\varphi \rho \sin \theta)}{\partial \rho} \right) e_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_\theta \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) e_\varphi.\end{aligned}\quad (15.135)$$

Note : dans le premier terme, il y a une simplification par ρ .

15.6 Les formules

15.6.1 Coordonnées polaires

Les vecteurs de base :

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta) e_x + \sin(\theta) e_y \quad (15.136a)$$

$$e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = -\sin(\theta) e_x + \cos(\theta) e_y. \quad (15.136b)$$

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(r, \theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) e_\theta. \quad (15.137)$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) \right]. \quad (15.138)$$

Le rotationnel :

$$\nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta) = \left(\frac{\partial (F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) e_z. \quad (15.139)$$

Notons que le rotationnel n'existe pas vraiment en deux dimensions. Ici nous avons vu le champ $F(r, \theta)$ comme un champs dans $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de z et n'ayant pas de composante z . Le résultat est un rotationnel qui est dirigé selon l'axe z .

15.6.2 Coordonnées cylindriques

Les vecteurs de base : idem qu'en coordonnées polaires, et on ajoute e_z sans modifications.

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(r, \theta, z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta, z) e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta, z) e_\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(r, \theta, z) e_z. \quad (15.140)$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z) \right]. \quad (15.141)$$

Le rotationnel :

$$\begin{aligned} \nabla \times (F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(F_\theta r)}{\partial z} \right) e_r \\ &+ \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) e_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial(F_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) e_z. \end{aligned} \quad (15.142)$$

Note : les formules concernant les coordonnées polaires se réduisent de celles-ci en enlevant toutes les références à z .

15.6.3 Coordonnées sphériques

Les vecteurs de base :

$$\begin{aligned} e_r &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ e_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.143)$$

Le gradient :

$$\nabla \tilde{f}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} e_\varphi. \quad (15.144)$$

La divergence :

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \sin \theta F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin \theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho F_\varphi) \right]. \quad (15.145)$$

Le rotationnel :

$$\begin{aligned} \nabla \times (F_\rho e_\rho + F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi) &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial(F_\varphi) \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) e_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial(F_\varphi \rho \sin \theta)}{\partial \rho} \right) e_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_\theta \rho}{\partial \rho} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) e_\varphi. \end{aligned} \quad (15.146)$$

Chapitre 16

Suite de l'analyse

Nous commençons par donner quelques éléments à propos de dérivée et de différentielle pour des fonctions $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ parce que les séries entières vont souvent être des fonctions complexes. Le gros du chapitre sur les fonctions holomorphes est le chapitre 19.

16.0.1 Dérivabilité au sens complexe et différentielle

Nous identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy.\end{aligned}\tag{16.1}$$

Dans cette partie, nous désignons par Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est **$\mathbb{C}$ -dérivable** si la limite

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\tag{16.2}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est la dérivée de f et est notée f' .

Définition 16.1.

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$. Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable sur Ω .

Définition 16.2.

Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\tag{16.3}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est une **similitude**.

Lemme 16.3.

Une application $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire si et seulement si elle est une similitude en tant qu'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A(z) = z_0 z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Lemme 16.4.

En tant qu'application linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, l'opération de multiplication par $\alpha + \beta i$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.\tag{16.4}$$

Démonstration. Cela est vite remarqué en calculant explicitement $(\alpha + \beta i)(u_1 + iu_2)$. $\square$

Démonstration. Commençons par considérer l'application A sur $\mathbb{R}^2$. Elle est en particulier une application $\mathbb{R}$ -linéaire et par conséquent il existe une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\tag{16.5}$$

Nous voulons maintenant imposer la $\mathbb{C}$ -linéarité, c'est à dire que nous voulons

$$A((a + bi)(x + iy)) = (a + bi)A(x + iy) \quad (16.6)$$

pour tout $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. À gauche nous avons

$$A(ax - by + i(bx + ay)) \quad (16.7)$$

et à droite nous avons

$$(a + bi)(\alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)). \quad (16.8)$$

En égalant les deux expressions nous obtenons les équations

$$\begin{cases} \beta b = -b\gamma & (16.9a) \\ -\alpha b + \beta a = a\beta - b\delta & (16.9b) \\ \delta b = b\alpha & (16.9c) \\ -\gamma b + \delta a = b\beta + a\delta, & (16.9d) \end{cases}$$

dont nous tirons immédiatement que $\gamma = -b\beta$ et $\delta = \alpha$. La matrice de A est donc de la forme demandée.

Inversement nous devons prouver que la fonction

$$f(x + iy) = \alpha x + \beta y + i(-\beta x + \alpha y) \quad (16.10)$$

est $\mathbb{C}$ -linéaire, c'est à dire qu'elle vérifie $f(z_0 z) = z_0 f(z)$ pour tout $z_0, z \in \mathbb{C}$. Cela est un simple calcul que nous confions à Sage : le code suivant affiche «0».

```

1  #! /usr/bin/sage -python
2  # -*- coding: utf8 -*-
3
4  from sage.all import *
5
6  def f(z):
7      var('alpha,beta')
8      x=z.real_part()
9      y=z.imag_part()
10     return alpha*x+beta*y+I*( -beta*x+alpha*y )
11
12
13 var('a,b,x,y')
14
15 A=a+b*I
16 Z=x+y*I
17
18 z1=f( A*Z )
19 z2=A*f( Z )
20
21 rep=z1-z2
22 print(rep.full_simplify())

```

code_sage3.py

Pour conclure, notons que la fonction (16.10) est la fonction de multiplication par $\alpha - i\beta$. $\square$

Proposition 16.5.

Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -dérivable en $a \in \Omega$ si et seulement si elle est différentiable en a et si df_a est une similitude.

Plus précisément si $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est l'isomorphisme canonique, la fonction f est $\mathbb{C}$ -dérivable (donc holomorphe) au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si la fonction $F = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ est différentiable en (x_0, y_0) et si la matrice de dF est de la forme

$$dF = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (16.11)$$

c'est à dire si $dF_{(x_0, y_0)}$ fournit une application $\mathbb{C}$ -linéaire.

Dans ce cas, le lien entre $\mathbb{C}$ -dérivée et différentielle est donné par

$$(df_{z_0})(z) = f'(z_0)z. \quad (16.12)$$

Démonstration. Nous décomposons f en parties réelles et imaginaires :

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (16.13)$$

où P et Q sont des fonctions réelles. La jacobienne de F est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (16.14)$$

et la condition dont nous parlons s'écrit comme le système

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \end{cases} \quad (16.15a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases} \quad (16.15b)$$

Si F est différentiable en (x_0, y_0) alors nous avons

$$F((x_0, y_0) + (h, k)) = F(x_0, y_0) + dF_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + s(|h| + |k|) \quad (16.16)$$

où s est une fonction vérifiant $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t)}{t} = 0$. Soit

$$dF_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (16.17)$$

Si nous posons $\sigma = \alpha - i\beta$ et $w = h + ik$, l'équation (16.16) s'écrit dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \sigma w + s(|w|), \quad (16.18)$$

ce qui implique que f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 .

Supposons maintenant que f soit $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 . Alors nous avons

$$f'(z_0) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \sigma \in \mathbb{C}, \quad (16.19)$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0) - \sigma w}{w} = 0. \quad (16.20)$$

Si nous posons $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = h + ik$ et $\sigma = \alpha - i\beta$ nous avons

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{F((x_0, y_0) + (h, k)) - F(x_0, y_0) - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{|w|} \right| = 0, \quad (16.21)$$

ce qui signifie que F est différentiable et que sa différentielle est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (16.22)$$

La matrice (16.22) est, vue dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de multiplication dans $\mathbb{C}$ par $\alpha - i\beta = f'(z_0)$. En d'autres termes, dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$df_{z_0}(z) = f'(z_0)z, \quad (16.23)$$

et en particulier la différentielle est donnée par

$$df_{z_0} = f'(z_0)dz. \quad (16.24)$$

□

Exemple 16.6 (Une application C^∞ mais pas $\mathbb{C}$ -dérivable)

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy &\mapsto x. \end{aligned} \quad (16.25)$$

Vu que c'est une application linéaire, elle est différentiable une infinité de fois et sa différentielle est elle-même. C'est donc une application C^∞ .

Elle n'est cependant pas $\mathbb{C}$ -dérivable. En effet le quotient différentiel est, pour $\epsilon \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(x + iy + \epsilon_x + i\epsilon_y) - f(x + iy)}{\epsilon} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon}. \quad (16.26)$$

Cela n'a pas de limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Pour voir cela nous invoquons la méthode des chemins du corollaire 11.31 avec les chemins $\epsilon_1(t) = t$ et $\epsilon_2(t) = it$. Dans le premier cas, le quotient différentiel vaut 1 pour tout t , tandis que dans le second il vaut zéro pour tout t . $\triangle$

16.1 Série de fonctions

Les séries de fonctions sont des cas particuliers de suites, étant donné que, par définition,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n. \quad (16.27)$$

Il est bon de se rappeler des convergences absolues (définition 6.152) et uniforme (équation 6.324).

Lemme 16.7.

Soient des fonctions $u_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si il existe une suite réelle positive $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

- (1) pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $|u_n(z)| \leq a_n$ (c'est à dire $a_n \geq \|u_n\|_\infty$),
- (2) la somme $\sum_n a_n$ converge,

alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement.

Démonstration. Découle du lemme de comparaison 6.160. □

Théorème 16.8.

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, une série de fonctions complexes où $g_k(x) = \varphi_k(x)\psi_k(x)$. Supposons que

- (1) $\varphi_k: A \rightarrow \mathbb{C}$ et $|\sum_{k=1}^K \varphi_k(x)| \leq M$ où M est indépendant de x et K ,
- (2) $\psi_k: A \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\psi_k(x) \geq 0$ et pour tout x dans A , $\psi_{k+1}(x) \leq \psi_k(x)$, et enfin supposons que $\psi_k(x)$ converge uniformément vers 0.

Alors $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ est uniformément convergente.

Théorème 16.9.

Si la série de puissances (réelle) converge en $x = x_0 + R$, alors elle converge uniformément sur $[x_0 - R + \epsilon, x_0 + R]$ ($\epsilon > 0$) vers une fonction continue.

Proposition 16.10.

Soit (u_n) une suite de fonctions continues $u_n: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si la série $\sum_n u_n$ converge normalement alors la somme est continue.

Démonstration. Nous posons $u(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n(z)$, et nous vérifions que la fonction ainsi définie sur Ω est continue. Soit $z \in \Omega$ et prouvons la continuité de u au point z . Pour tout z' dans un voisinage de z nous avons

$$|u(z) - u(z')| = \left| \sum_{n=0}^N u_n(z) - \sum_{n=0}^N u_n(z') + \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(z) - \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(z') \right| \quad (16.28a)$$

$$\leq \left| \sum_{n=0}^N u_n(z) - \sum_{n=0}^N u_n(z') \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(z)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(z')|. \quad (16.28b)$$

Étant donné que les sommes partielles sont continues, en prenant N suffisamment grand, le premier terme peut être rendu arbitrairement petit. Si N est suffisamment grand, le second terme est également petit. Par contre, cet argument ne tient pas pour le troisième terme parce que nous souhaitons une majoration pour tout z' dans une boule autour de z . Nous devons donc écrire

$$\sum_{n=N}^{\infty} |u_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_{\infty}. \quad (16.29)$$

Ce dernier est arbitrairement petit lorsque N est grand. Notons que nous avons utilisé l'hypothèse de convergence normale. $\square$

La même propriété, avec la même démonstration, tient dans le cas d'espaces vectoriels normés.

Proposition 16.11.

Soient E et F , deux espaces vectoriels normés, Ω une partie ouverte de E et une suite de fonctions $u_n: \Omega \rightarrow F$ convergeant normalement sur Ω , c'est à dire que $\sum_n \|u_n\|_{\infty}$ converge, la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ devant être comprise comme la norme supremum sur Ω . Alors la fonction $u = \sum_n u_n$ est continue sur Ω .

Démonstration. Soit $x, x' \in \Omega$ en supposant que $\|x - x'\|$ est petit. Soit encore $\epsilon > 0$. Nous allons montrer la continuité en x . Pour cela nous savons que pour tout N l'inégalité suivante est correcte :

$$\|u(x) - u(x')\| \leq \left\| \sum_{n=0}^N u_n(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x') \right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x')\|. \quad (16.30)$$

Les deux derniers termes sont majorés par $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_{\infty}$ qui, par hypothèse, peut être rendu aussi petit que souhaité en choisissant N assez grand. Nous choisissons donc un N tel que ces deux termes soient plus petits que ϵ . Ce N étant fixé, la fonction $\sum_{n=0}^N u_n$ est continue et nous pouvons choisir x' assez proche de x pour que le premier terme soit majoré par ϵ . $\square$

Théorème 16.12.

Si les g_k sont continues et si $\sum g_k$ converge uniformément, alors $\sum g_k$ est continue.

Le corollaire suivant permet de considérer des séries de fonctions indexées par exemple par $\mathbb{Z}$ plutôt que par $\mathbb{N}$.

Corollaire 16.13.

Une famille dénombrable de fonctions continues convergeant normalement converge vers une fonction continue.

Démonstration. Soit I dénombrable et considérons une famille de fonctions continues $(f_n)_{n \in I}$ telles que la famille $(\|f_i\|_\infty)_{i \in I}$ soit sommable. La proposition 6.191 nous permet d'utiliser une bijection entre I et $\mathbb{N}$. Le théorème 16.10 s'applique alors. $\square$

Théorème 16.14 (Critère de Weierstrass).

Soit une suite de fonctions $f_k: A \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $|f_k(x)| \leq M_k \in \mathbb{R}, \forall x \in A$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absolument et uniformément.

Démonstration. La convergence normale est facile : l'hypothèse dit que $\|f_k\|_\infty \leq M_k$, et donc que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leq \sum_k M_k < \infty. \quad (16.31)$$

La convergence uniforme est à peine plus subtile. Nous nommons F la fonction somme. Pour tout x et pour tout N , nous avons

$$\left\| \sum_{n=1}^N f_n(x) - F(x) \right\| = \left\| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \right\| \quad (16.32a)$$

$$\leq \sum_{n=N}^{\infty} \|f_n(x)\| \quad (16.32b)$$

$$\leq \sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_\infty. \quad (16.32c)$$

La convergence normale étant assurée, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ est finie, ce qui implique que la queue de somme $\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ tend vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$. Pour tout ϵ , il existe donc un N (non dépendant de x) tel que

$$\left\| \sum_{n=1}^N f_n(x) - F(x) \right\| \leq \epsilon. \quad (16.33)$$

En prenant le supremum sur $x \in A$ nous trouvons la convergence uniforme. $\square$

Remarque 16.15.

Il n'y a pas de critère correspondant pour les suites. Il n'est pas vrai que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$ existe, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ existe, comme le montre l'exemple

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ et } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2] \text{ et } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16.34)$$

Théorème 16.16.

La somme uniforme de fonctions intégrables sur un ensemble de mesure fini est intégrable et on peut permuter la somme et l'intégrale.

En d'autres termes, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers F sur A avec $\mu(A) < \infty$. Si F et f_n sont des fonctions intégrables sur A alors

$$\int_A F(x) d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n(x) d\mu(x). \quad (16.35)$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du théorème 7.127. En effet nous définissons la suite des sommes partielles

$$F_N = \sum_{n=0}^N f_n. \quad (16.36)$$

La limite $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = F$ est uniforme. Par conséquent la fonction F est intégrable et

$$\int_A F = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_A F_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_A \sum_{n=0}^N f_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_A f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n. \quad (16.37)$$

La première égalité est le théorème 7.127, les autres sont de simples manipulations rhétoriques. $\square$

Le théorème suivant est une paraphrase du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (7.134).

Théorème 16.17.

Soient des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^N f_n$ soit intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour chaque N . Nous supposons que la somme converge simplement vers

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad (16.38)$$

et qu'il existe une fonction g telle que

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n \right| < g \quad (16.39)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Alors

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable,
- (2) on peut permuter somme et intégrale :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{n=0}^N f_n d\mu = \int_{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad (16.40)$$

(3)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \sum_{n=0}^N f_n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \sum_{n=N}^{\infty} f_n \right| = 0. \quad (16.41)$$

Théorème 16.18.

Soit f_n des fonctions $C^1[a, b]$ telles que

- (1) la série $\sum_n f_n(x_0)$ converge pour un certain $x_0 \in [a, b]$,
- (2) la série des dérivées $\sum_n f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors la série $\sum_n f_n$ converge vers une fonction F et

- (1) La convergence est uniforme sur $[a, b]$.
- (2) La fonction F est dérivable
- (3) $F'(x) = \sum_n f'_n(x)$.

Lemme 16.19.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si la suite (T_n) converge vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$, alors pour tout $v \in E$ nous avons

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right) (v) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(v). \quad (16.42)$$

Théorème 16.20 ([197]).

Soit E et F , deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert connexe par arcs de E . Soit (u_n) une suite de fonctions $u_n: \Omega \rightarrow F$ telle que

(1) pour tout n , la fonction u_n est de classe C^1 sur Ω ,

(2) la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur Ω ,

(3) la série des différentielles $\sum_n (du_n)$ converge normalement sur tout compact de Ω .

Alors la somme $u = \sum_n u_n$ est de classe C^1 sur Ω et sa différentielle est donnée par

$$du = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \quad (16.43)$$

Démonstration. Pour chaque n , la fonction $du_n: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est une fonction continue parce que u_n est de classe C^1 . La série convergeant normalement, la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} du_n$ est également continue par la proposition 16.11. La difficulté de ce théorème est donc de prouver que cela est bien la différentielle de la fonction $\sum_n u_n$.

Soit $a, x \in \Omega$ et $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ un chemin joignant a à x . Nous considérons ce chemin en coordonnées normales et nous notons l sa longueur. Par définition 13.315,

$$\clubsuit = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} du_n = \int_0^l \sum_n (du_n)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \quad (16.44)$$

Si nous notons $f_n(t) = (du_n)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$, sachant que la paramétrisation est normale ($\|\gamma'(t)\| = 1$) nous avons¹

$$\|f_n(t)\| \leq \|(du_n)_{\gamma(t)}\| \leq \|du_n\|_{\infty}. \quad (16.45)$$

Or la série des $\|du_n\|_{\infty}$ converge par hypothèse. L'intervalle $[0, l]$ étant compact, les fonctions f_n sont uniformément (en n) bornées par le nombre $\sum_n \|du_n\|_{\infty}$ qui est intégrable sur $[0, 1]$. Par la convergence dominée (théorème 7.134) nous permutons la somme et l'intégrale :

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^l (du_n)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a) = u(x) - u(a) \quad (16.46)$$

où nous avons utilisé le théorème 13.166. Jusqu'à présent nous avons montré que

$$u(x) = u(a) + \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} du_n = u(a) + \int_0^l \sum_{n=0}^{\infty} (du_n)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt. \quad (16.47)$$

Nous allons utiliser cela pour calculer $du_x(v)$ selon la bonne vieille formule

$$du_x(v) = \frac{d}{ds} \left[u(x + sv) \right]_{s=0}. \quad (16.48)$$

Cela sera fait en considérant à nouveau un chemin γ_s joignant a à $x + sv$ en paramétrisation normale ; nous notons l_s sa longueur. Dans le calcul suivant, nous inversons la somme et l'intégrale de la même façon qu'avant. En piste maestro

$$du_x(v) = \frac{d}{ds} \int_0^{l_s} \sum_{n=0}^{\infty} (du_n)_{\gamma_s(t)}(\gamma'_s(t)) dt \Big|_{s=0} \quad (16.49a)$$

$$= \frac{d}{ds} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_s} du_n \Big|_{s=0} \quad (16.49b)$$

$$= \frac{d}{ds} \sum_{n=0}^{\infty} \left[u_n(\gamma_s(l_s)) - u_n(\gamma_s(0)) \right]_{s=0} \quad (16.49c)$$

$$= d \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)_x (v). \quad (16.49d)$$

□

1. Histoire de ne pas s'embrouiller, il faut se rendre compte que $\|du_n\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \|(du_n)_x\|$.

16.2 Séries entières

Dans cette section nous allons parler de séries complexes autant que de séries réelles. L'étude des propriétés à proprement parler complexes des séries entières (holomorphic) sera effectuée dans le chapitre dédié, voir le théorème 19.16 et ses conséquences.

16.2.1 Disque de convergence

Une **série de puissance** est une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (16.50)$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$ est fixé, (c_k) est une suite complexe fixée, et z est un paramètre complexe. Nous disons que cette série est *centrée* en z_0 .

Définition 16.21.

Une **série entière** est une somme de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (16.51)$$

avec $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Une série entière peut définir une fonction

$$f(z) = \sum_n a_n z^n. \quad (16.52)$$

Le but de cette section est d'étudier des conditions sur la suite (a_n) qui assurent la continuité de f ou la possibilité de dériver ou intégrer la série terme à terme.

Définition 16.22.

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le **rayon de convergence** de cette série est le nombre

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, \infty]. \quad (16.53)$$

La boule $B(0, R)$ est le **disque de convergence** de la série.

Le rayon de convergence d'une série ne dépend que des réels $|a_n|$, même si à la base $a_n \in \mathbb{C}$.

Lemme 16.23 (Critère d'Abel).

Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la somme $\sum_n a_n z^n$ et $z \in \mathbb{C}$.

- (1) Si $|z| < R$ alors la série converge absolument.
- (2) Si $R < \infty$ et si $|z| > R$ alors la série diverge.

Démonstration. Démonstration en deux parties.

- (1) Si $|z| < R$ alors la suite $(a_n z^n)$ est bornée et il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| r^n \leq M$ pour tout n . Nous considérons alors un r tel que $|z| < r < R$ et nous pouvons calculer :

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \quad (16.54)$$

Vu que $|z| < r$ nous tombons sur la série géométrique (6.346) qui converge. Par le critère de comparaison² la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.

- (2) Par définition du rayon de convergence, la suite $(a_n z^n)$ n'est donc pas bornée et la série ne peut pas converger à cause de la proposition 6.158(3).

2. Lemme 6.160.

□

Le critère d'Abel parle bien de convergence absolue, et non de convergence normale. Pour chaque t , la série $\sum_k |a_n t^k|$ converge. Si par contre nous posons $u_k(t) = a_k t^k$, nous n'avons a priori pas la convergence normale $\sum_k \|u_k\|_\infty$, même pas si la norme est la norme supremum sur $B(0, R)$ ³. Prenons comme exemple simplement $a_k = 1$ pour tout k . Pour tout $|t| < 1$, la série $\sum_k t^k$ converge absolument (série géométrique), mais nous aurions $\|u_k\|_\infty = 1$ et donc divergence évidente de $\sum_k \|u_k\|_\infty$.

La proposition suivante sera surtout utile lorsqu'on parlera de dérivée.

Proposition 16.24 ([198]).

Quel que soit le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Nous posons

$$E = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (a_n r^n) \text{ est borné}\} E' = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (n^\alpha a_n r^n) \text{ est borné}\} \quad (16.55a)$$

Et aussi $R = \sup(E)$, $R' = \sup(E')$. Le fait que $E' \geq E$ est facile. Nous supposons $R > 0$ et nous considérons $r < R$ (c'est à dire $r \in E$). Nous allons montrer que $r \in E'$. Pour cela nous prenons un nombre s tel que $r < s < R$. Nous avons

$$n^\alpha a_n r^n = n^\alpha a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n s^n = n^\alpha \left(\frac{r}{s}\right)^n a_n s^n. \quad (16.56)$$

Mais $r/s < 1$, donc le lemme 5.77 dit que $n^\alpha (r/s)^n \rightarrow 0$. Cela est donc borné par une constante M . Donc

$$n^\alpha a_n r^n \leq M a_n s^n. \quad (16.57)$$

Mais la suite $(a_n s^n)$ est bornée. Donc la suite $n^\alpha a_n r^n$ est également bornée, ce qui prouve que $r \in E'$. □

Remarque 16.25.

Au fond, cette proposition n'est rien d'autre que dire que dans $n^\alpha r^n$, l'effet «convergent» est r^n qui est une décroissance exponentielle tandis que l'effet «divergent» est n^α qui a une croissance seulement polynômiale.

Théorème 16.26 (Formule de Hadamard).

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n c_n z^n$ est donné par une des deux formules

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \quad (16.58)$$

ou

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad (16.59)$$

lorsque a_k est non nul à partir d'un certain k .

Le disque $|z - z_0| \leq R$ est le **disque de convergence** de la série $\sum_n a_n (z - z_0)^n$. Notons que le critère d'Abel ne dit rien pour les points tels que $|z - z_0| = R$. Il faut traiter ces points au cas par cas. Et le pire, c'est qu'une série donnée peut converger pour certains des points sur le bord du disque, et diverger en d'autres. Le théorème d'Abel radial (théorème 16.33) nous donnera quelques informations sur le sujet.

Il y a un dessin à la figure 16.1.

Si les suites a_n et b_n sont équivalentes, alors les séries correspondantes auront le même rayon de convergence. Cela ne signifie pas que sur le bord du disque de convergence, elles aient même comportement. Par exemple nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}. \quad (16.60)$$

3. Il y aurait par contre bien convergence sur tout compact ? Cher lecteur, dites moi ce que vous en pensez

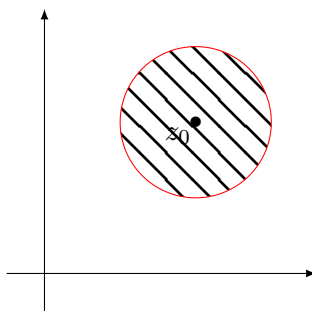


FIGURE 16.1 – À l'intérieur du disque de convergence, la convergence est absolue. En dehors, la série diverge. Sur le cercle proprement dit, tout peut arriver.

En même temps, en $z = -1$ la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \quad (16.61)$$

converge par le critère des séries alternées (corollaire 6.165). Par contre la série

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) z^n \quad (16.62)$$

ne converge pas pour $z = -1$.

Exemple 16.27

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons la série $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ où a_n est la n -ième décimale de α . Si α est un nombre décimal limité, la suite (a_n) est finie et le rayon de convergence est infini. Sinon, pour tout N il existe un $n > N$ tel que $a_n \neq 0$ et la suite (a_n) ne tend pas vers zéro. Par conséquent la série

$$\sum_n a_n z^n \quad (16.63)$$

diverge pour $z = 1$ et le rayon de convergence satisfait $R \leq 1$. Nous avons aussi $|a_n| \leq 9$, de telle manière à ce que la série soit bornée et par conséquent majorée en module par $9z^n$, ce qui signifie que $R \geq 1$.

Nous déduisons alors $R = 1$. △

16.2.2 Propriétés de la somme

Théorème 16.28.

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b .

(1) Si R_s est le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n) z^n$, nous avons

$$R_s \geq \min\{R_a, R_b\} \quad (16.64)$$

et nous avons l'égalité si pour tout $|z| \leq \min\{R_a, R_b\}$, $\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$.

(2) Si $\lambda \neq 0$ la série $\sum_n (\lambda a_n) z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum_n a_n z^n$ et si $|z| < R_a$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (16.65)$$

(3) Le **produit de Cauchy** des deux séries est donné par

$$\left(\sum_n a_n z^n \right) \left(\sum_k b_k z^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n. \quad (16.66)$$

Si R_p est le rayon de convergence de ce produit nous avons

$$R_p \geq \min\{R_a, R_b\} \quad (16.67)$$

et si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right). \quad (16.68)$$

Démonstration. Nous prouvons la partie sur le produit de Cauchy. En utilisant la propriété du produit de la somme par un scalaire nous avons

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m a_n z^{m+n} \right) \quad (16.69a)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M b_m a_n z^{m+n} \quad (16.69b)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N+M} \sum_{i+k=k} b_i a_j z^k \quad (16.69c)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+k=k} b_i a_j z^k \quad (16.69d)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} b_i a_j z^k. \quad (16.69e)$$

□

Exemple 16.29

Montrons un produit de Cauchy dont le rayon de convergence est strictement plus grand que le minimum. D'abord nous considérons

$$A = 1 - z, \quad (16.70)$$

c'est à dire $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n \geq 2} = 0$ avec $R_a = \infty$. Ensuite nous considérons

$$B = \sum_n z^n, \quad (16.71)$$

c'est à dire $B = (1 - z)^{-1}$ et $R_b = 1$. Le produit de Cauchy de ces deux séries valant 1, le rayon de convergence est infini. $\triangle$

Exercice 1

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (16.72)$$

pour $x \in]-1, 1[$.

Correction de l'exercice 1

Étant donné que pour tout r dans $]-1, 1[$ la suite $(n+1)r^n$ est bornée, le rayon de convergence est correct. Pour les x dans ce domaine nous avons

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)} \frac{1}{(1-x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right). \quad (16.73)$$

Nous devons expliciter ce produit de Cauchy en utilisant le théorème 16.28. Pour tout i nous avons $a_i = b_i = 1$. Par conséquent le produit (16.73) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \quad (16.74)$$

Théorème 16.30.

Une série entière converge normalement sur tout disque fermé inclus au disque de convergence.

Démonstration. Toute boule fermée incluse à $B(0, R)$ est incluse à la boule $\overline{B(0, r)}$ pour un certain $r < R$. Nous nous concentrons donc sur une telle boule fermée.

Pour chaque n nous posons $u_n(z) = a_n z^n$ que nous voyons comme une fonction sur $\overline{B(0, r)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \overline{B(0, r)}$ nous avons

$$\|u_n\|_\infty \leq |a_n z^n| \leq |a_n| r^n. \quad (16.75)$$

Étant donné que $r < R$ la série $\sum_n |a_n| r^n$ converge et la série $\sum_n \|u_n\|$ est convergente. La série $\sum_n a_n z^n$ est alors normalement convergente. $\square$

Exemple 16.31

Encore une fois nous n'avons pas d'informations sur le comportement au bord. Par exemple la série $\sum_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, mais $\sup_{z \in B(0, 1)} |z^n| = 1$ et nous n'avons pas de convergence normale sur la boule fermée. $\triangle$

La convergence normale n'est donc pas de mise sur tout l'intérieur du disque de convergence. La continuité, par contre est effective sur la boule. En effet si $z_0 \in B(0, R)$ alors il existe un rayon $0 < r < R$ tel que $B(z_0, r) \subset B(0, R)$. Sur $B(z_0, r)$ nous avons convergence normale et donc continuité en z_0 .

La différence est que la continuité est une propriété locale tandis que la convergence normale est une propriété globale.

Proposition 16.32.

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ avec un rayon de convergence R . Si $\sum |a_n| R^n$ converge alors

- (1) la série $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B(0, R)}$,
- (2) f est continue sur $\overline{B(0, R)}$.

Démonstration. La conclusion est claire dans l'intérieur du disque de convergence. En ce qui concerne le bord, chacune des sommes partielles est une fonction continue. De plus nous avons $\|u_n\| \leq |a_n| R^n$, dont la série converge. Par conséquent nous avons convergence normale sur le disque fermé. $\square$

Le théorème suivant permet de donner, dans le cas de fonctions réelle, des informations sur la convergence en une des deux extrémités de l'intervalle de convergence.

Théorème 16.33 (Convergence radiale de Abel).

Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série réelle de rayon de convergence $0 < R < \infty$.

- (1) Si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue sur $[0, R]$.
- (2) Si $\sum a_n (-R)^n$ converge, alors f est continue sur $[-R, 0]$.

Exercice 2

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ nous avons

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (16.76)$$

Calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad (16.77)$$

Correction de l'exercice 2

La série (16.77) serait $f(-1) = -\ln(2)$ où f est la série de fonctions (16.76). Nous utilisons le théorème de convergence radiale d'Abel (théorème 16.33) pour justifier cette réponse :

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n} \quad (16.78)$$

converge.

Le résultat suivant permet d'identifier deux séries complexes lorsque leurs valeurs sur $\mathbb{R}$ sont identiques.

Proposition 16.34.

Soient les séries $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ convergentes dans $B(0, R)$. Si $f(x) = g(x)$ pour $x \in [0, R[$ alors $a_n = b_n$.

Démonstration. Soit n_0 le plus petit entier tel que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Pour tout $z \in B(0, R)$ nous avons

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n = z^{n_0} \varphi(z) \quad (16.79)$$

où

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} (a_{n+n_0} - b_{n+n_0}) z^n. \quad (16.80)$$

Par le théorème 16.28(1) le rayon de convergence de φ est plus grand que R et la fonction φ est continue en 0. Étant donné que $\varphi(0) = a_{n_0} - b_{n_0} \neq 0$ et que φ est continue nous avons un ρ tel que $\varphi \neq 0$ sur $B(0, \rho)$. Or cela n'est pas possible parce que au moins sur la partie réelle de cette dernière boule, φ doit être nulle. $\square$

16.2.3 Dérivation, intégration**Lemme 16.35.**

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R . Les séries

$$\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad (16.81)$$

et

$$\sum n a_n z^{n-1} \quad (16.82)$$

ont même rayon de convergence R .

Notons toutefois que nonobstant ce lemme, les séries dont il est question peuvent se comporter différemment sur le bord du disque de convergence. En effet la série

$$\sum \frac{1}{n} z^n \quad (16.83)$$

diverge pour $z = 1$ alors que

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1} \quad (16.84)$$

converge pour $z = 1$.

Les théorèmes de dérivation et d'intégration de séries de fonctions (théorèmes 16.16 et 16.18) fonctionnent bien dans le cas des séries entières.

Proposition 16.36.

Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R . Pour tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$ nous pouvons intégrer terme à terme :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b t^n dt. \quad (16.85)$$

Démonstration. Ceci est un cas particulier du théorème général 16.16. Notons que par le lemme 16.35, la série entière qui intègre la série de f terme à terme a le même rayon de convergence que celui de f . $\square$

Proposition 16.37.

Soit la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (16.86)$$

de rayon de convergence R . Alors la fonction f est C^1 sur $] -R, R[$ et se dérive terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (16.87)$$

pour tout $x \in] -R, R[$.

Démonstration. Nous savons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence que celui de la série f . En particulier cette série des dérivées converge normalement sur tout compact dans $] -R, R[$ et la somme est continue. Le théorème 16.18 conclut. $\square$

Exemple 16.38

Montrons que la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x-1} \end{aligned} \quad (16.88)$$

admet un prolongement C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Nous allons étudier la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (16.89)$$

autour de $x = 0$. Le logarithme ne pose pas de problèmes à développer dans un voisinage :

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (16.90a)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \quad (16.90b)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k. \quad (16.90c)$$

Cette série a un rayon de convergence égal à 1, et donc définit sans problèmes une fonction C^∞ dans un voisinage de $x = 0$. Notons que par convention $x^0 = 1$ même si $x = 0$. $\triangle$

Remarque 16.39.

À part lorsqu'on parle de fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la notion de classe C^k s'entend au sens de la différentielle, et non de la dérivée, voir les définitions 11.196. C'est cela qui explique la structure de la démonstration de la proposition 16.42.

Le lemme suivant est encore essentiellement valable dans un espace de Banach (proposition 6.157).

Lemme 16.40.

La série entière $\sum_{n \geq 0} z^{nk}$ a un rayon de convergence 1 et converge vers la fonction

$$\sum_{n \geq 0} z^{nk} = \frac{1}{1 - z^k}. \quad (16.91)$$

Lorsque $|\omega| = 1$ nous avons aussi un rayon de convergence 1 pour la série

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{k \geq 0} \omega^{-k-1} z^k. \quad (16.92)$$

Sous les mêmes hypothèses sur ω nous avons encore la série

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-s-1-k} \frac{(s+k-1)!}{s!} z^s \quad (16.93)$$

Démonstration. Les coefficients de la série sont $a_n = 1$ lorsque n est multiple de k et $a_n = 0$ autrement. Donc pour $r = 1$ la suite $r^n a_n$ reste bornée⁴. Cela prouve que le rayon de convergence est au moins 1. Par ailleurs si $r > 1$ alors clairement la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Cela prouve le rayon de convergence égal à 1.

Soit donc $z \in B(0, 1)$. Nous avons

$$\left(\sum_{n \geq 0} z^{nk} \right) (1 - z^k) = \sum_{n \geq 0} z^{nk} - \sum_{n \geq 0} z^{(n+1)k}. \quad (16.94)$$

Le premier terme de la première somme vaut 1 tandis que tous les autres termes s'annulent deux à deux.

En ce qui concerne la série (16.92), elle s'obtient facilement :

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\omega} \right)^s = \sum_s \omega^{-s-1} z^s. \quad (16.95)$$

La troisième série s'obtient en dérivant la seconde, ce qui est permis dans le disque de convergence par la proposition 16.36. $\square$

Remarque 16.41.

Sur le bord du disque de convergence, la série $\sum_n z^{nk}$ ne converge pas. En effet le rayon étant 1, sur le bord nous avons la série $\sum_n e^{ink\theta}$ dont la norme du terme général ne tend pas vers zéro.

Proposition 16.42 ([199, 8]).

Si la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R alors

- (1) La somme est une fonction holomorphe dans le disque de convergence.
- (2) La somme est différentiable et

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} z. \quad (16.96)$$

- (3) De plus pour tout $z_0 \in B(0, R)$, on pose⁵

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad (16.97a)$$

$$T(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \quad (16.97b)$$

Alors nous avons

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = T(z_0). \quad (16.98)$$

4. Utilisation directe de la définition 16.22.

5. Pour rappel, dans tout ce texte, $B(a, r)$ est une boule ouverte.

Démonstration. Nous allons prouver, en utilisant le théorème 16.20, que la somme est une fonction différentiable et que la différentielle est $\mathbb{C}$ -linéaire. La proposition 16.5 nous dira alors que la somme est $\mathbb{C}$ -dérivable.

Nous posons $u_n(z) = a_n z^n$, qui est une fonction de classe C^1 . En ce qui concerne sa différentielle nous considérons $z_0 \in B(0, R)$ et nous avons (si $n = 0$ alors la différentielle est nulle)

$$(du_n)_{z_0}(z) = \frac{d}{dt} \left[u_n(z_0 + tz) \right]_{t=0} \quad (16.99a)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[a_n(z_0 + tz)^n \right]_{t=0} \quad (16.99b)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[n a_n(z_0^{n-1} tz) \right]_{t=0} \quad (16.99c)$$

$$= n a_n z_0^{n-1} z. \quad (16.99d)$$

En cours de calcul nous avons développé $(z_0 + tz)^n$ et gardé seulement les termes de degré 1 en t . Il y en a n et ils sont tous égaux à $z_0^{n-1} tz$.

La convergence simple $\sum_n u_n$ est dans les hypothèses. Il reste à prouver que la somme des différentielles converge uniformément sur tout compact autour de z_0 ne débordant pas du disque ouvert de convergence. Soit K un compact autour de z_0 . Dans le calcul suivant nous utilisons une première fois la norme uniforme de du_n vu comme fonction de K vers $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et une fois la norme opérateur⁶ de $(du_n)_{z_0}$ comme application linéaire $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\|du_n\|_K = \sup_{z_0 \in K} \|(du_n)_{z_0}\| \quad (16.100a)$$

$$= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} \quad (16.100b)$$

$$= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} |n a_n z_0^{n-1} z| \quad (16.100c)$$

$$= \sup_{z_0 \in K} n |a_n| |z_0|^{n-1}. \quad (16.100d)$$

Vu que $z \mapsto |z|^{n-1}$ est une application continue sur le compact K , elle atteint son maximum (théorème 5.133.), nous considérons z_K , un point qui réalise le supremum. Ce nombre est dans le disque de convergence parce que K est un compact autour de z_0 .

Nous devons prouver que $\sum_n n |a_n| |z_K|^{n-1}$ converge. Vu que $|z_K|$ est une constante (par rapport à n) nous pouvons étudier la convergence en écrivant $|z_K|^n$ au lieu de $|z_K|^{n-1}$.

La suite $(a_n |z_K|^n)$ est une suite bornée. Soit M tel que $|a_n| |z_K|^n < M$ pour tout n . Nous considérons de plus r de telle sorte que $K \subset B(0, r) \subset B(0, R)$. En particulier $|z_K| < r$ et nous avons

$$n |a_n| |z_K|^n \leq n |a_n| r^n \left(\frac{|z_K|}{r} \right)^n \leq n M \left(\frac{|z_K|}{r} \right)^n. \quad (16.101)$$

Nous savons que ce qui est dans la parenthèse est plus petit que 1, mais que $\sum_n n x^n$ converge dès que $|x| < 1$. Par conséquent

$$\sum_n \|du_n\|_K \quad (16.102)$$

converge et le théorème 16.20 fonctionne : $du = \sum_{n=1}^{\infty} du_n$ et la somme $\sum_n u_n$ est de classe C^1 .

La différentielle de $\sum_n u_n$ s'exprime explicitement par

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} z. \quad (16.103)$$

Cette forme montre que du_{z_0} est une application $\mathbb{C}$ -linéaire et donc la somme est $\mathbb{C}$ -dérivable par la proposition 16.5. Ergo holomorphe sur le disque de convergence par définition 16.1.

6. Définition 6.81.

En ce qui concerne la formule (16.98), elle provient de la formule (16.12) : $f'(z_0)$ est donné par la facteur multiplicatif de du_{z_0} . En l'occurrence la formule (16.103) nous donne

$$f'(z_0) = \sum_{n \geq 1} n a_n z_0^{n-1}. \quad (16.104)$$

□

Corollaire 16.43 ([199, 8]).

La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration. La proposition 16.42 a démontré en réalité nettement plus : sur le disque ouvert de convergence, la somme est une fonction holomorphe. Il n'est cependant pas possible de conclure ainsi parce que le fait qu'une fonction holomorphe est C^∞ ne sera démontré qu'au coût de nombreux efforts dans le théorème 19.16(3).

Cas réel Nous considérons la série entière $\sum_n a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ de rayon de convergence R .

Une simple récurrence sur la proposition 16.37 donne le résultat.

Cas complexe Attention : le fait d'être de classe C^k est le fait d'être k fois *différentiable*. Rien à voir avec la $\mathbb{C}$ -dérivabilité.

En ce qui concerne la différentiabilité nous avons la proposition 16.42 qui dit que dans le disque de convergence, la fonction $u(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour différentielle l'application $du: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$,

$$du_{z_0}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \right) z. \quad (16.105)$$

Nous allons éviter de considérer la différentielle seconde comme une application

$$d^2 u: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})) \quad (16.106)$$

parce que ça nous mènerait trop loin pour parler de la différentielle k^e . Au lieu de cela nous allons considérer l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ z_0 &\mapsto \psi(z_0)z = z_0 z. \end{aligned} \quad (16.107)$$

Dans cette optique nous écrivons :

$$du_{z_0} = \psi \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \right) \quad (16.108)$$

ou encore :

$$(\psi^{-1} \circ d)u(z_0) = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z_0^n. \quad (16.109)$$

Nous allons prouver par récurrence que l'égalité suivante est vraie (y compris le fait que la somme converge) :

$$(\psi^{-1} \circ d)^k u(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z_0^n. \quad (16.110)$$

Prouvons d'abord que cette somme converge pour tout k . Nous avons $(n+k)!/n! < (n+k)^k$ et donc il suffit de prouver que la série de coefficients $n^k a_n$ converge. C'est le cas par la proposition 16.24.

Nous pouvons calculer la différentielle de $(\psi^{-1} \circ d)^k u$ en dérivant terme à terme en utilisant (encore) la proposition 16.42(2) :

$$d((\psi^{-1} \circ d)^k u)_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} n a_0^{n-1} z \quad (16.111a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!} a_{n+k+1} z_0^n z. \quad (16.111b)$$

Nous appliquons ψ^{-1} à cela :

$$(\psi^{-1} \circ d)^{k+1}u(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!} a_{n+k+1} z_0^n. \quad (16.112)$$

Dérouler à l'envers Nous allons maintenant utiliser la proposition 11.156 pour montrer que u est de classe C^k pour tout k . Nous avons démontré que $(\psi^{-1} \circ d)^k u$ était différentiable. Par conséquent, $d((\psi^{-1} \circ d)^{k-1}u)$ est différentiable et donc $(\psi^{-1} \circ d)^{k-1}$ est de classe C^1 . En continuant ainsi, $(\psi^{-1} \circ d)^{k-l}u$ est de classe C^l et u est de classe C^k . □

16.2.4 Exponentielle et logarithme

La méthode adoptée ici est la suivante :

- L'exponentielle est définie par la série.
- Nous démontrons qu'elle vérifie l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$.
- Nous démontrons l'unicité de la solution à cette équation différentielle.
- Nous démontrons qu'elle est égale à $x \mapsto y(1)^x$.
- Nous définissons le logarithme comme l'application réciproque de l'exponentielle (définition 16.51).

Théorème 16.44 (Existence de l'exponentielle).

La série entière

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (16.113)$$

définit une fonction dérivable solution de

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (16.114a) \\ (16.114b) \end{matrix}$$

Démonstration. La formule de Hadamard (théorème 16.26) donne le rayon de convergence de la série (16.113) par

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0. \quad (16.115)$$

Donc nous avons un rayon de convergence infini. La fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ et la proposition 16.37 nous dit que y est dérivable. Nous pouvons aussi dériver terme à terme :

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = y(x). \quad (16.116)$$

Notez le petit jeu d'indice de départ de k . Dans un premier temps, nous remarquons que $k = 0$ donne un terme nul et nous le supprimons, et dans un second temps nous effectuons la simplification des factorielles (qui ne fonctionne pas avec $k = 0$). □

Pour la suite nous notons y une solution de l'équation $y' = y$, $y(0) = 1$, et nous allons en donner des propriétés indépendamment de l'existence, donnée par le théorème 16.44.

Proposition 16.45.

Quelques propriétés de y (si elle existe) :

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $y(x)y(-x) = 1$.
- (2) $y(x) > 0$ pour tout x .
- (3) y est strictement croissante.

Démonstration. Nous posons $\varphi(x) = y(x)y(-x)$ et nous dérivons :

$$\varphi'(x) = y'(x)y(-x) - y(x)y'(-x) = 0. \quad (16.117)$$

Donc φ est constante⁷. Vu que $\varphi(0) = 1$ nous avons automatiquement $y(x)y(-x) = 1$ pour tout x .

Les deux autres allégations sont simples : si $y(x_0) < 0$ alors il existe $t \in]x_0, 1[$ tel que $y(t) = 0$, ce qui est impossible parce que $y(t)y(-t) = 1$. La stricte croissance de y s'ensuit. $\square$

Proposition 16.46 (Unicité de l'exponentielle).

Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (16.118a)$$

$$(16.118b)$$

est unique.

Démonstration. Soient y et g deux solutions et considérons la fonction $h(x) = g(x)y(-x)$. Un calcul immédiat donne

$$h'(x) = 0 \quad (16.119)$$

et donc h est constante. Vu que $h(0) = 1$ nous avons $g(x)y(-x) = 1$ pour tout x , c'est à dire

$$g(x) = \frac{1}{y(-x)} = y(x). \quad (16.120)$$

$\square$

Proposition 16.47.

Quelques formules pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$(1) \quad y(a+b) = y(a)y(b)$$

$$(2) \quad y(na) = y(a)^n$$

$$(3) \quad y\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{y(a)}.$$

Démonstration. Nous posons $h(x) = y(a+b-x)y(x)$ et nous avons encore $h'(x) = 0$ dont nous déduisons que h est constante. De plus

$$h(0) = y(a+b)y(0) = y(a+b) \quad (16.121)$$

et

$$h(b) = y(a)y(b). \quad (16.122)$$

Vu que h est constante, ces deux expressions sont égales : $y(a+b) = y(a)y(b)$.

Forts de cette relation, une récurrence donne $y(na) = y(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus

$$y(a) = y\left(\frac{a}{n} \times n\right) = y\left(\frac{a}{n}\right)^n, \quad (16.123)$$

ce qui donne $y(a) = y(a/n)^n$ ou encore $y(a/n) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Enfin pour les négatifs, si $n \in \mathbb{N}$,

$$y(-na) = \frac{1}{y(na)} = \frac{1}{y(a)^n} = y(a)^{-n}. \quad (16.124)$$

Et de la même façon,

$$y\left(-\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{y\left(\frac{a}{n}\right)} = \sqrt[n]{\frac{1}{y(a)}} = \sqrt[n]{y(a)^{-1}}. \quad (16.125)$$

$\square$

7. Proposition 11.96.

Proposition 16.48.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$y(x) = y(1)^x. \quad (16.126)$$

Démonstration. Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $q = a/b$ et

$$y(q) = y\left(\frac{a}{b}\right) = y\left(a \times \frac{1}{b}\right) = y\left(\frac{1}{b}\right)^a = (\sqrt[b]{y(1)})^a = y(1)^{a/b} = y(1)^q. \quad (16.127)$$

Par ailleurs si $a \in \mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est continue. Les fonctions y et $x \mapsto y(1)^x$ sont deux fonctions continues égales sur $\mathbb{Q}$. Elles sont donc égales par la proposition 5.126. $\square$

Nous notons $y(1) = e$, le **nombre de Néper**, de telle sorte que

$$y(x) = e^x. \quad (16.128)$$

Une conséquence est que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (16.129a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad (16.129b)$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow]0, \infty[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \quad (16.130)$$

est une bijection.

Théorème 16.49 (Définition de l'exponentielle).

Les choses que nous savons sur l'exponentielle :

(1) Il y a unicité de la solution à l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (16.131a)$$

$$(16.131b)$$

(2) L'équation différentielle (16.131) possède une solution donnée par la série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (16.132)$$

(3) Cette solution est une bijection $y: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$.

(4) La fonction y ainsi définie est de classe C^∞ .

(5) Elle est également donnée par la formule

$$\exp(x) = e^x \quad (16.133)$$

où e est défini par $e = \exp(1)$.

Nous nommons **exponentielle** cette fonction.

Démonstration. (1) C'est la proposition 16.46.

(2) C'est le théorème 16.44.

(3) Le rayon de convergence de la série (16.132) est infini (théorème 16.44) ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. Le fait que ce soit une bijection est dû au fait qu'elle est strictement croissante (proposition 16.45) ainsi qu'à la limite (16.129).

(4) Vu que $y = y'$, y est dérivable. Mais comme y' est alors égale à une fonction dérivable, y' est dérivable. En dérivant l'égalité $y' = y$ nous obtenons $y'' = y'$ et le jeu continue.

(5) C'est la proposition 16.48. □

Exemple 16.50(Un endomorphisme sans polynôme annulateur[96])

l'exponentielle permet de donner un exemple d'un endomorphisme n'ayant pas de polynôme annulateur⁸ : l'endomorphisme de dérivation

$$\begin{aligned} D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned} \quad (16.134)$$

n'a pas de polynôme annulateur. En effet supposons que $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ en soit un, et considérons la fonction $f_\lambda: t \mapsto e^{\lambda t}$. Nous avons

$$0 = P(D)f_\lambda = \sum_k a_k D^k(f_\lambda) = \sum_k a_k \lambda^k f_\lambda = P(\lambda)f_\lambda. \quad (16.135)$$

Par conséquent λ est une racine de P pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela implique que $P = 0$.

D'ailleurs si on y pense bien, cet exemple n'est qu'un habillage de l'exemple 6.244. △

Définition 16.51 (Logarithme).

La fonction $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ étant une bijection, elle admet une application réciproque que nous nommons **logarithme** et que nous notons

$$\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}. \quad (16.136)$$

Lemme 16.52.

Le logarithme est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$.

Démonstration. L'existence d'une primitive est justement le sujet de ce lemme⁹. En tant qu'application réciproque nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\exp(x)) = x, \quad (16.137)$$

que nous pouvons dériver en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\ln'(\exp(x)) \exp'(x) = 1. \quad (16.138)$$

Mais $\exp'(x) = x$, donc

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \quad (16.139)$$

pour tout y dans l'image de $\exp$, c'est à dire pour tout y dans l'ensemble de définition de $\ln$.

Par ailleurs, $\exp(0) = 1$ donc

$$\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0. \quad (16.140)$$

En ce qui concerne l'unicité d'une primitive s'annulant en $x = 1$, c'est le corollaire 11.103. □

Lemme 16.53.

Si $u: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ est dérivable alors $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$.

Démonstration. Cela est une conséquence du théorème de dérivation des fonctions composées : si $g(x) = \ln(u(x))$ alors

$$g'(x) = \ln'(u(x))u'(x) = \frac{1}{u(x)}u'(x). \quad (16.141)$$

□

8. Voir la définition 6.240 et ce qui suit.

9. C'est l'avantage de notre approche, qui construit la primitive sans devoir invoquer le théorème 16.92 pour en assurer l'existence.

Lemme 16.54.

Si $a, b \in]0, \infty[$ alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad (16.142)$$

et

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b). \quad (16.143)$$

Démonstration. Nous posons $f(x) = \ln(ax)$ qui est une fonction dérivable. Alors $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Cette fonction f est donc une primitive de $\frac{1}{x}$ et il existe une constante K telle que

$$f(x) = \ln(x) + K. \quad (16.144)$$

Vu que $\ln(1) = 0$ nous avons $K = f(1) = \ln(a)$. Donc

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a). \quad (16.145)$$

En ce qui concerne la seconde formule à démontrer, nous avons

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{1}{b}b\right) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b). \quad (16.146)$$

Étant donné que $\ln(1) = 0$ nous en déduisons la formule (16.143). $\square$

16.2.5 Forme polaire ou trigonométrique des nombres complexes

Dans le plan de Gauss, le module d'un complexe z représente la distance entre 0 et z . On appelle *argument* de z (noté $\arg z$) l'angle (déterminé à 2π près) entre le demi-axe des réels positifs et la demi-droite qui part de 0 et passe par z . Le module et l'argument d'un complexe permettent de déterminer univoquement ce complexe puisqu'on a la formule

$$z = a + bi = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$$

L'argument de z se détermine via les formules

$$\frac{a}{|z|} = \cos(\arg(z)) \quad \frac{b}{|z|} = \sin(\arg(z))$$

ou encore par la formule

$$\frac{b}{a} = \tan(\arg(z)) \quad \text{en vérifiant le quadrant.}$$

La vérification du quadrant vient de ce que la tangente ne détermine l'angle qu'à π près.

16.3 Vitesses de x^α , de l'exponentielle et du logarithme**Lemme 16.55.**

Pour tout $\alpha > 0$, il existe N tel que $\ln(n) \leq n^\alpha$ pour tout $n \geq N$.

Démonstration. En effet, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha x^\alpha = \infty \quad (16.147)$$

quand $\alpha > 0$. $\square$

Cela tient également lorsque nous considérons $\ln(x)^p$ au lieu de $\ln(x)$. De cela, nous disons que le logarithme croît moins vite que n'importe quel polynôme.

Lemme 16.56.

L'exponentielle croît plus vite que tout polynôme, et plus vite que le logarithme :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} (\ln t)^n t^\alpha = 0 \quad (16.148)$$

pour tout n et pour tout α .

Lemme 16.57.

Nous avons aussi la limite utile suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a^n \quad (16.149)$$

pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$.

Démonstration. En passant à l'exponentielle, pour chaque n nous avons

$$n^\alpha a^n = e^{\alpha \ln(n) + n \ln(a)}. \quad (16.150)$$

Ce qui est dans l'exponentielle est

$$\alpha \ln(n) + n \ln(a) = n \left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} + \ln(a) \right). \quad (16.151)$$

Dans la parenthèse, $\ln(a) < 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$. Donc ce qui est dans l'exponentielle (16.150) tend vers $-\infty$ et au final l'expression demandée tend vers zéro. $\square$

Proposition 16.58.

Pour tout polynôme P et pour tout $a > 0$ la fonction $f(x) = P(x)e^{-ax}$ est intégrable¹⁰ sur $[0, \infty[$.

Démonstration. Nous avons $f(x) = P(x)e^{-ax/2}e^{-ax/2}$, et par la vitesse comparée des exponentielles et polynômes, pour un certain $M > 0$ nous pouvons affirmer que $P(x)e^{-ax/2} < 1$ sur $[M, \infty[$. Dès lors

$$|f(x)| < e^{-ax/2}, \quad (16.152)$$

qui est intégrable. $\square$

16.3.1 Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne**Théorème 16.59** ([35, 173]).

Soient des entiers naturels premiers dans leur ensemble¹¹ $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et l'équation

$$\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n \quad (16.153)$$

pour les naturels n_i où n est un naturel donné. Nous notons S_n le nombre de solutions de cette équation. Alors :

- (1) Il existe un algorithme (en temps fini) pour calculer S_n en fonction des α_i et de n .
- (2) Nous avons le comportement asymptotique

$$S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}. \quad (16.154)$$

Démonstration. Pour $|z| < 1$ dans $\mathbb{C}$, utilisant le lemme 16.40, nous écrivons le développement

$$F(z) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - z^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^p \sum_{n \geq 0} z^{n\alpha_i}. \quad (16.155)$$

¹⁰. Définition 7.116.

¹¹. Définition 2.23.

Nous allons maintenant à la pêche au terme de degré k dans ce produit de sommes en utilisant p fois le produit de Cauchy de la formule (16.66). Nous avons

$$F(z) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n_1 \alpha_1 + \dots + n_p \alpha_p = n} 1 \right) z^k = \sum_{k \geq 0} S_k z^k. \quad (16.156)$$

La technique pour déterminer la valeur de S_n est alors de développer $F(z)$ en série de façon un peu explicite et d'identifier le coefficient de z^n parce que nous venons de voir que ce coefficient est S_n . Nous commençons par une décomposition en éléments simples, expliquée autour de l'équation (13.861) :

$$\frac{1}{1 - z^{\alpha_i}} = \sum_{\alpha \in U_{\alpha_i}} \frac{A_{\omega, i}}{\omega - z}. \quad (16.157)$$

où U_{α_i} est le groupe des racines α_i^e de l'unité décrit en 3.4. La raison de ce développement est que, comme mentionné dans le lemme 4.108, $\prod_{\omega \in U_{\alpha_i}} (z - \omega) = z^{\alpha_i} - 1$. Lorsque nous effectuons la somme, le dénominateur commun est donc bien ¹² $1 - z^{\alpha_i}$. En récrivant le produit :

$$F(z) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - z^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^p \sum_{\omega \in U_{\alpha_i}} \frac{A_{\omega, i}}{\omega - z} \quad (16.158)$$

Les coefficients $A_{\omega, i}$ sont calculables explicitement, en temps fini.

Vu que 1 est dans tous les U_{α_i} , le produit fait intervenir au dénominateur des puissances de $(1 - z)$ jusqu'à la puissance p . Les autres racines de l'unité appartiennent au maximum à $p - 1$ des groupes U_{α_i} parce que les nombres α_i sont premiers dans leur ensemble, voir la proposition 3.12.

La fonction F peut alors s'écrire sous la forme

$$F(z) = \frac{A}{(1 - z)^p} + G(z) \quad (16.159)$$

où $G(z)$ est une somme de termes de la forme

$$\frac{a_{i,1}}{1 - \omega_i} + \dots + \frac{a_{i,p}}{(1 - \omega_i)^{p-1}} \quad (16.160)$$

où les ω_i sont les racines α_i^e de l'unité et $a_{k,r}$ sont des nombres complexes. Trouvons A . D'abord grâce au lemme 3.118(2) nous avons

$$F(z)(1 - z)^p = \prod_{l=1}^p \frac{1 - z}{1 - z^{\alpha_l}} = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 + z + \dots + z^{\alpha_i - 1}}, \quad (16.161)$$

et donc

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z)(1 - z)^p = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\alpha_i}. \quad (16.162)$$

Mais vu ce que contient $G(z)$, nous avons aussi $\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = A$. Nous avons donc déjà déterminé $A = \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p}$.

Pour la suite nous avons besoin des développements du lemme 16.40. Nous utiliserons en particulier celle-ci :

$$\frac{1}{(\omega - z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-s-1-k} \frac{(s+k-1)!}{s!} z^s. \quad (16.163)$$

En particulier le module du coefficient de z^n là dedans est : $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$. Dans la partie G de la décomposition (16.159), k est majoré par $p - 2$ et la dépendance en n est donc au maximum du type

$$\frac{(n+p-2)!}{n!(p-2)!} \sim \frac{n^{n+p-2}}{n^n(p-2)!} = \frac{n^{p-2}}{(p-2)!}. \quad (16.164)$$

12. Pour le signe, c'est ajustable avec le signe de $A_{\omega, i}$.

Dans le premier terme par contre, il y a des termes jusqu'à $k = p$. Le terme dominant est alors en $\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$ et son coefficient est A qui est déjà calculé. Au final le terme dominant du coefficient de z^n dans $F(z)$ est

$$S_n \sim \frac{A}{(p-1)!} n^{p-1} = \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}. \quad (16.165)$$

□

Exemple 16.60

Pour $p = 1$, l'équation est $\alpha x = n$, qui possède au maximum une solution, quel que soit n . Et de plus pour avoir une solution il faut et suffit que α divise n , c'est à dire que n soit un multiple de α . Il n'y a que un nombre sur α à être multiple de α . D'où le comportement en $\frac{1}{\alpha}$.

Pour $p = 2$, c'est l'équation (2.57) déjà étudiée. Il y a une famille à un paramètre de solutions dont seulement un certain nombre sont positives. A priori, le nombre de solutions positives croît linéairement en n . $\triangle$

16.4 Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 représenté à la figure 16.2. Sa longueur est 2π .

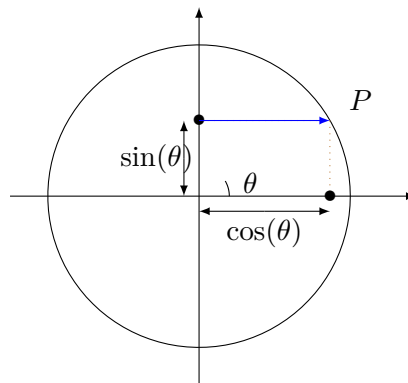


FIGURE 16.2 – Le cercle trigonométrique.

Nous verrons plus tard que la longueur de l'arc de cercle intercepté par un angle θ est égal à θ . Les radians sont donc l'unité d'angle les plus adaptés au calcul de longueurs sur le cercle.

16.4.1 Les fonctions sinus et cosinus

La longueur de la projection du point P sur la droite horizontale va naturellement être égale à $\cos(\theta)$. En effet, si nous notons X un vecteur horizontal de norme 1, cette projection est donné par $P \cdot X$. Mais en reprenant l'équation (6.237), nous voyons que

$$P \cdot X = \|P\| \|X\| \cos(\theta), \quad (16.166)$$

tandis qu'ici nous avons $\|P\| = \|X\| = 1$.

Nous appelons $\sin(\theta)$ la longueur de la projection sur l'axe vertical.

Quelques dessins nous convainquent que

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 2\pi) &= \sin(\theta) & \cos(\theta + 2\pi) &= \cos(\theta), \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) &= \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) &= -\sin(\theta), \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin(\theta) & \cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta). \end{aligned} \quad (16.167)$$

Le théorème de Pythagore nous montre aussi l'importante relation

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1. \quad (16.168)$$

Quelques valeurs remarquables pour les sinus et cosinus :

$$\begin{aligned} \sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0 \\ \cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1 \end{aligned} \quad (16.169)$$

Nous pouvons prouver simplement que $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ et $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en s'inspirant de la figure 16.3.

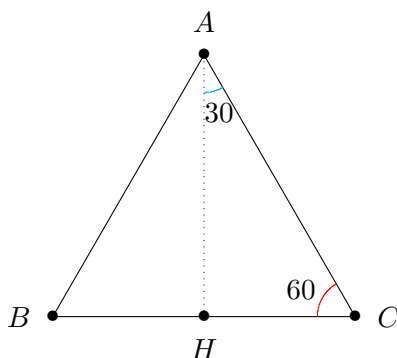


FIGURE 16.3 – Un triangle équilatéral de côté 1.

16.4.2 La fonction tangente

La définition de la **tangente** est :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (16.170)$$

Cette fonction a une interprétation géométrique donnée sur la figure 16.4.

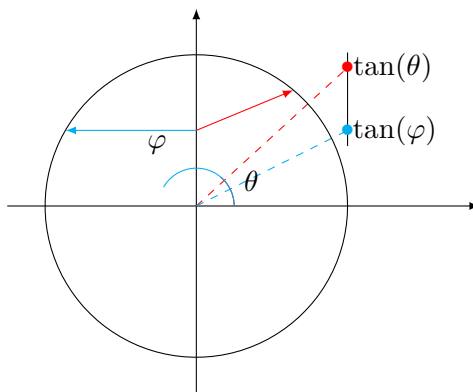


FIGURE 16.4 – Interprétation géométrique de la fonction tangente. La tangente de l'angle θ est positive (et un peu plus grande que 1) tandis que celle de la tangente de l'angle φ est négative.

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection vers $\mathbb{R}$. Nous avons donc une fonction inverse

$$\begin{aligned} \tan^{-1}: \mathbb{R} &\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto y \text{ tel que } \tan(y) = x. \end{aligned} \quad (16.171)$$

Notez que cette définition, bien qu'elle ait un sens, ne dit pas comment *calculer* le nombre $\tan^{-1}(x)$ pour un nombre x donné¹³.

16.4.3 Les coordonnées polaires

On a vu qu'un point M dans $\mathbb{R}^2$ peut être représenté par ses abscisses x et ses ordonnées y . Nous pouvons également déterminer le même point M en donnant un angle et une distance comme montré sur la figure 16.5.

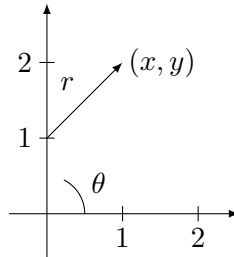


FIGURE 16.5 – Un point en coordonnées polaires est donné par sa distance à l'origine et par l'angle qu'il faut avec l'horizontale.

Le même point M peut être décrit indifféremment avec les coordonnées (x, y) ou bien avec (r, θ) .

Remarque 16.61.

L'angle θ d'un point n'étant a priori défini qu'à un multiple de 2π près, nous convenons de toujours choisir un angle $0 \leq \theta < 2\pi$. Par ailleurs l'angle θ n'est pas défini si $(x, y) = (0, 0)$.

La coordonnée r est toujours positive.

En utilisant la trigonométrie, il est facile de trouver le changement de variable qui donne (x, y) en fonction de (r, θ) :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta). \end{cases} \quad \begin{matrix} (16.172a) \\ (16.172b) \end{matrix}$$

16.4.3.1 Transformation inverse : théorie

Voyons la question inverse : comment retrouver r et θ si on connaît x et y ? Tout d'abord,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (16.173)$$

parce que la coordonnée r est la distance entre l'origine et (x, y) . Comment trouver l'angle ? Nous supposons $(x, y) \neq (0, 0)$. Si $x = 0$, alors le point est sur l'axe vertical et nous avons

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } y < 0. \end{cases} \quad (16.174)$$

Notez que si $y < 0$, conformément à notre convention $\theta \geq 0$, nous avons noté $\frac{3\pi}{2}$ et non $-\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant le cas général avec $x \neq 0$. Les équations (16.172) montrent que

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}. \quad (16.175)$$

Nous avons donc

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (16.176)$$

La fonction inverse de la fonction tangente est celle définie plus haut.

¹³. Si vous utilisez votre calculatrice, n'oubliez pas que les formules que vous connaissez ne sont valables qu'en radian.

16.4.3.2 Transformation inverse : pratique

Le code suivant utilise Sage.

```

1  #!/usr/bin/sage -python
2  # -*- coding: utf8 -*-
3
4  from sage.all import *
5
6  def PointToPolaire(x,y):
7      x=SR(x)
8      y=SR(y)
9      r = sqrt(x**2+y**2)
10     if x == 0:
11         if y > 0:
12             alpha = pi/2
13         if y < 0:
14             alpha = 3*pi/2
15         if y == 0 :
16             raise ValueError,"Pas d'angle pour le point (0,0) !!"
17     else :
18         alpha = atan(y/x)
19     if (x < 0) and (y == 0) :
20         alpha = pi
21     if (x < 0) and (y > 0) :
22         alpha = alpha + pi
23     if (x < 0) and (y < 0 ) :
24         alpha = alpha + pi
25     alpha=alpha.simplify_trig()
26     return (r,alpha)
27
28 print PointToPolaire(1,1)
29 print PointToPolaire(-2,1)
30 print PointToPolaire(6*sqrt(3)/2,3)

```

calculAngle.py

Son exécution retourne :

```

(sqrt(2), 1/4*pi)
(sqrt(5), pi - arctan(1/2))
(6, 1/6*pi)

```

Notez que ce sont des valeurs *exactes*. Ce ne sont pas des approximations, ce logiciel travaille de façon symbolique! Merci donc de jeter vos vieilles calculatrices à la poubelle¹⁴ : c'est de la technologie qui n'a plus cours en 2011.

16.4.4 Série génératrice d'une suite

Avant de commencer, une petite formule de dérivation toute simple que nous allons utiliser souvent :

$$(z^k)^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \frac{k!}{(k-l)!} z^{k-l} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16.177)$$

14. Pensez au recyclage : c'est plein de métaux lourds!

Soit u_n une suite telle que le rayon de convergence de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \quad (16.178)$$

soit strictement positif. Alors la série f est la **série génératrice** de la suite (u_n) .

Grâce au théorème 16.37 nous pouvons la dériver terme à terme autour de $z = 0$. En utilisant la petite formule (16.177) nous trouvons

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} u_n \frac{n!}{(n-l)!} z^{n-l}, \quad (16.179)$$

et donc

$$u_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!}. \quad (16.180)$$

D'où le nom de série génératrice. Cela est évidemment intéressant seulement si nous connaissons une autre forme pour f par ailleurs.

Nous en utiliserons une pour déterminer les partitions d'un nombre en parts fixes, proposition 19.43.

16.4.5 Développement en série et Taylor

Définition 16.62.

Soit une fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous disons que f est **développable en série entière** dans un voisinage de z_0 si il existe une série $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \leq R$ tel que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (16.181)$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Proposition 16.63.

Si V est un ouvert dans $\mathbb{C}$ alors l'ensemble des fonctions $V \rightarrow \mathbb{C}$ développables en série entière forme une $\mathbb{C}$ -algèbre.

Démonstration. Les séries entières passent aux sommes et aux produits en gardant des rayons de convergence non nuls. $\square$

Proposition 16.64.

Si f est développable en série entière à l'origine alors elle est C^∞ sur un voisinage de l'origine et le développement est celui de **Taylor** :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (16.182)$$

pour tout x dans un voisinage de 0.

Démonstration. Si $f(x) = \sum a_n x^n$, nous savons que f est C^1 et que nous pouvons dériver terme à terme (au moins dans un voisinage). De plus le fait de dériver ne change pas le domaine. Par récurrence, la fonction est C^∞ sur le voisinage. En dérivant k fois la série $\sum a_n x^n$ nous trouvons

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}. \quad (16.183)$$

En calculant en $x = 0$ nous trouvons

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \quad (16.184)$$

d'où le terme général

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \quad (16.185)$$

□

Si f est une fonction et si la série

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (16.186)$$

converge, alors cette série est la **série de Taylor** de f .

Remarque 16.65.

La série de Taylor d'une fonction n'est pas liée à sa fonction de façon aussi raide qu'on pourrait le croire. Même dans le cas d'une fonction C^∞ il peut arriver que $T_f(x) \neq f(x)$.

Il peut aussi arriver que f ne soit pas développable en série entières.

Exemple 16.66

Nous considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (16.187)$$

Nous avons

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (16.188)$$

Note : pour la seconde ligne nous devons faire explicitement le calcul

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} e^{-1/t^2} = 0. \quad (16.189)$$

Plus généralement nous avons $f^{(k)}(0) = 0$, et par conséquent la série de Taylor converge (trivialement) vers la fonction identiquement nulle.

Cette fonction n'est donc pas développable en série entière vu qu'il n'existe aucun voisinage de zéro sur lequel la série de f coïncide avec f . $\triangle$

Exemple 16.67

Développement de $f(x) = \arctan(x)$. Nous savons que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (16.190)$$

alors que nous connaissons le développement

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (16.191)$$

pour tout $x \in B(0, 1)$. Nous avons donc successivement

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad (16.192a)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (16.192b)$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C. \quad (16.192c)$$

Notons que dans la dernière nous avons évité d'écrire la somme depuis $n = 0$ (qui serait un terme constant) et nous avons écrit explicitement « $+C$ ». Étant donné que $\arctan(0) = 0$, nous devons poser $C = 0$ et donc

$$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (16.193)$$

△

16.4.6 Resommer une série

Nous avons vu comment trouver la série correspondant à une fonction donnée. Un exercice difficile consiste à trouver la fonction qui correspond à une somme donnée. Pour des techniques de calculs de sommes, voir [200].

16.4.6.1 Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$

Pour calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n \quad (16.194)$$

où P est un polynôme de degré m nous commençons par écrire

$$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)(n+2) + \dots + \alpha_m(n+1)\dots(n+m). \quad (16.195)$$

Nous décomposons alors la somme en m sommes de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k} \right)^{(k)}. \quad (16.196)$$

Effectuons par exemple¹⁵

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \quad (16.197)$$

Notons que dans un usage pratique, ce terme devra être ensuite dérivé trois fois, de telle manière que les termes «correctifs» n'interviennent pas. Cette méthode ne demande donc que de calculer les dérivées successives de $1/(1-x)$.

Exemple 16.68

Calculons la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n. \quad (16.198)$$

D'abord nous écrivons

$$n^3 = -1 + 7(n+1) - 6(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3). \quad (16.199)$$

Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(x-1)^2}. \quad (16.200)$$

De la même façon,

$$\sum_n (n+1)(n+2)x^n = \left(\sum x^{n+2} \right)'' = \frac{-2}{(x-1)^3} \quad (16.201a)$$

$$\sum_n (n+1)(n+2)(n+3)x^n = \frac{6}{(x-1)^4}. \quad (16.201b)$$

¹⁵. Je crois qu'ici il y a une faute de signe dans [200].

En remettant tout ensemble nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = -\frac{1}{1-x} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{12}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4}. \quad (16.202)$$

Nous pouvons vérifier ce résultat en traçant les deux courbes et en remarquant qu'elles coïncident.

```
-----
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                               |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.                 |
|-----|
sage: n=var('n')
sage: S(x)=sum( [ n**3*x**n for n in range(0,30) ] )
sage: f(x)=-1/(1-x)+7/((x-1)**2)+12/((x-1)**3)+6/((x-1)**4)
sage: S(0.1)
0.214906264288980
sage: f(0.1)
0.214906264288981
sage: f.plot(-0.5,0.5)+S.plot(-0.5,0.5)
```

△

16.4.6.2 Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$

Si $P(n)$ a des racines entières, nous pouvons le décomposer en fractions simples et utiliser la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \quad (16.203)$$

Nous avons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (16.204a)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}. \quad (16.204b)$$

Notez le changement de point de départ de la somme au passage.

Autre exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{x^3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (16.205a)$$

$$= -\frac{\ln(x-1)}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}. \quad (16.205b)$$

Si le polynôme possède des racines non entières, les choses se compliquent.

Exemple 16.69

Calculons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}. \quad (16.206)$$

Si $x \geqslant 0$, en posant $t = \sqrt{x}$ nous trouvons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \quad (16.207)$$

Études

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \quad (16.208)$$

Nous avons

$$H'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (t^2)^n = \frac{1}{1-t^2}. \quad (16.209)$$

Une primitive de cette fonction est

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \quad (16.210)$$

En $t = 0$, cette fonction vaut 0 qui est la bonne valeur. Donc nous avons bien

$$H(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|. \quad (16.211)$$

Notons que ce que l'équation (16.209) nous dit est que $H(t)$ est une primitive de $1/(1-t^2)$. Il faut choisir la bonne primitive en fixant une valeur.

Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| \quad (16.212)$$

pour $x > 0$. Nous devons encore trouver ce que cela vaut pour $x < 0$.

Nous posons successivement $X = -x$ puis $g(X) = f(-X)$. Ce que nous devons calculer est

$$g(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}. \quad (16.213)$$

Si nous posons

$$h(t) = \sum \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}, \quad (16.214)$$

alors

$$h'(t) = \sum (-1)^n t^{2n} = \sum (-t^2)^n = \frac{1}{1+t^2}, \quad (16.215)$$

par conséquent $h(t) = \arctan(t)$ (cela avait déjà été déduit à l'envers dans l'exemple 16.67).

Au final

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| & \text{si } x > 0 \\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (16.216)$$

Notons qu'elle est continue en zéro à gauche et à droite.

△

Exemple 16.70

Nous considérons l'exemple suivant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}. \quad (16.217)$$

Nous posons $t = \sqrt[3]{x}$, et nous substituons :

$$\frac{x^n}{3n+2} = \frac{t^{3n}}{3n+2} = \frac{1}{t^2} \frac{t^{3n+2}}{3n+2}. \quad (16.218)$$

Nous devons étudier la fonction

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n+2}}{3n+2} \quad (16.219)$$

Nous avons

$$g'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{3n+1} = t \sum_{n=0}^{\infty} t^{3n} = \frac{t}{1-t^3}. \quad (16.220)$$

Notons que $g(0) = 0$. $\triangle$

Exemple 16.71

Calculer le nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \quad (16.221)$$

Nous aurions envie de dire que cela est $f(-1)$ pour la fonction f donnée en (16.216). Le problème est que le rayon de convergence de f étant 1, rien n'est garanti quand au fait que la fonction y soit continue en $x = -1$. En particulier nous devons justifier le fait que

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sum_n \frac{x^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{-x}} \arctan(\sqrt{-x}). \quad (16.222)$$

Ce qui nous sauve est le critère d'Abel radial (théorème 16.33). En effet la série

$$\sum \frac{r^n}{2n+1} \quad (16.223)$$

étant convergente avec $r = -1$, la série correspondante est continue sur $[-1, 0]$. Nous pouvons donc calculer la série (16.221) en posant $x = -1$ dans (16.216) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \quad (16.224)$$

Note : la série (16.223) ne converge pas avec $r = 1$. La fonction f n'est pas continue en $x = 1$. $\triangle$

Exemple 16.72

Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (16.225)$$

En effet si nous désignons par f la somme à gauche, nous trouvons que $f = g'$ avec

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n. \quad (16.226)$$

Nous savons par ailleurs que $g(x) = 1/(1-x)$. Par conséquent

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (16.227)$$

$\triangle$

16.4.6.3 Sage, primitives et logarithme complexe

16.73.

Attention : Sage pourrait nous induire en erreur si nous n'y prenions pas garde. En effet ce que vous ne savez pas mais que Sage sait, c'est que

$$\ln(-1) = i\pi. \quad (16.228)$$

Par conséquent Sage se permet de donner des primitives sans valeurs absolues dans le logarithme :

```
sage: f(x)=1/x
sage: f.integrate(x)
x |--> log(x)
```

La primitive à laquelle on s'attend d'habitude est $\ln(|x|)$. Ici la réponse est correcte parce que si x est négatif nous avons

$$\ln(x) = \ln((-1)|x|) = \ln(-1) + \ln(|x|). \quad (16.229)$$

Cette fonction est donc décalée de la primitive usuelle seulement de la constante $\ln(-1)$.

Un exemple plus élaboré :

```
sage: h(x)=1/(1-x**2)
sage: H=h.integrate(x)
sage: H
x |--> -1/2*log(x - 1) + 1/2*log(x + 1)
sage: H(0)
-1/2*I*pi
```

Exemple 16.74

Encore une fois il faut faire attention en demandant la primitive à Sage :

```
-----
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11          |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
|-----
```

```
sage: f(x)=x/(1-x**3)
sage: F=f.integrate(x)
sage: F(0)
-1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3))
```

Cette fois la primitive proposée diffère de celle qu'on cherche de la constante complexe

$$-\frac{\pi}{3}i. \quad (16.230)$$

Mais il y a pire si nous voulons tracer. Nous voudrions définir la fonction $F_2(x) = F(x) - F(0)$. Mathématiquement c'est bien de cette fonction que nous parlons, mais :

```
sage: F2(x)=F(x)-F(0)
sage: F2(x)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*(2*x + 1)*sqrt(3)) +
+1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 1/3*log(x - 1) + 1/6*log(x^2 + x + 1)
sage: F2.plot(x,-0.1,0.1)
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points) WARNING: When plotting, failed to evaluate fun
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points) Last error message: 'unable to simplify to flo
```

Il refuse de tracer. Pourquoi? La partie complexe de l'expression de F_2 est mathématiquement nulle, mais elle est en deux parties :

$$\frac{\pi}{3} + \text{la partie imaginaire de } -\frac{1}{3}\ln(x-1). \quad (16.231)$$

Lorsque Sage tente de tracer, il donne à x un certain nombre de valeurs et calcule une *valeur approchée* de $\ln(x-1)$. Cette dernière ne se simplifie pas avec le nombre *exact* $\pi/3$. Sage reste donc avec une partie imaginaire qu'il ne peut pas tracer.

Notez la nuance :

```
sage: ln(-0.1)
-2.30258509299405 + 3.14159265358979*I
sage: ln(-1/10)
I*pi + log(1/10)
```


Du coup nous avons aussi

```
sage: F2(-0.1)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(0.266666666666667*sqrt(3))
+ 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 0.0474885065133152 - 1.04719755119660*I
```

△

16.4.6.4 Nombres de Bell

Ici nous montrerions bien le théorème 16.82 sur les nombres de Bell parce que c'est essentiellement un résultat sur les séries entières et leurs manipulations. Hélas, il demande un tout petit peu d'équation différentielle (presque rien). Donc il est postposé jusqu'en page 1041.

16.4.7 Séries entières de matrices

Nous nous proposons d'étudier des séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \quad (16.232)$$

où A est une matrice. L'essentiel de la théorie va rester. Nous considérons une norme algébrique (définition 6.82), c'est à dire $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

La notion de rayon de convergence de cette série reste la même : c'est la définition 16.22 qui ne dépend que des coefficients a_k et pas du tout de ce qu'on met à côté dans la somme. Évidemment il faudra montrer que dans le cas des matrices, le nom «rayon de convergence» n'est pas usurpé.

Proposition 16.75.

Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\|A\| < R$. Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \quad (16.233)$$

converge absolument, c'est à dire que $\sum_k \|a_k A^k\| < \infty$.

Démonstration. Nous avons les majorations

$$\|a_n A^n\| \leq |a_n| \|A^n\| \leq |a_n| \|A\|^n. \quad (16.234)$$

Par hypothèse $\|A\| < R$ et R est un supremum, donc il existe r tel que $\|A\| < r < R$ avec $(a_n r^n)$ borné. Nommons M un majorant de la suite $(a_n r^n)$. Alors nous avons

$$\|A_n A^n\| \leq |a_n| r^n \frac{\|A\|^n}{r^n} \leq M \left(\frac{\|A\|}{r} \right)^n. \quad (16.235)$$

La série du membre de droite converge parce que c'est une série géométrique de raison plus petite que 1 ; voir l'exemple 6.167. □

Proposition 16.76.

Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et la fonction

$$f: \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$$

$$A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \quad (16.236)$$

Alors

(1) La différentielle de f sur $B(0, R)$ est

$$df_A(U) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{k-1} A^l U A^{k-1-l}, \quad (16.237)$$

c'est à dire que l'on peut différentier terme à terme. (Ici c'est A qui est dans $B(0, R)$)

(2) La convergence de la somme 16.237 est absolue.

(3) La convergence de la somme 16.237 est normale sur tout compact.

(4) La fonction f est de classe C^1 sur $B(0, R)$, c'est à dire que la fonction $A \mapsto df_A$ est continue.

Notons que df_A n'est pas tout à fait une série entière. Cependant, en ce qui concerne les normes, c'est tout comme si ça l'était.

Démonstration. Nous posons $u_k(A) = a_k A^k$, qui est une fonction de classe C^∞ et dont la différentielle est donnée par

$$(du_k)_A(U) = \frac{d}{dt} \left[u_k(A + tU) \right]_{t=0} = a_k \frac{d}{dt} \left[(A + tU)^k \right]_{t=0}; \quad (16.238)$$

en distribuant le produit nous trouvons tout un tas de termes dont seuls ceux contenant exactement une fois tU ne vont pas s'annuler. Étant donné que U et A ne commutent pas nous avons l'expression un peu moche

$$(du_k)_A(U) = \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}. \quad (16.239)$$

En ce qui concerne la norme, nous regardons celle de $(du_k)_A$ pour un A fixé; c'est à dire que nous en regardons la norme opérateur :

$$\|(du_k)_A\| = \sup_{\|U\|=1} \left\| \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l} \right\| \leq \sum_{l=0}^{k-1} |a_k| \|A\|^l \|A\|^{k-1-l} \leq k |a_k| \|A\|^{k-1}. \quad (16.240)$$

Pour donner la convergence nous considérons un nombre r tel que $\|A\| < r < R$, de telle sorte que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée par un nombre M et que nous puissions écrire

$$\|(du_k)_A\| \leq k |a_k| \|A\|^{k-1} = \frac{k |a_k| \|A\|^k}{\|A\|} = \frac{k |a_k|}{\|A\|} r^k \left(\frac{\|A\|}{r} \right)^k \leq \frac{M}{\|A\|} k \left(\frac{\|A\|}{r} \right)^k, \quad (16.241)$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence absolue de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A. \quad (16.242)$$

Passons à la convergence normale sur tout compact. Nous nous fixons $r < R$ et nous nous intéressons à la norme de du_k sur $\overline{B(0, r)}$, c'est à dire

$$\|du_k\|_\infty = \sum_{x \in \overline{B(0, r)}} \|(du_k)_A\|. \quad (16.243)$$

Vu que $\overline{B(0, r)}$ est compact, ce supremum est un maximum et nous pouvons noter A_k la matrice qui le réalise. Nous réalisons alors les mêmes manipulations que pour (16.241) :

$$\|du_k\|_\infty = \|(du_k)_{A_k}\| \leq k |a_k| \|A_k\|^{k-1} \leq k |a_k| r^{k-1} = \frac{1}{r} k |a_k| r^k. \quad (16.244)$$

Nous prenons maintenant $r < r_0 < R$ et M , un majorant de $(a_n r_0^n)$, de telle sorte qu'en multipliant et divisant par r_0^k ,

$$\|du_k\|_\infty \leq \frac{k |a_k| r_0^k}{r} \frac{r^k}{r_0^k} \leq \frac{k M}{r} \left(\frac{r}{r_0} \right)^k, \quad (16.245)$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence normale sur tout compact. Par voie de fait conséquences nous avons continuité de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A \quad (16.246)$$

et convergence vers df_A par le théorème 16.20. $\square$

Proposition 16.77.

Si le rayon de convergence de la série $u(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ est R , alors

- (1) elle converge normalement sur tout compact de $B(0, R)$;
- (2) la fonction u y est de classe C^∞ .

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} u_k &: \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto a_k A^k \end{aligned} \quad (16.247)$$

qui est évidemment une fonction de classe C^∞ . Nous étudions la j^e différentielle en m , pour $k > j$ (dans une série, nous ne nous intéressons pas aux premiers termes). La j^e différentielle appliquée à v_1 appliquée à v_2 , etc s'exprime de la façon suivante :

$$(d^j u_k)_m(v_1, \dots, v_j) = \frac{d}{dt_1} \dots \frac{d}{dt_j} \left(u_k(m + t_1 v_1 + \dots + t_j v_j) \right)_{t_i=0}. \quad (16.248)$$

Dans le produit $(m + t_1 v_1 + \dots + t_j v_j)^k$, seuls les termes contenant exactement une fois chacun des t_i ne s'annulera pas après avoir fait la dérivée et évalué en $t_i = 0$. Combien de termes cela fait ? Parmi les k facteurs, il faut en placer j qui ne sont pas m (cela fait $\binom{k}{j}$ possibilités), et puis il faut ordonner ces j termes, cela fait encore $j!$ possibilités. Au final,

$$\|(d^j u_k)_m\| \leq |a_k| \binom{k}{j} j! \|m\|^{k-j} = |a_k| P(k) \|m\|^{k-j} \quad (16.249)$$

où $P(k) = \frac{k!}{(k-j)!}$ est un polynôme de degré j .

Afin d'étudier la convergence normale sur tout compact de la série des $d^j u_k$, nous considérons $r < r_0 < R$ et nous allons prouver la convergence normale sur $\overline{B(0, r)}$. Vu que c'est un compact, il existe une matrice $m_k \in \overline{B(0, r)}$ telle que

$$\|d^j u_k\|_\infty = \|(d^j u_k)_{m_k}\| \quad (16.250a)$$

$$\leq |a_k| P(k) \|m_k\|^{k-j} \quad (16.250b)$$

$$\leq |a_k| P(k) r^{k-j} \quad (16.250c)$$

$$= \frac{|a_k| P(k)}{r^j} r^k \quad (16.250d)$$

$$= \frac{|a_k| r_0^k P(k)}{r^j} \left(\frac{r}{r_0} \right)^k \quad (16.250e)$$

$$\leq \frac{M}{r^j} P(k) \left(\frac{r}{r_0} \right)^k \quad (16.250f)$$

où M est un majorant de $a_n r^n$. Vu que $r_0/r < 1$, la somme sur k converge et nous avons convergence normale sur tout compact de

$$d^j \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} d^j (a_k A^k) \quad (16.251)$$

avec un peu d'abus de notation. $\square$

16.4.8 Exponentielle et logarithme de matrice

Proposition 16.78.

L'application

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \end{aligned} \quad (16.252)$$

est une application de classe C^∞ . Sa différentielle en zéro est l'identité : $d\exp_0 = \text{Id}$.

Démonstration. En ce qui concerne la continuité, nous savons que le rayon de convergence de la suite $\frac{1}{k!}$ est infini ; la proposition 16.77 conclut.

Pour la différentielle, c'est la proposition 16.76 qui nous permet d'écrire

$$d\exp_0(U) = \frac{d}{dt} [\exp(tU)]_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k U^k}{k!} \right]_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^{k-1} U^k}{k!} \Big|_{t=0} = U \quad (16.253)$$

parce que seul le terme $k = 1$ n'est pas nul. $\square$

Nous avons vu par la proposition 6.305 que toute matrice complexe inversible a un logarithme. Nous allons maintenant parler de logarithme de matrices réelles avec une condition sur la norme. La formule ci-dessous montre explicitement que le logarithme est réel.

$$\begin{aligned} \ln: \{A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \text{ tel que } \|A - \mathbb{1}\| < 1\} &\rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(A - \mathbb{1})^{k+1}}{k+1}. \end{aligned} \quad (16.254)$$

Lemme 16.79.

Si $\|m\| < 1$ dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, alors nous posons

$$\ln(\mathbb{1} + m) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{m^{k+1}}{k+1}. \quad (16.255)$$

Cette fonction a les propriétés suivantes.

(1) Elle est de classe C^∞ .

(2) Elle est un bon logarithme au sens où

$$e^{\ln(\mathbb{1}+m)} = \mathbb{1} + m. \quad (16.256)$$

(3) Elle vérifie l'approximation

$$\ln(\mathbb{1} + m) = m + \sigma(m) \quad (16.257)$$

où σ a la propriété que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k\sigma\left(\frac{m}{k}\right) = 0. \quad (16.258)$$

Démonstration. Le rayon de convergence de la suite $a_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ est 1. Donc l'application donnée est C^∞ sur $B(0, 1)$ par le théorème 16.77.

D'après la formule (16.255) nous avons

$$\sigma(m) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{m^{l+1}}{l+1}. \quad (16.259)$$

Nous avons alors

$$k\sigma\left(\frac{m}{k}\right) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{m^{l+1}}{k^l(l+1)}, \quad (16.260)$$

et donc

$$\|k\sigma\left(\frac{m}{k}\right)\| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|m\|^{l+1}}{k^l(l+1)} \leq \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|m\|^{l+1}}{l+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (16.261)$$

Cela prouve la dernière assertion. $\square$

Proposition 16.80.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \in \text{End}(V)$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \text{End}(V) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned} \quad (16.262)$$

Cette fonction vérifie

$$f'(t) = (e^{tA})' = Ae^{tA}. \quad (16.263)$$

Démonstration. Si nous posons $f_k(t) = \frac{t^k A^k}{k!}$ alors la fonction f est la somme : $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Nous allons permuter la somme et la dérivation à l'aide du théorème 16.20. Vu que

$$f'_k(t) = \frac{kt^{k-1}A^k}{k!}, \quad (16.264)$$

la suite des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$, nous pouvons dériver terme à terme pour obtenir

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} \frac{A^k}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}. \quad (16.265)$$

Notez le jeu au niveau du point départ de la somme : elle passe de 0 à 1 parce que le terme zéro est nul, mais la simplification $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ n'a pas de sens pour $k = 0$. $\square$

Lemme 16.81 ([201]).

Soit $A \in \text{End}(V)$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Si nous notons λ_i ($i = 1, \dots, r$) les valeurs propres distinctes de A alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t \text{Re}(\lambda_i)}. \quad (16.266)$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A se note, d'après le corollaire 6.289 de la façon suivante :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \quad (16.267)$$

où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i . Le lemme des noyaux 6.237 nous dit qu'en posant

$$V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i} \quad (16.268)$$

nous avons $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$. Nous nommons $p_i: V \rightarrow V$ la projection canonique de E sur V_i ainsi que x_i la composante de $x \in V$ dans l'espace caractéristique V_i et nous posons $A_i = p_i \circ A$. Les espaces caractéristiques sont stables par A (lemme 6.300), donc $(Ax_i)_i = Ax_i$. Par conséquent $\sum_i A_i p_i = A$ parce que

$$\left(\sum_i p_i A p_i \right)(x) = \sum_i (Ax_i)_i = \sum_i Ax_i = A \sum_i x_i = Ax. \quad (16.269)$$

En ce qui concerne les puissances de A nous avons de même

$$A_i^n x_i = A_i \underbrace{A_i^{n-1} x_i}_{\in V_i} = A A_i^{n-1} x_i = A^n x_i, \quad (16.270)$$

et donc

$$\sum_{i=1}^r A_i^n p_i = A^n. \quad (16.271)$$

En particulier,

$$e^{tA} = \sum_i e^{tA_i} p_i. \quad (16.272)$$

C'est de cette exponentielle de matrice que nous devons étudier la norme.

La décomposition de Dunford du théorème 6.303 est toujours un bon plan pour traiter avec les exponentielles : nous avons $A = s + n$ avec

$$s = \sum_k \lambda_k p_k, \quad n = \sum_k (A - \lambda_k \mathbb{1}) p_k. \quad (16.273)$$

Nous montrons que la décomposition de Dunford de $p_i A$ est $p_i A = p_i s + p_i n$. Nous avons

$$p_i s = \sum_k \lambda_k p_i p_k = \lambda_i p_i \quad (16.274)$$

qui est bien diagonalisable. De plus les espaces caractéristiques sont stables par n , donc $p_i n$ est nilpotent. Enfin ils commutent :

$$[p_i s, p_i n] = \lambda_i (p_i n - p_i n p_i). \quad (16.275)$$

Vu que n préserve les espaces caractéristiques, lorsque $v \in V_k$ avec $k \neq i$ nous avons $p_i n p_i v = 0$ et $p_i n v = 0$. Mais si $v \in V_i$ alors

$$p_i n p_i v = p_i n v = n v \quad (16.276)$$

et $p_i n v = n v$, donc les opérateurs $p_i n$ et $p_i n p_i$ sont égaux et (16.275) donne bien zéro. En ce qui concerne l'exponentielle de A_i nous avons

$$e^{p_i A} = e^{p_i s} e^{p_i n} = e^{\lambda_i p_i} \exp((A - \lambda_i \mathbb{1}) p_i). \quad (16.277)$$

Nous pouvons maintenant sérieusement nous attaquer à la norme de e^{tA} de l'équation (16.272). D'abord nous avons $\|p_i\| = 1$ parce que l'opérateur p_i est l'identité sur au moins un vecteur (en fait tout ceux de l'espace caractéristique V_i). En utilisant les propriétés de la norme opérateur¹⁶, nous trouvons dans un premier temps¹⁷ :

$$\|e^{tA}\| \leq \sum_{i=1}^r \|e^{tA_i}\| \leq \sum_{i=1}^r |e^{t\lambda_i}| \underbrace{\sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} \|A - \lambda_i \mathbb{1}_i\|^k}_{=P_i(|t|)} \quad (16.278)$$

où $\mathbb{1}_i$ est l'opérateur identité sur V_i . Petit détail dans le calcul :

$$\|e^{\lambda_i p_i}\| \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^l}{l!} \|p_i\|^l = e^{\lambda_i}. \quad (16.279)$$

Notons que tous les termes de $P_i(|t|)$ et $P_i(|t|)$ sont positifs, de telle sorte que nous pouvons majorer en ajoutant des termes partout. À la place d'avoir $P_i(|t|)$ comme coefficient de $|e^{t\lambda_i}|$ nous majorons en mettant $\sum_{j=1}^r P_j(|t|)$ comme coefficient :

$$\|e^{tA}\| \leq \sum_{i=1}^r |e^{t\lambda_i}| P_i(|t|) = \sum_{i=1}^r |e^{t\lambda_i}| \sum_{j=1}^r P_j(|t|) = P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)}. \quad (16.280)$$

L'arrivée de la partie réelle est une égalité usuelle pour les nombres complexes : $|e^{a+bi}| = e^a |e^{bi}| = e^a$. $\square$

16. Surtout le fait que ce soit une norme d'algèbre, proposition 6.88.

17. Si les valeurs propres de A sont λ_i , celles de tA sont $t\lambda_i$.

16.5 Nombres de Bell

Théorème 16.82 (Nombres de Bell[1]).

Soit $n \geq 1$ et B_n le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ avec la convention que $B_0 = 0$. Alors

(1) La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (16.281)$$

a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme est donnée par

$$f(x) = e^{e^x - 1} \quad (16.282)$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \quad (16.283)$$

(3) Le rayon de convergence de la série (16.281) est en réalité infini : $R = \infty$.

Démonstration. (1) Soit $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. Nous notons E_k l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n+1\}$ pour lesquelles le «paquet» contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Calculons le cardinal de E_k .

Pour construire un élément de E_k , il faut d'abord prendre le nombre $n+1$ et lui adjoindre k éléments choisis dans $\{1, \dots, n\}$, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite il faut trouver une partition des $(n+1) - (k+1) = n-k$ éléments restants, ce qui fait B_{n-k} possibilités. Donc

$$\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}. \quad (16.284)$$

L'intérêt des ensembles E_k est que $\{E_0, \dots, E_n\}$ est une partition de l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n+1\}$, c'est à dire que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \text{Card}(E_k)$, ce qui va nous donner une relation de récurrence pour les B_n :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \text{Card}(E_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{n-l} B_l = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} B_l. \quad (16.285)$$

où nous avons utilisé un petit changement de variables $l = n - k$. Afin d'étudier la convergence de la série (16.281), nous allons montrer par récurrence que pour tout n , $B_n < n!$. D'abord pour $n = 0$ c'est bon : $B_1 = 1$ parce que la seule partition de $\{1\}$ est $\{1\}$. Supposons que l'inégalité soit vraie pour une certaine valeur k , et montrons qu'elle est vraie pour la valeur $k+1$:

$$B_{k+1} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} B_l \leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} k! = k! \sum_{l=0}^k \underbrace{\frac{1}{(n-l)!}}_{\leq 1} \leq n!(n+1) = (n+1)! \quad (16.286)$$

où nous avons utilisé la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leq \frac{B_n}{n!} |x^n| \leq |x|^n, \quad (16.287)$$

et donc la série a un rayon de convergence au moins aussi grand que celui de la série géométrique, c'est à dire que 1. Donc $R \geq 1$. Nous nommons R ce rayon de convergence.

- (2) Soit $x \in]-R, R[$. Pour une telle valeur de x à l'intérieur du disque de convergence, la proposition 16.37 nous permet de dériver terme à terme la série¹⁸

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}, \quad (16.288)$$

pour obtenir

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} B_l \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \frac{B_l}{l!(l-k)!} \right) x^k. \quad (16.289)$$

En cette expression, nous reconnaissons un produit de Cauchy (proposition 16.28) avec $a_l = \frac{B_l}{l!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$. Vu que ce sont deux séries ayant un rayon de convergence plus grand que zéro, le produit a encore un rayon de convergence plus grand que zéro et nous pouvons prendre le produit des séries :

$$f'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) = f(x) e^x. \quad (16.290)$$

Étudions l'équation différentielle $y' = ye^x$. D'abord par un argument en lacet de chaussure¹⁹, une solution est de classe C^∞ . Ensuite si une solution est non nulle, elle est de signe constant. En effet si $y(x_0) < 0$ et $y(x_1) = 0$ (on choisit x_1 minimum pour cette propriété parmi les nombres plus grands que x_0) alors il existe²⁰ un $t \in]x_0, x_1[$ tel que $y'(t) > 0$, ce qui donnerait $y(t) > 0$, ce qui contredirait la minimalité de x_1 .

Nous prétendons²¹ que cette équation différentielle a un espace de solutions de dimension 1. En effet, si $y' = ye^x$ et $g' = ge^x$ alors en posant $\varphi = y/g$ nous obtenons tout de suite $\varphi' = 0$, ce qui signifie que φ est constante, ou encore que y et g sont multiples l'un de l'autre.

Si nous en trouvons une non nulle par n'importe quel moyen, c'est bon. Une solution étant dérivable est continue, donc l'équation $f' = fe^x$ nous indique que f' est continue. Une solution non nulle va automatiquement accepter un petit voisinage sur lequel la manipulation suivante a un sens :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x, \quad (16.291)$$

donc $\ln(|f(x)|) = e^x + C$ et $f(x) = Ke^{e^x}$ pour une certaine constante. Il est vite vérifié que cette fonction est une solution de l'équation différentielle $y'(x) = y(x)e^x$ et par unicité, toutes les solutions sont de cette forme. Autrement dit, l'espace des solutions est l'espace vectoriel $\text{Span}\{x \mapsto e^{e^x}\}$. Étant donné que $f(0) = 0$, nous devons choisir $K = \frac{1}{e}$ et donc

$$f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = e^{e^x - 1}. \quad (16.292)$$

- (3) Nous commençons par écrire la fonction f comme une série de puissance. La partie simple du calcul : pour $x \in]-R, R[$, nous avons

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(kx)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l x^l}{k! l!}. \quad (16.293)$$

Notons que cela n'est pas une série de puissance en x parce qu'il y a la double somme. Nous allons inverser les sommes au moyen du théorème de Fubini sous la forme du corollaire 13.79. Pour cela nous considérons la fonction

$$a: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ (k, l) \mapsto \frac{(kx)^l}{k! l!} \quad (16.294)$$

18. C'est ici qu'on utilise la convention $B_0 = 0$ et ça aura une influence sur le choix de la constante K plus bas.

19. Genre ce qui est fait pour prouver 16.49(4).

20. Théorème de Rolle 11.98.

21. Ou alors on utilise le théorème 24.10 avec $M(x) = e^x$ dans les cas $n = 1$ et $I =]-R, R[$.

et nous mettons la mesure de comptage²² sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Nous commençons donc à vérifier l'intégrabilité variable par variable de $|a|$:

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} |a(k, l)| dm(l) \right) dm(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(k|x|)^l}{l!} \quad (16.295a)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{k|x|}. \quad (16.295b)$$

Nous devons montrer que cette dernière somme va bien. Pour cela nous posons $u_k = \frac{e^{k|x|}}{k!}$ et nous remarquons que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \rightarrow 0$. Donc la double intégrale (16.295) converge, ergo $a \in L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini 13.78 pour inverser les ~~sommes intégrales~~ sommes dans l'équation 16.293 :

$$\frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} (kx)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{e} \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!} \right) x^l. \quad (16.296)$$

Cela est un développement en série entière pour la fonction $\frac{1}{e} e^{e^x}$, dont nous savions déjà le développement (16.281) ; par unicité du développement nous pouvons identifier les coefficients :

$$B_l = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!}. \quad (16.297)$$

- (4) Le développement (16.293) étant en réalité valable pour tout x et tous les calculs subséquents l'étant aussi, le développement

$$e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (16.298)$$

est en fait valable pour tout x , ce qui donne à la série entière un rayon de convergence infini. $\square$

16.6 Lemme de Borel

16.6.1 Fonctions plateaux

Soient $a < b < c < d$ dans $\mathbb{R}$. Nous voulons trouver une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs positives telle que

- (1) $f(x) = 1$ si $x \in [b, c]$
- (2) $\text{supp}(f) \subset [a, d]$.

Nous commençons par l'exemple classique de fonction C^∞ qui n'est pas nulle partout :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16.299)$$

Il est facile de vérifier que φ est de classe C^∞ parce que $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} P(x) = 0$ pour tout polynôme P . De plus c'est une fonction qui vaut zéro sur $]-\infty, 0]$. Ensuite nous construisons la fonction

$$\psi_m(x) = 1 - \frac{\int_0^x \varphi(t) dt}{\int_0^m \varphi(t) dt} = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > m \\ \text{positive} & \text{si } x \in [0, m]. \end{cases} \quad (16.300)$$

22. Nous passons outre les avertissements et menaces de Arnaud Girand.

Cette fonction est encore de classe C^∞ . À partir de là nous considérons les fonctions

$$f_1(x) = \psi_{d-c}(x-c) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c \\ 0 & \text{si } x > d \\ \text{positive} & \text{si } x \in [c, d]. \end{cases} \quad (16.301a)$$

$$f_2(x) = \psi(b-a)(b-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \\ \text{positive} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}, \quad (16.301b)$$

et finalement la fonction suivante répond à la question des fonctions plateaux sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x). \quad (16.302)$$

Une variation sur le même thème est l'existence de fonctions infiniment dérivables à support compact, c'est à dire des fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Ces espaces ne sont pas vides, par exemple nous avons la fonction

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{si } x \in B(0, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16.303)$$

16.6.2 Le lemme de Borel

Lemme 16.83 (Lemme de Borel[1]).

Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$ et telle que $\text{supp}(\varphi) \subset]-1, 1[$.

Nous commençons par considérer une suite de réels strictement positifs (λ_k) dont nous fixerons une valeur précise plus tard, et nous posons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x) \frac{a_k}{k!} x^k. \quad (16.304)$$

Nous allons étudier la convergence et les propriétés de $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

Calculons (formellement) la m^e dérivée de f_k :

$$f_k^{(m)}(x) = \frac{a_k}{k!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \lambda_k^{m-l} \varphi^{(m-l)}(\lambda_k x) (x^k)^{(l)} \quad (16.305a)$$

$$= a_k \sum_{l=0}^m \binom{l}{m} \lambda_k^{m-l} \varphi^{(m-l)}(\lambda_k x) \frac{x^{k-l}}{(k-l)!}. \quad (16.305b)$$

Notons que nous travaillons à m fixé et que nous ne nous intéressons qu'aux termes avec k assez grand ; nous pouvons donc supposer $k \geq m$. De toutes façons pour $\sum_{k=0}^m f_k$, on a la classe C^∞ , et la permutation de la somme avec tout ce qu'on veut. Vu que φ est continue à support compact nous pouvons poser

$$M_m = \max_{0 \leq j \leq m} \|\varphi^{(j)}\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq m} \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(x)|. \quad (16.306)$$

Nous continuons en nous fixant un $x \in \mathbb{R}$ et un $k \geq m$.

Si $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$, alors $\varphi^{(m)}(\lambda_k x) = 0$ parce que $\lambda_k x$ est strictement hors du support de φ qui est $]-1, 1[$. Donc pour $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$.

Si par contre $|x| \leq \frac{1}{\lambda_k}$, nous avons les majorations

$$|f_k^{(m)}(x)| \leq |a_k| \sum_{l=0}^m \binom{l}{m} |\lambda_k|^{m-l} \underbrace{\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)}_{\leq M_m} \frac{1}{(k-l)!} \underbrace{|x|^{k-l}}_{\leq (1/\lambda_k)^{k-l}} \quad (16.307a)$$

$$\leq |a_k| M_m |\lambda_k|^{m-k} \frac{1}{(k-m)!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \quad (16.307b)$$

$$\leq \frac{|a_k| M_m |\lambda_k|^{m-k} 2^m}{(k-m)!} \quad (16.307c)$$

$$= \frac{|a_k| M_m 2^m}{(k-m)! |\lambda_k|^{k-m}} \quad (16.307d)$$

où pour faire disparaître la somme de coefficients binomiaux, nous avons remarqué que $\sum_{l=0}^m \binom{m}{l}$ est le nombre total de termes dans le développement de $(a+b)^m$, c'est à dire 2^m . Nous voulons, pour m fixé, étudier la convergence de la somme de cela. Notons que le 2^m n'a en particulier strictement aucune importance parce qu'on travaille à m fixé.

Nous fixons maintenant la valeur des λ_k :

$$\lambda_k = \max\{|a_k|, 1\}. \quad (16.308)$$

Avec cela, en nous souvenant que nous n'étudions que les termes $k > m$, le dénominateur de (16.307d) est réellement croissant en k , donc nous avons la majoration

$$|f_k^{(m)}(x)| \leq \frac{M_m 2^m}{(k-m)!}. \quad (16.309)$$

Au final nous avons

$$\|f_k^{(m)}\|_{\infty} \leq \frac{2^m M_m}{(k-m)!}. \quad (16.310)$$

Et la somme de cela converge sans difficultés. Donc la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(x) \quad (16.311)$$

converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors permuter la somme et la dérivation par le théorème 16.18. Donc

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)} \quad (16.312)$$

est continue. En particulier, pour évaluer en zéro, on peut faire

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0). \quad (16.313)$$

Nous avons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x) \frac{a_k}{k!} x^k. \quad (16.314)$$

Pour calculer la dérivée en zéro, il suffit de la calculer sur un voisinage sur lequel $\varphi(\lambda_k x)$ est la constante 1 ; un tel voisinage existe pour tout k . À ce moment le calcul est classique :

$$f_k^{(m)}(x) = \begin{cases} a_k & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16.315)$$

Finalement nous avons bien

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0) = a_m. \quad (16.316)$$

□

Remarque 16.84.

Pour prouver le lemme de Borel, la première chose qui passe par la tête est la fonction toute simple

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k. \quad (16.317)$$

Évidemment si on calcule les dérivées successives de cette fonction, nous trouvons les bons résultats. Le problème est la convergence. Rien qu'en prenant $a_k = k!k^k$, la série ne converge pour aucun x positif. L'idée de multiplier chacun de f_k par une fonction plateau sur un petit intervalle autour de zéro a plusieurs avantages. D'abord on conserve les dérivées correctes parce qu'on ne touche pas à la valeur des f_k sur un petit voisinage. Ensuite cela ne modifie pas la continuité ; et enfin en multipliant par $\varphi(\lambda_k x)$, ça calme méchamment les divergences parce que $\lambda_k x$ passe vite au dessus de 1 (et donc en dehors du support de φ) si λ_k est grand. D'où le fait qu'il soit normal que les λ_k soient de l'ordre des a_k .

16.7 Densité des polynômes

16.7.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Comme presque tous les théorèmes importants, le théorème de Stone-Weierstrass possède de nombreuses formulations à divers degrés de généralité.

- Le lemme 16.85 le donne pour la racine carrée.
- Le théorème 16.89 donne la densité des polynômes dans les fonctions continues sur un compact.
- Le théorème 16.88 est une généralisation qui donne la densité uniforme d'une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ dès que X sépare les points.
- Le lemme 20.1 est une version pour les polynômes trigonométriques. Le lemme suivant est un cas particulier du théorème 16.89, mais nous en donnons une démonstration indépendante afin d'isoler la preuve de la généralisation 16.88. Une version pour les polynômes trigonométrique sera donnée dans le lemme 20.1.

Note : le lemme 16.85 est utilisé dans la démonstration du théorème 16.88 ; c'est pour cela que nous l'avons isolé.

Lemme 16.85.

Il existe une suite de polynômes sur $[0, 1]$ convergent uniformément vers la fonction racine carrée.

Démonstration. Nous donnons cette suite par récurrence :

$$P_0(t) = 0 \quad (16.318a)$$

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2). \quad (16.318b)$$

Nous commençons par montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $P_n(t) \in [0, \sqrt{t}]$. Pour P_0 , c'est évident. Ensuite nous avons

$$P_{n+1}(t) - \sqrt{t} = P_n(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2) \quad (16.319a)$$

$$= (P_n(t) - \sqrt{t}) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t - P_n(t)^2}{P_n(t) - \sqrt{t}} \right) \quad (16.319b)$$

$$= (P_n(t) - \sqrt{t}) \left(1 - \frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2} \right) \quad (16.319c)$$

$$\leq 0 \quad (16.319d)$$

parce que $\sqrt{t} \leq 1$ et $P_n(t) \leq 1$ par hypothèse de récurrence.

Nous savons au passage que $P_n(t)$ est une suite réelle croissante parce que $t - P_n(t)^2 \geq t - (\sqrt{t})^2 = 0$. La suite $P_n(t)$ est donc croissante et majorée par $\sqrt{t}$; elle converge donc. Les candidats limites sont déterminés par l'équation

$$\ell = \ell + \frac{1}{2}(t - \ell^2), \quad (16.320)$$

dont les solutions sont $\ell = \pm\sqrt{t}$. La suite étant positive, nous avons une convergence ponctuelle de P_n vers la racine carrée. Cette suite étant une suite croissante de fonctions continues sur un compact, convergeant ponctuellement vers une fonction continue, la convergence est uniforme par le théorème de Dini 11.234. $\square$

Lemme 16.86.

Soit K , un compact de $\mathbb{R}$ et f_n une suite de fonctions sur K convergeant uniformément vers f . Soit $g: X \rightarrow K$ une fonction depuis un espace topologique X . Alors $f_n \circ g$ converge uniformément vers $f \circ g$.

Démonstration. En effet, pour tout $x \in X$ nous avons

$$\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(g(x)) - f(g(x))\| \leq \|f_n - f\|_\infty. \quad (16.321)$$

Par conséquent, si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de choisir n de telle sorte à avoir $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ et nous avons $\|(f_n \circ g) - (f \circ g)\|_\infty \leq \epsilon$. $\square$

Définition 16.87.

Nous disons qu'une algèbre A de fonctions sur un espace X **sépare les points** de X si pour tout $x_1 \neq x_2$ il existe $g \in A$ telle que $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer une forme nettement plus générale du théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 16.88 (Stone-Weierstrass[202]).

Soit X , un espace compact et Hausdorff et A une sous algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si A sépare les points de X .

Nous pouvons remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ si de plus l'algèbre A est auto-adjointe : $g \in A$ implique $\bar{g} \in A$.

Démonstration. Nous allons écrire la démonstration en plusieurs étapes (dont la première est le lemme 16.85).

Première étape Pour tout $x \neq y \in X$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, vu que A sépare les points nous pouvons considérer une fonction $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$ et ensuite poser

$$f(z) = \alpha + \frac{\alpha - \beta}{g(y) - g(x)}(g(z) - g(x)). \quad (16.322)$$

Les constantes faisant partie de A , cette fonction f est encore dans A .

Seconde étape Pour tout n -uples de fonctions $f_1, \dots, f_n$ dans $\bar{A}$, les fonctions $\min(f_1, \dots, f_n)$ et $\max(f_1, \dots, f_n)$ sont dans $\bar{A}$.

Nous le démontrons pour $n = 2$; le reste allant évidemment par récurrence. Soient $f, g \in \bar{A}$. Étant donné que

$$\max(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} \quad (16.323a)$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2}, \quad (16.323b)$$

il suffit de montrer que si $f \in \bar{A}$ alors $|f| \in \bar{A}$. Si f est nulle, c'est évident ; supposons que $f \neq 0$ et posons $M = \|f\|_\infty \neq 0$. Pour tout $x \in X$ nous avons

$$\frac{f(x)^2}{M^2} \in [0, 1]. \quad (16.324)$$

Nous considérons alors la suite

$$h_n = P_n \circ \frac{f^2}{M^2} \quad (16.325)$$

où P_n est une suite de polynômes convergent uniformément vers la racine carré (voir lemme 16.85). Le lemme 16.86 nous assure que h_n converge uniformément vers $\frac{|f|}{M}$ dans $C(X, \mathbb{R})$. Étant donné que $\bar{A}$ est également une algèbre, h_n est dans $\bar{A}$ pour tout n et la limite s'y trouve également (pour rappel, la fermeture $\bar{A}$ est celle de la topologie de la convergence uniforme).

Troisième étape Soit $\epsilon > 0$, $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $x \in X$. Il existe une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) \end{cases} \quad (16.326a)$$

$$\begin{cases} g_x(y) \leq f(y) + \epsilon \end{cases} \quad (16.326b)$$

pour tout $y \in X$.

Soit $z \in X \setminus \{x\}$ et une fonction h_z telle que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$. Une telle fonction existe par une des étapes précédentes. Étant donné que f et h_z sont continues, il existe un voisinage ouvert V_z de z sur lequel

$$h_z(y) \leq f(y) + \epsilon \quad (16.327)$$

pour tout $y \in V_z$. Nous pouvons sélectionner un nombre fini de points $z_1, \dots, z_n$ tels que les ouverts $V_{z_1}, \dots, V_{z_n}$ recouvrent X (parce que X est compact, de tout recouvrement par des ouverts, nous extrayons un sous recouvrement fini.). Nous posons

$$g_x = \min(h_{z_1}, \dots, h_{z_n}) \in \bar{A}. \quad (16.328)$$

Si $y \in X$, nous sélectionnons le i tel que $h_{z_i}(y) \leq f(y) + \epsilon$ et nous avons

$$g_x(y) \leq h_{z_i}(y) \leq f(y) + \epsilon. \quad (16.329)$$

Étape finale Soit $\epsilon > 0$ et $f \in C(X, \mathbb{R})$. Pour chaque $x \in X$ nous considérons une fonction $g_x \in \bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x) = f(x) \end{cases} \quad (16.330a)$$

$$\begin{cases} g_x(y) \leq f(y) + \epsilon \end{cases} \quad (16.330b)$$

pour tout $y \in X$. Les fonctions f et g_x sont continues, donc il existe un voisinage ouvert W_x de x sur lequel

$$g_x(y) \geq f(y) - \epsilon. \quad (16.331)$$

De ces W_x nous extrayons un sous recouvrement fini de X : $W_{x_1}, \dots, W_{x_m}$ et nous posons

$$\varphi = \max(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}) \in \bar{A}. \quad (16.332)$$

Si $y \in X$, il existe un i tel que

$$\varphi(y) \geq g_{x_i}(y) \geq f(y) - \epsilon. \quad (16.333)$$

La première inégalité est le fait que φ est le maximum des g_{x_k} , et la seconde est le choix de i . Donc pour tout $y \in X$ nous avons

$$f(y) - \epsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \epsilon. \quad (16.334)$$

La première inégalité est ce que l'on vient de faire. La seconde est le fait que pour tout i nous avons $g_{x_i}(y) \leq f(y) + \epsilon$; le fait que φ soit le maximum sur les i ne change pas l'inégalité.

Le fait que les inégalités (16.334) soient vraies pour tout $y \in X$ signifie que $\|\varphi - f\|_\infty \leq \epsilon$, et donc que $f \in \bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Tout cela prouve que $C(X, \mathbb{R}) \subset \bar{A}$. L'inclusion inverse est le fait que $C(X, \mathbb{R})$ est fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, étant donné qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. $\square$

Le théorème suivant est un des énoncés les plus classiques de Stone-Weierstrass. Il découle évidemment du théorème général 16.88 (encore qu'il faut alors bien comprendre qu'il faut traiter la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ séparément). Il en existe cependant une preuve indépendante.

Théorème 16.89.

Soit f , une fonction continue de l'intervalle compact $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|P - f\|_\infty < \epsilon$.

Autrement dit, les polynômes sont denses dans $C[a, b]$ pour la norme uniforme.

Corollaire 16.90.

Si $X \subset \mathbb{R}$ est compact et de mesure finie²³, alors l'ensemble des polynômes est denses dans $(C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

Démonstration. Si f est une fonction dans $C(X, \mathbb{R})$ et si $\epsilon \geq 0$ est donné alors nous pouvons considérer un polynôme P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \epsilon$. Dans ce cas nous avons

$$\|f - P\|_2^2 = \int_X |f(x) - P(x)|^2 dx \leq \int_X \epsilon^2 dx = \epsilon^2 \mu(X) \quad (16.335)$$

où $\mu(X)$ est la mesure de X (finie par hypothèse). $\square$

16.7.2 Primitive de fonction continue

Proposition 16.91 ([203]).

Soit un intervalle compact K de $\mathbb{R}$ et une suite (f_n) de fonctions continues sur K telles que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$. Si chacune des fonctions f_n a une primitive sur K alors f également.

Démonstration. Soit $x_0 \in K$ et les primitives F_n choisies²⁴ pour avoir $F'_n f_n$ et $F_n(x_0) = 0$. Nous allons voir que (F_n) est une suite de Cauchy dans $(K, \|\cdot\|_\infty)$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in K$. Nous avons

$$\|F_n - F_m\|_\infty \leq \|F_n(x) - F_m(x)\| \quad (16.336a)$$

$$= \|(F_n - F_m)(x)\| \quad (16.336b)$$

$$\leq \|F'_n - F'_m\|_{[x, x_0]} \|x - x_0\| \quad (16.336c)$$

où nous avons utilisé le théorème des accroissements finis 6.231. Vu que $x \in K$ et que K est borné, $\|x - x_0\|$ est majoré par $\text{diam}(K)$ et

$$\|F_n - F_m\|_K \leq \|f_n - f_m\|_K \text{diam}(K). \quad (16.337a)$$

Vu que (f_n) est de Cauchy, si n et m sont assez grands, cela tend vers zéro. La suite (F_n) converge donc vers une certaine fonction F .

Le théorème 11.235 nous permet de permuter la limite et la dérivée pour conclure que $F' = f$ et donc que f a une primitive sur K . $\square$

Proposition 16.92 ([203]).

Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet une primitive sur tout compact de I . Alors f a une primitive sur I .

23. Dans $\mathbb{R}$ cette hypothèse est évidemment superflue par rapport à l'hypothèse de compacité; mais ça suggère des généralisations...

24. Les fonctions F_n étant dérivables sont continues.

Démonstration. Nous considérons une suite exhaustive²⁵ de compacts K_n pour I et $x_0 \in K_0$. Nous considérons aussi F_n la primitive de f sur K_n telle que $F_n(x_0) = 0$ (possible parce que $x_0 \in K_n$ pour tout n). Les fonctions F_n sont des restrictions les une des autres, et nous pouvons définir

$$\begin{aligned} F: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_n(x) \text{ si } x \in K_n. \end{aligned} \quad (16.338)$$

Nous avons évidemment $F(x_0) = 0$ et nous allons prouver que F est une primitive de f sur I . Soit $x \in I$ vu que I est ouvert, nous pouvons choisir n_0 tel que $x \in \text{Int}(K_{n_0})$. Les fonctions F et F_{n_0} sont égales sur K_{n_0} et donc sur un ouvert autour de x . Par conséquent F est dérivable en x et $F'(x) = F'_{n_0}(x) = f(x)$. $\square$

Théorème 16.93.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur I admet une primitive²⁶ sur I .

Démonstration. Sur chaque compact de I , la fonction f est limite uniforme de polynômes²⁷ (théorème de Stone-Weierstrass 16.89). Donc f est primitivable sur tout compact de I (proposition 16.91) et donc sur I par la proposition 16.92. $\square$

Proposition 16.94.

Soit I un intervalle borné ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$.

Démonstration. Si une primitive H de h est à support compact, alors

$$\int_I h = H(b) - H(a) = 0 - 0 = 0. \quad (16.339)$$

Pas de problèmes dans ce sens.

Supposons maintenant que $\int_I h = 0$. Le fait que h admette une primitive dans $C^\infty(I)$ est évident : toute fonction continue admet une primitive²⁸. Soit H une telle primitive et $\tilde{H} = H - H(b)$. Alors $\tilde{H}(b) = 0$ et

$$\tilde{H}(a) = H(a) - H(b) = - \int_I h = 0. \quad (16.340)$$

Nous rappelons que le support d'une fonction est la fermeture de l'ensemble des points de non-annulation.

Supposons que le support de h soit inclus dans $[m, M] \subset]a, b[$. En prenant des nombres m' et M' tels que $a < m' < m$ et $M < M' < b$ (nous insistons sur le caractère strict de ces inégalités), la fonction h est nulle sur $[a, m']$ et sur $[M', b]$; la fonction $\tilde{H}$ doit donc y être constante. Mais nous avons déjà vu que $\tilde{H}(a) = \tilde{H}(b) = 0$. Donc l'ensemble des points sur lesquels $\tilde{H}$ n'est pas nul est inclus à $]m', M'[,$ et donc est strictement (des deux côtés) inclus à I . $\square$

16.7.3 Théorème taubérien de Hardy-Littlewood

Un théorème **taubérien** est un théorème qui compare les modes de convergence d'une série.

Lemme 16.95.

Si f et g sont des fonctions continues, alors $s(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ est également une fonction continue.

²⁵. Voir le lemme 5.140.

²⁶. Définition 11.102.

²⁷. Si tu veux te passer de Stone-Weierstrass, tu peux prouver que toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions affines par morceaux, par exemple. Voir [203].

²⁸. Théorème 16.93.

Démonstration. Soit x_0 et prouvons que s est continue en x_0 . Si $f(x_0) \neq g(x_0)$ (supposons $f(x_0) > g(x_0)$ pour fixer les idées), alors nous avons un voisinage de x_0 sur lequel $f > g$ et alors $s = f$ sur ce voisinage et la continuité provient de celle de f .

Si au contraire $f(x_0) = g(x_0) = s(x_0)$ alors si (a_n) est une suite tendant vers x_0 , nous prenons N tel que $|f(a_n) - f(x_0)| \leq \epsilon$ pour tout $n > N$ et M tel que $|g(a_n) - g(x_0)| \leq \epsilon$ pour tout $n > M$. Alors pour tout $n > \max\{N, M\}$ nous avons

$$|s(a_n) - s(x_0)| \leq \epsilon, \quad (16.341)$$

d'où la continuité de s en x_0 . $\square$

La proposition suivante dit que si une fonction connaît un saut, alors on peut le lisser par une fonction continue.

Proposition 16.96.

Soit f continue sur $[a, x_0[$ et sur $[x_0, b]$ avec $f(x_0^-) < f(x_0)$. En particulier nous supposons que $f(x^-)$ existe et est finie. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue s telle que sur $[a, b]$ on ait $s \leq f$ et

$$\int_a^b s(x) - f(x) dx \leq \epsilon. \quad (16.342)$$

Démonstration. Nous notons A la taille du saut :

$$A = f(x_0) - f(x_0^-). \quad (16.343)$$

Quitte à changer a et b , nous pouvons supposer que

$$f(x) < f(x_0) + \frac{A}{3} \quad (16.344)$$

pour $x \in [a, x_0[$ et

$$f > f(x_0) + \frac{2A}{3} \quad (16.345)$$

pour $x \in [x_0, b]$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de faire ce choix.

Soit $m(x)$ la droite qui joint le point $(x_0 - \epsilon, f(x_0 - \epsilon))$ au point $(x_0, f(x_0^+))$. Nous posons

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < x_0 - \epsilon \\ \max\{m(x), f(x)\} & \text{si } x_0 - \epsilon \leq x \leq x_0 \\ f(x) & \text{si } x > x_0. \end{cases} \quad (16.346)$$

En vertu des différents choix effectués, c'est une fonction continue. En effet

$$s(x_0 - \epsilon) = \max\{f(x_0 - \epsilon), f(x_0, \epsilon)\} = f(x_0 - \epsilon) \quad (16.347)$$

et

$$s(x_0) = \max\{m(x_0), f(x_0^+)\} = f(x_0^+) \quad (16.348)$$

parce que $m(x_0) = f(x_0^+)$. En ce qui concerne l'intégrale, si nous posons

$$M = \sup_{x, y \in [a, b]} |f(x) - f(y)|, \quad (16.349)$$

nous avons

$$\int_a^b s - f = \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0} s - f \leq \epsilon M. \quad (16.350)$$

$\square$

Lemme 16.97.

Pour tout polynôme P , nous avons la formule

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(x) dx. \quad (16.351)$$

Démonstration. D'abord pour $P = 1$, la formule se réduit à la série harmonique connue. Ensuite nous prouvons la formule pour le polynôme $P = X^k$ et la linéarité fera le reste pour les autres polynômes. Nous avons

$$(1-x) \sum_n x^n x^{kn} = (1-x) \sum_n (x^{1+k})^n = \frac{1-x}{1-x^{1+k}} = \frac{1}{1+x+\dots+x^k}. \quad (16.352)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_n x^n P(x^n) = \frac{1}{1+k}. \quad (16.353)$$

Par ailleurs, c'est vite vu que

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}. \quad (16.354)$$

□

Théorème 16.98 (Hardy-Littlewood[204]).

Soit (a_n) une suite réelle telle que

- (1) $\frac{a_n}{n}$ tends vers une constante,
- (2) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 ,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = l$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.

Démonstration. Quitte à prendre la suite $b_0 = a_0 - l$ et $b_n = a_n$, on peut supposer $l = 0$.

Soit Γ l'ensemble des fonctions

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (16.355)$$

telles que

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma(x^n)$ converge pour $0 \leq x < 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n \gamma(x^n) = 0$.

Ce Γ est un espace vectoriel.

Les polynômes sont dans Γ Soit $\gamma(t) = t^s$. Pour $0 \leq x < 1$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{ns} < \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (16.356)$$

Donc la condition de convergence est vérifiée. En ce qui concerne la limite,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{ns} = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x^s) = 0 \quad (16.357)$$

parce que par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 0$.

Définition de la fonction qui va donner la réponse Nous considérons la fonction $g = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$, c'est à dire

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (16.358)$$

Nous montrons que si $g \in \gamma$, alors le théorème est terminé. Si $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq x^n < 1/2$ dès que

$$n > -\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \quad (16.359)$$

avec une note comme quoi $\ln(x) < 0$, donc la fraction est positive. Nous désignons par N_x la partie entière de ce n adapté à x . L'idée est que la fonction $g(x^n)$ est la fonction indicatrice de $0 \leq n \leq N_x$, et donc

$$\sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n. \quad (16.360)$$

Mais si $x \rightarrow 1^-$, alors $N_x \rightarrow \infty$, donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{N_x} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n g(x^n), \quad (16.361)$$

et cela fait zéro si $g \in \Gamma$.

Approximation de g par des polynômes Nous considérons la fonction

$$h(t) = \frac{g(t) - t}{t(1-t)} = \begin{cases} \frac{1}{t-1} & \text{si } t \in [0, 1/2[\\ \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (16.362)$$

La seconde égalité est au sens du prolongement par continuité. La fonction h est une fonction non continue qui fait un saut de -2 à 2 en $x = 1/2$. En vertu de la proposition 16.96 (un peu adaptée), nous pouvons considérer deux fonctions continues s_1 et s_2 telles que

$$s_1 \leq h \leq s_2 \quad (16.363)$$

et

$$\int_0^1 s_2 - s_1 \leq \epsilon. \quad (16.364)$$

Notons que l'inégalité $s_1 \leq s_2$ doit être stricte sur au moins un petit intervalle autour de $x = 1/2$. Soient P_1 et P_2 , deux polynômes tels que $\|P_1 - s_1\|_\infty \leq \epsilon$ et $\|P_2 - s_2\|_\infty \leq \epsilon$ (ici la norme supremum est prise sur $[0, 1]$). C'est le théorème de Stone-Weierstrass (16.89) qui nous permet de le faire.

Nous posons aussi ²⁹

$$Q_1 = P_1 + \epsilon \quad (16.365a)$$

$$Q_2 = P_2 - \epsilon. \quad (16.365b)$$

Nous avons

$$\int_0^1 Q_1 - Q_2 \leq \int_0^1 Q_1 - P_1 + P_1 - P_2 + P_2 - Q_2. \quad (16.366)$$

Pour majorer cela, d'abord $Q_1 - P_1 = P_2 - Q_2 = \epsilon$, ensuite,

$$P_1 - P_2 = P_1 - s_1 + s_1 - s_2 + s_2 - P_2 \quad (16.367)$$

dans lequel nous avons $P_1 - s_1 \leq \epsilon$, $s_2 - P_2 \leq \epsilon$ et $\int_0^1 s_1 - s_2 \leq \epsilon$. Au final, nous posons $q = Q_2 - Q_1$ et nous avons

$$\int_0^1 q \leq 5\epsilon. \quad (16.368)$$

Enfin nous posons aussi

$$R_i(x) = x + x(1-x)Q_i. \quad (16.369)$$

29. À ce niveau, je crois qu'il y a une faute de frappe dans [204].

Ces polynômes vérifient $R_i(0) = 0$, $R_i(1) = 1$ et

$$R_1 \leq g \leq R_2 \quad (16.370)$$

parce que

$$Q_1 \leq P_1 \leq h \leq P_2 \leq Q_2 \quad (16.371)$$

et

$$t + t(1-t)Q_1 \leq \underbrace{t + t(1-t)h(t)}_{g(t)} \leq t + t(1-t)Q_2. \quad (16.372)$$

Preuve que g est dans Γ D'abord si $0 \leq x < 1$, $x^N < \frac{1}{2}$ pour un certain N , et alors $g(x^N) = 0$. Du coup la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^N a_n \quad (16.373)$$

est une somme finie qui converge donc.

D'autre part nous prenons M tel que $|a_n| < \frac{M}{n}$ pour tout n . Nous majorons $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n g(x^n)$ en utilisant R_1 . Mais vu que R_1 est un polynôme, nous pouvons dire que $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n)| \leq \epsilon$ en prenant $x \in [\lambda, 1[$ et λ assez grand. Nous avons :

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n) \right| + \underbrace{\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1(x^n) \right|}_{\leq \epsilon} \quad (16.374a)$$

$$\leq \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (g - R_1)(x^n) \quad (16.374b)$$

$$\leq \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (R_2 - R_1)(x^n) \quad (16.374c)$$

$$\leq \epsilon + M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} (Q_2 - Q_1)(x^n) \quad R_2 - R_1 = x(1-x)(Q_2 - Q_1) \quad (16.374d)$$

$$= \epsilon + M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \quad (16.374e)$$

$$\leq \epsilon + M(1-x) \sum_n x^n q(x^n) \quad (16.374f)$$

où la ligne (16.374f) provient d'une majoration sauvage de $1/n$ par 1 et de $1-x^n$ par $1-x$. Par le lemme 16.97, nous avons alors

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left| \sum_n a_n g(x^n) \right| \leq \epsilon + M \int_0^1 q \leq 6\epsilon. \quad (16.375)$$

□

16.7.4 Théorème de Müntz

Théorème 16.99 (Théorème de Müntz[205, 206, 207]).

Soit $C_0([0, 1])$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ ou $\|\cdot\|_2$ et une suite (α_n) strictement croissante de nombres positifs. Nous notons ϕ_{λ} la fonction $x \mapsto x^{\lambda}$.

Alors

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_n}\}} \quad (16.376)$$

est dense dans $C_0([0, 1])$ si et seulement si

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty. \quad (16.377)$$

Nous prouvons le théorème pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{R}^+$; nous notons $\Delta_N(m)$ la distance entre ϕ_m et $\text{Span}\{\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\}$. Cette distance peut être évaluée avec le déterminant de Gram (proposition 6.53)

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N})}{G(\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N})}. \quad (16.378)$$

Pour calculer cela nous avons besoin des produits scalaires³⁰

$$\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \int_0^1 x^{a+b} dx = \frac{1}{a+b+1}. \quad (16.379)$$

Pour avoir des notation plus compactes, nous notons $\alpha_0 = m$. Donc nous avons à calculer le déterminant

$$G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}) = \det \left(\frac{1}{\alpha_i + \alpha_j + 1} \right) \quad (16.380)$$

où $i, j = 0, \dots, N$. Nous reconnaissons un déterminant de Cauchy (proposition 6.54) en posant, dans $\frac{1}{\alpha_i + \alpha_j + 1}$, $a_i = \alpha_i$ et $b_j = \alpha_j + 1$. Étant donné que $b_j - b_i = \alpha_j - \alpha_i$, nous avons

$$G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}) = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq N} (\alpha_j - \alpha_i)^2}{\prod_{i=0}^N \prod_{j=0}^N (\alpha_i + \alpha_j + 1)}. \quad (16.381)$$

Nous séparons maintenant les termes où i ou j sont nuls. En ce qui concerne le dénominateur, il faut prendre tous les couples (i, j) avec i et j éventuellement égaux à zéro. Nous décomposant cela en trois paquets. Le premier est $(0, 0)$; le second est $(0, i)$ (chaque couple arrive en fait deux fois parce qu'il y a aussi $(i, 0)$); et le troisième sont les i, j tous deux différents de zéro :

$$(2m+1) \prod_{ij} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \prod_i (\alpha_i + m + 1)^2. \quad (16.382)$$

Notons que dans le produit central, le carré est contenu dans le fait qu'on écrit $\prod_{ij}$ et non $\prod_{i < j}$. Nous avons donc

$$G(\phi_m, \phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}) = \frac{\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \prod_i (\alpha_i - m)^2}{(2m+1) \prod_{ij} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \prod_i (\alpha_i + m + 1)^2}. \quad (16.383)$$

Le calcul de $G(\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N})$ est plus simple³¹ :

$$G(\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}) = \frac{\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{\prod_{ij} (\alpha_i + \alpha_j + 1)}. \quad (16.384)$$

En divisant l'un par l'autre il ne reste que les facteurs comprenant m et en prenant la racine carré,

$$\Delta_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^N \left| \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right|. \quad (16.385)$$

Nous passons maintenant à la preuve proprement dite. Supposons que $V = \text{Span}\{\phi_{\alpha_i}, i \in \mathbb{N}\}$ est dense. Si m est un des α_i , il peut évidemment être approché par les ϕ_{α_i} . Mais vue la densité de V , un ϕ_m avec $m \neq \alpha_i$ (pour tout i) alors ϕ_m peut également être arbitrairement approché par les ϕ_{α_i} , c'est à dire que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N(m) = 0. \quad (16.386)$$

Nous posons

$$u_n = \ln \left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1} \right) \quad (16.387)$$

30. C'est ici qu'on se particularise à la norme $\|\cdot\|_2$.

31. Je crois qu'il y a une faute de frappe dans le dénominateur de [205].

et nous prouvons que la série $\sum_n u_n$ diverge. En effet nous nous souvenons de la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, de telle sorte que la N^e somme partielle de $\sum_n u_n$ est

$$\ln \left(\frac{\alpha_1 - m}{\alpha_1 + m + 1} \cdot \dots \cdot \frac{\alpha_N - m}{\alpha_N + m + 1} \right) = \ln (\sqrt{2m+1} \Delta_N(m)), \quad (16.388)$$

qui tends vers $-\infty$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Si la suite (α_n) est majorée et plus généralement si nous n'avons pas $\alpha_n \rightarrow \infty$, alors évidemment la série $\sum_n \frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Nous supposons donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$. Nous avons aussi³²

$$u_n = \ln \left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1} \right) = \ln \left(1 - \frac{2m+1}{\alpha_n + m + 1} \right) \sim -\frac{2m+1}{\alpha_n}. \quad (16.389)$$

Une justification est donné à l'équation (11.55). Ce que nous avons surtout est

$$\sum_n u_n \sim -(2m+1) \sum_n \frac{1}{\alpha_n}. \quad (16.390)$$

Étant donné que la série de gauche diverge, celle de droite diverge³³.

Nous faisons maintenant le sens opposé : nous supposons que la série $\sum_n 1/\alpha_n$ diverge et nous nous posons

$$V = \text{Span}\{\phi_{\alpha_n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}. \quad (16.391)$$

Il suffit de prouver que $\phi_m \in \bar{V}$ pour tout m parce qu'un corollaire du théorème de Stone-Weierstrass 16.90 montre que $\text{Span}\{\phi_k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans C pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Si $\alpha_n \rightarrow \infty$, nous avons :

$$u_n \sim \frac{2m+1}{\alpha_n} \rightarrow 0 \quad (16.392)$$

et alors $\Delta_N(m) \rightarrow 0$. Dans ce cas nous avons immédiatement $\phi_m \in \bar{V}$.

Si par contre α_n ne tend pas vers l'infini, nous repartons de l'expression (16.385), nous posons $0 < \alpha = \sup_i \alpha_i$ et nous calculons :

$$\sqrt{2m+1} \Delta_N(m) = \prod_{i=1}^N \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1} \quad (16.393a)$$

$$\leq \prod_{i=1}^N \frac{\alpha_i + m}{\alpha_i + m + 1} \quad (16.393b)$$

$$= \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{\alpha_i + m + 1} \right) \quad (16.393c)$$

$$\leq \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1} \right) \quad (16.393d)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha + m + 1} \right)^N. \quad (16.393e)$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. □

Remarque 16.100.

Certaines sources³⁴ citent le théorème de Müntz comme ceci (avec un implicite que $\alpha_i \neq 0$) :

$$\overline{\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}} = C([0, 1]) \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty. \quad (16.394)$$

32. Je crois qu'il y a une faute de signe dans la dernière expression de [206].

33. Nous utilisons le fait que si $u_n = \sum v_n$ en tant que suites et si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ diverge.

34. Dont le rapport du jury 2014

Que penser de la présence explicite du 1 (c'est à dire de ϕ_0) ou non dans l'ensemble ?

Première chose : la présence éventuelle de ϕ_0 est la raison pour laquelle nous faisons commencer la somme à $i = 2$ et non $i = 1$. Dans le même ordre d'idée, si $\text{Span}\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en prenant n'importe quelle queue de suite, ça reste dense.

Prouvons donc l'énoncé (16.394). Si $\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense, alors en posant $\beta_1 = 0$, $\beta_i = \alpha_{i-1}$ notre théorème prouve que $\sum_{\beta=2}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} = +\infty$, cela est exactement que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$. Dans l'autre sens, si $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$, alors nous avons aussi $\sum_{i \geq 2} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$ et notre théorème dit que $\text{Span}\{\phi_{\alpha_i}\}$ est dense. A fortiori, $\text{Span}\{1, \phi_{\alpha_i}\}$ est dense.

Exemple 16.101

Nous savons depuis le théorème 12.120 que la somme des inverses des nombres premiers diverge.

△

16.8 Complétude avec la norme uniforme

Proposition 16.102 (Limite uniforme de fonctions continues).

Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Si une suite de fonctions $f_n: X \rightarrow Y$ continues converge uniformément, alors la limite est séquentiellement continue³⁵.

Démonstration. Soit $a \in X$ et prouvons que f est séquentiellement continue en a . Pour cela nous considérons une suite $x_n \rightarrow a$ dans X . Nous savons que $f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$ nous avons la majoration

$$\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|f(x_n) - f_k(x_n)\| + \|f_k(x_n) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f(x)\| \leq 2\|f - f_k\|_{\infty} + \|f_k(x_n) - f_k(x)\|. \quad (16.395)$$

Soit $\epsilon > 0$. Si nous choisissons k suffisamment grand le premier terme est plus petit que ϵ . Et par continuité de f_k , en prenant n assez grand, le dernier terme est également plus petit que ϵ . □

Proposition 16.103.

Soit X un espace topologique métrique (Y, d) un espace espace métrique complet. Alors les espaces

- (1) $(C_b^0(X, Y), \|\cdot\|_{\infty})$ des fonctions continues et bornées $X \rightarrow Y$,
- (2) $(C_0^0(X, Y), \|\cdot\|_{\infty})$ des fonctions continues et s'annulant à l'infini
- (3) $(C_0^k(X, Y), \|\cdot\|_{\infty})$ des fonctions de classe C^k et s'annulant à l'infini

sont complets.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $C(X, Y)$, c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ nous avons $\|f_k - f_l\|_{\infty} \leq \epsilon$. Cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme 11.232 et donc converge uniformément vers une fonction $f: X \rightarrow Y$. La continuité (ou l'aspect C^k) de la fonction f découle de la convergence uniforme et de la proposition 16.102 (c'est pour avoir l'équivalence entre la continuité séquentielle et la continuité normale que nous avons pris l'hypothèse d'espace métrique).

Si les fonction f_k sont bornées ou s'annulent à l'infini, la convergence uniforme implique que la limite le sera également. □

Notons que si X est compact, les fonctions continues sont bornées par le théorème 5.60 et nous pouvons simplement dire que $C^0(X, Y)$ est complet, sans préciser que nous parlons des fonctions bornées.

Lemme 16.104.

Soient A et B deux espaces compact. L'ensemble des fonctions continues de A vers B muni de la norme uniforme est complet.

35. Si X est métrique, alors c'est la continuité usuelle par la proposition 5.122.

Démonstration. Soit (f_k) une suite de Cauchy de fonctions dans $C(A, B)$. Pour chaque $x \in A$ nous avons

$$\|f_k(x) - f_l(x)\|_B \leq \|f_k - f_l\|_\infty, \quad (16.396)$$

de telle sorte que la suite $(f_k(x))$ est de Cauchy dans B et converge donc vers un élément de B . La suite de Cauchy (f_k) converge donc ponctuellement vers une fonction $f: A \rightarrow B$. Nous devons encore voir que cette fonction est continue ; ce sera l'uniformité de la norme qui donnera la continuité. En effet soit $x_n \rightarrow x$ une suite dans A convergent vers $x \in A$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|f(x_n) - f_k(x_n)\| + \|f_k(x_n) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f(x)\|. \quad (16.397)$$

En prenant k et n assez grands, cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut ; le premier et le troisième terme par convergence ponctuelle $f_k \rightarrow f$, le second terme par continuité de f_k . La suite $f(x_n)$ est donc convergente vers $f(x)$ et la fonction f est continue. $\square$

TODO : Revoir cette preuve à la lumière du critère de Cauchy uniforme 11.232.

16.9 Théorèmes de point fixe

16.9.1 Points fixes attractifs et répulsifs

Définition 16.105.

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi: I \rightarrow I$ une application C^1 . Soit a un point fixe de φ . Nous disons que a est **attractif** si il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a . Le point a sera dit **répulsif** si il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ diverge.

Lemme 16.106 ([208]).

Soit a un point fixe de φ .

- (1) Si $|\varphi'(a)| < 1$ alors a est attractif et la convergence est au moins exponentielle.
- (2) Si $|\varphi'(a)| > 1$ alors a est répulsif et la divergence est au moins exponentielle.

Démonstration. Si $|\varphi'(a)| < 1$ alors il existe k tel que $|\varphi'(a)| < k < 1$ et par continuité il existe un voisinage V de a dans lequel $|\varphi'(x)| < k$ pour tout $x \in V$. En utilisant le théorème des accroissements finis nous avons

$$|x_n - a| = |f(x_{n-1} - a)| \leq k|x_{n-1} - a| \quad (16.398)$$

et par récurrence

$$|x_n - a| \leq k^n |x_0 - a|. \quad (16.399)$$

Le cas $|\varphi'(a)| > 1$ se traite de façon similaire. $\square$

Remarque 16.107.

Dans le cas $|\varphi'(a)| = 1$, nous ne pouvons rien conclure. Si $\varphi(x) = \sin(x)$ nous avons $\sin(x) < x$ et le point $a = 0$ est attractif. A contrario, si $\varphi(x) = \sinh(x)$ nous avons $|\sinh(x)| > |x|$ et le point $a = 0$ est répulsif.

16.9.2 Picard

Définition 16.108.

Une application $f: (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ entre deux espaces métriques est une **contraction** si elle est **k-Lipschitz** pour un certain $0 \leq k < 1$, c'est à dire si pour tout $x, y \in X$ nous avons

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq k\|x - y\|_X. \quad (16.400)$$

Théorème 16.109 (Picard [209, 210]³⁶).

Soit X un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ une application contractante, de constante de Lipschitz k . Alors f admet un unique point fixe, nommé ξ . Ce dernier est donné par la limite de la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases} \quad \begin{matrix} (16.401a) \\ (16.401b) \end{matrix}$$

De plus nous pouvons majorer l'erreur par

$$\|x_n - \xi\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|. \quad (16.402)$$

Soit $r > 0$, $a \in X$ tels que la fonction f laisse la boule $K = \overline{B(a, r)}$ invariante (c'est à dire que f se restreint à $f: K \rightarrow K$). Nous considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = v_0 \in K \end{cases} \quad (16.403a)$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(v_n), v_{n+1} \in B(u_n, \epsilon). \end{cases} \quad (16.403b)$$

Alors le point fixe ξ de f est dans K et la suite (v_n) satisfait l'estimation

$$\|v_n - \xi\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|u_1 - u_0\| + \frac{\epsilon}{1-k}. \quad (16.404)$$

La première inégalité (16.402) donne une estimation de l'erreur calculable en cours de processus ; la seconde donne une estimation de l'erreur calculable avant de commencer.

Démonstration. Nous commençons par l'unicité du point fixe. Si a et b sont des points fixes, alors $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Par conséquent

$$\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|, \quad (16.405)$$

ce qui contredit le fait que f soit une contraction.

En ce qui concerne l'existence, notons que si la suite des x_n converge dans X , alors la limite est un point fixe. En effet en prenant la limite des deux côtés de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$, nous obtenons $\xi = f(\xi)$, c'est à dire que ξ est un point fixe de f . Notons que nous avons utilisé ici la continuité de f , laquelle est une conséquence du fait qu'elle soit Lipschitz. Nous allons donc porter nos efforts à prouver que la suite est de Cauchy (et donc convergente parce que X est complet). Nous commençons par prouver que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_0 - x_1\|$. En effet pour tout n nous avons

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (16.406)$$

La relation cherchée s'obtient alors par récurrence. Soient $q > p$. En utilisant une somme télescopique,

$$\|x_q - x_p\| \leq \sum_{l=p}^{q-1} \|x_{l+1} - x_l\| \quad (16.407a)$$

$$\leq \left(\sum_{l=p}^{q-1} k^l \right) \|x_1 - x_0\| \quad (16.407b)$$

$$\leq \left(\sum_{l=p}^{\infty} k^l \right) \|x_1 - x_0\|. \quad (16.407c)$$

Étant donné que $k < 1$, la parenthèse est la queue d'une série qui converge, et donc tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini.

36. Il me semble qu'à la page 100 de [210], l'hypothèse H1 qui est prouvée ne prouve pas Hn dans le cas $n = 1$. Merci de m'écrire si vous pouvez confirmer ou infirmer. La preuve donnée ici ne contient pas cette «erreur».

En ce qui concerne les inégalités (16.402), nous refaisons une somme télescopique :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \quad (16.408a)$$

$$\leq k^p \|x_n - x_{n-1}\| + k^{p-1} \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + k \|x_n - x_{n-1}\| \quad (16.408b)$$

$$= k(1 + \dots + k^{p-1}) \|x_n - x_{n-1}\| \quad (16.408c)$$

$$\leq \frac{k}{1-k} \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (16.408d)$$

En prenant la limite $p \rightarrow \infty$ nous trouvons

$$\|\xi - x_n\| \leq \frac{k}{1-k} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{k}{1-k} \|x_1 - x_0\|. \quad (16.409)$$

Nous passons maintenant à la seconde partie du théorème en supposant que f se restreigne en une fonction $f: K \rightarrow K$. D'abord K est encore un espace métrique complet, donc la première partie du théorème s'y applique et f y a un unique point fixe.

Nous allons montrer la relation par récurrence. Tout d'abord pour $n = 1$ nous avons

$$\|v_1 - \xi\| \leq \|v_1 - u_1\| + \|u_1 - \xi\| \leq \epsilon + \frac{k}{1-k} \|u_1 - u_0\| \quad (16.410)$$

où nous avons utilisé l'estimation (16.409), qui reste valable en remplaçant x_1 par u_1 ³⁷. Nous pouvons maintenant faire la récurrence :

$$\|v_{n+1} - \xi\| \leq \|v_{n+1} - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - \xi\| \quad (16.411a)$$

$$\leq \epsilon + k \|v_n - \xi\| \quad (16.411b)$$

$$\leq \epsilon + k \left(\frac{k^n}{1-k} \|u_1 - u_0\| + \frac{\epsilon}{1-k} \right) \quad (16.411c)$$

$$= \frac{\epsilon}{1-k} + \frac{k^{n+1}}{1-k} \|u_1 - u_0\|. \quad (16.411d)$$

□

Remarque 16.110.

Ce théorème comporte deux parties d'intérêts différents. La première partie est un théorème de point fixe usuel, qui sera utilisé pour prouver l'existence de certaines équations différentielles.

La seconde partie est intéressante d'un point de vue numérique. En effet, ce qu'elle nous enseigne est que si à chaque pas de calcul de la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ nous commettons une erreur d'ordre de grandeur ϵ , alors le procédé (la suite (v_n)) ne converge plus spécialement vers le point fixe, mais tend vers le point fixe avec une erreur majorée par $\epsilon/(k-1)$.

Remarque 16.111.

Au final l'erreur minimale qu'on peut atteindre est de l'ordre de ϵ . Évidemment si on commet une faute de calcul de l'ordre de ϵ à chaque pas, on ne peut pas espérer mieux.

Remarque 16.112.

Si f elle-même n'est pas contractante, mais si f^p est contractante pour un certain $p \in \mathbb{N}$ alors la conclusion du théorème de Picard reste valide et f a le même unique point fixe que f^p . En effet nommons x le point fixe de $f: f^p(x) = x$. Nous avons alors

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x), \quad (16.412)$$

ce qui prouve que $f(x)$ est un point fixe de f^p . Par unicité nous avons alors $f(x) = x$, c'est à dire que x est également un point fixe de f .

Si la fonction n'est pas Lipschitz mais presque, nous avons une variante.

37. Elle n'est cependant pas spécialement valable si on remplace x_n par u_n .

Proposition 16.113.

Soit E un ensemble compact³⁸ et si $f: E \rightarrow E$ est une fonction telle que

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad (16.413)$$

pour tout $x \neq y$ dans E alors f possède un unique point fixe.

Démonstration. La suite $x_{n+1} = f(x_n)$ possède une sous suite convergente. La limite de cette sous suite est un point fixe de f parce que f est continue. L'unicité est due à l'aspect strict de l'inégalité (16.413). $\square$

Théorème 16.114 (Équation de Fredholm).

Soit $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues. Alors si λ est suffisamment petit, l'équation

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (16.414)$$

admet une unique solution qui sera de plus continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions continues $[a, b] \rightarrow [a, b]$ muni de la norme uniforme. Le lemme 16.104 implique que $\mathcal{F}$ est complet. Nous considérons l'application $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ donnée par

$$\Phi(f)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x). \quad (16.415)$$

Nous montrons que Φ^p est une application contractante pour un certain p . Pour tout $x \in [a, b]$ nous avons

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)\| \quad (16.416a)$$

$$= |\lambda| \left\| \int_a^b K(x, y) (f(y) - g(y)) dy \right\| \quad (16.416b)$$

$$\leq |\lambda| \|K\|_\infty |b - a| \|f - g\|_\infty \quad (16.416c)$$

Si λ est assez petit, et si p est assez grand, l'application Φ^p est donc une contraction. Elle possède donc un unique point fixe par le théorème de Picard 16.109. $\square$

16.9.3 Brouwer**Proposition 16.115.**

Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Alors f accepte un point fixe.

Démonstration. En effet si nous considérons $g(x) = f(x) - x$ alors nous avons $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Si $g(a)$ ou $g(b)$ est nul, la proposition est démontrée ; nous supposons donc que $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$. La proposition découle à présent du théorème des valeurs intermédiaires 11.50. $\square$

Exemple 16.116

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue entre $[-1, 1]$ et $[-1, 1]$. Elle admet donc un point fixe. Par conséquent il existe (au moins) une solution à l'équation $\cos(x) = x$. $\triangle$

Proposition 16.117 (Brouwer dans $\mathbb{R}^n$ version C^∞ via Stokes).

Soit B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ et $f: B \rightarrow B$ une fonction C^∞ . Alors f admet un point fixe.

38. Notez cette hypothèse plus forte

Démonstration. Supposons que f ne possède pas de points fixes. Alors pour tout $x \in B$ nous considérons la ligne droite partant de x dans la direction de $f(x)$ (cette droite existe parce que x et $f(x)$ sont supposés distincts). Cette ligne intersecte ∂B en un point que nous appelons $g(x)$. Prouvons que cette fonction est C^k dès que f est C^k (y compris avec $k = \infty$).

Le point $g(x)$ est la solution du système

$$\begin{cases} g(x) - f(x) = \lambda(x - f(x)) & (16.417a) \\ \|g(x)\|^2 = 1 & (16.417b) \\ \lambda \geq 0. & (16.417c) \end{cases}$$

En substituant nous obtenons l'équation

$$P_x(\lambda) = \|\lambda(x - f(x)) + f(x)\|^2 - 1 = 0, \quad (16.418)$$

ou encore

$$\lambda^2 \|x - f(x)\|^2 + 2\lambda(x - f(x)) \cdot f(x) + \|f(x)\|^2 - 1 = 0. \quad (16.419)$$

En tenant compte du fait que $\|f(x)\| < 1$ (pare que les images de f sont dans $\mathcal{B}$), nous trouvons que $P_x(0) \leq 0$ et $P_x(1) \leq 0$. De même $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_x(\lambda) = +\infty$. Par conséquent le polynôme de second degré P_x a exactement deux racines distinctes $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 \geq 1$. La racine que nous cherchons est la seconde. Le discriminant est strictement positif, donc pas besoin d'avoir peur de la racine dans

$$\lambda(x) = \frac{-(x - f(x)) \cdot f(x) + \sqrt{\Delta_x}}{\|x - f(x)\|^2} \quad (16.420)$$

où

$$\Delta_x = 4\left((x - f(x)) \cdot f(x)\right)^2 - 4\|x - f(x)\|^2(\|f(x)\|^2 - 1). \quad (16.421)$$

Notons que la fonction $\lambda(x)$ est C^k dès que f est C^k ; et en particulier elle est C^∞ si f l'est.

En résumé la fonction g ainsi définie vérifie deux propriétés :

- (1) elle est C^∞ ;
- (2) elle est l'identité sur ∂B .

La suite de la preuve consiste à montrer qu'une telle rétraction sur B ne peut pas exister³⁹.

Nous considérons une forme de volume ω sur ∂B : l'intégrale de ω sur ∂B est la surface de ∂B qui est non nulle. Nous avons alors

$$0 < \int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} g^* \omega = \int_B d(g^* \omega) = \int_B g^*(d\omega) = 0 \quad (16.422)$$

Justifications :

- L'intégrale $\int_{\partial B} \omega$ est la surface de ∂B et est donc non nulle.
- La fonction g est l'identité sur ∂B . Nous avons donc $\omega = g^* \omega$.
- Le lemme 13.127.
- La forme ω est de volume, par conséquent de degré maximum et $d\omega = 0$.

□

Un des points délicats est de se ramener au cas de fonctions C^∞ . Pour la régularisation par convolution, voir [211]; pour celle utilisant le théorème de Weierstrass, voir [212].

Théorème 16.118 (Brouwer dans $\mathbb{R}^n$ version continue).

Soit B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ et $f: B \rightarrow B$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe.

³⁹. Notons qu'il n'existe pas non plus de rétractions continues sur B , mais pour le montrer il faut utiliser d'autres méthodes que Stokes, ou alors présenter les choses dans un autre ordre.

Démonstration. Nous commençons par définir une suite de fonctions

$$f_k(x) = \frac{f(x)}{1 + \frac{1}{k}}. \quad (16.423)$$

Nous avons $\|f_k - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+k}$ où la norme est la norme uniforme sur B . Par le théorème de Weierstrass 16.88 il existe une suite de fonctions C^∞ g_k telles que

$$\|g_k - f_k\|_\infty \leq \frac{1}{1+k}. \quad (16.424)$$

Vérifions que cette fonction g_k soit bien une fonction qui prend ses valeurs dans B :

$$\|g_k(x)\| \leq \|g_k(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x)\| \quad (16.425a)$$

$$\leq \frac{1}{1+k} + \frac{\|f(x)\|}{1 + \frac{1}{k}} \quad (16.425b)$$

$$\leq \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \quad (16.425c)$$

$$= 1. \quad (16.425d)$$

Par la version C^∞ du théorème (proposition 16.117), g_k admet un point fixe que l'on nomme x_k .

Étant donné que x_k est dans le compact B , quitte à prendre une sous suite nous supposons que la suite (x_k) converge vers un élément $x \in B$. Nous montrons maintenant que x est un point fixe de f :

$$\|f(x) - x\| = \|f(x) - g_k(x) + g_k(x) - x_k + x_k - x\| \quad (16.426a)$$

$$\leq \|f(x) - g_k(x)\| + \underbrace{\|g_k(x) - x_k\|}_{=0} + \|x_k - x\| \quad (16.426b)$$

$$\leq \frac{1}{1+k} + \|x_k - x\|. \quad (16.426c)$$

En prenant le limite $k \rightarrow \infty$ le membre de droite tend vers zéro et nous obtenons $f(x) = x$. $\square$

16.9.4 Théorème de Schauder

Une conséquence du théorème de Brouwer est le théorème de Schauder qui est valide en dimension infinie.

Théorème 16.119 (Théorème de Schauder[213]).

Soit E , un espace vectoriel normé, K un convexe compact de E et $f: K \rightarrow K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe.

Démonstration. Étant donné que $f: K \rightarrow K$ est continue, elle y est uniformément continue. Si nous choisissons ϵ alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon \quad (16.427)$$

dès que $\|x - y\| \leq \delta$. La compacité de K permet de choisir un recouvrement fini par des ouverts de la forme

$$K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} B(x_i, \delta) \quad (16.428)$$

où $\{x_1, \dots, x_p\} \subset K$. Nous considérons maintenant $L = \text{Span}\{f(x_j) \text{ tel que } 1 \leq j \leq p\}$ et

$$K^* = K \cap L. \quad (16.429)$$

Le fait que K et L soient convexes implique que K^* est convexe. L'ensemble K^* est également compact parce qu'il s'agit d'une partie fermée de K qui est compact (lemme 5.58). Notons en

particulier que K^* est contenu dans un espace vectoriel de dimension finie, ce qui n'est pas le cas de K .

Nous allons à présent construire une sorte de partition de l'unité subordonnée au recouvrement (16.428) sur K (voir le lemme 13.128). Nous commençons par définir

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16.430)$$

pour chaque $1 \leq j \leq p$. Notons que ψ_j est une fonction positive, nulle en-dehors de $B(x_j, \delta)$. En particulier la fonction suivante est bien définie :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)} \quad (16.431)$$

et nous avons $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$. Les fonctions φ_j sont continues sur K et nous définissons finalement

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) f(x_j). \quad (16.432)$$

Pour chaque $x \in K$, l'élément $g(x)$ est une combinaison des éléments $f(x_j) \in K^*$. Étant donné que K^* est convexe et que la somme des coefficients $\varphi_j(x)$ vaut un, nous avons que g prend ses valeurs dans K^* par la proposition 8.20.

Nous considérons seulement la restriction $g: K^* \rightarrow K^*$ qui est continue sur un compact contenu dans un espace vectoriel de dimension finie. Le théorème de Brouwer nous enseigne alors que g a un point fixe (proposition 16.118). Nous nommons y ce point fixe. Notons que y est fonction du ϵ choisit au début de la construction, via le δ qui avait conditionné la partition de l'unité.

Nous avons

$$f(y) - y = f(y) - g(y) \quad (16.433a)$$

$$= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) f(x_j) \quad (16.433b)$$

$$= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) (f(y) - f(x_j)). \quad (16.433c)$$

Par construction, $\varphi_j(y) \neq 0$ seulement si $\|y - x_j\| \leq \delta$ et par conséquent seulement si $\|f(y) - f(x_j)\| \leq \epsilon$. D'autre part nous avons $\varphi_j(y) \geq 0$; en prenant la norme de (16.433) nous trouvons

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) \|f(y) - f(x_j)\| \leq \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) \epsilon = \epsilon. \quad (16.434)$$

Nous nous souvenons maintenant que y était fonction de ϵ . Soit y_m le y qui correspond à $\epsilon = 2^{-m}$. Nous avons alors

$$\|f(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}. \quad (16.435)$$

L'élément y_m est dans K^* qui est compact, donc quitte à choisir une sous suite nous pouvons supposer que y_m est une suite qui converge vers $y^* \in K^*$ ⁴⁰. Nous avons les majorations

$$\|f(y^*) - y^*\| \leq \|f(y^*) - f(y_m)\| + \|f(y_m) - y_m\| + \|y_m - y^*\|. \quad (16.436)$$

Si m est assez grand, les trois termes du membre de droite peuvent être rendus arbitrairement petits, d'où nous concluons que

$$f(y^*) = y^* \quad (16.437)$$

et donc que f possède un point fixe. □

⁴⁰. Notons que même dans la sous suite nous avons $\|f(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$, avec le même « m » des deux côtés de l'inégalité.

16.9.5 Théorème de Markov-Kakutani et mesure de Haar

Définition 16.120.

Soit G un groupe topologique. Une **mesure de Haar** sur G est une mesure μ telle que

- (1) $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout mesurable A et tout $g \in G$,
- (2) $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset G$.

Si de plus le groupe G lui-même est compact nous demandons que la mesure soit normalisée : $\mu(G) = 1$.

Le théorème suivant nous donne l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe compact.

Théorème 16.121 (Markov-Kakutani[214]).

Soit E un espace vectoriel normé et L , une partie non vide, convexe, fermée et bornée de E' . Soit $T: L \rightarrow L$ une application continue. Alors T a un point fixe.

Démonstration. Nous considérons un point $x_0 \in L$ et la suite

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x_0. \quad (16.438)$$

La somme des coefficients devant les $T^i(x_0)$ étant 1, la convexité de L montre que $x_n \in L$. Nous considérons l'ensemble

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_m \text{ tel que } m \geq n\}}. \quad (16.439)$$

Le lemme 5.134 indique que C n'est pas vide, et de plus il existe une sous suite de (x_n) qui converge vers un élément $x \in C$. Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\sigma(n)}(v) = x(v) \quad (16.440)$$

pour tout $v \in E$. Montrons que x est un point fixe de T . Nous avons

$$\|(Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)})v\| = \left\| T \frac{1}{1 + \sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} T^i x_0(v) - \frac{1}{1 + \sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} T^i x_0(v) \right\| \quad (16.441a)$$

$$= \left\| \frac{1}{1 + \sigma(k)} \sum_{i=0}^{\sigma(k)} T^{i+1} x_0(v) - T^i x_0(v) \right\| \quad (16.441b)$$

$$= \frac{1}{1 + \sigma(k)} \|T^{\sigma(k)+1} x_0(v) - x_0(v)\| \quad (16.441c)$$

$$\leq \frac{2M}{\sigma(k) + 1} \quad (16.441d)$$

où $M = \sum_{y \in L} \|y(v)\| < \infty$ parce que L est borné. En prenant $k \rightarrow \infty$ nous trouvons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Tx_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)})v = 0, \quad (16.442)$$

ce qui signifie que $Tx = x$ parce que T est continue. □

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de Markov-Kakutani.

Théorème 16.122.

Si G est un groupe topologique compact possédant une base dénombrable de topologie alors G accepte une unique mesure de Haar normalisée. De plus elle est unimodulaire :

$$\mu(Ag) = \mu(gA) = \mu(A) \quad (16.443)$$

pour tout mesurables $A \subset G$ et tout élément $g \in G$.

16.10 Théorèmes de point fixes et équations différentielles

16.10.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 16.123 (Cauchy-Lipschitz[215]).

Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \end{cases} \quad (16.444a)$$

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (16.444b)$$

avec $f: U = I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ où I est ouvert dans $\mathbb{R}$ et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que f est continue sur U et localement Lipschitz⁴¹ par rapport à y . Alors le système (16.444) admet une unique solution maximale. Cette solution est C^1 .

Remarque 16.124.

L'écriture « $y' = f(t, y)$ » est un abus de notation pour demander que pour chaque t nous ayons $y'(t) = f(t, y(t))$.

Démonstration. Si y est une solution de l'équation différentielle considérée, elle vérifie

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du. \quad (16.445)$$

Ceci nous incite à considérer l'opérateur $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ défini par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du. \quad (16.446)$$

Cylindre de sécurité et espace fonctionnel Précisons l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ adéquat. Soient V et W les voisinages de t_0 et y_0 sur lesquels f est localement Lipschitz. Nous considérons les quantités suivantes :

- (1) $M = \sup_{V \times W} f$;
- (2) $r > 0$ tel que $\overline{B(y_0, r)} \subset V$
- (3) $T > 0$ tel que $\overline{B(t_0, T)} \subset W$ et $T < r/M$.

Nous considérons alors $\mathcal{F}$, l'ensemble des fonctions continues $\overline{B(t_0, T)} \rightarrow \overline{B(y_0, r)}$ muni de la norme uniforme. Par le lemme 16.104 l'espace $\mathcal{F}$ est complet.

Le fait que $\Phi(y)$ soit continue lorsque y est continue est une propriété de l'intégration et du fait que f soit continue en ses deux variables. Prouvons que $\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$. Pour cela, notons que

$$|\Phi(y)(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^t |f(u, y(u))| du \leq |t - t_0| \|f\|_\infty. \quad (16.447)$$

Étant donné que $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons $|t - t_0| \leq r/M$ et donc $|\Phi(y)(t) - y_0| \leq r$.

L'équation (16.445) signifie que y est un point fixe de Φ . L'espace $\mathcal{F}$ étant complet le théorème de point fixe de Picard (théorème 16.109) s'applique. Nous allons montrer qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que Φ^p soit contractante. Par conséquent Φ^p aura un unique point fixe qui sera également unique point fixe de Φ par la remarque 16.112.

Une contraction Prouvons donc que Φ^p est contractante pour un certain p . Pour cela nous commençons par montrer la formule suivante par récurrence :

$$\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\| \leq \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|x - y\|_\infty \quad (16.448)$$

41. Définition 11.192. Notons que nous ne supposons pas que f soit une contraction.

pour tout $x, y \in \mathcal{F}$, et pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Pour $p = 0$ la formule (16.448) est vérifiée parce que $\|x - y\|_\infty$ est le supremum de $\|x(t) - y(t)\|$ pour $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Supposons que la formule soit vraie pour p et calculons pour $p + 1$. Pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons

$$\|\Phi^{p+1}(x)(t) - \Phi^{p+1}(y)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(u, \Phi^p(x)(u)) - f(u, \Phi^p(y)(u))\| du \right| \quad (16.449a)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t k \|\Phi^p(x)(u) - \Phi^p(y)(u)\| du \right| \quad (16.449b)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t k \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|x - y\|_\infty du \right| \quad (16.449c)$$

$$= \frac{k^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|x - y\|_\infty. \quad (16.449d)$$

Justifications :

— (16.449b) parce que f est Lipschitz.

— (16.449c) par hypothèse de récurrence.

La formule (16.448) est maintenant établie. Nous pouvons maintenant montrer que Φ^p est une contraction pour un certain p . Pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons

$$\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\| \leq \frac{k^p}{t!} |t - t_0|^p \|x - y\|_\infty \leq \frac{k^p T^p}{p!} \|x - y\|_\infty \quad (16.450)$$

où nous avons utilisé le fait que $|t - t_0|^p < T^p$. En prenant le supremum sur t des deux côtés il vient

$$\|\Phi^p(x) - \Phi^p(y)\|_\infty \leq \frac{k^p T^p}{p!} \|x - y\|_\infty. \quad (16.451)$$

Le membre de droite tend vers zéro lorsque $p \rightarrow \infty$ parce que $k < 1$ et $T^p/p! \rightarrow 0$ ⁴². Nous concluons donc que Φ^p est une contraction pour un certain p .

Conclusion L'unique point fixe de Φ est alors l'unique solution continue de l'équation différentielle (16.444). Par ailleurs l'équation elle-même $y' = f(t, y)$ demande implicitement que y soit dérivable et donc continue. Nous concluons que l'unique point fixe de Φ est l'unique solution de l'équation différentielle donnée. Cette dernière est automatiquement C^1 parce que si y est continue alors $u \mapsto f(u, y(u))$ est continue, c'est à dire que y' est continue.

Unicité Nous passons maintenant à la partie «prolongement maximum» du théorème. Soient x_1 et x_2 deux solutions maximales du problème (16.444) sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement. Les intervalles I_1 et I_2 contiennent $\overline{B(t_0, r)}$ sur lequel $x_1 = x_2$ par unicité.

Nous allons maintenant montrer que pour tout $t \geq t_0$ pour lequel x_1 ou x_2 est défini, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont définis et sont égaux. Le raisonnement sur $t \leq t_0$ est similaire.

Supposons que l'ensemble des $t \geq t_0$ tels que $x_1 = x_2$ soit ouvert à droite, c'est à dire soit de la forme $[t_0, b[$. Dans ce cas, soit x_1 soit x_2 (soit les deux) cesse d'exister en b . En effet si nous avions les fonctions x_i sur $[t_0, b + \epsilon[$ alors l'équation $x_1 = x_2$ définirait un fermé dans $[t_0, b + \epsilon[$. Supposons pour fixer les idées que x_1 cesse d'exister : le domaine de x_1 (parmi les $t \geq 0$) est $[t_0, b[$ et sur ce domaine nous avons $x_1 = x_2$. Dans ce cas x_1 pourrait être prolongé en x_2 au-delà de b . Si x_1 et x_2 s'arrêtent d'exister en même temps en b , alors nous avons bien $x_1 = x_2$.

Nous devons donc traiter le cas où $x_1 = x_2$ sur $[t_0, b]$ alors que x_1 et x_2 existent sur $[t_0, b + \epsilon[$ pour un certain ϵ .

Nous pouvons appliquer le théorème d'existence locale au problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(b) = x_1(b). \end{cases} \quad (16.452a)$$

$$\quad (16.452b)$$

Il existe un voisinage de b sur lequel la solution est unique. Sur ce voisinage nous devons donc avoir $x_1 = x_2$, ce qui contredit le fait que $x_1 \neq x_2$ en dehors de $[t_0, b]$.

□

42. C'est le terme général du développement de e^T qui est une série convergente.

16.10.2 Théorème de Cauchy-Arzella

Théorème 16.125 (Cauchy-Arzela[209]).

Nous considérons le système d'équation différentielles

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (16.453a)$$

$$(16.453b)$$

avec $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue où U est ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe un voisinage fermé V de t_0 sur lequel une solution C^1 du problème (16.453) existe.

Idée de la démonstration. Nous considérons $M = \|f\|_\infty$ et K , l'ensemble des fonctions M -Lipschitz sur U . Nous prouvons que $(K, \|\cdot\|_\infty)$ est compact. Ensuite nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi: K &\rightarrow K \\ \Phi(f)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(u, f(u)) du. \end{aligned} \quad (16.454)$$

Après avoir prouvé que Φ était continue, nous concluons qu'elle a un point fixe par le théorème de Schauder 16.119. $\square$

16.11 Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite

16.11.1 Mise en situation

Dans un certain nombre de situation, il n'est pas possible de trouver des solutions explicites aux équations qui apparaissent. Néanmoins, l'existence «théorique» d'une telle solution est souvent déjà suffisante. C'est l'objet du théorème de la fonction implicite.

Prenons par exemple la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1. \quad (16.455)$$

Nous pouvons bien entendu regarder l'ensemble des points donnés par $F(x, y) = 0$. C'est le cercle dessiné à la figure 16.6.

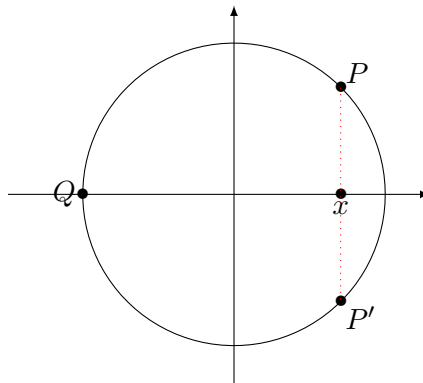


FIGURE 16.6 – Un cercle pour montrer l'intérêt de la fonction implicite. Si on donne x , nous ne pouvons pas savoir si nous parlons de P ou de P' .

Nous ne pouvons pas donner le cercle sous la forme $y = y(x)$ à cause du $\pm$ qui arrive quand on prend la racine carrée. Mais si on se donne le point P , nous pouvons dire que *autour de* P , le cercle est la fonction

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}. \quad (16.456)$$

Tandis que autour du point P' , le cercle est la fonction

$$y(x) = -\sqrt{1 - x^2}. \quad (16.457)$$

Autour de ces deux points, donc, le cercle est donné par une fonction. Il n'est par contre pas possible de donner le cercle autour du point Q sous la forme d'une fonction.

Ce que nous voulons faire, en général, est de voir si l'ensemble des points tels que

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \quad (16.458)$$

peut être donné par une fonction $y = y(x_1, \dots, x_n)$. En d'autres termes, est-ce qu'il existe une fonction $y(x_1, \dots, x_n)$ telle que

$$F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) = 0. \quad (16.459)$$

Plus généralement, soit une fonction

$$\begin{aligned} F: D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto (F_1(x, y), \dots, F_m(x, y)) \end{aligned} \quad (16.460)$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$. Pour chaque x fixé, on s'intéresse aux solutions du système de m équations $F(x, y) = 0$ pour les inconnues y ; en particulier, on voudrait pouvoir écrire $y = \varphi(x)$ vérifiant $F(x, \varphi(x)) = 0$.

16.11.2 Théorème d'inversion locale

Lemme 16.126 ([150]).

Soit E un espace de Banach (métrique complet) et $\mathcal{O}$ un ouvert de E . Nous considérons une λ -contraction $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow E$. Alors l'application

$$f: x \mapsto x + \varphi(x) \quad (16.461)$$

est un homéomorphisme entre $\mathcal{O}$ et un ouvert de E . De plus f^{-1} est Lipschitz de constante plus petite ou égale à $(1 - \lambda)^{-1}$.

Cette proposition utilise le théorème de point fixe de Picard 16.109, et sera utilisée pour démontrer le théorème d'inversion locale 16.128.

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{O}$. Nous posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. En vertu de l'inégalité de la proposition 5.32 nous avons

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| = \|x_2 + \varphi(x_2) - x_1 - \varphi(x_1)\| \quad (16.462a)$$

$$\geq \|x_2 - x_1\| - \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \quad (16.462b)$$

$$\geq (1 - \lambda)\|x_2 - x_1\|. \quad (16.462c)$$

À la dernière ligne les valeurs absolues sont enlevées parce que nous savons que ce qui est à l'intérieur est positif. Cela nous dit d'abord que f est injective parce que $f(x_2) = f(x_1)$ implique $x_2 = x_1$. Donc f est inversible sur son image. Nous posons $A = f(\mathcal{O})$ et nous devons prouver que que $f^{-1}: A \rightarrow \mathcal{O}$ est continue, Lipschitz de constante majorée par $(1 - \lambda)^{-1}$ et que A est ouvert.

Les inéquations (16.462) nous disent que

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq \frac{\|y_1 - y_2\|}{1 - \lambda}, \quad (16.463)$$

c'est à dire que

$$f^{-1}(B(y, r)) \subset B(f^{-1}(y), \frac{r}{1 - \lambda}), \quad (16.464)$$

ce qui signifie que f^{-1} est Lipschitz de constante souhaitée et donc continue.

Il reste à prouver que $f(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela nous prenons $y_0 = f(x_0)$ dans $f(\mathcal{O})$ et nous prouvons qu'il existe ϵ tel que $B(y_0, \epsilon)$ soit dans $f(\mathcal{O})$. Il faut donc que pour tout $y \in B(y_0, \epsilon)$, l'équation $f(x) = y$ ait une solution. Nous considérons l'application

$$L_y: x \mapsto y - \varphi(x). \quad (16.465)$$

Ce que nous cherchons est un point fixe de L_y parce que si $L_y(x) = x$ alors $y = x + \varphi(x) = f(x)$. Vu que

$$\|L_y(x) - L_y(x')\| = \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq \lambda \|x - x'\|, \quad (16.466)$$

l'application L_y est une contraction de constante λ . Par ailleurs x_0 est un point fixe de L_{y_0} , donc en vertu de la caractérisation (11.432) des fonctions Lipschitziennes,

$$L_{y_0}(\overline{B(x_0, \delta)}) \subset \overline{B(L_{y_0}(x_0), \lambda\delta)} = \overline{B(x_0, \lambda\delta)}. \quad (16.467)$$

Vu que pour tout y et x nous avons $L_y(x) = L_{y_0}(x) + y - y_0$,

$$L_y(\overline{B(x_0, \delta)}) = L_{y_0}(\overline{B(x_0, \delta)}) + (y - y_0) \subset \overline{B(x_0, \lambda\delta)} + (y - y_0) \subset \overline{B(x_0, \lambda\delta + \|y - y_0\|)}. \quad (16.468)$$

Si $\epsilon < (1 - \lambda)\delta$ alors $\lambda\delta + \|y - y_0\| < \delta$. Un tel choix de $\epsilon > 0$ est possible parce que $\lambda < 1$. Pour une telle valeur de ϵ nous avons

$$L_y(\overline{B(x_0, \delta)}) \subset \overline{B(x_0, \delta)}. \quad (16.469)$$

Par conséquent L_y est une contraction sur l'espace métrique complet $\overline{B(x_0, \delta)}$, ce qui signifie que L_y y possède un point fixe par le théorème de Picard 16.109. $\square$

Le théorème d'inversion locale s'énonce de la façon suivante dans $\mathbb{R}^n$:

Théorème 16.127 (Inversion locale dans $\mathbb{R}^n$).

Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si df_{x_0} est inversible, alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 et V de $f(x_0)$ tels que $f: U \rightarrow V$ soit un C^k -difféomorphisme. (c'est à dire que f^{-1} est également de classe C^k)

Nous allons le démontrer dans le cas un peu plus général (mais pas plus cher⁴³) des espaces de Banach en tant que conséquence du théorème de point fixe de Picard 16.109.

Théorème 16.128 (Inversion locale dans un espace de Banach[150, 216]).

Soit une fonction $f \in C^p(E, F)$ avec $p \geq 1$ entre deux espaces de Banach. Soit $x_0 \in E$ tel que df_{x_0} soit une bijection bicontinue⁴⁴. Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 et W de $f(x_0)$ tels que

- (1) $f: V \rightarrow W$ soit une bijection,
- (2) $f^{-1}: W \rightarrow V$ soit de classe C^p .

Démonstration. Nous commençons par simplifier un peu le problème. Pour cela, nous considérons la translation $T: x \mapsto x + x_0$ et l'application linéaire

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (16.470)$$

$$x \mapsto (df_{x_0})^{-1}x$$

qui sont tout deux des difféomorphismes (L en est un par hypothèse d'inversibilité). Quitte à travailler avec la fonction $k = L \circ f \circ T$, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$ et que $df_{x_0} = \mathbb{1}$. Pour comprendre cela il faut utiliser deux fois la formule de différentielle de fonction composée de la proposition 11.343 :

$$dk_0(u) = dL_{(f \circ T)(0)}(df_{T(0)}dT_0(u)). \quad (16.471)$$

Vu que L est linéaire, sa différentielle est elle-même, c'est à dire $dL_{(f \circ T)(0)} = (df_{x_0})^{-1}$, et par ailleurs $dT_0 = \mathbb{1}$, donc

$$dk_0(u) = (df_{x_0})^{-1}(df_{x_0}(u)) = u, \quad (16.472)$$

ce qui signifie bien que $dk_0 = \mathbb{1}$. Pour tout cela nous avons utilisé en plein le fait que df_{x_0} était inversible.

43. Sauf la justification de la régularité de l'application $A \mapsto A^{-1}$

44. En dimension finie, une application linéaire est toujours continue et d'inverse continu.

Nous posons $g = f - \mathbb{1}$, c'est à dire $g(x) = f(x) - x$, qui a la propriété $dg_0 = 0$. Étant donné que g est de classe C^1 , l'application⁴⁵

$$\begin{aligned} dg: E &\rightarrow \text{GL}(F) \\ x &\mapsto dg_x \end{aligned} \quad (16.473)$$

est continue. En conséquence de quoi nous avons un voisinage U' de 0 pour lequel

$$\sup_{x \in U'} \|dg_x\| < \frac{1}{2}. \quad (16.474)$$

Maintenant le théorème des accroissements finis 6.231 (11.187 pour la dimension finie) nous indique que pour tout $x, x' \in U'$ nous avons⁴⁶

$$\|g(x') - g(x)\| \leq \sup_{a \in [x, x']} \|dg_a\| \cdot \|x - x'\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\|, \quad (16.475)$$

ce qui prouve que g est une contraction au moins sur l'ouvert U' . Nous allons aussi donner une idée de la façon dont f fonctionne : si $x_1, x_2 \in U'$ alors

$$\|x_1 - x_2\| = \|g(x_1) - f(x_1) - g(x_2) + f(x_2)\| \quad (16.476a)$$

$$\leq \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \quad (16.476b)$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|, \quad (16.476c)$$

ce qui montre que

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|. \quad (16.477)$$

Maintenant que nous savons que g est contractante de constante $\frac{1}{2}$ et que $f = g + \mathbb{1}$ nous pouvons utiliser la proposition 16.126 pour conclure que f est un homéomorphisme sur un ouvert U (partie de U') de E et f^{-1} a une constante de Lipschitz plus petite ou égale à $(1 - \frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Nous allons maintenant prouver que f^{-1} est différentiable et que sa différentielle est donnée par $(df^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

Soient $a, b \in U$ et $u = b - a$. Étant donné que f est différentiable en a , il existe une fonction $\alpha \in o(\|u\|)$ telle que

$$f(b) - f(a) - df_a(u) = \alpha(u). \quad (16.478)$$

En notant $y_a = f(a)$ et $y_b = f(b)$ et en appliquant $(df_a)^{-1}$ à cette dernière équation,

$$(df_a)^{-1}(y_b - y_a) - u = (df_a)^{-1}(\alpha(u)). \quad (16.479)$$

Vu que df_a est bornée (et son inverse aussi), le membre de droite est encore une fonction β ayant la propriété $\lim_{u \rightarrow 0} \beta(u)/\|u\| = 0$; en réordonnant les termes,

$$b - a = (df_a)^{-1}(y_b - y_a) + \beta(u) \quad (16.480)$$

et donc

$$f^{-1}(y_b) - f^{-1}(y_a) - (df_a)^{-1}(y_b - y_a) = \beta(u), \quad (16.481)$$

ce qui prouve que f^{-1} est différentiable et que $(df^{-1})_{y_a} = (df_a)^{-1}$.

La différentielle df^{-1} est donc obtenue par la chaîne

$$df^{-1}: f(U) \xrightarrow{f^{-1}} U' \xrightarrow{df} \text{GL}(F) \xrightarrow{\text{Inv}} \text{GL}(F) \quad (16.482)$$

45. Ici $\text{GL}(F)$ est l'ensemble des applications linéaires, inversibles et continues de F dans lui-même. Ce ne sont pas spécialement des matrices parce que nous n'avons pas d'hypothèses sur la dimension de F , finie ou non.

46. Ici nous supposons avoir choisi U' convexe afin que tous les $a \in [x, x']$ soient bien dans U' et donc soumis à l'inéquation (16.474), ce qui est toujours possible, il suffit de prendre une boule.

où l'application $\text{Inv}: \text{GL}(F) \rightarrow \text{GL}(F)$ est l'application $X \mapsto X^{-1}$ qui est de classe C^∞ par le théorème 6.234. D'autre part, par hypothèse df est une application de classe C^{k-1} ⁴⁷ et donc au minimum C^0 parce que $k \geq 1$. Enfin, l'application $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ est continue (parce que la proposition 16.126 précise que f est un homéomorphisme). Donc toute la chaîne est continue et df^{-1} est continue. Cela entraîne immédiatement que f^{-1} est C^1 et donc que toute la chaîne est C^1 .

Par récurrence nous obtenons la chaîne

$$df^{-1}: f(U) \xrightarrow[C^{k-1}]{f^{-1}} U' \xrightarrow[C^{k-1}]{df} \text{GL}(F) \xrightarrow[C^\infty]{\text{Inv}} \text{GL}(F) \quad (16.483)$$

qui prouve que df^{-1} est C^{k-1} et donc que f^{-1} est C^k . La récurrence s'arrête ici parce que df n'est pas mieux que C^{k-1} . $\square$

16.129.

Nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned} f: S^{++}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow S^{++}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sqrt{A} \end{aligned} \quad (16.484)$$

est une difféomorphisme.

Cependant $S^{++}(n, \mathbb{R})$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et nous ne savons pas ce qu'est la différentielle d'une application non définie sur un ouvert. Nous allons donc en réalité montrer que l'application racine carrée existe sur un voisinage de chacun des points de $S^{++}(n, \mathbb{R})$. Et comme une union quelconque d'ouverts est un ouvert, la fonction f sera bien définie sur un ouvert de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

Lemme 16.130.

L'application

$$\begin{aligned} f: S^{++}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow S^{++}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned} \quad (16.485)$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

Démonstration. Prouvons d'abord que f prend ses valeurs dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$. Si $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$ alors par la diagonalisation 6.292 elle s'écrit $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale avec des nombres strictement positifs sur la diagonale. Avec cela, $A^2 = QD^2Q^{-1}$ où D^2 contient encore des nombres strictement positifs sur la diagonale.

L'application f étant essentiellement des polynôme en les entrées de A , elle est de classe C^∞ .

Passons à l'étude de la différentielle. Comme mentionné en 16.129 nous allons en réalité voir f sur un ouvert de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ autour de $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$. Par conséquent si $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$,

$$df: S^{++}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}), \mathbb{M}(n, \mathbb{R})) \quad (16.486a)$$

$$df_A: \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R}). \quad (16.486b)$$

Le calcul de df_A est facile. Soit $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et faisons le calcul en utilisant la formule du lemme (11.132) :

$$df_A(u) = \frac{d}{dt} \left[f(A + tu) \right]_{t=0} \quad (16.487a)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[A^2 + tAu + tuA + t^2u^2 \right]_{t=0} \quad (16.487b)$$

$$= Au + uA. \quad (16.487c)$$

Nous allons utiliser le théorème d'inversion locale 16.128 à la fonction f . Dans la suite, A est une matrice de $S^{++}(n, \mathbb{R})$.

⁴⁷. Ici il me semble que dans [150] il est fautivement noté C^k .

df_A est injective Soit $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ dans le noyau de df_A . En posant $M' = A^{-1}MQ$ nous avons $M = QM'Q^{-1}$ et on applique df_A à $QM'Q^{-1}$:

$$df_A(QM'Q^{-1}) = Q(DM + MD)Q^{-1}. \quad (16.488)$$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$. La matrice D est inversible. Nous avons $M' = -DM'D^{-1}$, et en coordonnées,

$$M'_{ij} = - \sum_{kl} D_{ik} M'_{kl} D_{lj}^{-1} \quad (16.489a)$$

$$= - \sum_{kl} \lambda_i \delta_{ik} M'_{kl} \frac{1}{\lambda_j} \delta_{lj} \quad (16.489b)$$

$$= - \frac{\lambda_i}{\lambda_j} M'_{ij}. \quad (16.489c)$$

C'est à dire que $M'_{ij} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} M'_{ij}$ avec $-\frac{\lambda_i}{\lambda_j} < 0$. Cela implique $M' = 0$ et par conséquent $M = 0$.

df_A est surjective Soit $N \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$; nous cherchons $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ tel que $df_A(M) = N$. Nous posons $N' = Q^{-1}NQ$ et $M = QM'Q^{-1}$, ce qui nous donne à résoudre $df_D(M') = N'$. Passons en coordonnées :

$$(DM' + M'D)_{ij} = \sum_k (\delta_{ik} \lambda_i M'_{kj} + M'_{ik} \delta_{kj} \lambda_j) \quad (16.490a)$$

$$= M'_{ij}(\lambda_i + \lambda_j) \quad (16.490b)$$

où $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$. Il suffit donc de prendre la matrice M' donnée par

$$M'_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} N'_{ij} \quad (16.491)$$

pour que $df_A(M') = N'$.

Le théorème d'inversion locale donne un voisinage V de A dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et un voisinage W de A^2 dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ tels que $f: V \rightarrow W$ soit une bijection et $f^{-1}: W \rightarrow V$ soit de même régularité, en l'occurrence C^∞ . $\square$

Remarque 16.131.

Oui, il y a des matrices non symétriques qui ont une unique racine carrée.

La proposition suivante, qui dépend du le théorème d'inversion locale par le lemme 16.130, donne plus de régularité à la décomposition polaire donnée dans le théorème 12.31.

Proposition 16.132 (Décomposition polaire : cas réel (suite)).

L'application

$$\begin{aligned} f: \text{O}(n, \mathbb{R}) \times S^{++}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \\ (Q, S) &\mapsto SQ \end{aligned} \quad (16.492)$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ .

Démonstration. Si M est donnée dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ alors la décomposition polaire $M = QS$ est donnée par $S = \sqrt{MM^t}$ et $Q = MS^{-1}$. Autrement dit, si nous considérons la fonction de décomposition polaire

$$f: \text{O}(n, \mathbb{R}) \times S^{++}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad (16.493)$$

alors

$$f^{-1}(M) = (M(\sqrt{MM^t})^{-1}, \sqrt{MM^t}). \quad (16.494)$$

Nous avons vu dans le lemme 16.130 que la racine carrée était un C^∞ -difféomorphisme. Le reste n'étant que des produits de matrice, la régularité est de mise. $\square$

16.11.3 Théorème de la fonction implicite

Nous énonçons et le démontrons le théorème de la fonction implicite dans le cas d'espaces de Banach.

Théorème 16.133 (Théorème de la fonction implicite dans Banach[5]).

Soient E , F et G des espaces de Banach et des ouverts $U \subset E$, $V \subset F$. Nous considérons une fonction $f: U \times V \rightarrow G$ de classe C^r telle que⁴⁸

$$d_y f_{(x_0, y_0)}: F \rightarrow G \quad (16.495)$$

soit un isomorphisme pour un certain $(x_0, y_0) \in U \times V$.

Alors nous avons des voisinages U_0 de x_0 dans E et W_0 de $f(x_0, y_0)$ dans G et une fonction de classe C^r

$$g: U_0 \times W_0 \rightarrow V \quad (16.496)$$

telle que

$$f(x, g(x, w)) = w \quad (16.497)$$

pour tout $(x, w) \in U_0 \times W_0$.

Cette fonction g est unique au sens suivant : il existe un voisinage V_0 de y_0 tel que si $(x, y) \in U_0 \times V_0$ et $w \in W_0$ satisfont à $f(x, y) = w$ alors $y = g(x, w)$. Autrement dit, la fonction $g: U_0 \times W_0 \rightarrow V_0$ est unique.

Démonstration. Nous commençons par considérer la fonction

$$\begin{aligned} \Phi: U \times V &\rightarrow E \times G \\ (x, y) &\mapsto (x, f(x, y)) \end{aligned} \quad (16.498)$$

et sa différentielle

$$d\Phi_{(x_0, y_0)}(u, v) = \frac{d}{dt} \left[(x_0 + tu, f(x_0 + tu, y_0 + tv)) \right]_{t=0} \quad (16.499a)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} [x_0 + tu]_{t=0}, \frac{d}{dt} [f(x_0 + tu, y_0 + tv)]_{t=0} \right) \quad (16.499b)$$

$$= (u, df_{(x_0, y_0)}(u, v)). \quad (16.499c)$$

Nous utilisons alors la proposition 6.229 pour conclure que

$$d\Phi_{(x_0, y_0)}(u, v) = (u, (d_1 f)_{(x_0, y_0)}(u) + (d_2 f)_{(x_0, y_0)}(v)), \quad (16.500)$$

mais comme par hypothèse $(d_2 f)_{(x_0, y_0)}: F \rightarrow G$ est un isomorphisme, l'application $d\Phi_{(x_0, y_0)}: E \times F \rightarrow E \times G$ est également un isomorphisme. Par conséquent le théorème d'inversion locale 16.128 nous indique qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de (x_0, y_0) et $\mathcal{P}$ de $\Phi(x_0, y_0)$ tels que $\Phi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$ soit une bijection et $\Phi^{-1}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ soit de classe C^r . Vu que $\mathcal{P}$ est un voisinage de

$$\Phi(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0, y_0)), \quad (16.501)$$

nous pouvons par 6.202 le choisir un peu plus petit de telle sorte à avoir $\mathcal{P} = U_0 \times W_0$ où U_0 est un voisinage de x_0 et W_0 un voisinage de $f(x_0, y_0)$. Dans ce cas nous devons obligatoirement aussi restreindre $\mathcal{O}$ à $U_0 \times V_0$ pour un certain voisinage V_0 de y_0 . L'application Φ^{-1} a obligatoirement la forme

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}: U_0 \times W_0 &\rightarrow U_0 \times V_0 \\ (x, w) &\mapsto (x, g(x, w)) \end{aligned} \quad (16.502)$$

48. La notation d_y est la différentielle partielle de la définition 6.228.

pour une certaine fonction $g: U_0 \times W_0 \rightarrow V$. Cette fonction g est la fonction cherchée parce qu'en appliquant Φ à (16.502),

$$(x, w) = \Phi(x, g(x, w)) = (x, f(x, g(x, w))), \quad (16.503)$$

qui nous dit que pour tout $x \in U_0$ et tout $w \in W_0$ nous avons

$$f(x, g(x, w)) = w. \quad (16.504)$$

Si vous avez bien suivi le sens de l'équation (16.502) alors vous avez compris l'unicité. Sinon, considérez $(x, y) \in U_0 \times V_0$ et $w \in W_0$ tels que $f(x, y) = w$. Alors $(x, f(x, y)) = (x, w)$ et

$$\Phi(x, y) = (x, w). \quad (16.505)$$

Mais vu que $\Phi: U_0 \times V_0 \rightarrow U_0 \times W_0$ est une bijection, cette relation définit de façon univoque l'élément (x, y) de $U_0 \times V_0$, qui ne sera autre que $g(x, w)$. $\square$

Le théorème de la fonction implicite s'énonce de la façon suivante pour des espaces de dimension finie.

Théorème 16.134 (Théorème de la fonction implicite en dimension finie).

Soit une fonction $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tels que

$$(1) \quad F(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \neq 0, \text{ c'est à dire que } (d_y F)_{(\alpha, \beta)} \text{ est inversible.}$$

Alors il existe un voisinage ouvert V de α dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert W de β dans $\mathbb{R}^m$ et une application $\varphi: V \rightarrow W$ de classe C^k telle que pour tout $x \in V$ on ait

$$F(x, \varphi(x)) = 0. \quad (16.506)$$

De plus si $(x, y) \in V \times W$ satisfait à $F(x, y) = 0$, alors $y = \varphi(x)$.

Remarque 16.135.

Notons que cet énoncé est tourné un peu différemment en ce qui concerne le nombre de variables dont dépend la fonction implicite : comparez

$$f(x, g(x, w)) = w \quad (16.507a)$$

$$F(x, \varphi(x)) = 0. \quad (16.507b)$$

Le deuxième est un cas particulier du premier en posant

$$F(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad (16.508)$$

et donc en considérant w comme valant la constante $f(x_0, y_0)$; dans ce cas la fonction g ne dépend plus que de la variable x .

Exemple 16.136

La remarque 16.135 signifie entre autres que le théorème 16.133 est plus fort que 16.134 parce que le premier permet de choisir la valeur d'arrivée. Parlons de l'exemple classique du cercle et de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Nous savons que

$$f(\alpha, \beta) = 1. \quad (16.509)$$

Alors le théorème 16.133 nous donne une fonction g telle que

$$f(x, g(x, r)) = r \quad (16.510)$$

tant que x est proche de α , que r est proche de 1 et que g donne des valeurs proches de β .

L'énoncé 16.134 nous oblige à travailler avec la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, de telle sorte que

$$F(\alpha, \beta) = 0, \quad (16.511)$$

et que nous ayons une fonction φ telle que

$$F(x, \varphi(x)) = 0. \quad (16.512)$$

La fonction φ ne permet donc que de trouver des points sur le cercle de rayon 1. $\triangle$

16.11.4 Exemple

Le théorème de la fonction implicite a pour objet de donner l'existence de la fonction φ . Maintenant nous pouvons dire beaucoup de choses sur les dérivées de φ en considérant la fonction

$$x \mapsto F(x, \varphi(x)). \quad (16.513)$$

Par définition de φ , cette fonction est toujours nulle. En particulier, nous pouvons dériver l'équation

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad (16.514)$$

et nous trouvons plein de choses.

Prenons par exemple la fonction

$$F((x, y), z) = ze^z - x - y, \quad (16.515)$$

et demandons nous ce que nous pouvons dire sur la fonction $z(x, y)$ telle que

$$F(x, y, z(x, y)) = 0, \quad (16.516)$$

c'est à dire telle que

$$z(x, y)e^{z(x, y)} - x - y = 0. \quad (16.517)$$

pour tout x et $y \in \mathbb{R}$. Nous pouvons facilement trouver $z(0, 0)$ parce que

$$z(0, 0)e^{z(0, 0)} = 0, \quad (16.518)$$

donc $z(0, 0) = 0$.

Nous pouvons dire des choses sur les dérivées de $z(x, y)$. Voyons par exemple $(\partial_x z)(x, y)$. Pour trouver cette dérivée, nous dérivons la relation (16.517) par rapport à x . Ce que nous trouvons est

$$(\partial_x z)e^z + ze^z(\partial_x z) - 1 = 0. \quad (16.519)$$

Cette équation peut être résolue par rapport à $\partial_x z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{e^z(1 + z)}. \quad (16.520)$$

Remarquez que cette équation ne donne pas tout à fait la dérivée de z en fonction de x et y , parce que z apparaît dans l'expression, alors que z est justement la fonction inconnue. En général, c'est la vie, nous ne pouvons pas faire mieux.

Dans certains cas, on peut aller plus loin. Par exemple, nous pouvons calculer cette dérivée au point $(x, y) = (0, 0)$ parce que $z(0, 0)$ est connu :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 1. \quad (16.521)$$

Cela est pratique pour calculer, par exemple, le développement en Taylor de z autour de $(0, 0)$.

Exemple 16.137

Est-ce que l'équation $e^y + xy = 0$ définit au moins localement une fonction $y(x)$? Nous considérons la fonction

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} \quad (16.522)$$

La différentielle de cette application est

$$df_{(0,0)}(u) = \frac{d}{dt} \left[f(tu_1, tu_2) \right]_{t=0} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} tu_1 \\ e^{tu_2} + t^2 u_1 u_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (16.523)$$

L'application f définit donc un difféomorphisme local autour des points (x_0, y_0) et $f(x_0, y_0)$. Soit $(u, 0)$ un point dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. Alors il existe un unique (x, y) tel que

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ e^y + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16.524)$$

Nous avons automatiquement $x = u$ et $e^y + xy = 0$. Notons toutefois que pour que ce procédé donne effectivement une fonction implicite $y(x)$ nous devons avoir des points de la forme $(u, 0)$ dans le voisinage de $f(x_0, y_0)$. $\triangle$

16.11.5 Théorème de Von Neumann**Lemme 16.138** ([1]).

Soit G , un sous groupe fermé de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ et

$$\mathcal{L}_G = \{m \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \text{ tel que } e^{tm} \in G \forall t \in \mathbb{R}\}. \quad (16.525)$$

Alors $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Si $m \in \mathcal{L}_G$, alors $\lambda m \in \mathcal{L}_G$ par construction. Le point délicat à prouver est le fait que si $a, b \in \mathcal{L}_G$, alors $a + b \in \mathcal{L}_G$. Soit $a \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$; nous savons qu'il existe une fonction $\alpha_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ telle que

$$e^{ta} = \mathbb{1} + ta + \alpha_a(t) \quad (16.526)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_a(t)}{t} = 0. \quad (16.527)$$

Si a et b sont dans $\mathcal{L}_G$, alors $e^{ta}e^{tb} \in G$, mais il n'est pas vrai en général que cela soit égal à $e^{t(a+b)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$e^{a/k}e^{b/k} = \left(\mathbb{1} + \frac{a}{k} + \alpha_a\left(\frac{1}{k}\right) \right) \left(\mathbb{1} + \frac{b}{k} + \alpha_b\left(\frac{1}{k}\right) \right) = \mathbb{1} + \frac{a+b}{2} + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \quad (16.528)$$

où $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ est encore une fonction vérifiant $\beta(t)/t \rightarrow 0$. Si k est assez grand, nous avons

$$\left\| \frac{a+b}{k} + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \right\| < 1, \quad (16.529)$$

et nous pouvons profiter du lemme 16.79 pour écrire alors

$$\left(e^{a/k}e^{b/k} \right)^k = e^{k \ln \left(\mathbb{1} + \frac{a+b}{2} + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \right)}. \quad (16.530)$$

Ce qui se trouve dans l'exponentielle est

$$k \left[\frac{a+b}{k} + \alpha\left(\frac{1}{k}\right) + \sigma \left(\frac{a+b}{k} + \alpha\left(\frac{1}{k}\right) \right) \right]. \quad (16.531)$$

Les diverses propriétés vues montrent que le tout tend vers $a + b$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{a/k}e^{b/k} \right)^k = e^{a+b}. \quad (16.532)$$

Ce que nous avons prouvé est que pour tout t , $e^{t(a+b)}$ est une limite d'éléments dans G et est donc dans G parce que ce dernier est fermé. $\square$

Vu que $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, nous pouvons considérer un supplémentaire M .

Lemme 16.139.

Il n'existe pas de suites (m_k) dans $M \setminus \{0\}$ convergeant vers zéro et telle que $e^{m_k} \in G$ pour tout k .

Démonstration. Supposons que nous ayons $m_k \rightarrow 0$ dans $M \setminus \{0\}$ avec $e^{m_k} \in G$. Nous considérons les éléments $\epsilon_k = \frac{m_k}{\|m_k\|}$ qui sont sur la sphère unité de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que cette suite converge, et vu que M est fermé, ce sera vers $\epsilon \in M$ avec $\|\epsilon\| = 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{t\epsilon_k}. \quad (16.533)$$

En vertu de la décomposition d'un réel en partie entière et décimale, pour tout k nous avons $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| \leq \frac{1}{2}$ tel que $t/\|m_k\| = \lambda_k + \mu_k$. Avec ça,

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{t}{m_k} m_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\lambda_k m_k} e^{\mu_k m_k}. \quad (16.534)$$

Pour tout k nous avons $e^{\lambda_k m_k} \in G$. De plus $|\mu_k|$ étant borné et m_k tendant vers zéro nous avons $e^{\mu_k m_k} \rightarrow 1$. Au final

$$e^{t\epsilon} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{t\epsilon_k} \in G \quad (16.535)$$

Cela signifie que $\epsilon \in \mathcal{L}_G$, ce qui est impossible parce que nous avons déjà dit que $\epsilon \in M \setminus \{0\}$. $\square$

Lemme 16.140.

L'application

$$\begin{aligned} f: \mathcal{L}_G \times M &\rightarrow \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}) \\ l, m &\mapsto e^l e^m \end{aligned} \quad (16.536)$$

est un difféomorphisme local entre un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et un voisinage de $\mathbb{1}$ dans $\exp(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$.

Notons que nous ne disons rien de $e^{\mathbb{M}(n, \mathbb{R})}$. Nous n'allons pas nous embarquer à discuter si ce serait tout $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ ⁴⁹ ou bien si ça contiendrait ne fut-ce que G .

Démonstration. Le fait que f prenne ses valeurs dans $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ est simplement dû au fait que les exponentielles sont toujours inversibles. Nous considérons ensuite la différentielle : si $u \in \mathcal{L}_G$ et $v \in M$ nous avons

$$df_{(0,0)}(u, v) = \frac{d}{dt} \left[f(t(u, v)) \right]_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[e^{tu} e^{tv} \right]_{t=0} = u + v. \quad (16.537)$$

L'application df_0 est donc une bijection entre $\mathcal{L}_G \times M$ et $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Le théorème d'inversion locale 16.128 nous assure alors que f est une bijection entre un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathcal{L}_G \times M$ et son image. Mais vu que df_0 est une bijection avec $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, l'image en question contient un ouvert autour de $\mathbb{1}$ dans $\exp(\mathbb{M}(n, \mathbb{R}))$. $\square$

Théorème 16.141 (Von Neumann[1, 217, 218, 219]).

Tout sous-groupe fermé de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit G un tel groupe ; nous devons prouver que c'est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Et si on est pervers, on ne va pas faire localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais à un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie. Nous allons être pervers.

Étant donné que pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned} L_g: G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \quad (16.538)$$

49. Vu les dimensions y'a tout de même peu de chance.

est de classe C^∞ et d'inverse C^∞ , il suffit de prouver le résultat pour un voisinage de $\mathbb{1}$.

Supposons d'abord que $\mathcal{L}_G = \{0\}$. Alors 0 est un point isolé de $\ln(G)$; en effet si ce n'était pas le cas nous aurions un élément m_k de $\ln(G)$ dans chaque boule $B(0, r_k)$. Nous aurions alors $m_k = \ln(a_k)$ avec $a_k \in G$ et donc

$$e^{m_k} = a_k \in G. \quad (16.539)$$

De plus m_k appartient forcément à M parce que $\mathcal{L}_G$ est réduit à zéro. Cela nous donnerait une suite $m_k \rightarrow 0$ dans M dont l'exponentielle reste dans G . Or cela est interdit par le lemme 16.139. Donc 0 est un point isolé de $\ln(G)$. L'application $\ln$ étant continue⁵⁰, nous en déduisons que $\mathbb{1}$ est isolé dans G . Par le difféomorphisme L_g , tous les points de G sont isolés; ce groupe est donc discret et par voie de conséquence une variété.

Nous supposons maintenant que $\mathcal{L}_G \neq \{0\}$. Nous savons par la proposition 16.78 que

$$\exp: \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \quad (16.540)$$

est une application C^∞ vérifiant $d\exp_0 = \text{Id}$. Nous pouvons donc utiliser le théorème d'inversion locale 16.128 qui nous offre donc l'existence d'un voisinage U de 0 dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ tel que $W = \exp(U)$ soit un ouvert de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ et que $\exp: U \rightarrow W$ soit un difféomorphisme de classe C^∞ .

Montrons que quitte à restreindre U (et donc W qui reste par définition l'image de U par $\exp$), nous pouvons avoir $\exp(U \cap \mathcal{L}_G) = W \cap G$. D'abord $\exp(\mathcal{L}_G) \subset G$ par construction. Nous avons donc $\exp(U \cap \mathcal{L}_G) \subset W \cap G$. Pour trouver une restriction de U pour laquelle nous avons l'égalité, nous supposons que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans U ,

$$\exp: \mathcal{O} \cap \mathcal{L}_G \rightarrow \exp(\mathcal{O}) \cap G \quad (16.541)$$

ne soit pas surjective. Cela donnerait un élément de $\mathcal{O} \cap \mathcal{L}_G$ dont l'image par $\exp$ n'est pas dans G . Nous construisons ainsi une suite en considérant une boule $B(0, \frac{1}{k})$ incluse à U et $x_k \in B(0, \frac{1}{k}) \cap \mathcal{L}_G$ vérifiant $e^{x_k} \in G$. Vu le choix des boules nous avons évidemment $x_k \rightarrow 0$.

L'élément e^{x_k} est dans $e^{\mathbb{M}(n, \mathbb{R})}$ et le difféomorphisme du lemme 16.140⁵¹ nous donne $(l_k, m_k) \in \mathcal{L}_G \times M$ tel que $e^{l_k} e^{m_k} = e^{x_k}$. À ce point nous considérons k suffisamment grand pour que e^{x_k} soit dans la partie de l'image de f sur lequel nous avons le difféomorphisme. Plus prosaïquement, nous posons

$$(l_k, m_k) = f^{-1}(e^{x_k}) \quad (16.542)$$

et nous profitons de la continuité pour permuter la limite avec f^{-1} :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (l_k, m_k) = f^{-1}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} e^{x_k}\right) = f^{-1}(\mathbb{1}) = (0, 0). \quad (16.543)$$

En particulier $m_k \rightarrow 0$ alors que $e^{m_k} = e^{x_k} e^{-l_k} \in G$. La suite m_k viole le lemme 16.139. Nous pouvons donc restreindre U de telle façon à avoir

$$\exp(U \cap \mathcal{L}_G) = W \cap G. \quad (16.544)$$

Nous avons donc un ouvert de $\mathcal{L}_G$ (l'ouvert $U \cap \mathcal{L}_G$) qui est difféomorphe avec l'ouvert $W \cap G$ de G . Donc G est une variété et accepte $\mathcal{L}_G$ comme carte locale. □

Remarque 16.142.

En termes savants, nous avons surtout montré que si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors l'exponentielle donne un difféomorphisme local entre $\mathfrak{g}$ et G .

⁵⁰. Par le lemme 16.79.

⁵¹. Il me semble que l'utilisation de ce lemme manque à l'avant-dernière ligne de la preuve chez [1].

16.12 Recherche d'extrema

16.12.1 Extrema à une variable

Définition 16.143.

Soit $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$. Le point a est un **maximum local** de f si il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{U} \cap A$. Le point a est un **maximum global** si $f(a) \geq g(x)$ pour tout $x \in A$.

La proposition basique à utiliser lors de la recherche d'extrema est la suivante :

Proposition 16.144.

Soit $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \text{Int}(A)$. Supposons que f est dérivable en a . Si a est un extremum local, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ en $x = 0$: sa dérivée est nulle et pourtant $x = 0$ n'est ni un maximum ni un minimum local.

Cette proposition ne sert donc qu'à sélectionner des *candidats* extremum. Afin de savoir si ces candidats sont des extrema, il y a la proposition suivante.

Proposition 16.145.

Soit $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^k au voisinage d'un point $a \in \text{Int } I$. Supposons que

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad (16.545)$$

et que

$$f^{(k)}(a) \neq 0. \quad (16.546)$$

Dans ce cas,

- (1) Si k est pair, alors a est un point d'extremum local de f , c'est un minimum si $f^{(k)}(a) > 0$, et un maximum si $f^{(k)}(a) < 0$,
- (2) Si k est impair, alors a n'est pas un extremum local de f .

Note : jusqu'à présent nous n'avons rien dit des extrema *globaux* de f . Il n'y a pas grand chose à en dire. Si un point d'extremum global est situé dans l'intérieur du domaine de f , alors il sera extremum local (a fortiori). Ou alors, le maximum global peut être sur le bord du domaine. C'est ce qui arrive à des fonctions strictement croissantes sur un domaine compact.

Une seule certitude : si une fonction est continue sur un compact, elle possède une minimum et un maximum global par le théorème 5.110.

16.12.2 Extrema libre

Un point a à l'intérieur du domaine d'une fonction $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un **point critique** de f lorsque $df(a) = 0$. Ces points sont analogues aux points où la dérivée d'une fonction sur $\mathbb{R}$ s'annule. Les points critiques de f sont donc les candidats à être des points d'extremum.

Pour rappel, dans le cas d'une fonction à deux variables, $d^2f(a)$ est la matrice (et donc l'application linéaire)

$$d^2f(a) = \begin{pmatrix} \frac{d^2f}{dx^2}(a) & \frac{d^2f}{dx dy}(a) \\ \frac{d^2f}{dy dx}(a) & \frac{d^2f}{dy^2}(a) \end{pmatrix}. \quad (16.547)$$

Dans le cas d'une fonction C^2 , cette matrice est symétrique.

Proposition 16.146.

Soit $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $a \in \text{Int}(A)$. Si a est un minimum local alors a est un point critique de f .

Proposition 16.147.

Soit $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au voisinage de $a \in \text{Int}(A)$.

- (1) Si a est un point critique de f , et si $d^2f(a)$ est définie positive⁵², alors a est un minimum local strict de f ,
- (2) Si a est un minimum local, alors $d^2f(a)$ est définie positive.

La seconde partie de l'énoncé est tout à fait comparable au fait bien connu que, pour une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si le point a est minimum local, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$.

La méthode pour chercher les extrema de f est donc de suivre les points suivants :

- (1) Trouver les candidats extrema en résolvant $\nabla f = (0, 0)$,
- (2) écrire $d^2f(a)$ pour chacun des candidats
- (3) calculer les valeurs propres de $d^2f(a)$, déterminer si la matrice est définie positive ou négative,
- (4) conclure.

Une conséquence de la proposition 6.363(3)⁵³ est que si $\det M < 0$, alors le point a n'est pas un extrema dans le cas où $M = d^2f(a)$ par le point (2) de la proposition 16.147.

Exemple 16.148

Soit la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. C'est une fonction différentiable sans problèmes. D'abord sa différentielle est

$$df = (4x^3 - 4y; 4y^3 - 4x), \quad (16.548)$$

et la matrice des dérivées secondes est

$$M = d^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}. \quad (16.549)$$

Nous avons $fd = 0$ pour les trois points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $-1, -1$.

Pour le point $(0, 0)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16.550)$$

dont les valeurs propres sont 4 et -4 . Elle n'est donc semi-définie ou définie rien du tout. Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.

Au contraire pour les points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ nous avons

$$M = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad (16.551)$$

dont les valeurs propres sont 16 et 8. La matrice d^2f y est donc définie positive. Ces deux points sont donc extrema locaux. $\triangle$

16.12.3 Extrema liés

Soit f , une fonction sur $\mathbb{R}^n$, et $M \subset \mathbb{R}^n$ une variété de dimension m . Nous voulons savoir quelle sont les plus grandes et plus petites valeurs atteintes par f sur M .

Pour ce faire, nous avons un théorème qui permet de trouver des extrema *locaux* de f sur la variété. Pour rappel, $a \in M$ est un **extrema local de f relativement** à l'ensemble M si il existe une boule $B(a, \epsilon)$ telle que $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in B(a, \epsilon) \cap M$.

Théorème 16.149 (Extrema lié [204]).

Soit A , un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

- (1) une fonction (celle à minimiser) $f \in C^1(A, \mathbb{R})$,

⁵². La fonction f est de classe C^2 , donc les dérivées croisées sont égales et d^2f est symétrique. La définition 6.294 s'applique donc.

⁵³. La matrice $d^2f(a)$ est toujours symétrique quand f est de classe C^2 .

(2) des fonctions (les contraintes) $G_1, \dots, G_r \in C^1(A, \mathbb{R})$,

(3) $M = \{x \in A \text{ tel que } G_i(x) = 0 \forall i\}$,

(4) un extrema local $a \in M$ de f relativement à M .

Supposons que les gradients $\nabla G_1(a), \dots, \nabla G_r(a)$ soient linéairement indépendants. Alors $a = (x_1, \dots, x_n)$ est une solution de $\nabla L(a) = 0$ où

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^r \lambda_i G_i(x_1, \dots, x_n). \quad (16.552)$$

Autrement dit, si a est un extrema lié, alors $\nabla f(a)$ est une combinaison des $\nabla G_i(a)$, ou encore il existe des λ_i tels que

$$df(a) = \sum_i \lambda_i dG_i(a). \quad (16.553)$$

La fonction L est le **lagrangien** du problème et les variables λ_i sont les **multiplicateurs de Lagrange**.

Démonstration. Si $r = n$ alors les vecteurs linéairement indépendants $\nabla G_i(a)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ et donc évidemment les λ_i existent. Nous supposons donc maintenant que $r < n$. Nous notons $(z_i)_{i=1 \dots n}$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$.

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial z_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial z_n}(a) \end{pmatrix} \quad (16.554)$$

est de rang r parce que les lignes sont par hypothèses linéairement indépendantes. Nous nommons $(y_i)_{i=1, \dots, r}$ un choix de r parmi les (z_i) tels que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (16.555)$$

Nous identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ dans lequel $\mathbb{R}^r$ est la partie générée par les $(y_i)_{i=1, \dots, r}$. Nous nommons $(x_j)_{j=1, \dots, s}$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^s$. Autrement dit, les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ sont $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r$. Dans ces coordonnées, nous nommons $a = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^s$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$.

Si nous notons $G = (G_1, \dots, G_r)$, le théorème de la fonction implicite (théorème 16.133) nous dit qu'il existe un voisinage U' de $\alpha \in \mathbb{R}^s$, un voisinage V' de $\beta \in \mathbb{R}^r$ et une fonction $\varphi: U' \rightarrow V'$ de classe C^1 telle que si $(x, y) \in U' \times V'$, alors

$$g(x, y) = 0 \quad (16.556)$$

si et seulement si $y = \varphi(x)$. Nous posons maintenant

$$\psi(x) = (x, \varphi(x)) \quad (16.557a)$$

$$h(x) = f(\psi(x)). \quad (16.557b)$$

Nous avons $\psi(\alpha) = a$ et $\psi(x) \in M$ pour tout $x \in U'$. La fonction h a donc un extrema local en α et donc les dérivées partielles de h y sont nulles. Cela signifie que

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \quad (16.558)$$

c'est à dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_k}(a) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha) = 0 \quad (16.559)$$

pour tout $i = 1, \dots, s$. D'autre part pour tout k , la fonction $l_k(x) = G_k(x, \varphi(x))$ est constante et vaut zéro ; ses dérivées partielles sont donc nulles :

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial G_k}{\partial x_i}(\alpha) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial G_k}{\partial y_k}(a) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha) = 0 \quad (16.560)$$

pour tout $i = 1, \dots, s$ et $k = 1, \dots, r$.

Les s premières colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_r} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_s} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_r}{\partial x_s} & \frac{\partial G_r}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_r}{\partial y_r} \end{pmatrix} \quad (16.561)$$

s'expriment en terme des r dernières. La matrice est donc au maximum de rang r . Notons que la première ligne est ∇f et les r suivantes sont les ∇G_i . Vu que ces lignes sont des vecteurs liés, il existe $\mu_0, \dots, \mu_r$ tels que

$$\mu_0 \nabla f + \sum_{i=1}^r \mu_i \nabla G_i = 0. \quad (16.562)$$

Par hypothèse les ∇G_i sont linéairement indépendants, ce qui nous dit que $\mu_0 \neq 0$. Donc nous avons ce qu'il nous faut :

$$\nabla f(a) = \sum_i \frac{\mu_i}{\mu_0} \nabla G_i(a). \quad (16.563)$$

Notons qu'au vu de l'expression (16.553), le fait que les formes $\{dG_i(a)\}_{1 \leq i \leq r}$ forment une partie libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$ implique que les λ_i sont uniques. $\square$

La proposition suivante est la même que 16.149.

Proposition 16.150.

Soit U , un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et des fonctions de classe C^1 $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$. Nous considérons

$$\Gamma = \{x \in U \text{ tel que } g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}. \quad (16.564)$$

Soit a un extrémum de $f|_{\Gamma}$. Supposons que les formes $dg_1, \dots, dg_r$ soient linéairement indépendantes en a . Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$df_a = \sum_{i=1}^r \lambda_i (dg_i)_a. \quad (16.565)$$

En pratique les candidats extrema locaux sont tous les points où les gradients ne sont pas linéairement indépendants, plus tous les points donnés par l'équation $\nabla L = 0$. Parmi ces candidats, il faut trouver lesquels sont maxima ou minima, locaux ou globaux.

L'existence d'extrema locaux se prouve généralement en invoquant de la compacité, et en invoquant le lemme suivant qui permet de réduire le problème à un compact.

Lemme 16.151.

Soit S , une partie de $\mathbb{R}^n$ et C , un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in \text{Int } S$ est un minimum local relatif à $S \cap C$, alors il est un minimum local par rapport à S .

Démonstration. Nous avons que $\forall x \in B(a, \epsilon_1) \cap S \cap C$, $f(x) \geq f(a)$. Mais étant donné que C est ouvert, et que $a \in C$, il existe un ϵ_2 tel que $B(a, \epsilon_2) \subset C$. En prenant $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, nous trouvons que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in B(a, \epsilon) \cap (S \cap C) = B(a, \epsilon) \cap S$. $\square$

16.12.4 Algorithme du gradient à pas optimal

Une idée pour trouver un minimum à une fonction est de prendre un point p au hasard, calculer le gradient $\nabla f(p)$ et suivre la direction $-\nabla f(p)$ tant que ça descend. Une fois qu'on est «dans le creux», recalculer le gradient et continuer ainsi. Nous allons détailler cet algorithme dans un cas très particulier.

Définition 16.152.

Si X est un espace vectoriel normé et $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nous disons que f est **coercive** sur le domaine non borné P de X si pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{x \in P \text{ tel que } f(x) \leq M\} \quad (16.566)$$

est borné.

En langage imagé la coercivité de f s'exprime par la limite

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in P}} f(x) = +\infty. \quad (16.567)$$

Proposition 16.153.

Soit $A \in S^{++}(n, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle. \end{aligned} \quad (16.568)$$

Il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ minimisant f et il vérifie $A\bar{x} = -b$.

Démonstration. La fonction est strictement convexe par la proposition 11.220 parce que elle est de classe C^2 et vu que

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{kl} A_{kl} x_l x_k + \sum_k b_k x_k \quad (16.569)$$

il est vite vu que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = A_{ij}$, c'est à dire que A est la matrice hessienne de f . Cette matrice étant strictement définie positive par hypothèse, la fonction f est strictement convexe.

Montrons à présent que f est coercive. Nous avons :

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle \right| \quad (16.570a)$$

$$\geq \frac{1}{2} |\langle Ax, x \rangle| - |\langle b, x \rangle| \quad (16.570b)$$

$$\geq \frac{1}{2} \lambda_{\max} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| \quad (16.570c)$$

Pour la dernière ligne nous avons nommé $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de A et utilisé Cauchy-Schwarz pour le second terme. Nous avons donc bien $|f(x)| \rightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$ et la fonction f est coercive.

Soit M une valeur atteinte par f . L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) \leq M\} \quad (16.571)$$

est fermé (parce que f est continue) et borné parce que f est coercive. Cela est donc compact⁵⁴ et f atteint un minimum qui sera forcément dedans. Cela est pour l'existence d'un minimum.

Pour l'unicité du minimum nous invoquons la convexité : si $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont deux points réalisant le minimum de f , alors

$$f\left(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2}f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1), \quad (16.572)$$

54. Théorème 5.107

ce qui contredit la minimalité de $f(\bar{x}_1)$.

Nous devons maintenant prouver que $\bar{x}$ vérifie l'équation $A\bar{x} = -b$. Vu que $\bar{x}$ est minimum local de f qui est une fonction de classe C^2 , le théorème des minima locaux 16.146 nous indique que $\bar{x}$ est solution de $\nabla f(x) = 0$. Calculons un peu cela avec la formule

$$df_x(u) = \frac{d}{dt} \left[f(x+tu) \right]_{t=0} = \frac{1}{2} (\langle Ax, u \rangle + \langle Au, x \rangle) + \langle b, u \rangle = \langle Ax, u \rangle + \langle b, u \rangle = \langle Ax+b, u \rangle. \quad (16.573)$$

Donc demander $df_x(u) = 0$ pour tout u demande $Ax + b = 0$. $\square$

Proposition 16.154 (Gradient à pas optimal).

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous définissons la suite (x_k) par

$$x_{k+1} = x_k + td_k \quad (16.574)$$

où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et t_k est la valeur minimisant la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ sur $\mathbb{R}$.

Alors pour tout $k \geq 0$ nous avons

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq K \left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right)^k \quad (16.575)$$

où $c_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ est le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice A .

Démonstration. D'abord si $\nabla f(x_k) = 0$, c'est que $x_k = \bar{x}$ et l'algorithme est fini. Nous allons donc supposer que $\nabla f(x_k) \neq 0$ pour tout k .

t_k est bien défini Pour $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x_k + td_k) = f(x_k) + \frac{1}{2} t^2 \langle Ad_k, d_k \rangle + t \underbrace{\langle Ax_k + b, d_k \rangle}_{=-d_k} = \frac{1}{2} t^2 \langle Ad_k, d_k \rangle - t \|d_k\|^2 + f(x_k). \quad (16.576)$$

qui est un polynôme du second degré en t . Le coefficient de t^2 est $\frac{1}{2} \langle Ad_k, d_k \rangle > 0$ parce que $d_k \neq 0$ et A est strictement définie positive. Par conséquent la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$ admet bien un unique minimum. Nous pouvons même calculer t_k parce que l'on connaît pas cœur le sommet d'une parabole :

$$t_k = -\frac{\langle Ax_k + b, d_k \rangle}{\langle Ad_k, d_k \rangle} = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle} \quad (16.577)$$

parce que $d_k = -\nabla f(x_k) = -(Ax_k + b)$.

La valeur de d_{k+1} Par définition, $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) = -(Ax_{k+1} + b)$. Mais $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, donc

$$d_{k+1} = -Ax_k - t_k Ad_k - b = d_k - t_k Ad_k \quad (16.578)$$

parce que $-Ax_k - b = d_k$.

Par ailleurs, $\langle d_{k+1}, d_k \rangle = 0$ parce que

$$\langle d_{k+1}, d_k \rangle = \langle d_k, d_k \rangle - t_k \langle d_k, Ad_k \rangle = \|d_k\|^2 - \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle} \langle d_k, Ad_k \rangle = 0 \quad (16.579)$$

où nous avons utilisé la valeur (16.577) de t_k .

Calcul de $f(x_{k+1})$ Nous repartons de (16.576) où nous substituons la valeur (16.577) de t_k :

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} = f(x_k) - \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle}. \quad (16.580)$$

Encore du calcul . . . Vu que le produit $\langle Ad_k, d_k \rangle$ arrive tout le temps, nous allons étudier $\langle A^{-1}d_k, d_k \rangle$. Le truc malin est d'essayer d'exprimer ça en termes de $\bar{x}$ et $\bar{f} = f(\bar{x})$. Pour cela nous calculons $f(\bar{x})$:

$$\bar{f} = f(\bar{x}) = f(-A^{-1}b) = -\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b \rangle. \quad (16.581)$$

Ayant cela en tête nous pouvons calculer :

$$\langle A^{-1}d_k, d_k \rangle = \langle A^{-1}(Ax_k + b), Ax_k + b \rangle \quad (16.582a)$$

$$= \langle x_k, Ax_k \rangle + \langle A^{-1}b, Ax_k \rangle + \langle b, x_k \rangle + \underbrace{\langle A^{-1}b, b \rangle}_{-2\bar{f}} \quad (16.582b)$$

$$= \langle x_k, Ax_k \rangle + 2\langle x_k, b \rangle - 2\bar{f} \quad (16.582c)$$

$$= 2(f(x_k) - \bar{f}) \quad (16.582d)$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$ parce que A est symétrique.

Erreur sur la valeur du minimum Nous voulons à présent estimer la différence $f(x_{k+1}) - \bar{f}$. Pour cela nous mettons en facteur $f(x_k) - \bar{f}$ dans $f(x_{k+1} - \bar{f})$; et d'ailleurs c'est pour cela que nous avons calculé $\langle A^{-1}d_k, d_k \rangle$: parce que ça fait intervenir $f(x_k) - \bar{f}$.

$$f(x_{k+1}) - \bar{f} = f(x_k) - \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} - \bar{f} \quad (16.583a)$$

$$= (f(x_k) - \bar{f}) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle (f(x_k) - \bar{f})} \right) \quad (16.583b)$$

$$= (f(x_k) - \bar{f}) \left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \langle A^{-1}d_k, d_k \rangle} \right). \quad (16.583c)$$

Nous traitons le dénominateur à l'aide de l'inégalité de Kantorovitch 11.228. Nous avons

$$\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \langle A^{-1}d_k, d_k \rangle} \geq \frac{\|d_k\|^4}{\left(\sqrt{c_2(A)} + \frac{1}{\sqrt{c_2(A)}} \right)^2 \|d_k\|^4} = \frac{4c_2(A)}{(c_2(A) + 1)^2}. \quad (16.584)$$

Mettre cela dans (16.583c) est un calcul d'addition de fractions :

$$f(x_{k+1}) - \bar{f} \leq (f(x_k) - \bar{f}) \left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right)^2. \quad (16.585)$$

Par récurrence nous avons alors

$$f(x_k) - \bar{f} \leq (f(x_0) - \bar{f}) \left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right)^{2k}. \quad (16.586)$$

Notons qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que $\bar{f}$ étant le minimum de f , les deux côtés de l'inégalité sont automatiquement positifs.

Erreur sur la position du minimum Nous voulons à présent étudier la norme de $x_k - \bar{x}$. Pour cela nous l'écrivons directement avec la définition de f en nous souvenant que $b = -A\bar{x}$:

$$f(x_k) - \bar{f} = \frac{1}{2} \langle Ax_k, x_k \rangle + \langle A\bar{x}, x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle \quad (16.587a)$$

$$= \frac{1}{2} \langle Ax_k, x_k \rangle - \langle A\bar{x}, x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle \quad (16.587b)$$

$$= \frac{1}{2} \langle Ax_k, x_k \rangle - \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, x_k \rangle - \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle \quad (16.587c)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\langle A(x_k - \bar{x}), x_k \rangle + \langle A\bar{x}, \bar{x} - x_k \rangle \right) \quad (16.587d)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\langle A(x_k - \bar{x}), (x_k - \bar{x}) \rangle \right) \quad (16.587e)$$

où à la dernière ligne nous avons fait $\langle A\bar{x}, \bar{x} - x_k \rangle = \langle \bar{x}, A(\bar{x} - x_k) \rangle$ en vertu de la symétrie de A .

Les produits de la forme $\langle Ay, y \rangle$ sont majorés par $\lambda_{\min} \|y\|^2$ parce que $\lambda_{\min}$ est la plus grande valeur propre de A . Dans notre cas,

$$f(x_k) - \bar{f} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|x_k - \bar{x}\|^2 \quad (16.588)$$

Conclusion En combinant les inéquations (16.588) et (16.586) nous trouvons

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min} \|x_k - \bar{x}\|^2 \leq f(x_k) - \bar{f} \leq (f(x_0) - \bar{f}) \left(\frac{c_2(A) - 1}{c_2(A) + 1} \right)^{2k}, \quad (16.589)$$

c'est à dire

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{2(f(x_0) - \bar{f})}{\lambda_{\min} + 1}}^{2k}. \quad (16.590)$$

□

Notons que lorsque $c_2(A)$ est proche de 1 la méthode converge rapidement. Par contre si $c_2(A)$ est proche de zéro, la méthode converge lentement.

16.13 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel réel normé de dimension finie n . L'ensemble des formes quadratiques réelles⁵⁵ sur E est vu comme l'ensemble des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$; il sera noté $Q(E)$ et le sous-ensemble des formes quadratiques non dégénérées est $S_n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}(n, \mathbb{R})$ qui sera noté $\Omega(E)$. Nous rappelons que la correspondance est donnée de la façon suivante. Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, la forme quadratique associée est q_A donnée par $q_A(x) = x^t A x$.

Nous noterons encore $Q^+(E)$ les formes quadratiques positives sur E et $Q^{++}(E)$ les formes quadratiques strictement définies positives sur E .

Sur $Q(E)$ nous mettons la norme

$$N(q) = \sup_{\|x\|_E=1} |q(x)|, \quad (16.591)$$

qui du point de vue de $S_n(\mathbb{R})$ est

$$N(A) = \sup_{\|x\|_E=1} |x^t A x|. \quad (16.592)$$

Notons que à droite, c'est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

Nous savons par le théorème de Sylvester (théorème 12.74) que dans $\text{M}(n, \mathbb{R})$, toute matrice symétrique de signature (p, q) est semblable à la matrice

$$\mathbb{1}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}. \quad (16.593)$$

Donc deux matrices de S_n sont semblables si et seulement si elles ont la même signature (même si elles ne sont pas de rang maximum, cela soit dit au passage). Si nous notons $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de signature (p, q) , alors

$$S_n^{p,q}(\mathbb{R}) = \{P^t A P \text{ tel que } P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})\} \quad (16.594)$$

où A est une quelconque de ces matrices.

⁵⁵. Définition 6.361.

Nous voudrions en savoir plus sur ces ensembles. En particulier nous aimerions savoir si la signature est une notion «stable» au sens où ces ensembles seraient ouverts dans S_n . Pour cela nous considérons l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur S_n définie par

$$\begin{aligned}\alpha: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) &\rightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ (P, A) &\mapsto P^t A P\end{aligned}\tag{16.595}$$

faite exprès pour que les orbites de cette action soient les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

La proposition suivante montre que lorsque $p + q = n$, c'est à dire lorsqu'on parle de matrices de rang maximum, les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ sont ouverts, c'est à dire que la signature d'une forme quadratique est une propriété «stable» par petite variations des éléments de matrice. Notons tout de suite que si le rang n'est pas maximum, le théorème de Sylvester dit qu'elle est semblable à une matrice diagonale avec des zéros sur la diagonale; en modifiant un peu ces zéros, on peut modifier évidemment la signature.

Proposition 16.155 ([1]).

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors

- (1) les formes quadratiques non dégénérées forment un ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques,
- (2) les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p + q = n$ sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$,
- (3) les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ avec $p + q = n$,
- (4) les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ non dégénérés sont connexes par arc.

Démonstration. Cette preuve est donnée du point de vue des matrices. La différence entre le point (3) et (4) est que dans le premier nous prouvons la connexité de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité de $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, tandis que dans le second nous prouvons la connexité par arc de $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ à partir de la connexité par arc de $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Bien entendu le second implique le premier.

- (1) Il s'agit simplement de remarquer que $Q(E) = S_n(\mathbb{R})$, que $\Omega(E) = S_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et que le déterminant est une fonction continue sur $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$.
- (2) Soit $A_0 \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Le théorème de Sylvester 12.74 nous donne une matrice inversible P telle que $P^t A_0 P = \mathbb{1}_{p,q}$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathbb{1}_{p,q}$ contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. À partir de là, l'ensemble $(P^{-1})^t \mathcal{U} P^{-1}$ sera un voisinage de A_0 contenu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$.

Nous considérons les espaces vectoriels

$$F = \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_p\} \tag{16.596a}$$

$$G = \mathrm{Span}\{e_{p+1}, \dots, e_n\} \tag{16.596b}$$

La norme euclidienne $\|\cdot\|_p$ sur F est équivalente à la norme $\|\cdot\|_E$ par le théorème 6.139. Donc il existe une constante $k_1 > 0$ telle que pour tout $x \in F$,

$$\|x\|_p \geq k_1 \|x\|_E. \tag{16.597}$$

De la même façon sur G , il existe une constante $k_2 > 0$ telle que

$$\|x\|_q \geq k_2 \|x\|_E. \tag{16.598}$$

Si nous posons $k = \min\{k_1^2, k_2^2\}$, alors nous avons

$$\forall x \in F, \quad \|x\|_p^2 \geq k_1^2 \|x\|_E^2 \geq k \|x\|_E^2 \tag{16.599a}$$

$$\forall x \in G, \quad \|x\|_q^2 \geq k_2^2 \|x\|_E^2 \geq k \|x\|_E^2. \tag{16.599b}$$

Soit une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A - \mathbb{1}_{p,q}) < k$, c'est à dire que A est dans un voisinage de $\mathbb{1}_{p,q}$ pour la norme sur $S_n(\mathbb{R})$ donné par (16.592). Si x est non nul dans E , nous avons

$$|x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x| \leq N(\mathbb{1}_{p,q} - A)\|x\|^2 \leq k\|x\|^2. \quad (16.600)$$

En déballant la valeur absolue, cela signifie que

$$-k\|x\|_E^2 \leq x^t(A - \mathbb{1}_{p,q})x \leq k\|x\|^2. \quad (16.601)$$

Si $x \in F$, alors la première inéquation et (16.597) donnent

$$x^t Ax \geq \|x\|_p^2 - k\|x\|_E^2 > 0 \quad (16.602)$$

Si $x \in G$, alors la seconde inéquation et (16.598) donnent

$$x^t Ax \leq k\|x\|_E^2 - \|x\|_q^2 < 0. \quad (16.603)$$

Nous avons donc montré que $x \mapsto x^t Ax$ est positive sur F et négative sur G , ce qui prouve que A est bien de signature (p, q) et appartient donc à $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Autrement dit nous avons

$$B(\mathbb{1}_{p,q}, k) \subset S_n^{p,q}(\mathbb{R}). \quad (16.604)$$

- (3) Cette partie de la preuve provient essentiellement de [220], et fonctionne pour tous les $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$, même pour ceux qui ne sont pas de rang maximum.

Soit $A \in S_n^{p,q}(\mathbb{R})$. Nous savons que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes (proposition 12.20). Vu que l'application

$$\begin{aligned} \alpha: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow S_n \\ P &\mapsto P^t A P \end{aligned} \quad (16.605)$$

est continue, l'image d'un connexe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ par α est connexe (proposition 5.69). En particulier, $\alpha(\mathrm{GL}^\pm(n, \mathbb{R}))$ sont deux connexes et nous savons que $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ a au plus ces deux composantes connexes.

Notre but est maintenant de trouver une intersection entre $\alpha(\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}))$ et $\alpha(\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R}))$ ⁵⁶. Soit par le théorème de Sylvester, soit par le théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles 6.292, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ diagonalisant A . En suivant la remarque 6.293, et en notant Q la matrice obtenue à partir de P en changeant le signe de sa première ligne, nous avons

$$\alpha(Q) = Q^t A Q = P^t A P = \alpha(P). \quad (16.606)$$

Or si $P \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, alors $Q \in \mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R})$ et inversement. Donc nous avons trouvé une intersection entre $\alpha(\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}))$ et $\alpha(\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R}))$.

- (4) Soient A et B dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Par le théorème de Sylvester, il existe P et Q dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telles que $A = P^t \mathbb{1}_{p,q} P$ et $B = Q^t \mathbb{1}_{p,q} Q$. Par la remarque 6.293 nous pouvons choisir P et Q dans $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$. Ce dernier groupe étant connexe par arc, il existe un chemin

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \quad (16.607)$$

tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$. Alors le chemin

$$s \mapsto \gamma(s)^t \mathbb{1}_{p,q} \gamma(s) \quad (16.608)$$

est un chemin continu dans $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ joignant A à B .

□

⁵⁶. À ce point, il me semble que [220] fait erreur parce que la matrice $-\mathbb{1}_n$ est de déterminant 1 lorsque n est pair. L'argument donné ici provient de [1]

Nous savons déjà de la proposition 16.155 que les ensembles $S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ (pas spécialement de rang maximum) sont ouverts dans $S_n(\mathbb{R})$. Le lemme suivant nous donne une précision à ce sujet, dans le cas des matrices de rang maximum, en disant que la matrice qui donne la similitude entre A_0 et A est localement un C^1 -difféomorphisme de A .

Lemme 16.156.

Soit $A_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n) = S_n \cap \text{GL}(n, \mathbb{R})$, une matrice symétrique inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S_n et une application $\phi: V \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ qui

- (1) est de classe C^1 ,
- (2) est telle que pour tout $A \in V$, $\varphi(A)^t A_0 \phi(A) = A$.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \text{M}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow S_n \\ M &\mapsto M^t A_0 M. \end{aligned} \quad (16.609)$$

Étant donné que les composantes de $\varphi(M)$ sont des polynômes en les entrées de M , cette application est de classe C^1 – et même plus. Soit maintenant $H \in \text{M}(n, \mathbb{R})$ et calculons $d\varphi_{\mathbb{1}}(H)$ par la formule (11.293) :

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = \frac{d}{dt} \left[\varphi(\mathbb{1} + tH) \right]_{t=0} \quad (16.610a)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[(\mathbb{1} + tH^t) A_0 (\mathbb{1} + tH) \right]_{t=0} \quad (16.610b)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[A_0 + tA_0H + tH^t A_0 + t^2 H^t A_0 H \right]_{t=0} \quad (16.610c)$$

$$= A_0H + H^t A_0. \quad (16.610d)$$

Donc

$$d\varphi_{\mathbb{1}}(H) = (A_0H) + (A_0H)^t. \quad (16.611)$$

Par conséquent

$$\ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) = \{H \in \text{M}(n, \mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est antisymétrique}\}, \quad (16.612)$$

et si nous posons

$$F = \{H \in \text{M}(n, \mathbb{R}) \text{ tel que } A_0H \text{ est symétrique}\} \quad (16.613)$$

nous avons

$$\text{M}(n, \mathbb{R}) = F \oplus \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \quad (16.614)$$

parce que toute matrice peut être décomposée de façon unique en partie symétrique et antisymétrique. De plus l'application

$$\begin{aligned} f: F &\rightarrow S_n \\ H &\mapsto A_0H \end{aligned} \quad (16.615)$$

est une bijection linéaire. D'abord $A_0H = 0$ implique $H = 0$ parce que A_0 est inversible, et ensuite si $X \in S_n$, alors $X = A_0A_0^{-1}X$, ce qui prouve que X est l'image par f de $A_0^{-1}X$ et donc que f est surjective.

Maintenant nous considérons la restriction $\psi = \varphi|_F$, $\psi: F \rightarrow S_n$. Remarquons que $\mathbb{1} \in F$ parce que $A_0 \in S_n$. L'application $d\psi_{\mathbb{1}}$ est une bijection. En effet d'abord

$$d(\varphi|_F)_{\mathbb{1}} = (d\varphi_{\mathbb{1}})|_F, \quad (16.616)$$

ce qui prouve que

$$\ker(d\psi_{\mathbb{1}}) = \ker(d\varphi_{\mathbb{1}}) \cap F = \{0\}, \quad (16.617)$$

ce qui prouve que $d\psi_{\mathbb{I}}$ est injective. Pour montrer que $d\psi_{\mathbb{I}}$ est surjective, il suffit de mentionner le fait que $\dim F = \dim S_n$ du fait que l'application (16.615) est une bijection linéaire.

Nous pouvons utiliser le théorème d'inversion locale (théorème 16.128) et conclure qu'il existe un voisinage ouvert U de $\mathbb{I}$ dans F tel que ψ soit un difféomorphisme C^1 entre U et $V = \psi(U)$. Vu que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, nous pouvons prendre $U \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et donc supposer que $U \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Pour tout $A \in V$, il existe une unique $M \in U$ telle que $\psi(M) = A$, c'est à dire telle que $A = M^t A_0 M$. Cette matrice M est $\psi^{-1}(A)$ et est une matrice inversible. Bref, nous posons

$$\begin{aligned}\phi: V &\rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \psi^{-1}(A),\end{aligned}\tag{16.618}$$

et ce ϕ est de classe C^1 sur V parce que c'est ce que dit le théorème d'inversion locale. Cette application répond à la question parce que V est un voisinage de $\varphi(\mathbb{I}) = A_0$ et pour tout $A \in V$ nous avons

$$\phi(A)^t A_0 \phi(A) = \varphi^{-1}(A)^t A_0 \varphi^{-1}(A) = A.\tag{16.619}$$

□

16.13.1 Lemme de Morse

Lemme 16.157 (Lemme de Morse).

Soit $f \in C^3(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Nous supposons que $df_0 = 0$ et que $d^2 f_0$ est non dégénérée⁵⁷ et de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1 -difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que

(1) $\varphi(0) = 0$,

(2) si $\varphi(x) = u$ alors

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2.\tag{16.620}$$

Une autre façon de dire est qu'il existe un C^1 -difféomorphisme local ψ tel que

$$(f \circ \psi)(x) - f(0) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2.\tag{16.621}$$

Démonstration. Nous allons noter Hf la matrice Hessienne de f , c'est à dire $Hf_a = d^2 f_a \in \mathcal{L}^{(2)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Écrivons la formule de Taylor avec reste intégral (proposition 11.210 avec $p = 0$ et $m = 2$) :

$$f(x) - f(0) = \underbrace{df_0(x)}_{=0} + \int_0^1 (1-t) \underbrace{d^2 f_{tx}(x, x)}_{x^t (Hf)_{tx} x = \langle Hf_{tx} x, x \rangle} dt = x^t Q(x) x\tag{16.622}$$

avec

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)(Hf)_{tx} dt\tag{16.623}$$

qui est une intégrale dans $\mathcal{L}^{(2)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Nous prouvons à présent que Q est de classe C^1 en utilisant le résultat de différentiabilité sous l'intégrale 13.188. Pour cela nous passons aux composantes (de la matrice) et nous considérons

$$\begin{aligned}h_{kl}: U \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ h_{kl}(x, t) &= (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(tx).\end{aligned}\tag{16.624}$$

Étant donné que f est de classe C^3 , la dérivée de h_{kl} par rapport à x_i ne pose pas de problèmes :

$$\frac{\partial h_{kl}}{\partial x_i} = t(t-1) \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}(tx),\tag{16.625}$$

57. En tant qu'application bilinéaire.

qui est encore continue à la fois en t et en x . La proposition 13.188 nous montre à présent que

$$Q_{kl}(x) = \int_0^1 (1-t)h_{kl}(tx)dt \quad (16.626)$$

est une fonction C^1 . Étant donné que les composantes de Q sont C^1 , la fonction Q est également C^1 .

Nous avons $Q(0) = \frac{1}{2}(Hf)_0 \in S_n \cap \text{GL}(n, \mathbb{R})$, d'abord parce que f est C^2 (et donc la matrice hessienne est symétrique), ensuite par hypothèse d^2f_0 est non dégénérée.

À partir de là, le lemme 16.156 donne un voisinage V de $Q(0)$ dans S_n et une application ϕ de classe C^1

$$\phi: V \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad (16.627)$$

telle que pour tout $A \in V$,

$$\phi(A)^t Q(0) \phi(A) = A. \quad (16.628)$$

Si on pose $M = \phi \circ Q$, et si x est dans un voisinage de zéro, Q étant continue nous avons $Q(x) \in V$ et donc

$$Q(x) = M(x)^t Q(0) M(x). \quad (16.629)$$

Notons que l'application $M: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ est de classe C^1 parce que Q et ϕ le sont.

Nous avons

$$f(x) - f(0) = x^t Q(x) x = x^t M(x)^t Q(0) M(x) x = y(x)^t Q(0) y(x) \quad (16.630)$$

où $y(x) = M(x)x = (\phi \circ Q)(x)x$ est encore une fonction de classe C^1 parce que la multiplication est une application C^∞ .

D'un autre côté le théorème de Sylvester 12.74 nous donne une matrice inversible P telle que

$$Q(0) = P^t \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & \\ & -\mathbb{1}_{n-p} \end{pmatrix} P. \quad (16.631)$$

Et nous posons enfin $u = \varphi(x) = Py(x)$ qui est toujours de classe C^1 et qui donne

$$f(x) - f(0) = y^t Q(0) y \quad (16.632a)$$

$$= y^t P^t \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} P y \quad (16.632b)$$

$$= u^t \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} u \quad (16.632c)$$

$$= u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2. \quad (16.632d)$$

Nous devons maintenant montrer que, quitte à réduire son domaine à un ouvert plus petit, φ est un C^1 -difféomorphisme. Dans la chaîne qui donne φ , seule l'application

$$\begin{aligned} g: U \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto M(x)x \end{aligned} \quad (16.633)$$

est sujette à caution. Nous allons appliquer le théorème d'inversion locale. Nous savons que g est de classe C^1 et donc différentiable; calculons la différentielle en utilisant la formule (11.293) :

$$dg_0(x) = \frac{d}{dt} [g(tx)]_{t=0} = \frac{d}{dt} [tM(tx)x]_{t=0} = M(0)x. \quad (16.634)$$

Note que nous avons utilisé la règle de Leibnitz pour la dérivée d'un produit, mais le second terme s'est annulé. Donc $dg_0 = M(0) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ et g est localement un C^1 -difféomorphisme.

Il suffit de restreindre φ au domaine sur lequel g est un C^1 -difféomorphisme pour que φ devienne lui-même un C^1 -difféomorphisme.

□

Définition 16.158.

Un point a est un **point critique** de la fonction différentiable f si $df_a = 0$.

Corollaire 16.159 ([221]).

Les points critiques non dégénérés d'une fonction C^3 sont isolés.

Démonstration. Soit a un point critique non dégénéré. Par le lemme de Morse 16.157, il existe un C^1 -difféomorphisme ψ et un entier p tel que

$$(f \circ \psi)(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 + f(a) \quad (16.635)$$

sur un voisinage $\mathcal{U}$ de a . Vue la formule générale $df_x(u) = \nabla f(x) \cdot u$, si x est un point critique de f , alors $\nabla f(x) = 0$. Dans notre cas, les points critiques de $f \circ \psi$ dans $\mathcal{U}$ doivent vérifier $x_i = 0$ pour tout i , et donc $x = a$.

Nous devons nous assurer que la fonction f elle-même n'a pas de points critiques dans $\mathcal{U}$. Pour cela nous utilisons la formule générale de dérivation de fonction composée :

$$\nabla(f \circ \psi)(x) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \nabla g_k(x). \quad (16.636)$$

Si $\psi(x)$ est un point critique de f , alors le membre de droite est le vecteur nul parce que tous les $\partial_k f(\psi(x))$ sont nuls. Par conséquent le membre de gauche est également nul, et x est un point critique de $f \circ \psi$. Or nous venons de voir que $f \circ \psi$ n'a pas de points critiques dans $\mathcal{U}$.

Donc f n'a pas de points critiques dans un voisinage d'un point critique non dégénéré. $\square$

16.14 Variétés

16.14.1 Introduction

Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur la sphère usuelle $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Une question naturelle est d'estimer la régularité de f ; est-elle continue, dérivable, différentiable ? Il n'existe pas de dérivée directionnelle étant donné que le quotient différentiel

$$\frac{f(x + \epsilon u_1, y + \epsilon u_2) - f(x, y)}{\epsilon}$$

n'a pas de sens pour un point $(x + \epsilon u_1, y + \epsilon u_2)$ qui n'est pas –sauf valeurs particulières– dans la surface. Pour la même raison il n'est pas possible de parler de différentiabilité de cette manière. Comment faire, sans devoir étendre le domaine de définition de f à un voisinage de la sphère ? Une solution possible est de parler de la notion de variété.

Une variété est un objet qui ressemble, vu de près, à $\mathbb{R}^m$ pour un certain m . En d'autres termes, on imagine une variété comme un recollement de morceaux de $\mathbb{R}^m$ vivant dans un espace plus grand $\mathbb{R}^n$. Ces morceaux sont appelés des ouverts de carte, et l'application qui exprime la ressemblance à $\mathbb{R}^m$ est l'application de carte.

16.14.2 Définition et propriétés

Définition 16.160.

Soit $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq m < n$ et $k \geq 1$. M est une variété de classe C^k de dimension m si pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, et un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ tel que $U \cap M$ soit le graphe d'une fonction $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 , c'est-à-dire qu'il existe un réagencement des coordonnées $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n})$ avec

$$M \cap U = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in V \mid \begin{cases} x_{i_{m+1}} = f_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \\ \vdots \\ x_{i_n} = f_{n-m}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \end{cases} \right\}$$

où V est un voisinage ouvert de $(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$.

La littérature regorge de théorèmes qui proposent des conditions équivalentes à la définition d'une variété. Celle que nous allons le plus utiliser est la suivante

Proposition 16.161.

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leq m \leq n - 1$. L'ensemble M est une variété si et seulement si $\forall a \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ et une application $F: W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ où W est un ouvert tels que

- (1) F est un homéomorphisme de W vers $M \cap \mathcal{U}$,
- (2) $F \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$,
- (3) Le rang de $dF(w) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est de rang maximum (c'est à dire m) en tout point $w \in W$.

Pour rappel, si $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, son rang⁵⁸ est la dimension de son image. Si A est la matrice d'une application linéaire, alors le rang de cette application linéaire est égal à la taille de la plus grande matrice carré de déterminant non nul contenue dans A ⁵⁹.

La condition de rang maximum sert à éviter le genre de cas de la figure 16.7 qui représente l'image de l'ouvert $] -1, 1[$ par l'application $F(t) = (t^2, t^3)$.

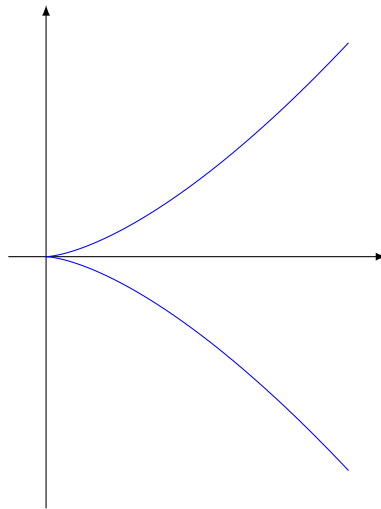


FIGURE 16.7 – Quelque chose qui n'est pas de rang maximum et qui n'est pas une variété.

La différentielle a pour matrice

$$dF(t) = (2t, 3t^2). \quad (16.637)$$

Le rang maximum est 1, mais en $t = 0$, la matrice vaut $(0, 0)$ et son rang est zéro. Pour toute autre valeur de t , c'est bon.

Une autre caractérisation des variétés est donnée par la proposition suivante

Proposition 16.162.

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leq m \leq n - 1$. L'ensemble M est une variété si et seulement si $\forall a \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ tel et une application $G \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n-m})$ tel que

- (1) le rang de $dG(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$ soit maximum (c'est à dire $n - m$) en tout $a \in M$,
- (2) $M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \text{ tel que } G(x) = 0\}$.

16.14.3 Espace tangent

Soit M , une variété dans $\mathbb{R}^n$, et considérons un chemin $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in I$ et tel que $\gamma(0) = a$ et que γ est dérivable en 0. La **tangente** au chemin γ au point $a \in M$ est la droite

$$s \mapsto a + s\gamma'(0). \quad (16.638)$$

⁵⁸. Définition 6.12.

⁵⁹. Proposition 6.26

L'espace **tangent** de M au point a est l'ensemble décrit par toutes les tangentes en a pour tous les chemins γ possibles.

Proposition 16.163.

Une variété de dimension m dans $\mathbb{R}^n$ a un espace tangent de dimension m en chacun de ses points.

16.15 Prolongement de fonctions et complétion d'espaces métriques

Sources : [222]

Lemme 16.164.

Soit E , un espace vectoriel normé complet et (A_n) une suite emboîtée de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro. Alors l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ contient exactement un point.

Démonstration. Si l'intersection contenait deux points distincts a et b , alors nous aurions $\text{diam}(A_n) \geq \|a - b\|$, ce qui contredirait la limite.

Soit une suite (x_n) avec $x_k \in A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est une suite de Cauchy. En effet si $\epsilon > 0$, considérons N tel que $\text{diam}(A_N) < \epsilon$. Dans ce cas dès que $n, m > N$ nous avons $x_n, x_m \in A_N$ et donc $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$. La suite x_n converge donc vers un élément dans E .

Nous devons montrer que $x \in A_k$ pour tout k . La queue de suite $(x_n)_{n \geq k}$ est une suite de Cauchy dans A_k qui converge donc vers un élément de A_k (ici nous utilisons le fait que A_k est fermé). Par unicité de la limite, cette dernière doit être x . Par conséquent $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. $\square$

Théorème 16.165 ([223]).

Soient X et Y des espaces vectoriels normés. Pour une application linéaire $f: X \rightarrow Y$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est continue sur X ,
- (2) f est continue en un point de X ,
- (3) f est bornée.

Proposition 16.166.

Soit un espace normé X , un espace de Banach F et une partie dense A de X . Si l'application linéaire

$$f: (A, \|\cdot\|_X) \rightarrow F \quad (16.639)$$

est continue⁶⁰, alors il existe une unique application linéaire continue $\tilde{f}: X \rightarrow F$ prolongeant f . De plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Démonstration. Soit $x \in X$ et la suite d'ensemble

$$A_n = \{y \in A \text{ tel que } \|x - y\| \leq 2^{-n}\}. \quad (16.640)$$

Étant donné que A est dense, ces ensembles sont tous non vides. De plus $\text{diam } A_n \rightarrow 0$ parce que si $y, y' \in A_n$ alors

$$\|y - y'\| \leq \|y - x\| + \|x - y'\| \leq 2^{-n+1}. \quad (16.641)$$

Vu que f est bornée, la suite d'ensembles $f(A_n)$ est une suite emboîtée d'ensembles non vides de F . De plus leur diamètre tend vers zéro. En effet si $z, z' \in f(A_n)$, nous posons $z = f(y)$, $z' = f(y')$ et nous avons

$$\|z - z'\| \leq \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(y')\| \leq \|f\|(\|y - x\| + \|x - y'\|), \quad (16.642)$$

60. Nous avons bien mis sur A la topologie induite de X . Notons que ce n'est pas toujours celle qui est la plus naturelle sur A .

ce qui montre que $\text{diam } f(A_n) \leq \|f\| 2^{-n+1}$. Notons que nous avons utilisé la linéarité de f . Par le lemme 16.164, l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f(A_n)}$ contient exactement un point. Nous posons

$$S(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f(A_n)}. \quad (16.643)$$

Nous allons montrer que l'application $x \mapsto S(x)$ ainsi définie est l'application que nous cherchons.

Nous commençons par montrer que pour toute suite $y_k \rightarrow x$ avec $y_k \in A$ nous avons

$$f(y_k) \rightarrow S(x). \quad (16.644)$$

Pour cela nous considérons $n_0 \in \mathbb{N}$ et k_0 tel que $y_{k_0} \in A_{n_0}$. Avec cela nous avons

$$\|f(y_k) - S(x)\| \leq \text{diam}(A_{n_0}) \leq \|f\| 2^{-n_0+1}. \quad (16.645)$$

Pour montrer que S est linéaire, nous considérons deux suites dans A : $y_k \rightarrow x$ et $y'_k \rightarrow x'$ ainsi que la somme $y_k + y'_k \rightarrow x + x'$. Nous écrivons la relation (16.644) pour ces trois suites :

$$f(y_k) \rightarrow S(x) \quad (16.646a)$$

$$f(y'_k) \rightarrow S(x') \quad (16.646b)$$

$$f(y_k + y'_k) \rightarrow S(x + x'). \quad (16.646c)$$

Cependant, étant donné que f est linéaire, pour tout k nous avons $f(y_k + y'_k) = f(y_k) + f(y'_k)$ et par conséquent

$$f(y_k + y'_k) \rightarrow S(x) + S(x'). \quad (16.647)$$

Par unicité de la limite, $S(x + x') = S(x) + S(x')$. Le même genre de raisonnement montre que $S(\lambda x) = \lambda S(x)$. L'application S est donc linéaire.

En ce qui concerne la continuité, nous avons

$$\|S(x)\| = \lim \|f(y_k)\| \leq \|f\| \lim \|y_k\| = \|f\| \|x\|, \quad (16.648)$$

donc $\|S\| \leq \|f\|$, c'est à dire que S est borné et donc continue parce que linéaire (théorème 16.165).

Nous montrons maintenant que S prolonge f . Si $x \in A$, alors nous avons $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(A_n) = f(x)$, et donc $S(x) = f(x)$. Cela montre du même coup que $\|f\| \leq \|S\|$ et que par conséquent $\|f\| = \|S\|$.

Passons à la partie sur l'unicité. Soient donc S et T , deux prolongements continus de f sur X . Soit $x \in X$ et une suite $x_n \rightarrow x$ dans A . Par continuité nous avons $T(x_n) \rightarrow T(x)$ et $S(x_n) \rightarrow S(x)$. Étant donné que par ailleurs pour tout n nous avons $S(x_n) = T(x_n)$, l'unicité de la limite montre que $T(x) = S(x)$. $\square$

Définition 16.167.

Soit une application $f: X \rightarrow Y$. Le **module de continuité** de f est la fonction $\omega_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit. On pose $\omega_f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et si $h > 0$,

$$\omega_f(h) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ d_X(x, y) < h}} d_Y(f(x), f(y)). \quad (16.649)$$

Lemme 16.168.

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ et ω son module de continuité. Si λ et h sont strictement positifs avec $\lambda h \in [0, 1]$ alors

$$\phi(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h). \quad (16.650)$$

Démonstration. La fonction ω est décroissante, et pour $h, k > 0$ nous avons $\omega(h+k) \leq \omega(h) + \omega(k)$. Par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\omega(kh) \leq k\omega(h). \quad (16.651)$$

En écrivant cela pour $k = \lceil \lambda \rceil$, nous avons

$$\omega(\lambda h) \leq \omega(kh) \leq k\omega(h) \leq (\lambda + 1)\omega(h). \quad (16.652)$$

$\square$

Lemme 16.169.

Une fonction f est uniformément continue si et seulement si son module de continuité est continu en zéro.

Dans la même veine que la proposition 16.166 nous avons ce résultat.

Théorème 16.170 ([224]).

Soient E et F , deux espaces métriques complets ainsi que A dense dans E . Si $u: A \rightarrow F$ est uniformément continue, alors elle se prolonge de façon unique en une fonction continue $\tilde{u}: E \rightarrow F$. De plus ce prolongement est uniformément continu.

Démonstration. Soit $x \in E \setminus A$ et une suite (x_n) contenue dans A et convergente vers x . Nous voulons définir

$$\tilde{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) \quad (16.653)$$

mais pour ce faire nous devons prouver que la suite $(u(x_n))$ converge dans F et que la limite ne dépend pas de la suite choisie parmi les suites de A qui convergent (dans E) vers x .

Commençons par montrer que $(u(x_n))$ est de Cauchy dans F . Pour cela nous prenons $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ telle que $d_E(a, b) < \eta$ implique $d_F(u(a), u(b)) < \epsilon$ (uniforme continuité de u). Après, il suffit de choisir N tel que pour tout $n, m > N$ nous ayons $d(x_m, x_n) < \eta$ (parce que u_n est de Cauchy). Avec tout ça nous avons

$$d_F(u(x_m), u(x_n)) < \epsilon, \quad (16.654)$$

ce qui signifie que $(u(x_n))$ est de Cauchy et donc convergente dans F .

Nous voulons montrer maintenant que si (x_n) et (y_n) sont deux suites dans A convergentes vers x alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(y_n)$. Pour cela nous considérons la suite $z = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$. Nous avons évidemment $z_n \rightarrow x$, et donc $u(z_n)$ converge dans F par ce qui a été dit plus haut. Mais $u(x_n)$ et $u(y_n)$ en sont deux sous-suites convergentes. Donc leurs limites sont égales.

Il reste à montrer que ce $\tilde{u}$ est continue et uniformément continue. Pour cela nous utilisons le module de continuité et le lemme 16.169. Étant donné que $\tilde{u}$ prolonge u nous avons

$$\omega_{\tilde{u}}(h) \geq \omega_u(h). \quad (16.655)$$

Soit $h > 0$ et $\epsilon > 0$; soit aussi $x, y \in E$ tels que $d(x, y) < h$. Nous prenons des suites $(a_n) \rightarrow x$ et $(y_n) \rightarrow y$ tout en choisissant n assez grand pour avoir $d_E(a_n, b_n) < h$. Nous avons

$$d_F(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) \leq d_F(\tilde{u}(x), u(a_n)) + d(u(a_n), u(b_n)) + d_F(u(b_n), \tilde{u}(y)). \quad (16.656)$$

Si n est assez grand, par construction de $\tilde{u}$, le premier et le dernier terme sont plus petits que ϵ . Par définition du module de continuité nous avons d'autre part $d_F(u(a_n), u(b_n)) \leq \omega_u(h)$. Du coup

$$d_F(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) \leq \omega_u(h) + 2\epsilon. \quad (16.657)$$

Si nous prenons le supremum sur les x et y vérifiant $d_E(x, y) < h$, à gauche nous obtenons $\omega_{\tilde{u}}(h)$ tandis que le membre de droite ne dépend pas de x et y . Donc pour tout ϵ , nous avons

$$\omega_{\tilde{u}}(h) \leq \omega_u(h) + 2\epsilon. \quad (16.658)$$

En comparaison avec (16.655), nous trouvons

$$\omega_{\tilde{u}}(h) \leq \omega_u(h). \quad (16.659)$$

Les fonctions u et $\tilde{u}$ ayant le même module de continuité, le lemme 16.169 nous enseigne que l'une est uniformément continue si et seulement si l'autre l'est. Vu que u est uniformément continue par hypothèse, le prolongement $\tilde{u}$ est uniformément continu. $\square$

Définition 16.171.

Un **plongement** de l'espace topologique X dans Y est une application $f: X \rightarrow Y$ telle que $f: X \rightarrow f(X)$ soit un homéomorphisme.

Théorème 16.172 (Extension des isométries).

Soit $\tilde{M}$ un espace métrique complet et une application isométrique

$$f: A \rightarrow \tilde{M} \quad (16.660)$$

où A est une partie dense d'un espace métrique M (pas spécialement complet). Alors f accepte une unique extension isométrique

$$\tilde{f}: M \rightarrow \tilde{M} \quad (16.661)$$

Supposons de plus que M soit complet⁶¹. Alors $\tilde{f}: M \rightarrow \tilde{M}$ est une bijection si et seulement si $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'unicité. Soit $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$, deux extensions de f et $x \in M$. Si (a_n) est une suite dans A convergeant vers x (possible parce que A est dense dans M), alors nous avons

$$\tilde{f}_1(a_n) = \tilde{f}_2(a_n) \quad (16.662)$$

et donc $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ par continuité (une application isométrique est continue (proposition 5.119)).

Nous démontrons à présent l'existence.

Construction de $\tilde{f}$ Soit $x \in M$ et (a_n) une suite dans A qui converge vers x . Nous définissons

$$\tilde{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k). \quad (16.663)$$

Note : nous pouvons prouver que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (a_n) convergeant vers x , mais ce serait superflu parce que nous avons déjà prouvé l'unicité de $\tilde{f}$. Par contre nous devons expliquer pourquoi la limite du membre de droite de (16.663) existe dans $\tilde{M}$. D'abord la suite (a_n) est de Cauchy parce qu'elle est convergente (attention : M n'étant pas complet le fait d'être de Cauchy n'implique pas la convergence). Donc, étant donné que f est une isométrie, la suite $(f(a_n))$ est de Cauchy dans $\tilde{M}$. Or ce dernier étant complet, la suite des images converge.

Montrons que cette application $\tilde{f}: M \rightarrow \tilde{M}$ répond à la question.

$\tilde{f}$ est isométrique Soient $a, b \in M$ et des suites dans A convergeant vers eux : $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.

Nous avons, par continuité de l'application distance,

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b)) \quad (16.664a)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} d(\tilde{f}(a_k), \tilde{f}(b_l)) \quad (16.664b)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} d(f(a_k), f(b_l)) \quad (16.664c)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} d(a_k, b_l) \quad (16.664d)$$

$$= d(a, b). \quad (16.664e)$$

Cela prouve que $\tilde{f}$ est une isométrie.

Pour la suite nous supposons que M est complet. Notons tout de suite que $\tilde{f}$ est injective parce qu'elle est isométrique.

Bijection (premier sens) Nous supposons que $\tilde{f}: M \rightarrow \tilde{M}$ est une bijection. Par l'absurde nous supposons que $f(A)$ n'est pas dense dans $\tilde{M}$, c'est à dire que nous avons un point $x \in \tilde{M}$ et une boule n'intersectant pas $f(A)$:

$$B(x, r) \cap f(A) = \emptyset. \quad (16.665)$$

Étant donné que $\tilde{f}$ a pour image des limites de suites dans $f(A)$, l'image de $\tilde{f}$ est contenue dans $\overline{f(A)}$. Donc si $\tilde{f}$ est surjective, c'est que $\tilde{M} \subset \overline{f(A)}$ et donc que $\overline{f(A)} = \tilde{M}$. Cela prouve que si $\tilde{f}$ est bijective, alors $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$.

61. Il me semble que cette hypothèse manque dans [69].

Bijection (l'autre sens) Nous supposons que $\overline{f(A)} = \tilde{M}$ et nous devons prouver que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $x \in \tilde{M}$ et $f(a_n)$ une suite dans $f(A)$ qui converge vers x ; une telle suite existe parce que $f(A)$ est dense dans $\tilde{M}$. Cette suite est de Cauchy dans $\tilde{M}$ parce que dans un espace métrique, une suite convergente est de Cauchy. La suite (a_n) est elle-même également de Cauchy parce que

$$d(a_n, a_m) = d(f(a_n), f(a_m)). \quad (16.666)$$

Étant donné que (a_n) est de Cauchy dans M , elle converge vers un élément que nous nommons $a \in M$. Par continuité de f nous avons alors

$$\tilde{f}(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = x. \quad (16.667)$$

Cela prouve que x est bien dans l'image de $\tilde{f}$ et donc que $\tilde{f}$ est surjective. □

Une conséquence du théorème de prolongement est le théorème suivant qui permet de compléter un espace métrique.

Théorème 16.173 (Complétion d'un espace métrique[225, 69]).

Tout espace métrique se plonge par une isométrie à image dense dans un espace métrique complet. De plus ce dernier est unique à isométrie près.

Plus précisément, soit (M, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $\tilde{M}$ muni d'un plongement isométrique $\varphi: M \rightarrow \tilde{M}$ tel que $\varphi(M)$ soit dense dans $\tilde{M}$.

Ce complété de M est unique au sens suivant. Si $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$ sont deux espaces métriques complets munis de plongements isométriques $f_i: M \rightarrow \tilde{M}_i$ dont les images sont denses, alors il existe une bijection isométrique $\phi: \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ telle que $\phi \circ f_1 = f_2$.

Démonstration. Nous ne prouvons que l'existence.

Soit C_M l'ensemble des suites de Cauchy de M . Nous définissons

$$\begin{aligned} f: C_M \times C_M &\rightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n). \end{aligned} \quad (16.668)$$

Notre première tâche est de nous assurer que cela est bien défini, c'est à dire que la limite existe toujours. En effet, si u et v sont des suites de Cauchy dans M , nous avons

$$|d(u_n, v_n) - d(u_m, v_m)| \leq d(u_n, v_n) + d(u_m, v_m) \leq 2\epsilon \quad (16.669)$$

dès que m et n sont assez grand. Cela prouve que la suite $n \mapsto d(u_n, v_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, elle converge⁶².

Nous considérons la relation d'équivalence $u \sim v$ si et seulement si $f(u, v) = 0$. Nous posons $\tilde{M} = C_M / \sim$ et nous y mettons la distance

$$d([u], [v]) = f(u, v) \quad (16.670)$$

et nous devons encore vérifier que cela est bien défini. Prenons $u' \sim u$ et $v' \sim v$. Alors nous avons

$$d(u'_n, v'_n) \leq d(u'_n, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, v'_n), \quad (16.671)$$

et donc

$$d(u', v') = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u'_n, v'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) = d(u, v). \quad (16.672)$$

Le même argument en inversant les primes et les non primes montre l'inégalité inverse. Donc $d(u, v) = d(u', v')$ dans C_M , et donc la distance (16.670) est bien définie sur $\tilde{M}$.

Afin de s'assurer que $\tilde{M}$ répond bien à la question du théorème, il faut encore démontrer les points suivants :

⁶². Ici nous utilisons la complétude de $\mathbb{R}$. Cette dernière doit donc être démontrée indépendamment. De plus nous ne pouvons pas définir $\mathbb{R}$ comme étant le complété de $\mathbb{Q}$ en utilisant ce théorème.

- M se plonge isométriquement dans $\tilde{M}$.
- l'image de M par le plongement est dense dans $\tilde{M}$.
- $\tilde{M}$ est complet.

Nous allons maintenant considérer l'application

$$\begin{aligned}\varphi: M &\rightarrow \tilde{M} \\ x &\mapsto \text{la classe de la suite constante } x.\end{aligned}\tag{16.673}$$

Plongement isométrique Nous allons montrer que cela est une isométrie bijective et que $\varphi(M)$ est dense dans $\tilde{M}$. Le fait que φ soit bijective entre M et $\varphi(M)$ est évident. C'est une isométrie parce que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi(x)_n, \varphi(y)_n) = d(x, y).\tag{16.674}$$

Densité Soit $[u] \in \tilde{M}$. Tous les termes u_n sont des éléments de M . Nous considérons la suite dans $\varphi(M)$ donnée par

$$a_n = \varphi(u_n)\tag{16.675}$$

Chaque a_n est un élément ⁶³ de $\tilde{M}$. Montrons que (a_n) converge dans $\tilde{M}$ vers u . Nous avons

$$d(a_n, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} d((a_n)_k, u_k)\tag{16.676a}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} d(u_n, u_k)\tag{16.676b}$$

$$= d(u_n, \ell)\tag{16.676c}$$

en notant ℓ la limite de la suite (u_n) . Ici nous avons utilisé le fait que la fonction distance était continue pour l'inverser avec la limite, par le théorème 11.20. Nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, [u]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, \ell) = 0.\tag{16.677}$$

Complétude Nous passons maintenant à la preuve du fait que $\tilde{M}$ est complet. Soit (y_n) une suite de Cauchy dans $\tilde{M}$. Soit $\epsilon > 0$; nous définissons $K(n)$ par

$$d((y_n)_k, (y_n)_l) < \epsilon\tag{16.678}$$

dès que $k, l \geq K(n)$. Cette définition fonctionne parce que pour chaque n , y_n est une suite de Cauchy dans M . Nous posons

$$x_n = (y_n)_{K(n)} \in M\tag{16.679}$$

et nous allons montrer que (x_n) est de Cauchy dans M –donc est un élément de $\tilde{M}$ – et que $y_k \rightarrow (x_n)$ dans $\tilde{M}$.

Nous commençons par montrer que (x_n) est de Cauchy dans M . Nous avons

$$d(x_n, x_m) = d((y_n)_{K(n)}, (y_m)_{K(m)})\tag{16.680a}$$

$$\leq d((y_n)_{K(n)}, (y_n)_l) + d((y_n)_l, (y_m)_l) + d((y_m)_l, (y_m)_{K(m)})\tag{16.680b}$$

Nous choisissons n, m tels que $d(y_n, y_m) < \epsilon$, ce qui nous permet de choisir l de telle façon à avoir $d((y_n)_k, (y_m)_k) < \epsilon$ pour tout $k \geq l$. De plus, quitte à encore augmenter l , nous supposons que $l > K(m)$ et $l > K(n)$. Avec ces choix nous voyons que $d(x_n, x_m) < 3\epsilon$, ce qui signifie que la suite (x_n) est de Cauchy dans M .

En ce qui concerne la convergence $y_n \rightarrow (x)$, on a

$$d(y_n, (x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d((y_n)_k, (y_k)_{K(k)})\tag{16.681a}$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} d((y_n)_k, (y_n)_l) + \lim_{k \rightarrow \infty} d((y_n)_l, (y_k)_l) + \lim_{k \rightarrow \infty} d((y_k)_l, (y_k)_{K(k)})\tag{16.681b}$$

Nous devons trouver un n tel que si k est suffisamment grand, le tout est majoré par ϵ . Voici nos choix :

63. À partir de maintenant nous n'écrivons plus explicitement la classe d'équivalence.

- n tel que $d(y_n, y_m) < \epsilon$ dès que $m \geq n$,
 - $k > n$,
 - $k > K(n)$,
 - $l > k$,
 - $l > K(k)$,
 - l suffisamment grand pour que $d((y_n)_l, (y_k)_l) < \epsilon$.
- Avec tous ces choix, les trois termes de (16.681b) sont plus petits que ϵ .
Ceci prouve que $\tilde{M}$ est complet.

□

Théorème 16.174 (Principe du prolongement analytique).

Soit U un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble D de U contenant un point d'accumulation dans U , alors elles sont égales sur U .

16.16 Un petit extra

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que

- (1) $f(1) = 1$,
- (2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout réels x et y .

Nous pouvons montrer⁶⁴ que la seule fonction *continue* qui possède ces propriétés est la fonction identité $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De la même manière, il est aisé de voir que les seules applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ sont de la forme

$$f(x) = Ax \quad (16.682)$$

pour une constante réelle A . Une question naturelle qu'on peut alors se poser est la suivante :

Est-il possible de définir une fonction non continue ayant les propriétés (1) et (2) ?

En fait, il est possible de démontrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ (où F est un espace vectoriel) sera continue. Ceci ne reste plus vrai si l'espace vectoriel E est de dimension infinie. Donc une manière de trouver une réponse positive à la question posée plus haut, serait de voir $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel de dimension infinie. Après un peu de réflexion, la réponse est venue à nous (merci à Nicolas et à Samuel).

Si nous admettons l'axiome du choix, alors nous pouvons appliquer le théorème de Zorn et nous savons que tout espace vectoriel admet une base. En particulier, l'ensemble des réels vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ admet une base, i.e. $\exists (e_i)_{i \in I}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que tout réel s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de ces e_i , i.e.

$$\forall r \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \text{ des éléments de } \mathbb{Q} \text{ tels que } r = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i. \quad (16.683)$$

Utilisons cette base pour définir une fonction h de la manière suivante.

$$\forall i \in I, \text{ on définit } h(e_i) = \alpha_i \quad (16.684)$$

où les α_i doivent être bien choisis dans $\mathbb{R}^n$. Pour satisfaire la propriété (1), choisissons sans perte de généralité $e_1 = 1$ et $h(e_1) = 1$. Ajoutons à cette propriété la linéarité en imposant que

$$h\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \lambda_i \alpha_i. \quad (16.685)$$

Les équations (1) et (2) nous permettent de voir que, moyennant le choix des α_i , la fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}^n$ et linéaire. Il est clair que si nous prenons par exemple

$$\alpha_i = e_i \quad \forall i \in I$$

64. et toi, tu le peux ?

nous obtenons que la fonction h est en fait la fonction identité sur $\mathbb{R}^n$. Par contre, si nous définissons la fonction h comme satisfaisant la propriété (2) et si nous choisissons les α_i dans (1) de la manière suivante

$$\begin{aligned}h(e_1) &= e_2 \\h(e_2) &= e_1 \\h(e_i) &= e_i \quad \forall i \in I \setminus \{1, 2\}\end{aligned}\tag{16.686}$$

alors la fonction ainsi obtenue est linéaire et bien définie mais n'est plus l'identité. Donc nous avons trouvé une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas continue.

Exercice 3 Trouver d'autres exemples d'applications linéaires non continues (pas nécessairement des transformations de $\mathbb{R}^n$).

Liste des notations

$N \triangleleft G$ Le sous-groupe N est normal dans G , page 85

Algèbre

$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ Les applications une fois continument dérivables, page 635

$\mathcal{L}(V, W)$ Ensemble des applications linéaires de V dans W , page 272

$\mathbb{K}(A)$ corps contenant $\mathbb{K}$ et A , page 161

$\mathbb{K}[A]$ anneau contenant $\mathbb{K}$ et A , page 161

$\mathbb{N}_0$ les naturels non nuls : $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, page 71

$\mathcal{M}_{n \times m}$ l'ensemble des matrices $n \times m$, page 274

∇f gradient de la fonction f , page 617

proj_V projection de $V \times W$ sur V , page 346

$df_a(u)$ Application de la différentielle de f sur le vecteur u , page 607

$f^{(n)}$ La n -ième dérivée de la fonction f , page 644

$o(x)$ fonction tendant rapidement vers zéro, page 645

(p) idéal engendré par p , page 131

$[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ degré d'une extension de corps, page 161

$\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier, page 151

$\mathbb{F}_{p^n}$ corps fini à p^n éléments, page 186

$\mathbb{Q}$ corps des fractions sur $\mathbb{Z}$, page 151

$\text{Frac}(A)$ Le corps des fractions de l'anneau A , page 151

$\text{Fun}(X, Y)$ les applications de X vers Y , page 117

$S(E)$ Les opérateurs auto-adjoints de E , page 422

U_n Le groupe des racines n^{e} de l'unité., page 119

$\text{res}(P, Q)$ résultat des polynômes P et Q , page 293

$\sqrt{A}$ racine d'une matrice hermitienne positive, page 717

$\theta_\alpha(P)$ la multiplicité de α par rapport à P , page 145

$A[X]$ tous les polynômes de degré fini à coefficients dans A , page 141

$A_n[X]$ les polynômes à coefficients dans A et de degré inférieur à n , page 141

$B \mid A$ B divise A , page 143

$C(P)$ matrice compagnon, page 399

$E_\lambda(u)$ Espace propre de u , page 375

$mat_{\mathcal{B}}(q)$ matrice de q dans la base $\mathcal{B}$, page 894

$S^+(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques semi-définies positives, page 384

$S^{++}(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques strictement définies positives, page 384

$U(A)$ ensemble des inversibles, page 117

Ensembles de matrices

$O(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, page 297

$\Omega(E)$ formes quadratiques non dégénérées, page 1087

$Q(E)$ formes quadratiques réelles sur E , page 417

$Q^+(E)$ formes quadratiques positives, page 1087

$Q^{++}(E)$ formes quadratiques strictement définies positives, page 1087

$S^+(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques définies positives, page 718

$S^{++}(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques strictement définies positives, page 718

$S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ matrices symétriques réelles de signature (p, q) , page 1087

$\beta(s)$ Vecteur unitaire de la binormale, page 952

$\gamma \sim g$ Équivalence d'arcs paramétrés, page 943

$\nu(s)$ Vecteur unitaire de la normale principale, page 952

$c(s)$ rayon de courbure, page 952

$t(s)$ Torsion, page 953

Géométrie

$(x_0 : \dots : x_n)$ coordonnées homogènes dans un espace projectif, page 538

$\text{Conv}(A)$ enveloppe convexe, page 517

$\mathbb{C}[G]$ combinaisons d'éléments de G à coefficients dans $\mathbb{C}$, page 773

$\text{PGL}(E)$ groupe projectif, page 537

B^o orthogonal dans le dual, page 278

$P(E)$ l'espace projectif de E , page 531

$P_1(\mathbb{C})$ sphère de Poincaré, page 544

Chaînes de Markov

$\pi(x)$ lié au temps de retour, page 1515

Probabilités et statistique

$\sigma(X)$ La tribu engendrée par la variable aléatoire X , page 1395

$a \wedge b$ $\min(a, b)$, page 1533

K_X matrice de covariance d'un vecteur gaussien, page 1439

$m(\mathcal{A})$ Ensemble des fonctions $\mathcal{A}$ -mesurables, page 454

Théorie des groupes

$(G/H)_g$ classes à gauche, page 103

$[a]_p$ ensemble des $a + kp$, page 96

$[G, G]$ groupe dérivé, page 87

$[g, h]$ commutateur dans un groupe, page 87

$\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ Le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$, page 523

gr groupe engendré, page 85

$\hat{G}$ groupe des caractères de G , page 769

σ_x réflexion par rapport à x , page 732

A_n groupe alterné, page 109

$D(G)$ groupe dérivé, page 87

D_n groupe diédral, page 744

G^{ab} groupe abélianisé de G , page 87

G_x stabilisateur de x , page 102

$N \times_{\phi} H$ produit semi-direct, page 112

S_n le groupe symétrique, page 106

Topologie et théorie des ensembles

$\complement A$ Le complémentaire de l'ensemble A , page 70

$\text{Diam}(A)$ Diamètre de la partie A , page 592

∂A La frontière de l'ensemble A , page 320

$A \Delta B$ différence symétrique, page 70

A^c complémentaire de A , page 70

Analyse

$\text{Isom}(X)$ Le groupe des isométries de X , page 222

$\mu \ll \nu$ La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure ν , page 790

$C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ Fonctions à valeurs dans les distributions., page 1306

$C^{\infty}(I, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ fonctions à valeurs dans les distributions, page 1251

$(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$ complété de l'espace mesuré $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$, page 447

$\mathcal{L}(E, F)$ Les applications linéaires de E vers F , page 351

$\mathcal{L}^{(n)}(V, W)$ L'espace des applications n -linéaires $V^n \rightarrow W$, page 641

L Les applications linéaires continues de E vers F , page 351

$\mathbb{D}_b$ l'ensemble de écritures décimales en base b , page 333

$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, page 78

$\mathbb{R}^+$ les réels positifs ou nuls, page 80

$\exp$ exponentielle, page 1019

$\text{GL}(E, F)$ les bijections linéaires et continues, page 309

$\mathcal{H}'$ dual, page 1109

$\liminf a_n$ limite inférieure, page 464

$\limsup a_n$ limite supérieure, page 464

$\mathcal{L}^p$ espace de Lebesgue, sans les classes, page 1126

$\mu \perp \nu$ mesures perpendiculaires, page 790

- μ^* La mesure extérieure associée à la mesure μ , page 442
- $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ dérivées partielles d'une fonction complexe, page 1165
- $\text{proj}_K(x)$ projection orthogonale de x sur y , page 1106
- $\sigma(\mathcal{A})$ tribu engendrée par $\mathcal{A}$, page 430
- $\mathcal{D}(\Omega)$ Les fonctions C^∞ à support compact sur Ω , page 1238
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ espace des distributions tempérées, page 1244
- $A^2(\Omega)$ espace de Bergman, page 1196
- $A^\perp$ orthogonal d'une partie, page 1107
- $C_c(I)$ fonctions continues à support compact dans I , page 1108
- $f \sim g$ fonctions ayant des limites équivalentes, page 561
- $H^1(\Omega)$ espace de Sobolev sur Ω , page 1268
- $H^1(I)$ espace de Sobolev, page 1261
- $H^m(M)$ espace de Sobolev, page 1269
- $L^1_{loc}(I)$ fonctions intégrables sur les compacts de I , page 1262
- L^p espace de Lebesgue avec les classes, page 1127
- $M_i\varphi$ La fonction $x \mapsto x_i\varphi(x)$, page 1160
- S_nf somme partielle de série de Fourier, page 1138