

Le Frido, volume 3

Plusieurs versions et extensions de ce document.

La version courante Vous trouverez une version dédiée à l'agrégation régulièrement mise à jour à l'adresse suivante :

<http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf>

La version la plus complète Une version plus complète, comprenant le Frido, des exercices ainsi que de la mathématique de niveau recherche :

<http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/mazhe.pdf>

Tout ce qu'il faut savoir pour recompiler soi-même Pour savoir comment recompiler ce document à l'identique, il faut lire

<https://github.com/LaurentClaessens/mazhe>

<http://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/readme.pdf>



Copyright 2011-2016 Laurent Claessens, Carlotta Donadello

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled “GNU Free Documentation License”.

Illustration de couverture : Pepper&Carrot <http://www.peppercarrot.com/fr> par David Revoy.

ISBN : 978-2-9540936-7-3

Thèmes

Ceci est une sorte d'index thématique.

Thème 1 : Fonctions Lipschitz

- (1) Définition : 11.189.
- (2) La notion de Lipschitz est utilisée pour définir la stabilité d'un problème, définition 25.23.

Thème 2 : Polynôme de Taylor

- (1) Énoncé : théorème 11.204.
- (2) Le polynôme de Taylor généralise à l'utilisation de toutes les dérivées disponibles le résultat de développement limité donné par la proposition 11.76.
- (3) Il est utilisé pour justifier la méthode de Newton autour de l'équation (25.128).

Thème 3 : Points fixes

- (1) Il y a plusieurs théorèmes de points fixes.

Théorème de Picard 16.109 donne un point fixe comme limite d'itérés d'une fonction Lipschitz. Il aura pour conséquence le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123, l'équation de Fredholm, théorème 16.114 et le théorème d'inversion locale dans le cas des espaces de Banach 16.128.

Théorème de Brouwer qui donne un point fixe pour une application d'une boule vers elle-même. Nous allons donner plusieurs versions et preuves.

- (a) Dans $\mathbb{R}^n$ en version C^∞ via le théorème de Stokes, proposition 16.117.
- (b) Dans $\mathbb{R}^n$ en version continue, en s'appuyant sur le cas C^∞ et en faisant un passage à la limite, théorème 16.118.
- (c) Dans $\mathbb{R}^2$ via l'homotopie, théorème 19.19. Oui, c'est très loin. Et c'est normal parce que ça va utiliser la formule de l'indice qui est de l'analyse complexe ¹.

Théorème de Markov-Kakutani 16.121 qui donne un point fixe à une application continue d'un convexe fermé borné dans lui-même. Ce théorème donnera la mesure de Haar 16.122 sur les groupes compacts.

Théorème de Schauder 16.119 qui est une version valable en dimension infinie du théorème de Brouwer.

- (2) Pour les équations différentielles
 - (a) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 16.125 pour les équations différentielles.
 - (b) Le théorème de Schauder 16.119 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 16.123) sans la condition Lipschitz, mais alors sans unicité de la solution. Notons que de ce point de vue nous sommes dans la même situation que la différence entre le théorème de Brouwer et celui de Picard : hors hypothèse de type «contraction», point d'unicité.
- (3) En calcul numérique
 - La convergence d'une méthode de point fixe est donnée par la proposition 25.55.
 - La convergence quadratique de la méthode de Newton est donnée par le théorème 25.61.
 - En calcul numérique, section 25.6
 - Méthode de Newton comme méthode de point fixe, sous-section 25.7.2.
- (4) D'autres utilisation de points fixes.
 - Processus de Galton-Watson, théorème 28.47.
 - Dans le théorème de Max-Milgram 17.44, le théorème de Picard est utilisé.

1. On aime bien parce que ça ne demande pas Stokes, mais quand même hein, c'est pas gratos non plus.

Thème 4 : Méthode de Newton

- (1) Nous parlons un petit peu de méthode de Newton en dimension 1 dans 25.7.
- (2) La méthode de Newton fonctionne bien avec les fonction convexes par la proposition 25.62.
- (3) La méthode de Newton en dimension n est le théorème 25.68.
- (4) Un intervalle de convergence autour de α s'obtient par majoration de $|g'|$, proposition 25.55.
- (5) Un intervalle de convergence quadratique s'obtient par majoration de $|g''|$, théorème 25.61.
- (6) En calcul numérique, section 25.7.

Thème 5 : Enveloppes

- (1) L'ellipse de John-Loewner donne un ellipsoïde de volume minimum autour d'un compact dans $\mathbb{R}^n$, théorème 13.212.
- (2) Le cercle circonscrit à une courbe donne un cercle de rayon minimal contenant une courbe fermée simple, proposition 14.81.
- (3) Enveloppe convexe du groupe orthogonal 12.36.

Thème 6 : Produit semi-direct de groupes

- (1) Définition 2.85.
- (2) Le corollaire 2.87 donne un critère pour prouver qu'un produit NH est un produit semi-direct.
- (3) L'exemple 12.80 donne le groupe des isométries du carré comme un produit semi-direct.
- (4) Le théorème 12.44 donne les isométries de $\mathbb{R}^n$ par $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_{\rho} O(n)$ où $T(n)$ est le groupe des translations.
- (5) La proposition 12.46 donne une décomposition du groupe orthogonal $O(n) = \text{SO}(n) \times_{\rho} C_2$ où $C_2 = \{\text{Id}, R\}$ où R est de déterminant -1 .
- (6) La proposition 8.44 donne $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_{\rho} \text{GL}(n, \mathbb{R})$ où $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$.

Thème 7 : Racines de polynôme et factorisation de polynômes

- (1) Si $\mathbb{A}$ est une anneau, la proposition 3.111 factorise une racine.
- (2) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, la proposition 3.113 factorise une racine avec sa multiplicité.
- (3) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, le théorème 3.115 factorise plusieurs racines avec leurs multiplicités.
- (4) Si $\mathbb{K}$ est un corps et α une racine dans une extension, le polynôme minimal de α divise tout polynôme annulateur par la proposition 4.55.
- (5) Le théorème 4.58 annule un polynôme de degré n ayant $n + 1$ racines distinctes.
- (6) La proposition 4.105 nous annule un polynôme à plusieurs variables lorsqu'il a trop de racines.
- (7) En analyse complexe, le principe des zéros isolés 19.20 annule en gros toute série entière possédant un zéro non isolé.
- (8) Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

Thème 8 : Théorème de Bézout

- (1) Pour $\mathbb{Z}^*$ c'est le théorème 2.24.
- (2) Théorème de Bézout dans un anneau principal : corollaire 3.69.
- (3) Théorème de Bézout dans un anneau de polynômes : théorème 3.105.
- (4) En parlant des racines de l'unité et des générateurs du groupe unitaire dans le lemme 3.9. Au passage nous y parlerons de solfège.

Thème 9 : Équations diophantiennes

- (1) Équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{N}$, équation (2.57).
- (2) Dans 2.5.5, nous résolvons $ax + by = c$ en utilisant Bézout (théorème 2.24).
- (3) L'exemple 3.79 donne une application de la pure notion de modulo pour $x^2 = 3y^2 + 8$. Pas de solutions.
- (4) L'exemple 3.80 résout l'équation $x^2 + 2 = y^3$ en parlant de l'extension $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et de stathme.
- (5) Les propositions 3.81 et 3.84 parlent de triplets pythagoriciens.
- (6) Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décomposition de fractions en éléments simples, théorème 16.59.

Thème 10 : Application réciproque

- (1) Définition 5.172.
- (2) Dans le cas des réels, des exemples sont donnés en 11.268.

Thème 11 : Extension de corps et polynômes

- (1) Définition d'une extension de corps 4.37.
- (2) Pour l'extension du corps de base d'un espace vectoriel et les propriétés d'extension des applications linéaires, voir la section 6.30.
- (3) Extension de corps de base et similitude d'application linéaire (ou de matrices, c'est la même chose), théorème 6.345.
- (4) Extension de corps de base et cyclicité des applications linéaires, corollaire 6.344.
- (5) À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 4.102.

Thème 12 : Rang

- (1) Définition 6.12.
- (2) Le théorème du rang, théorème 6.13
- (3) Prouver que des matrices sont équivalentes et les mettre sous des formes canoniques, lemme 6.15 et son corollaire 6.16.
- (4) Tout hyperplan de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ coupe $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, corollaire 6.16. Cela utilise la forme canonique sus-mentionnée.
- (5) Le lien entre application duale et orthogonal de la proposition 6.32 utilise la notion de rang.
- (6) Prouver les équivalences à être un endomorphisme cyclique du théorème 6.343 via le lemme 6.342.

Thème 13 : Topologie produit

- (1) La définition de la topologie produit est 5.5.
- (2) Pour les espaces vectoriels normés, le produit est donné par la définition 6.197.
- (3) L'équivalence entre la topologie de la norme produit et la topologie produit est le lemme 6.199.

Thème 14 : Produit de compact

- (1) Les produits d'espaces métriques compacts sont compacts ; c'est le théorème de Tykhonov. Nous verrons ce résultat dans les cas suivants.
 - $\mathbb{R}$, lemme 5.106.
 - Produit fini d'espaces métriques compacts, théorème 5.147.
 - Produit dénombrable d'espaces métrique compacts, théorème 5.149.

Thème 15 : Connexité

- (1) Définition 5.67
- (2) Le groupe $SL(n, \mathbb{K})$ est connexe par arcs : proposition 12.18.
- (3) Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs : proposition 12.19.
- (4) Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs, proposition 12.19.
- (5) Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes par arcs, proposition 12.20.
- (6) Le groupe $O(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe, lemme 12.14.
- (7) Les groupe $U(n)$ et $SU(n)$ sont connexes par arcs, lemme 12.15.
- (8) Le groupe $SO(n)$ est connexe mais ce n'est pas encore démontré, proposition 12.16.
- (9) Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 16.155.

Thème 16 : Norme matricielle et rayon spectral

- (1) Définition du rayon spectral 6.83.
- (2) Lien entre norme matricielle et rayon spectral, le théorème 6.91 assure que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$.
- (3) Pour toute norme algébrique nous avons $\rho(A) \leq \|A\|$, proposition 6.85.
- (4) Dans le cadre du conditionnement de matrice. Voir en particulier la proposition 25.42 qui utilise le théorème 6.91.

Thème 17 : Norme opérateur Pour la norme matricielle et le rayon spectral, voir le thème 16.

- (1) Définition 6.81.
- (2) Définition d'une norme d'algèbre 6.82.
- (3) Pour des espaces vectoriels normée, être borné est équivalent à être continu : proposition 6.217.

Thème 18 : Diagonalisation Des résultats qui parlent diagonalisation

- (1) Définition d'un endomorphisme diagonalisable : 6.278.
- (2) Conditions équivalentes au fait d'être diagonalisable en termes de polynôme minimal, y compris la décomposition en espaces propres : théorème 6.281.
- (3) Diagonalisation simultanée 6.284, pseudo-diagonalisation simultanée 6.298.
- (4) Diagonalisation d'exponentielle 6.307 utilisant Dunford.
- (5) Décomposition polaire théorème 12.31. $M = SQ$, S est symétrique, réelle, définie positive, Q est orthogonale.
- (6) Décomposition de Dunford 6.303. $u = s + n$ où s est diagonalisable et n est nilpotent, $[s, n] = 0$.
- (7) Réduction de Jordan (bloc-diagonale) 6.334.
- (8) L'algorithme des facteurs invariants 3.87 donne $U = PDQ$ avec P et Q inversibles, D diagonale, sans hypothèse sur U . De plus les éléments de D forment une chaîne d'éléments qui se divisent l'un l'autre.

Le théorème spectral et ses variantes :

- (1) Théorème spectral, matrice symétrique, théorème 6.292. Via le lemme de Schur.
- (2) Théorème spectral autoadjoint (c'est le même, mais vu sans matrices), théorème 6.380
- (3) Théorème spectral hermitien, lemme 6.286.
- (4) Théorème spectral, matrice normales, théorème 6.290.

Pour les résultats de décomposition dont une partie est diagonale, voir le thème 35 sur les décompositions.

Thème 19 : Sous-groupes

- (1) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $GL(n, \mathbb{C})$, théorème 6.357.
- (2) Sous-groupes compacts de $GL(n, \mathbb{R})$, lemme 12.38 ou proposition 12.39.

Thème 20 : Mesure et intégrale

- (1) Mesure de Lebesgue, définition 7.160
- (2) Intégrale associée à une mesure, définition 7.113

Thème 21 : Équivalence de normes

- (1) La proposition 6.138 sur l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$.
- (2) Montrer que le problème $a - b$ est stable dans l'exemple 25.24.

Thème 22 : Espace L^2 (L2)

- (1) Définition de $L^2(\Omega, \mu)$, 18.28.
- (2) L'espace L^2 est discuté en analyse fonctionnelle, en 18.3.6 parce que l'étude de L^2 utilise entre autres l'inégalité de Hölder 18.20.

Thème 23 : Espaces L^p (Lp)

- (1) Dual de $L^p([0, 1])$ pour $1 < p < 2$, proposition 18.45.

Thème 24 : Théorème de Stokes, Green et compagnie

- (1) Forme générale, théorème 13.165.
- (2) Rotationnel et circulation, théorème 15.9.

Thème 25 : Invariants de similitude

- (1) Théorème 6.331.
- (2) Pour prouver que la similitude d'applications linéaires résiste à l'extension du corps de base, théorème 6.345.
- (3) Pour prouver que la dimension du commutant d'un endomorphisme de E est de dimension au moins $\dim(E)$, lemme 6.342.
- (4) Nous verrons dans la remarque 6.332 à propos des invariants de similitude que toute matrice est semblable à la matrice bloc-diagonale constituées des matrices compagnon (définition 6.326) de la suite des polynômes minimaux.

Thème 26 : Endomorphismes cycliques

- (1) Définition 6.248.
- (2) Son lien avec le commutant donné dans la proposition 6.340 et le théorème 6.343.
- (3) Utilisation dans le théorème de Frobenius (invariants de similitude), théorème 6.331.

Thème 27 : Formes bilinéaires et quadratiques

- (1) Les formes bilinéaires ont été définies en 6.63.
- (2) Forme quadratique, définition 6.361

Thème 28 : Isométries

- (1) Les isométries de l'espace euclidien sont affines, 12.43.
- (2) Les isométries de l'espace euclidien comme produit semi-direct : $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_{\rho} O(n)$, théorème 12.44.
- (3) Isométries du cube, section 2.12.
- (4) Générateurs du groupe diédral, proposition 12.78.

Thème 29 : Déterminant

- (1) Les n -formes alternées forment un espace de dimension 1, proposition 6.42.
- (2) Déterminant d'une famille de vecteurs 6.45.
- (3) Déterminant d'un endomorphisme 6.48.
- (4) Des interprétations géométriques du déterminant sont dans la section 13.7.

Thème 30 : Polynôme d'endomorphismes

- (1) Endomorphismes cycliques et commutant dans le cas diagonalisable, proposition 6.340.
- (2) Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 12.26.
- (3) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 6.357.
- (4) Décomposition de Dunford, théorème 6.303.
- (5) Algorithme des facteurs invariants 3.87.

Thème 31 : Action de groupe

- (1) Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 10.33.

Thème 32 : Systèmes d'équations linéaires

- Algorithme des facteurs invariants 3.87.
- Méthode du gradient à pas optimal 16.154.

Thème 33 : Classification de groupes

- (1) Structure des groupes d'ordre pq , théorème 12.113.
- (2) Le groupe alterné est simple, théorème 2.83.
- (3) Théorème de Sylow 12.99. Tout le théorème, c'est un peu long. On peut se contenter de la partie qui dit que G contient un p -Sylow.
- (4) Théorème de Burnside sur les sous groupes d'exposant fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, théorème 6.357.
- (5) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corollaire 4.122.

Thème 34 : Théorie des représentations

- (1) Table des caractères du groupe diédral, section 12.14.
- (2) Table des caractères du groupe symétrique S_4 , section 12.13.

Thème 35 : Décomposition de matrices

- (1) Décomposition de Bruhat, théorème 12.37.
- (2) Décomposition de Dunford, théorème 6.303.
- (3) Décomposition polaire 12.31.

Thème 36 : Méthodes de calcul

- (1) Théorème de Rothstein-Trager 13.205.
- (2) Algorithme des facteurs invariants 3.87.
- (3) Méthode de Newton, théorème 25.68
- (4) Calcul d'intégrale par suite équirépartie 20.21.

Thème 37 : Équations différentielles L'utilisation des théorèmes de point fixe pour l'existence de solutions à des équations différentielles est fait dans le chapitre sur les points fixes.

- (1) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 16.125 pour les équations différentielles.
- (2) Le théorème de Schauder 16.119 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 16.123) sans la condition Lipschitz
- (3) Le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123 est utilisé à plusieurs endroits :
— Pour calculer la transformée de Fourier de $e^{-x^2/2}$ dans le lemme 21.15.
- (4) Théorème de stabilité de Lyapunov 24.15.
- (5) Le système proie prédateurs, Lotka-Volterra 24.16
- (6) Équation de Schrödinger, théorème 24.22.
- (7) L'équation $(x - x_0)^\alpha u = 0$ pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, théorème 22.55.
- (8) La proposition 24.18 donne un résultat sur $y'' + qy = 0$ à partir d'une hypothèse de croissance.
- (9) Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 24.20.

Thème 38 : Dénombrements

- Coloriage de roulette (12.4.8.1) et composition de colliers (12.4.8.2).
- Nombres de Bell, théorème 16.82.
- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décomposition de fractions en éléments simples, théorème 16.59.

Thème 39 : Densité

- (1) Densité des polynômes dans $C^0([0, 1])$, théorème de Bernstein 26.117.
- (2) Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$, théorème 18.40.
- (3) Densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 23.17.
- (4) Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 23.19.

Cela est utilisé pour le théorème de trace 23.21.

Les densités sont bien entendu utilisées pour prouver des formules sur un espace en sachant qu'elles sont vraies sur une partie dense. Mais également pour étendre une application définie seulement sur une partie dense. C'est par exemple ce qui est fait pour définir la trace γ_0 sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ en utilisant le théorème d'extension 16.166.

Thème 40 : Injections

- (1) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$, proposition 23.8.
- (2) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$, proposition 23.8.
- (3) L'espace $L^2(\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (les distributions), proposition 22.13.

Thème 41 : Dualité Parmi les théorèmes de dualité nous avons

- (1) Le théorème de représentation de Riesz 17.19 pour les espaces de Hilbert.
- (2) La proposition 18.45 pour les espaces $L^p([0, 1])$ avec $1 < p < 2$.
- (3) Le théorème de représentation de Riesz 18.49 pour les espaces L^p en général.

Tous ces théorèmes donnent la dualité par l'application $\Phi_x = \langle x, \cdot \rangle$.

Thème 42 : Opérations sur les distributions

- (1) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (22.73).
- (2) Dérivation d'une distribution, proposition-définition 22.15.
- (3) Produit d'une distribution par une fonction, définition 22.14.

Thème 43 : Permuter des limites

- (1) Les théorèmes sur les fonctions définies par des intégrales, section 13.19. Nous avons entre autres
 - (a) $\partial_i \int_B f = \int_B \partial_i f$, avec B compact, proposition 13.187.
 - (b) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x , nous avons le théorème 13.177.
 - (c) Si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 13.178.
- (2) Théorème de la convergence monotone, théorème 7.129.

Thème 44 : Convolution

- (1) Définition pour $f, g \in L^1$, théorème 18.33.
- (2) Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 18.35.
- (3) $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, proposition 18.79.
- (4) Les suites régularisantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n * f = f$ dans la proposition 21.17.

Thème 45 : Séries de Fourier

- Formule sommatoire de Poisson, proposition 21.9.
- Inégalité isopérimétrique, théorème 20.19.
- Fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas, proposition 20.16.

Thème 46 : Transformée de Fourier

- (1) Définition sur L^1 , définition 21.2.
- (2) La transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ est continue, proposition 21.5.
- (3) L'espace de Schwartz est stable par transformée de Fourier. L'application $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection linéaire et continue. Proposition 21.12

Thème 47 : Applications continues et bornées

- (1) Une application linéaire non continue : exemple 6.215 de $e_k \mapsto ke_k$. Les dérivées partielles sont calculées en (17.121).
- (2) Une application linéaire est bornée si et seulement si elle est continue, proposition 6.217.

Thème 48 : Définie positive

- (1) Une application bilinéaire est définie positive lorsque $g(u, u) \geq 0$ et $g(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$ est la définition 6.64.
- (2) Un opérateur ou une matrice est défini positif si toutes ses valeurs propres sont positives, c'est la définition 6.294.
- (3) Pour une matrice symétrique, définie positive implique $\langle Ax, x \rangle > 0$ pour tout x . C'est le lemme 6.296.
- (4) Une application linéaire est définie positive si et seulement si sa matrice associée l'est. C'est la proposition 6.366.

Remarque : nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive dans le cas d'une matrice non symétrique.

Thème 49 : Gaussienne

- (1) Le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (0.1)$$

est fait dans les exemples 13.81 et 13.82.

- (2) Le lemme 21.15 calcule la transformée de Fourier de $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon\|x\|^2}$ qui donne $\hat{g}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4\epsilon}$.
- (3) Le lemme 21.18 donne une suite régularisante à base de gaussienne.
- (4) Elle est utilisée pour régulariser une intégrale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier 21.20

Thème 50 : Inégalités

Inégalité de Jensen (1) Une version discrète pour $f(\sum_i \lambda_i x_i)$, la proposition 11.226.

(2) Une version intégrale pour $f(\int \alpha d\mu)$, la proposition 18.18.

(3) Une version pour l'espérance conditionnelle, la proposition 26.42.

Inégalité de Minkowsky (1) Pour une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ nous avons $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$. Proposition 6.373.

(2) Si $1 \leq p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Proposition 18.23.

(3) L'inégalité de Minkowsky sous forme intégrale s'écrit sous forme déballée

$$\left[\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y). \quad (0.2)$$

ou sous forme compacte

$$\left\| x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y) \quad (0.3)$$

Transformée de Fourier Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, lemme 21.6.

Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 18.35.

Thème 51 : Théorème central limite

- (1) Pour les processus de Poisson, théorème 30.5.

Thème 52 : Lemme de transfert Il s'agit du résultat $\hat{f}' = i\xi \hat{f}$.

- (1) Lemme 21.11 sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- (2) Lemme 23.12 pour L^2 .

Thème 53 : Dédurre la nullité d'une fonction depuis son intégrale Des résultats qui disent que si $\int f = 0$ c'est que $f = 0$ dans un sens ou dans un autre.

- (1) Il y a le lemme 7.123 qui dit ça.
- (2) Un lemme du genre dans L^2 existe aussi pour $\int f\varphi = 0$ pour tout φ . C'est le lemme 18.42.
- (3) Et encore un pour L^p dans la proposition 18.50.
- (4) Si $\int f\chi = 0$ pour tout χ à support compact alors $f = 0$ presque partout, proposition 18.1.
- (5) La proposition 18.44 donne $f = 0$ dans L^p lorsque $\int fg = 0$ pour tout $g \in L^q$ lorsque l'espace est σ -fini.
- (6) Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$. Théorème 16.94.

Table des matières

Thématique	2
Table des matières	11
Index	35
0 Introduction	57
0.1 Préface	57
0.2 Auteurs, contributeurs, sources et remerciements	57
0.3 Les questions pour lesquelles je n'ai pas (encore) de réponse	59
0.3.1 Mes questions d'analyse.	59
0.3.2 Mes questions d'algèbre, géométrie.	61
0.3.3 Mes questions de probabilité et statistiques.	62
0.3.4 Mes questions de modélisation	63
0.3.5 Les preuves à relire par des experts	63
0.4 Comment m'aider à rendre ces notes plus utiles ?	68
1 Construction des ensembles de nombres	69
1.1 Quelques éléments sur les ensembles	69
1.1.1 Lemme de Zorn	69
1.1.2 Complémentaire	70
1.1.3 Relations d'équivalence	70
1.2 Les naturels	71
1.3 Les entiers	71
1.4 Quelques structures algébriques	71
1.5 Les rationnels	73
1.5.1 Suites de Cauchy dans les rationnels	73
1.5.2 Insuffisance des rationnels	75
1.6 Les réels	77
1.6.1 L'ensemble	78
1.6.2 Relation d'ordre	80
1.7 Les complexes	82
1.7.1 Définitions	82
2 Théorie des groupes	85
2.1 Groupes	85
2.2 Sous groupe normal	86
2.3 Groupe dérivé	87
2.4 Théorèmes d'isomorphismes	88
2.5 Le groupe et anneau des entiers	89
2.5.1 Division euclidienne	90
2.5.2 PGCD, PPCM et Bézout	90
2.5.3 Calcul effectif du PGCD et de Bézout	92
2.5.3.1 L'idée	92

2.5.3.2	Pour le PGCD	92
2.5.3.3	Bézout : calcul effectif	93
2.5.4	Écriture des fractions	94
2.5.5	Équation diophantienne linéaire à deux inconnues	95
2.5.6	Quotients	96
2.6	Indice d'un sous-groupe et ordre des éléments	96
2.7	Suite de composition	98
2.8	Groupes résolubles	101
2.9	Action de groupes	102
2.10	Le groupe symétrique	106
2.11	Produit semi-direct de groupes	111
2.12	Isométries du cube	113
2.13	Groupe de torsion	115
2.14	Famille presque nulle	115
3	Anneaux	117
3.1	Généralités	117
3.2	Binôme de Newton et morphisme de Frobenius	118
3.3	Décomposition en facteurs premiers	119
3.4	Le groupe des racines de l'unité	119
3.5	Fonction indicatrice d'Euler (première partie)	121
3.5.1	Introduction par les racines de l'unité	122
3.5.2	Générateurs	123
3.6	Idéal dans un anneau	123
3.7	Caractéristique	124
3.8	Modules	125
3.9	Anneau intègre	127
3.9.1	PGCD et PPCM	128
3.9.2	Contenu d'un polynôme	129
3.10	Anneau factoriel	130
3.11	Anneau principal	131
3.11.1	Bézout	132
3.11.2	Anneau noetherien	133
3.12	Anneau euclidien	133
3.12.1	Équations diophantiennes	135
3.12.2	Triplet pythagoriciens et équation de Fermat pour $n = 4$	136
3.12.3	Lignes et colonnes de matrices	138
3.12.4	Algorithme des facteurs invariants	139
3.13	Anneaux des polynômes	141
3.13.1	Irréductibilité	142
3.13.2	Division euclidienne	143
3.13.3	Bézout	143
3.13.4	Idéaux	144
3.13.5	Racines des polynômes	145
3.13.6	Quelque identités	147
4	Corps	149
4.1	Généralités	149
4.1.1	Corps des fractions	150
4.1.2	Corps premier	151
4.1.3	Petit théorème de Fermat	153
4.2	Théorème des deux carrés	153
4.2.1	Un peu de structure dans $\mathbb{Z}[i]$	154
4.2.2	Résultats chinois	157

4.2.3	Anneaux principaux et polynômes	159
4.3	Extension de corps	160
4.3.1	Polynôme minimal	160
4.3.2	Racines de polynômes	163
4.3.3	Corps de rupture	164
4.3.4	Corps de décomposition	166
4.3.5	Clôture algébrique	167
4.3.6	Extensions séparables	168
4.3.7	Idéal maximum	172
4.4	Espaces de polynômes	173
4.4.1	Polynômes symétriques, alternés ou semi-symétriques	175
4.4.2	Polynôme symétrique élémentaire	175
4.4.3	Relations coefficients racines	178
4.5	Polynômes cyclotomiques	179
4.5.1	Définitions et propriétés	179
4.5.2	Nombres premiers	183
4.5.3	Théorème de Wedderburn	185
4.6	Corps finis	186
4.6.1	Existence, unicité	186
4.6.2	Symboles de Legendre et carrés	189
4.6.3	Théorème de Chevalley-Waring	194
4.6.4	Théorème de l'élément primitif	196
4.6.5	Construction de $\mathbb{F}_q$	201
4.6.5.1	La version du faignant	201
4.6.5.2	La version plus élaborée	202
4.6.6	Exemple : étude de $\mathbb{F}_{16}$	204
4.6.7	Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$	206
4.7	Constructions à la règle et au compas	208
4.7.1	Quelque constructions	208
4.7.2	Nombres constructibles	210
4.7.3	Polygones constructibles	212
4.7.4	Matrices	217
4.8	Minuscule morceau sur la théorie de Galois	217
5	Topologie générale	219
5.1	Topologie en général	219
5.1.1	Définitions basiques	219
5.1.2	Topologie produit	220
5.1.3	Séparabilité	220
5.1.4	Topologie métrique	221
5.1.5	Espace vectoriel normé	222
5.1.6	Topologie sur l'ensemble des réels	225
5.1.7	Base de topologie	227
5.2	Limite et continuité	228
5.3	Compacité	230
5.3.1	Quelque propriétés	230
5.4	Topologie induite	231
5.5	Connexité	232
5.6	Un peu de topologie réelle	234
5.6.1	Suites numériques	234
5.6.2	Maximum, supremum et compagnie	236
5.6.2.1	...et quelques exemples	237
5.6.3	Intervalles	241
5.6.3.1	Connexité	241

5.6.3.2	Compacité	243
5.6.4	Image d'un compact	245
5.6.5	Connexité par arcs	247
5.7	Espaces métriques	247
5.7.1	Espaces métrisables	247
5.7.2	Fonctions continues	247
5.7.3	Caractérisations séquentielles	248
5.7.4	Distance entre un point et un ensemble	250
5.7.5	Compacité	251
5.7.6	Ensembles enchaînés	256
5.7.7	Produit fini d'espaces métriques	257
5.8	Ensembles nulle part denses	258
5.9	Encore de la topologie réelle	259
5.9.1	Ouverts et fermés	259
5.9.2	Intérieur, adhérence et frontière	259
5.9.3	Point d'accumulation, point isolé	261
5.9.4	Limite de suite	261
5.10	Application réciproque	262
5.11	Topologie des semi-normes	263
5.11.1	Espace dual	265
5.11.2	Espace $C^k(\mathbb{R}, E')$	265
5.12	Espaces de Baire	266
6	Espaces vectoriels	269
6.1	Parties libres, génératrices, bases et dimension	269
6.2	Applications linéaires	272
6.2.1	Définition	272
6.2.2	Rang	272
6.3	Matrice d'une application linéaire	274
6.3.1	Écriture dans une base	274
6.3.2	Changement de base : vecteurs de base	276
6.3.3	Changement de base : coordonnées	277
6.3.4	Changement de base : matrice d'une application linéaire	277
6.3.5	Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire	277
6.4	Dualité	278
6.4.1	Orthogonal	278
6.4.2	Transposée	278
6.4.3	Transposée : sans le dual	281
6.4.4	Polynômes de Lagrange	281
6.4.5	Dual de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$	282
6.5	Déterminants	283
6.5.1	Formes multilinéaires alternées	283
6.5.2	Déterminant d'une famille de vecteurs	286
6.5.3	Déterminant d'un endomorphisme	287
6.5.4	Déterminant de Vandermonde	289
6.5.5	Déterminant de Gram	292
6.5.6	Déterminant de Cauchy	292
6.5.7	Matrice de Sylvester	292
6.5.8	Théorème de Kronecker	295
6.6	Directions conservées	296
6.6.1	Généralités	296
6.6.2	Matrice orthogonale	297
6.6.3	Comment trouver la matrice d'une symétrie donnée ?	298
6.6.3.1	Symétrie par rapport à un plan	298

6.6.3.2	Symétrie par rapport à une droite	299
6.6.3.3	En résumé	300
6.7	Normes et distances	300
6.7.1	Introduction : valeur absolue et norme	300
6.7.2	Norme	300
6.8	Produit scalaire	302
6.8.1	Projection et angles	304
6.8.2	Angle entre deux vecteurs	306
6.8.3	Procédé de Gram-Schmidt	306
6.9	Norme opérateur	307
6.9.1	Norme algébrique	309
6.9.2	Normes de matrices et d'applications linéaires	311
6.10	Produit vectoriel	312
6.11	Topologie	313
6.11.1	Boules et sphères	313
6.11.2	Ouverts, fermés, intérieur et adhérence	315
6.11.3	Point isolé, point d'accumulation	321
6.12	Équivalence des normes	322
6.12.1	En dimension finie	323
6.12.2	Contre-exemple en dimension infinie	324
6.13	Suites	325
6.13.1	Limites, convergence	325
6.13.2	Critère de Cauchy	325
6.14	Séries	326
6.15	Série réelle	329
6.15.1	Rappels et définitions	329
6.15.2	Critères de convergence absolue	329
6.15.3	Critères de convergence simple	331
6.15.3.1	Critère d'Abel	331
6.15.4	Quelques séries usuelles	332
6.15.5	Moyenne de Cesaro	333
6.15.6	Écriture décimale d'un nombre	333
6.16	Exponentielle de matrice	337
6.17	Sommes de familles infinies	338
6.17.1	Convergence commutative	338
6.18	Mini introduction aux nombres p-adiques	342
6.18.1	La flèche d'Achille	342
6.18.2	La tortue et Achille	342
6.18.3	Dans les nombres p-adiques, c'est vrai	343
6.19	Fonctions	344
6.20	Produit fini d'espaces vectoriels normés	344
6.20.1	Norme	344
6.20.2	Suites	347
6.21	Applications multilinéaires	348
6.22	Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires	349
6.23	Orthogonalité	350
6.24	Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé	350
6.24.1	Différentielle	350
6.24.2	(non ?) Différentiabilité des applications linéaires	351
6.24.3	Dérivation en chaine et formule de Leibnitz	352
6.24.4	Différentielle partielle	356
6.24.5	Formule des accroissements finis	357
6.24.6	L'inverse, sa différentielle	360

6.24.7	Projection orthogonale	362
6.25	Polynôme d'endomorphismes	363
6.25.1	Polynômes d'endomorphismes	364
6.25.2	Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice	366
6.25.3	Polynôme minimal et minimal ponctuel	366
6.25.4	Polynôme caractéristique	372
6.26	Valeur propre et vecteur propre	375
6.27	Espaces hermitiens	376
6.28	Diagonalisation	377
6.28.1	Matrices semblables	377
6.28.2	Endomorphismes diagonalisables	378
6.28.3	Diagonalisation : cas complexe	381
6.28.4	Diagonalisation : cas réel	383
6.28.5	Pseudo-réduction simultanée	385
6.29	Sous espaces caractéristiques	386
6.29.1	Théorèmes de décomposition	387
6.29.2	Diverses conséquences	389
6.29.3	Diagonalisabilité d'exponentielle	391
6.29.4	Valeurs singulières	392
6.30	Extension du corps de base	392
6.30.1	Extension des applications linéaires	393
6.30.2	Projections	394
6.30.3	Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique	397
6.31	Frobenius et Jordan	399
6.31.1	Matrice compagnon	399
6.31.2	Réduction de Frobenius	399
6.31.3	Forme normale de Jordan	402
6.32	Commutant et endomorphismes cycliques	403
6.32.1	Endomorphisme cyclique	403
6.32.2	Commutant : cas diagonalisable	404
6.32.3	Commutant : cas général	406
6.33	Endomorphismes nilpotents et trigonalisables	409
6.33.1	Endomorphismes nilpotents	409
6.33.2	Endomorphismes trigonalisables	411
6.33.3	Théorème de Burnside	413
6.33.4	Théorème de Lie-Kolchin	414
6.34	Formes bilinéaires et quadratiques	417
6.34.1	Généralités	417
6.34.2	Topologie	417
6.34.3	Matrice associée	417
6.34.4	Dégénérescence	419
6.34.5	Inégalité de Minkowski	420
6.34.6	Ellipsoïde	421
6.35	Théorème spectral auto-adjoint	422
6.36	Mini introduction au produit tensoriel	425
6.36.1	Définitions	425
6.36.2	Application d'opérateurs	425
6.37	Coordonnées cylindriques et sphériques	426
6.38	Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires	426

7	Tribus, théorie de la mesure	429
7.1	Tribus	429
7.1.1	Généralités	429
7.1.1.1	Tribu induite	430
7.1.1.2	Tribu borélienne	431
7.1.1.3	Les boréliens de $\mathbb{R}$	431
7.1.2	Tribu de Baire	431
7.2	Théorie de la mesure	433
7.2.1	Mesure et algèbre de parties	434
7.2.2	Mesure sur un espace mesurable	436
7.2.3	Mesure extérieure	442
7.2.4	Espace mesuré complet	444
7.2.5	Prolongement	452
7.3	Applications mesurables	454
7.3.1	Propriétés	454
7.3.2	D'une tribu à l'autre	454
7.3.3	Mesure image	457
7.3.4	Régularité d'une mesure	458
7.3.5	Théorème de récurrence	462
7.4	Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles	463
7.4.1	Quelques mots à propos de $\overline{\mathbb{R}}$	463
7.4.2	Limite supérieure et inférieure	463
7.4.3	Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable	464
7.4.4	Fonction étagée	470
7.4.5	Fonctions réelle à variables réelles	473
7.5	Intégrale par rapport à une mesure	473
7.5.1	Quelque propriétés	475
7.5.2	Permuter limite et intégrale	478
7.5.2.1	Convergence uniforme	478
7.5.2.2	Convergence monotone	479
7.5.2.3	Convergence dominée de Lebesgue	481
7.5.3	Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité)	483
7.6	Tribu produit, mesure produit	484
7.6.1	Produit d'espaces mesurables	484
7.6.2	Le cas des boréliens	485
7.6.3	Produit de mesures	486
7.7	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	491
7.7.1	Mesure et tribu de Lebesgue	495
7.7.2	Propriétés de la mesure de Lebesgue	496
7.7.3	Ensemble de Cantor	501
7.7.4	Ensemble de Vitali (non mesurable)	503
7.8	Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$	504
7.8.1	Ensembles négligeables	505
7.8.2	Parties et fonctions mesurables	506
7.8.3	Propriétés d'unicité	506
7.8.4	Régularité	508
8	Espaces affines	509
8.1	Repères affines	509
8.2	Classification affine des conique	510
8.3	Applications affines	512
8.4	Isomorphismes	513
8.5	Sous espaces affines	513
8.6	Barycentre	515

8.6.1	Enveloppe convexe	517
8.7	Repères, coordonnées cartésiennes et barycentriques	520
8.7.1	Équation de droite	522
8.8	Structure du groupe des applications affines	522
9	Géométrie hyperbolique	525
9.1	Inversion	525
9.1.1	Cercles perpendiculaires	525
9.1.2	Inversion	526
10	Espaces projectifs	531
10.1	Sous espaces projectifs	531
10.2	Espace projectifs comme «complétés» d'espaces affines	533
10.3	Théorème de Pappus	535
10.4	Homographies	536
10.4.1	Homographies	536
10.4.2	Le groupe projectif	537
10.5	Coordonnées homogènes	538
10.5.1	Dualité	538
10.5.2	Polynômes	540
10.5.3	Repères projectifs	541
10.5.4	Birapport	542
10.6	Sphère de Riemann	544
10.6.1	Action du groupe modulaire	544
11	Analyse réelle	551
11.1	Limite et continuité	551
11.1.1	Définition	551
11.1.2	Propriétés de base	552
11.1.3	Limites de fonctions	553
11.1.4	Règles simples de calcul	558
11.2	Limites à plusieurs variables	558
11.2.1	Règle de l'étau	560
11.2.2	Méthode des chemins	561
11.2.3	Méthode des coordonnées polaires	562
11.2.4	Méthode du développement asymptotique	566
11.2.5	Continuité	566
11.2.6	La fonction la moins continue du monde	568
11.2.7	Approche topologique	569
11.2.8	Continuité de la racine carré, invitation à la topologie induite	571
11.2.9	Limites en des nombres	573
11.2.10	Limites quand tout va bien	573
11.2.11	Discussion avec mon ordinateur	578
11.2.12	Limites et prolongement	578
11.3	Dérivée : exemples introductifs	579
11.3.1	La vitesse	579
11.3.2	La tangente à une courbe	580
11.3.3	L'aire en dessous d'une courbe	581
11.4	Définition de la dérivée	581
11.5	Continuité et dérivabilité	582
11.6	Dérivation de fonctions d'une variable réelle	583
11.6.1	Exemples	583
11.6.1.1	La fonction $f(x) = x$	583
11.6.1.2	La fonction $f(x) = x^2$	583

11.6.1.3 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$	583
11.6.2 Calcul de la dérivée	584
11.6.3 Interprétation géométrique : tangente	584
11.6.4 Interprétation géométrique : approximation affine	585
11.7 Opérations sur les dérivées	586
11.7.1 Développement limité au premier ordre	587
11.8 Espace des fonctions continues	587
11.9 Uniforme continuité	592
11.10 Compacité	594
11.11 Dérivation et croissance	595
11.12 Dérivée directionnelle	599
11.12.1 Dérivée partielle et directionnelles	600
11.12.1.1 Quelques propriétés et notations	601
11.13 Dérivée suivant un vecteur	601
11.13.1 Gradient : direction de plus grande pente	604
11.14 Différentielle	605
11.14.1 Exemples introductifs	605
11.14.2 Définition de la différentielle	606
11.14.3 Unicité de la différentielle	609
11.14.4 Cas particuliers	610
11.14.5 Calcul de valeurs approchées	610
11.14.6 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable	613
11.14.6.1 Continuité	613
11.14.6.2 Linéarité	613
11.14.6.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle	615
11.14.6.4 Un candidat dans la définition (marche toujours)	615
11.14.7 Règles de calcul	616
11.14.8 Linéarité	617
11.14.9 Produit	617
11.14.10 Différentielle de fonction composée	619
11.14.11 Différentielle et dérivées partielles	622
11.14.12 Plan tangent	623
11.14.13 Calcul de différentielles	623
11.14.14 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent	624
11.14.15 Gradient et recherche du plan tangent	624
11.15 Jacobienne	626
11.15.1 Rappels et définitions	626
11.16 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$	626
11.17 Graphes de fonctions de plusieurs variables	627
11.18 Graphes de fonctions à plusieurs variables	630
11.19 Courbes de niveau	631
11.20 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	635
11.21 Dérivée directionnelle de fonctions composées	636
11.22 Théorèmes des accroissements finis	638
11.23 Fonctions Lipschitziennes	639
11.24 Différentielles d'ordre supérieur	641
11.24.1 Identification des espaces d'applications multilinéaires	641
11.24.2 Fonctions différentiables plusieurs fois	641
11.25 Développement asymptotique, théorème de Taylor	644
11.25.1 Fonctions «petit o»	644
11.25.2 Autres formulations	645
11.25.3 Formule et reste	646
11.25.4 Reste intégral	646

11.25.5 Exemple : un calcul heuristique de limite	647
11.26 Fonctions convexes	647
11.26.1 Inégalité des pentes	647
11.26.2 Convexité et régularité	649
11.26.3 Dérivées d'une fonction convexe	649
11.26.4 Graphe d'une fonction convexe	651
11.26.5 Quelques inégalités	655
11.26.5.1 Inégalité de Jensen	655
11.26.5.2 Inégalité arithmético-géométrique	655
11.26.5.3 Inégalité de Kantorovitch	656
11.27 Suites de fonctions	657
11.27.1 Convergence de suites de fonctions	657
11.27.2 Convergence uniforme	657
11.27.3 Permuter avec les dérivées partielles	659
11.28 Recherche d'extrema	659
11.29 Fonctions réelles de deux variables réelles	660
11.29.1 Limites de fonctions à deux variables	660
11.29.2 Dérivées partielles	662
11.29.3 Différentielle et accroissement	662
11.29.4 Recherche d'extrema locaux	663
11.30 Les fonctions à valeurs vectorielles	663
11.31 Fonctions vectorielles de plusieurs variables	664
11.32 Champs de vecteurs	664
11.32.1 Matrice jacobienne	664
11.33 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla	665
11.34 Interprétation de la divergence	667
11.35 Quelques formules de Leibnitz	668
11.36 La différentielle revisitée	669
11.36.1 Les formes différentielles de base	669
11.36.2 Différentielle comme élément de l'espace dual	669
11.36.3 Différentielles de fonctions composées	670
11.36.4 Exemple de composée : les coordonnées polaires	671
11.37 Quelques rappels	672
11.38 Continuité et dérivabilité	672
11.38.1 Quelques formules à connaître	675
11.39 Application réciproque	675
11.39.1 Définitions	675
11.39.2 Graphe de la fonction réciproque	676
11.39.3 Théorème de la bijection	677
11.40 Rappels de trigonométrie	679
11.41 Fonctions trigonométriques réciproques	681
11.41.1 La fonction arc sinus	681
11.41.2 La fonction arc cosinus	683
11.41.3 La fonction arc tangente	684
11.42 Trigonométrie hyperbolique	685
11.43 Développement limité autour de zéro	686
11.44 Règles de calcul	689
11.44.1 Linéarité des développements limités	689
11.44.2 Développement limité d'un quotient	691
11.44.3 Développement limité d'une fonction composée	691
11.45 Développement au voisinage de $x_0 \neq 0$	692
11.46 Application au calcul de limites	693
11.47 Développement au voisinage de l'infini	694

11.48	Étude d'asymptote	694
12	Retour sur les groupes	705
12.1	Action de groupe et connexité	705
12.2	Espaces de matrices	707
12.2.1	Dilatations et transvections	707
12.2.2	Connexité de certains groupes	713
12.2.3	Densité	715
12.2.4	Racine carré d'une matrice hermitienne positive	717
12.2.5	Racine carré d'une matrice symétrique positive	718
12.2.6	Décomposition polaires : cas réel	718
12.2.7	Enveloppe convexe	721
12.2.8	Décomposition de Bruhat	723
12.3	Sous-groupes du groupe linéaire	725
12.4	Isométries de l'espace euclidien	728
12.4.1	Structure du groupe $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$	729
12.4.2	Classification des isométries de $\mathbb{R}$	732
12.4.3	Classification des isométries de $\mathbb{R}^2$	733
12.4.4	Isométries dans $\mathbb{R}^n$	738
12.4.5	Groupes finis d'isomorphismes	741
12.4.6	Théorème de Sylvester	744
12.4.7	Groupe diédral	744
12.4.7.1	Définition et générateurs : vue géométrique	744
12.4.7.2	Générateurs : vue abstraite	746
12.4.7.3	Classes de conjugaison	749
12.4.7.4	Le compte pour n pair	750
12.4.7.5	Le compte pour n impair	750
12.4.8	Applications : du dénombrement	750
12.4.8.1	Le jeu de la roulette	750
12.4.8.2	L'affaire du collier	751
12.5	Théorèmes de Sylow	752
12.6	Un peu de classification de groupes	757
12.6.1	Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	757
12.6.2	Groupes abéliens finis	758
12.6.3	Groupes d'ordre pq	761
12.6.4	Groupe monogène	763
12.6.5	Fonction indicatrice d'Euler	764
12.7	Nombres premiers	764
12.8	Chiffrement RSA	766
12.8.1	Mise en place par Bob	766
12.8.2	Chiffrement	767
12.8.3	Déchiffrement	767
12.8.4	Une imprudence à ne pas commettre	767
12.8.5	Problèmes calculatoires	768
12.8.6	La solidité de RSA	768
12.8.7	Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme	768
12.9	Représentations et caractères	769
12.9.1	Crochet de dualité et transformée de Fourier	770
12.9.2	Groupes non abéliens	771
12.9.3	Représentations linéaires des groupes finis	772
12.9.4	Module	773
12.9.5	Structure hermitienne	775
12.9.6	Caractères	775
12.10	Équivalence de représentations et caractères	776

12.10.1	Représentation régulière	778
12.10.2	Caractères et représentations : suite et fin	779
12.11	Représentation produit tensoriel	782
12.12	Exemple sur le groupe symétrique	782
12.13	Table des caractères du groupe symétrique S_4	783
12.14	Table de caractères du groupe diédral	784
12.14.1	Représentations de dimension un	785
12.14.2	Représentations de dimension deux	785
12.14.3	Le compte pour n pair	787
12.14.4	Le compte pour n impair	787

13 Intégration 789

13.1	Théorème de la moyenne	789
13.2	Mesure à densité	789
13.2.1	Théorème de Radon-Nikodym	789
13.2.2	Mesure complexe	791
13.2.3	Théorème d'approximation	792
13.2.4	Mesure à densité	792
13.3	Constructions plus naïves de la mesure et de l'intégrale dans le cas réel	792
13.3.1	Mesure de Lebesgue, version rapide	792
13.3.2	Pavés et subdivisions	793
13.3.3	Intégrale d'une fonction en escalier	796
13.3.4	Intégrales partielles	796
13.3.5	Réduction d'une intégrale multiple	797
13.3.6	Propriétés de l'intégrale	798
13.3.7	Intégrales multiples, cas général	799
13.3.8	Réduction d'une intégrale multiple	799
13.3.9	Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$	801
13.3.10	Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$	804
13.3.11	Fonctions et ensembles non bornés	807
13.4	Propriétés	807
13.5	Primitives et intégrales	808
13.5.1	Primitives et intégrales	811
13.5.2	Intégrales impropres	812
13.6	Théorème de Fubini	815
13.6.1	Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini	815
13.7	Interprétation géométrique du déterminant	820
13.7.1	Par rapport à la mesure de Lebesgue	820
13.7.2	En petite dimension	821
13.7.3	Produit vectoriel	822
13.7.4	Produit mixte	823
13.7.5	Déterminant en dimension deux	825
13.7.6	Déterminant en dimension trois	825
13.8	Changement de variables dans une intégrale multiple	826
13.8.1	Des lemmes	826
13.8.2	Le théorème et sa démonstration	827
13.8.3	Exemples	831
13.8.4	Récapitulatif des changements de variables	834
13.8.4.1	Coordonnées polaires	834
13.8.4.2	Coordonnées cylindriques	834
13.8.4.3	Coordonnées sphériques	834
13.8.5	Changement de variables	835
13.8.5.1	Coordonnées polaires	835
13.8.5.2	Coordonnées sphériques	836

13.8.6	Coordonnées polaires	836
13.8.7	Coordonnées cylindriques	837
13.8.8	Coordonnées sphériques	837
13.9	Forme différentielle	838
13.9.0.1	L'isomorphisme musical	839
13.10	Intégrale sur une variété	840
13.10.1	Mesure sur une carte	840
13.10.1.1	Exemple : la mesure de la sphère	841
13.10.2	Intégrale sur une carte	841
13.10.3	Exemples	842
13.10.4	Orientation	842
13.10.5	Formes différentielles	844
13.10.6	Intégrale d'une fonction sur une variété	845
13.11	Intégrales curvilignes	846
13.11.1	Chemins de classe C^1	846
13.11.2	Intégrer une fonction	846
13.11.3	Intégrer un champ de vecteurs	848
13.11.4	Intégrer une forme différentielle sur un chemin	848
13.11.5	Intégration d'une forme différentielle sur un chemin	849
13.11.6	Interprétation physique : travail	850
13.11.7	Intégrer un champs de vecteurs sur un bord en $2D$	851
13.11.8	Intégrer une forme différentielle sur un bord en $2D$	851
13.11.9	Intégrer une forme différentielle sur un bord en $3D$	851
13.11.10	Intégrer d'un champ de vecteurs sur un bord en $3D$	852
13.11.11	Dérivées croisées et forme différentielle exacte	852
13.12	Surfaces paramétrées	853
13.12.1	Graphe d'une fonction	854
13.13	Intégrales de surface	855
13.13.1	Intégrale d'une fonction	855
13.13.2	Intégrale d'un champ de vecteurs	856
13.14	Intégrales de surface	857
13.14.1	Aire d'une surface paramétrée	857
13.14.2	Intégrale d'une fonction sur une surface	858
13.14.3	Aire d'une surface de révolution	859
13.14.4	Intégrale d'une 2	861
13.15	Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface	861
13.16	Divergence, Green, Stokes	864
13.16.1	Théorème de la divergence	864
13.16.2	Formule de Green	865
13.16.3	Formule de Stokes	867
13.16.3.1	Quelle est la bonne orientation ?	867
13.17	Résumé des intégrales vues	868
13.17.1	L'intégrale d'une fonction sur les réels	868
13.17.2	Intégrale d'une fonction sur un chemin	868
13.17.3	Intégrale d'une fonction sur une surface	868
13.17.4	Intégrale d'une fonction sur un volume	869
13.17.5	Conclusion pour les fonctions	870
13.17.6	Circulation d'un champ de vecteurs	870
13.17.7	Flux d'un champ de vecteurs	870
13.17.8	Conclusion pour les champs de vecteurs	870
13.17.9	Attention pour les surfaces fermées !	871
13.18	Intégrales convergeant uniformément	872
13.18.1	Définition et propriété	872

13.18.2 Critères de convergence uniforme	873
13.19 Fonctions définies par une intégrale	874
13.19.1 Continuité sous l'intégrale	874
13.19.2 Le coup du compact	876
13.19.3 Dérivabilité sous l'intégrale	876
13.19.4 Absolue continuité	877
13.19.5 Différentiabilité sous l'intégrale	879
13.20 Formes différentielles exactes et fermées	882
13.21 Théorème d'Abel angulaire	884
13.21.1 Passage à la limite sous le signe intégral	888
13.21.2 Intégrale en dimension un	888
13.21.3 Intégrales convergentes	889
13.21.4 La méthode de Rothstein-Trager	889
13.22 Ellipsoïde de John-Loewer	894
13.23 Rappel sur les intégrales usuelles	897
13.24 Intégrales le long de chemins	898
13.24.1 Circulation d'un champ de vecteur	898
13.25 Circulation d'un champ conservatif	900
13.26 Intégration de fonction à deux variables	901
13.26.1 Intégration sur un domaine rectangulaire	901
13.26.2 Intégration sur un domaine non rectangulaire	902
13.26.3 Changement de variables	905
13.26.3.1 Le cas des coordonnées polaires	906
13.26.3.2 Les coordonnées cylindriques	907
13.26.3.3 Coordonnées sphériques	907
13.26.3.4 Un autre système utile	907
13.27 Les intégrales triples	908
13.27.1 Volume	910
13.28 Un petit peu plus formel	912
13.28.1 Intégration sur un domaine non rectangulaire	912
13.28.2 Changement de variables	912
13.28.2.1 Coordonnées polaires	913
13.28.2.2 Coordonnées sphériques	913
13.29 Primitives et surfaces	914
13.29.1 Longueur d'arc de courbe	914
13.29.2 Aire de révolution	915
13.30 L'aire en dessous d'une courbe	915
13.31 Propriétés des intégrales	916
13.32 Techniques d'intégration	917
13.32.1 Intégration par parties	918
13.32.2 Changement de variables – pour trouver des primitives	920
13.32.3 Changement de variables – pour calculer des intégrales	921
13.32.4 Intégrations des fractions rationnelles réduites	923
13.32.5 Quelques formules à connaître	924
13.33 Trucs et astuces de calcul d'intégrales	924
13.33.1 Quelques intégrales «usuelles»	924
13.33.2 Reformer un carré au dénominateur	927
13.33.3 Décomposer en fractions simples	927

14 Arc paramétré	929
14.1 Définitions, quelques exemples remarquables	929
14.2 Courbes paramétrés	930
14.2.1 Définitions et exemples	930
14.3 Longueur d'arc	931
14.4 Abscisse curviligne	934
14.4.1 Formule intégrale de la longueur	935
14.5 Élément de longueur	939
14.5.1 Élément de longueur : cartésiennes	939
14.5.2 Élément de longueur : polaires (1)	939
14.5.3 Élément de longueur : polaires (2)	939
14.5.4 Approximation de la longueur par des cordes	941
14.6 Arc géométrique	943
14.6.1 Abscisse curviligne et paramétrisation normale	944
14.6.2 Tangente à une courbe paramétrée	949
14.7 Repère de Frenet	951
14.7.1 Torsion	953
14.8 Hors des coordonnées normales	954
14.9 Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$	957
14.10 Courbes planes	958
14.10.1 Angle	958
14.10.2 Courbure signée	959
14.10.3 Degré, indice et homotopie	962
14.11 Courbes fermées planes	968
14.11.1 Cercle circonscrit	968
14.11.2 Description locale	970
14.11.3 Enveloppe convexe	971
14.11.4 Courbure et convexité	974
14.11.5 Théorème des quatre sommets	975
14.11.6 Le théorème de Jordan	978
15 Analyse vectorielle	979
15.1 Le théorème de Green	979
15.2 Théorème de la divergence dans le plan	983
15.2.1 La convention de sens de parcours	983
15.2.2 Théorème de la divergence	983
15.3 Théorème de Stokes	985
15.4 Théorème de Gauss	986
15.5 Coordonnées curvilignes	988
15.5.1 Base locale	988
15.5.2 Importance de l'orthogonalité	988
15.5.3 Coordonnées polaires	990
15.5.4 Coordonnées cylindriques	990
15.5.5 Coordonnées sphériques	991
15.5.6 Gradient en coordonnées curvilignes	991
15.5.6.1 Coordonnées sphériques	992
15.5.7 Divergence en coordonnées curvilignes	992
15.5.7.1 Coordonnées cylindriques	994
15.5.7.2 Coordonnées sphériques	994
15.5.8 Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales	994
15.5.9 Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales	995
15.5.9.1 Coordonnées cylindriques	996
15.5.9.2 Coordonnées sphériques	996
15.6 Les formules	996

15.6.1	Coordonnées polaires	996
15.6.2	Coordonnées cylindriques	996
15.6.3	Coordonnées sphériques	997
16	Suite de l'analyse	999
16.0.1	Dérivabilité au sens complexe et différentielle	999
16.1	Série de fonctions	1002
16.2	Séries entières	1007
16.2.1	Disque de convergence	1007
16.2.2	Propriétés de la somme	1009
16.2.3	Dérivation, intégration	1012
16.2.4	Exponentielle et logarithme	1017
16.2.5	Forme polaire ou trigonométrique des nombres complexes	1021
16.3	Vitesses de x^α , de l'exponentielle et du logarithme	1021
16.3.1	Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne	1022
16.4	Le cercle trigonométrique	1024
16.4.1	Les fonctions sinus et cosinus	1024
16.4.2	La fonction tangente	1025
16.4.3	Les coordonnées polaires	1026
16.4.3.1	Transformation inverse : théorie	1026
16.4.3.2	Transformation inverse : pratique	1027
16.4.4	Série génératrice d'une suite	1027
16.4.5	Développement en série et Taylor	1028
16.4.6	Resommer une série	1030
16.4.6.1	Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$	1030
16.4.6.2	Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$	1031
16.4.6.3	Sage, primitives et logarithme complexe	1033
16.4.6.4	Nombres de Bell	1035
16.4.7	Séries entières de matrices	1035
16.4.8	Exponentielle et logarithme de matrice	1038
16.5	Nombres de Bell	1041
16.6	Lemme de Borel	1043
16.6.1	Fonctions plateaux	1043
16.6.2	Le lemme de Borel	1044
16.7	Densité des polynômes	1046
16.7.1	Théorème de Stone-Weierstrass	1046
16.7.2	Primitive de fonction continue	1049
16.7.3	Théorème taubérien de Hardy-Littlewood	1050
16.7.4	Théorème de Müntz	1054
16.8	Complétude avec la norme uniforme	1057
16.9	Théorèmes de point fixe	1058
16.9.1	Points fixes attractifs et répulsifs	1058
16.9.2	Picard	1058
16.9.3	Brouwer	1061
16.9.4	Théorème de Schauder	1063
16.9.5	Théorème de Markov-Kakutani et mesure de Haar	1065
16.10	Théorèmes de point fixes et équations différentielles	1066
16.10.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz	1066
16.10.2	Théorème de Cauchy-Arzella	1068
16.11	Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite	1068
16.11.1	Mise en situation	1068
16.11.2	Théorème d'inversion locale	1069
16.11.3	Théorème de la fonction implicite	1074
16.11.4	Exemple	1076

16.11.5 Théorème de Von Neumann	1077
16.12 Recherche d'extrema	1080
16.12.1 Extrema à une variable	1080
16.12.2 Extrema libre	1080
16.12.3 Extrema liés	1081
16.12.4 Algorithme du gradient à pas optimal	1084
16.13 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse	1087
16.13.1 Lemme de Morse	1091
16.14 Variétés	1093
16.14.1 Introduction	1093
16.14.2 Définition et propriétés	1093
16.14.3 Espace tangent	1094
16.15 Prolongement de fonctions et complétion d'espaces métriques	1095
16.16 Un petit extra	1101
17 Espaces de Hilbert	1103
17.1 Espaces de Hilbert	1103
17.2 Théorème de la projection	1104
17.3 Systèmes orthogonaux et bases	1107
17.3.1 Orthogonalité	1107
17.3.2 Dual	1109
17.3.3 Séparabilité	1110
17.3.4 Bases d'espaces de Hilbert	1114
17.3.5 Digression sur les normes opérateurs	1117
17.3.6 Applications linéaires et continuité	1118
17.4 Théorème de Kochen-Specker	1119
17.5 Théorème de Lax-Milgram	1120
18 Analyse fonctionnelle	1123
18.1 Théorème d'Ascoli	1123
18.2 Théorème de Banach-Steinhaus	1124
18.3 Espaces L^p	1126
18.3.1 Généralités	1126
18.3.2 L'espace L^∞	1128
18.3.3 Inégalité de Jensen, Hölder et de Minkowski	1129
18.3.4 Ni inclusions ni inégalités	1131
18.3.5 Complétude	1132
18.3.6 L'espace L^2	1136
18.3.7 Coefficients et série de Fourier	1138
18.4 Convolution	1139
18.4.1 Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact	1140
18.4.2 Dualité et théorème de représentation de Riesz	1142
18.4.3 Approximation de l'unité	1151
18.4.4 Densité des polynôme trigonométrique	1153
18.5 Théorèmes de Hahn-Banach	1154
18.6 Théorème de Tietze	1156
18.7 Espace de Schwartz	1159
18.7.1 Topologie	1161
18.7.2 Produit de convolution	1163

19 Analyse complexe	1165
19.1 Fonctions holomorphes	1165
19.1.1 Équations de Cauchy-Riemann	1165
19.1.2 Intégrales sur des chemins fermés	1166
19.1.3 Lacets, indice et homotopie	1169
19.1.4 Théorème de Cauchy et analyticité	1170
19.1.5 Théorème de Brouwer en dimension 2	1172
19.1.6 Principe des zéros isolés	1173
19.1.7 Prolongement de fonctions holomorphes	1174
19.1.8 Théorème de Runge	1174
19.2 Intégrales de fonctions holomorphes	1177
19.3 Conditions équivalentes à l'holomorphie	1181
19.4 Singularités, pôles et méromorphe	1182
19.5 Fonctions d'Euler	1183
19.5.1 Euler et factorielle	1186
19.6 Partition d'un entier en parts fixées	1186
19.7 Exponentielle complexe	1189
19.7.1 Intégrale de Fresnel	1191
19.8 Théorème de Weierstrass	1193
19.9 Théorème de Montel	1195
19.10Espaces de Bergman	1196
20 Série de Fourier	1201
20.1 Densité des polynômes trigonométriques	1201
20.1.1 Convergence pour les fonctions continues (Weierstrass)	1201
20.1.2 Convergence pour les fonctions continues (Fej�r)	1202
20.1.3 Densité dans L^p	1205
20.2 Fonctions de Dirichlet	1205
20.3 Coefficients et série de Fourier	1206
20.3.1 Le contre-exemple que nous attendions tous	1208
20.3.2 Inégalité isopérimétrique	1210
20.3.3 Suite équirépartie, critère de Weyl	1212
20.3.4 � propos des coefficients	1214
21 Transformation de Fourier	1217
21.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	1217
21.1.1 Formule sommatoire de Poisson	1220
21.2 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz	1222
21.2.1 Quelques transformées de Fourier	1225
21.3 Suite régularisante	1227
21.3.1 Formule d'inversion	1229
21.4 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$	1231
21.4.1 Extension de $L^1 \cap L^2$ vers L^2	1231
22 Distributions	1235
22.0.0.1 Dérivée partielle au sens faible	1235
22.1 Topologie	1235
22.2 Distributions	1238
22.2.1 Multiplication d'une distribution par une fonction	1240
22.2.2 Dérivée de distribution	1240
22.2.3 Ordre et support d'une distribution	1241
22.3 Distributions tempérées	1244
22.3.1 Topologie	1245
22.3.2 Distributions associées à des fonctions	1245

22.3.3	Composition avec une fonction	1245
22.3.4	Transformée de Fourier d'une distribution tempérée	1246
22.3.5	Convolution d'une distribution par une fonction	1246
22.3.6	Approximation de la distribution de Dirac	1247
22.3.7	Peigne de Dirac	1250
22.4	L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$	1251
22.4.1	Dérivation	1253
22.5	L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$	1253
22.5.1	Propriétés générales	1253
22.5.2	Dérivation	1256
22.6	Une équation de distribution	1258
23	Espaces de Soblev, équations elliptiques	1261
23.1	Espaces de Soblev	1261
23.1.1	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$	1261
23.1.2	Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	1267
23.1.2.1	Définition	1268
23.1.3	Espace de Soblev fractionnaire	1269
23.2	Trace	1271
23.3	Théorème de plongement	1274
24	Équations différentielles	1279
24.1	Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$?	1280
24.2	Équations linéaires du premier ordre	1281
24.2.1	Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ?	1282
24.3	Équations à variables séparées	1283
24.3.1	La méthode rapide	1283
24.3.2	La méthode plus propre	1284
24.3.3	Les théorèmes	1284
24.4	Équations linéaires d'ordre supérieur	1286
24.4.1	Équations et systèmes linéaire à coefficients constants	1286
24.4.2	Si les coefficients ne sont pas constants ?	1286
24.5	Système d'équations linéaires	1287
24.5.1	La magie de l'exponentielle...	1287
24.5.2	... mais la difficulté	1287
24.5.3	La recette	1287
24.5.4	Système d'équations linéaires avec matrice constante	1288
24.5.5	Système d'équations linéaires avec matrice non constante	1289
24.6	Réduction de l'ordre	1289
24.7	Propriété des solutions	1290
24.7.1	Fuite des compacts et explosion en temps fini	1290
24.7.2	Stabilité de Lyapunov	1291
24.7.3	Système proie et prédateurs : Lokta-Voltera	1295
24.8	Équation du second ordre	1298
24.8.1	Wronskien	1298
24.8.2	Avec second membre	1299
24.8.3	Équation $y'' + q(t)y = 0$	1299
24.8.4	Équation de Hill	1301
24.9	Différents types d'équations différentielles	1304
24.9.1	Équation homogène	1304
24.9.2	Équation de Bernoulli	1305
24.9.3	Équation de Riccati	1305
24.9.4	Équation différentielle exacte	1305
24.9.4.1	Résolution lorsque tout va bien	1305

24.9.4.2 Facteur intégrant (quand tout ne va pas bien)	1306
24.10 Distributions pour les équations différentielles	1306
24.10.1 Équation de Schrödinger	1306
24.11 Équations différentielles du premier ordre	1310
24.12 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables	1313
24.13 Équations différentielles linéaires du premier ordre	1315
24.13.1 Méthode de variation de la constante	1317
24.14 Équations différentielles linéaires du second ordre	1318
24.14.1 Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants	1318
24.14.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes	1320

25 Calcul numérique 1323

25.1 Représentations numériques	1323
25.1.1 Entier relatif en complément à deux (binaire)	1323
25.1.2 Représentation en virgule flottante	1324
25.1.3 Simple précision, IEEE-754	1325
25.2 Problèmes pour écrire des nombres	1327
25.2.1 Troncature : la base	1328
25.2.2 Troncature : le drift	1328
25.2.3 Quelques bonnes règles	1329
25.3 Erreur de “cancellation”	1329
25.3.1 Erreur d’absorption	1331
25.3.2 Calcul d’une dérivée	1332
25.4 Conditionnement et stabilité	1332
25.4.1 Comment choisir et penser le K ?	1335
25.5 Conditionnement d’une matrice	1336
25.5.1 Perturbation du vecteur	1338
25.5.2 Perturbation de la matrice	1339
25.6 Un peu de points fixes	1340
25.6.1 Choix de la fonction à point fixe	1340
25.6.2 Convergence quadratique	1342
25.6.3 Convergence	1344
25.7 Méthode de Newton	1345
25.7.1 «Justification» par la formule par Taylor	1345
25.7.2 «Justification» par points fixes	1346
25.7.3 Convergence de la méthode de Newton	1346
25.7.4 Formalisation de l’algorithme	1348
25.7.5 Caractéristiques	1349
25.7.6 Exemple de la racine carrée	1349
25.7.7 Si multiplicité	1350
25.7.8 Et la dérivée ?	1350
25.7.9 Méthode de Newton : le cas général	1351
25.8 Estimation de l’ordre de convergence	1353
25.9 Autres méthodes	1353
25.9.1 Méthode de Schröder	1353
25.9.2 Halley	1353
25.10 Méthode des sécantes variables	1354
25.10.1 Aitken	1354
25.11 Équations algébrique	1355
25.11.1 Résoudre un système linéaire	1355
25.11.2 Caractéristiques	1356
25.11.3 Définitions	1356

25.12	Équations non linéaire	1357
25.12.1	Méthode de bisection	1358
25.13	Efficacité	1360
25.14	Exercices	1361
25.15	Approximations de fonctions	1364
25.15.1	Critère d'interpolation	1364
25.15.2	Base de Newton	1365
25.15.3	Méthode des minima quadratiques	1367
25.15.4	Notre espace de Hilbert	1368
25.15.5	Droite de régression	1369
25.16	Système linéaires (généralités)	1370
25.16.1	Les méthodes directes	1371
25.16.2	Méthodes itératives	1371
25.17	Système linéaires (méthodes directes)	1372
25.17.1	Inversion de matrice triangulaire	1372
25.17.2	Transformation gaussienne	1372
25.17.3	Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU)	1373
25.17.4	Matrice de permutation élémentaires	1377
25.17.5	Méthode de Gauss avec pivot partiel	1378
25.17.6	Déterminant	1386
25.17.7	Plusieurs termes indépendants	1386
25.17.8	Cholesky	1387
25.18	Système linéaire (méthodes itératives)	1390
25.18.1	La méthode générale	1391
25.18.2	Jacobi	1391
25.18.3	Gauss-Seidel	1391
25.18.4	Autres	1391
26	Variables aléatoires et théorie des probabilités	1393
26.1	Espace de probabilité	1393
26.2	Variables aléatoires	1394
26.2.1	Indépendance	1394
26.2.2	Lois conjointes et indépendance	1397
26.2.3	Somme et produit de variables aléatoires indépendantes	1398
26.2.4	Espérance	1400
26.2.5	Variance	1401
26.2.6	Covariance	1402
26.2.7	Probabilité conditionnelle, première	1403
26.2.8	Espérance conditionnelle	1404
26.2.9	Probabilité conditionnelle, seconde	1410
26.2.10	Un petit paradoxe	1411
26.2.10.1	Le cas facile	1411
26.2.10.2	Premier raisonnement	1412
26.2.10.3	Simulation	1412
26.2.10.4	La vraie réponse	1413
26.2.10.5	Le même, tourné à peine différemment	1414
26.2.11	Résumé des choses conditionnelles	1414
26.2.12	Inégalité de Jensen	1415
26.2.13	Fonction de répartition	1415
26.2.14	Fonction caractéristique	1415
26.2.15	Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace	1417
26.2.16	Loi d'une variable aléatoire	1418
26.2.17	Changement de variables	1419
26.3	Convergence	1419

26.4	Loi des grands nombres, théorème central limite	1424
26.4.1	Loi des grands nombres	1424
26.4.2	Théorème central limite	1426
26.4.3	Marche aléatoire	1429
26.5	Les lois usuelles	1430
26.5.1	Loi de Bernoulli	1430
26.5.2	Loi binomiale	1430
26.5.3	Loi multinomiale	1431
26.5.4	Loi géométrique	1432
26.5.5	Loi de Poisson	1432
26.5.6	Loi exponentielle	1433
26.5.7	Approximation de la binomiale par une Poisson	1436
26.5.8	Loi de Poisson et loi exponentielle	1436
26.5.9	Loi normale	1438
26.5.10	Vecteurs gaussiens	1439
26.5.11	Variable aléatoire de Rademacher	1443
26.5.12	Loi de Student	1445
26.5.13	Indépendance, covariance et variance de somme	1445
26.6	Estimation des grands écarts	1446
26.7	Simulations de réalisations de variables aléatoires	1450
26.7.1	Générateur uniforme	1450
26.7.1.1	Première méthode	1450
26.7.1.2	Seconde méthode	1450
26.7.2	Simulation par inversion	1450
26.7.2.1	Loi exponentielle	1451
26.7.3	Algorithme de Box-Muller	1451
26.7.4	Méthode du rejet	1452
26.7.5	Simuler une loi géométrique à l'ordinateur	1454
26.7.6	Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur	1454
26.7.7	Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur	1454
26.8	Sage	1455
26.8.1	Loi exponentielle	1455
26.8.2	Inverser des lois	1455
26.9	Monte-Carlo	1456
26.9.1	Intervalle de confiance	1457
26.9.1.1	Principe	1457
26.9.1.2	Échantillonnage préférentiel	1458
26.9.1.3	Méthode de la variable de contrôle	1458
26.9.1.4	Variables antithétiques	1458
26.10	Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires	1459
26.10.1	Nombres normaux	1459
26.10.2	Théorème de Bernstein	1461

27 Statistiques 1465

27.1	Notations et hypothèses	1465
27.2	Modèle statistique	1465
27.3	Modèles d'échantillonnages	1468
27.4	Estimation ponctuelle	1471
27.5	Statistiques et estimateurs	1473
27.5.1	Qualité des estimateurs	1473
27.5.2	Méthode des moments	1474
27.5.3	Méthode de substitution	1476
27.5.4	Méthode du maximum de vraisemblance	1476
27.5.5	Estimation d'une fonction de répartition	1478

27.5.6	Espérance et variance d'un estimateur	1481
27.6	Estimation par intervalle de confiance	1481
27.6.1	Région de confiance	1484
27.6.2	Fonction pivotale	1484
27.6.3	Sondage de proportion	1487
27.7	Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien	1488
27.7.1	Distance entre des mesures	1489
27.7.2	Estimateur par fenêtres glissantes	1489
27.8	Test d'hypothèses, prise de décision	1492
27.8.1	Exemple : qualité des pièces d'usine	1492
27.8.2	Exemple : la résistance d'un fil	1492
27.8.3	Vocabulaire et théorie	1493
27.8.4	Risque de première et seconde espèce	1494
27.8.5	Modèle paramétrique de loi gaussienne	1495
27.9	Tests paramétriques	1496
27.10	Tests d'adéquation	1497
28	Chaînes de Markov à temps discret	1503
28.1	Généralités	1503
28.2	Chaînes de Markov sur un ensemble fini	1504
28.3	Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$	1506
28.3.1	Chaînes de Markov homogènes	1508
28.3.2	Graphe de transition	1509
28.3.3	Chaîne de Markov définie par récurrence	1509
28.3.3.1	Le cas général	1509
28.3.3.2	Exemple : la file de réparation de machines à laver	1511
28.4	Classification des états	1511
28.4.1	Chaînes irréductibles	1514
28.4.2	Nombre de visites	1515
28.5	Mesure invariante	1520
28.6	Convergence vers l'équilibre	1522
28.7	Processus de Galton-Watson	1524
29	Martingales	1529
29.1	Convergence de martingales	1529
29.2	Temps d'arrêt et martingale terminée	1532
29.3	Décomposition de martingales	1534
29.4	Problème de la ruine du joueur	1536
29.4.1	Le cas où la pièce est truquée	1537
29.4.1.1	Introduction d'une martingale	1537
29.4.1.2	Finitude du temps d'arrêt	1538
29.4.1.3	Temps moyen de jeu	1538
29.4.1.4	Probabilité de victoire du joueur	1539
29.4.2	Le cas où la pièce est non truquée	1540
29.4.2.1	Probabilité de gagner	1540
29.4.2.2	Temps moyen de jeu	1542
29.4.3	Un petit complément	1542
30	Processus de Poisson	1543
30.1	Processus de Poisson	1543
30.2	Quelques trucs sur la simulation	1546
30.2.1	Le théorème central limite pour Markov	1547
30.2.2	Feuille 5	1547
30.2.3	Feuille 6	1547

30.2.4	Feuille 7	1548
30.2.5	Simuler des lois conditionnelles	1548
31	Utilisation dans les autres sciences	1549
31.1	Démystification du MRUA	1549
31.1.1	Preuve de la formule	1549
31.1.2	Interprétation graphique	1550
31.2	Relativité en mécanique newtonienne	1550
31.2.1	Relativité du mouvement	1550
31.2.2	Bob et Alice	1550
31.3	Invariance de la vitesse de la lumière	1551
31.3.1	Champ de gravitation et électrique	1551
31.3.1.1	Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique	1551
31.3.1.2	Pourquoi pas la gravitation ?	1551
31.3.2	Support du champ : pas d'éther	1552
31.3.3	Le problème	1552
31.4	Conséquences	1552
31.4.1	Ligne d'univers	1552
31.4.2	Transformations de Lorentz	1553
31.4.3	Conditions d'existence	1556
31.4.4	La notion d'intervalle	1557
31.4.4.1	En mécanique newtonienne	1557
31.4.4.2	En mécanique relativiste	1557
31.4.5	Le cône de lumière d'un point	1557
31.4.6	Contraction des longueurs	1558
31.4.7	Dilatation des intervalles de temps	1558
31.4.8	Invariance de l'intervalle	1559
31.4.8.1	Rappel de trigonométrie hyperbolique	1560
31.4.8.2	Les transformations de Lorentz (bis)	1562
31.4.9	Vitesse limite	1564
31.5	Applications	1564
31.5.1	Le GPS	1564
31.5.2	Les ondes électromagnétiques	1564
31.6	Mécanique relativiste	1564
31.6.1	Des problèmes, toujours des problèmes	1565
31.6.2	Loi d'addition des vitesses	1565
31.6.3	L'action d'une force	1566
31.6.4	Équivalence entre la masse et l'énergie	1567
31.7	Principe de correspondance	1567
32	Exemples avec Sage	1569
A	GNU Free Documentation License	1589
	Bibliographie	1597
	Liste des notations	1615

Index

- λ -système, 439
- p -Sylow, 752
- p -groupe, 752
- Éther, 1552
- Événement, 1557
- élément
 - primitif, 161
- élémentaire
 - polynôme symétrique, 175
- éléments
 - associés dans un anneau, 130
- équation
 - de Riccati, 1305
 - des classes, 105
 - des orbites, 104
 - différentielle
 - étude qualitative, 1302
 - Hill, 1301
 - homogène, 1304
 - système, 1302
 - diophantienne, 95, 135, 137
 - Fredholm, 1061
 - orbite-stabilisateur, 104
- équation différentielle
 - linéaire du premier ordre, 1315
 - linéaire du premier ordre, homogène, 1315
 - linéaire du second ordre, 1318
 - linéaire du second ordre, homogène, 1318
 - premier ordre, 1310
 - second ordre, 1311
 - variables séparables, 1313
- équation homogène associée, 1315
- équilibre
 - point point une équation différentielle, 1291
- équivalence
 - de norme, 323
- étagée
 - fonction, 470
- état
 - apériodique, 1523
 - récurrent, 1512
 - récurrent positif, 1512
 - transitoire, 1512
- étranger
 - dans leur ensemble, 143
- abélianisé, 87
- Abel
 - angulaire, 885
 - convergence radiale, 1011
- abscisse
 - curviligne, 944
- absolument continue, 877
- absorbant, 1511
- accélération d'un chemin, 930
- accroissement, 662
- accumulation
 - dans $\mathbb{R}$, 261
 - dans espace vectoriel normé, 321
- action
 - adjointe, 103
 - de groupe
 - Wedderburn, 185
 - domaine fondamental, 105
 - fidèle, 103
 - libre, 106
 - transitive, 106
- action de groupe, 290
 - sur des matrices, 1091
- adhérence, 259, 318
- affine
 - application, 512
 - espace, 509
 - sous-espace, 513
- affine (application), 275
- aire, 803
- algébrique
 - extension, 160
 - nombre, 166
 - par rapport à une extension de corps, 172
- algébriquement
 - indépendant, 217
- algèbre, 149
 - de parties, 434
 - engendrée, 149
 - polynômes, 141
- algorithme, 1356
 - consistant, 1356

- convergent, 1356
- facteurs invariants, 139
- fortement consistant, 1356
- stable, 1356
- alterné
 - groupe, 109
 - polynôme, 175
- alternée
 - forme linéaire, 283
- analytique
 - au sens complexe, 1170
- angle
 - d'une courbe, 961
 - entre deux droites, 734
 - entre vecteurs, 306
- Anneau
 - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
 - polynôme cyclotomique, 181
- anneau, 71
 - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 184, 188, 761, 766
 - à division, 149
 - de séries formelles, 1041
 - euclidien
 - facteurs invariants, 139
 - factoriel, 130
 - intègre, 127
 - noetherien, 133
 - principal, 132, 154, 370
 - utilisation, 156
 - quotient par un idéal, 123
- anneaux
 - de séries formelles
 - utilisation, 1186
- apériodique
 - état d'une chaîne de Markov, 1523
 - chaîne de Markov, 1523
- application
 - affine, 522
 - définie positive, 302
 - de classe C^k , 642
 - différentiable, 606, 608, 639, 642, 1070, 1091
 - extrema lié, 1082
 - en escalier, 795
 - linéaire
 - bornée, 351
 - théorème de Banach-Steinhaus, 1124
 - mesurable, 438
 - multilinéaire, 348
 - ouverte, 346
 - semi-définie positive, 302
 - tangente, 612
- application réciproque, 262
- approximation
 - de fonctions
 - par des polynômes, 1461
 - de l'unité, 1151
 - par polynômes, 1052
 - polynômiale, 1174
- arc
 - géométriques, 943
 - paramétré, 929
- arc cosinus, 683
- arc sinus, 681
- arc tangente, 684
- archimédien, 72
- associé, 130
- associée
 - subdivision, 795
- asymptotiquement pivotale, 1484
- attractif
 - point fixe, 1058
- automorphisme, 272
- axiome
 - du choix, 69
- Bézout
 - anneau principal, 132
 - calcul effectif, 93
 - nombres entiers, 90
 - polynômes, 144
- Baire
 - espace, 266
 - théorème, 258, 267
 - tribu, 432
- Banach
 - espace, 1103
- barycentre
 - cas affine, 515
 - cas vectoriel, 741
 - enveloppe convexe, 519
- base, 269
 - canonique de $\mathbb{R}^m$, 269
 - d'un module, 126
 - de Newton, 1365
 - de topologie, 221
 - dénombrable, 227
 - espace métrique, 227
 - duale, 669, 838
 - espace préhilbertien, 1114
 - hilbertienne
 - utilisation, 1211
 - locale, 988
- Bergman (espace), 1196
- Bernoulli, 1430
 - somme, 1447
- Berry-Esséen (borne), 1429
- Bessel

- inégalité, 1111
- biais
 - d'estimateur, 1474
- bien
 - conditionné, 1333
 - enchaîné, 256
- bijection, 262
- bilinéaire, 348
- binormale, 952
- birégulier
 - point sur une courbe, 941
- birapport, 542
- Bolzano-Weierstrass
 - espaces métriques, 251
- borélienne
 - fonction, 454
 - tribu, 431
- boréliens, 431
- bord, 260
- borné, 221
 - partie de V , 314
 - temps d'arrêt, 1532
- bornée, 241
 - différentielle, 635
 - partie de $\mathbb{R}^m$, 592
 - suite, 235
- boule
 - avec semi-normes, 263
 - fermée, 259, 313
 - ouverte, 221, 259, 313
- Bruhat (décomposition), 723
- Burnside
 - formule, 105
- Cône de lumière, 1557
- canonique
 - base, 269
 - décomposition, 71
 - espace affine, 509
- Cantor
 - ensemble, 501
- caractéristique
 - d'un anneau, 124
 - polynôme, 372
 - sous-groupe, 85
- caractère, 775
 - abélien, 769
 - de S_4 , 783
 - groupe diédral, 784
 - irréductible, 776
- cardioïde, 941
- carré
 - dans un corps fini, 189
- catégorie
 - ensemble de première, 258
- Cauchy
 - critère
 - uniforme, 658
 - déterminant, 292
 - formule, 1170
 - produit, 1009
 - théorème, 752
- Cauchy-Riemann, 1165
- Cauchy-Schwarz, 302, 1104
- Cayley
 - théorème, 752
- cellule d'un pavage, 794
- centrale (application), 776
- centralisateur, 85, 117
- centre
 - d'un anneau, 117
 - d'un groupe, 85
- cercle
 - circonsrit à une courbe, 64, 968
- cercles
 - perpendiculaires, 525
- Cesaro
 - moyenn, 333
- chaîne, 256
 - de Markov, 1503
 - apériodique, 1523
 - convergence, 1524
 - finie, 1504
 - homogène, 1503
 - irréductible, 1509
 - récurrente positive, 1518
 - régulière, 1505
- champ
 - conservatif, 900
 - de vecteurs, 848
- champ dérivant d'un potentiel, 900
- changement de variable, 943
- Chasles, 509
- Chemin
 - classe C^2 , 846
- chemin, 846, 930
 - dans $\mathbb{R}^p$, 929
- circulation, 898
- clôture algébrique, 166
- classe
 - conjugaison
 - dans S_4 , 108
- classe C^1 , 351, 627
- codimension, 272
- coefficient
 - de Fourier, 1201
- coefficients

- de Fourier, 1138
- coefficients binomiaux, 118
- coercion, 1120
- coercive, 1084
- colinéarité, 531
- combinaison
 - convexe, 515
- combinatoire, 750
- commutant, 403
- commutateur
 - dans un groupe, 87
- compacité, 251, 253, 257, 1178, 1193
 - sous-groupes du groupe linéaire, 725
 - théorème de Dini, 658
 - utilisation, 895
 - théorème de Montel, 1195
- compact, 220, 316, 594
 - arc paramétré, 929
 - Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$, 245
 - boule unité, 244
 - et fonction continue, 245, 252
 - fermé et borné, 244
 - implique fermé, 230
 - intervalle $[a, b]$, 243
 - le coup du, 876
 - localement, 220
 - opérateur, 1123
 - produit dénombrable, 258
 - produit fini, 257
 - quasi, 220
 - relatif, 1123
 - relativement, 220
 - séquentiellement, 221
 - suite exhaustive, 255
- complément
 - à deux, 1323
- complémentaire, 70
- complété
 - d'un espace métrique, 1099
- complétion
 - projective, 533
- complétude, 1097, 1099, 1132
 - de $\mathbb{R}$, 326
 - espaces L^p , 1134
- complète
 - famille de projecteurs, 126
- complet
 - $\mathbb{R}$, 226
 - corps, 72
 - espace mesuré, 444
 - espace topologique, 223
- composante, 663
- composition
 - suite de, 99
- concave, 647
 - log-concave, 654
- condition initiale, 1312
- conditionnement
 - absolu, 1333
 - d'une matrice inversible, 1336
 - relatif asymptotique, 1356
- conjugués
 - éléments d'une extension, 160
- connexe
 - par arc, 247
- connexité, 257
 - définition, 233
 - et intervalles, 242
 - fonction holomorphe, 1173
 - indice d'une courbe, 1169
 - le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$, 714
 - par arc
 - fonction différentiable, 639
 - points d'accumulation, 253
 - prolongement analytique, 1101
 - signature d'une forme quadratique, 1088
 - théorème de Runge, 1174
 - théorème des valeurs intermédiaires, 570
 - utilisation
 - Brouwer, 1172
- Conservative, 850
- consistance
 - estimateur, 1473
- constructible
 - angle, 212
 - point, 208
 - réel, 208
- construction
 - des réels, 78
- contenu, 129
- continue, 567
 - fonction
 - en un point, 229, 672
 - sur un intervalle, 673
 - fonction entre espaces métriques, 247
 - fonction entre espaces topologiques, 229
 - fonction réelle, 567
 - forme différentielle, 838
 - sur espace métrique, 572
 - uniformément, 592
- continuité, 553
 - fonction définie par une intégrale, 874
 - séquentielle, 248
 - sur un intervalle, 567
- contraction, 1058
- convergence

- absolue, 327
- commutative, 338
- dans un espace vectoriel normé, 325
- de martingales, 1533
- de suite, 220
- en loi, 1420
- en norme, 657
- en probabilité, 1420
- normale, 327
- ordre, 1353
- presque sûrement, 1419
- quadratique, 1342
- rapidité, 765, 1220, 1221, 1351, 1447
- série, 326
- suite
 - dans un corps, 72
 - suite dans $\mathbb{R}^m$, 261
 - suite numérique, 234, 1052, 1212
 - Abel angulaire, 885
 - uniforme, 657
 - intégrale, 872
 - série de fonctions, 327
 - suite de fonctions, 657
 - théorème de Dini, 658
- convergent
 - estimateur, 1473
- convexité
 - barycentre, 517
 - enveloppe de $O(n)$, 722
 - fonction, 647
 - inégalité de Jensen, 655
 - locale, 1156
 - méthode de Newton, 1348
 - stricte, 647
 - utilisation, 895
- convolution, 1399, 1526
- coordonnées
 - barycentriques, 521
 - cartésiennes
 - dans un espace affine, 521
 - curvilignes, 988
 - cylindrique, 426
 - dans un espace affine, 510
 - homogène, 538
 - sphériques, 426
- corps, 71
 - archimédien, 72
 - complet, 72
 - de décomposition, 166
 - de rupture, 164
 - polynôme cyclotomique, 181
 - des fractions, 151
 - des fractions rationnelles
 - utilisation, 1186
 - extension, 169, 176
 - fini, 188, 192, 195
 - Wedderburn, 185
 - ordonné, 72
 - premier, 151
- cosinus
 - angle entre deux vecteurs, 306
 - hyperbolique, 685
- courbe, 930
 - étude métrique, 1211
 - de Jordan, 978, 1210
 - efficacité, 1494
 - fermée, 958
 - simple, 958
- courbe de niveau, 628, 631
- courbure, 952
 - signée, 959
 - totale, 960
- covariance, 1402
- critère
 - Abel, 1007
 - Abel pour intégrales, 873
 - Cauchy
 - uniforme, 658
 - de Cauchy, 326
 - série alternée, 331
 - Weierstrass, 873
 - série de fonctions, 1004
- critique
 - Galton-Watson, 1526
 - point, 1080
 - point d'un arc, 941
 - région, 1493
 - valeur, 1494
- cyclique
 - endomorphisme, 368
 - groupe, 85
 - matrice, 368
- cycloïde
 - coordonnées normales, 946
 - longueur, 940
- décalage, 1325
- décimale
 - décomposition, 336
- décomposition
 - Bruhat, 723
 - canonique, 71
 - corps, 166
 - Dunford, 388
 - application, 391
 - exponentielle de matrice, 389
 - Jordan

- et exponentielle de matrice, 389
 - polaire, 719
 - primaire, 387
 - sous-espaces caractéristiques, 387
 - spectrale, 387
- dénombrable, 71
 - à l'infini, 221
- dénombrement, 750
 - partitions de $\{1, \dots, n\}$, 1041
- dérivé
 - groupe, 87
- dérivée, 581
 - au sens de distributions, 1261
 - dans Sobolev $H^1(I)$, 1261
 - directionnelle, 601, 604
 - distributionnelle, 1240
 - faible, 1235
 - fonction à valeurs dans E' , 266
 - partielle, 600, 602, 662
 - seconde, 581, 675
- dérivabilité
 - fonction définie par une intégrale, 876
 - lemme de Borel, 1044
- dérivable, 582, 675
 - au sens complexe, 999
 - fonction, 581, 1279
- dérivation
 - au sens des distribution
 - Sobolev, 1265
- déterminant, 283
 - Cauchy, 1055
 - d'un endomorphisme, 288
 - d'une famille de vecteurs, 286
 - de Cauchy, 292
 - et inversibilité, 288
 - forme linéaire alternée, 283
 - Gram, 292, 1055
 - interprétation géométrique, 820
 - résultant, 293, 889
 - utilisation, 895
 - Vandermonde, 289
- développable
 - en série entière, 1028
- développement
 - asymptotique, 694
 - limité
 - en zéro, 686
 - fonction holomorphe, 1165
 - premier ordre, 587
 - Taylor, 1091
- degré
 - application $S^1 \rightarrow S^1$, 962
 - d'une représentation, 769
 - extension de corps, 161
- dense
 - nulle part, 258
- densité, 1099
 - conjointe, 1398
 - d'une variables aléatoire, 1394
 - dans un espace de fonction
 - critère de Weyl, 1212
 - de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, 226
 - utilisation, 653
 - de $GL(n, \mathbb{R})$ dans $M(n, \mathbb{R})$, 715
 - de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, 1162
 - de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, 1140
 - de $L^2([0, 1])$ dans $L^p([0, 1])$, 1142
 - de $S^+(n, \mathbb{R})$ dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$, 719
 - des fonctions étagées dans L^p , 1140
 - des polynômes
 - dans $C_c^0[0, 1]$, 1461
 - des polynômes trigonométriques dans $L^p(S^1)$, 1154
 - matrices diagonalisables dans $M(n, \mathbb{C})$, 715
 - mesure, 63, 483
 - points extrémaux dans $\mathcal{L}$, 721
 - prolongement, 1097
- densité d'une mesure, 792
- diédral, 751
- diagonalisable, 378
 - et polynôme minimum scindé, 378
 - exponentielle, 391
- diagonalisation
 - cas complexe, 382
 - cas réel, 384
 - endomorphisme auto-adjoint, 422
 - simultanée, 380
- diamètre, 592
- difféomorphisme, 355, 835, 913
 - de classe C^k , 642
- différence
 - divisée, 1366
- différentiabilité, 639
- différentiable, 611
 - dans un Banach, 350
 - deux fois, 641
 - sur un ouvert, 616
- différentielle, 351, 606
 - de $u \mapsto u^{-1}$, 360
 - partielle, 356
 - totale, 662
- dilatation, 708
- dilatation (matrice), 138
- dimension, 271
 - n -formes multilinéaires alternées, 283
 - définition, 271

- sous espace affine, 513
- utilisation, 519
- direction, 601, 949
 - sous-espace affine, 513
- Dirichlet
 - noyau, 1202
 - théorème, 1202
 - théorème (sur les nombres premiers), 184
- disque de convergence, 1007, 1008
- distance, 221
 - associée à une norme, 224
 - entre deux mesures de probabilités, 1489
 - point et ensemble, 250
- distingué, 85
- distribution, 1238
 - équation de Schrödinger, 1307
 - de Dirac, 1244
 - produit par une fonction, 1240
 - tempérée, 1244
- divergence, 665
- diviseur
 - de zéro, 127
 - de zéro à droite, 127
 - polynôme, 143
- division
 - euclidienne, 90, 143
- domaine, 672
 - fondamental d'une action, 105
- dominé
 - modèle statistique, 1472
- dominée
 - convergence (Lebesgue), 482
 - mesure, 790
- droite
 - projective, 531
- dual, 278
 - d'un espace de Hilbert, 1109
 - de $M(n, \mathbb{K})$, 282
 - de $L^p(\Omega)$, 1150
 - de L^p , 1145
 - de $L^p([0, 1])$ avec $1 < p < 2$, 1143
 - espaces L^p , 1142
 - topologique, 278
- Dunford
 - décomposition, 388
- dyadique, 504
- écart-type, 1401
- échantillon, 1466, 1468
- effectif
 - empirique, 1497
- efficacité
 - courbe, 1494
 - d'une méthode itérative, 1360
- élément
 - de surface, 858
 - de torsion, 115
- élément de surface, 840
- ellipsoïde, 421
- endomorphisme, 272
 - auto-adjoint, 422
 - cyclique, 368
- décomposition
 - polaire, 719
- diagonalisable, 413, 717, 1302
 - Dunford, 388
- diagonalisation, 384
- nilpotent
 - Dunford, 388
- préservant une forme quadratique, 728
- sous-espace stable, 388, 1302
- engendré, 131
 - λ -système, 439
 - corps et anneau, 161
 - idéal dans un anneau, 131
 - sous-espace affine, 514
 - sous-groupe, 85
 - tribu, 430
 - par une variable aléatoire, 1395
- ensemble
 - de Cantor, 501
 - différence symétrique, 70
 - infini, 69
- entrelacement, 776
- enveloppe
 - convexe, 517
- équation
 - différentielle
 - linéaire, 1281
 - ordinaire d'ordre 1, 1279
 - variables séparées, 1283
 - générale de degré n , 218
- équicontinuité, 1123
- équi-intégrable, 1533
- équivalence
 - arcs paramétrés, 943
 - chemin, 937
 - classe de fonctions, 1126
 - de représentations, 776
 - de suites, 326
 - homotopie, 1169
 - norme, 323
 - relation, 70
 - suite de composition, 100
- erreur, 1367, 1390
 - assignation, 1328
 - quadratique, 1370

- troncature, 1328
- erreur relative, 1327
- escalier, 470
- espérance, 1400
 - conditionnelle, 1404, 1409
 - événement, 1410
 - événements, 1410
 - variable aléatoire, 1409
- Espace
 - de Sobolev, 1268
- espace
 - L^2
 - Sobolev, 1265
 - L^p , 1127
 - affine, 509
 - canonique, 509
 - Banach, 1103
 - complet, 1099
 - $C_b^0(X, Y)$, norme uniforme, 1057
 - $\mathcal{D}(K)$, 1237
 - $\mathcal{S}(\Omega)$, 1254
 - de Baire, 266
 - de Bergman, 1196
 - de fonctions
 - L^p , 1134
 - Sobolev H^1 , 1265
 - de Hilbert
 - espace de Sobolev H^1 , 1265
 - de probabilité, 1393
 - de Schwartz, 1160, 1244
 - de Sobolev, 1261, 1269
 - euclidien, 306
 - métrique, 221
 - base de topologie, 227
 - mesuré, 436
 - complété, 447
 - mesurable, 429
 - projectif, 531
 - propre, 375
 - tangent, 1095
 - topologique, 232
 - métrisable, 247
 - vectériel
 - dimension, 283
- espace vectoriel
 - topologique, 222
- estimateur, 1473
 - biais, 1474
 - consistant, 1473
 - convergent, 1473
 - de fonction de répartition, 1479
 - maximum de vraisemblance, 1476
- estimation
 - des grands écarts, 1447
- étrangers
 - polynômes, 143
- Euclide
 - algorithme étendu, 92
 - lemme, 94
- euclidien
 - anneau, 133
 - espace, 303
- Euler
 - indicatrice, 122
- événement, 1393
- exact
 - intervalle de confiance, 1482
- excès
 - intervalle de confiance, 1482
- exhaustive (suite de compacts), 255
- exponentielle, 1019
 - complexe, 1189
 - convergence, 333
 - de matrice, 337, 389, 391, 1038
 - utilisation, 1078
 - existence, 1017
 - rapide, 768
 - unicité, 1018
- exposant, 413, 758
 - d'un groupe, 86
- extension
 - corps de base, 393
 - de corps, 160, 176
 - algébrique, 160, 165
 - finie, 196
 - monogène, 161
 - simple, 161
 - utilisation, 213
 - isométrie, 1098
- extrémal
 - point dans un convexe, 721
- extrémité
 - d'un intervalle, 241
- extrapolation, 1365
- extrema, 1081
 - lié, 1082
 - local
 - relatif, 1081
 - volume d'un ellipsoïde, 895
- extremum, 1091
- facteur
 - intégrant, 1306
- factoriel
 - anneau, 130
- factorisation
 - de polynôme, 146, 163

- faisceau de droites, 539
- famille
 - sommable, 340
- Fatou, 481
- Fejér
 - noyau, 1202
- fermé, 219, 260, 316
 - dans un compact, 230
- fermeture, 318
 - séquentielle, 249
- fidèle (action), 103
- filtration, 1529
- fine
 - subdivision, 932
- fixateur, 102
- flux
 - d'un champ de vecteur, 865
- flux d'un champ de vecteurs, 862
- fonction, 672
 - Γ d'Euler, 1183
 - étagée, 1140
 - à décroissance rapide, 1160
 - borélienne, 454
 - caractéristique, 797
 - d'une variable aléatoire, 1415
 - continue
 - égales, 250
 - par morceaux, 473
 - convexe, 647, 653
 - croissante, 672
 - décroissante, 672
 - définie par une intégrale, 874, 879, 1044, 1193
 - Γ d'Euler, 1183
 - utilisation, 1435
 - de classe $\mathcal{C}^1$, 635
 - de Dirichlet, 1205
 - de Möbius, 206
 - de répartition, 1415
 - différentiable, 1081
 - en escalier intégrable, 796
 - génératrice, 1417
 - holomorphe, 999, 1193
 - théorème de Montel, 1195
 - image, 672
 - méromorphe
 - Γ d'Euler, 1183
 - monotone, 672
 - par morceaux, 473
 - valeurs vectorielles, 663
- fondamental
 - domaine d'une action, 105
- forme
 - bilinéaire, 302
 - non dégénérée, 419
- différentielle, 838
 - exacte, 882
 - fermée, 882
- linéaire
 - différentielle, 1082
- quadratique, 417, 744, 1088, 1090, 1091
 - groupe orthogonal, 728
 - matrice associée, 417
- forme canonique
 - fonction simple, 470
- forme linéaire
 - alternée, 283
- formule
 - Bayes, 1403
 - Burnside, 105
 - d'expulsion (produit vectoriel), 313
 - de Cauchy, 1170
 - Hadamard, 1008
 - inversion Möbius, 206
 - probabilité totales, 1403
 - sommatoire de Poisson, 1220
 - Stirling, 326
 - Taylor
 - reste intégral, 646
 - utilisation, 1351
- Fourier, 1220
 - série
 - utilisation, 1211
 - transformée
 - groupe abélien fini, 771
- fréquence
 - empirique, 1497, 1515
- fraction
 - rationnelle
 - intégration, 889
- fraction rationnelle, 923
- fractions (corps), 151
- Fredholm
 - équation, 1061
- Frenet
 - formules, 953
- Fresnel
 - intégrale, 1191
- Frobénius
 - réduction, 400
- Frobenius
 - morphisme, 125
- frontière, 260, 320
- Fubini
 - théorème
 - dans $\mathbb{R}^n$, 820
- générateur, 85, 269

- génératrice
 - partir d'un module, 126
- géométrie
 - avec des groupes, 545, 745
 - avec nombres complexes, 545, 745
- géométrique
 - avec des nombres complexes, 1211
- Galton-Watson
 - sous-critique, 1526
 - sur-critique, 1526
- Gauss
 - lemme
 - polynômes, 152
 - somme de, 190
- Grönwall (lemme), 1279
- gradient, 607, 617, 626
- Gram (déterminant), 292
- Gram-Schmidt, 306
- graphe, 584, 672
 - de transition (chaîne de Markov), 1509
 - fonction, 628
 - fonction de deux variables, 630
- groupe
 - p -groupe, 752
 - $GL(n, \mathbb{R})$, 1090
 - action, 545
 - utilisation, 728
 - agissant sur un ensemble
 - diédral, 744
 - alterné, 109
 - dérivé, 87
 - de $GL(n, \mathbb{K})$, 713
 - de $SL(n, \mathbb{K})$, 713
 - du groupe alterné, 111
 - du groupe symétrique, 109
 - de Galois, 217
 - de permutation, 784
 - caractères de S_4 , 783
 - de permutations, 750
 - de torsion, 115
 - des isométries
 - espace métrique, 222
 - des symétries, 742
 - diédral, 744, 751
 - générateurs (preuve), 745
 - générateurs (utilisation), 784
 - en géométrie, 744
 - et géométrie, 283, 545, 750
 - isométries du cube, 113
 - fini, 185, 188, 750, 754, 761, 766
 - alterné, 110
 - diédral, 744
 - Wedderburn, 185
 - linéaire, 723
 - décomposition polaire, 719
 - enveloppe convexe de $\Omega(n)$, 722
 - hyperplan, 283
 - sous-groupes compacts, 725
 - modulaire, 544
 - orthogonal, 297
 - d'une forme quadratique, 728
 - partie génératrice, 110, 545, 766
 - permutation, 283, 290, 723, 766
 - diédral, 744
 - projectif, 537
 - quotient, 98
 - résoluble, 101
 - spécial orthogonal, 298
 - symétrique, 106
 - action sur un triangle, 773
- groupe dérivé
 - de $GL(n, \mathbb{C})$, 707
- Hadamard
 - formule, 1008
- Hardy-Littlewood (théorème), 1052
- Hausdorff, 220
- Heine (théorème), 593
- hermitien
 - produit scalaire, 376
- hessienne, 644
- Hilbert, 1103
- holomorphe, 999
- homéomorphisme, 228
- homogène
 - chaîne de Markov, 1503
- homographie, 536, 545
- homotopie, 964
- hyperplan, 738
 - de $M(n, \mathbb{K})$, 283
- sépare
 - au sens strict, 1156
- séparer
 - au sens large, 1156
- hypothèse
 - alternative, 1493
 - composite, 1493
 - multiple, 1493
 - nulle, 1493
 - simple, 1493
- idéal
 - bilatère, 123
 - dans un anneau, 71
 - maximal, 131
 - maximum, 172
 - principal

- à droite, 131
- à gauche, 131
- identifiable, 1472
- identité
 - polarisation, 417
- image, 672
- inégalité
 - arithmético-géométrique, 656
 - Bessel, 1111
 - Cauchy-Schwarz, 302, 1104
 - de Khintchine, 1444
 - de la moyenne, 639
 - des pentes, 648
 - Hölder, 1129
 - utilisation, 1401, 1462
 - isopérimétrique, 1211
 - Jensen, 655
 - espérance conditionnelle, 1415
 - pour une somme, 655
 - version intégrale, 1129
 - Kantorovitch, 656
 - Markov, 1424
 - Minkowski, 1131
 - triangulaire, 221, 223
 - produit scalaire, 303
- incompressible
 - champ de vecteur, 667
- indécomposable
 - module, 126
- indépendance, 1397
 - événements, 1394
 - utilisation, 1459, 1536
 - affine, 520
 - algébrique, 217
 - sous tribus, 1394
 - variables aléatoires, 1395
- indicatrice d'Euler, 122
- indice, 96
 - d'une courbe dans $\mathbb{C}$, 1169
 - de rotation, 963
- inductif, 69
- induite
 - topologie, 317
 - tribu, 430
- inférence statistique, 1465
- infimum, 238
- injection, 262
- intégrable, 474
 - fonction non en escalier, 802
 - fonction positive, 807
- intégrale
 - calcul, 1212
 - convergente, 813, 889
 - d'une fonction sur une carte, 841
 - d'une fonction sur une variété, 846
 - d'une forme différentielle, 849
 - fonction en escalier, 796
 - fonction sur un intervalle, 811
 - Fresnel, 1191
 - impropre, 812, 813
 - sur un chemin, 846
- intégration
 - fraction rationnelle, 889
- intérieur, 259
 - d'un ensemble, 315
 - point, 315
- intègre
 - anneau, 127
- interpolation, 1365
- Intervalle, 1557
- intervalle, 241, 672
 - fermé, 672
 - longueur, 492
 - ouvert, 672
- intervalle de confiance
 - asymptotique, 1486
- invariant
 - de similitude, 400
- invariante
 - mesure
 - pour une chaîne de Markov, 1520
- inverse généralisé, 1451
- inversion, 526
 - dans le groupe symétrique, 107
- involution, 380
- irréductible
 - chaîne de Markov, 1509
 - dans un anneau, 130
 - module, 126
 - polynôme, 142
 - représentation, 773
- irrationalité
 - $\sqrt{2}$, 75
- isobarycentre, 515
- isolé
 - élément de $\mathbb{R}$, 261
 - point dans un espace vectoriel normé, 321
- isométrie
 - d'espaces métriques, 222
 - de forme quadratique, 729
 - de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, 745
 - espace euclidien
 - isométries du cube, 113
 - groupe, 222
- isomorphisme
 - $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, 188

- d'espaces topologiques, 228
- espace affine, 513
- isotrope
 - cône, 420
 - totalement, 420
- isotrope (vecteur), 420
- jacobien, 626, 664
- Jordan
 - chemin, 865
 - courbe, 1210
 - réduction, 402
- Jordan-Hölder, 99
- Kronecker, 269
- lacet, 1169
- Lagrange
 - multiplicateur, 1082
 - polynôme, 281
- lagrangien, 1082
- Laplace
 - transformée, 1417
- Laplacien, 994
- Legendre
 - symbole, 189
- Leibnitz, 584, 586
 - applications entre espaces vectoriels normés, 356
- lemme
 - Borel, 1044
 - d'Euclide, 94
 - de Borel-Cantelli, 1423
 - de Gauss
 - contenu de polynôme, 129
 - pour des entiers, 94
 - de Morse, 1091
 - de Schreider, 100
 - de Slutsky, 1421
 - de transfert, 455
 - de Zorn, 69
 - des noyaux, 364
 - Fatou, 481
 - Gauss
 - dans un anneau principal, 133
 - polynômes, 152
 - Grönwall, 1279
 - Hadamard, 881
 - regroupement, 1397
 - Schur complexe, 381
 - Schur réel, 383
- Levi-Civita, 989
- libre, 269
 - action, 106
 - partie, 269
 - partie d'un module, 126
- Ligne d'univers, 1553
- limite, 344
 - d'ensembles, 438
 - d'une fonction, 228
 - de fonctions holomorphes, 1193
 - de suite
 - espace topologique, 220
 - fonction, 228, 551
 - fonction de plusieurs variables, 553
 - inférieure, 463, 464
 - inversion, 1041, 1052, 1127, 1193
 - permutation
 - utilisation, 1417
 - suite, 325
 - suite dans $\mathbb{R}^m$, 261
 - suite numérique, 234
 - supérieure, 463, 464
 - unicité, 229
- linéaire (application), 272
- Lipschitz, 1058
 - localement, 640
- Lipschitzienne, 639
- localement
 - intégrable, 812
- log-concave, 654
- logarithme, 679, 1020
 - de matrice, 1038
- loi
 - χ^2 , 1445
 - binomiale
 - comportement asymptotique, 1447
 - conjointe, 1397
 - d'une variable aléatoire, 1418
 - de Poisson, 1432
 - des grands nombres
 - forte, 1425
 - pour les chaînes de Markov, 1522
 - processus de Poisson, 1544
 - utilisation, 1447, 1459
 - marginale, 1397
 - normale
 - vecteur gaussien, 1439
 - parente, 1465, 1466
 - parente d'un échantillon, 1468
 - réciprocité quadratique, 192
 - sans mémoire, 1434
 - Student, 1445
- Lokta-Volterra, 1295
- longueur
 - élément de, 939
 - arc géométrique, 944

- d'un arc paramétré compact, 932
- d'un intervalle, 492
- d'une arrête, 794
- longueur d'arc, 934
- méromorphe, 1182
- Méthode
 - de Newton, 1346
- méthode
 - des chemins, 561
 - Newton, 1351
 - cas convexe, 1348
- métrique
 - discrète, 222
- maigre, 431
- maigre (ensemble), 258
- majorant, 236, 237
 - essentiel, 1128
- Markov
 - inégalité, 1424, 1471
- martingale, 1529
 - bornée dans $L^2(\Omega)$, 1530
- matrice, 545, 723
 - équivalence, 273
 - dans le groupe linéaire, 728
 - associée à une forme quadratique, 417
 - compagnon, 399
 - creuse, 1371
 - cyclique, 368
 - de dilatation, 138
 - de permutation, 138
 - de similitude, 999
 - de Sylvester, 292
 - de transition, 1503
 - de transvection, 138
 - dense, 1371
 - hermitienne
 - racine carré, 717
 - jacobienne, 617, 626
 - normale, 707
 - orthogonale, 297
 - permutation
 - élémentaire, 1377
 - racine carré, 717
 - semblable, 717
 - semblables, 744, 1090
 - stochastique, 1503
 - symétrique, 1090
 - réelle, 1088
 - trigonalisable, 411
- matrices
 - similitude, 273
- maximal
 - idéal, 131
- maximum, 237, 239
 - global, 1080
 - local, 1080
- mesurable
 - application, 438
 - au sens de m^* , 443
 - ensemble, 436
 - fonction, 454
 - Lebesgue, 792
- mesure
 - σ -finie, 436
 - absolument continue, 790
 - complexe, 791
 - dans une carte, 840
 - de Borel, 460
 - de comptage, 437, 819
 - de Haar, 1065
 - de Lebesgue, 495
 - de Radon, 460, 1179
 - extérieure, 433
 - externe, 792
 - finie, 436
 - sur algèbre de partie, 434
 - image, 457
 - positive, 436
 - probabilité, 1393
 - produit, 489
 - régulière, 460
 - extérieure, 460
 - intérieure, 460
 - sur algèbre de partie, 434
- minimum, 239
- minorant, 237
- modèle
 - échantillonnage, 1466, 1468
 - paramétrique, 1466
 - statistique, 1465
- modulaire (groupe), 544
- module
 - de continuité, 1096
 - indécomposable, 126
 - irréductible, 126
 - simple, 126
 - sur un anneau, 125
- moment, 1400
 - fonction génératrice, 1417
- monôme, 141
- monogène, 85
 - extension de corps, 161
- monotonie, 1300
- morceau
 - fonction continue ou monotone, 473
- morphisme

- d'algèbres, 149
- d'anneaux, 117
- Frobenius, 125
- moyenne
 - de Cesaro, 333
 - empirique, 1402
 - empirique d'un échantillon, 1469
 - quadratique, 1401
- multiplicateur
 - de Lagrange, 1082
- multiplicité
 - racine d'un polynôme, 145
 - racine de $f(x) = 0$, 1345
 - valeur propre
 - algébrique, 373
 - géométrique, 373
- négatif, 81
- négligeable
 - partie d'un espace mesuré, 444
- nabla, 625
- Newton
 - méthode, 1351
- nilpotent, 125
- niveau de confiance, 1482
- nombre
 - complexe
 - norme 1, 185
 - dénormalisé, 1326
 - de Fermat, 213
 - de Néper, 1019
 - normal, 1459
 - normalisée, 1326
 - premier, 154, 184, 188, 757, 761, 765, 766
 - dans leur ensemble, 90
 - deux nombres entre eux, 90
 - théorème des deux carrés, 156
 - tours d'une courbe plane, 962
- nombre premier
 - polynôme cyclotomique, 181
- non dénombrable, 71
- normé
 - espace vectoriel, 223
- normal
 - arc paramétré, 944
 - endomorphisme, 707
 - nombre, 1459
 - sous-groupe, 85
- normal extérieur
 - vecteur, 864
- normale
 - loi réduite, 1438
 - principale, 952
- normalisateur, 85
- norme, 307
 - équivalence, 323
 - d'algèbre, 309
 - d'application linéaire, 308
 - d'une application linéaire, 308
 - définition, 223
 - euclidienne, 301
 - dans $\mathbb{R}^m$, 425
 - opérateur, 309
 - subordonnée, 309
 - supremum, 301
 - vecteur, 304
- noyau
 - d'une forme bilinéaire, 420
 - Dirichlet, 1202
 - Fejér, 1202
- nulle part dense, 258
- observation, 1393
- opérateur
 - adjoint, 377
 - autoadjoint, 377
 - définit positif, 384
 - hermitien, 377
 - linéaire
 - borné, 351
- opérateurs
 - compatibles, 1119
- opposés
 - chemins, 937
- ordre, 69
 - élément, 86
 - d'un groupe, 86
 - d'un polynôme, 197
 - dans un corps, 72
 - distribution, 1241
 - sur un anneau factoriel, 130
 - total, 69
- orientable
 - variété, 843
- orientation, 842
- origine
 - abscisse curviligne, 944
 - repère affine, 521
- orthogonal, 424, 1107
 - coordonnées curviligne, 988
 - famille de projecteurs, 126
 - matrice, 297
 - sous-espace, 278
 - vecteur, 304
- orthonormé, 425
 - système, 1110
- oscillation
 - d'une fonction, 587

- d'une fonction en un point, 587
- osculateur (cercle), 957
- ouvert, 219, 241, 260, 316
 - dans $\mathbb{R}^n$, 259
- parallèle
 - sous-espaces affines, 513
- paramétrages
 - admissible, 943
- paramétrisation, 938
 - normale, 944
- Parseval, 1114
- partie
 - régulière, 686
 - totale, 1110
- partie génératrice, 85
- partition
 - d'un entier en parts fixées, 1186
 - dénombrable mesurable, 466
 - de l'unité, 845
- pavé, 792, 793
- pavable, 793
- Pearson
 - theoreme, 1498
- peigne de Dirac, 1250
- permutation
 - matrice, 138
- permuter
 - dérivée et intégrale
 - $\mathbb{R}^n$, 879
 - dans $\mathbb{R}$, 876
 - dans $\mathbb{R}$ avec les bornes, 878
 - dérivée et limite, 659
 - différentielle et intégrale
 - $\mathbb{R}^n$, 880
 - intégrale
 - et série, 819
 - limite et intégrale, 874
 - convergence dominée, 482
 - convergence monotone, 479
 - espace mesuré, 874, 875
 - série entière et dérivation, 1013
 - série entière et intégration, 1013
 - somme et intégrale, 480, 1004
- petit théorème de Fermat, 153
- PGCD
 - dans un anneau intègre, 128
 - polynômes, 144
- pgcd, 117
 - calcul effectif, 92
- pivotale, 1484
- plan
 - projectif, 531
 - tangent, 626, 662
- Plancherel, 1114
- plongement, 1097
- Poincaré (demi-plan), 544
- point
 - d'équilibre
 - stable, 1291
 - pondéré, 515
- point critique
 - définition, 1093
- point fixe, 1526
 - attractif, 1058
 - Brouwer, 1061
 - Picard, 1059
 - Schauder, 1063
- Poisson
 - formule sommatoire, 1220
 - processus, 1543
- polarisation (identité), 417
- polynôme
 - à plusieurs indéterminées, 195, 295
 - alterné, 175
 - annulateur, 364, 367
 - caractéristique, 372, 382
 - contenu, 129
 - cyclotomique, 179
 - irréductibilité, 181
 - propriétés, 180
 - d'endomorphisme, 717
 - décomposition de Dunford, 388
 - de Bernstein, 1461
 - irréductible, 142
 - séparable, 168
 - sur $\mathbb{F}_q$, 207
 - Lagrange, 281
 - minimal, 163, 366
 - d'un élément d'une extension, 160
 - ponctuel, 367
 - primitif, 197
 - primitif (au sens du contenu), 129
 - racines, 176
 - séparable, 168
 - scindé, 143
 - semi-symétrique, 175
 - symétrique, 175, 176, 195, 290, 295
 - élémentaire, 175, 178
 - trigonométrique, 1153
- portée
 - mesure, 790
- positif, 80
- potentiel, 853, 900
- PPCM
 - dans un anneau intègre, 128
- précision

- simple, 1325, 1326
- préhilbertien, 1103
- premier
 - corps, 151
 - deux éléments d'un anneau principal, 132
 - deux polynômes entre eux, 143
 - idéal, 131
 - sous corps, 151
- premier temps d'atteinte, 1511
- premier type
 - région solide, 805
- presque
 - nulle, 115
 - partout, 438
 - surjective, 1156
- primitif
 - élément d'un corps, 188
 - élément d'une extension de corps, 161
 - polynôme, 143, 197
 - racine, 200
- primitive, 581, 811, 897
 - de fonction continue, 1049
 - et intégrale, 809, 814
 - fonction, 599
- principal
 - anneau, 131
 - idéal, 131
- principe
 - prolongement analytique, 1101
 - zéros isolés, 1173
- Principe de correspondance, 1568
- probabilité
 - conditionnelle, 1403
- problème de Cauchy, 1312
- processus
 - adapté à une filtration, 1529
 - arrêté, 1534
 - croissant prévisible, 1534
 - Galton-Watson, 1524
 - Poisson, 1543
 - sans mémoire, 1434
- produit
 - d'espaces vectoriels normés, 344
 - d'une mesure par une fonction, 63, 483
 - de Cauchy, 1009
 - de convolution, 1139
 - et Fourier, 1217
 - distribution et fonction, 1240
 - espaces mesurés, 491
 - espaces topologiques, 220
 - mixte, 313, 823
 - scalaire
 - en général, 302
 - hermitien, 376
 - sur $M(n, \mathbb{R})$, 311
 - sur $\mathbb{R}^n$, 423
 - semi-direct, 112
 - tensoriel
 - de représentations, 782
 - vectorel, 312, 822
- produit remarquable, 1176
- projecteur
 - dans un module, 126
- projectif
 - complétion, 533
 - droite, 531, 533
 - espace, 531
 - groupe, 537
 - hyperplan, 532
 - plan, 531
 - repère, 541
 - sous-espace, 531
- projection
 - orthogonale, 1106
- prolongement
 - analytique, 1101
 - utilisation, 1195
 - de fonctions, 1097
 - lemme de Borel, 1044
 - méromorphe de la fonction Γ , 1183
 - par continuité, 579, 673
 - dans $H^1(I)$, 1264
 - par densité, 1097
 - théorème de Hahn, 452
- propriété d'intersection non vide, 230
- puissance
 - d'un point, 525
 - d'un test, 1494
- quasi-compact, 220
- quaternion, 171
- quotient, 90, 143
 - dans une suite de composition, 99
 - de groupe, 98
 - de groupes, 761
- réciroque
 - continuité, 262
 - dérivabilité, 585
- récurrent
 - état, 1512
 - nul, 1512
 - point d'un système dynamique, 462
 - positif, 1512
- réduction
 - d'endomorphisme, 388
 - Frobénius, 400

- Jordan, 402
- réel, 78
- réflexif, 1149
- réflexion, 732
 - glissée, 736
 - par rapport à un hyperplan, 738
- région
 - critique, 1493
 - de confiance exact, 1484
 - de rejet, 1493
- régularité
 - d'une mesure, 460
 - extérieure de la mesure de Lebesgue, 498
 - intérieure de la mesure de Lebesgue, 500
- régulière
 - surface, 854
- régulier
 - arc, 941
 - chemin, 865
 - point d'un arc, 941
- régulier à droite, 117
- répulsif
 - point fixe, 1058
- résidu
 - méthode itérative, 1390
- résolvante, 1288
- résultant, 293
 - utilisation, 295, 889
- règle
 - du produit nul, 127
- Règle de Leibnitz, 586
- racine
 - carré
 - de matrice hermitienne, 717
 - carré de matrice
 - hermitienne positive, 717
 - de l'unité, 119, 181, 184, 413, 545, 745
 - primitive, 121
 - utilisation, 180
 - de polynôme, 163
 - multiple, 1345
 - primitive, 200
 - simple, 1345
- racine carré, 570
- raffinement, 932
 - subdivision d'un pavé, 794
- rang, 272, 283, 744
 - classe d'équivalence, 273
 - diagonalisation, 384
 - différentielle, 1082
 - utilisation, 1109
- rare, 431
- rayon
 - de convergence, 1007
 - de courbure, 952
 - de torsion, 953
 - spectral, 309, 389
- recouvrement, 594
- rectangle
 - produit de tribus, 484
- rectifiable, 932
 - arc géométrique, 944
- rejet
 - région dans une prise de décision, 1493
- relèvement, 962
- relations
 - coefficient-racines, 178
 - de Chasles, 509, 916
- relativement
 - compact, 220, 1123
- repère
 - affine, 520
 - cartésien
 - espace affine, 509
 - de Frenet, 952
 - projectif, 541
- Représentation
 - virgule flottante normalisée, 1324
- représentation, 772
 - de groupe fini
 - caractères de S_4 , 783
 - fidèle, 769
 - groupe diédral, 784
 - irréductible, 773, 774
 - produit tensoriel, 782
 - régulière gauche, 778
 - virgule fixe, 1324
- reste, 90, 143
 - d'un développement limité, 686
- risque
 - première espèce, 1494
 - quadratique, 1473
 - seconde espèce, 1494
- rupture
 - corps, 164
- séparé, 220
 - espace topologique, 220
- séparable, 1110
 - élément d'une extension, 170
 - espace topologique, 220
 - extension de corps, 170
 - polynôme irréductible, 168
 - polynôme non constant, 168
- sépare
 - les points, 1047
- série

- dans un espace vectoriel normé, 326
 - de Fourier, 1206, 1220
 - utilisation, 1211
 - de Laurent, 1182
 - de puissance, 1007
 - divergence, 326
 - donnant $(1 - A)^{-1}$, 328
 - entière, 1007, 1041, 1220
 - Abel angulaire, 885
 - fonctions holomorphes, 1170
 - processus de Markov, 1526
 - utilisation, 1186, 1417
 - fonctions, 1052, 1220
 - génératrice d'une suite, 1028
 - utilisation, 1186
 - géométrique, 332
 - harmonique, 332
 - nombres, 1052
 - numérique, 765, 1041
 - Riemann, 332
 - Taylor, 1029
- Schrödinger, 1307
- Schur (théorème), 776
- section, 602
 - de graphe, 628
 - propriété des, 486
- segment
 - dans $\mathbb{R}^p$, 241
 - dans un espace affine, 515
- semblables
 - matrices, 377
- semi-définie positive, 384
- semi-norme, 263
- semi-simple
 - endomorphisme, 369
- semi-symétrique
 - polynôme, 175
- signature
 - d'une permutation, 107
- similitude, 999
- simple
 - extension de corps, 161
 - fonction, 470
 - module, 126
- singularité, 1182
 - effaçable, 1182
 - pôle, 1182
- sinus
 - hyperbolique, 685
- sinus cardinal, 926
- solfège, 120
- solution
 - générale, 1310
 - particulière, 1310
- somme
 - inférieure, 799
 - partielle, 326
 - supérieure, 799
- somme directe (de représentations), 773
- somme partielles
 - Abel angulaire, 885
- sommet, 976
- sous anneau, 123
- sous arc, 929
- sous-additivité
 - sur algèbre de parties, 434
- sous-espace
 - affine engendré par une partie, 514
 - caractéristique, 386
- sous-groupe
 - caractéristique, 85
 - distingué, 761
 - dans le groupe alterné, 110
 - engendré, 85
 - normal, 98, 761
- sous-martingale, 1529
- sous-module, 126
- sous-suite, 592
- spectre
 - d'un endomorphisme, 375
 - matrice hermitienne, 381
 - matrice symétrique réelle, 384
- sphère, 313
 - de Riemann, 544
- stabilité
 - d'un point d'équilibre, 1291
 - Lyapunov, 1292
- stable, 1332
- stathme
 - sur $\mathbb{Z}[i]$, 154
- stathme euclidien, 133
- stationnaire
 - chaîne de Markov, 1520
- statistique, 1473
- statistiques
 - descriptives, 1465
- structure
 - complexe, 959
- structure d'anneau canonique, 117
- Student, 1445, 1486
- subdivision, 794
 - associée à une fonction, 795
 - d'un intervalle, 932
- suite, 115
 - équirépartie, 1212
 - critère de Weyl, 1212

- arithméticogéométrique, 333
- définie par itération, 1351
- de Cauchy, 223, 325
 - dans un corps, 72
- de composition, 99
- de fonctions, 1127
 - théorème de Montel, 1195
- de fonctions intégrables, 874, 1193
- de Jordan-Hölder, 99
- exacte, 111
- régularisante, 1227
- support, 796
 - distribution, 1241
 - famille d'éléments, 115
- supremum, 237, 238
 - d'une suite d'ensembles, 429
- sur-martingale, 1529
- surface paramétrée, 853
- surjection, 262
- Sylow
 - p -Sylow, 752
- Sylvester (matrice), 292
- symétrique
 - polynôme, 175
- symbole
 - de Legendre, 189
- système
 - fondamental, 1286
 - orthonormé, 1110
 - trigonométrique, 1111, 1153
- tangent
 - vecteur unitaire, 952
- tangente, 679, 949, 1025
- tangente à un chemin, 1094
- Tangente hyperbolique, 1562
- tangente hyperbolique, 686
- taubérien, 1050
- taux d'accroissement, 647
- Taylor, 644
 - série entière, 1028
- temps d'arrêt, 1532
- temps de retour, 1511
- terminée
 - martingale, 1533
- test, 1493
 - bilatéral, 1494
 - unilatéral, 1494
- théorème
 - élément primitif, 170, 197, 198
 - accroissements finis, 358
 - dérivée directionnelle, 603
 - dans $\mathbb{R}$, 598
 - forme générale, 639
- Ascoli, 1123
- Bézout
 - polynômes, 144
 - utilisation, 293
- Baire, 258
- Banach-Steinhaus, 1124
 - avec semi-normes, 1125
- base incomplète, 271
- Beppo-Levi, 479
- Bolzano-Weierstrass, 251
- Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$, 245
- Borel-Cantelli, 1393
- Borel-Lebesgue, 244
- Brouwer, 1062
 - dimension 2, 1172
- Carathéodory, 519
- Cauchy, 752
- Cauchy-Arzela, 1068
- Cauchy-Lipschitz, 1066
- Cayley-Hamilton, 374, 716
- central limite, 1427
 - processus de Poisson, 1545
- Chevalley-Warning, 195
- chinois, 158
 - anneau des polynômes, 142
 - anneau principal, 132
- Cochran, 1470
- Cochrane, 1471
- convergence
 - dominée de Lebesgue, 482
 - monotone, 479
- d'Alembert-Gauss, 142
- décomposition des noyaux
 - et exponentielle de matrice, 366
- de Baire, 267
- de Jordan, 978
- de représentation de Riesz, 1109
- des deux carrés, 156
 - version faible, 154
- Dini, 658
- Dirichlet, 1202
 - forme faible, 184
- Doob, 1533
- du rang, 273
- extension d'isométrie, 1098
- extrema
 - lié, 1082
- Fejér, 1203
- fonction implicite dans $\mathbb{R}^n$, 1075
- fonction implicite dans Banach, 1074
- fondamental du calcul intégral, 810
- Fubini
 - dans $\mathbb{R}^n$, 820

- espace mesuré, 816
- version compacte dans $\mathbb{R}^2$, 902
- Fubini-Tonelli, 815
- fuite des compacts, 1290
- Gauss
 - polynômes, 152
- Gauss-Wantzel, 213
- Glivenko-Cantelli, 1479
- Hahn-Banach, 1154
- Hardy-Littlewood, 1052
- Heine, 593
- incidence, 532
- inversion locale, 1070
 - utilisation, 1082, 1091
- isomorphisme
 - premier, 88
 - second, 88
 - troisième, 89
- isomorphisme de Banach, 1123
- Jordan, 1210
- Kronecker, 295
- Lagrange, 96
- Lie-Kolchin, 415
- Lokta-Volterra, 1296
- Markov-Takutani, 1065
- Montel, 1195
- Pappus
 - affine, 535
 - projectif, 536
- Pearson, 1498
- petit de Fermat, 153
- Picard, 1059
- point fixe
 - Brouwer, 1172
- projection
 - cas vectoriel, 1106
 - partie fermée convexe, 1104
- prolongement de Hahn, 452
- prolongement de Riemann, 1182
- Radon-Nikodym, 790
 - complexe, 791
- représentation de Riesz, 1150
- Rolle, 597
- Rothstein-Trager, 889
- Runge, 1174
- Schauder, 1063
- Schur, 776
- spectral, 387
 - autoadjoint, 422
 - matrice symétrique, 384
 - matrices normales, 382
- stabilité de Lyapunov, 1292
- Stone-Weierstrass, 1047, 1049
- Sylvester, 744
- taubérien, 1050
- taubérien faible, 887
- transfert, 1418
- Tykhonov, 256
 - dénombrable, 258
 - fini, 257
- valeurs intermédiaires, 570
- Von Neumann, 1078
- Wedderburn, 185
- Weierstrass, 252
- topologie, 219, 317
 - *-faible, 265, 1239
 - p -adique, 343
 - et semi-normes, 263
 - faible, 309
 - forte, 309
 - induite, 231
 - métrique, 221, 241
 - produit, 220
 - sur $\mathcal{D}(\Omega)$, 1236
 - sur $\mathcal{D}(K)$, 1236
 - sur $C^\infty(\Omega)$, 1236
 - sur dual topologique, 265
 - usuelle sur $\mathbb{R}^n$, 317
- topologique
 - somme directe, 1107
- torsion, 953
 - d'un groupe, 115
- totale, 1110
- trace, 1271
 - dual de $M(n, \mathbb{K})$, 282
 - endomorphisme, 409
 - matrice, 409
 - produit scalaire sur $M(n, \mathbb{R})$, 311
 - unicité pour la propriété de trace, 282
- transcendant, 172
 - par rapport à une extension de corps, 172
- transformée
 - de Cauchy, 1179
 - de Fourier, 1217, 1416
 - continuité, 1218
 - groupe abélien fini, 771
 - Fourier
 - distribution tempérée, 1246
 - Laplace, 1417
- transformation
 - Fourier, 1220
 - gaussienne, 1372
- transient
 - état, 1512
- transition
 - probabilité, 1503

- transitive, 106
- transitoire
 - état, 1512
- transposée, 278
- transvection, 708
- transvection (matrice), 138
- transversale, 105
- tribu, 429
 - borélienne, 431
 - de Baire, 432
 - de Lebesgue, 495
 - engendrée, 430
 - par un événement, 1395
 - par une application, 455
 - par une variable aléatoire, 1395
 - induite, 430
 - produit, 484
- trigonalisation
 - et polynôme caractéristique, 412
 - simultanée, 415
- triplet
 - pythagoricien, 137
- type
 - fini
 - en algèbre, 172
 - espace vectoriel, 270
- unicité
 - des mesures, 441
- unipotent, 125
- unitaire
 - normale principale, 952
- valeur
 - principale (distribution), 1244
 - propre, 375
 - singulière, 392
- valeur absolue
 - p -adique, 343
- valeur propre
 - d'une forme quadratique, 419
- valuation, 142
 - p -adique, 343
- Vandermonde (déterminant), 289
- variété, 1082
- variété
 - orientée, 843
- variable
 - de décision, 1494
- variable aléatoire, 1394
 - absolument continue, 1394
 - Bernoulli
 - marche aléatoire, 1506
 - utilisation, 1461
 - binomiale
 - utilisation, 1536
 - centrée, 1400
 - de Bernoulli
 - utilisation, 1536
 - de Rademacher, 1443
 - intégrable, 1400
 - suite de variables aléatoire de Bernoulli, 1524
- variance, 1401
 - empirique, 1401, 1469
 - empirique corrigée, 1469
 - vecteur gaussien, 1439
- variation des constantes, 1282, 1286
- vecteur
 - cyclique, 368
 - gaussien, 1439
 - propre, 375
 - unitaire normal, 952
 - unitaire tangent, 950
- Vitali (ensemble), 503
- vitesse d'un chemin, 930
- voisinage, 240, 317
- volume
 - d'une région solide, 806
 - région bornée dans $\mathbb{R}^3$, 803
- vraisemblance, 1476
- Wronskien, 1299

Chapitre 17

Espaces de Hilbert

17.1 Espaces de Hilbert

Définition 17.1.

Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet pour la topologie de la norme.

Définition 17.2.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est une espace **préhilbertien**. Si il est complet¹ pour la norme induite par le produit scalaire alors il est de **Hilbert**.

Dans les deux cas nous considérons la topologie métrique dérivant du produit scalaire.

La différence entre un espace de Hilbert et un espace de Banach est que dans le cas d'un espace de Hilbert, nous demandons que la norme dérive d'un produit scalaire.

Dans le cas des espaces de dimension finie, le fait d'être complet est automatique, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 17.3.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{K}$ qui est complet (typiquement $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors E est complet.

Démonstration. Nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans E et si $\{e_\alpha\}$ est une base orthonormée de E nous définissons les coefficients $f_n = \sum_\alpha a_{n\alpha} e_\alpha$. La somme sur α est finie par hypothèse sur la dimension de E .

Nous avons

$$\|f_n - f_m\| = \left\| \sum_\alpha (a_{n\alpha} - a_{m\alpha}) e_\alpha \right\| = \sum_\alpha |a_{n\alpha} - a_{m\alpha}|^2. \quad (17.1)$$

Pour tout ϵ , il existe N tel que si $m, n > N$ alors $|a_{n\alpha} - a_{m\alpha}| < \sqrt{\epsilon}$. Autrement dit, pour chaque α , la suite $(a_{n\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et converge donc dans $\mathbb{K}$. Soit a_α la limite et définissons $f = \sum_\alpha a_\alpha e_\alpha$. Nous avons alors

$$\|f_n - f\| = \left\| \sum_\alpha (a_{n\alpha} - a_\alpha) e_\alpha \right\|, \quad (17.2)$$

dont la limite $n \rightarrow \infty$ est bien zéro. Donc la suite (f_n) converge vers $f \in E$. L'espace E est alors complet. $\square$

Proposition 17.4.

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle. \quad (17.3)$$

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle. \quad (17.4)$$

1. Définition 5.30.

Dans les deux cas nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (17.5)$$

Dans un espace vectoriel de dimension infinie, tous les opérateurs linéaires ne sont pas continus.

Exemple 17.5

Soit un espace vectoriel V engendré par la base $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et l'application linéaire $T: V \rightarrow V$ donnée par

$$Te_k = ke_k. \quad (17.6)$$

Nous allons montrer que l'image inverse de la boule unité ouverte $\mathcal{O}$ n'est pas ouverte. En effet si (ϵ_k) est une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro, les vecteurs

$$a_k = \left(\frac{1}{k} + \epsilon_k \right) e_k \quad (17.7)$$

sont hors de $T^{-1}\mathcal{O}$ parce que

$$Ta_k = (1 + k\epsilon_k)e_k. \quad (17.8)$$

Mais la suite (a_k) converge vers 0 qui fait partie de $T^{-1}\mathcal{O}$. Donc le complémentaire de $T^{-1}\mathcal{O}$ n'est pas fermé, ce qui prouve que $T^{-1}\mathcal{O}$ n'est pas ouvert. $\triangle$

17.2 Théorème de la projection

Théorème 17.6 (Projection sur partie fermée convexe[226, 227]).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $x \in \mathcal{H}$, et C un sous ensemble fermé convexe de $\mathcal{H}$.

(1) Les deux conditions suivantes sur $y \in \mathcal{H}$ sont équivalentes :

(a) $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| \text{ tel que } z \in C\}$,

(b) pour tout $z \in C$, $\operatorname{Re}\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

(2) Il existe un unique $y \in \mathcal{H}$, noté $y = \operatorname{proj}_C(x)$ vérifiant ces conditions.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un élément dans C vérifiant la première condition. Ensuite nous verrons l'équivalence.

Nous nommons d l'infimum en question de la première condition.

Existence Soit (y_n) une suite dans C telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \inf\{\|x - y\| \text{ tel que } z \in C\} = d. \quad (17.9)$$

Nous allons montrer que cette suite peut être choisie de Cauchy. Elle convergera donc dans $\mathcal{H}$ parce que ce dernier est complet. Mais C étant supposé fermé dans $\mathcal{H}$, la limite appartiendra à C . Soient $r, s \in \mathbb{N}$. D'abord nous avons

$$\|y_r - y_s\|^2 = \langle y_r - y_s + x - x, y_r - y_s + x - x \rangle \quad (17.10a)$$

$$= \|y_r - x\|^2 + \|y_s - x\|^2 - 2\langle y_r - x, y_s - x \rangle. \quad (17.10b)$$

Ensuite,

$$4 \left\| \frac{y_r + y_s}{2} - x \right\|^2 = \langle y_r + y_s - 2x, y_r + y_s - 2x \rangle \quad (17.11a)$$

$$= \|y_r - x\|^2 + \|y_s - x\|^2 + 2\langle y_r - x, y_s - x \rangle. \quad (17.11b)$$

Si nous égalisons les valeurs de $2\langle y_r - x, y_s - x \rangle$ nous trouvons

$$\|y_r - y_s\|^2 = -4 \left\| \frac{y_r + y_s}{2} - x \right\|^2 + 2\|y_r - x\|^2 + 2\|y_s - x\|^2. \quad (17.12)$$

La distance infimum étant d , nous pouvons choisir y_n de telle façon à avoir

$$\|y_n - x\| \leq d + \frac{1}{n}. \quad (17.13)$$

D'autre part étant donné que C est convexe, $(y_r + y_s)/2$ est dans C et nous avons

$$\left\| \frac{y_r + y_s}{2} - x \right\| \leq d. \quad (17.14)$$

En mettant ces majorations dans (17.12) nous trouvons

$$\|y_r - y_s\|^2 \leq -4d + 2 \left(d + \frac{1}{r} \right) + 2 \left(d + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}. \quad (17.15)$$

La suite (y_n) est donc de Cauchy et la limite est un élément de C . Prouvons que cet élément y réalise l'infimum. Pour cela nous avons les inégalités

$$d \leq \|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\|. \quad (17.16)$$

En prenant le limite $n \rightarrow \infty$ nous trouvons

$$d \leq \|x - y\| \leq d. \quad (17.17)$$

Unicité Même preuve que pour le théorème en dimension finie 6.235.

(1)a $\Rightarrow$ (1)b Même preuve que pour le théorème en dimension finie 6.235.

(1)b $\Rightarrow$ (1)a Même preuve que pour le théorème en dimension finie 6.235.

□

Proposition 17.7.

Soit C une partie convexe et fermée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors pour tout $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ nous avons

$$\|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|. \quad (17.18)$$

En particulier la projection est une application continue.

Démonstration. Nous posons $y_1 = \text{proj}_C(x_1)$ et $y_2 = \text{proj}_C(x_2)$. Par la partie (1)b du théorème 17.6, nous avons, pour tout $z, z' \in C$ les inégalités

$$\text{Re}\langle x_1 - y_1, z - y_1 \rangle \leq 0 \quad (17.19a)$$

$$\text{Re}\langle x_2 - y_2, z' - y_2 \rangle \leq 0. \quad (17.19b)$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$ et en sommant nous trouvons

$$\text{Re}\langle (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2), y_2 - y_1 \rangle \leq 0. \quad (17.20)$$

Nous pouvons maintenant calculer

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \text{Re} \|y_1 - y_2\|^2 \\ &= \text{Re}\langle y_1 - y_2, (y_1 - x_1) + x_1 - x_2 + (x_2 - y_2) \rangle \\ &= \text{Re}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle + \text{Re}\langle y_2 - y_1, (x_1 - y_1) + (y_2 - x_2) \rangle \\ &\leq \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \\ &\leq \|\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle\| \\ &= \leq \|y_1 - y_2\| \|x_1 - x_2\|. \end{aligned} \quad (17.21)$$

En simplifiant par $\|y_1 - y_2\|^2$ nous trouvons le résultat

$$\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|. \quad (17.22)$$

□

2. Si c'est nul, alors la preuve est évidente.

Théorème 17.8 (Projection orthogonale).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et K , un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$ et $x \in \mathcal{H}$. L'élément $\text{proj}_K(x)$ est l'unique élément de K tel que

$$x - y \in K^\perp. \quad (17.23)$$

De plus l'application $x \mapsto \text{proj}_K(x)$ est linéaire, continue et de norme 1.

L'élément y ainsi défini est la **projection orthogonale** de x sur K et sera noté $\text{proj}_K(f)$.

Démonstration. La continuité de la projection est donné par la proposition 17.7.

Soit z un élément de K tel que $\langle z - x, a \rangle = 0$ pour tout $a \in K$. Nous avons

$$\|x - a\|^2 = \|z - x\|^2 + \|a - z\|^2 + 2 \underbrace{\langle z - x, a - z \rangle}_{=0} \quad (17.24a)$$

$$\geq \|z - x\|^2. \quad (17.24b)$$

Le produit scalaire est nul parce que $a - z \in K$. La distance $\|z - x\|$ est donc bien la plus petite distance entre x et les éléments de K .

Dans l'autre sens, nous supposons que $y \in K$ minimise la distance à x dans K . Par hypothèse pour tout a et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la différence

$$\|(y + \lambda a) - x\|^2 - \|y - x\|^2 \quad (17.25)$$

est positive. En développant les produits scalaires nous trouvons la conditions suivante

$$\lambda^2 \|a\|^2 + 2\lambda \langle a, y - x \rangle \geq 0 \quad (17.26)$$

qui doit être vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En tant que polynôme du second degré en λ , cela n'aura pas deux racines réelles distinctes uniquement si $\langle a, y - x \rangle = 0$.

Nous montrons maintenant la linéarité de la projection orthogonale. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$. L'élément $y = \text{proj}_K x_1 + \text{proj}_K x_2$ satisfait à la condition d'orthogonalité : pour tout $z \in K$,

$$\langle x_1 + x_2 - \text{proj}_K x_1 - \text{proj}_K x_2, z \rangle = \langle x_1 - \text{proj}_K x_1, z \rangle + \langle x_2 - \text{proj}_K x_2, z \rangle = 0. \quad (17.27)$$

Étant donné que K est un sous-espace vectoriel, la condition de minimalité est automatiquement vérifiée (seconde partie du théorème 17.6).

En ce qui concerne la norme opérateur de proj_K , la décomposition de $x \in \mathcal{H}$ en composantes dans K et $K^\perp$ est

$$x = \text{proj}_K x + (x - \text{proj}_K x). \quad (17.28)$$

Étant deux parties orthogonales nous avons

$$\|\text{proj}_K x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - \text{proj}_K x\|^2. \quad (17.29)$$

En prenant $\|x\| = 1$ nous trouvons $\|\text{proj}_K x\|^2 \leq 1$ et par conséquent $\|\text{proj}_K\| \leq 1$. Mais d'autre part en prenant $x \in K$ nous avons automatiquement $\|\text{proj}_K\| \geq 1$. $\square$

Proposition 17.9.

Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ et K l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}$ -mesurables dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est positive, alors $\text{proj}_K f$ est positive (presque partout).

Démonstration. L'ensemble $A = \{\text{proj}_K f < 0\}$ est dans $\mathcal{F}$. En effet

$$A = (\text{proj}_K f)^{-1}]-\infty, 0[\quad (17.30)$$

alors que, par construction, $\text{proj}_K f$ est $\mathcal{F}$ -mesurable. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est alors $\mathcal{F}$ -mesurable (c'est à dire $\mathbb{1}_A \in K$) et nous avons

$$0 \leq \int_\Omega f \mathbb{1}_A = \int_\Omega \text{proj}_K f \mathbb{1}_A \leq 0. \quad (17.31)$$

Étant donné que nous avons supposé $f \geq 0$ nous avons alors $\mu(A) = 0$. D'où le fait que $\text{proj}_K f$ est presque partout positive. $\square$

17.3 Systèmes orthogonaux et bases

Dans cette partie nous noterons $\mathbb{K}$ le corps de base de l'espace $\mathcal{H}$. Seuls deux cas sont envisagés : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour chaque $x \in \mathcal{H}$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi_x: \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{K} \\ y &\mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned} \quad (17.32)$$

Lemme 17.10.

L'application $\Phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{K})$ donnée par $y \mapsto \Phi_y$ est une isométrie : nous avons $\|\Phi_y\| = \|y\|$. De plus pour chaque y , l'application Φ_y est continue.

Démonstration. En utilisant la définition de la norme opérateur et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\Phi_y\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Phi_y(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, y \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \|y\| = \|y\|. \quad (17.33)$$

Par conséquent $\|\Phi_y\| \leq \|y\|$. Mais d'autre part le fait que $\Phi_y(y) = \|y\|^2$ montre que $\|\Phi_y\| \geq \|y\|$.

En ce qui concerne la continuité de Φ_y , elle est garantie par le fait que c'est une application linéaire bornée via la proposition 6.217. $\square$

17.3.1 Orthogonalité

Si A est une partie de $\mathcal{H}$ alors nous notons

$$A^\perp = \{y \in \mathcal{H} \text{ tel que } y \perp x \forall x \in A\}. \quad (17.34)$$

cet ensemble est l'**orthogonal** de A .

Proposition 17.11.

Si $\mathcal{H}$ est un préhilbert et si $A \subset \mathcal{H}$, alors l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$.

Démonstration. Par définition l'application Φ_x est continue pour chaque $x \in \mathcal{H}$ et par conséquent l'ensemble $\ker \Phi_x = \Phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé. L'ensemble

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker \Phi_x \quad (17.35)$$

est donc fermé. $\square$

Proposition 17.12 (wikipédia).

Soit V un espace vectoriel normé et une décomposition en somme directe $V = F \oplus G$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) L'isomorphisme naturel $F \times G \rightarrow V$ est un homéomorphisme.
- (2) F et G sont fermés et la restriction à G de la projection $V \rightarrow V/F$ est un homéomorphisme.
- (3) F et G sont fermés et la projection de E sur F est continue.

Lorsqu'une décomposition en somme directe vérifie la proposition 17.12, nous disons que la décomposition est **topologique**.

Théorème 17.13.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Alors

- (1) Nous avons la décomposition

$$\mathcal{H} = F \oplus F^\perp. \quad (17.36)$$

- (2) La projection sur F par rapport à la somme directe (17.36) est la projection proj_F du théorème de projection.

(3) La décomposition (17.36) est topologique.

Proposition 17.14.

Si F est un sous-espace de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ alors on a $F^{\perp\perp} = \bar{F}$.

Démonstration. Nous savons par la proposition 17.11 que $F^{\perp}$ est fermé, par conséquent le théorème 17.13 donne la somme directe

$$\mathcal{H} = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp}. \quad (17.37)$$

Mais $\bar{F}$ étant également fermé nous avons la somme directe

$$\mathcal{H} = \bar{F} \oplus (\bar{F})^{\perp}. \quad (17.38)$$

Montrons que $(\bar{F})^{\perp} = F^{\perp}$. En effet si $x \in F^{\perp}$ et si $y \in \bar{F}$, alors il existe une suite y_n dans F qui converge vers y . Pour chaque n nous avons $\langle x, y_n \rangle = 0$ et donc $\langle x, y \rangle = 0$ par continuité du produit scalaire.

Nous avons donc

$$\mathcal{H} = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp} = \bar{F} \oplus F^{\perp}. \quad (17.39)$$

Mais $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$ (prendre une suite). Les espaces $\bar{F}$ et $F^{\perp\perp}$ étant tous deux des supplémentaires de $F^{\perp}$, nous déduisons qu'ils doivent être égaux. $\square$

Proposition 17.15.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. Alors F est dense si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. Nous savons que

$$\mathcal{H} = F^{\perp} \oplus \bar{F}. \quad (17.40)$$

Donc nous avons $H = \bar{F}$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Pour vérifier si un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense, il suffit donc de montrer que son orthogonal est réduit à zéro.

Lemme 17.16 (Théorème fondamental d'approximation [124]).

Soit Ω un espace mesurable et $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ une application mesurable. Alors il existe une suite croissante d'applications étagées $\varphi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ dont la limite est f .

De plus si f est bornée, la convergence est uniforme.

Théorème 17.17 ([228]).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'espace $C_c(I)$ des fonctions continues à support compact sur I est dense dans $L^2(I)$.

Ce théorème sera généralisé à tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$ par le théorème 18.40. Cependant L^p n'étant pas un Hilbert, il faudra travailler sans produit scalaire.

Démonstration. Soit $g \in L^2(I)$ une fonction telle que $g \perp f$ pour toute fonction $f \in C_c(I)$. Nous avons donc

$$\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} = 0. \quad (17.41)$$

En passant éventuellement aux composantes réelles et imaginaires nous pouvons supposer que les fonctions sont toutes réelles. Nous décomposons g en parties positives et négatives : $g = g^+ - g^-$. Notre but est de montrer que $g^+ = g^-$, c'est à dire que g est nulle. La proposition 17.15 conclura que $C_c(I)$ est dense dans $L^2(I)$.

Soit un intervalle $[a, b] \subset I$ et une suite croissante de fonctions $f_n \in C_c(I)$ convergent vers $\mathbb{1}_{[a, b]}$. Par hypothèse pour chaque n nous avons

$$\int_I f_n g^+ = \int_I f_n g^-. \quad (17.42)$$

La suite étant croissante, le théorème de la convergence monotone (théorème 7.129) s'applique et nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n g^+ = \int_a^b g^+, \quad (17.43)$$

de telle sorte que nous ayons, pour tout intervalle $[a, b] \subset I$ l'égalité

$$\int_a^b g^+ = \int_a^b g^-. \quad (17.44)$$

De plus ces intégrales sont finies parce que

$$\int_a^b g^+ \leq \int_a^b |g| = \int_I |g| \mathbb{1}_{[a,b]} = \langle |g|, \mathbb{1}_{[a,b]} \rangle \leq \|g\|_{L^2} \sqrt{b-a} < \infty \quad (17.45)$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit maintenant un ensemble mesurable $A \subset I$. La fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ est mesurable et il existe une suite croissante de fonctions étagées (φ_n) convergente vers a par le lemme 17.16. À multiples près, les fonctions φ_n sont des sommes de fonctions caractéristiques du type $\mathbb{1}_{[a,b]}$, par conséquent, en vertu de (17.44) nous avons

$$\int_I \varphi_n g^+ = \int_I \varphi_n g^-. \quad (17.46)$$

Une fois de plus nous pouvons utiliser le théorème de la convergence monotone et obtenir

$$\int_A g^+ = \int_A g^- \quad (17.47)$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset I$. Si nous notons dx la mesure de Lebesgue, les mesures $g^+ dx$ et $g^- dx$ sont par conséquent égales et dominées par dx . Par le corollaire 13.5 du théorème de Radon Nikodym, les fonctions g^+ et g^- sont égales. $\square$

17.3.2 Dual

Définition 17.18.

Le **dual** de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est l'ensemble

$$\mathcal{H}' = \{f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K} \text{ linéaire et continue}\}. \quad (17.48)$$

Notons que dans le contexte des espaces de Hilbert nous demandons la continuité des éléments du dual parce qu'elle n'est pas automatique par la linéarité dans les cas de dimension infinie. En principe nous devrions préciser dual *topologique*, mais nous ne le ferons pas systématiquement lorsque le contexte parle clairement de topologie (ce qui est le cas lorsqu'on parle d'espaces de Hilbert). De temps en temps le dual *algébrique* d'un espace est noté E^* ; dans ce cas la continuité n'est pas demandée.

Théorème 17.19 (Théorème de représentation de Riesz).

L'application

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}' \\ y &\mapsto \Phi_y \end{aligned} \quad (17.49)$$

est une bijection isométrique.

Démonstration. Nous savons du lemme 17.10 que Φ est une isométrie. Nous devons seulement montrer que Φ est surjective. Soit $f \in \mathcal{H}'$. Par continuité nous savons que $F = \ker(f)$ est fermé, donc

$$\mathcal{H} = \ker(f) \oplus (\ker f)^\perp \quad (17.50)$$

par le théorème 17.13. Nous considérons une base de H adaptée à cette décomposition, c'est à dire

- $(u_s)_{s \in S}$ une base de $\ker f$,
- $(v_t)_{t \in T}$ une base de $(\ker f)^\perp$.

Il se fait que T se réduit à un seul élément parce que si $v \in (\ker f)^\perp$, alors $f(v) \neq 0$, et par conséquent $\{f(v)\}$ est déjà une base de $\text{Image } f = \mathbb{K}$. Le théorème du rang (théorème 6.13) assure alors que

$$\{v\} \cup \{u_s\}_{s \in S} \quad (17.51)$$

est une base de $\mathcal{H}$ avec $v \in (\ker f)^\perp$ et $u_s \in \ker f$. Nous choisissons v pour avoir $\|v\| = 1$.

Nous pouvons maintenant prouver l'existence de y tel que $f_y = f$. En effet si nous posons $y = \overline{f(v)}v$ nous avons $f_y = f$, en effet

$$f_y(v) = \langle v, y \rangle = f(v) \langle v, v \rangle = f(v) \quad (17.52a)$$

$$f_y(u_s) = \langle u_s, y \rangle = 0. \quad (17.52b)$$

Par conséquent f_y et f coïncident sur une base de $\mathcal{H}$.

En ce qui concerne l'unicité, d'abord si $f_y = f$ alors nous devons avoir $y \in (\ker f)^\perp$ et par conséquent $y = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons alors

$$f_y(v) = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda}. \quad (17.53)$$

Pour que cela soit égal à $f(v)$, nous fixons $\lambda = \overline{f(v)}$.

□

Notons que nous avons réellement utilisé le théorème du rang pour l'unicité. Si nous ne demandions pas l'unicité, alors nous n'avions pas besoin du fait que $\dim(\ker f)^\perp = 1$, et nous aurons donc pu parler de formes plus générales à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

17.3.3 Séparabilité

Définition 17.20.

Un espace topologique est **séparable** si il possède une partie dénombrable dense.

Définition 17.21.

Si E est un espace vectoriel normé nous disons que Δ est une partie **totale**[229] de E si $\text{Span } \Delta$ est dense dans E . Attention : ici $\text{Span } \Delta$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de Δ .

Proposition 17.22.

Un espace vectoriel normé est séparable si et seulement si il possède une partie totale dénombrable.

Démonstration. Si Δ est une partie dénombrable de E , alors le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\text{Span}_{\mathbb{Q}} \Delta$ est dénombrable, et sa fermeture est la même que celle de $\text{Span}_{\mathbb{K}} \Delta$. □

Définition 17.23.

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ indicée par un ensemble quelconque I est un **système orthonormé** si

- (1) $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$,
- (2) $u_i \perp u_j$ pour tout $i \neq j$.

Notons que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthonormé dénombrable alors en utilisant les formules de la proposition 17.4, nous avons

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2. \quad (17.54)$$

Exemple 17.24

Dans l'ensemble $L^2(a, b)$ avec $b - a = L$ l'ensemble des fonctions

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp\left(\frac{2\pi}{L} int\right) \quad (17.55)$$

avec $n \in \mathbb{Z}$ forme un système orthonormé. En effet

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \exp\left(\frac{2\pi}{L} int\right) \exp\left(-\frac{2\pi}{L} int\right) dt = 1 \quad (17.56)$$

et

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{\frac{2\pi}{L}(n-m)t} dt = 0. \quad (17.57)$$

Dans cette intégrale nous utilisons le fait que $b = a + (b-a)$ pour simplifier les expressions en cours de calcul.

La famille (17.55) est le **système trigonométrique** de $L^2(a, b)$. On en parle aussi dans [212]. $\triangle$

Proposition 17.25.

Un système orthonormé est libre.

Démonstration. Soit $(u_i)_{i \in I}$ un système orthonormé de $\mathcal{H}$ et une combinaison linéaire *finie* nulle :

$$\sum_{k=1}^n a_k u_k = 0. \quad (17.58)$$

Nous développons la somme en utilisant les formules de la proposition 17.4 :

$$0 = \left\| \sum_k a_k u_k \right\|^2 = \sum_k |a_k|^2 \|u_k\|^2 + 2 \sum_{k < l} \langle a_k u_k, a_l u_l \rangle. \quad (17.59)$$

Le système étant orthonormé, les choses se simplifient en

$$\sum_k |a_k|^2 = 0, \quad (17.60)$$

ce qui signifie que $a_k = 0$ pour tout k . $\square$

Avant de continuer nous devons définir comment nous calculons des sommes sur des ensembles quelconques. Si I est un ensemble et si pour chaque $i \in I$ nous avons un nombre réel positif a_i , alors nous définissons

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} a_j. \quad (17.61)$$

Proposition 17.26 (Inégalités de Bessel).

Soit $\mathcal{H}$ un préhilbert. Si $(u_i)_{i \in I}$ est un système orthonormé et si $x \in \mathcal{H}$, alors

$$\sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (17.62)$$

Démonstration. Les éléments de la somme étant des réels positifs, la notion de somme à utiliser est celle de la définition 6.185.

Posons $c_i(x) = \langle x, u_i \rangle$. Pour toute partie finie $J \subset I$ nous avons

$$0 \leq \left\| x - \sum_{j \in J} c_j(x) u_j \right\|^2 = \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_j \langle x, c_j(x) u_j \rangle + \sum_j |c_j(x)|^2. \quad (17.63)$$

Mais en tenant compte du fait que

$$\langle x, c_j(x)u_j \rangle = \overline{c_j(x)} \langle x, u_j \rangle = |c_j(x)|^2, \quad (17.64)$$

nous restons avec

$$\|x - \sum_{j \in J} c_j(x)u_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |c_j(x)|^2. \quad (17.65)$$

Finalement,

$$\sum_{j \in J} |c_j(x)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (17.66)$$

Ayant cette inégalité pour toute partie finie de I , nous l'avons encore pour le supremum. $\square$

Remarque 17.27.

À mon avis il doit exister un théorème de complétion de base hilbertienne disant que si on a une famille orthonormée, alors elle se prolonge en base. Utilisant cela, nous trouvons une nouvelle démonstration de la proposition 17.26 en disant que la somme sur la «partie de base» est plus petite que la somme sur la «base complète».

Dans la suite les systèmes orthonormés dénombrables vont jouer un rôle important. Nous allons conventionnellement les indiquer par $\mathbb{N}$.

Proposition 17.28.

Soit $\mathcal{H}$ un préhilbert et un système orthonormé dénombrable $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, \quad (17.67)$$

alors $\xi_n = \langle x, u_n \rangle$.

Démonstration. Nous appliquons Φ_{u_k} à l'équation (17.67). Étant donné que le produit scalaire est continu, nous pouvons permuter avec la somme infinie et obtenir

$$\langle x, u_k \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, u_k \rangle \xi_n = \xi_k. \quad (17.68)$$

$\square$

La proposition suivante explique que la notion de projection est compatible avec la décomposition d'un vecteur dans un système orthonormé.

Proposition 17.29.

Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ un système orthonormé d'un préhilbert $\mathcal{H}$. Soient

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k \quad (17.69)$$

et

$$F = \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}. \quad (17.70)$$

Alors

$$\text{proj}_F(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k u_k. \quad (17.71)$$

Démonstration. Nous allons dans un premier temps montrer que

$$y = x - \sum_{k=1}^n \xi_k u_k \quad (17.72)$$

est dans $F^\perp$. Pour cela nous calculons

$$\langle x - \sum_{k=1}^n \xi_k u_k, u_j \rangle = \langle \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k u_k, u_j \rangle = 0 \quad (17.73)$$

où nous avons utilisé la continuité du produit scalaire pour permuter la somme (infinie) et le produit. Étant donné que $y \in F^\perp$ nous avons $\text{proj}_F y = 0$ par le point (2) du théorème 17.13.

D'autre part $\text{proj}_F y$ peut être calculé selon

$$\text{proj}_F y = \text{proj}_F x - \sum_{k=1}^n \xi_k \text{proj}_F u_k \quad (17.74)$$

tandis que $\text{proj}_F u_k = u_k$ lorsque $1 \leq k \leq n$. Par conséquent l'annulation de $\text{proj}_F y$ donne

$$\text{proj}_F x = \sum_{k=1}^n \xi_k u_k, \quad (17.75)$$

donc le résultat. $\square$

Théorème 17.30 (Meilleur approximation).

Soit $\{u_i\}_{i \in I}$ une famille orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour tout J fini dans I et pour toute famille de nombres complexes $(a_j)_{j \in J}$ nous avons

$$\left\| \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x \right\| \leq \left\| \sum_{j \in J} a_j u_j - x \right\|. \quad (17.76)$$

Ce théorème exprime le fait que les nombres $\langle x, u_i \rangle$ sont les meilleurs coefficients à mettre devant les u_i pour approximer x .

Corollaire 17.31.

Soit $\{u_i\}_{i \in I}$ une famille orthonormée de $\mathcal{H}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour toutes parties finies J, K de I avec $J \subset K$ nous avons

$$\left\| \sum_{j \in K} \langle x, u_j \rangle u_j - x \right\| \leq \left\| \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x \right\|. \quad (17.77)$$

Ce corollaire exprime le fait que plus on prend de termes de la forme $\langle x, u_i \rangle u_i$, mieux c'est.

Proposition 17.32.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et (u_n) un système orthonormé dans $\mathcal{H}$. Si $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans ℓ^2 alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n \quad (17.78)$$

converge dans $\mathcal{H}$.

Autrement dit l'application

$$\begin{aligned} S: \mathcal{H} &\rightarrow \ell^2 \\ x &\mapsto (\langle x, u_n \rangle)_{n \geq 1} \end{aligned} \quad (17.79)$$

est surjective.

Démonstration. Nous allons montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$ est de Cauchy, c'est à dire que la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \right\| = 0 \quad (17.80)$$

est uniforme en p . Cela est un corollaire de la formule (17.54) parce que

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p} |\xi_k|^2. \quad (17.81)$$

Mais si (ξ_n) est dans ℓ^2 , pour tout ϵ , il existe N tel que si $n > N$ alors le membre de droite est inférieur à ϵ indépendamment de p . $\square$

17.3.4 Bases d'espaces de Hilbert

Définition 17.33.

Une **base orthonormée** est une famille dénombrable orthonormée et totale.

Notons que cela n'est pas la même notion de base qu'en algèbre. En effet pour avoir une base algébrique d'un espace vectoriel, nous demandons que les éléments soient des combinaisons linéaires *finies* des éléments de la base, tandis qu'ici en demandant que la partie soit totale nous demandons simplement que les combinaisons linéaires finies soient denses.

Nous allons voir qu'un espace de Hilbert est généré par les sommes *infinies* de vecteurs d'une base orthonormée avec des coefficients qui forment une suite dans ℓ^2 .

Étant donné une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, nous notons

$$c_k(x) = \langle x, u_k \rangle. \quad (17.82)$$

Dans le théorème suivant (et d'ailleurs partout), les sommes sur I sont prises au sens de la définition 6.186.

Théorème 17.34 (Décomposition dans une base orthogonale).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable $\{u_i\}_{i \in I}$ une base orthonormée (I est un ensemble dénombrable quelconque).

(1) Pour tout $x \in \mathcal{H}$ nous avons

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i \quad (17.83)$$

où la somme est prise au sens de la définition 6.186. En particulier, la somme converge de façon commutative.

(2) Si $\{e_i\}_{i \in I}$ est une famille orthonormée qui satisfait la décomposition (17.83) pour tout $x \in \mathcal{H}$ alors $\{e_i\}$ est une base hilbertienne.

(3) Nous avons l'identité de **Plancherel**

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2. \quad (17.84)$$

Le point (5) nous indiquera que cette égalité est en fait suffisante pour dire que nous avons une base.

(4) Nous avons l'identité de **Parseval**

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle}. \quad (17.85)$$

(5) Si $\{e_i\}$ est une famille de vecteurs unitaires vérifiant l'identité de Plancherel, alors c'est une base hilbertienne.

(6) Si $\{u_i\}_{i \in I}$ est une base hilbertienne, la suite $n \mapsto |\langle x, e_n \rangle|$ appartient à $\ell^2(I)$.

Démonstration. (1) Étant donné que le système $\{u_i\}_{i \in I}$ est total, nous pouvons considérer une suite de combinaisons linéaires finies des u_i qui converge vers x . Nous écrivons

$$x_n = \sum_{j \in J_n} a_{n,j} u_j \quad (17.86)$$

et $x_n \rightarrow x$ dans $\mathcal{H}$. Les ensembles J_n sont des sous-ensembles finis de I . Nous pouvons les choisir de telle sorte que $J_n \subset J_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$. Ce choix correspond à éventuellement prendre $a_{n,j} = 0$ pour toutes les valeurs de j «en trop».

Soit $\epsilon > 0$ et N tel que $\|x_n - x\| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Nous allons montrer que pour tout J fini tel que $J_N \subset J$ nous avons $\|\sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x\| < \epsilon$. Étant donné que

$$\sum_{j \in J_N} \langle x, u_j \rangle u_j = \sum_{j \in J} a_j u_j \quad (17.87)$$

avec

$$a_j = \begin{cases} \langle x, u_j \rangle & \text{si } j \in J_N \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (17.88)$$

le théorème de meilleure approximation 17.30 nous enseigne que

$$\left\| \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x \right\| \leq \left\| \sum_{j \in J_N} \langle x, u_j \rangle u_j - x \right\| < \epsilon \quad (17.89)$$

par conséquent la somme $\sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i$ converge vers x au sens général, et en particulier commutativement.

Les sommes étant commutatives (en particulier $x = \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i$), et les bases hilbertiennes étant dénombrables, nous ne perdons aucune généralité en ne considérant que des bases indexées par $\mathbb{N}$.

- (2) Nous devons montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires finies est dense dans $\mathcal{H}$. Par hypothèse, pour tout ϵ , il existe un ensemble fini J tel que

$$\left\| \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j - x \right\| < \epsilon. \quad (17.90)$$

Cela prouve la densité dont nous avons besoin.

- (3) La norme étant une fonction continue, elle commute avec les sommes infinies, de telle sorte que l'égalité de Plancherel donne

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i \right\|^2. \quad (17.91)$$

Le système des u_i étant orthonormé,

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{i \in I} \langle x, u_i \rangle u_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2. \quad (17.92)$$

- (4) Au tour de Parseval. Nous commençons par prouver que la somme du membre de droite converge. En utilisant l'inégalité $|zz'| \leq |z|^2 + |z'|^2$ (valable pour $z, z' \in \mathbb{C}$) et Plancherel, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle}| &\leq \sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2 + |\langle y, u_i \rangle|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned} \quad (17.93)$$

Nous en déduisons que la famille $\langle x, u_i \rangle \overline{\langle y, u_i \rangle}$ est (commutativement) sommable en utilisant la proposition 6.193. Par ailleurs nous savons que

$$x = \sum_{i \in I} c_i(x) u_i \quad (17.94a)$$

$$y = \sum_{i \in I} c_i(y) u_i, \quad (17.94b)$$

et le produit scalaire étant une forme bilinéaire continue,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \langle c_i(x) u_i, \overline{c_j(y) u_j} \rangle \quad (17.95a)$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} c_i(x) \overline{c_j(y)} \delta_{ij} \quad (17.95b)$$

$$= \sum_{i \in I} c_i(x) \overline{c_i(y)}. \quad (17.95c)$$

(5) Nous utilisons l'égalité de Plancherel avec $x = u_j$:

$$\|u_j\|^2 = \|u_j\|^2 + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} |\langle u_j, u_i \rangle|^2. \quad (17.96)$$

Par conséquent $\langle u_j, u_i \rangle = 0$ dès que $i \neq j$. Cela prouve que le système $\{u_i\}_{i \in I}$ est orthonormé. Nous devons encore prouver que le système est total. Pour cela nous repartons de l'équation (17.65) que nous avons déduites dans la démonstration de l'inégalité de Bessel :

$$\|x - \sum_{j \in J} c_j(x) u_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |c_j(x)|^2. \quad (17.97)$$

Par hypothèse le membre de droite peut être rendu aussi petit que l'on veut en prenant J grand (mais fini) dans I . Le membre de gauche indique alors que le système $\{u_i\}_{i \in I}$ est total.

(6) L'identité de Plancherel signifie entre autres que si $x \in \mathcal{H}$ alors $\sum_{i \in I} |\langle x, u_i \rangle|^2$ converge. Du coup la suite $(\langle x, u_i \rangle)_{i \in I}$ est dans $\ell^2(I)$. □

Remarque 17.35.

Nous avons décidé d'indexer les bases hilbertiennes par $\mathbb{N}$; cela est légitime parce que les sommes sont commutatives. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'en pratique l'ensemble naturel avec lequel on indexe une base est parfois $\mathbb{Z}$. Un tel cas est donné par la base trigonométrique de L^2 . Indexer cette dernière par $\mathbb{N}$ plutôt que par $\mathbb{Z}$ serait une contorsion inutile.

Remarque 17.36.

L'égalité de Parseval est la raison pour laquelle les physiciens écrivent souvent

$$\text{Id} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n\rangle\langle u_n| \quad (17.98)$$

dans les livres de mécanique quantique par exemple. Dans [230], nous lisons même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq |q\rangle\langle q| = \hat{I}. \quad (17.99)$$

Notons que ces personnes travaillent avec un espace de Hilbert dont la base n'est pas dénombrable. Pour dire que la physique, ça n'utilise pas des mathématiques pour rire !

Remarque 17.37.

Par définition une base orthonormée est donc une partie dénombrable dont l'espace vectoriel engendré est dense. Un espace de Hilbert possédant une base orthonormée est donc séparable. C'est ce fait qui nous pousse à ne considérer que des espaces de Hilbert séparables ; nous n'allons donc pas étudier ce qu'il se passerait par exemple en considérant l'espace vectoriel librement engendré par les éléments de $\mathbb{R}$.

Exemple 17.38

L'identité de Parseval (17.85), dans le cas de l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π signifie qu'en posant

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} ds, \quad (17.100)$$

nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2. \quad (17.101)$$

△

Corollaire 17.39.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et (u_n) une base orthonormée. L'application

$$\begin{aligned} S: \mathcal{H} &\rightarrow \ell^2 \\ x &\mapsto (\langle x, u_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned} \quad (17.102)$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

De plus l'isomorphisme réciproque est

$$\begin{aligned} S^{-1}: \ell^2 &\rightarrow \mathcal{H} \\ (\xi_n) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n. \end{aligned} \quad (17.103)$$

Démonstration. Nous devons prouver que l'application est bijective et qu'elle vérifie

$$S(x) \cdot S(y) = \langle x, y \rangle \quad (17.104)$$

où le point dénote le produit dans ℓ^2 .

Pour la surjectivité, si $(\xi_n) \in \ell^2$ alors nous savons que la somme $\sum_n \xi_n u_n$ converge par la proposition 17.32 et par conséquent (ξ_n) est l'image par S de ce vecteur de $\mathcal{H}$.

Pour l'injectivité, si $S(x) = S(y)$ alors

$$x = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n = \sum_n \langle y, u_n \rangle u_n = y \quad (17.105)$$

en utilisant la décomposition (17.83).

Le fait que S soit une isométrie est contenu dans Parseval. $\square$

Proposition 17.40.

Tout espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées.

Démonstration. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partie totale et séparable. Quitte à supprimer les v_i qui sont combinaisons linéaires des précédents, nous pouvons supposer que cette partie est libre. Nous considérons l'espace vectoriel

$$F_n = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}. \quad (17.106)$$

Sur F_n nous pouvons appliquer un procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée $\{u_1, \dots, u_n\}$ de F_n au sens usuel. En considérant F_{n+1} et en recommençant, les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ ne changent pas, mais nous obtenons un vecteur u_{n+1} .

Nous construisons ainsi une suite (u_n) qui est alors orthonormée au sens des espaces de Hilbert. Nous devons encore prouver qu'il s'agit d'un ensemble total. Cela est simplement dû au fait que tout élément de $\text{Span}\{v_n\}$ est contenu dans $\text{Span}\{u_n\}$ parce que Span ne considère que des combinaisons linéaires finies. $\square$

17.3.5 Digression sur les normes opérateurs

Le théorème 17.34 nous indique que si $\{u_i\}_{i \in I}$ est une base hilbertienne, alors pour tout $x \in \mathcal{H}$ nous avons

$$\text{proj}_{u_i}(x) = \langle x, u_i \rangle u_i, \quad (17.107)$$

et donc

$$\sum_{i \in I} \text{proj}_{u_i} x = x. \quad (17.108)$$

Nous ne pouvons cependant pas conclure que

$$\sum_{i \in I} \text{proj}_{u_i} = \text{Id} \quad (17.109)$$

au sens de la norme opérateur de la section 6.9. En effet en prenant $I = \mathbb{N}$, l'égalité (17.109) demanderait d'avoir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^N \text{proj}_{u_i} - \text{Id} \right\|_{\infty} = 0, \quad (17.110)$$

or pour tout N , le vecteur u_{N+1} réalise

$$\sum_{i=1}^N \text{proj}_{u_i}(u_{N+1}) - u_{N+1} = -u_{N+1}. \quad (17.111)$$

Par conséquent pour tout N nous avons

$$\sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^N \text{proj}_{u_i} x - x \right\| \geq 1. \quad (17.112)$$

Nous ne pouvons donc pas dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{proj}_{u_i} = \text{Id} \quad (17.113)$$

au sens de la norme opérateur (6.253).

Nous avons cependant la convergence au sens faible.

Proposition 17.41.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Au sens de la topologie faible sur l'espace des opérateurs nous avons

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{proj}_{u_i} = \text{Id}. \quad (17.114)$$

Démonstration. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{H}$, en vertu de la décomposition (17.83) nous avons

$$\sum_{i=1}^N \text{proj}_{u_i}(x) - x = \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle x, u_i \rangle u_i. \quad (17.115)$$

Par l'orthonormalité de la base nous avons

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \|\langle x, u_i \rangle u_i\| = \sum_{i=N+1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|, \quad (17.116)$$

dont la limite $N \rightarrow \infty$ est zéro étant donné que la suite $i \mapsto |\langle x, u_i \rangle|$ est dans $\ell^2(\mathbb{R})$ par le théorème 17.34. $\square$

17.3.6 Applications linéaires et continuité

Nous avons déjà vu dans l'exemple 6.215 que la fonction

$$\begin{aligned} f: H &\rightarrow H \\ e_k &\mapsto k e_k \end{aligned} \quad (17.117)$$

n'était pas continue en zéro alors qu'elle est linéaire. Nous allons maintenant voir qu'elle est un contre-exemple à la proposition 11.157. Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \frac{d}{dt} \left[f(x + t e_j) \right]_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\sum_k k(x_k + t \delta_{jk}) e_k \right]_{t=0} = j e_j. \quad (17.118)$$

où nous avons permuté la somme et la dérivée en considérant la suite de fonctions $f_k(t) = k(x_k + t u_k) e_k$. Donc $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x)$ existe et est continue sur un voisinage de $x = 0$ (c'est même constant). Nous savons pourtant que la fonction f n'est pas différentiable en zéro parce que non continue.

L'endroit qui coince dans la preuve de la proposition 11.157 est l'introduction des «contres-termes» dans l'équation (11.358). En effet les contre-termes à ajouter seraient

$$l(x) = \frac{d}{dt} \left[f(a + s(x - a)) \right]_{t=0} \quad (17.119)$$

qui ici serait

$$l\left(\sum_k x_k e_k\right) = \frac{d}{dt} \left[f\left(s \sum_k x_k e_k\right) \right]_{t=0} = \sum_k x_k e_k, \quad (17.120)$$

dont la convergence est plus que douteuse.

Notons que les dérivées directionnelles n'existent pas toutes, loin s'en faut : si $u \in H$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \frac{d}{dt} \left[f(x + tu) \right]_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\sum_k k(x_k + tu_k) e_k \right]_{t=0} = \sum_k k u_k e_k \quad (17.121)$$

La convergence de la dernière somme n'est pas garantie pour tout u .

17.4 Théorème de Kochen-Specker

Le théorème suivant est central en mécanique quantique. La démonstration provient de [231] et de Wikipédia. Nous allons démontrer complètement le théorème seulement pour les espaces de Hilbert de dimension plus grande ou égale à 4.

Théorème 17.42 (Kochen-Specker[231]).

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension plus grande ou égale à 3. Une fonction v sur l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{H}$ ne peut pas satisfaire aux conditions suivantes :

- (1) Si A et B sont compatibles, alors $v(A + B) = v(A) + v(B)$,
- (2) Si A et B sont compatibles, alors $v(AB) = v(A)v(B)$.

Ici nous disons que deux opérateurs sont **compatibles** lorsqu'ils possèdent une base hilbertienne commune de vecteurs propres.

Démonstration. Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Nous notons proj_i l'opérateur de projection sur l'espace (fermé) engendré par u_i . Ce sont des opérateurs compatibles deux à deux parce que la base $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base commune de vecteurs propres³.

D'abord nous devons avoir $v(\mathbb{1}) = 1$. En effet pour tout opérateur A , nous avons

$$v(A) = v(A\mathbb{1}) = v(A)v(\mathbb{1}). \quad (17.122)$$

Pour peu que $v(A) \neq 0$, cela nous fait $v(\mathbb{1}) = 1$.

En vertu du théorème 17.34, un vecteur $x \in \mathcal{H}$ se décompose en $x = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n$, et nous avons

$$\text{proj}_i x = \langle x, u_i \rangle u_i. \quad (17.123)$$

En effet le théorème de la projection orthogonale 17.8 nous enseigne que $\text{proj}_i x$ serait l'unique vecteur de la forme λu_i tel que $\lambda u_i - x \perp u_i$. Il est facile de vérifier que le vecteur proposé par (17.123) vérifie cette propriété.

Une conséquence est que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \text{proj}_i \right) (x) = x. \quad (17.124)$$

Par conséquent, par hypothèse du théorème nous devons avoir

$$\sum_i v(\text{proj}_i) = v(\mathbb{1}) = 1. \quad (17.125)$$

3. Pour les besoins de la physique, nous remarquons que ces opérateurs sont des opérateurs hermitiens qui commutent, mais ça ne joue pas ici.

Étant donné que les projections sont idempotentes,

$$v(\text{proj}_i) = v(\text{proj}_i^2) = v(\text{proj}_i)^2 \quad (17.126)$$

et donc $v(\text{proj}_i)$ doit valoir zéro ou un. Mais la relation (17.125) donne une forte contrainte sur le choix de 0 et de 1. En effet, parmi les $v(\text{proj}_i)$, un et un seul doit valoir 1, les autres doivent valoir 0.

Refaisant le raisonnement pour une autre base orthonormale hilbertienne, nous trouvons que les valeurs de v sur les opérateurs de projection sur les différentes directions doivent être choisies de telle façon que tout choix de base hilbertienne orthogonale contienne exactement un 1 et les reste de zéros.

Nous voudrions maintenant insister sur un point. Le problème de déterminer de façon cohérente les valeurs 0 ou 1 pour tous les $v(\text{proj}_i)$ revient à attacher 0 ou 1 à tous les rayons de $\mathcal{H}$ de façon que toute base orthogonale de $\mathcal{H}$ contienne exactement un 1. Un rayon est une direction, c'est à dire une classe d'équivalence $x \sim \lambda x$. Si nous décidons de nommer «blanc» les rayons attachés à la valeur 0 et «noirs» ceux attachés à la valeur 1, le problème se réduit à colorer la boule unité de façon compatible.

Soit $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base orthogonale de $\mathcal{H}$ numérotée de telle sorte que $v(u_0) = 1$ et $v(u_k) = 0$ pour $k \neq 0$. Nous allons maintenant nous particulariser au cas de dimension supérieure ou égale à 4. Si R est une rotation dans le plan $\text{Span}\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, alors l'ensemble

$$\{Ru_0, Ru_1, Ru_2, Ru_3, u_k\}_{k \geq 3} \quad (17.127)$$

est encore une base orthogonale de $\mathcal{H}$ et nous avons encore $v(u_k) = 0$ pour $k \geq 4$. Par conséquent un et un seul des vecteurs Ru_0, Ru_1, Ru_2 ou Ru_3 est colorié en noir ; les trois autres étant blancs. Le problème est maintenant complètement réduit à la dimension 4. Note : pour réduire à la dimension 3, on procède de même, mais pour conclure, il faut travailler plus.

Nous allons construire 9 base orthogonales de $\mathbb{R}^4$ à partir de 18 vecteurs, chacun arrivant dans exactement deux des bases. Ils sont donnés dans le tableau suivant :

0 1	0 0	0 0	1 1	1 -1	1 -1	-1 1	1 1	1 1
0 0	1 0	0 1	1 1	1 -1	-1 1	1 1	-1 1	1 -1
0 0	0 1	0 0	1 -1	1 -1	1 1	1 1	-1 1	1 1
0 1	0 0	1 0	1 -1	-1 1	1 1	1 -1	1 1	-1 1
1 0	1 0	1 1	1 0	1 1	1 0	1 0	1 0	1 -1
1 0	0 1	0 0	-1 0	0 0	0 -1	0 1	1 0	0 0
1 0	1 0	1 -1	0 1	0 0	0 1	0 1	0 1	0 0
-1 0	0 -1	0 0	0 -1	1 1	-1 0	-1 0	0 -1	1 1

Chaque case de ce table représente un rayon de $\mathbb{R}^4$; il y en a 18 différents, chacun écrit deux fois. Une simple vérification montre que chaque colonne est un système orthogonal. La preuve du théorème de Kochen-Specker revient à montrer que nous ne pouvons pas colorier ce tableau de façon cohérente. En effet, étant donné que chaque vecteur est écrit deux fois, le tableau doit contenir un nombre pair de cases blanches et un nombre pair de cases noires.

Par ailleurs chaque colonne étant un système orthogonal, chaque colonne contient exactement une case noire ; il y a donc exactement neuf cases noires dans le tableau, ce qui est impossible. $\square$

17.5 Théorème de Lax-Milgram

Définition 17.43.

Une forme bilinéaire $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace vectoriel normé V est **coercitive** si il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u, v) \geq \alpha \|u\|^2$ pour tout $u \in V$.

Théorème 17.44 (Lax-Milgram[232]).

Soit un espace de Hilbert réel V muni de différentes choses.

- (1) L'application linéaire $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ qui est bornée sur V . Nous notons C sa norme.

(2) La forme bilinéaire continue a sur $V \times V$. Nous considérons $M > 0$ tel que $|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$ pour tout $u, v \in V$.

(3) La forme a est coercitive⁴.

Alors le problème qui consiste à chercher $u \in V$ tel que $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in V$ admet une unique solution. De plus cette solution vérifie l'inégalité

$$\|u\| \leq \frac{M}{\alpha} C \quad (17.128)$$

Problèmes et choses à faire

Personnellement, je ne parviens pas à montrer l'inégalité (17.128), mais seulement

$$\|u\| \leq \frac{C}{\alpha}. \quad (17.129)$$

Démonstration. Avant de commencer, certaines précisions. D'abord nous nous souvenons de la proposition 6.217 qui donne la continuité de L . Ensuite, a est continue et linéaire en tant qu'application $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Nous aurions donc envie d'écrire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M\|(u, v)\|, \quad (17.130)$$

mais la norme produit⁵ sur $V \times V$ ne donne pas $\|u\|\|v\|$. Le fait pour a d'être bilinéaire donne en réalité plus que la linéarité, et la proposition 6.200 nous assure l'existence du M .

Reformulation en équation linéaire La forme L est continue et donc dans le dual V' ; le théorème de Riesz 17.19 nous donne donc $f \in V$ tel que

$$L(v) = \langle f, v \rangle \quad (17.131)$$

pour tout $v \in V$. De plus si $w \in V$ est fixé, l'application $b_w: v \mapsto a(w, v)$ est linéaire et bornée parce que

$$\|b_w\| = \sup_{\|v\|=1} |b_w(v)| = \sup_{\|v\|=1} |a(w, v)| \leq M\|w\|\|v\| = M\|w\|. \quad (17.132)$$

Encore une fois, b_w étant continue et linéaire, elle est dans V' et Riesz nous fournit un élément $A(w) \in V$ tel que

$$b_w(v) = \langle A(w), v \rangle \quad (17.133)$$

pour tout $v \in V$.

Le problème variationnel $a(u, v) = L(v)$ est équivalent à $\langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle$. L'ensemble des solutions de cette dernière est égal à l'ensemble des solutions de l'équation

$$A(u) = f. \quad (17.134)$$

A est linéaire Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $w, z \in V$. Nous avons pour tout $v \in V$:

$$\langle A(\alpha w + \beta z), v \rangle = a(\alpha w + \beta z, v) \quad (17.135a)$$

$$= \alpha a(w, v) + \beta a(z, v) \quad (17.135b)$$

$$= \alpha \langle A(w), v \rangle + \beta \langle A(z), v \rangle \quad (17.135c)$$

$$= \langle \alpha A(w) + \beta A(z), v \rangle. \quad (17.135d)$$

Étant donné que nous avons égalité pour tout $v \in V$ nous en déduisons que $A(\alpha w + \beta z) = \alpha A(w) + \beta A(z)$, ce qui signifie que A est linéaire.

4. Définition 17.43.

5. Définition 6.197.

Une autre propriété de A Nous déduisons une majoration de $\|A(v)\|^2$ lorsque ce n'est pas nul. Pour ce faire,

$$\|A(v)\|^2 a = \langle A(v), A(v) \rangle \quad (17.136a)$$

$$= a(v, A(v)) \quad (17.136b)$$

$$\leq M\|v\|\|A(v)\|. \quad (17.136c)$$

En simplifiant, $\|A(v)\| \leq M\|v\|$. Et donc

$$\|A(v)\|^2 \leq M^2\|v\|^2. \quad (17.137)$$

Une contraction Nous allons choisir une valeur de $\rho > 0$ telle que l'application

$$T: w \mapsto w - \rho(A(w) - f) \quad (17.138)$$

soit une contraction ⁶. Nous avons $T(w) - T(w') = w - w' - \rho(A(w - w'))$ et donc

$$\|T(w) - T(w')\|^2 = \|w - w'\|^2 + \rho^2\|A(w - w')\|^2 - 2\rho\langle A(w - w'), w - w' \rangle \quad (17.139a)$$

$$= \|w - w'\|^2 + \rho^2\|A(w - w')\|^2 - 2\rho a(w - w', w - w'). \quad (17.139b)$$

Vu que le dernier terme arrive avec un signe moins, pour majorer l'expression, il faut minorer ce terme, c'est à dire utiliser $a(w - w', w - w') \geq \alpha\|w - w'\|^2$. Et en même temps nous utilisons (17.137) pour le second terme. Au final pour pouvons factoriser $\|w - w'\|$ et

$$\|T(w) - T(w')\| \leq \|w - w'\|(1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha). \quad (17.140)$$

Pout que T soit contractante, il faut $0 < P(x) < 1$ avec $P(x) = M^2 x^2 - 2\alpha x + 1$. Le minimum de ce polynôme est obtenu en $x = \frac{\alpha}{M^2}$ (la formule du $x_{min} = -b/2a$) et vaut $1 - \frac{\alpha^2}{M^2} < 1$. Vu que par ailleurs $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = +\infty$, et que ce polynôme passe par au moins une valeur strictement inférieure à 1, nous savons qu'il existe u x tel que $0 < P(x) < 1$. En donnant à ρ cette valeur, l'application T est une contraction.

Point fixe et conclusion L'ensemble des solutions du problème (17.134) est égal à l'ensemble des points fixes de $T(v) = v - \rho(A(v) - f)$.

L'application $T: V \rightarrow V$ est contractante et V est métrique et complet. Ergo le théorème de point fixe de Picard 16.109 s'applique et il existe un unique point fixe $u \in V$ pour l'application T . Ce point fixe est l'unique solution de notre problème initial.

La majoration Nous savons que pour tout $v \in V$, la relation $a(u, v) = L(v)$ est vérifiée. En particulier pour $v = u$ nous avons

$$a(u, u) = L(u). \quad (17.141)$$

D'un côté nous utilisons $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ et de l'autre, $L(u) \leq C\|u\|$:

$$\alpha\|u\|^2 \leq C\|u\| \quad (17.142)$$

et donc

$$\|u\| \leq \frac{C}{\alpha}. \quad (17.143)$$

Notons que $L(u)$ et $a(u, u)$ sont positifs.

□

6. Définition 16.108.

Chapitre 18

Analyse fonctionnelle

Proposition 18.1.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\chi(t)dt = 0 \quad (18.1)$$

pour toute fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors $f = 0$ presque partout.

Théorème 18.2 (Théorème d'isomorphisme de Banach).

Une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme.

18.1 Théorème d'Ascoli

Définition 18.3.

Une partie A d'un espace topologique X est **relativement compacte** dans X si sa fermeture est compacte.

Proposition 18.4 ([163]).

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'image d'un borné de E par f est relativement compact dans F .
- (2) L'image par f de la boule unité fermée est relativement compacte dans F .
- (3) Si (x_n) est une suite bornée dans E , alors nous pouvons en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $(fx_{\varphi(n)})$ converge dans F .

Définition 18.5.

Une application vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 18.4 est dite **compacte**.

Définition 18.6.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions $f_i: X \rightarrow Y$ entre espaces métriques. Cette famille est **équicontinue** si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $x \in X$, il existe un $\delta(x, \epsilon) > 0$ tel que

$$\|x - y\|_X \leq \delta \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\|_Y \leq \epsilon \quad (18.2)$$

pour tout $i \in I$.

Théorème 18.7 (Théorème d'Ascoli[233]).

Soit K un espace topologique compact et un espace métrique (E, d) . Nous considérons la topologie uniforme sur $C(K, E)$. Une partie A de $C(K, E)$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- (1) A est équicontinu,
- (2) $\forall x \in K$, l'ensemble $\{f(x) \text{ tel que } f \in A\}$ est relativement compact dans E .

18.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 18.8 (Théorème de Banach-Steinhaus[1, 234]).

Soit E un espace de Banach¹ et F un espace vectoriel normé. Nous considérons une partie $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$ (espace des fonctions linéaires continues). Alors H est uniformément borné si et seulement si il est simplement borné.

Démonstration. Si H est uniformément borné, il est borné ; pas besoin de rester longtemps sur ce sens de l'équivalence. Supposons donc que H soit borné. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ nous considérons l'ensemble

$$\Omega_k = \{x \in E \text{ tel que } \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k\}. \quad (18.3)$$

Les Ω_k sont ouverts Soit $x_0 \in \Omega_k$; nous avons alors une fonction $f \in H$ telle que $\|f(x_0)\| > k$, et par continuité de f il existe $\rho > 0$ tel que $\|f(x)\| > k$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$. Par conséquent $B(x_0, \rho) \subset \Omega_k$ et Ω_k est ouvert par le théorème 5.3.

Les Ω_k ne sont pas tous denses dans E Nous supposons que les ensembles Ω_k soient tous denses dans E . Le théorème de Baire 5.187 nous indique que E est un espace de Baire (parce que de Banach) et donc que

$$\overline{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k} = E. \quad (18.4)$$

En particulier l'intersection des Ω_k n'est pas vide. Soit $x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$. Nous avons alors

$$\sup_{f \in H} \|f(x_0)\| = \infty, \quad (18.5)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les ouverts Ω_k ne sont pas tous denses dans E .

La majoration Il existe $k \geq 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E , et nous voulons prouver que $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$ est un ensemble borné. Soit donc $k \geq 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E ; il existe un $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que

$$B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \emptyset. \quad (18.6)$$

Si $x \in B(x_0, \rho)$ alors x n'est pas dans Ω_k et donc

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\| \leq k. \quad (18.7)$$

Afin d'évaluer $\|f\|$ nous devons savoir ce qu'il se passe avec les vecteurs sur une boule autour de 0. Pour tout $x \in B(0, \rho)$ et pour tout $f \in H$, la linéarité de f donne

$$\|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leq \|f(x + x_0)\| \leq 2k. \quad (18.8)$$

Par continuité nous avons alors $\|f(x)\| \leq 2k$ pour tout $x \in \overline{B(0, \rho)}$. Si maintenant $x \in F$ vérifie $\|x\| = 1$ nous avons

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho} \|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho}, \quad (18.9)$$

et donc $\|f\| \leq \frac{2k}{\rho}$, ce qui montre que $2k/\rho$ est un majorant de l'ensemble $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$.

□

Une application du théorème de Banach-Steinhaus est l'existence de fonctions continues et périodiques dont la série de Fourier ne converge pas. Ce sera l'objet de la proposition 20.16.

1. Définition 17.1.

Corollaire 18.9.

Soient $(E, (p_l))$ et $(F, (q_k))$ deux espaces localement compacts munis de semi-normes. Nous supposons que E est métrisable et complet. Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires $E \rightarrow F$ telles que pour tout $x \in E$ il existe $\alpha_x \in F$ tel que

$$T_j x \xrightarrow{F} \alpha_x. \quad (18.10)$$

Si nous posons $Tx = \alpha_x$ alors

- (1) l'application T est linéaire et continue,
- (2) pour tout compact K dans E et pour tout k nous avons

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} q_k(T_j x - Tx) = 0, \quad (18.11)$$

- (3) si $x_j \rightarrow x$ dans E alors

$$T_j x_j \rightarrow Tx \quad (18.12)$$

dans F .

La version suivante du théorème de Banach-Steinhaus est énoncée de façon *ad hoc* pour fonctionner avec l'espace $\mathcal{D}(K)$ des fonctions de classe C^∞ à support dans le compact K . Un énoncé un peu plus fort est donné dans le cadre des espaces de Fréchet dans [61].

Théorème 18.10 (Banach-Steinhaus avec des semi-normes).

Soit (E, d) un espace vectoriel métrique complet dont la topologie est également² donnée par une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes. Soit $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'applications linéaires continues $T_\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in E$ nous ayons

$$\sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(x)| < \infty. \quad (18.13)$$

Alors il existe une constante $C > 0$ et un sous-ensemble fini $J \subset \mathcal{P}$ tels que pour tout $x \in E$ nous ayons

$$|T_\alpha(x)| \leq C \max_{j \in J} p_j(x). \quad (18.14)$$

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ nous posons

$$\Omega_k = \{x \in E \text{ tel que } \sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(x)| > k\}. \quad (18.15)$$

Ces ensembles sont des ouverts (pour la même raison que dans la preuve du théorème 18.8) et leur union est E en entier parce que par hypothèse $\sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(x)| < \infty$.

Si les Ω_k étaient tous denses, le théorème de Baire 5.187 nous dit que leur intersection est dense également ; elle est donc non vide et si $x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$ nous avons

$$\sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(x_0)| = \infty, \quad (18.16)$$

ce qui contredirait l'hypothèse. Donc les Ω_k ne sont pas tous denses. Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que Ω_{k_0} n'est pas dense dans E . Il existe donc $x_0 \in E$ et un ouvert autour de x_0 n'intersectant pas Ω_{k_0} .

Nous jouons à présent sur la topologie de E . L'ouvert dont il est question est un d -ouvert et donc un $\mathcal{P}$ -ouvert, lequel contient une $\mathcal{P}$ -boule ouverte. Cette dernière boule n'est pas spécialement une d -boule, mais c'est un d -ouvert.

Il existe donc J fini dans $\mathcal{P}$ et $\rho > 0$ tels que $B_J(x_0, \rho) \cap \Omega_{k_0} = \emptyset$. Donc pour tout $y \in B_J(x_0, \rho)$ nous avons

$$\sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(y)| \leq k_0. \quad (18.17)$$

2. Au sens où les ouverts sont les mêmes.

Si maintenant $y \in B(0, \rho)$, nous avons $y = (y + x_0) - x_0$ et donc

$$|T_\alpha(y)| = |T_\alpha(y + x_0) - T_\alpha(x_0)| \quad (18.18a)$$

$$\leq |T_\alpha(y + x_0)| + |T_\alpha(x_0)| \quad (18.18b)$$

$$\leq k_0 + C \quad (18.18c)$$

où nous avons posé $C = \sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(x_0)|$. En normalisant, sur la boule $B_J(0, 1)$ nous avons

$$|T_\alpha(y)| \leq \rho^{-1}(k_0 + C). \quad (18.19)$$

Enfin sur $x \in E$ nous avons

$$\frac{x}{\max_{j \in J} p_j(x)} \in B_J(0, 1) \quad (18.20)$$

et donc

$$\left| T_\alpha \left(\frac{x}{\max_{j \in J} p_j(x)} \right) \right| \leq \rho^{-1}(k_0 + C). \quad (18.21)$$

Utilisant encore la linéarité de T_α nous trouvons ce que nous devons trouver :

$$|T_\alpha(x)| \leq \max_{j \in J} p_j(x) \rho^{-1}(k_0 + C) \quad (18.22)$$

à redéfinition près de $\rho^{-1}(k_0 + C)$ en C . □

18.3 Espaces L^p

18.3.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Deux fonctions à valeurs complexes f et g sur cet espace sont dites **équivalentes** et nous notons $f \sim g$ si elles sont μ -presque partout égales. Nous notons $[f]$ la classe de f pour cette relation.

Lemme 18.11.

Une classe contient au maximum une seule fonction continue.

Démonstration. Soient deux fonctions continues f_1 et f_2 avec $f_1(a) \neq f_2(a)$. Si $|f_1(a) - f_2(a)| = \delta$ alors il existe un ϵ tel que $|f_1(x) - f_1(a)| < \delta$ pour tout $x \in B(a, \epsilon)$. En particulier $f_1 \neq f_2$ sur $B(a, \epsilon)$. Cette dernière boule est de mesure de Lebesgue non nulle ; ergo f_1 et f_2 ne sont pas dans la même classe. □

Nous introduisons l'opération

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad (18.23)$$

et nous notons $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω telles que $\|f\|_p < \infty$.

Lemme 18.12.

L'ensemble $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Le fait que si $f \in L^p$, alors $\lambda f \in L^p$ est évident. Ce qui est moins immédiat, c'est le fait que $f + g \in L^p$ lorsque f et g sont dans L^p . Cela découle du fait que la fonction $\varphi: x \mapsto x^p$ est convexe, de telle sorte que

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}, \quad (18.24)$$

ou encore

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad (18.25)$$

□

L'opération $f \mapsto \|f\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$ parce que pour f presque partout nulle, nous avons $\|f\|_p = 0$. Il y a donc des fonctions non nulles sur lesquelles $\|\cdot\|_p$ s'annule.

Lemme 18.13.

Si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $f \sim g$, alors $g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Démonstration. Soit $h(x) = |g(x)|^p - |f(x)|^p$; c'est une fonction par hypothèse presque partout nulle et donc intégrable sur Ω ; son intégrale y vaut zéro. Nous avons

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) = \int_{\Omega} (|f(x)|^p + h(x)) d\mu(x) = \int_{\Omega} |g(x)|^p d\mu(x). \quad (18.26)$$

Cela prouve que la dernière intégrale existe et vaut la même chose que la première. $\square$

Nous pouvons donc considérer la norme $|\cdot|_p$ comme une norme sur l'ensemble des classes plutôt que sur l'ensemble des fonctions. Nous notons L^p l'ensemble des classes des fonctions de $\mathcal{L}^p$. Cet espace est muni de la norme

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \quad (18.27)$$

formule qui ne dépend pas du représentant par le lemme 18.13.

Maintenant la formule

$$\|[f]\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad (18.28)$$

défini une norme sur $L^p(\Omega, \mu)$. En effet si $\|[f]\|_p = 0$, nous avons

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) = 0, \quad (18.29)$$

ce qui par le lemme 7.123 implique que $|f(x)|^p = 0$ pour presque tout x . Ou encore $f \sim 0$, c'est à dire $[f] = [0]$ au niveau des classes. À partir de maintenant $(L^p(\Omega, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace métrique avec toute la topologie qui va avec.

Dans la suite nous n'allons pas toujours écrire $[f]$ pour la classe de f . Par abus de notations nous allons souvent parler de $f \in L^p$ comme si c'était une fonction.

Proposition 18.14 ([235]).

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et supposons que la suite $[f_n]$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ converge vers $[f]$ au sens L^p . Alors il existe une sous-suite (h_n) qui converge ponctuellement μ -presque partout vers f .

Démonstration. Si $p = \infty$ nous sommes en train de parler de la convergence uniforme et il ne faut même pas prendre ni de sous-suite ni de « presque partout ».

Supposons que $1 \leq p < \infty$. Nous considérons une sous-suite $[h_n]$ de $[f_n]$ telle que

$$\|[h_j] - [f]\|_p < 2^{-j}, \quad (18.30)$$

puis nous posons $u_k(x) = |h_k(x) - f(x)|^p$. Notons que ce u_k est une vraie fonction, pas une classe. Et en plus c'est une fonction positive. Nous avons

$$\int_{\Omega} u_k d\mu = \int_{\Omega} |h_k(x) - f(x)|^p d\mu(x) = \|h_k - f\|_p^p \leq 2^{-kp}. \quad (18.31)$$

Vu que u_k est une fonction positive la suite des sommes partielles de $\sum_k u_k$ est croissante et vérifie donc le théorème de la convergence monotone 7.129 :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} u_k(x) d\mu(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kp} < \infty. \quad (18.32)$$

Le fait que l'intégrale de la fonction $\sum_k u_k$ est finie implique que cette fonction est finie μ -presque partout. Donc le terme général tend vers zéro presque partout, c'est à dire

$$|h_k(x) - f(x)|^p \rightarrow 0. \quad (18.33)$$

Cela signifie que $h_k \rightarrow f$ presque partout ponctuellement. $\square$

Est-ce qu'on peut faire mieux que la convergence ponctuelle presque partout d'une sous-suite ? En tout cas on ne peut pas espérer grand chose comme convergence pour la suite elle-même, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 18.15

Nous allons montrer une suite de fonctions qui converge vers zéro dans $L^p[0, 1]$ (avec $p < \infty$) mais qui ne converge ponctuellement pour *aucun* point. Cet exemple provient de bibmath.net.

Nous construisons la suite de fonctions par paquets. Le premier paquet est formé de la fonction constante 1.

Le second paquet est formé de deux fonctions. La première est $\mathbb{1}_{[0, 1/2]}$ et la seconde $\mathbb{1}_{[1/2, 1]}$.

Plus généralement le paquet numéro k est constitué des k fonctions $\mathbb{1}_{[i/k, (i+1)/k]}$ avec $i = 0, \dots, k-1$.

Vu que les fonctions du paquet numéro k ont pour norme $\|f\|_p = \frac{1}{k}$, nous avons évidemment $f_n \rightarrow 0$ dans L^p . Il est par contre visible que chaque paquet passe en revue tous les points de $[0, 1]$. Donc pour tout x et pour tout N , il existe (même une infinité) $n > N$ tel que $f_n(x) = 1$. Il n'y a donc convergence ponctuelle nulle part. $\triangle$

La proposition suivante est une espèce de convergence dominée de Lebesgue pour L^p .

Proposition 18.16.

Soit $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ et (f_n) une suite de fonctions convergeant ponctuellement vers f et telle que $|f_n| \leq |f|$. Alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Démonstration. Nous avons immédiatement $|f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$, de telle sorte que le théorème de la convergence dominée implique que $f_n \in L^p$. La convergence dominée donne aussi que $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, mais cela ne nous intéresse pas ici.

Nous posons $h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. En reprenant la formule de majoration (18.25) et en tenant compte du fait que $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, nous avons

$$h_n(x) \leq 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^p |f(x)|^p, \quad (18.34)$$

ce qui prouve que $|h_n|$ est uniformément (en n) majorée par une fonction intégrable, donc h_n est intégrable et on peut permuter la limite et l'intégrale (théorème de la convergence dominée 7.134) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) dx = 0. \quad (18.35)$$

□

18.3.2 L'espace L^∞

Il n'est pas possible de définir le supremum d'une fonction définie à ensemble de mesure nulle près parce que toute classe contient des fonctions qui peuvent être arbitrairement grandes en n'importe quel point. Nous cherchons alors à définir une notion de supremum qui ne tient pas compte des ensembles de mesure nulle.

Définition 18.17.

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Un nombre M est un **majorant essentiel** de f si

$$\mu(|f(x)| \leq M) = 0. \quad (18.36)$$

Nous posons alors $N_\infty(f) = \inf\{M \text{ tel que } |f(x)| \leq M \text{ presque partout}\}$. Cela revient à prendre le supremum à ensemble de mesure nulle près. Nous définissons alors les espaces de Lebesgue correspondants :

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que } N_\infty(f) < \infty\}, \quad (18.37)$$

et L^∞ en est le quotient usuel. Dans ce contexte nous notons $\|f\|_\infty$ le supremum essentiel de f , qui est indépendant de la classe.

18.3.3 Inégalité de Jensen, Hölder et de Minkowski

Proposition 18.18 (Inégalité de Jensen[134]).

Soit un espace mesuré de probabilité³ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi qu'une fonction convexe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une application $\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que α et $f \circ \alpha$ soient intégrables sur Ω . Alors

$$f\left(\int_{\Omega} \alpha d\mu\right) \leq \int_{\Omega} (f \circ \alpha) d\mu. \quad (18.38)$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ et le nombre c_a donné par la proposition 11.223 : pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons

$$f(\alpha(\omega)) - f(a) \geq c_a(\alpha(\omega) - a). \quad (18.39)$$

Cela est en particulier vrai pour $a = \int_{\Omega} \alpha d\mu$. Nous intégrons l'inégalité (18.39) sur Ω en nous souvenant que $\int d\mu = 1$:

$$\int_{\Omega} (f \circ \alpha) d\mu - \int_{\Omega} f(a) d\mu \geq c_a \left(\int_{\Omega} \alpha - \int_{\Omega} a \right) \quad (18.40a)$$

$$\int_{\Omega} (f \circ \alpha) d\mu - f(a) \geq c_a(a - a) \quad (18.40b)$$

$$f(a) \leq \int_{\Omega} (f \circ \alpha) d\mu. \quad (18.40c)$$

Cette dernière inégalité est celle que nous devons prouver. $\square$

Corollaire 18.19.

Soit un espace mesuré de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une application $\alpha \in L^1(\Omega, \mu)$ et $\alpha \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors

$$\left| \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right| \leq \|\alpha\|_p. \quad (18.41)$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Jensen sur la fonction convexe $f(x) = |x|^p$. Nous avons alors

$$\left| \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right|^p \leq \int_{\Omega} |\alpha(s)|^p d\mu(s), \quad (18.42)$$

c'est à dire

$$\left| \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right| \leq \left[\int_{\Omega} |\alpha(s)|^p d\mu(s) \right]^{1/p} = \|\alpha\|_p \quad (18.43)$$

où ma norme $\|\cdot\|_p$ est prise au sens de la mesure μ . $\square$

Proposition 18.20 (Inégalité de Hölder).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p, q \leq \infty$ satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, alors le produit fg est dans $L^1(\Omega)$ et nous avons

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (18.44)$$

Plus généralement si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (18.45)$$

Ce qui est appelé « inégalité de Hölder » est généralement l'inéquation (18.44).

3. C'est à dire que $\int_{\Omega} d\mu = 1$.

Démonstration. Nous allons prouver l'inégalité (18.45). D'abord nous supposons $\|g\|_q = 1$ et nous posons

$$A = \{x \in \Omega \text{ tel que } |g(x)| > 0\}. \quad (18.46)$$

Hors de A , les intégrales que nous allons écrire sont nulles. Nous avons

$$\|fg\|_r^p = \left| \int_A |f|^r |g|^{r-q} |g|^q \right|^{p/r}, \quad (18.47)$$

et le coup tordu est de considérer cette intégrale comme étant une intégrale par rapport à la mesure $\nu = |g|^q d\mu$ qui a la propriété d'être une mesure de probabilité par hypothèse sur g . Nous pouvons alors utiliser l'inégalité de Jensen⁴ parce que $p/r > 1$, ce qui fait de $x \mapsto |x|^{p/r}$ une fonction convexe. Nous avons alors

$$\|fg\|_r^p \leq \int_A (|f|^r |g|^{r-q})^{p/r} |g|^q d\mu \quad (18.48a)$$

$$= \int_A |f|^p |g|^{p(r-q)/r} |g|^q d\mu \quad (18.48b)$$

La puissance de $|g|$ dans cette expression est : $q + \frac{p(r-q)}{r} = 0$ parce que $p(q-r) = rq$. Nous avons alors montré que

$$\|fg\|_r^p \leq \int_A |f|^p d\mu \leq \|f\|_p^p. \quad (18.49)$$

La dernière inégalité est le fait que le domaine A n'est pas tout le domaine Ω .

Si maintenant $\|g\|_q \neq 1$ alors nous calculons

$$\|fg\|_r = \|g\|_q \|f \frac{g}{\|g\|_q}\|_r \leq \|g\|_q \|f\|_p \quad (18.50)$$

en appliquant la première partie à la fonction $\frac{g}{\|g\|_q}$ qui est de norme 1. $\square$

Remarque 18.21.

Dans le cas d'un espace de probabilité, la fonction constante $g = 1$ appartient à $L^p(\Omega)$. En prenant $p = q = 2$ nous obtenons

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2. \quad (18.51)$$

Lemme 18.22.

Lorsque I est borné nous avons $L^2(I) \subset L^1(I)$. Si I n'est pas borné alors $L^2(I) \subset L^1_{loc}(I)$.

Démonstration. En effet si I est borné, alors la fonction constante 1 est dans $L^2(I)$ et l'inégalité de Hölder 18.20 nous dit que le produit $1u$ est dans $L^1(I)$.

Si I n'est pas borné, nous refaisons le même raisonnement sur un compact K de I . $\square$

Proposition 18.23 (Inégalité de Minkowski[236, 237]).

Si $1 \leq p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors

$$(1) \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(2) Il y a égalité si et seulement si les vecteurs $f(x)$ et $g(x)$ sont presque partout colinéaires : il existe α, β tels que $\alpha f + \beta g = 0$ presque partout.

(3) Si $f(x, y)$ est mesurable sur l'espace produit $(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ et si $p \geq 1$, alors

$$\left\| x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y) \quad (18.52)$$

où $f_y(x) = f(x, y)$.

4. Proposition 18.18.

La partie (3) est une généralisation de l'inégalité triangulaire (c'est à dire du point (1)) dans le cas où nous n'avons pas une somme de deux fonctions mais d'une infinité paramétrée par $y \in Y$. Elle sera le plus souvent utilisée sous la forme déballée :

$$\left[\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y). \quad (18.53)$$

18.3.4 Ni inclusions ni inégalités

Aucun espace $L^p(\mathbb{R})$ n'est inclus dans aucun autre ni aucune norme n'est plus grande qu'une autre (sur les intersections). Nous verrons cependant en la proposition 18.24 que de telles inclusions et inégalités sont possibles pour $L^p([0, 1])$.

Nous allons donner des exemples de tout ça en supposant $p < q$ et en nous appuyant lourdement sur les intégrales de $\frac{1}{x^\alpha}$ étudiées par la proposition 13.76.

$L^p \not\subseteq L^q$ La fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/q}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (18.54)$$

est dans L^p mais pas dans L^q . En effet

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/q}} dx < \infty \quad (18.55)$$

parce que $p < q$ et $p/q < 1$. Par contre

$$\|f\|_q^q = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty. \quad (18.56)$$

$L^q \not\subseteq L^p$ La fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/p}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (18.57)$$

est dans L^q mais pas dans L^p . En effet

$$\|f\|_p^p = \int_1^\infty \frac{1}{x} = \infty \quad (18.58)$$

alors que

$$\|f\|_q^q = \int_1^\infty \frac{1}{x^{q/p}} dx < \infty. \quad (18.59)$$

Exemple de $\|f\|_p > \|f\|_q$ La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (18.60)$$

Nous avons

$$\|f\|_p = 2^{1/p} \quad (18.61a)$$

$$\|f\|_q = 2^{1/q}. \quad (18.61b)$$

Mais comme $p < q$ donc $\|f\|_p > \|f\|_q$.

Exemple de $\|f\|_p < \|f\|_q$ La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (18.62)$$

Alors

$$\|f\|_p = \frac{1}{2^{1/p}} \quad (18.63a)$$

$$\|f\|_q = \frac{1}{2^{1/q}} \quad (18.63b)$$

et donc $\|f\|_p < \|f\|_q$.

Ces exemples donnent un exemple de fonction f telle que $\|f\|_p < \|f\|_q$ pour tout espace $L^p(I)$ et $L^q(I)$ avec $I \subset \mathbb{R}$. Par contre l'exemple $\|f\|_p > \|f\|_q$ ne fonctionne que si la taille de I est plus grande que 1. Et pour cause : il y a des inclusions si I est borné.

Proposition 18.24 ([29]).

Inclusions et inégalités dans le cas d'un ensemble de mesure finie.

(1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dès que $p \leq q$.

(2) Si $1 < p < 2$ et si $f \in L^2([0, 1])$ alors $\|f\|_p \leq \|f\|_2$.

Démonstration. Pour la simplicité des notations nous allons noter L^p pour $L^p(\Omega)$, et pareillement pour L^q . Soit $f \in L^q$. Nous posons

$$A = \{x \in [0, 1] \text{ tel que } |f(x)| \geq 1\}. \quad (18.64)$$

Étant donné que $p \leq q$ nous avons $|f|^p \leq |f|^q$ sur A ; par conséquent $\int_A |f|^p$ converge parce que $\int_A |f|^q$ converge.

L'ensemble A^c est évidemment borné (complémentaire dans Ω) et sur A^c nous avons $|f(x)| \leq 1$ et donc $|f|^p \leq 1$. L'intégrale $\int_{A^c} |f|^p$ converge donc également.

Au final $\int_\Omega |f|^p$ converge et $f \in L^p$.

Soit à présent $f \in L^2$; par le premier point nous avons immédiatement $f \in L^2 \cap L^p$. Soit aussi $r \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2/p} + \frac{1}{r} = 1$. Nous avons $|f|^p \in L^{2/p}$, et vu que nous sommes sur un domaine borné, $1 \in L^r$. Nous écrivons l'inégalité de Hölder (18.44) avec ces fonctions. D'une part

$$\|f\|_1 = \||f|^p\|_1 = \|f\|_p^p. \quad (18.65)$$

D'autre part

$$\||f|^p\|_{2/p} = \left(\int |f|^2 \right)^{p/2} = \|f\|_2^p. \quad (18.66)$$

Donc $\|f\|_p^p \leq \|f\|_2^p$, ce qui prouve l'assertion (2) parce que $p > 1$. $\square$

Remarque 18.25.

Nous n'avons cependant pas $L^2([0, 1]) = L^p([0, 1])$ parce que l'exemple (18.54) fonctionne encore :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (18.67)$$

pour $x \in [0, 1]$ donne bien

$$\|f\|_2 = \int_0^1 \frac{1}{x} = \infty \quad (18.68)$$

et $\|f\|_p = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/2}} < \infty$ parce que $1 < p < 2$.

18.3.5 Complétude

Théorème 18.26 ([238, 239]).

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p . Pour tout i , il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_p - f_q\|_p \leq 2^{-i}$ pour tout $p, q \geq N_i$. Nous considérons la sous suite $g_i = f_{N_i}$, de telle sorte qu'en particulier

$$\|g_i - g_{i-1}\|_p \leq 2^{-i}. \quad (18.69)$$

Pour chaque j nous considérons la somme télescopique

$$g_j = g_0 + \sum_{i=1}^j (g_i - g_{i-1}) \quad (18.70)$$

et l'inégalité

$$|g_j| \leq |g_0| + \sum_{i=1}^j |g_i - g_{i-1}|. \quad (18.71)$$

Nous allons noter

$$h_j = |g_0| + \sum_{i=1}^j |g_i - g_{i-1}|. \quad (18.72)$$

La suite de fonctions (h_j) ainsi définie est une suite croissante de fonctions positive qui converge donc (ponctuellement) vers une fonction h qui peut éventuellement valoir l'infini en certains points. Par continuité de la fonction $x \mapsto x^p$ nous avons

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j^p = h^p, \quad (18.73)$$

puis par le théorème de la convergence monotone (théorème 7.129) nous avons

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_j^p d\mu = \int_{\Omega} h^p d\mu. \quad (18.74)$$

Utilisant à présent la continuité de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ nous trouvons

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int h_j^p \right)^{1/p} = \left(\int |h|^p \right)^{1/p}. \quad (18.75)$$

Nous avons donc déjà montré que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|h_j\|_p = \left(\int |h|^p \right)^{1/p} \quad (18.76)$$

où, encore une fois, rien ne garantit à ce stade que l'intégrale à droite soit un nombre fini. En utilisant l'inégalité de Minkowski (proposition 18.23) et l'inégalité (18.69) nous trouvons

$$\|h_j\|_p \leq \|g_0\|_p + \sum_{i=1}^j \|g_i - g_{i-1}\|_p \leq \|g_0\|_p + 1. \quad (18.77)$$

En passant à la limite,

$$\left(\int |h|^p \right)^{1/p} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|h_j\|_p \leq \|g_0\|_p + 1 < \infty. \quad (18.78)$$

Par conséquent $\int |h|^p$ est finie et

$$h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu). \quad (18.79)$$

En particulier, l'intégrale $\int h$ est finie (parce que $p \geq 1$) et donc que $h(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Nous savons que $h(x)$ est la limite des sommes partielles (18.72), en particulier la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j-1}| \quad (18.80)$$

converge ponctuellement. En vertu du corollaire 7.136, la série de terme général $g_i - g_{i-1}$ converge ponctuellement. La suite g_i converge donc vers une fonction que nous notons g . Par ailleurs la suite g_i est dominée par $h \in L^p$, le théorème de la convergence dominée (théorème 7.134) implique que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|g_j - g\|_p = 0. \quad (18.81)$$

Nous allons maintenant prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|_p = 0$. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout n et i nous avons

$$\|f_n - g\|_p = \|f_n - f_{N_i} + f_{N_i} - g\|_p \leq \|f_n - f_{N_i}\|_p + \|f_{N_i} - g\|_p. \quad (18.82)$$

Pour rappel, $f_{N_i} = g_i$. Si i et n sont suffisamment grands nous pouvons obtenir que chacun des deux termes est plus petit que $\epsilon/2$.

Il nous reste à prouver que $g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous avons déjà vu (équation (18.79)) que $h \in L^p$, mais $|g_i| \leq h^p$, par conséquent $g \in L^p$.

Nous avons donc montré que la suite de Cauchy (f_n) converge vers une fonction de L^p , ce qui signifie que L^p est complet. $\square$

Théorème 18.27 (Fischer-Riesz[1]).

Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty]$. Alors

- (1) Toute suite convergente dans $L^p(\Omega)$ admet une sous-suite convergente presque partout sur Ω .
- (2) La sous-suite donnée en (1) est dominée par un élément de $L^p(\Omega)$.
- (3) L'espace $L^p(\Omega)$ est de Banach.

Démonstration. Le cas $p = \infty$ est à séparer des autres valeurs de p parce qu'on y parle de norme uniforme, et aucune sous-suite n'est à considérer.

Cas $p = \infty$. Nous commençons par prouver dans le cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, ou plus précisément une suite de représentants d'éléments de L^p . Pour tout $k \geq 1$, il existe $N_k \geq 0$ tel que si $m, n \geq N_k$, on a

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}. \quad (18.83)$$

En particulier, il existe un ensemble de mesure nulle E_k sur lequel

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \quad (18.84)$$

et si nous posons $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$, nous avons encore un ensemble de mesure nulle (lemme 7.34). En résumé, nous avons un N_k tel que si $m, n \geq N_k$, alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \quad (18.85)$$

pour tout x hors de E . Donc pour chaque $x \in \Omega \setminus E$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge donc. Cela définit donc une fonction

$$\begin{aligned} f: \Omega \setminus E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \end{aligned} \quad (18.86)$$

Cela prouve le point (1) : la convergence ponctuelle.

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'équation 18.85 et tenant compte que cette majoration tient pour presque tout x dans Ω , nous trouvons

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}. \quad (18.87)$$

Donc non seulement f est dans L^∞ , mais en plus la suite (f_n) converge vers f au sens L^∞ , c'est à dire uniformément. Cela prouve le point (3). En ce qui concerne le point (2), la suite f_n est entièrement (à partir d'un certain point) dominée par la fonction $1 + |f|$ qui est dans L^p .

Cas $p < \infty$. Toute suite convergente étant de Cauchy, nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans $L^p(\Omega)$ et ce sera suffisant pour travailler sur le premier point. Pour montrer qu'une suite de Cauchy converge, il est suffisant de montrer qu'une sous-suite converge. Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que pour tout $n \geq 1$ nous ayons

$$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}. \quad (18.88)$$

Pour créer la fonction φ , il est suffisant de prendre le N_k donné par la condition de Cauchy pour $\epsilon = 1/2^k$ et de considérer la fonction définie par récurrence par $\varphi(1) = N_1$ et $\varphi(n+1) > \max\{N_n, \varphi(n-1)\}$. Ensuite nous considérons la fonction

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|. \quad (18.89)$$

Notons que pour écrire cela nous avons considéré des représentants f_k qui sont alors des fonctions à l'ancienne. Étant donné que g_n est une somme de fonctions dans L^p , c'est une fonction L^p , comme nous pouvons le constater en calculant sa norme :

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \quad (18.90)$$

Étant donné que tous les termes de la somme définissant g_n sont positifs, la suite (g_n) est croissante. Mais elle est bornée en norme L^p et donc sujette à obéir au théorème de Beppo-Levi 7.129 sur la convergence monotone. Il existe donc une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que $g_n \rightarrow g$ presque partout.

Soit un $x \in \Omega$ pour lequel $g_n(x) \rightarrow g(x)$; alors pour tout $n \geq 2$ et $\forall q \geq 0$,

$$|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| = \left| f_{\varphi(n+q)}(x) - \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) - \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) \right| \quad (18.91a)$$

$$= \left| \sum_{k=1}^q f_{\varphi(n+k)}(x) - \sum_{k=1}^q f_{\varphi(n+k-1)}(x) \right| \quad (18.91b)$$

$$\leq \sum_{k=1}^q |f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x)| \quad (18.91c)$$

$$= g_{n+q+1}(x) - g_{n+1}(x) \quad (18.91d)$$

$$\leq g(x) - g_{n-1}(x). \quad (18.91e)$$

Nous prenons la limite $n \rightarrow \infty$; la dernière expression tend vers zéro et donc

$$|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \rightarrow 0 \quad (18.92)$$

pour tout q . Donc pour presque tout $x \in \Omega$, la suite $n \mapsto f_{\varphi(n)}(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc y converge vers un nombre que nous nommons $f(x)$. Cela définit une fonction

$$f: \Omega \setminus E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varphi(n)}(x) \quad (18.93)$$

où E est de mesure nulle. Montrons que f est bien dans $L^p(\Omega)$; pour cela nous complétons la série d'inégalités (18.91) en

$$|f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x). \quad (18.94)$$

En prenant la limite $q \rightarrow \infty$ nous avons l'inégalité

$$|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq g(x) \quad (18.95)$$

pour presque tout $x \in \Omega$, c'est à dire pour tout $x \in \Omega \setminus E$. Cette inégalité implique deux choses valables pour presque tout x dans Ω :

$$f(x) \in B(g(x), f_{\varphi(n)}(x)) \quad (18.96a)$$

$$f_{\varphi(n)}(x) \leq |f(x)| + |g(x)|. \quad (18.96b)$$

La première inégalité assure que $|f|^p$ est intégrable sur $\Omega \setminus E$ parce que $|f|$ est majorée par $|g| + |f_{\varphi(n)}|$. Elle prouve par conséquent le point (1) parce que $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est une sous-suite convergente presque partout. La seconde montre le point (2).

Attention : à ce point nous avons prouvé que $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est une suite de fonctions qui converge *ponctuellement presque partout* vers une fonction f qui s'avère être dans L^p . Nous n'avons pas montré que cette suite convergeait au sens de L^p vers f . Ce que nous devons montrer est que

$$\|f - f_{\varphi(n)}\|_p \rightarrow 0. \quad (18.97)$$

L'inégalité (18.95) nous donne aussi, toujours pour presque tout $x \in \Omega$:

$$|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)|^p \leq g(x)^p \quad (18.98)$$

ce qui signifie que la suite⁵ $|f - f_{\varphi(n)}|^p$ est dominée par la fonction $|g|^p$ qui est intégrable sur $\Omega \setminus E$ et tout autant sur Ω parce que E est négligeable ; cela prouve au passage le point (2), et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (7.134) nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)|^p dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)|^p dx = 0. \quad (18.99)$$

Cette dernière suite d'égalités se lit de la façon suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{\varphi(n)}\|_p = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} |f - f_{\varphi(n)}| \right\|_p = 0. \quad (18.100)$$

Nous en déduisons que la suite $n \mapsto f_{\varphi(n)}$ est convergente vers f au sens de la norme $L^p(\Omega)$. Or la suite de départ (f_n) était de Cauchy (pour la norme L^p) ; donc l'existence d'une sous-suite convergente implique la convergence de la suite entière vers f , ce qu'il fallait démontrer.

□

18.3.6 L'espace L^2

L'espace L^2 est l'espace L^p défini à la section 18.3 avec $p = 2$. Cependant il possède une propriété extraordinaire⁶ par rapport aux autres L^p , c'est que la norme $|\cdot|_2$ dérive d'un produit scalaire. Il sera donc un espace de Hilbert.

Nous en rappelons la construction. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons l'opération

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\omega) \overline{g(\omega)} d\mu(\omega) \quad (18.101)$$

et la norme associée

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (18.102)$$

Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \|f\|_2 < \infty\} \quad (18.103)$$

et la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour μ -presque tout x .

5. À ce point, [1] se contente de majorer $|f_{\varphi(n)}(x)|$ par $|f(x)| + |g(x)|$, mais je ne comprends pas comment cette majoration nous permet d'utiliser la convergence dominée de Lebesgue pour montrer (18.97).

6. Tant et si bien que certains n'hésitent pas à définir le nombre 2 comme étant l'unique p tel que L^p est un Hilbert.

Définition 18.28.

Nous définissons le quotient

$$L^2(\Omega, \mu) = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu) / \sim. \quad (18.104)$$

Lemme 18.29.

La formule (18.101) définit un produit scalaire sur L^2 , et ce dernier est un espace de Hilbert.

Démonstration. D'abord si f et g sont dans L^2 , alors l'inégalité de Hölder (proposition 18.20) nous indique que le produit fg est un élément de L^1 . Par conséquent la formule a un sens.

Ensuite nous montrons que la formule passe au quotient. Pour cela, nous considérons des fonctions α et β nulles presque partout et nous regardons le produit de $f_1 = f + \alpha$ par $g_1 = g + \beta$:

$$\langle f_1, g_1 \rangle = \int fg + \beta f + \alpha g + \alpha \beta. \quad (18.105)$$

Les fonction βf , αg et $\alpha \beta$ étant nulles presque partout, leur intégrale est nulle et nous avons bien $\langle f_1, g_1 \rangle = \langle f, g \rangle$. Nous pouvons donc considérer le produit sur l'ensemble des classes.

Pour vérifier que la formule est un produit scalaire, le seul point non évidemment est de prouver que $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f = 0$. Cela découle du fait que

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} |f|^2. \quad (18.106)$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|^2$ vérifie les hypothèses du lemme 7.123. Par conséquent $|f(x)|^2$ est presque partout nulle.

En ce qui concerne le fait que $L^2(\Omega)$ soit un espace de Hilbert, il s'agit simplement de se remémorer que c'est un espace complet (théorème 18.26) et dont la norme dérive d'un produit scalaire. Nous sommes donc bien dans la définition 17.2. $\square$

Attention : dans 18.3.6, le produit scalaire a été défini avec un coefficient $1/2\pi$. Voir l'équation (18.109).

Nous notons ici une conséquence du théorème 18.27 dans le cas de l'espace L^2 . La proposition suivante est une petite partie du corollaire 17.39, qui sera d'ailleurs démontré de façon indépendante.

Proposition 18.30.

Si nous avons une suite de réels (a_k) telle que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ alors la suite

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ikx} \quad (18.107)$$

converge dans $L^2([0, 2\pi[)$.

Démonstration. Quitte à séparer les parties réelles et imaginaires, nous pouvons faire abstraction du fait que nous parlons d'une série de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Un simple calcul est :

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \int_0^{2\pi} \sum_{k=n}^m |a_k|^2 dx \leq 2\pi \sum_{k=n}^m |a_k|^2. \quad (18.108)$$

Par hypothèse le membre de droite est $|s_m - s_n|$ où s_k dénote la suite des somme partielle de la série des $|a_k|^2$. Cette dernière est de Cauchy (parce que convergente dans $\mathbb{R}$) et donc la limite $n \rightarrow \infty$ (en gardant $m > n$) est zéro. Donc la suite des f_n est de Cauchy dans L^2 et donc converge dans L^2 . $\square$

18.3.7 Coefficients et série de Fourier

Nous utilisons ici des résultats de bases hilbertiennes de la sous-section 17.3.4. Nous considérons l'espace de Hilbert $L^2[-T/2, T/2]$ muni du produit scalaire⁷

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (18.109)$$

Pour toute fonction pour laquelle ça a un sens (que ce soit des fonctions L^2 ou non), nous posons

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt. \quad (18.110)$$

Ces nombres sont les **coefficients de Fourier** de f . Leur importance dans le cadre de L^2 provient du fait que la famille de fonctions

$$e_k(t) = e^{2i\pi kt/T} \quad (18.111)$$

est une base hilbertienne de $L^2[-T/2, T/2]$ et que

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle. \quad (18.112)$$

Nous pouvons être plus précis. Pour un élément donné $f \in L^2([0, 2\pi])$, nous définissons

$$S_n f = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k \quad (18.113)$$

et nous avons le théorème suivant, qui récompense les efforts consentis à propos de la densité des polynômes trigonométriques dans L^2 .

Théorème 18.31.

Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$. Nous avons égalité⁸

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n \quad (18.114)$$

dans L^2 .

Nous avons aussi la convergence

$$S_n f \xrightarrow{L^2} f. \quad (18.115)$$

Démonstration. Le système trigonométrique $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est total pour l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$ (sans périodicité particulière). Donc le point (1) du théorème 17.34 nous donne l'égalité demandée.

La convergence (18.115) est une reformulation de l'égalité (18.114). $\square$

Si nous voulons une vraie convergence ponctuelle voir uniforme $(S_n f)(x) \rightarrow f(x)$, alors il faut ajouter des hypothèses sur la continuité de f , sa périodicité ou le comportement des coefficients c_n .

Remarque 18.32.

Obtenir la convergence L^2 ne demande pas d'hypothèse de périodicité : la convergence (18.115) est automatique du fait que le système trigonométrique soit total. Ce n'est cependant pas plus qu'une convergence L^2 et elle ne demande pas $f(0) = f(2\pi)$, même si pour chacun des e_k nous avons $e_k(0) = e_k(2\pi)$.

Si $f(2\pi) \neq f(0)$, alors il existe une suite (f_n) convergente vers f au sens L^2 telle que $f_n(0) = f_n(2\pi)$.

7. Attention à la convention : nous mettons un coefficient qui n'est pas dans la définition générale (18.101).

8. Notons que la somme sur $\mathbb{Z}$ dans (18.114) est commutative ; il n'est donc pas besoin d'être plus précis.

18.4 Convolution

Le théorème qui permet de définir le produit de convolution est le suivant.

Théorème-définition 18.33 ([134]).

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(1) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$y \mapsto g(x - y)f(y) \quad (18.116)$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, et nous définissons le **produit de convolution** de f et g par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy. \quad (18.117)$$

(2) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(3) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

L'ensemble $L^1(\mathbb{R}^n)$ devient alors une algèbre de Banach.

Lemme 18.34.

Le produit de convolution est commutatif : $f * g = g * f$.

Démonstration. Le théorème de Fubini (théorème 13.78) permet d'écrire

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n f(y)g(x - y). \quad (18.118)$$

En effectuant le changement de variable $z_i = x_i - y_i$ dans chacune des intégrales nous obtenons

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(x - z)dz = (g * f)(x). \quad (18.119)$$

Attention : on pourrait croire qu'un signe apparaît du fait que $z = x - y$ donne $dz = -dy$. Mais en réalité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}$ devient par le même changement de variables $\int_{+\infty}^{-\infty}$ qui redonne un nouveau signe au moment de remettre dans l'ordre. $\square$

Proposition 18.35.

Si $1 \leq p \leq \infty$ et si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

(1) $f * g \in L^p$

(2) $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

Cette proposition est une conséquence de l'inégalité de Minkowski sous forme intégrale : 18.23(3).

Proposition 18.36 ([240]).

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si g est dérivable avec $g' \in L^\infty$, alors $f * g$ est dérivable et $(f * g)' = f * g'$.

Démonstration. La fonction qu'il faut intégrer pour obtenir $f * g$ est $f(t)g(x - t)$, dont la dérivée par rapport à x est $f(t)g'(x - t)$. La norme de cette dernière est majorée (uniformément en x) par $G(t) = |f(t)|\|g'\|_\infty$. La fonction f étant dans $L^1(\mathbb{R})$, la fonction G est intégrable et le théorème de dérivation sous l'intégrale (théorème 13.180) nous dit que $f * g$ est dérivable et

$$(f * g)'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x - t)dt = (f * g')(x). \quad (18.120)$$

$\square$

Corollaire 18.37.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si g est de classe C^∞ , alors $f * g$ est de classe C^∞ .

Démonstration. Il s'agit d'itérer la proposition 18.36. $\square$

18.4.1 Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact

Définition 18.38.

Une fonction est **étagée par rapport à L^p** si elle est de la forme

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \quad (18.121)$$

où les B_k sont des mesurables disjoints et $\mathbb{1}_{B_k} \in L^p$ pour tout k .

Lemme 18.39.

Si f est une fonction étagée en même temps qu'être dans L^p , alors elle est étagée par rapport à L^p .

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \quad (18.122)$$

où les B_k sont disjoints. Par hypothèse $\|f\|_p$ existe. Donc chacune des intégrales $\int_{\Omega} |\mathbb{1}_{B_k}|^p$ doit exister parce que les B_k étant disjoints, nous pouvons inverser la norme et la somme ainsi que la somme et l'intégrale :

$$\int_{\Omega} |f|^p = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N |c_k \mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx = \sum_{k=1}^N \int |c_k \mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx = \sum_{k=1}^N |c_k|^p \int_{\Omega} |\mathbb{1}_{B_k}(x)|^p dx. \quad (18.123)$$

□

Le contraire n'est pas vrai : la fonction étagée sur $\mathbb{R}$ qui vaut n sur $B(n, \frac{1}{4})$ est étagée par rapport à L^p , mais n'est pas dans L^p .

L'ensemble $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonction de classe C^∞ et à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est souvent également noté $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 18.40 ([236]).

Nous avons des densités emboîtées. Ici D est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ contenu dans $B(0, r)$ et K est un compact contenant $B(0, r+2)$.

- (1) Les fonctions étagées par rapport à L^p sur $\mathbb{R}^d$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. A fortiori les fonctions étagées sont denses dans L^p , mais nous n'en aurons pas besoin ici.
- (2) Il existe une suite f_n dans $C(K, \mathbb{C})$ telle que

$$f_n \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_D. \quad (18.124)$$

- (3) Si A est un borélien tel que $\mathbb{1}_A \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ⁹ et si $\epsilon > 0$, alors il existe une suite de boréliens bornée $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\mathbb{1}_{D_n} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_A. \quad (18.125)$$

- (4) Il existe une suite φ_n dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\varphi_n \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_D. \quad (18.126)$$

- (5) L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Nous allons montrer les choses point par point.

⁹. Je pense que cette hypothèse manque dans [236]. En tout cas je vois mal comment je pourrais justifier les différentes étapes de la preuve en prenant par exemple $A = \mathbb{R}^d$.

- (1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, nous savons par la proposition 7.106 qu'il existe une suite f_n de fonctions étagées convergeant ponctuellement vers f telle que $|f_n| \leq |f|$. La proposition 18.16 nous dit qu'alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

La fonction f_n étant étagée et dans L^p en même temps, elle est automatiquement étagée par rapport à L^p par le lemme 18.39.

- (2) C'est le théorème d'approximation 13.10 appliqué au borélien D contenu dans l'espace mesuré K .
- (3) En vertu du point (2), il existe $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ telle que

$$\|f - \mathbb{1}_D\|_p \leq \epsilon. \quad (18.127)$$

Ensuite, par le théorème de Weierstrass, il existe $\varphi \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \epsilon$. Nous avons aussi

$$\|\varphi - f\|_p^p = \int_K |\varphi(x) - f(x)|^p dx \leq \mu(X) \|\varphi - f\|_\infty^p \leq \epsilon^p \mu(K). \quad (18.128)$$

Quitte à prendre un φ correspondant à un ϵ plus petit, nous avons

$$\|\varphi - f\| \leq \epsilon. \quad (18.129)$$

En combinant et en passant à $\epsilon/2$ nous avons trouvé une fonction $\varphi \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ telle que

$$\|\varphi - \mathbb{1}_D\| \leq \epsilon. \quad (18.130)$$

- (4) Nous considérons les boréliens fermés $D_n = A \cap B(0, n)$. Alors $\mathbb{1}_{D_n} \in L^p$ et nous avons pour n assez grand :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{D_n}(x) - \mathbb{1}_A(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, n)} |\mathbb{1}_A(x)|^p dx < \epsilon, \quad (18.131)$$

c'est à dire que $\mathbb{1}_{D_n} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_A$.

- (5) Il suffit de remettre tout ensemble. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, par le point (2) nous commençons par prendre σ étagée par rapport à L^p telle que

$$\|\sigma - f\|_p \leq \epsilon. \quad (18.132)$$

Ensuite nous écrivons σ sous la forme

$$\sigma = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{B_k} \quad (18.133)$$

et nous appliquons le point (3) à chacune des $\mathbb{1}_{B_k}$ pour trouver des boréliens bornés D_k tels que

$$\|\mathbb{1}_{D_k} - \mathbb{1}_{B_k}\|_p \leq \epsilon. \quad (18.134)$$

Enfin nous appliquons le point (4) pour trouver des fonctions $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|\varphi_k - \mathbb{1}_{D_k}\|_p \leq \epsilon. \quad (18.135)$$

Il n'est pas compliqué de calculer que

$$\left\| \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k - f \right\|_p \leq 2\epsilon \sum_k c_k + \epsilon. \quad (18.136)$$

□

Corollaire 18.41.

Si $1 < p < \infty$ alors l'ensemble¹⁰ $L^2([0, 1]) \cap L^p([0, 1])$ est dense dans $L^p([0, 1])$.

Démonstration. Nous savons du théorème 18.40(5) que $C_c^\infty([0, 1])$ est dense dans L^p . Mais nous avons évidemment $C_c^\infty \subset L^2 \cap L^p$, donc $L^2 \cap L^p$ est dense dans L^p . $\square$

Lemme 18.42.

Soit $f \in L^2(I)$ telle que

$$\int_I f \varphi = 0 \quad (18.137)$$

pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Alors $f = 0$ presque partout sur I .

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire

$$\begin{aligned} \phi: L^2(I) &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g}. \end{aligned} \quad (18.138)$$

Par densité¹¹ nous pouvons aussi considérer une suite (φ_n) dans $C_c^\infty(I)$ convergent vers f dans L^2 . Alors nous avons pour tout n :

$$\langle f, \varphi_n \rangle = 0. \quad (18.139)$$

En passant à la limite, $\langle f, f \rangle = 0$, ce qui implique $f = 0$ dans L^2 et donc $f = 0$ presque partout en tant que bonne fonction. $\square$

Ce résultat est encore valable dans les espaces L^p (proposition 18.50), mais il demande le théorème de représentation de Riesz¹².

Lemme 18.43 ([236]).

Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\Omega)$. Nous notons τ_v l'opérateur de translation par v :

$$\tau_v f: x \mapsto f(x - v). \quad (18.140)$$

Alors sans surprises,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \|\tau_v - f\|_p = 0. \quad (18.141)$$

18.4.2 Dualité et théorème de représentation de Riesz

Dans la suite E' est le dual topologique, c'est à dire l'espace des formes linéaires et continues sur E .

Proposition 18.44.

Soit un espace mesuré σ -fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une fonction $f \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega f \varphi = 0 \quad (18.142)$$

pour tout $\varphi \in L^q(\Omega)$. Alors $f = 0$.

Démonstration. Vu que Ω est σ -finie, nous pouvons considérer des parties K_n de Ω telles que $\mu(K_n) < \infty$ et $\bigcup_n K_n = \Omega$. Nous posons

$$A_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } \operatorname{Re}(f(x)) > 0\} \cap K_n. \quad (18.143)$$

¹⁰. Nous parlons bien ici de l'ensemble L^2 parce que nous le considérons sans norme ou topologie particulière. La densité dont nous parlons ici est celle pour la topologie de L^p .

¹¹. Théorème 18.40(5).

¹². Théorème 18.49.

Cela est une partie mesurable de mesure finie de Ω , donc $\varphi_n = \mathbb{1}_{A_n} \in L^q(\Omega)$ et nous avons

$$\int_{A_n} f = 0. \quad (18.144)$$

Mais $\operatorname{Re}(f) > 0$ sur A_n , donc $\mu(A_n) = 0$. Ensuite nous passons à l'union :

$$A = \{x \in \Omega \text{ tel que } \operatorname{Re}(f(x)) > 0\} = \bigcup_n A_n. \quad (18.145)$$

Ce ensemble est union dénombrable d'ensembles de mesure nulle ; donc $\mu(A) = 0$. Nous faisons de même pour les ensembles $\operatorname{Re}(f) < 0$, $\operatorname{Im}(f) > 0$ et $\operatorname{Im}(f) < 0$. Au final, l'ensemble $\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$ est de mesure nulle, c'est à dire que $f = 0$ au sens des classes de L^p . $\square$

Proposition 18.45 ([2]).

Soit $1 < p < 2$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : L^q([0, 1]) &\rightarrow L^p([0, 1])' \\ \Phi_g(f) &= \int_{[0, 1]} f \bar{g}. \end{aligned} \quad (18.146)$$

est une isométrie linéaire surjective.

Démonstration. Pour la simplicité des notations nous allons noter L^2 pour $L^2([0, 1])$, et pareillement pour L^p .

Φ_g est un élément de $(L^p)'$ Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ nous devons prouver que $\Phi_g(f)$ est bien définie. Pour cela nous utilisons l'inégalité de Hölder¹³ qui dit que $fg \in L^1$; par conséquent la fonction $f\bar{g}$ est également dans L^1 et nous avons

$$|\Phi_g(f)| \leq \int_{[0, 1]} |f\bar{g}| = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (18.147)$$

En ce qui concerne la norme de l'application Φ_g nous avons tout de suite

$$\|\Phi_g\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Phi_g(f)| \leq \|g\|_q. \quad (18.148)$$

Cela signifie que l'application Φ_g est bornée et donc continue par la proposition 6.217. Nous avons donc bien $\Phi_g \in (L^p)'$.

Isométrie Afin de prouver que $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$ nous allons trouver une fonction $f \in L^p$ telle que $\frac{|\Phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q$. De cette façon nous aurons prouvé que $|\Phi_g| \geq \|g\|_q$, ce qui conclurait que $|\Phi_g| = \|g\|_q$.

Nous posons $f = g|g|^{q-2}$, de telle sorte que $|f| = |g|^{q-1}$ et

$$\|f\|_p = \left(\int |g|^{p(q-1)} \right)^{1/p} = \left(\int |g|^q \right)^{1/p} = \|g\|_q^{q/p} \quad (18.149)$$

où nous avons utilisé le fait que $p(q-1) = q$. La fonction f est donc bien dans L^p . D'autre part,

$$\Phi_g(f) = \int f \bar{g} = \int g|g|^{q-2} \bar{g} = \int |g|^q = \|g\|_q^q. \quad (18.150)$$

Donc

$$\frac{|\Phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|g\|_q \quad (18.151)$$

où nous avons encore utilisé le fait que $q - \frac{q}{p} = \frac{q(p-1)}{p} = 1$.

13. Proposition 18.20.

Surjectif Soit $\ell \in (L^p)'$; c'est une application $\ell: L^p \rightarrow \mathbb{C}$ dont nous pouvons prendre la restriction à L^2 parce que la proposition 18.24 nous indique que $L^2 \subset L^p$. Nous nommons $\phi: L^2 \rightarrow \mathbb{C}$ cette restriction.

$\phi \in (L^2)'$ Nous devons montrer que ϕ est continue pour la norme sur L^2 . Pour cela nous montrons que sa norme opérateur (subordonnée à la norme de L^2 et non de L^p) est finie :

$$\sup_{f \in L^2} \frac{|\phi(f)|}{\|f\|_2} \leq \sup_{f \in L^2} \frac{|\ell(f)|}{\|f\|_p} < \infty. \quad (18.152)$$

Nous avons utilisé l'inégalité de norme $\|f\|_p \leq \|f\|_2$ de la proposition 18.24(2).

Utilisation du dual de L^2 Étant donné que L^2 est un espace de Hilbert (lemme 18.29) et que $\phi \in (L^2)'$, le théorème 17.19 nous donne un élément $g \in L^2$ tel que $\phi(f) = \Phi_g(f)$ pour tout $f \in L^2$.

Nous devons prouver que $g \in L^q$ et que pour tout $f \in L^p$ nous avons $\ell(f) = \Phi_g(f)$.

$g \in L^q$ Nous posons $f_n = g|g|^{q-2} \mathbb{1}_{|g| < n}$. Nous avons d'une part

$$\Phi_g(f_n) = \int_0^1 f_n \bar{g} = \int_{|g| < n} |g|^q. \quad (18.153)$$

Et d'autre part comme $f_n \in L^2$ nous avons aussi $\phi(f_n) = \Phi_g(f_n)$ et donc

$$0 \leq \Phi(f_n) = \phi(f_n) \leq \|\ell\| \|f_n\|_p \quad (18.154a)$$

$$= \|\ell\| \left(\int_{|g| < n} |g|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \quad (18.154b)$$

$$= \|\ell\| \left(\int_{|g| < n} |g|^q \right)^{1/p}. \quad (18.154c)$$

où nous avons à nouveau tenu compte du fait que $p(q-1) = q$. En combinant avec (18.153) nous trouvons

$$\int_{|g| < n} |g|^q \leq \|\ell\| \left(\int_{|g| < n} |g|^q \right)^{1/p}, \quad (18.155)$$

et donc

$$\left(\int_{|g| < n} |g|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\ell\|, \quad (18.156)$$

c'est à dire

$$\left(\int_{|g| < n} |g|^q \right)^{1/q} \leq \|\ell\|. \quad (18.157)$$

Si ce n'était pas encore fait nous nous fixons un représentant de la classe g (qui est dans L^2), et nous nommons également g ce représentant. Nous posons alors

$$g_n = |g|^q \mathbb{1}_{|g| < n} \quad (18.158)$$

qui est une suite croissante de fonctions convergeant ponctuellement vers $|g|^q$. Le théorème de Beppo-Levi 7.129 nous permet alors d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|g| < n} |g|^q = \int_0^1 |g|^q. \quad (18.159)$$

Mais comme pour chaque n nous avons $\int_{|g| < n} |g|^q \leq \|\ell\|^q$, nous conservons l'inégalité à la limite et

$$\int_0^1 |g|^q \leq \|\ell\|^q. \quad (18.160)$$

Cela prouve que $g \in L^p$.

$\ell(f) = \Phi_g(f)$ Soit $f \in L^p$. En vertu de la densité de L^2 dans L^p prouvée dans le corollaire 18.41 nous pouvons considérer une suite (f_n) dans L^2 telle que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Pour tout n nous avons

$$\ell(f_n) = \Phi_g(f_n). \quad (18.161)$$

Mais ℓ et Φ_g étant continues sur L^p nous pouvons prendre la limite et obtenir

$$\ell(f) = \Phi_g(f). \quad (18.162)$$

□

Lemme 18.46 ([29]).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $X \subset \Omega$ une partie de mesure $\mu(X) < \infty$. Soit $g \in L^1(\Omega)$ et S fermé dans $\mathbb{C}$. Si pour tout $E \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu \in S, \quad (18.163)$$

alors $g(x) \in S$ pour presque tout $x \in X$.

Démonstration. Soit $D = \overline{B(a, r)}$ un disque fermé dans le complémentaire de S (ce dernier étant fermé, le complémentaire est ouvert). Posons $E = g^{-1}(D)$. Prouvons que $\mu(E) = 0$ parce que cela prouverait que $g(x) \in D$ pour seulement un ensemble de mesure nulle. Mais S^c pouvant être écrit comme une union dénombrable de disques fermés¹⁴, nous aurions $g(x) \in S^c$ presque nulle part.

Vu que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E a = a$ nous avons

$$\left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu - a \right| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E (g - a) \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g - a| \leq \frac{1}{\mu(E)} \mu(E) r = r. \quad (18.164a)$$

Donc

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu \in D, \quad (18.165)$$

ce qui est une contradiction avec le fait que $D \subset S^c$. □

Théorème 18.47 ([29, 184]).

Soit $1 \leq p < \infty$ et un espace mesuré fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi: L^q &\rightarrow (L^p)' \\ \Phi_g(f) &= \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu \end{aligned} \quad (18.166)$$

est une bijection isométrique.

Note : ici nous considérons dans L^p des fonctions à valeurs complexes, et donc les éléments du dual sont des applications linéaires continues à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que Φ est injectif. Soient $g, g' \in L^q$ tels que $\Phi_g = \Phi_{g'}$. Alors pour tout $f \in L^p$ nous avons

$$\int_{\Omega} f(g - g') d\mu = 0. \quad (18.167)$$

En particulier pour tout ensemble mesurable A dans Ω , $\int_A (g - g') d\mu = 0$ parce que $\mathbb{1}_A \in L^p(\Omega)$ parce que nous avons supposé que l'espace était fini. La proposition 18.44 nous dit alors que $g - g' = 0$ dans L^q .

La partie difficile est de montrer que Φ est surjective.

Soit $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Si $\phi = 0$, c'est bien dans l'image de Φ ; nous supposons donc que non. Nous allons commencer par prouver qu'il existe une (classe de) fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que $\Phi_g(f) = \phi(f)$ pour tout $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$; nous montrerons ensuite que $g \in L^q$ et que le tout est une isométrie.

¹⁴. Tout ouvert peut être écrit comme union dénombrable d'éléments d'une base de topologie par la proposition 5.16 et $\mathbb{C}$ a une base dénombrable de topologie par la proposition 5.43.

Une mesure complexe Si $E \in \mathcal{A}$ nous notons $\nu(E) = \phi(\mathbb{1}_E)$. Nous prouvons maintenant que ν est une mesure complexe¹⁵ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La seule condition pas facile est la condition de dénombrable additive. Il est déjà facile de voir que A et B sont disjoints, $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. Soient ensuite des ensembles A_n deux à deux disjoints et posons $E_k = \bigcup_{i \leq k} A_i$ pour avoir $\bigcup_k A_k = \bigcup_k E_k$ avec l'avantage que les E_k soient emboîtés. Cela donne

$$\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_k}\|_p = \mu(E \setminus E_k)^{1/p}, \quad (18.168)$$

mais vu que $1 \leq p < \infty$, avoir $x_k \rightarrow 0$ implique d'avoir $x_k^{1/p} \rightarrow 0$. Prouvons que $\mu(E \setminus E_k) \rightarrow 0$. En vertu du lemme 7.26 nous avons pour chaque k :

$$\mu(E \setminus E_k) = \mu(E) - \mu(E_k), \quad (18.169)$$

et vu que $E_k \rightarrow E$ est une suite croissante, le lemme 7.27(1), sachant que μ est une mesure « normale », donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \mu\left(\bigcup_k E_k\right). \quad (18.170)$$

Donc effectivement $\mu(E_k) \rightarrow \mu(E)$ et donc oui : $\mu(E \setminus E_k) \rightarrow 0$. Jusqu'à présent nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_k}\|_p = 0, \quad (18.171)$$

c'est à dire $\mathbb{1}_{E_k} \xrightarrow{L^p} \mathbb{1}_E$. La continuité de ϕ sur L^p donne alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(\mathbb{1}_{E_k}) = \phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{E_k}\right) = \phi(\mathbb{1}_E) = \nu(E). \quad (18.172)$$

Par additivité finie de ν nous avons

$$\nu(E_k) = \sum_{i \leq k} \nu(A_i) \quad (18.173)$$

et en passant à la limite, $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \nu(\bigcup_i A_i)$. L'application ν est donc une mesure complexe.

Mesure absolument continue En prime, si $\mu(E) = 0$ alors $\nu(E) = 0$ parce que

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \|\mathbb{1}_E\|_p = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_E = 0 \text{ (dans } L^p) \Rightarrow \phi(\mathbb{1}_E) = 0 \quad (18.174)$$

Utilisation de Radon-Nikodym Nous sommes donc dans un cas où $\nu \ll \mu$ et nous utilisons le théorème de Radon-Nikodym 13.8 sous la forme de la remarque 13.9 : il existe une fonction intégrable $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ¹⁶ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \int_A \bar{g} d\mu. \quad (18.175)$$

C'est à dire que

$$\phi(\mathbb{1}_A) = \int_A \bar{g} d\mu = \int_{\Omega} \bar{g} \mathbb{1}_A d\mu. \quad (18.176)$$

Nous avons donc exprimé ϕ comme une intégrale pour les fonctions caractéristiques d'ensembles.

Pour les fonctions étagées Par linéarité si f est mesurable et étagée nous avons aussi

$$\phi(f) = \int f \bar{g} d\mu = \Phi_g(f). \quad (18.177)$$

15. Définition 13.7.

16. On peut écrire, pour utiliser de la notation compacte que $g \in L^1(\Omega, \mathbb{C})$.

Pour $f \in L^\infty(\Omega)$ Une fonction $f \in L^\infty$ est une fonction presque partout bornée. Nous supposons que f est presque partout bornée par M . Par ailleurs cette f est limite uniforme de fonctions étagées : $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$ en posant $f_k = f \mathbb{1}_{|f| \leq k}$. Pour chaque k nous avons l'égalité

$$\Phi_g(f_k) = \phi(f_k). \quad (18.178)$$

Par ailleurs la fonction $f_k \bar{g}$ est majorée par la fonction intégrable $M \bar{g}$ et le théorème de la convergence dominée 7.134 nous donne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_g(f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k \bar{g} = \int f \bar{g} = \Phi_g(f). \quad (18.179)$$

Et la continuité de ϕ sur L^p couplée à la convergence $f_k \xrightarrow{L^p} f$ donne $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(f_k) = \phi(f)$. Bref prendre la limite dans (18.178) donne

$$\Phi_g(f) = \phi(f) \quad (18.180)$$

pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$.

La suite ... Voici les prochaines étapes.

- Nous avons $\int f \bar{g} = \phi(f)$ tant que $f \in L^\infty$. Nous allons étendre cette formule à $f \in L^p$ par densité. Cela terminera de prouver que notre application est une bijection.
- Ensuite nous allons prouver que $\|\phi\| = \|\Phi_g\|$, c'est à dire que la bijection est une isométrie.

De L^∞ à L^p Soit $f \in L^p$. Si nous avons une suite (f_n) dans L^∞ telle que $f_n \xrightarrow{L^p} f$ alors $\lim \phi(f_n) = \phi(f)$ par continuité de ϕ . La difficulté est de trouver une telle suite de façon à pouvoir permuter l'intégrale et la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n \bar{g} = \int_\Omega \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \bar{g} = \int_\Omega f \bar{g} = \Phi_g(f). \quad (18.181)$$

Nous allons donc maintenant nous atteler à la tâche de trouver $f_n \in L^\infty$ avec $f_n \xrightarrow{L^p} f$ et telle que (18.181) soit valide.

Nous allons d'abord supposer que $f \in L^p$ est positive à valeurs réelles. Nous avons alors par la proposition 7.106 qu'il existe une suite croissante de fonction étagées (et donc L^∞) telles que $f_n \rightarrow f$ ponctuellement. De plus étant donné que $|f_n| \leq |f|$, la proposition 18.16 nous dit que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Pour chaque n nous avons

$$\int_\Omega f_n \bar{g} = \phi(f_n). \quad (18.182)$$

Soit g^+ la partie réelle positive de $\bar{g}$. Alors nous avons la limite croissante ponctuelle $f_n g^+ \rightarrow f g^+$ et le théorème de la convergence monotone 7.129 nous permet d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n g^+ = \int f g^+. \quad (18.183)$$

Faisant cela pour les trois autres parties de $\bar{g}$ nous avons prouvé que si $f \in L^p$ est réelle et positive,

$$\int f \bar{g} = \phi(f), \quad (18.184)$$

c'est à dire que $\Phi_g(f) = \phi(f)$.

Refaisant le tout pour les trois autres parties de f nous montrons que

$$\Phi_g(f) = \phi(f) \quad (18.185)$$

pour tout $f \in L^p(\Omega)$. Nous avons donc égalité de ϕ et Φ_g dans $(L^p)'$ et donc bijection entre $(L^p)'$ et L^q .

Isométrie : mise en place Nous devons prouver que cette bijection est isométrique. Soit $\phi \in (L^p)'$ et $g \in L^q$ telle que $\Phi_g = \phi$. Il faut prouver que

$$\|g\|_q = \|\phi\|_{(L^p)'}. \quad (18.186)$$

$\frac{\|\phi\|}{(L^p)'} \leq \|g\|_q$ Nous savons que $\phi(f) = \int f \bar{g}$, et nous allons écrire la définition de la norme dans $(L^p)'$:

$$\|\phi\|_{(L^p)'} = \sup_{\|f\|_p=1} |\phi(f)| \quad (18.187a)$$

$$= \sup \left| \int f \bar{g} \right| \quad (18.187b)$$

$$\leq \sup \underbrace{\left| \int f \bar{g} \right|}_{=\|f \bar{g}\|_1}. \quad (18.187c)$$

Il s'agit maintenant d'utiliser l'inégalité de Hölder 18.20 :

$$\|\phi\| \leq \sup_{\|f\|_p=1} \|f\|_p \|\bar{g}\|_q = \|g\|_q. \quad (18.188)$$

L'inégalité dans l'autre sens sera démontrée en séparant les cas $p = 1$ et $1 < p < \infty$.

Si $p = 1$ Si E est un ensemble mesurable, alors

$$\left| \int_E g d\mu \right| = |\phi(\mathbb{1}_E)|. \quad (18.189)$$

Mais le fait que $\mu(\Omega) < \infty$ donne que $\mathbb{1}_E \in L^1(\Omega)$. Donc $\mathbb{1}_E \in L^\infty \cap L^1$; nous pouvons alors écrire $\phi(\mathbb{1}_E) = \int_\Omega \mathbb{1}_E \bar{g} d\mu$ et donc

$$\left| \int_\Omega \mathbb{1}_E \bar{g} d\mu \right| = \left| \int_E g d\mu \right| = |\phi(\mathbb{1}_E)| \leq \|\phi\|_{(L^1)'} \|\mathbb{1}_E\|_1 = \|\phi\| \mu(E). \quad (18.190)$$

Pour utiliser le lemme 18.46, nous écrivons cela dans l'autre sens :

$$\|\phi\| \geq \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_\Omega \mathbb{1}_E \bar{g} d\mu \right| = \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E \bar{g} d\mu \right|. \quad (18.191)$$

Si nous prenons $S = \{t \in \mathbb{C} \text{ tel que } |t| \leq \|\phi\|\}$, c'est un fermé vérifiant que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \bar{g} d\mu \in S, \quad (18.192)$$

donc $\bar{g} \in S$ presque partout, ce qui signifie que $\|g\|_\infty \in S$. Nous en concluons que

$$\|g\|_\infty \leq \|\phi\| \quad (18.193)$$

et donc que $g \in L^\infty$.

Notons que cet argument ne tient pas avec $p \neq 1$ parce que l'équation (18.190) terminerait sur $\|\phi\| \mu(E)^{1/p}$. Du coup l'ensemble S à prendre serait $S = \{t \in \mathbb{C} \text{ tel que } |t| \leq \|\phi\| \mu(E)^{1/p-1}\}$ et nous sommes en dehors des hypothèses du lemme parce qu'il n'y a pas d'ensemble *indépendant* de E dans lequel l'intégrale $\frac{1}{\mu(E)} \int_E \bar{g} d\mu$ prend ses valeurs.

$1 < p < \infty$ La fonction

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases} \quad (18.194)$$

a la propriété de faire $\alpha g = |g|$ en même temps que $|\alpha(x)| = 1$ pour tout x . Nous définissons

$$E_n = \{x \text{ tel que } |g(x)| \leq n\} \quad (18.195)$$

et

$$f_n = \mathbb{1}_{E_n} |g^{q-1}| \alpha. \quad (18.196)$$

Ce qui est bien avec ces fonctions c'est que¹⁷

$$|f_n|^p = |g^{p(q-1)}| \alpha^p = |g|^q \quad (18.197)$$

sur E_n . Dans E_n nous avons $|f_n| = |g^{q-1}| \leq n^{q-1}$ et dans E_n nous avons $f_n = 0$. Au final, $f_n \in L^\infty$. Par ce que nous avons vu plus haut, nous avons alors

$$\phi(f_n) = \Phi_g(f_n). \quad (18.198)$$

Par ailleurs,

$$f_n \bar{g} = \mathbb{1}_{E_n} |g^{q-1}| \frac{g}{|g|} \bar{g}, \quad (18.199)$$

donc¹⁸

$$\left| \int_{E_n} |g|^q d\mu \right| = \left| \int_{\Omega} f_n \bar{g} d\mu \right| = |\phi(f_n)| \leq \|\phi\| \|f_n\|_p = \|\phi\| \left(\int_{E_n} |f_n|^p \right)^{1/p} = \|\phi\| \left(\int_{E_n} |g|^q \right)^{1/p}. \quad (18.200)$$

Nous avons de ce fait une inégalité de la forme $A \leq \|\phi\| A^{1/p}$ et donc aussi $A^{1/p} \leq \|\phi\|^{1/p} A^{1/p^2}$, et donc $A \leq \|\phi\| \|\phi\|^{1/p} A^{1/p^2}$. Continuant ainsi à injecter l'inégalité dans elle-même,

$$\left| \int_{E_n} |g|^q d\mu \right| \leq \|\phi\|^{1+\frac{1}{p}+\dots+\frac{1}{p^k}} \left(\int_{E_n} |g|^q d\mu \right)^{1/p^k}. \quad (18.201)$$

Nous pouvons passer à la limite $k \rightarrow \infty$. Sachant que $p > 1$ nous savons $A^{1/k} \rightarrow 1$ et

$$1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^k} \rightarrow \frac{p}{p-1} = q. \quad (18.202)$$

Nous avons alors

$$\int_{E_n} |g|^q d\mu \leq \|\phi\|^q. \quad (18.203)$$

L'intégrale s'écrit tout aussi bien sous la forme $\int_{\Omega} |g|^q \mathbb{1}_{E_n}$. La fonction dans l'intégrale est une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Nous pouvons alors permuter l'intégrale et la limite $n \rightarrow \infty$ en utilisant la convergence monotone (théorème 7.129) qui donne alors $\int_{\Omega} |g|^q \leq \|\phi\|^q$ ou encore

$$\|g\|_q \leq \|\phi\|. \quad (18.204)$$

Ceci achève de prouver que l'application $\phi \mapsto \Phi_g$ est une isométrie, et donc le théorème. □

Définition 18.48.

Un espace V est **réflexif** si l'injection naturelle $V \rightarrow V'$ est surjective.

Théorème 18.49 (Théorème de représentation de Riesz[241, 136]).

Nous considérons pour ce théorème des fonctions à valeurs réelles.

Soit l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $1 < p < \infty$.

(1) L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

17. C'est ici que nous utilisons le lien entre p et q . En l'occurrence, de $1/p + 1/q = 1$ nous déduisons $q(p-1) = p$.

18. Dans [29], cette équation arrive sans modules, ce qui me laisse entendre que $\phi(f_n)$ est réel et positif pour pouvoir écrire que $\phi(f_n) \leq \|\phi\| \|f_n\|_p$, mais je ne comprends pas pourquoi.

(2) Si q est le nombre tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors l'application

$$\begin{aligned}\Phi: L^q &\rightarrow (L^p)' \\ u &\mapsto \left(\Phi_u: f \rightarrow \int_{\Omega} f u \, d\mu \right)\end{aligned}\tag{18.205}$$

est une bijection isométrique.

Si μ est une mesure σ -finie, alors

$$(1) \quad (L^1)' = L^\infty$$

(2) $L^1 \subset (L^\infty)'$ avec une inclusion stricte sauf dans les cas triviaux.

Proposition 18.50.

Soit $f \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} f \varphi = 0 \tag{18.206}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Alors $f = 0$ presque partout.

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire $\Phi_f \in (L^q)'$ donnée par

$$\begin{aligned}\Phi_f: L^p &\rightarrow \mathbb{C} \\ u &\mapsto \int_{\Omega} f u\end{aligned}\tag{18.207}$$

Par hypothèse cette forme est nulle sur la partie dense $C_c^\infty(\Omega)$. Si (φ_n) est une suite dans $C_c^\infty(\Omega)$ convergente vers u dans L^p , nous avons pour tout n que

$$0 = \Phi_f(\varphi_n) \tag{18.208}$$

En passant à la limite, nous voyons que Φ_f est la forme nulle. Elle est donc égale à Φ_0 . La partie « unicité » du théorème de représentation de Riesz 18.49 nous indique alors que $f = 0$ dans L^p et donc $f = 0$ presque partout. $\square$

Proposition 18.51.

Si $f \in L^1_{loc}(I)$ est telle que

$$\int_I f \varphi' = 0 \tag{18.209}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$, alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout.

Démonstration. Soit $\psi \in C_c^\infty(I)$ une fonction d'intégrale 1 sur I . Si $w \in C_c^\infty(I)$ alors nous considérons la fonction

$$h = w - \psi \int_I w, \tag{18.210}$$

qui est dans $C_c^\infty(I)$ et dont l'intégrale sur I est nulle. Par la proposition 16.94, la fonction h admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$; et nous notons φ cette primitive. L'hypothèse appliquée à φ donne

$$0 = \int_I f \varphi' = \int_I f \left(w - \psi \int_I w \right) = \int_I f w - \underbrace{\left(\int_I f(x) \psi(x) dx \right)}_C \left(\int_I w(y) dy \right) = \int_I w(f - C). \tag{18.211}$$

L'annulation de la dernière intégrale implique par la proposition 18.50 que $f - C = 0$ dans L^2 , c'est à dire $f = C$ presque partout. $\square$

18.4.3 Approximation de l'unité

Nous considérons $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou $(S^1)^d$.

Définition 18.52.

Une **approximation de l'unité** sur Ω est une suite (φ_n) dans $L^1(\Omega)$ telle que

$$\sup_k \|\varphi_k\|_1 < \infty \quad (18.212a)$$

$$\int_{\Omega} \varphi_n = 1 \quad (18.212b)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus B(0, \alpha)} |\varphi_k| = 0 \quad (18.212c)$$

pour tout n et pour tout $\alpha > 0$.

Ce sont des fonctions dont la masse vient s'accumuler autour de zéro. En effet quel que soit le voisinage $B(0, \alpha)$, si k est assez grand, il n'y a presque plus rien en dehors.

Pour le point 18.212b, si Ω est S^1 , la mesure que nous considérons est $\frac{dx}{2\pi}$.

Exemple 18.53

Une façon de construire une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$ est de considérer une fonction $\varphi \in L^1(\Omega)$ telle que $\int \varphi = 1$ puis de poser

$$\varphi_k(x) = k^d \varphi(kx). \quad (18.213)$$

Ici, Ω peut être $\mathbb{R}$ ou S^1 . △

Le lemme suivant permet de construire des approximations de l'unité intéressantes.

Lemme 18.54 ([236]).

Si nous posons

$$\varphi_n(x) = \left(\int \varphi(y)^n \right)^{-1} \varphi(x)^n, \quad (18.214)$$

alors nous obtenons une approximation de l'unité dans les deux cas suivants :

- (1) Soit φ une fonction continue et positive sur S^1 telle que $\varphi(x) < \varphi(0)$ pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas la mesure à prendre pour l'intégrale est $\frac{dy}{2\pi}$.
- (2) Soit φ est une fonction continue et positive à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi(x) > \varphi(0)$ pour tout $x \neq 0$.

Théorème 18.55 ([236]).

Soit (φ_k) une approximation de l'unité sur $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou $(S^1)^d$.

- (1) Si g est mesurable et bornée sur Ω et si g est continue en x_0 alors

$$(\varphi_k * g)(x_0) \rightarrow g(x_0). \quad (18.215)$$

- (2) Si $g \in L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^p} g. \quad (18.216)$$

- (3) Si g est uniformément continue et bornée, alors

$$\varphi_k * g \xrightarrow{L^\infty} g \quad (18.217)$$

Démonstration. Les trois points vont se ressembler.

- (1) Nous notons $d_k = (\varphi_k * g)(x_0) - g(x_0)$ et nous devons prouver que $d_k \rightarrow 0$. Vu que φ_k est d'intégrale 1 sur Ω nous pouvons écrire

$$|d_k| = \left| \int_{\Omega} (g(x_0 - y) - g(x_0)) \varphi_k(y) dy \right| \leq \int_{\Omega} |g(x_0 - y) - g(x_0)| |\varphi_k(y)| dy. \quad (18.218)$$

Nous notons $M = \sup_k \|\varphi_k\|_1$, et nous considérons $\alpha > 0$ tel que

$$|g(x_0 - y) - g(x_0)| \leq \epsilon. \quad (18.219)$$

Nous nous restreignons maintenant aux k suffisamment grands pour que $\int_{\mathbb{C}B(0,\alpha)} |\varphi_k(y)| dy \leq \epsilon$. Alors en découpant l'intégrale en $B(0, \alpha)$ et son complémentaire dans Ω ,

$$|d_k| \leq \epsilon M + \int_{\mathbb{C}B(0,\alpha)} 2\|g\|_{\infty} |\varphi_k(y)| dy \leq \epsilon M + 2\|g\|_{\infty} \epsilon \leq \epsilon C. \quad (18.220)$$

Donc oui, nous avons $|d_k| \rightarrow 0$, et donc le premier point du théorème.

- (2) Nous posons $d_k(x) = (\varphi_k * g)(x) - g(x)$ et nous voulons prouver que $\|d_k\|_{\infty} \rightarrow 0$, c'est à dire que $d_k(x)$ converge vers zéro uniformément en x . Nous posons aussi

$$\tau_y(g) : x \mapsto g(x - y). \quad (18.221)$$

En récrivant le produit de convolution, une petite majoration donne

$$|d_k(x)| \leq \int_{\Omega} \|\tau_y(g) - g\|_{\infty} |\varphi_k(y)| dy. \quad (18.222)$$

L'uniforme continuité de g signifie que pour tout ϵ , il existe un α tel que pour tout $y \in B(0, \alpha)$,

$$\|\tau_y(g) - g\|_{\infty} \leq \epsilon. \quad (18.223)$$

Encore une fois nous découpons le domaine d'intégration en $B = B(0, \alpha)$ et son complémentaire :

$$\|d_k\|_{\infty} \leq \int_B \underbrace{\|\tau_y(g) - g\|_{\infty}}_{\leq \epsilon} |\varphi_k(y)| dy + \int_{\mathbb{C}B} \underbrace{\|\tau_y(g) - g\|_{\infty}}_{\leq 2\|g\|_{\infty}} |\varphi_k(y)| dy \quad (18.224a)$$

$$\leq \epsilon M + 2\|g\|_{\infty} \epsilon \quad (18.224b)$$

où la seconde ligne est justifiée par le choix d'un k assez grand pour que $\int_{\mathbb{C}B} |\varphi_k(y)| dy \leq \epsilon$. Nous avons donc bien $\|d_k\|_{\infty} \rightarrow 0$.

- (3) Cette fois $g \in L^p(\Omega)$ et nous cherchons à montrer que $\|d_k\|_p \rightarrow 0$. Encore qu'ici d_k soit défini à partir d'un représentant dans la classe de g et que d'ailleurs, nous allons travailler avec ce représentant.

D'abord nous développons un peu ce d_k :

$$\|d_k\|_p = \left[\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} (g(x - y) - g(x)) \varphi_k(y) dy \right|^p dx \right]^{1/p} \quad (18.225a)$$

$$\leq \left[\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |g(x - y) - g(x)| \cdot |\varphi_k(y)| dy \right)^p dx \right]^{1/p}. \quad (18.225b)$$

À cette dernière expression nous appliquons l'inégalité de Minkowski (théorème 18.23) sous la forme (18.53) pour la norme $d\nu(y) = |\varphi_k(y)| dy$ et $f(x, y) = g(x - y) - g(x)$:

$$\|d_k\|_p \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |g(x - y) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} |\varphi_k(y)| dy = \int_{\Omega} \|\tau_y g - g\|_p |\varphi_k(y)| dy. \quad (18.226)$$

Par le lemme 18.43 nous pouvons trouver $\alpha > 0$ tel que $\|\tau_y g - g\|_p \leq \epsilon$ pour tout $y \in B(0, \alpha)$. Avec cela nous découpons encore le domaine d'intégration :

$$\|d_k\|_p \leq \int_{B(0,\alpha)} \underbrace{\|\tau_y g - g\|_p}_{\leq \epsilon} |\varphi_k(y)| dy + \int_{\mathbb{C}B(0,\alpha)} \underbrace{\|\tau_y g - g\|_p}_{\leq 2\|g\|_p} |\varphi_k(y)| dy \leq \epsilon M + 2\epsilon \|g\|_p. \quad (18.227)$$

□

Une petite remarque en passant : aussi triste que cela en ait l'air, la convergence uniforme n'implique pas la convergence $L^p(\Omega)$ si Ω n'est pas borné. En effet si $f \in L^p$, la suite donnée par

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \quad (18.228)$$

converge uniformément vers f , mais

$$\|f_n - f\|_p = \int_{\Omega} \frac{1}{n} \quad (18.229)$$

n'existe même pas si le domaine Ω n'est pas borné.

18.4.4 Densité des polynôme trigonométrique

Nous allons beaucoup travailler avec le **système trigonométrique** donné par $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et

$$e_n(t) = e^{int}. \quad (18.230)$$

Une bonne partie de la douleur qu'évoque mot « densité » consiste à montrer que ce système est total dans $L^2(S^1) = L^2([0, 2\pi])$, et donc en est une base hilbertienne. Un **polynôme trigonométrique** est une fonction de la forme $P = \sum_{k=-N}^N P_k e_k$ pour des constantes P_k .

Un **polynôme trigonométrique** est une fonction de la forme

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}. \quad (18.231)$$

Lemme 18.56.

Deux petits résultats simples mais utiles à propos des polynômes trigonométriques.

(1) Si $f \in L^1(S^1)$, alors nous avons la formule

$$f * e_n = c_n(f) e_n. \quad (18.232)$$

(2) Si P est un polynôme trigonométrique et si $f \in L^1(S^1)$ alors $f * P$ est encore un polynôme trigonométrique.

Démonstration. Le premier point est un simple calcul :

$$(f * e_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) e_n(t) dt \quad (18.233a)$$

$$= e^{inx} \int_0^{2\pi} f(x-t) e^{-in(x-t)} dt \quad (18.233b)$$

$$= c_n(f) e_n(x). \quad (18.233c)$$

En ce qui concerne le second point, nous notons $P = \sum_{k=-N}^N P_k e_k$, et par linéarité de la convolution,

$$f * P = \sum_{k=-N}^N P_k f * e_k = \sum_{k=-N}^n c_k(f) e_k, \quad (18.234)$$

qui est encore un polynôme trigonométrique. □

Exemple 18.57

Sur S^1 nous construisons alors l'approximation de l'unité basée sur la fonction $1 + \cos(x)$ et le lemme 18.54. Cette fonction est évidemment un polynôme trigonométrique parce que

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (18.235)$$

Ensuite les puissances le sont aussi à cause de la formule du binôme :

$$(1 + \cos(x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k(x), \quad (18.236)$$

dans laquelle nous pouvons remettre $\cos(x)$ comme un polynôme trigonométrique et développer à nouveau la puissance avec (encore) la formule du binôme. La chose importante est qu'il existe une approximation de l'unité (φ_n) formée de polynômes trigonométriques.

Ce qui fait la spécificité des polynômes trigonométriques est qu'ils sont à la fois stables par convolution (lemme 18.56) et qu'ils permettent de créer une approximation de l'unité sur $[0, 2\pi]$. Ce sont ces deux choses qui permettent de prouver l'important théorème suivant. $\triangle$

Théorème 18.58.

Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Soit $f \in L^p(S^1) = L^p([0, 2\pi])$, et (φ_n) une approximation de l'unité sur S^1 formée de polynômes trigonométriques, par exemple ceux de l'exemple 18.57. D'abord $\varphi_k * f$ est un polynôme trigonométrique par le lemme 18.56, et ensuite nous avons convergence

$$\varphi_k * f \xrightarrow{L^p} f \quad (18.237)$$

par le théorème 18.55. Nous avons donc convergence L^p d'une suite de polynômes trigonométriques, ce qui prouve que l'espace de polynômes trigonométriques est dense dans $L^p(S^1)$. $\square$

Remarque 18.59.

Deux remarques.

- Il n'est pas possible que les polynômes trigonométriques soient denses dans L^∞ parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue (c'est le théorème 11.233).
- Nous donnerons au théorème 20.6 une démonstration indépendante de la densité des polynômes trigonométriques dans $L^p(S^1)$.

18.5 Théorèmes de Hahn-Banach

Théorème 18.60 (Hahn-Banach[242, 61]).

Soit E , un espace vectoriel réel et une application $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

- (1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda > 0$,
- (2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.

Soit de plus $G \subset E$ un sous-espace vectoriel muni d'une application $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. Alors il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in G$ et $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. Si h une application linéaire définie sur un sous-espace de E , nous notons D_h ledit sous-espace.

Un ensemble inductif Nous considérons P , l'ensemble des fonctions linéaires suivant

$$P = \left\{ h: D_h \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} G \subset D_h \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \\ h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D_h \end{cases} \right\} \quad (18.238)$$

Cet ensemble est non vide parce que g est dedans. Nous le munissons de la relation d'ordre $h_1 \leq h_2$ si et seulement si $D_{h_1} \subset D_{h_2}$ et h_2 prolonge h_1 . Nous montrons à présent que P est

un ensemble inductif. Soit un sous-ensemble totalement ordonné $Q \subset P$; nous définissons une fonction h de la façon suivante. D'abord $D_h = \sup_{l \in Q} D_l$ et ensuite

$$\begin{aligned} h: D_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto l(x) \quad \text{si } x \in D_l \end{aligned} \quad (18.239)$$

Cela est bien défini parce que si $x \in D_l \cap D_{l'}$ alors, vu que Q on a obligatoirement $D_l \subset D_{l'}$ et l' qui prolonge l (ou le contraire) parce que Q est totalement ordonné (i.e. $l \leq l'$ ou $l' \leq l$). Donc h est un majorant de Q dans P parce que $h \geq l$ pour tout $l \in Q$. Cela montre que P est inductif (définition 1.4). Le lemme de Zorn 1.5 nous dit alors que P possède un maximum f qui va être la réponse à notre théorème.

Le support de f La fonction f est dans P ; donc $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D_h$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in G$. Pour terminer nous devons montrer que $D_f = E$. Supposons donc que $D_f \neq E$ et prenons $x_0 \notin D_f$. Nous allons contredire la maximalité de f en considérant la fonction h donnée par $D_h = D_f + \mathbb{R}x_0$ et

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \quad (18.240)$$

où α est une constante que nous allons fixer plus tard.

Nous commençons par prouver que f est dans P . Nous devons prouver que

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \quad (18.241)$$

Pour cela nous allons commencer par fixer α pour avoir les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \end{array} \right. \quad (18.242a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \end{array} \right. \quad (18.242b)$$

pour tout $x \in D_f$. Ces relations sont équivalentes à demander α tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq p(x + x_0) - f(x) \end{array} \right. \quad (18.243a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq f(x) - p(x - x_0) \end{array} \right. \quad (18.243b)$$

Nous nous demandons donc si il existe un α qui satisfasse

$$\sup_{y \in D_f} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{z \in D_f} (p(z + x_0) - f(z)). \quad (18.244)$$

Ou encore nous devons prouver que pour tout $y, z \in D_f$,

$$p(z + x_0) - f(x) \geq f(y) - p(y - x_0) \geq 0. \quad (18.245)$$

Par les propriétés de p et de f ,

$$p(z + x_0) + p(y - x_0) - f(z) - f(y) \geq p(z + y) - f(z + y) \geq 0. \quad (18.246)$$

La dernière inégalité est le fait que $f \in P$. Un choix de α donnant les inéquations (18.242) est donc possible.

À partir des inéquations (18.242) nous obtenons la relation (18.241) de la façon suivante. Si $t > 0$ nous multiplions l'équation (18.242a) par t :

$$tf(x) + t\alpha \leq tp(x + x_0). \quad (18.247)$$

Et nous écrivons cette relation avec x/t au lieu de x en tenant compte de la linéarité de f :

$$f(x) + t\alpha \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0). \quad (18.248)$$

Avec $t < 0$, c'est similaire, en faisant attention au sens des inégalités.

Nous avons donc construit $h: D_h \rightarrow \mathbb{R}$ avec $h \in P$, $D_f \subset D_h$ et $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Cela pour dire que $h > f$, ce qui contredit la maximalité de f . Le domaine de f est donc E tout entier.

La fonction f est donc une fonction qui remplit les conditions.

□

Définition 18.61.

Un espace topologique est **localement convexe** si tout point possède un système fondamental de voisinages formé de convexes.

Définition 18.62 (Hyperplan qui sépare).

Soit E un espace vectoriel topologique ainsi que A, B des sous-ensembles de E . Nous disons que l'hyperplan d'équation $f = \alpha$ **sépare au sens large** les parties A et B si $f(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in B$.

La séparation est **au sens strict** si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \text{pour tout } x \in A \quad (18.249a)$$

$$f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \text{pour tout } x \in B. \quad (18.249b)$$

Théorème 18.63 (Hahn-Banach, première forme géométrique[61]).

Soit E un espace vectoriel topologique et A, B deux convexes non vides disjoints de E . Si A est ouvert, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Théorème 18.64 (Hahn-Banach, seconde forme géométrique).

Soit un espace vectoriel topologique localement convexe¹⁹ ainsi que des convexes non vides disjoints A et B tels que A soit compact et B soit fermé. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B .

Démonstration. Vu que B est fermé, A est dans l'ouvert $E \setminus B$. Donc si $a \in A$, il existe un voisinage ouvert convexe de a inclus à A . Soit U_a un voisinage ouvert et convexe de 0 tel que $(a + U_a) \cap B = \emptyset$.

Vu que la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue, nous pouvons trouver un ouvert convexe V_a tel que $V_a + V_a \subset U_a$. L'ensemble $a + V_a$ est alors un voisinage ouvert de a et bien entendu $\bigcup_a (a + V_a)$ recouvre A qui est compact. Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est à dire que nous considérons $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n (a_i + V_{a_i}). \quad (18.250)$$

Nous posons alors

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}. \quad (18.251)$$

Cet ensemble est non vide parce et il contient un voisinage de zéro parce que c'est une intersection finie de voisinages de zéro. Soit $x \in A + V$. Il existe i tel que

$$x \in a_i + U_{a_i} + V \subset a_i + V_{a_i} + V_{a_i} \subset a_i + U_{a_i} \subset E \setminus B. \quad (18.252)$$

Donc $(A + V) \cap B = \emptyset$. L'ensemble $A + V$ est alors un ouvert convexe disjoint de B . Par la première forme géométrique du théorème de Hahn-Banach 18.63 nous avons un hyperplan qui sépare $A + V$ de B au sens large : il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ tel que $f(a) + f(v) \leq f(b)$ pour tout $a \in A, v \in V$ et $b \in B$.

Il suffit donc de trouver un $v \in V$ tel que $f(v) \neq 0$ pour avoir la séparation au sens strict. Cela est facile : V étant un voisinage de zéro et f étant linéaire, si elle était nulle sur V , elle serait nulle sur E . □

18.6 Théorème de Tietze

Définition 18.65.

Si E et F sont des espaces normés, une application $f: E \rightarrow F$ est **presque surjective** si il existe $\alpha \in]0, 1[$ et $C > 0$ tels que pour tout $y \in \overline{B_F(0, 1)}$, il existe $x \in \overline{B_E(0, C)}$ tel que $\|y - f(x)\| \leq \alpha$.

¹⁹. Définition 18.61.

Lemme 18.66 ([1]).

Soient E et F des espaces de Banach et $f \in L(E, F)$ ²⁰. Si f est presque surjective, alors

(1) f est surjective

(2) pour tout $y \in \overline{B_F(0, 1)}$, il existe $x \in \overline{B_E(0, \frac{C}{1-\alpha})}$ tel que $y = f(x)$.

Le point (2) est une précision du point (1) : il dit quelle est la taille de la boule de E nécessaire à obtenir la boule unité dans F .

Démonstration. Soit $y \in \overline{B_F(0, 1)}$. Nous allons construire $x \in B(0, \frac{C}{1-\alpha})$ qui donne $f(x) = y$. Ce x sera la limite d'une série que nous allons construire par récurrence. Pour $n = 1$ nous utilisons la presque surjectivité pour considérer $x_1 \in \overline{B_E(0, C)}$ tel que $\|y - f(x_1)\| \leq \alpha$. Ensuite nous considérons la récurrence

$$x_n \in \overline{B_E(0, C)} \quad (18.253)$$

tel que

$$\left\| y - \sum_{i=1}^n \alpha^{i-1} f(x_i) \right\| \leq \alpha^n \quad (18.254)$$

Pour montrer que cela existe nous supposons que la série est déjà construite jusqu'à $n > 1$:

$$\frac{1}{\alpha^n} \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha^{i-1} f(x_i) \right) \in \overline{B_F(0, 1)} \quad (18.255)$$

À partir de là, par presque surjectivité il existe un $x_{n+1} \in \overline{B_E(0, C)}$ tel que

$$\left\| \frac{y - \sum_{i=1}^n \alpha^{i-1} f(x_i)}{\alpha^n} - f(x_{n+1}) \right\| \leq \alpha. \quad (18.256)$$

En multipliant par α^n , le terme $\alpha^n f(x_{n+1})$ s'intègre bien dans la somme :

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^{i-1} f(x_i) \right\| \leq \alpha^{n+1}. \quad (18.257)$$

Nous nous intéressons à une éventuelle limite à la somme des $\alpha^{n-1} x_n$. D'abord nous avons la majoration $\|\alpha^{n-1} x_n\| \leq \alpha^{n-1} C$, et vu que par la définition de la presque surjectivité $0 < \alpha < 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x_n \quad (18.258)$$

converge absolument²¹ parce que la suite des normes est une suite géométrique de raison α . Vu que E est de Banach, la convergence absolue implique la convergence simple (la suite des sommes partielles est de Cauchy et Banach est complet). Nous posons

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x_n \in E, \quad (18.259)$$

et en termes de normes, ça vérifie

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \|x_n\| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = \frac{C}{1-\alpha}. \quad (18.260)$$

Donc c'est bon pour avoir $x \in B(0, \frac{C}{1-\alpha})$. Nous devons encore vérifier que $y = f(x)$. Pour cela nous remarquons que

$$\left\| y - f\left(\sum_{n=1}^N \alpha^{n-1} x_n\right) \right\| \leq \alpha^N. \quad (18.261)$$

20. L'ensemble des applications linéaires continues

21. Définition 6.152.

Nous pouvons prendre la limite $N \rightarrow \infty$ et permuter f avec la limite (par continuité de f). Vu que $0 < \alpha < 1$ nous avons

$$\|y - f(x)\| = 0. \quad (18.262)$$

□

Théorème 18.67 (Tietze[1, 204]).

Soit un espace métrique (X, d) et un fermé $Y \subset X$. Soit $g_0 \in C^0(Y, \mathbb{R})$. Alors g_0 admet un prolongement continu sur X .

Démonstration. Soit l'opération de restriction

$$\begin{aligned} T: (C_b^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (C_b^0(Y, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f &\mapsto f|_Y. \end{aligned} \quad (18.263)$$

L'application T est évidemment linéaire. Elle est de plus bornée pour la norme opérateur usuelle donnée par la proposition 6.80 parce que $\|T(f)\| \leq \|f\| < \infty$. L'application T est alors continue par la proposition 6.217.

Presque surjection Soit $g \in C_b^0(Y, \mathbb{R})$ avec $\|g\|_\infty \leq 1$. Nous posons

$$Y^+ = \{x \in Y \text{ tel que } \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1\} \quad (18.264a)$$

$$Y^- = \{x \in Y \text{ tel que } -1 \leq g(x) \leq -\frac{1}{3}\}. \quad (18.264b)$$

Nous considérons alors

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{3} \frac{d(x, Y^-) - d(x, Y^+)}{d(x, Y^-) + d(x, Y^+)} \end{aligned} \quad (18.265)$$

Vu qu'en valeur absolue le dénominateur est plus grand que le numérateur nous avons $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{3}$. Notons que

- Si $x \in Y^+$ alors $f(x) = \frac{1}{3}$ et $g(x) \in [\frac{1}{3}, 1]$;
- Si $x \in Y^-$ alors $f(x) = -\frac{1}{3}$ et $g(x) \in [-1, -\frac{1}{3}]$;
- Si x n'est ni dans Y^+ ni dans Y^- alors nous avons²² $g(x) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ et donc $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \frac{2}{3}$.

Dans les deux cas nous avons $|f(x) - g(x)| \in [0, \frac{2}{3}]$ pour tout $x \in X$. Cela prouve que

$$\|T(f) - g\|_{Y, \infty} \leq \frac{2}{3}. \quad (18.266)$$

En résumé nous avons pris g dans la boule $\overline{B(0, 1)}$ de $(C_b^0(Y, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ et nous avons construit une fonction f dans la boule $\overline{B(0, \frac{1}{3})}$ de $(C_b^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ telle que $\|T(f) - g\|_\infty \leq \frac{2}{3}$. L'application T est donc une presque surjection avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{2}{3}$.

Prolongement dans les boules unité fermées La proposition 16.103 nous assure que les espaces $C_b^0(X, \mathbb{R})$ et $C_b^0(Y, \mathbb{R})$ sont de Banach (complets), et le lemme 18.66 nous dit alors que T est surjective et que pour tout $g \in \overline{B(0, 1)}$, il existe

$$f \in \overline{B\left(0, \frac{1/3}{1 - \frac{2}{3}}\right)} = \overline{B(0, 1)}. \quad (18.267)$$

telle que $g = T(f)$.

22. Nous rappelons que $\|g\| = 1$, donc $g(x)$ est forcément entre -1 et 1 .

Prolongement pour les boules ouvertes Jusqu'à présent nous avons montré qu'une fonction $g \in \overline{B(0, 1)}$ admet un prolongement continu dans $\overline{B(0, 1)}$. Nous allons montrer que si g est dans la boule ouverte $B(0, 1)$ de $(C_b^0(Y, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ alors g admet un prolongement dans la boule ouverte $B(0, 1)$ de $(C_b^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $g \in B_{C_b^0(Y)}(0, 1)$ et son prolongement $h \in \overline{B_{C_b^0(X)}(0, 1)}$. Si $\|h\|_\infty < 1$ alors le résultat est vrai. Sinon nous considérons l'ensemble

$$Z = \{x \in X \text{ tel que } |h(x)| = 1\}. \quad (18.268)$$

Nous avons $Y \cap Z = \emptyset$ parce que nous avons $h = g$ sur Y et nous avons choisi $\|g\|_\infty < \infty$. Par ailleurs Y est fermé par hypothèse et Z est fermé parce que h est continue ; par conséquent $Y \cap Z$ est fermé, donc ²³

$$\bar{Y} \cap \bar{Z} = Y \cap Z = \emptyset. \quad (18.269)$$

Nous posons

$$u: X \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \frac{d(x, Z)}{d(x, Y) + d(x, Z)} \quad (18.270)$$

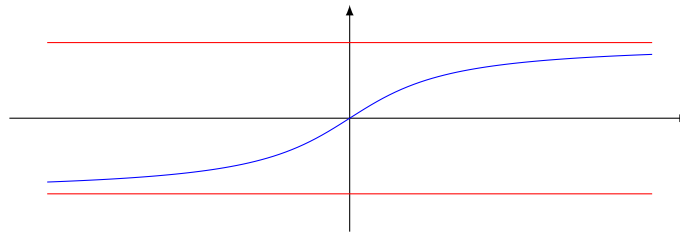
Le dénominateur n'est pas nul parce qu'il faudrait $d(x, Y) = d(x, Z) = 0$, ce qui demanderait $x \in \bar{Y} \cap \bar{Z}$, ce qui n'est pas possible. Nous posons $f = uh$. Si $x \in Y$ alors $u(x) = 1$, donc f est encore un prolongement de g . De plus f est encore continue, et donc encore un bon candidat. Enfin si x est hors de Y alors $d(x, Y) > 0$ (strictement parce que Y est fermé) et donc $0 < u(x) < 1$, ce qui donne $|f(x)| < |h(x)| \leq 1$. Donc $\|f\|_\infty < 1$.

Nous avons donc trouvé qu'une fonction dans la boule ouverte $B_{C_b^0(Y)}(0, 1)$ se prolonge en une fonction dans la boule ouverte $B_{C_b^0(X)}(0, 1)$.

Le cas non borné Soit enfin $g_0 \in C^0(Y, \mathbb{R})$. Nous allons nous ramener au cas de la boule unité ouverte en utilisant un homéomorphisme $\phi: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$. L'application $g = \phi \circ g_0$ est dans la boule unité ouverte de $C^0(Y, \mathbb{R})$ et donc admet un prolongement f dans la boule unité ouverte de $C^0(X)$. L'application $f_0 = \phi^{-1} \circ f$ est un prolongement continu de g_0 .

□

Un homéomorphisme $\phi: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est donné par exemple par la fonction $\phi(t) = \frac{2}{\pi} \arctan(t)$ dont le graphique est donné ci-dessous :



18.7 Espace de Schwartz

Pour un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, nous notons

$$\partial^\alpha \varphi = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} \varphi \quad (18.271)$$

pour peu que la fonction φ soit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ fois dérivable.

²³. Si vous avez l'intention de dire que $\bar{Y} \cap \bar{Z} = \bar{Y} \cap \bar{Z} = Y \cap Z = \emptyset$, allez d'abord voir l'exemple 5.165. Ici c'est correct parce que Y et Z sont fermés.

Définition 18.68.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\Omega)$ est le sous-ensemble de $C^\infty(\Omega)$ des fonctions dont toutes les dérivées décroissent plus vite que tout polynôme :

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, p_{\alpha, \beta}(\varphi) < \infty\} \quad (18.272)$$

où nous avons considéré

$$p_{\alpha, \beta}(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} |x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)| = \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty. \quad (18.273)$$

Pour simplifier les notations (surtout du côté de Fourier), nous allons parfois écrire $M_i \varphi$ pour la fonction $x \mapsto x_i \varphi(x)$.

Exemple 18.69

La fonction e^{-x^2} est une fonction à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$. △

Définition 18.70.

Une fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est dite à **décroissance rapide** si elle décroît plus vite que n'importe quel polynôme. Plus précisément, si pour tout polynôme Q , il existe un $r > 0$ tel que $|f(x)| < \frac{1}{|Q(x)|}$ pour tout $\|x\| \geq r$.

Proposition 18.71.

Une fonction Schwartz est à décroissance rapide.

Démonstration. Nous commençons par considérer un polynôme P donné par

$$P(x) = \sum_k c_k x^{\beta_k} \quad (18.274)$$

où les β_k sont des multiindices, les c_k sont des constantes et la somme est finie. Nous avons la majoration

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x) P(x)| \leq \sum_k \sup_x |c_k \varphi(x) x^{\beta_k}| \leq \sum_k |c_k| p_{0, \beta_k}(\varphi) < \infty. \quad (18.275)$$

Nous allons noter M_P la constante $\sum_k |c_k| p_{0, \beta_k}(\varphi)$, de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ nous avons $|\varphi(x) P(x)| \leq M_P$ et donc

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M_P}{|P(x)|} = \frac{1}{|\frac{1}{M_P} P(x)|}. \quad (18.276)$$

Notons que cette inégalité est a fortiori correcte pour les x sur lesquels P s'annule.

Soit maintenant un polynôme Q . Nous considérons le polynôme $P(x) = \|x\| Q(x)$. Étant de plus haut degré, pour toute constante C il existe un rayon r_C tel que $|P(x)| \geq C |Q(x)|$ pour tout $|x| \geq r_C$. En particulier pour $|x| \geq r_{M_P}$ nous avons

$$|P(x)| \geq M_P |Q(x)| \quad (18.277)$$

et donc, pour ces x ,

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{|\frac{1}{M_P} P(x)|} \leq \frac{1}{|Q(x)|}. \quad (18.278)$$

La première inégalité est valable pour tout x , et la seconde pour $\|x\| \geq r_{M_P}$. □

Corollaire 18.72 ([8]).

Soit φ une fonction Schwartz sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Alors la fonction

$$y \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x, y)| \quad (18.279)$$

est intégrable.

Démonstration. Soit un polynôme Q en la variable y . Par la proposition 18.71, il existe $r > 0$ tel que

$$|\varphi(x, t)| < \frac{1}{Q(y)} \quad (18.280)$$

pour tout $\|(x, y)\| > r$. A fortiori l'inégalité tient pour tout $|y| > r$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x, y)| dy = \int_{\|y\| \leq r} \sup_x |\varphi(x, y)| dy + \int_{\|y\| > r} \sup_x |\varphi(x, y)| dy. \quad (18.281)$$

La première intégrale est bornée par $\text{Vol}(B(0, r)) \|f\|_\infty$ tandis que la seconde est bornée par l'intégrale de $\frac{1}{Q(y)}$. En prenant Q de degré suffisamment élevé en toutes les composantes de y nous avons intégrabilité. $\square$

18.7.1 Topologie

Lemme-définition 18.73.

Les $p_{\alpha, \beta}$ donnés par l'équation (18.273) ci-dessus sont des semi-normes²⁴. La topologie considérée sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est celle des semi-normes $p_{\alpha, \beta}$.

Lemme 18.74 ([4]).

La topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée aussi par les semi-normes

$$q_{n, m} = \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|. \quad (18.282)$$

Autrement dit, une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} 0$ si et seulement si $q_{n, m(\varphi)} \rightarrow 0$ pour tout n et m .

Le fait que les $q_{n, m}(\varphi)$ restent bornés est la proposition 18.71. Cependant ce lemme est plus précis parce qu'en disant seulement que φ est majoré par des polynôme, nous ne disons pas que les polynômes correspondants aux φ_n tendent vers zéro si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. Et d'ailleurs on ne sait pas très bien ce que signifierait $P_n \rightarrow 0$ pour une suite de polynômes.

Proposition 18.75.

Pour $p \in [1, \infty]$, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continument dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'injection dont nous parlons est l'identité ou plus précisément l'identité suivie de la prise de classe. Il faut vérifier que cela est correct et continu, c'est à dire d'abord qu'une fonction à décroissance rapide est bien dans L^p et ensuite que si $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, alors $f_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Commençons par $p = \infty$. Alors $\|f_n\|_\infty = p_{0,0}(f_n) \rightarrow 0$ parce que si $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, alors en particulier $p_{0,0}(f_n) \rightarrow 0$.

Au tour de $p < \infty$ maintenant. Nous savons qu'en dimension d , la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(1 + \|x\|)^s} \quad (18.283)$$

est intégrable dès que $s > d$. Pour toute valeur de m nous avons

$$\|\varphi\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|(1 + \|x\|)^m \varphi(x)|^p}{(1 + \|x\|)^{mp}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{q_{0, m}(\varphi)^p}{(1 + \|x\|)^{mp}}. \quad (18.284)$$

En choisissant m de telle sorte que $mp > d$, nous avons convergence de l'intégrale et donc $\|\varphi\|_p < \infty$. Nous retenons que

$$\|\varphi\|_p^p \leq C q_{0, m}(\varphi)^p \quad (18.285)$$

pour une certaine constance C et un bon choix de m .

24. Définition 5.175.

Ceci prouve que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$. Nous devons encore vérifier que l'inclusion est continue. Si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, alors en particulier nous avons $q_{0,m}(\varphi_n) \rightarrow 0$ par le lemme 18.74. Par conséquent la majoration (18.285) nous dit que $\|\varphi_n\|_p \rightarrow 0$ également. $\square$

En résumé, si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \varphi$ alors $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \varphi$.

Théorème 18.76 ([134]).

Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ finie sur les compacts. Alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$.

Proposition 18.77 ([243]).

La partie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et ϕ , une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ (l'existence de telles fonctions est discutée en 16.6.1). Soit aussi $\phi_k(x) = \phi(x/k)$. Nous posons

$$f_k(x) = \phi_k(x)f(x), \quad (18.286)$$

et nous allons prouver que pour tout multiindices α et γ ,

$$p_{\alpha,\gamma}(f_k - f) = \|x^\gamma \partial^\alpha (f_k - f)\|_\infty \rightarrow 0. \quad (18.287)$$

Pour cela nous allons noter $\beta \leq \alpha$ lorsque β est un multiindice contenu dans α . En utilisant la dérivée du produit nous avons

$$(\partial^\alpha f_k)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} (\partial^{\alpha-\beta} \phi_k)(x) \partial^\beta f(x) \quad (18.288a)$$

$$= \sum_{\beta \leq \alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta} \phi)(x/k) (\partial^\beta f)(x) \quad (18.288b)$$

$$= \sum_{\beta < \alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta} \phi)(x/k) (\partial^\beta f)(x) + \phi(x/k) (\partial^\alpha f)(x). \quad (18.288c)$$

Nous devons donc étudier et majorer

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\gamma \partial^\alpha (f_k - f)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\gamma \sum_{\beta < \alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta} \phi)(x/k) (\partial^\beta f)(x)| \\ &\quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\gamma (\phi(x/k) - 1) (\partial^\alpha f)(x)| \end{aligned} \quad (18.289)$$

En ce qui concerne le second terme, soit $\epsilon > 0$, vu que f est Schwartz, il existe R tel que

$$|x^\gamma (\partial^\alpha f)(x)| < \epsilon \quad (18.290)$$

dès que $\|x\| > R$. En prenant $k > R$,

$$|x^\gamma (\partial^\alpha f)(x)| \begin{cases} = 0 & \text{si } \|x\| < R \\ \leq \epsilon & \text{si } \|x\| > R. \end{cases} \quad (18.291)$$

En ce qui concerne le premier terme,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\gamma \sum_{\beta < \alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta} \phi)(x/k) (\partial^\beta f)(x)| \quad (18.292a)$$

$$\leq \frac{1}{k} \sup_x \left| \sum_{\beta < \alpha} (\partial^{\alpha-\beta} \phi)(x/k) (x^\gamma \partial^\beta f)(x) \right| \quad (18.292b)$$

$$= \frac{1}{k} \sup_x \left| \sum_{\beta < \alpha} (\partial^{\alpha-\beta} \phi)(x/k) p_{\beta,\gamma}(f) \right| \quad (18.292c)$$

La somme ne contient qu'un nombre fini de β différents, donc nous pouvons considérer un nombre K qui majore tous les $p_{\beta,\gamma}(f)$ en même temps. La partie avec ϕ peut être majorée par $\|\partial^{\alpha-\beta}\phi\|_\infty$ (qui est fini) dont nous pouvons prendre le maximum sur $\beta < \alpha$. Toute l'expression dans la somme est donc majorée par un nombre qui ne dépend ni de x ni de β . Vu que la somme est finie, elle est majorée par ce nombre multiplié par le nombre de termes dans la somme et au final

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\gamma \sum_{\beta < \alpha} k^{-|\alpha-\beta|} (\partial^{\alpha-\beta}\phi)(x/k) (\partial^\beta f)(x)| \leq \frac{K'}{k}. \quad (18.293)$$

La limite $k \rightarrow \infty$ ne fait alors plus de doute. $\square$

Remarque 18.78.

Vu la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (définition 18.73), la convergence $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} f$ peut être exprimée par le fait que pour tout k, l ,

$$t^k f_n^{(l)} \xrightarrow{\text{unif}} t^k f^{(l)}. \quad (18.294)$$

C'est à dire convergence uniforme de toutes les dérivées multipliées par n'importe quel polynôme.

18.7.2 Produit de convolution

Proposition 18.79 (Stabilité de Schwartz par convolution²⁵ [240]).

Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Nous devons prouver que

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi * \psi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta (\partial^\alpha (\varphi * \psi))(x)| \quad (18.295)$$

est borné pour tout multiindices α et β . En appliquant $|\alpha|$ fois la proposition 18.36, nous mettons toutes les dérivées sur ψ : $\partial^\alpha (\varphi * \psi) = (\varphi * \partial^\alpha \psi)$. Cela étant fait, nous majorons

$$|x^\beta (\varphi * \partial^\alpha \psi)(x)| \leq |x^\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \underbrace{|(\partial^\alpha \psi)(x-y)|}_{\leq \|\partial^\alpha \psi\|_\infty} dy \quad (18.296a)$$

$$\leq |x^\beta| \|\partial^\alpha \psi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| dy \quad (18.296b)$$

$$\leq p_{\alpha,\beta}(\psi) \|\varphi\|_{L^1}. \quad (18.296c)$$

Par conséquent, $p_{\alpha,\beta}(\varphi * \psi) \leq \|\varphi\|_{L^1} p_{\alpha,\beta}(\psi) < \infty$. $\square$

25. Définition 18.33.

Chapitre 19

Analyse complexe

19.1 Fonctions holomorphes

19.1.1 Équations de Cauchy-Riemann

Notons que la formule (16.18) donne un **développement limité** pour les fonctions holomorphes. Si f est holomorphe en z_0 alors si z est dans un voisinage de z_0 , il existe une fonction $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} s(t)/t = 0$ et

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + s(|z - z_0|). \quad (19.1)$$

Nous introduisons les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (19.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (19.2b)$$

Si f est une fonction $\mathbb{C}$ -dérivable représentée par la fonction $F = P + iQ$, les équations de Cauchy-Riemann signifient que $\Delta P = \Delta Q = 0$, c'est à dire que la fonction f a des composantes harmoniques.

Théorème 19.1.

Si $f \in C^1(\Omega)$ alors nous avons équivalence des faits suivants :

- (1) f est holomorphe sur Ω ,
- (2) f vérifie $\partial_{\bar{z}} f = 0$.

Proposition 19.2.

Une application $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -dérivable sur Ω si et seulement si elle est différentiable et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (19.3a)$$

$$\quad (19.3b)$$

où $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Ces équations se notent de façon plus compacte

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (19.4)$$

Les équations (19.3) sont les équations de **Cauchy-Riemann**.

Démonstration. La différentielle de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par la matrice

$$T = \begin{pmatrix} \partial_x u(a) & \partial_y u(a) \\ \partial_x v(a) & \partial_y v(a) \end{pmatrix}. \quad (19.5)$$

Cette matrice est une similitude si et seulement si les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. En effet si $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice T est une similitude (écrivons $\alpha + i\beta$ son coefficient) si

$$\begin{cases} T(1) = \alpha + i\beta \\ T(i) = -\beta + i\alpha, \end{cases} \quad (19.6a)$$

$$(19.6b)$$

c'est à dire

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (19.7)$$

Identifier cette matrice à (19.5) fournit le résultat annoncé. $\square$

Proposition 19.3.

Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, alors nous avons

$$df_{z_0} = (\partial_z f)(z_0) \quad (19.8)$$

au sens où l'opérateur linéaire $df_{z_0}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est l'opération de multiplication par le nombre complexe $(\partial_z f)(z_0)$.

Démonstration. Soit $f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ une fonction holomorphe. Les fonctions réelles f_1 et f_2 sont assujetties aux équations de Cauchy-Riemann de la proposition 19.2 :

$$\begin{cases} \partial_x f_1 = \partial_y f_2 \\ \partial_x f_2 = -\partial_y f_1. \end{cases} \quad (19.9a)$$

$$(19.9b)$$

Nous avons, en recourant à un petit abus de notation entre $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$df_{z_0}(u) = \frac{d}{dt} \left[f(z_0 + tu) \right]_{t=0} \quad (19.10a)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[f_1(z_0 + tu) + if_2(z_0 + tu) \right]_{t=0} \quad (19.10b)$$

$$= \partial_x f_1 u_1 + \partial_y f_1 u_2 + i(\partial_x f_2 u_1 + \partial_y f_2 u_2) \quad (19.10c)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (19.10d)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ -\partial_y f_1 & \partial_x f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (19.10e)$$

En utilisant le lemme 16.4 nous reconnaissons la matrice de multiplication par le nombre $\partial_x f_1 - i\partial_y f_1$. Or justement,

$$\partial_z f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \frac{1}{2} (\partial_x f_1 + i\partial_x f_2 - i\partial_y f_1 + \partial_y f_2), \quad (19.11)$$

qui se réduit à $\partial_x f_1 - i\partial_y f_1$ lorsque nous y appliquons les équations de Cauchy-Riemann. $\square$

19.1.2 Intégrales sur des chemins fermés

Lemme 19.4.

Si g est une fonction continue dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si g admet une primitive complexe sur Ω alors

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0 \quad (19.12)$$

pour tout chemin fermé γ de classe C^1 contenu dans Ω .

Démonstration. Nommons G une primitive de g . Par définition,

$$\int_{\gamma} g = \int_{\gamma} G' \quad (19.13a)$$

$$= \int_0^1 G'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (19.13b)$$

$$= \int_0^1 (G \circ g\gamma)'(t) dt \quad (19.13c)$$

$$= G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) \quad (19.13d)$$

$$= 0 \quad (19.13e)$$

parce que le chemin est fermé : $\gamma(0) = \gamma(1)$. $\square$

Lemme 19.5 (Goursat[244]).

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur Ω , holomorphe sur Ω moins éventuellement un point (nommé $z_1 \in \Omega$). Soit T , un triangle¹ fermé inclus à Ω . Alors nous avons

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0. \quad (19.14)$$

Démonstration. Nous notons $\gamma = \partial T$. Dans la suite nous allons définir une suite de triangles $T^{(n)}$ et nous noterons $\gamma_n = \partial T^{(n)}$ avec une orientation que nous allons expliquer. Pour commencer nous posons $T^{(0)} = T$ et $\gamma_0 = \partial T^{(0)}$.

Nous considérons le cas $z_1 \notin T$, et nous posons

$$c = l(\gamma)^{-2} \left| \int_{\gamma} f \right|. \quad (19.15)$$

Notre objectif est de montrer que $c = 0$. Soit A, B, C les trois sommets du triangle ; nous divisons le triangle de la façon suivante. D'abord nous considérons les points A', B, C' respectivement milieux de BC , AC et AB . En traçant le triangle $A'B'C'$, nous construisons quatre triangles que nous nommons $T_i^{(0)}$. Le théorème de Thalès assure que le périmètre de chacun des quatre triangles est la moitié du périmètre du grand triangle T .

Sur T nous choisissons l'orientation ABC . De façon à être «compatible», nous choisissons les orientations $AC'B'$, $BA'C'$ et $A'CB'$. La somme de ces trois triangles donne T plus le triangle $A'C'B'$. Par conséquent nous choisissons sur le triangle central l'orientation (inverse) $AB'C'$ de façon à avoir

$$\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial T_i^{(0)}} f. \quad (19.16)$$

Cela implique que pour au moins un des quatre triangles (disons $T_k^{(0)}$ pour fixer les idées) nous ayons

$$\int_{\partial T_k^{(0)}} f \geq \frac{1}{4} \int_{\partial T^{(0)}} f \quad (19.17)$$

Nous notons $T^{(1)}$ ce triangle. Comme noté précédemment nous avons

$$l(\partial T^{(1)}) = \frac{1}{2} l(\partial T^{(0)}), \quad (19.18)$$

et donc

$$l(\gamma_1)^{-2} \left| \int_{\gamma_1} f \right| = 4 l(\gamma_0)^{-2} \left| \int_{\gamma_1} f \right| \geq 4 l(\gamma_0)^{-2} \frac{1}{4} \left| \int_{\gamma_0} f \right| = c. \quad (19.19)$$

En répétant le procédé nous construisons une suite de triangles $T^{(n)}$ qui satisfont toujours

$$l(\partial T^{(n)}) = \frac{1}{2^n} l(\partial T^{(0)}). \quad (19.20)$$

1. Nous considérons ici le triangle «plein».

Ces triangles forment une suite de fermés emboîtés dont le diamètre tend vers zéro. Leur intersection contient donc exactement un point (lemme 16.164) que nous nommons z_0 (et qui appartient évidemment à Ω). Étant donné que f est holomorphe nous utilisons le développement limité (19.1) autour de z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + s(|z - z_0|)(z - z_0) \quad (19.21)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$. Nous posons $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ et nous considérons $\epsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon |z - z_0| \quad (19.22)$$

pour tout $|z - z_0| < \alpha$. Le α à choisir pour obtenir cet effet est celui qui donne $s(|z - z_0|) < \epsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $l(\gamma_n) < \alpha$ pour tout $n > N$. D'autre part, deux points dans un triangle sont toujours à distance moindre que la longueur d'un côté, donc pour tout $z \in T^{(n)}$ nous avons $|z - z_0| < \alpha$ et par conséquent pour tout z dans $T^{(n)}$ nous avons

$$|f(z) - g(z)| < \epsilon |z - z_0|. \quad (19.23)$$

Notons que la fonction g est une dérivée : c'est la dérivée de la fonction

$$G(z) = zf(z_0) + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2. \quad (19.24)$$

Par conséquent nous avons

$$\int_{\gamma_n} g = 0 \quad (19.25)$$

par le lemme 19.4. Nous avons donc

$$\left| \int_{\gamma_n} f \right| = \left| \int_{\gamma_n} (f - g) \right| \quad (19.26a)$$

$$\leq l(\gamma_n) \max\{|f(z) - g(z)| \text{ tel que } z \in T^{(n)}\} \quad (19.26b)$$

$$\leq \epsilon l(\gamma_n)^2, \quad (19.26c)$$

et par conséquent

$$c \leq l(\gamma_n)^{-2} \left| \int_{\gamma_n} f \right| \leq \epsilon, \quad (19.27)$$

ce qui signifie que $c = 0$ parce que ϵ est arbitraire. Nous avons donc prouvé le lemme de Goursat dans le cas où le point de non holomorphie z_1 est en dehors de T .

Si z_1 est sur un côté, disons sur le côté AB , alors nous considérons un vecteur $v \in \mathbb{C}$ tel que $T_\epsilon = T + \epsilon v$ ne contienne z_1 pour aucun ϵ . Le vecteur $v = z_1 - C$ fait par exemple l'affaire. En vertu du point précédent nous avons

$$\int_{\partial T_\epsilon} f = 0 \quad (19.28)$$

pour tout $\epsilon > 0$. Étant donné que la fonction f est continue (y compris en z_1), l'intégrale sur ∂T est également nulle.

Si maintenant le point z_1 est à l'intérieur de T nous décomposons T en trois triangles ayant z_1 comme sommet commun. Si nous considérons les orientations Az_1C , ABz_1 et BCz_1 , alors nous avons

$$\int_T f = \int_{Az_1C} f + \int_{ABz_1} f + \int_{BCz_1} f, \quad (19.29)$$

alors que par le point précédent les trois intégrales du membre de droite sont nulles. $\square$

Proposition 19.6 ([244]).

Soit Ω un ouvert étoilé et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point z_1 où f est seulement continue. Alors si γ est un chemin fermé dans Ω , nous avons

$$\int_{\gamma} f = 0. \quad (19.30)$$

Proposition 19.7.

Si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence R , alors f est $\mathbb{C}$ -dérivable et nous pouvons dériver terme à terme dans la boule ouverte $B(0, R)$.

Démonstration. Cela est exactement la proposition 16.37. $\square$

19.1.3 Lacets, indice et homotopie**Définition 19.8.**

Soit γ un chemin fermé² dans $\mathbb{C}$. L'**indice** de la courbe γ est la fonction

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma: \mathbb{C} \setminus \gamma &\rightarrow \mathbb{Z} \\ z &\mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z}. \end{aligned} \quad (19.31)$$

Un chemin continu et fermé (au sens $\gamma(1) = \gamma(0)$) est un **lacet**.

Définition 19.9.

Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets en $x_0 \in X$ (un espace topologique), une **équivalence d'homotopie** est une application $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

- (1) $f(0, t) = \gamma_1(t)$ pour tout t ;
- (2) $f(1, t) = \gamma_2(t)$ pour tout t ;
- (3) pour chaque $t \in [0, 1]$, l'application $s \mapsto f(s, t)$ est continue ;
- (4) pour chaque $s \in [0, 1]$, l'application $t \mapsto f(s, t)$ est un lacet basé en x_0 .

Théorème 19.10. (1) La fonction Ind_γ est continue et prend des valeurs entières.

- (2) La fonction indice est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ et est nulle sur la composante non bornée.

Le second point est en partie la proposition 5.68.

Exemple 19.11

Si γ est un cercle de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon r , alors

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } z \in B(z_0, r) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (19.32)$$

La seconde ligne provient directement du théorème 19.10. Pour la première, le cercle γ se paramètre par

$$\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \quad (19.33)$$

et l'intégrale vaut

$$\int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = 2\pi i. \quad (19.34)$$

L'indice de ce chemin va évidemment jouer un rôle particulier dans la suite. $\triangle$

Théorème 19.12 (Cauchy, version homotopique[245]).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω . Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes de classe C^1 dans Ω , alors

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (19.35)$$

Corollaire 19.13 ([245]).

Soit $a \in \mathbb{C}$ ainsi que deux chemins γ_1 et γ_2 homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Alors $\text{Int}(\gamma_1, a) = \text{Ind}(\gamma_2, a)$.

Il y a aussi des choses sur l'indice dans [244].

2. Par abus de langage, nous désignerons par γ à la fois le chemin et son image.

19.1.4 Théorème de Cauchy et analytité

Cette sous-section veut prouver le théorème de Cauchy. Comme d'habitude, une référence qui ne peut pas rater est [244].

Théorème 19.14 (Formule de Cauchy).

Soit Ω ouvert dans $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et f , une fonction holomorphe sur Ω . Soit $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset \Omega$. Alors pour tout $z \in B(z_0, r)$ nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega. \quad (19.36)$$

Démonstration. Soit $z \in B(z_0, r)$ et considérons la fonction

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} & \text{si } \omega \neq z \\ f'(z) & \text{si } \omega = z. \end{cases} \quad (19.37)$$

Cette fonction est holomorphe sur $B(z_0, r) \setminus \{z\}$ et continue en z . Elle vérifie donc la proposition 19.6 et nous avons

$$\int_{\gamma} g = 0 \quad (19.38)$$

où γ est le cercle de centre z_0 et de rayon r . Nous avons donc

$$0 = \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\omega - z}, \quad (19.39)$$

et ayant déjà calculé la seconde intégrale dans l'exemple 19.11 nous en déduisons

$$\int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = 2\pi i f(z), \quad (19.40)$$

ce qu'il fallait. □

Définition 19.15.

Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est **$\mathbb{C}$ -analytique** sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite complexe (c_n) et $r > 0$ tels que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (19.41)$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Théorème 19.16.

Soit Ω ouvert dans $\mathbb{C}$ et f , holomorphe sur Ω . Soient encore $z_0 \in \Omega$ et r_0 tel que $B(z_0, r_0) \subset \Omega$. Alors :

(1) Sur $B(z_0, r_0)$, la fonction f s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (19.42)$$

(2) Nous avons

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega \quad (19.43)$$

où $\gamma = \partial B(z_0, r)$ avec $|z - z_0| < r < r_0$.

(3) En particulier f est infiniment dérivable.

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $|z - z_0| < r < r_0$. La formule de Cauchy (théorème 19.14) nous dit que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \quad (19.44)$$

où $\gamma = \partial B(z_0, r)$. Nous pouvons paramétrer ce chemin par $\omega = z_0 + re^{i\theta}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} rie^{i\theta} d\theta \quad (19.45a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta}(z - z_0)/r} d\theta. \quad (19.45b)$$

Nous pouvons développer l'intégrande en puissance de $(z - z_0)$ en utilisant la formule 16.191. Ici le rôle de x est tenu par

$$e^{-i\theta}(z - z_0)/r \quad (19.46)$$

dont le module est bien plus petit que 1, par hypothèse sur r . Nous avons donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} r^{-n} (z - z_0)^n d\theta. \quad (19.47)$$

L'art est maintenant de permuter la somme et l'intégrale. Pour cela nous remarquons que ce qui se trouve dans la somme est majoré en module par

$$M \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n \quad (19.48)$$

où M est le maximum de $|f|$ sur γ . La borne (19.48) ne dépend pas de θ ; par conséquent la convergence de la somme est uniforme en θ par le critère de Weierstrass (théorème 16.14). Le théorème 16.16 s'applique³ et nous pouvons permuter la somme avec l'intégrale.

Ce que nous trouvons est que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (19.49)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} r^{-n} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega. \quad (19.50)$$

Cette formule est valable pour $|z - z_0| < r$. Sur cette boule, la fonction est donc une série entière. Le théorème de Taylor 16.64 nous permet donc d'affirmer que f est partout infiniment continument dérivable (parce que en chaque point on a un voisinage sur lequel c'est vrai), et d'identifier les coefficients (qui, eux, ne sont valables que localement) sous la forme

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (19.51)$$

□

Corollaire 19.17.

Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω telle que pour toute boule $B(a, r)$ contenue dans Ω , nous ayons

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi. \quad (19.52)$$

Alors f est holomorphe.

3. Étant donné que nous savions déjà que la somme était une fonction intégrable, nous sommes loin d'avoir utilisé toute la puissance du théorème.

Démonstration. Il suffit de recopier la démonstration du théorème 19.16 pour savoir que f se développe en série de puissances et est donc en particulier dérivable. $\square$

Proposition 19.18.

Une fonction continue f est holomorphe si et seulement si la 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte.

Démonstration. Si f est holomorphe, alors nous avons vu que f était différentiable et que $df_z = f(z)dz$ par la formule 16.24.

Dans le sens inverse, supposons que $f(z)dz$ est localement exacte, et soit F telle que $dF = f(z)dz$. Ce que nous allons faire est montrer que la dérivée de F existe et vaut f . En effet, la définition de la différentielle nous dit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z) - dF_z(h)}{h} \right| = 0. \quad (19.53)$$

La limite vaut évidemment encore zéro si nous enlevons les modules :

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z) - f(z)h}{h} \quad (19.54a)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z). \quad (19.54b)$$

Donc $F' = f$. Cela montre que F est $\mathbb{C}$ -dérivable et donc holomorphe. En conséquence du théorème 19.16, la fonction F est infiniment dérivable et f l'est alors aussi. La fonction f est donc holomorphe⁴. $\square$

19.1.5 Théorème de Brouwer en dimension 2

Pour d'autres versions du théorème de Brouwer, voir la sous-section 16.9.3.

Théorème 19.19 (Brouwer en dimension 2[1]).

Soit $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$. Alors toute application continue de $\mathcal{B}$ dans elle-même admet un point fixe.

Démonstration. Supposons que la fonction $f \in C^0(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ n'admette pas de points fixes sur $\mathcal{B} = \overline{B(0,1)}$. Pour $x \in \mathcal{B}$ nous notons $g(x)$ l'intersection entre $\partial\mathcal{B}$ et la demi-droite allant de $f(x)$ vers x . C'est bien parce que f n'a pas de points fixes que g est bien définie.

En reprenant le même début de la preuve de la proposition 16.117 nous savons que la fonction

$$\begin{aligned} g: \overline{B(0,1)} &\rightarrow \partial B(0,1) \\ x &\mapsto \lambda(x)(x - f(x)) + f(x) \end{aligned} \quad (19.55)$$

est continue. De plus $g(x) = x$ sur $\partial B(0,1)$. Nous allons montrer qu'une telle fonction⁵ ne peut pas exister.

Pour $s \in [0,1]$ nous paramétrons le cercle $\partial B(0,s)$ par

$$\begin{aligned} x_s: [0,1] &\rightarrow \partial B(0,1) \\ t &\mapsto (s \cos(2\pi t), s \sin(2\pi t)). \end{aligned} \quad (19.56)$$

Ensuite nous considérons les chemins

$$\begin{aligned} \gamma_s: [0,1] &\rightarrow \partial B(0,s) \\ t &\mapsto g \circ x_s. \end{aligned} \quad (19.57)$$

4. Dire que la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe est un raisonnement classique.

5. Qui est nommée *rétraction* de la sphère sur elle-même.

L'application γ_s est continue et $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$. Les chemins γ_s sont des lacets ; nous nous intéressons maintenant à l'indice au point 0 de γ_0 et γ_1 . D'une part $\gamma_0(t) = g(0)$ (lacet constant) et $\gamma_1(t) = e^{2i\pi t}$ (parce que $g(x) = x$ sur le bord). Nous avons donc

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(0) = \frac{1}{2\pi i} \text{Ind}_{\gamma_0} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)} dt = 0, \quad (19.58)$$

alors que

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}} dt = 1. \quad (19.59)$$

Nous considérons l'homotopie

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \overline{B(0, 1)} \\ (s, t) &\mapsto \gamma_s(t) = (g \circ x_s)(t). \end{aligned} \quad (19.60)$$

Nous avons $g(0) \neq 0$ parce que g prend ses valeurs sur le bord. Vu que c'est une équivalence d'homotopie⁶ entre γ_1 et γ_2 , les indices devraient être égaux par le corollaire 19.13. $\square$

19.1.6 Principe des zéros isolés

Théorème 19.20 (Principe des zéros isolés [244]).

Soit f une fonction holomorphe et a , un zéro non isolé de f . Alors f est nulle sur un voisinage de a .

Démonstration. Nous écrivons f sous la forme d'une série entière autour de a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (19.61)$$

valable sur une boule $B(a, r)$. Soit c_m le premier coefficient non nul (si il n'existe pas c'est que f est nulle sur tout $B(a, r)$ et alors le théorème est prouvé). Nous avons alors

$$f(z) = c_m (z - a)^m \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z - a)^k \right) \quad (19.62)$$

avec $d_k = c_{m+k}/c_m$. Le rayon de convergence de la série $\sum_k d_k (z - a)^k$ est le même que celui de (19.61) parce que la suite $d_k r^{m+k}$ reste bornée (critère d'Abel, lemme 16.23). Si nous posons

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z - a)^k, \quad (19.63)$$

alors g est une fonction continue et $g(a) = 1$. De plus

$$f(z) = c_m (z - a)^m g(z). \quad (19.64)$$

Soit une suite (z_n) de zéros de f convergent vers a . Étant donné que g est continue, nous devrions avoir $\lim_{k \rightarrow \infty} g(z_k) = g(a) = 1$, mais si $f(z_k) = 0$ avec $z_k \neq a$, alors $g(z_k) = 0$. Cela est un paradoxe qui nous permet de conclure que si la suite z_n existe bien, alors f est identiquement nulle sur un voisinage, c'est à dire que tous les c_n sont nuls. $\square$

Corollaire 19.21.

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω . Si f s'annule sur un ouvert (non vide) de Ω , alors f s'annule sur tout Ω .

6. Définition 19.9

Démonstration. soit

$$N = \{z \in \Omega \text{ tel que } f = 0 \text{ sur un ouvert autour de } z\}. \quad (19.65)$$

Le fait que N soit ouvert est évident à partir de sa définition. Nous allons montrer que N est également fermé dans Ω , et donc conclure que $N = \Omega$. Soit (z_n) une suite dans N convergente vers $z \in \Omega$. Étant donné que $f(z_n) = 0$ et que f est continue, nous avons

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0, \quad (19.66)$$

ce qui fait de z un zéro non isolé de f . Par conséquent le principe des zéros isolés (théorème 19.20) nous enseigne que f s'annule dans un voisinage autour de z , c'est à dire que $z \in N$. L'ensemble N est donc fermé. $\square$

19.1.7 Prolongement de fonctions holomorphes

Proposition 19.22.

Soit Ω , un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ ($a \in \Omega$). Nous supposons qu'il existe $r > 0$ tel que f est bornée sur $B(a, r) \cap \Omega$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω .

Le théorème de prolongement de Riemann 19.37 donnera plus d'informations.

Démonstration. Nous définissons la fonction $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \begin{cases} (z - a)f(z) & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a. \end{cases} \quad (19.67)$$

Sur $\Omega \setminus \{a\}$, la fonction g est holomorphe (produit de fonctions holomorphes), et elle est continue en a . Par conséquent elle est holomorphe sur Ω . Nous la développons en série entière sur une boule $B(a, r)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (19.68)$$

Nous avons $g(a) = c_0 = 0$. Nous posons

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z - a)^n. \quad (19.69)$$

Si $z \neq a$, alors $\varphi(z) = f(a)$ parce que $\varphi(z) = g(z)/(z - a)$. Mais φ est continue en a , et donc holomorphe en a .

La fonction φ est par conséquent un prolongement holomorphe de f en a . $\square$

19.1.8 Théorème de Runge

Le théorème que nous allons prouver n'est en réalité qu'une partie de ce qui est usuellement appelle le théorème de Runge.

Théorème 19.23 (Théorème de Runge).

Soit K , un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe. Si $a \in \mathbb{C} \setminus K$ alors la fonction

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{z - a} \quad (19.70)$$

est limite uniforme de polynômes sur K .

Démonstration. Nous considérons $P(K)$, l'adhérence des polynômes sur K pour la norme uniforme (sur K). Nous devons montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}K$, la fonction φ_a est dans $P(K)$. Pour cela nous considérons l'ensemble

$$A = \{a \in \mathbb{C}K \text{ tel que } \varphi_a \in P(K)\} \quad (19.71)$$

et nous allons montrer qu'il est à la fois non vide, ouvert et fermé dans le connexe $\mathbb{C}K$.

Je répète : nous allons prouver l'ouverture et la fermeture *pour la topologie de $\mathbb{C}K$* . Nous n'allons pas prouver que A est un ouvert de $\mathbb{C}$. Ce qui sera par conséquent prouvé est que $A = \mathbb{C}K$.

Non vide Soit $R = \sup_{z \in K} |z|$ et $a \in \mathbb{C}K$ tel que $|a| > R$. Nous avons

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{a} \frac{1}{\frac{z}{a} - 1} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k+1}}. \quad (19.72)$$

Ici la convergence de la série et sa limite sont assurées par le fait que $|z/a| < 1$ par choix de R et a . La suite de polynômes

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{a^{k+1}} \quad (19.73)$$

converge uniformément sur $B(0, R)$ et en particulier sur K . Donc $P_n \rightarrow \varphi_a$.

Fermé Nous allons montrer que la fermeture de A (dans $\mathbb{C}K$) est incluse dans A , et donc qu'elle est égale à A et donc que A est fermé. Par le lemme 5.62, la fermeture de A dans $\mathbb{C}K$ est l'ensemble $\bar{A} \cap \mathbb{C}K$ où $\bar{A}$ est la fermeture de A au sens usuel.

Bref, soit $a \in \bar{A} \cap \mathbb{C}K$, et montrons que $\varphi_a \in \overline{P(K)}$. Vu que $P(K)$ est déjà une fermeture, nous aurons en fait $\varphi_a \in P(K)$ et donc $a \in A$, ce qui signifierait que $\bar{A} \cap \mathbb{C}A = A$ et donc que A est fermé.

Au travail.

Soit $(a_n) \in A$ une suite convergente vers a . Soit aussi $d = d(a, K)$; on a $d > 0$ parce que K est compact et a est hors de a alors le complémentaire de K est ouvert. Nous choisissons en plus la suite a_n pour avoir $|a_n - a| < \frac{d}{2}$; au pire on prend la queue de suite. Soit $z \in K$; nous avons

$$|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| = \left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{(z - a_n)(z - a)} \right|. \quad (19.74)$$

Vu que $a_n \in B(a, \frac{d}{2})$ et que $z \in K$ et $d = d(a, K)$ nous avons $|a_n - z| \geq \frac{d}{2}$; et aussi $|a - z| \geq \frac{d}{2}$. Nous pouvons donc majorer (19.74) par

$$|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| \leq 2 \frac{|a_n - a|}{d^2}. \quad (19.75)$$

Donc nous avons

$$\|\varphi_a - \varphi_{a_n}\|_K \leq 2 \frac{|a_n - a|}{d^2} \rightarrow 0 \quad (19.76)$$

où la norme $\|\cdot\|_K$ est la norme supremum sur K . Donc $a \in \overline{P(K)} = P(K)$ et A est fermé.

Ouvert Vu que K est compact, il est fermé et donc $\mathbb{C}K$ est ouvert. Par conséquent, ainsi que précisé dans l'exemple 5.63, les ouverts de $\mathbb{C}K$ sont les ouverts de $\mathbb{C}$ contenus dans $\mathbb{C}K$. Afin de prouver que A est ouvert, nous prenons $a \in A$ et nous cherchons une boule (au sens de $\mathbb{C}$) autour de a qui serait incluse dans A .

Soit donc $h \in \mathbb{C}$ «petit» dans un sens que nous allons préciser plus tard. Encore une fois nous posons $d = d(a, K)$. Nous avons

$$\varphi_{a+h}(z) = \frac{1}{z - a - h} = \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{h}{z-a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(z-a)^{k+1}}. \quad (19.77)$$

Déjà ici nous demandons $h < \sup_{z \in K} |z - a|$. Puisque $|z - a| > d$, nous avons alors

$$|\varphi_{a+h}(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{d^{k+1}} < \infty. \quad (19.78)$$

Cela pour dire que la somme à droite de (19.77) converge bien pourvu que h soit bien petit. Nous pouvons donc poursuivre :

$$\varphi_{a+h}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \varphi_a(z)^{k+1}. \quad (19.79)$$

Nous montrons maintenant que la convergence de la somme (19.79) est en réalité uniforme en z . En effet

$$\left| \varphi_{a+h}(z) - \sum_{k=0}^N h^k \varphi_a(z)^{k+1} \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} h^k \varphi_a(z)^{k+1} \right| \quad (19.80a)$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |h|^k |\varphi_a(z)|^{k+1}. \quad (19.80b)$$

Étant donné que φ_a est continue sur le compact K , elle y est majorée en module ; on peut même être plus précis :

$$|\varphi_a(z)| = \frac{1}{|z-a|} \leq \frac{1}{d}. \quad (19.81)$$

Nous pouvons donc écrire

$$\left| \varphi_{a+h}(z) - \sum_{k=0}^N h^k \varphi_a(z)^{k+1} \right| \leq \frac{1}{d} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{h}{d} \right|^k. \quad (19.82)$$

Étant donné que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} |h/d|^k$ converge, la limite $N \rightarrow \infty$ est nulle et nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \varphi_{a+h} - \sum_{k=0}^N h^k \varphi_a^{k+1} \right\|_K = 0. \quad (19.83)$$

Pour avoir $\varphi_{a+h} \in P(K)$, il faut encore savoir si les fonctions φ_a^k sont dans $P(K)$ pour tout k . Dans ce cas pour chaque N la somme sera encore dans $P(K)$ et φ_{a+h} sera limite uniforme d'éléments de $P(K)$.

Par hypothèse, $\varphi_a \in P(K)$; soit P_n une suite de polynômes qui converge uniformément vers φ_a . Nous allons montrer qu'alors la suite de polynômes P_n^k converge uniformément vers φ_a^k . Soit n tel que $\|P_n - \varphi_a\|_K \leq \epsilon$ et utilisons le produit remarquable

$$a^k - b^k = (a-b) \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i} \quad (19.84)$$

pour obtenir

$$|P_n(z)^k - \varphi_a(z)^k| \leq |P_n(z) - \varphi_a(z)| \sum_{i=0}^{k-1} |P_n(z)^i \varphi_a(z)^{k-1-i}|. \quad (19.85)$$

Vu que P_n et φ_a sont continues sur le compact K , on peut majorer la somme par une constante M , et il restera

$$|P_n(z)^k - \varphi_a(z)^k| \leq M |P_n(z) - \varphi_a(z)|, \quad (19.86)$$

ou encore

$$\|P_n^k - \varphi_a^k\| \leq M\epsilon. \quad (19.87)$$

Cela prouve que $\varphi_a^k \in P(K)$ et donc que φ_{a+h} est limite uniforme (sur K) d'éléments de $P(K)$ et donc fait partie de $P(K)$ lui aussi.

Ceci achève de prouver que A est ouvert dans $\mathbb{C}K$.

Conclusion L'ensemble A est non vide, ouvert et fermé dans $\mathbb{C}K$, donc il est égal à $\mathbb{C}K$. Le théorème est ainsi démontré. $\square$

19.2 Intégrales de fonctions holomorphes

Nous commençons par le lemme technique.

Lemme 19.24 ([244]).

Soit f une fonction holomorphe sur $B(z_0, r_0)$. Pour tout $z \in B(z_0, r)$ (avec $r < r_0$) nous avons

$$|f'(z)| \leq \frac{r}{(r - |z - z_0|)^2} \max \{f(z_0 + re^{i\theta})\}_{\theta \in \mathbb{R}}. \quad (19.88)$$

Démonstration. Par translation nous pouvons supposer que $z_0 = 0$. Étant donné que f est holomorphe, elle admet un développement en séries entières

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (19.89)$$

et nous notons $M = \max\{f(z) \text{ tel que } z \in \overline{B(0, r)}\}$. Nous avons $r^n |a_n| \leq M$. Par conséquent

$$|f'(z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \quad (19.90a)$$

$$\leq \frac{1}{r} \sum r^n |a_n| n \left(\frac{|z|}{r} \right)^{n-1} \quad (19.90b)$$

$$< \frac{M}{r} \sum n \left(\frac{|z|}{r} \right)^{n-1}. \quad (19.90c)$$

À ce point nous devons utiliser la série de l'exemple 16.72. Nous avons alors

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \frac{1}{\left(1 - \frac{|z|}{r}\right)^2} = \frac{Mr}{(r - |z|)^2}. \quad (19.91)$$

$\square$

Théorème 19.25 (Holomorphie sous l'intégrale[244]).

Soit un espace mesuré (Ω, μ) , un ouvert A dans $\mathbb{C}$ et une fonction $f: A \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Nous voulons étudier la fonction

$$F(z) = \int_{\Omega} f(z, \omega) d\mu(\omega) \quad (19.92)$$

pour tout $z \in A$. Nous supposons que

- (1) la fonction $f(., \omega)$ est holomorphe sur A pour chaque ω .
- (2) La fonction $f(z, .)$ est mesurable sur (Ω, μ) .
- (3) Pour tout compact $K \subset A$, il existe une fonction $g_K: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f(z, \omega)| \leq g_K(\omega)$ et telle que

$$\int_{\Omega} g_K(\omega) d\mu(\omega) \quad (19.93)$$

existe.

Alors la fonction F est holomorphe et

$$F'(z) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \omega) d\mu(\omega). \quad (19.94)$$

Démonstration. Soient $z_0 \in A$ et $r > 0$ tels que $K = \overline{B(z_0, r)} \subset A$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f_\omega : \overline{B(z_0, r)} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z, \omega). \end{aligned} \quad (19.95)$$

Étant donné que $\overline{B(z_0, r)}$ est compacte, la fonction $|f_\omega|$ est majorée par un nombre que nous notons $f_K(\omega)$ qui est indépendant de z (pour autant que $z \in K$). Nous désignons par $S(z_0, r)$ la frontière de la boule $B(z_0, r)$. Étant donné que la majoration est valable sur $\overline{B(z_0, r)}$, nous avons en particulier

$$|f_\omega(z)| \leq f_K(\omega) \quad (19.96)$$

pour tout $z \in S$. En utilisant la lemme 19.24 nous avons

$$|f'_\omega(z)| \leq \frac{r}{(r - |z - z_0|)^2} \max\{f(z_0 + re^{i\theta})\}_{\theta \in \mathbb{R}} \quad (19.97a)$$

$$\leq \frac{rf_K(\omega)}{(r - |z - z_0|)^2}. \quad (19.97b)$$

Cette majoration est valable pour tout $z \in B(z_0, r)$. Si nous supposons de plus que $z \in B(z_0, r/2)$ nous avons

$$|f'(z)| \leq \frac{rf_K(\omega)}{(r - \frac{r}{2})^2} = \frac{4}{r} f_K(\omega). \quad (19.98)$$

Étant donné que la boule $B(z_0, r/2)$ est convexe, la fonction f_ω est Lipschitz et pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < r/2$ nous avons

$$\left| \frac{f_\omega(z_0 + h) - f_\omega(z_0)}{h} \right| \leq \frac{4f_K(\omega)}{r}. \quad (19.99)$$

Soit maintenant une suite (h_n) qui converge vers 0 dans $\mathbb{C}$. Nous considérons la suite de fonctions correspondantes

$$g_n(\omega) = \frac{f(z_0 + h_n, \omega) - f(z_0, \omega)}{h_n}. \quad (19.100)$$

Cette suite de fonction vérifie la convergence ponctuelle

$$g_n(\omega) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \omega). \quad (19.101)$$

De plus g_n est une fonction (de ω) dominée par $\frac{4f_K}{r}$ qui est intégrable. Par conséquent le théorème de la convergence dominée nous indique que

$$\int_{\Omega} g_n(\omega) d\mu(\omega) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \omega) d\mu(\omega), \quad (19.102)$$

tandis que

$$F'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(z_0 + h_n) - F(z_0)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(\omega) d\mu(\omega). \quad (19.103)$$

□

Corollaire 19.26.

Si f est une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω contenant la fermeture de la boule $B(z_0, r)$, alors pour tout z dans $B(z_0, \rho)$ ($\rho < r$) les dérivées de f s'expriment par la formule suivante :

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}} d\omega. \quad (19.104)$$

Démonstration. Nous appliquons le théorème 19.25 à la fonction

$$g(z, \omega) = \frac{f(\omega)}{\omega - z} \quad (19.105)$$

avec $\Omega = \partial B(z_0, r)$ et $A = B(z_0, \rho)$ avec $\rho < r$. Étant donné que f est holomorphe, elle est continue et donc bornée sur tout compact $K \subset A$ par une constante M (qui dépend du compact choisi). D'autre part, nous avons toujours $|\omega - z| > r - \rho$ et donc

$$|g(z, \omega)| \leq \frac{M}{r - \rho}. \quad (19.106)$$

La fonction constante $g_K = \frac{M}{r - \rho}$ est évidemment intégrable. Le théorème conclut que f est holomorphe (cela, nous le savions déjà⁷), et

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega. \quad (19.107)$$

Un peu de récurrence montre maintenant que

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}} d\omega. \quad (19.108)$$

□

Définition 19.27.

Une **mesure de Radon** sur un compact K de $\mathbb{C}$ est une forme linéaire continue sur $C(K)$. Si μ est une mesure de Radon, on définit la **transformée de Cauchy** de μ par

$$\begin{aligned} \hat{\mu}: \mathbb{C} \setminus K &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto -\frac{1}{\pi} \mu \left(\frac{1}{\xi - z} \right). \end{aligned} \quad (19.109)$$

Théorème 19.28.

Si μ est une mesure de Radon sur K alors $\hat{\mu}$ est infiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ et nous avons

$$\hat{\mu}^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi} \mu \left(\frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} \right). \quad (19.110)$$

Lemme 19.29.

Si f est holomorphe sur Ω et si B est une boule fermée dans Ω alors pour tout $z \in \text{Int}(B)$ nous avons

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (19.111)$$

Démonstration. Appliquer le théorème 19.28 à la mesure de Radon

$$\mu(\phi) = \int_{\partial B} \phi(\xi) d\xi. \quad (19.112)$$

□

Lemme 19.30.

Si f est holomorphe sur Ω et si B est une boule fermée dans Ω alors pour tout z dans l'intérieur de B nous avons

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (19.113)$$

⁷. et cela fournit une preuve alternative à la réciproque du théorème de Cauchy : une fonction continue qui vérifie la formule de Cauchy est holomorphe.

Théorème 19.31.

Si f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(z_0, R)$ alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (19.114)$$

et cette série converge uniformément sur tout compact.

Démonstration. Sans perte de généralité nous supposons que $z_0 = 0$. La formule de Cauchy fournit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{1 - (z/\xi)} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (19.115)$$

Nous utilisons la série géométrique

$$\frac{1}{1 - (z/\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi} \right)^n, \quad (19.116)$$

nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B} \frac{z^n f(\xi)}{\xi^{n+1}} \quad (19.117a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \right) z^n. \quad (19.117b)$$

Nous devons maintenant montrer que ce qui se trouve dans la grande parenthèse vaut $f^{(n)}(0)/n!$. Nous utilisons le théorème de Radon 19.28 à la mesure

$$\mu(\phi) = \int_{\partial B} \phi(\xi) d\xi. \quad (19.118)$$

La transformée de Cauchy est

$$\hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi} \mu \left(\frac{1}{\xi - z} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{\xi - z} d\xi, \quad (19.119)$$

et le théorème assure que

$$\hat{\mu}^{(n)}(z) = -\frac{n!}{\pi} \mu \left(\frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} \right) = -\frac{n!}{\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (19.120)$$

En comparant la formule (19.119) avec la formule de Cauchy nous voyons que $\hat{\mu}(z) = -2if(z)$. Par conséquent

$$f^{(n)}(z) = -\frac{1}{2i} \hat{\mu}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad (19.121)$$

et

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{\xi^{n+1}} d\xi. \quad (19.122)$$

□

Proposition 19.32 (Morera [246]).

Soit Ω ouvert dans $\mathbb{C}$ et f continue. Si

$$\int_{\partial T} f = 0 \quad (19.123)$$

pour tout triangle (plein) T contenu dans Ω , alors f est holomorphe sur Ω .

Démonstration. Il est suffisant de prouver que f est holomorphe sur toute boule ouverte $B(a, r)$ incluse dans Ω . Nous posons, pour tout $z \in B(a, r)$,

$$F(z) = \int_{[p, z]} f, \quad (19.124)$$

et nous considérons le chemin triangulaire $a \rightarrow z \rightarrow z + h \rightarrow a$ où $h \in \mathbb{C}$ est choisit assez petit pour que $z + h \in B(a, r)$. L'intégrale sur le triangle étant nulle, nous avons

$$0 = \int_{a \rightarrow z} f + \int_{z \rightarrow z+h} f + \int_{z+h \rightarrow a} f, \quad (19.125)$$

c'est à dire

$$F(z + h) - F(z) = \int_{z \rightarrow z+h} f. \quad (19.126)$$

En paramétrant le chemin par $z + th$ avec $t \in [0, 1]$, et en tenant compte de la remarque 13.138,

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} \quad (19.127a)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z + th) h dt, \quad (19.127b)$$

ce qui prouve que F est dérivable et $F' = f$. Par définition (16.1), F est holomorphe, et donc C^∞ par le théorème 19.16. Du coup f est également C^∞ et donc en particulier holomorphe. $\square$

19.3 Conditions équivalentes à l'holomorphie

Nous nous proposons de lister les conditions que nous avons vues être équivalentes à l'holomorphie.

Théorème 19.33.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) f est holomorphe.
- (2) Pour tout triangle (plein) T contenu dans Ω , $\int_T f = 0$.
- (3) f est $\mathbb{C}$ -dérivable.
- (4) f est C^∞
- (5) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$; ce sont les équations de Cauchy-Riemann.
- (6) La 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte.
- (7) Pour toute boule $B(a, r)$ contenue dans Ω nous avons

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r)} \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad (19.128)$$

Démonstration. (1) implique (2) est le lemme de Goursat 19.5. (2) implique (1) est le théorème de Morera 19.32.

(3) est la définition de l'holomorphie.

(4) implique (1) est un a fortiori sur la définition. (1) implique (4) est contenu dans le théorème de développement en série entière 19.14.

L'équivalence entre (5) et l'holomorphie est le théorème 19.2.

L'équivalence entre (6) et (1) est la proposition 19.18.

L'équivalence entre (1) et (7) est d'une part le théorème 19.16 et d'autre part le corollaire 19.17. $\square$

19.4 Singularités, pôles et méromorphe

Définition 19.34.

Si f est holomorphe sur un ouvert Ω , alors une **singularité** de f est un point isolé du bord de Ω .

- (1) La singularité est **effaçable** si la fonction f s'y prolonge en une fonction holomorphe.
- (2) La singularité Z est un **pôle** d'ordre k de f si elle n'est pas effaçable et si la fonction $z \mapsto (z - Z)^k f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe en Z .

Exemple 19.35

La fonction

$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z} \quad (19.129)$$

n'est pas définie en $z = 0$, mais elle s'y prolonge en une fonction continue en posant $f(0) = 1$. $\triangle$

Proposition 19.36.

Une singularité de f est un pôle si et seulement si

$$\lim_{z \rightarrow Z} f(z) = \infty. \quad (19.130)$$

Le théorème suivant complète la proposition 19.22.

Théorème 19.37 (Prolongement de Riemann).

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et une singularité Z de f . Nous avons équivalence de

- (1) la singularité Z est effaçable ;
- (2) f possède un prolongement continu en Z ;
- (3) il existe un voisinage épointé de Z sur lequel f est bornée ;
- (4) $\lim_{z \rightarrow Z} (z - Z)f(z) = 0$.

Définition 19.38 (Fonction méromorphe[247]).

Soit un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ et une suite de points $\{p_i\}$ dans $\mathcal{U}$ sans points d'accumulation (éventuellement il y a un nombre fini de p_i). Si la fonction f est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{p_i\}$ et si chaque p_i est un point régulier ou un pôle de f , alors nous disons que f est **méromorphe** sur $\mathcal{U}$.

Proposition 19.39.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et une suite de fonctions $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout compact K de Ω il existe $N_K \geq 0$ tel que

- (1) f_n n'a pas de pôles dans K dès que $n \geq N_K$;
- (2) la série $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K .

Alors

- (1) La fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (19.131)$$

est méromorphe sur Ω et ses pôles sont l'union de ceux des f_n .

- (2) Nous pouvons permuter la somme et la dérivée :

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z). \quad (19.132)$$

Théorème 19.40 (Série de Laurent).

Soient C une couronne de rayons $r_1 < r_2$ centrée en zéro et une fonction f holomorphe dans cette couronne. Alors nous avons la **série de Laurent**

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n. \quad (19.133)$$

- (1) Cette série converge uniformément sur tout compact de C .
 (2) Les coefficients sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (19.134)$$

où γ est un cercle centré en zéro.

- (3) Ce développement en série est unique.
 (4) La valeur des a_n ne dépend pas du choix du rayon du cercle γ .

19.5 Fonctions d'Euler

Théorème 19.41 (Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler[1]).

Nous considérons la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (19.135)$$

Alors

- (1) Cette formule définit une fonction holomorphe sur

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(z) > 0\}. \quad (19.136)$$

- (2) La fonction $\Gamma: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, lequel a des pôles sur les entiers négatifs.

Démonstration. **Holomorphie sous l'intégrale** Pour étudier l'holomorphie de la fonction Γ sur $\mathcal{P}$ nous utilisons le théorème 19.25.

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g: \mathcal{P} \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, t) &\mapsto e^{-t} t^{z-1} \end{aligned} \quad (19.137)$$

et nous commençons par montrer que c'est holomorphe en z pour chaque $t > 0$ fixé. Nous le vérifions par le critère de $\partial_{\bar{z}} f = 0$ ⁸ et en nous souvenant que $t^i = e^{i \ln(t)} = e^{i \ln(t)}$. Nous obtenons rapidement que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (19.138)$$

Le fait que la fonction $t \mapsto g(z, t)$ soit mesurable pour tout z est d'accord.

Et enfin soit K compact dans $\mathcal{P}$. Il faut trouver une fonction $g_K(t)$ intégrable sur $[0, \infty[$ telle que pour tout $z \in K$ et $t \in [0, \infty[$ nous ayons $|f(z, t)| \leq g_K(t)$. Pour cela nous majorons séparément les parties $t \in]0, 1[$ et $t \geq 1$.

Soit donc K compact dans $\mathcal{P}$; nous posons $M = \max_{z \in K} \Re(z)$ et $\epsilon = \min_{z \in K} \Re(z)$.

Si $t \in]0, 1[$ alors nous avons

$$e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1) \ln(t)}, \quad (19.139)$$

de telle façon à que que

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leq |e^{(x-1+iy) \ln(t)}| \quad (19.140a)$$

$$= |e^{(\Re(z)-1) \ln(t)}| \quad (19.140b)$$

$$= |t^{\Re(z)-1}| \quad (19.140c)$$

$$\leq |t^{\epsilon-1}| \quad (19.140d)$$

$$= \frac{1}{t^{1-\epsilon}}. \quad (19.140e)$$

8. Théorème 19.2.

Cette dernière fonction est intégrable sur $]0, 1[$.

Nous considérons maintenant $t \geq 1$. Dans ce cas nous avons

$$|e^{-t} z^{z-1}| = e^{-t} t^{\Re(z)-1} \leq e^{-t} t^{M-1}. \quad (19.141)$$

Cette dernière fonction est un produit d'une exponentielle décroissante avec un polynôme. C'est donc intégrable entre 1 et l'infini.

La fonction g_K que nous considérons est donc

$$g_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1-\epsilon}} & \text{si } t < 1 \\ \text{borné} & \text{si } 1 \leq t \leq b \\ e^{-t} t^{M-1} & \text{si } t > b. \end{cases} \quad (19.142)$$

Cela est une fonction intégrable sur $]0, \infty[$ et qui majore f uniformément en z sur le compact K de $\mathcal{P}$. Le théorème 19.25 nous permet donc de conclure que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty f(z, t) dt \quad (19.143)$$

est holomorphe en z sur $\mathcal{P}$ et que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt. \quad (19.144)$$

En deux morceaux Nous passons maintenant à la seconde partie du théorème. Pour $z \in \mathcal{P}$ nous coupons l'intégrale en deux :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (19.145)$$

Première partie Nous commençons par parler de la première partie : $\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ dans laquelle nous voulons utiliser le développement en série de l'exponentielle e^{-t} . Nous devons donc traiter

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt. \quad (19.146)$$

Nous allons permuter la somme avec l'intégrale à l'aide du théorème de Fubini 13.78 en posant la fonction

$$g(n, t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \quad (19.147)$$

et en considérant le produit entre la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ et la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, c'est à dire que nous étudions

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{N}} g(n, t) dndt. \quad (19.148)$$

Pour permuter il suffit de prouver que $|g|$ est intégrable pour la mesure produit, c'est à dire que

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{N}} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| < \infty. \quad (19.149)$$

Nous avons $|t^z| = t^{\Re(z)}$, donc

$$\sum_{n=0}^\infty \left| \frac{t^{n+z-1}}{n!} \right| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} = t^{\Re(z)-1} e^t. \quad (19.150)$$

Étant donné que nous avons fixé $z \in \mathcal{P}$, nous avons $\Re(z) - 1 > -1$ et donc $t^{\Re(z)-1}$ est intégrable entre 0 et 1. La partie e^t se majore sur $[0, 1]$ par une constante quelconque. Nous avons donc payé le droit d'inverser la somme et l'intégrale :

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [t^{n+z}]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}. \quad (19.151)$$

Nous avons donc l'intéressante formule suivante, valable pour tout $z \in \mathcal{P}$:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (19.152)$$

Prolongation de la première partie Nous voudrions montrer maintenant que la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \quad (19.153)$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles en les entiers négatifs. Pour cela nous considérons la suite de fonctions

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \quad (19.154)$$

et nous allons utiliser la proposition 19.39. Si $n \geq 0$, la fonction f_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $z = -n$. Soit K compact de $\mathbb{C}$ et N_K tel que $K \subset B(0, N_K)$. Pour $n \geq N_K + 1$, la fonction f_n n'a pas de pôles dans K et de plus pour tout $z \in K$ nous avons

$$|z+n| = |z-(-n)| \geq |n-|z|| \geq n-|z| \geq n-N_K, \quad (19.155)$$

et par conséquent

$$|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}, \quad (19.156)$$

ou pour le dire de façon plus snob :

$$\|f_n\|_{\infty, K} \leq \frac{1}{n!(n-N)}, \quad (19.157)$$

dont la série converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \geq N} f_n$ converge normalement⁹ sur K , donc la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (19.158)$$

est une fonction méromorphe dont les pôles sont ceux des f_n , c'est à dire les entiers négatifs (proposition 19.39).

La seconde partie Nous allons à présent prouver que la fonction

$$g(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (19.159)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour cela nous considérons la fonction de deux variables $f(z, t) = e^{-t} t^{z-1}$ et nous utilisons le théorème d'holomorphicité sous l'intégrale 19.25. D'abord pour z_0 fixé dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$\int_1^{\infty} |e^{-t} t^{z_0-1}| \leq \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\Re(z_0)-1} dt, \quad (19.160)$$

donc l'intégrale converge parce que c'est polynôme contre exponentielle. Par ailleurs pour chaque t_0 fixé sur $[0, \infty[$, la fonction $z \mapsto e^{-t_0} t_0^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme en témoigne le calcul suivant :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) t_0^{x+iy-1} = 0. \quad (19.161)$$

9. Définition 6.153.

Et enfin si K est compact dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$|f(z, t)| = |e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}|t^{\Re(z)-1}| \leq e^{-t}t^{M-1} \quad (19.162)$$

où $M = \max_{z \in K} \Re(z)$. Nous en déduisons que la fonction

$$z \mapsto \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \quad (19.163)$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Conclusion Au final nous avons prouvé que la fonction Γ d'Euler admet le prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ donné par

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \quad (19.164)$$

□

19.5.1 Euler et factorielle

Proposition 19.42.

Nous avons la formule $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous partons de la formule

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt \quad (19.165)$$

que nous intégrons par partie en posant

$$\begin{aligned} u &= t^{n-1} & u' &= (n-1)t^{n-2} \\ v &= e^{-t} & v' &= -e^{-t}. \end{aligned} \quad (19.166)$$

Les termes au bord s'annulent (ici il y a un passage à la limite qui n'est pas écrit) et nous trouvons

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty (n-1)e^{-t}t^{n-2}dt = (n-1)\Gamma(n-1). \quad (19.167)$$

Pour conclure il suffit de remarquer que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty -[e^{-t}]_0^\infty = 1. \quad (19.168)$$

□

19.6 Partition d'un entier en parts fixées

Proposition 19.43 ([1]).

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \geq 1$ nous posons

$$u_n = \text{Card} \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sum_{i=1}^k a_i x_i = n \right\}, \quad (19.169)$$

et $u_0 = 1$.

Alors nous avons l'équivalence de suite (pour $n \rightarrow \infty$) :

$$u_n \sim \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (19.170)$$

Démonstration. Pour chacun des $i \in \{1, \dots, k\}$ nous considérons la série entière

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^{xa_i} = \sum_k (z^{a_i})^x. \quad (19.171)$$

Étant donné que $|z^{a_i}| < 1$ si et seulement si $|z| < 1$, cette série a un rayon de convergence égal à 1. Nous allons calculer le produit de Cauchy de ces k séries, en nous souvenant que le théorème 16.28 nous assure que la série résultante aura un rayon de convergence au moins égal à 1 et vaudra le produit des différentes séries.

Le coefficient de z^n dans cette série vaut

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{N}^k \\ \sum x_i a_i = n}} 1 = u_n \quad (19.172)$$

parce que dans chacune des séries, le coefficient de tous les z^{xa_i} est 1. Nous définissons la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{x=0}^{\infty} z^{xa_i} \right) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - z^{a_i}}. \quad (19.173)$$

La fonction f existe sur $|z| < 1$ parce que nous venons de voir qu'elle peut s'exprimer comme un produit de Cauchy ; et la dernière égalité est simplement la somme de la série harmonique. D'autre part la fonction f est la série génératrice de la suite (u_n) .

Nous sommes en présence d'une fonction ayant des pôles aux racines $a_1, \dots, a_k$ ^e de l'unité. Étant donné que 1 est une racine de l'unité de tous les ordres, le pôle en $z = 1$ est de multiplicité k . Les autres pôles sont de multiplicité strictement inférieure ; en effet soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^{a_i} = 1$ pour tout i . Alors Bezout¹⁰ nous donne des entiers $v_i \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_i v_i a_i = 1$. Alors nous avons

$$\omega = \omega^{\sum v_i a_i} = \prod_{i=1}^k (\omega^{a_i})^{v_i} = 1. \quad (19.174)$$

Donc nous voyons que 1 est le seul à être racine de tous les ordres en même temps. Nous notons

$$P = \{\omega_1, \dots, \omega_p\} \quad (19.175)$$

l'ensemble des pôles avec $\omega_1 = 1$. Par ailleurs la fonction f est une fraction rationnelle dont nous connaissons les racines du dénominateur (ce sont les ω_i) et à peu près leurs ordres. Nous utilisons le truc de la décomposition en fractions simples en séparant le terme de puissance k qui n'existe que pour la racine $\omega_1 = 1$:

$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j}. \quad (19.176)$$

Ce développement est valable pour tout $|z| < 1$. Nous considérons maintenant $\omega \in P$ et $j \in \mathbb{N}$ et nous étudions la fonction

$$g(z) = \frac{1}{\omega - z}. \quad (19.177)$$

Un rapide calcul (par exemple par récurrence) montre que

$$g^{(k)}(z) = \frac{k!}{(\omega - z)^{k+1}}, \quad (19.178)$$

et étant donné que $|\omega| = 1$ nous pouvons écrire la série

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\omega^{k+1}}, \quad (19.179)$$

10. Théorème 2.24.

valable pour $|z| < 1$. Ce qui nous intéresse, c'est d'exprimer une série pour $1/(\omega - z)^j$; et voyant (19.178), nous voyons qu'il suffit de calculer les dérivées de la série de g . Nous dériver terme à terme à l'intérieur du rayon de convergence. Avec quelques abus d'écriture, et en utilisant la bête formule (16.177) nous avons¹¹

$$\frac{1}{(\omega - z)^j} = \frac{g^{(j-1)}(z)}{(j-1)!} \quad (19.180a)$$

$$= \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{1}{\omega - z} \right)^{(j-1)} \quad (19.180b)$$

$$= \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\omega^{k+1}} (z^k)^{(j-1)} \quad (19.180c)$$

$$= \sum_{k=j-\infty} \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{\omega^{k+1}} \frac{k!}{(k-j+1)!} z^{k-j+1} \quad (19.180d)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega^{n+j}} \frac{(n+j-1)!}{n!(j-1)!} z^n \quad (19.180e)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega^{n+j}} \binom{n+j-1}{n} z^n. \quad (19.180f)$$

Nous pouvons utiliser cela pour récrire la formule (19.176) de façon considérablement plus compliquée :

$$f(z) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} z^n + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_{ij} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{\omega_i^{n+j}}. \quad (19.181)$$

Mais nous savons que ce f est la série génératrice de la suite (u_n) et que nous pouvons donc utiliser la formule (16.179) pour exprimer les nombres u_l : u_l est simplement le coefficient de z^l divisé par $l!$. C'est à dire

$$u_l = \alpha \binom{l+k-1}{l} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij} \binom{l+j-1}{l} \frac{1}{\omega_i^{l+j}}. \quad (19.182)$$

Notre boulot est d'examiner le comportement de cela lorsque $l \rightarrow \infty$, c'est à dire regarder quels sont les puissances de l en présence. Notons que

En ce qui concerne le premier terme, la puissance dominante dans le coefficient binomial est l^{k-1} . Dans les autres termes¹², c'est l^{j-1} qui est de degré moins grand. Donc le comportement de u_l en terme de l est

$$u_l \sim \alpha \frac{l^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (19.183)$$

Il nous reste à voir ce que vaut α . Pour cela nous repartons de l'expression 19.173 que nous écrivons sous la forme

$$(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^k \frac{1-z}{1-z^{a_i}}. \quad (19.184)$$

Nous reconnaissons l'inverse d'une somme harmonique partielle :

$$(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1+z+z^2+\dots+z^{a_i-1}}. \quad (19.185)$$

Par ailleurs, nous ne savons pas si $f(1)$ existe parce que son rayon de convergence n'est que de 1; et nous savons même qu'elle n'existe pas (parce que ce serait la somme des u_n). Mais nous

11. À ce niveau j'ai pas exactement le même coefficient binomial que dans [1], mais je n'exclus absolument pas que ce soit moi qui me trompe. Écrivez-moi si vous pouvez infirmer ou confirmer l'erreur. Quoi qu'il en soit, cela ne change pas le résultat asymptotique que nous cherchons.

12. Attention : les termes $i = 1$ ont $\omega_1 = 1$ et il n'est donc pas possible de conclure simplement en disant que $\omega_i^{l-j} \rightarrow 0$ pour $l \rightarrow \infty$; bien que cela soit vrai pour tous les $i \neq 1$.

savons aussi que le pôle de plus grande multiplicité de f est en $z = 1$ et est de multiplicité k . Donc $(1 - z)^k f(z)$ devrait converger pour $z \rightarrow 1$. Pour tout $|z| < 1$ nous avons

$$(1 - z)^k f(z) = \alpha + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij} \frac{(1 - z)^k}{(\omega_i - z)^j}. \quad (19.186)$$

Lorsque $z \rightarrow 1$, tous les termes des sommes tendent vers zéro, y compris ceux avec $i = 1$ parce que $j < k$. Il reste donc

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z)^k f(z) = \alpha. \quad (19.187)$$

En calculant la même limite avec (19.185) nous trouvons

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 + z + z^2 + \dots + z^{a_i-1}} = \frac{1}{a_1 \dots a_k}. \quad (19.188)$$

Donc

$$\alpha = \frac{1}{a_1 \dots a_k}, \quad (19.189)$$

et le résultat est prouvé. □

19.7 Exponentielle complexe

Définition 19.44.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Nous définissons l'*exponentielle* de z par

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \quad (19.190)$$

Le rayon de convergence de cette somme est infini.

Proposition 19.45 ([248]).

Quelques propriétés de l'exponentielle.

- (1) La fonction $\exp$ est continue.
- (2) Nous avons la formule $e^{z+w} = e^z e^w$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$.
- (3) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$
- (4) $(\exp(z))^n = \exp(nz)$.

Démonstration. L'exponentielle est continue parce qu'elle est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (proposition 16.10).

Les séries $\exp(z)$ et $\exp(w)$ ayant un rayon de convergence infini nous pouvons utiliser le produit de Cauchy (théorème 16.28) :

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{z^i w^j}{i! j!} \right) \quad (19.191a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \frac{z^i w^{n-i}}{i! (n-i)!} \right) \quad (19.191b)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^i w^{n-i} \quad (19.191c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n \quad (19.191d)$$

$$= \exp(z + w). \quad (19.191e)$$

Nous avons utilisé la formule du binôme (proposition 3.5).

Les autres propriétés énoncées sont des corollaires :

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1. \quad (19.192)$$

□

Proposition 19.46.

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ alors

$$e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)). \quad (19.193)$$

Démonstration. Par la proposition 19.45 nous savons que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Nous devons donc seulement étudier e^{iy} . Nous avons

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \quad (19.194a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (19.194b)$$

$$= \cos(y) + i \sin(y). \quad (19.194c)$$

Nous avons utilisé le fait que $i^{2n} = (-1)^n$ et $i^{2n+1} = i(-1)^n$. □

Proposition 19.47.

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. La fonction

$$\begin{aligned} E: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{tz} \end{aligned} \quad (19.195)$$

est C^∞ , sa dérivée est

$$E'(t) = ze^{tz}. \quad (19.196)$$

La fonction E est développable en série entière (voir définition 16.62) sur $\mathbb{R}$ en $t = 0$ et

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n. \quad (19.197)$$

Démonstration. Nous fixons $z \in \mathbb{C}$. Par définition 19.44, la série suivante est e^{tz} :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^n. \quad (19.198)$$

Cette série a un rayon de convergence infini et la fonction f est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons la dériver terme à terme :

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} n t^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} = ze^{tz}. \quad (19.199)$$

□

Théorème 19.48.

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes.

- (1) $\exp$ est holomorphe.
- (2) $(e^z)' = e^z$.
- (3) L'exponentielle est développable en série entière,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (19.200)$$

et la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Démonstration. En tant que application $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, la fonction

$$E(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (19.201)$$

est C^∞ . De plus nous avons

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy} = E(x, y) \quad (19.202a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x, y) = iE(x, y), \quad (19.202b)$$

et par conséquent la fonction E vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Si r est fixé, par le critère d'Abel appliqué à la suite $r/n!$ nous savons que la série $\sum z^n/n!$ converge normalement sur le compact $B(0, r)$. $\square$

19.7.1 Intégrale de Fresnel

Nous allons calculer l'intégrale de Fresnel

$$\int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\pi/4} \quad (19.203)$$

en suivant la démarche présentée par wikipédia. Nous commençons par prouver que l'intégrale est convergente en nous contentant de justifier la convergence de

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx. \quad (19.204)$$

Pour tout $a > 0$, l'intégrale $\int_0^a \sin(x^2) dx$ ne pose pas de problèmes. En tenant compte du lemme 13.54, nous devons donc seulement calculer

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \sin(x^2) dx \quad (19.205)$$

où a est une constante strictement positive. Nous effectuons une intégration par partie en posant

$$u = \frac{1}{x} \quad u' = -\frac{1}{x^2} \quad (19.206a)$$

$$v' = x \sin(x) \quad v = \frac{1 - \cos(x)}{2}. \quad (19.206b)$$

Notons que la primitive v a été choisie pour avoir $v(0) = 0$. Nous avons

$$\int_a^b \sin(x^2) dx = \left[\frac{1 - \cos(x^2)}{2x} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(x^2) - 1}{2x^2} dx \quad (19.207)$$

Pour le premier terme nous avons

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \cos(x^2)}{2x} \right]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(b^2)}{2b} - \frac{1 - \cos(a^2)}{2a} = -\frac{1 - \cos(a^2)}{2a}. \quad (19.208)$$

C'est borné. Pour le second terme de (19.207), la fonction

$$\frac{\cos(x^2) - 1}{2x^2} \quad (19.209)$$

est majorée par la fonction $1/x^2$ qui est intégrable entre a et ∞ .

Nous allons calculer l'intégrale demandée en passant par la fonction

$$f(x) = e^{-z^2} \quad (19.210)$$

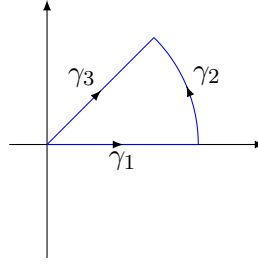


FIGURE 19.1 – Chemin d'intégration pour l'intégrale de Fresnel

définie sur le plan complexe. Nous l'intégrons sur le chemin $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ indiqué à la figure 19.1.

Ces chemins sont donnés par

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto t, \end{aligned} \quad (19.211)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2: [0, \frac{\pi}{4}] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto Re^{it}, \end{aligned} \quad (19.212)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto te^{i\pi/4}. \end{aligned} \quad (19.213)$$

Tout d'abord la fonction f est bien holomorphe par le critère du théorème 19.2. Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ se fait simplement en posant $f(x, y) = e^{-(x+iy)^2}$. Le calcul est usuel :

```
-----
| Sage Version 4.8, Release Date: 2012-01-20                               |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.               |
|-----
```

```
sage: f(x,y)=exp(-(x+I*y)**2)
sage: A=f.diff(x)+I*f.diff(y)
sage: A.simplify_full()
(x, y) |--> 0
```

Nous avons donc

$$0 = \int_{\gamma} f = \underbrace{\int_0^R e^{-t^2} dt}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2it}} R i e^{it} dt}_{I_2(R)} + \underbrace{\int_0^R e^{-t^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} dt}_{I_3(R)}. \quad (19.214)$$

L'intégrale est nulle pour tout R en vertu de la proposition 19.6. L'intégrale I_1 est une gaussienne et nous avons

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (19.215)$$

par l'exemple 13.81. Nous montrons maintenant que $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_2(R)| = 0$ ¹³. D'abord nous majorons en prenant la norme puis nous effectuons le changement de variables $u = 2t$:

$$|I_2(R)| \leq \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \cos(2t)} dt \quad (19.216a)$$

$$= \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \cos(u)} du. \quad (19.216b)$$

13. Dans [249], ce fait est démontré via le lemme de Jordan. Nous donnons ici une démonstration moins technologique.

Nous savons que le graphe du cosinus est concave : il reste au dessus de la droite que joint $(0, 1)$ à $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Du coup $\cos(u) \geq 1 - \frac{2}{\pi}u$ et par conséquent

$$e^{-R^2 \cos(u)} \leq e^{-R^2(1 - \frac{2}{\pi}u)} = e^{R^2(\frac{2}{\pi}u - 1)}. \quad (19.217)$$

Nous effectuons l'intégrale

$$|I_2(R)| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2} e^{\frac{2R^2}{\pi}u} du \quad (19.218a)$$

$$= \frac{R}{2} e^{-R^2} \left[\frac{\pi}{2R^2} e^{2R^2 u/\pi} \right]_0^{\pi/2} \quad (19.218b)$$

$$= \frac{\pi}{4R} - \frac{\pi e^{-R^2}}{4R}, \quad (19.218c)$$

et nous avons bien $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_2(R)| = 0$. Nous passons à la troisième intégrale. En tenant compte que $e^{i\pi/2} = i$, nous avons

$$I_3(R) = - \int_0^R e^{-\gamma_3(t)^2} e^{i\pi/4} dt \quad (19.219a)$$

$$= - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-t^2} e^{2i\pi/4} dt \quad (19.219b)$$

$$= - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2} dt. \quad (19.219c)$$

En passant à la limite $R \rightarrow 0$, de l'équation (19.214) il ne reste que

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-it^2} dt, \quad (19.220)$$

ce qui signifie que

$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2(1+i)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\pi/4}. \quad (19.221)$$

19.8 Théorème de Weierstrass

Théorème 19.49 (Théorème de Weierstrass[250]).

Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ que nous supposons converger uniformément sur tout compact vers f . Alors f est holomorphe sur Ω et pour tout k nous avons

$$f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)} \quad (19.222)$$

uniformément sur tout compact.

Dit en peu de mots, la limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe, et on peut permuter la limite avec la dérivation.

Démonstration. Chacune des fonctions f_n étant holomorphes, si $a \in \Omega$ et r est tel que $B(a, r) \subset \Omega$, nous avons par la formule de Cauchy 19.14 :

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a, r)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (19.223)$$

pour tout z dans un boule $B(a, \rho)$ incluse dans $B(a, r)$. Étant donné que le cercle ∂B est compact, elle y est majorée par une constante M . Montrons que de plus nous pouvons choisir M de telle façon à avoir $|f_n(\xi)| \leq M$ pour tout n et tout ξ en même temps. D'abord nous utilisons la continuité de

la limite f sur le compact ∂B pour poser $A = \max_{z \in \partial B} |f(z)|$. Ensuite nous considérons un $\epsilon > 0$ et N tel que $\|f_n - f\|_{\partial B} \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Nous savons maintenant que

$$\{|f_n(\xi)| \text{ tel que } n \geq N, \xi \in \partial B\} \quad (19.224)$$

est majoré par $A + \epsilon$. Nous posons enfin

$$B = \max_{n \leq N} \max_{\xi \in \partial B} |f_n(z)|, \quad (19.225)$$

et alors le nombre $M = \max\{A + \epsilon, B\}$ majore $|f_n(\xi)|$ pour tout n et tout $\xi \in \partial B$.

De plus pour tout $\xi \in \partial B$ et pour tout z dans la petite boule, nous avons $|\xi - z| > r - \rho$, donc la fonction dans l'intégrale est majorée par une constante ne dépendant ni de n ni de ξ . Nous pouvons donc permuter l'intégrale et la limite sur n :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}. \quad (19.226)$$

Cela implique que la fonction f est holomorphe par le corollaire 19.17.

Nous voudrions maintenant parler des dérivées des f_n et de f . Pour cela nous voulons permuter l'intégrale et les dérivées, ce qui est fait au corollaire 19.26 :

$$f_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}} d\omega. \quad (19.227)$$

Nous voulons la convergence sur tout compact contenu dans l'ouvert Ω . Pour ce faire, nous allons considérer un compact $K \subset \Omega$ et prouver la convergence uniforme dans toute boule de la forme $B(z_0, r)$ avec $z_0 \in K$ et $B(z_0, r) \subset \Omega$. Pour chaque tel couple (z_0, r) , nous aurons un $N_{(z_0, r)} \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_{(z_0, r)}$,

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{B(z_0, r)} \leq \epsilon. \quad (19.228)$$

Vu que ces boules $B(z_0, r)$ forment un recouvrement de K par des ouverts, nous pouvons en retirer un sous-recouvrement fini et prendre, comme N , le maximum des $N_{(z_0, r)}$ correspondants. Pour ce N nous aurons

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \leq \epsilon. \quad (19.229)$$

Au travail !

Pour $z \in B(z_0, r)$ nous considérons $r' > r$ tel que $B(z_0, r') \subset \Omega$ et nous avons

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \quad (19.230a)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|r - r'|^{k+1}} d\xi. \quad (19.230b)$$

Nous avons pris ce r' de telle manière que $|\xi - z|$ soit borné par le bas par $|r - r'|$; sinon la majoration que nous venons de faire ne marche pas. Étant donné que $f_n \rightarrow f$ uniformément, nous pouvons considérer n assez grand pour que le numérateur soit plus petit que ϵ indépendamment de ξ et de z . Donc pour un n assez grand,

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{2\pi r'}{|r - r'|^{k+1}} \quad (19.231)$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$. Donc nous avons convergence uniforme $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ sur cette boule. Par l'argument de compacité donné plus haut, nous avons la convergence uniforme sur tout compact. $\square$

19.9 Théorème de Montel

Théorème 19.50 (Montel[1]).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur Ω , uniformément bornée sur tout compact de Ω . Alors de toute suite dans $\mathcal{F}$ nous pouvons extraire une sous-suite convergente uniformément sur tout compact de Ω .

Démonstration. **Un ensemble équicontinu** Nous commençons par prendre une suite de compacts dans Ω comme dans le lemme 5.140, et une suite δ_n de réels strictement positifs tels que

$$B(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1} \quad (19.232)$$

pour tout $z \in K_n$. Soient $x, y \in K_n$ tels que $|x - y| < \delta_n$; nous notons $\partial B(x, 2\delta_n)$ le cercle de rayon $2\delta_n$ autour de x , parcouru dans le sens positif. La formule de Cauchy 19.36 nous donne

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - x} - \frac{f(\xi)}{\xi - y} \right) d\xi = \frac{x - y}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)(\xi - y)} d\xi \quad (19.233)$$

Nous majorons ça par

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{|f(\xi)|}{2\delta_n^2} d\xi \leq \frac{|x - y|}{\delta_n} M_n. \quad (19.234)$$

Justifications :

- $|\xi - x| = 2\delta_n$ et $|\xi - y| \geq \delta_n$ parce que ξ est au mieux sur le rayon passant par x et y .
 - $|f(\xi)| \leq M_n$ où M_n est la borne uniforme de $\mathcal{F}$ sur le compact K_n .
 - Nous avons aussi fini par calculer l'intégrale dans laquelle il ne restait plus rien, ça a donné la circonférence du cercle de rayon $2\delta_n$.
- Jusqu'à présent nous avons prouvé que l'ensemble

$$\mathcal{F}_n = \{f|_{K_n} \text{ tel que } f \in \mathcal{F}\} \quad (19.235)$$

est équicontinu. Il est aussi équiborné par hypothèse.

Application du théorème d'Ascoli L'ensemble $\mathcal{F}_n$ vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli 18.7. Donc l'ensemble $\mathcal{F}_n$ est relativement compact dans $C(K_n, \mathbb{C})$ pour la norme uniforme. Autrement dit l'ensemble $\bar{\mathcal{F}}$ est compact et si nous avons une suite de fonctions dans $\mathcal{F}_n$, il existe une sous-suite convergente dans $\bar{\mathcal{F}}$, c'est à dire uniformément. Autrement dit il existe une fonction strictement croissante $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $k \mapsto f_{\varphi(k)}$ converge uniformément sur K_n . La limite n'est cependant pas spécialement dans $\mathcal{F}_n$.

L'argument diagonal La suite $k \mapsto f_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(k)}$ converge uniformément sur tous les K_n . Si K est un compact de Ω , alors les petites propriétés sympas du lemme 5.140 nous disent que $K \subset \text{Int}(K_m)$ pour un certain m . Ladite suite convergeant uniformément sur K_m , elle converge uniformément sur K et nous avons montré la convergence uniforme sur tout compact de Ω . □

Corollaire 19.51 ([1]).

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. Soit f holomorphe sur Ω telle que $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$.

Alors de (f^n) on peut extraire une sous-suite convergente uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction constante a .

Démonstration. Nous considérons un voisinage de a inclus à Ω ; sachant que $|f(a)| < 1$, nous trouvons un voisinage encore plus petit de a sur lequel $|f'(z)| < 1$. Soit donc r tel que $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$

et tel que $|f'(z)| < 1$ sur $\overline{B(a, r)}$. Étant donné que $f'(z)$ est continue sur le compact $\overline{B(a, r)}$, nous en prenons le maximum λ (qui est strictement inférieur à 1) et nous avons au final

$$|f'(z)| \leq \lambda < 1 \quad (19.236)$$

pour tout $z \in \overline{B(a, r)}$. Le théorème des accroissements finis 11.187 nous dit que

$$|f(z) - a| \leq \lambda |z - a| \quad (19.237)$$

pour tout $z \in \overline{B(a, r)}$. C'est ici que nous utilisons l'hypothèse de convexité de Ω . Nous montrons alors par récurrence que

$$|f^n(z) - a| \leq \lambda^n |z - a| \leq \lambda^n r \leq r. \quad (19.238)$$

L'ensemble $A = \{f^n \text{ tel que } n \geq 1\}$ est donc uniformément borné sur $\overline{B(a, r)}$ par $a + r$. Autre manière de le dire : pour tout $z \in \overline{B(a, r)}$ nous avons

$$f^n(z) \in \overline{B(a, r)}. \quad (19.239)$$

La suite (f^n) est donc uniformément bornée sur tout compact de $B(a, r)$. Le théorème de Montel 19.50 nous indique que l'on peut extraire une sous-suite convergente uniformément sur tout compact. Au vu de (19.238) cette convergence ne peut avoir lieu que vers une fonction g qui vaut la constante a sur $B(a, r)$.

D'autre par la fonction g est holomorphe en tant que limite uniforme de fonctions holomorphes, théorème 19.49. Or une fonction holomorphe constante sur un ouvert est constante sur tout son domaine d'holomorphie (principe d'extension analytique, théorème 16.174). $\square$

19.10 Espaces de Bergman

Source : [204].

Soit Ω un borné dans $\mathbb{C}$ et D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 19.52.

L'espace de Bergman sur Ω , noté $A^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur Ω qui sont en même temps dans $L^2(\Omega)$.

Nous mettons sur $A^2(\Omega)$ le produit scalaire usuel hérité de L^2 :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(z) \overline{g(z)} dz. \quad (19.240)$$

Lemme 19.53.

Soit $K \subset \Omega$ un compact et $f \in A^2(\Omega)$. Alors

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{d(K, \partial\Omega)} \|f\|_2. \quad (19.241)$$

Démonstration. Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset \Omega$. Nous considérons aussi $\rho \leq r$. La formule de Cauchy (19.36) nous donne

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(a, \rho)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} f\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (19.242)$$

où nous avons utilisé le chemin $\gamma(\theta) = a + \rho e^{i\theta}$, $\gamma'(\theta) = i\rho e^{i\theta}$ et $\rho = |\xi - a|$. Maintenant une astuce est d'écrire

$$\frac{r^2}{2} f(a) = \int_0^r f(a) \rho d\rho, \quad (19.243)$$

et d'y substituer la valeur de $f(a)$ que nous venons de calculer :

$$\frac{r^2}{2} f(a) = \int_0^r \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \rho d\rho \quad (19.244a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{B(a,r)} f(z) dz \quad \text{passage aux polaires} \quad (19.244b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \langle 1, f \rangle_B \quad \text{produit scalaire sur } B(a, r) \quad (19.244c)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\langle 1, 1 \rangle_B \langle f, f \rangle_B} \quad (19.244d)$$

$$(19.244e)$$

Nous avons donc

$$r^2 f(a) \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\langle 1, 1 \rangle_B \langle f, f \rangle_B}, \quad (19.245)$$

et donc

$$\pi r^2 f(a) \leq \sqrt{\pi r^2} \|f\|_2, \quad (19.246)$$

parce que $\langle f, f \rangle_B \leq \|f\|_2^2$. En effet le produit scalaire $\|\cdot\|_2$ est donné par une intégrale sur Ω alors que $B(a, r) \subset \Omega$ et que la fonction qu'on y intègre est positive (c'est $|f(z)|^2$). En simplifiant,

$$f(a) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_2. \quad (19.247)$$

Mais r a été choisit pour avoir $B(a, r) \subset \Omega$, donc $r \leq d(a, \partial\Omega)$ et

$$|f(a)| \leq \frac{1}{d(a, \partial\Omega) \sqrt{\pi}} \|f\|_2. \quad (19.248)$$

Maintenant si nous prenons $a \in K$, nous avons encore la minoration $d(a, \partial K) \leq d(a, \partial\Omega)$ et donc

$$|f(a)| \leq \frac{1}{d(a, \partial K) \sqrt{\pi}} \|f\|_2. \quad (19.249)$$

□

Théorème 19.54.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

- (1) L'espace $A^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
- (2) Si D est la boule unité dans $\mathbb{C}$, une base hilbertienne de $A^2(D)$ est donnée par les fonctions

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \quad (19.250)$$

pour $n \geq 0$.

Démonstration. Nous commençons par montrer que $A^2(\Omega)$ est complet. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans $A^2(\Omega)$ et un compact $K \subset \Omega$. Nous savons par le lemme 19.53 que

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial\Omega)} \|f_n - f_m\|_2. \quad (19.251)$$

Donc f_n converge uniformément sur K . Par le théorème de Weierstrass 19.49, la fonction f est holomorphe. Il existe donc une fonction holomorphe f qui est limite uniforme sur tout compact de Ω de la suite (f_n) .

Mais $L^2(\Omega)$ étant complet, la suite (f_n) a une limite $g \in L^2(\Omega)$. Ce que nous voudrions faire est prouver que $f = g$. Notons que tel quel, ce n'est pas vrai parce que f est une vraie fonction alors que g est une classe. Ce que nous enseigne la proposition 18.14 est qu'il existe une sous-suite

(qu'on note (g_n)) qui converge vers g presque partout. Dans cette dernière phrase, g_n et g sont de vraies fonctions, des représentants des classes dans L^2 .

Nous déduisons que $f = g$ presque partout (ici f et g sont les fonctions) parce que la sous-suite converge uniformément vers f en même temps que presque partout vers g . Donc $f = g$ dans $L^2(\Omega)$ (ici f et g sont les classes). Donc $f \in L^2(\Omega)$ et l'espace $A^2(\Omega)$ est de Hilbert.

Il nous faut encore prouver que $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base orthonormale. En ce qui concerne les produits scalaires,

$$\langle e_m, e_n \rangle = \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi}} \int_D z^n \bar{z}^m dz \quad (19.252a)$$

$$= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^{m+n} e^{i\theta(n-m)} \quad (19.252b)$$

$$= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \frac{1}{m+n+2} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta}_{2\pi\delta_{mn}} \quad (19.252c)$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)^2}{\pi^2}} \frac{1}{2n+2} 2\pi\delta_{nm} \quad (19.252d)$$

$$= \delta_{nm}. \quad (19.252e)$$

Donc les fonctions données sont bien orthonormales. Nous devons montrer qu'elles sont denses dans $A^2(D)$. Soit $f \in A^2(D)$ et $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$; nous allons montrer que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2, \quad (19.253)$$

parce que le point (5) du théorème 17.34 nous indique que ce sera suffisant pour avoir une base hilbertienne.

Étant donné que f est holomorphe sur D , le théorème 19.14 nous développe f en série entière :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (19.254)$$

En permutant la somme avec le produit scalaire,

$$c_n(f) = \int_D f(z) \bar{e}_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_D f(z) \bar{z}^n dz. \quad (19.255)$$

Afin de profiter de la convergence uniforme de la série (19.254) à l'intérieur de D , nous allons exprimer l'intégrale sur D comme une intégrale sur $|z| < r$ en faisant tendre r vers 1 (par le bas). Pour ce faire nous considérons les fonctions

$$g_k(z) = \begin{cases} f(z) \bar{z}^n & \text{si } |z| < 1 - 1/k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (19.256)$$

Ces fonctions sont intégrables sur D et dominées par $f(z) \bar{z}^n$ qui est intégrable sans dépendre de k . Mais nous avons évidemment $g_k(z) \rightarrow f(z) \bar{z}^n$. Le théorème de la convergence dominée permet alors de permuter l'intégrale et la limite $k \rightarrow \infty$. Cela nous permet d'écrire

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{|z| < r} \bar{z}^n f(z) dz = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{|z| < r} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \bar{z}^n. \quad (19.257)$$

Par la convergence uniforme de la série entière à l'intérieur du disque D nous pouvons permuter l'intégrale et la somme (proposition 16.36) :

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{|z| < r} z^k \bar{z}^n dz. \quad (19.258)$$

L'intégrale proprement dite est vite calculée et vaut

$$\int_{|z|<1} \bar{z}^n z^k dz = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{kn}. \quad (19.259)$$

Nous pouvons donc continuer le calcul de $c_n(f)$ en effectuant la somme sur k qui se réduit à changer k en n puis en effectuant la limite :

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_k a_k \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{kn} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n. \quad (19.260)$$

Nous effectuons le même genre de calculs pour évaluer $\|f\|_2^2$:

$$\|f\|_2^2 = \int_D |f(z)|^2 dz \quad (19.261a)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{|z|<r} f(z) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}_k dz \quad (19.261b)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \int_{|z|<r} f(z) \bar{z}^k dz \quad \text{permuter } \sum \text{ et } \int \quad (19.261c)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k a_k \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1} \quad \text{intégrale déjà faite.} \quad (19.261d)$$

Mais nous savons déjà que $c_n(f) = \sqrt{\pi/(n+1)}$, donc ce qui est dans la somme est $\pi \bar{a}_k a_k / (n+1) = |c_k(f)|^2$. Nous avons donc

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 r^{2k+2}. \quad (19.262)$$

La fonction (de r) constante $|c_k(f)|^2$ domine $|c_k(f)r^{2k+2}|$ tout en ayant une somme (sur k) qui converge ; en effet la proposition 17.26 nous indique que $\sum_j |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$. Le théorème de la convergence dominée nous permet d'inverser la limite et la somme pour obtenir le résultat attendu :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2. \quad (19.263)$$

□

Chapitre 20

Série de Fourier

Soit f une fonction ; nous définissons ses **coefficients de Fourier** par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (20.1)$$

avec plus de détails en 18.3.7. Nous allons montrer la convergence de $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$ vers $f(x)$ dans divers cas :

- (1) Si f est continue et périodique, convergence au sens de Cesaro, théorème de Fejèr 20.5.
- (2) Convergence au sens $L^2([0, 2\pi])$ dans le théorème 18.31.
- (3) Si f est continue, périodique et sa série de Fourier converge uniformément, théorème 20.11.
- (4) Si f est périodique et la série des coefficients converge absolument pour tout x , proposition 20.12.
- (5) Si f est périodique et de classe C^1 , théorème 20.13.

Il est cependant faux de croire que la continuité et la périodicité suffisent à obtenir une convergence, comme le montrons dans la proposition 20.16.

20.1 Densité des polynômes trigonométriques

20.1.1 Convergence pour les fonctions continues (Weierstrass)

Le résultat fondamental qui nous permet d'utiliser les polynômes trigonométriques comme base pour les fonctions *continues* périodiques est le suivant. Notons que pour les fonctions non continues, il y a encore du travail.

Lemme 20.1.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π -périodique et si $\epsilon > 0$, alors il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \epsilon$.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de Stone-Weierstrass 16.88. Soit le compact Hausdorff

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}, \quad (20.2)$$

et $C(S^1, \mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions continues de S^1 vers $\mathbb{C}$. Il suffit de vérifier que les polynômes trigonométriques vérifient les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass. Un polynôme trigonométrique est un polynôme en z et $\bar{z}$ défini sur S^1 .

- (1) Le polynôme constant est dans l'algèbre, ok.
- (2) Pour la séparation des points, le polynôme trigonométrique $x \mapsto e^{ix}$.
- (3) Si P est un polynôme en z et $\bar{z}$, alors $\bar{P}$ l'est encore.

Donc si $\epsilon > 0$ et $\tilde{f} \in C(S^1, \mathbb{C})$ sont donnés, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\sum_t |\tilde{f}(e^{it}) - P(t)| < \epsilon. \quad (20.3)$$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 2π -périodique. Nous considérons $\tilde{f} \in C(S^1, \mathbb{C})$ donnée par $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$. Alors $\sup_t |f(t) - P(t)| \leq \epsilon$. $\square$

20.1.2 Convergence pour les fonctions continues (Fejér)

Si nous ne voulons pas passer par le gros théorème de Stone-Weierstrass pour prouver la densité des polynômes trigonométrique dans $(C_{2\pi}^0, \|\cdot\|_\infty)$, nous pouvons passer par le gros théorème de Fejér. C'est ce que nous faisons maintenant.

Le **noyau de Dirichlet** est la fonction

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}. \quad (20.4)$$

Le **noyau de Fejér** est la moyenne de Cesaro des noyaux de Dirichlet :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t). \quad (20.5)$$

Lemme 20.2.

Le noyau de Dirichlet s'exprime sous la forme

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin(t/2)} \quad (20.6)$$

Note : ce noyau n'est pas positif.

Démonstration. Nous commençons par mettre en facteur le premier terme :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}. \quad (20.7)$$

En utilisant la formule de la somme géométrique,

$$D_n(t) = e^{-int} \frac{1 - (e^{it})^{2n+1}}{1 - e^{it}} \quad (20.8a)$$

$$= e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \quad (20.8b)$$

$$= e^{-int} \frac{e^{(2n+1)it/2} e^{-(2n+1)it/2} - e^{(2n+1)it/2}}{e^{it/2} e^{-it/2} - e^{it/2}} \quad (20.8c)$$

$$= \frac{(-2i) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{(-2i) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (20.8d)$$

$\square$

Théorème 20.3 (Théorème de Dirichlet).

Soit f une fonction 2π -périodique et C^1 par morceaux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous posons

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}. \quad (20.9)$$

Alors nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \quad (20.10)$$

Lemme 20.4.

Le noyau de Fejér s'exprime sous la forme

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \quad (20.11)$$

Note : ce noyau est positif. C'est important parce qu'on s'en sert dans la preuve du théorème de Fejér.

Démonstration. L'astuce est de noter $\sin(x) = \Im(e^{ix})$ et de repartir du résultat à propos du noyau de Dirichlet. En utilisant encore la formule de la série géométrique partielle,

$$F_n(t) = \frac{1}{n \sin(t/2)} \Im \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)it/2} \quad (20.12a)$$

$$= \frac{1}{n \sin(t/2)} \Im e^{\frac{it}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \quad (20.12b)$$

$$= \frac{1}{n \sin(t/2)} \Im e^{\frac{it}{2}} \left(\frac{1 - e^{nit}}{1 - e^{it}} \right) \quad (20.12c)$$

$$= \frac{1}{n \sin(t/2)} \Im e^{it/2} \frac{e^{\frac{nit}{2}} \left(e^{-\frac{int}{2}} - e^{\frac{nit}{2}} \right)}{e^{\frac{it}{2}} (e^{-it/2} - e^{it/2})} \quad (20.12d)$$

$$= \frac{1}{n \sin(t/2)} \underbrace{\Im e^{\frac{nit}{2}}}_{\sin(nt/2)} \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad (20.12e)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \quad (20.12f)$$

□

Théorème 20.5 (Fejér).

Soit une fonction continue et 2π -périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ nous notons

$$\begin{aligned} e_k: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{ikx}. \end{aligned} \quad (20.13)$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$D_n = \sum_{k=-n}^n e_k \quad \tilde{S}_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \quad (20.14a)$$

$$F_n = \frac{D_0 + \dots + D_{n-1}}{n} \quad \tilde{F}_n = \sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f). \quad (20.14b)$$

Alors

- (1) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$.
- (2) Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, F_n converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$.
- (3) La suite $\tilde{F}_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .
- (4) Le système trigonométrique $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est total pour l'espace $(C^0(S^1), \|\cdot\|_{\infty})$ des fonctions continues 2π -périodiques.

Démonstration. Un calcul usuel montre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_l(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } l = 0 \end{cases} \quad (20.15)$$

Nous avons alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=-k}^k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e_l(t) dt}_{2\pi\delta_l} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1. \quad (20.16)$$

Cela prouve déjà le premier point.

Pour le second point, en partant de l'expression (20.11) et en considérant $x \in [-\pi, \pi,] \setminus [-\alpha, \alpha]$ (ce qui nous évite l'annulation du dénominateur),

$$|F_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \sin^2(\alpha/2)}, \quad (20.17)$$

et donc $F_n \rightarrow 0$ uniformément sur l'ensemble considéré.

Nous passons maintenant à cette histoire de convergence uniforme de la moyenne de Cesaro vers f . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \quad (20.18a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e_k(x-t) \quad (20.18b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(x-t). \quad (20.18c)$$

Par conséquent, en effectuant le changement de variable $u = x - t$ et la périodicité,

$$\tilde{F}_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) dt \quad (20.19a)$$

$$= - \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) F_n(u) du \quad (20.19b)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) F_n(u) du. \quad (20.19c)$$

Nous prouvons à présent l'uniforme continuité. Soit $\epsilon > 0$; étant donné que f est continue et 2π -périodique, elle est uniformément continue et nous considérons $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. L'équation (20.19) nous donne

$$|f(x) - \tilde{F}_n(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) F_n(t) dt \right| \quad (20.20a)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |2M F_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon |F_n(t)| dt \quad (20.20b)$$

$$\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt + \epsilon' \quad (20.20c)$$

Pour obtenir (20.20a) nous avons pu rentrer $f(x)$ dans l'intégrale en utilisant le premier point. Pour obtenir (20.20c) nous avons d'abord utilisé la positivité de F_n (lemme 20.4) pour enlever les valeurs absolues, et nous avons ensuite utilisé le fait que son intégrale valait 2π .

Étant donné que $F_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi,] \setminus [-\alpha, \alpha]$, il existe un N tel que

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt \leq \epsilon \quad (20.21)$$

dès que $n > N$. Le résultat découle.

Pour le point (4), il suffit de remarquer que chacun des $\tilde{F}_n$ est une combinaison finie d'éléments du système trigonométrique. $\square$

20.1.3 Densité dans L^p

Nous venons de voir (de deux façons différentes) que les polynômes trigonométriques étaient denses dans $(C_{2\pi}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Nous avons aussi déjà vu par le théorème 18.58 que ces polynômes trigonométriques étaient denses dans $L^p(S^1)$. Nous présentons à présent une autre façon de prouver cette dernière densité.

Théorème 20.6.

Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Par les théorèmes 20.1 ou 20.5 (au choix), nous savons que les polynômes trigonométriques sont denses dans $(C_{2\pi}^0(S^1), \|\cdot\|_\infty)$. Vu que S^1 est compact, la densité est également au sens L^p . En effet si $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$, alors

$$\|f_n - f\|_\infty = \int_0^{2\pi} |f_n - f|^p \leq \int_0^{2\pi} \epsilon^p = 2\pi \epsilon^p. \quad (20.22)$$

Donc les polynômes trigonométriques sont denses dans $(C_{2\pi}^0(S^1), \|\cdot\|_p)$. Mais nous savons par (un a fortiori sur) le théorème 18.40 que les fonctions continues sont denses dans $L^p(S^1)$.

Par densité de la densité, les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$. $\square$

20.2 Fonctions de Dirichlet

Définition 20.7.

Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une **fonction de Dirichlet** si

- (1) elle est 2π -périodique,
- (2) elle est continue par morceaux,
- (3) pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \quad (20.23)$$

Nous notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de Dirichlet.

Lemme 20.8 ([251]).

L'ensemble $C^0(S^1)$ est dense dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_2)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $f \in \mathcal{D}$ n'a qu'un seul point de discontinuité, x_0 . Alors nous considérons la fonction f_n qui est égale à f sur $S^1 \setminus B(x_0, \frac{1}{n})$ et qui sur $B(x_0, \frac{1}{n})$ est le segment de droite joignant $f(x_0 - \frac{1}{n})$ et $f(x_0 + \frac{1}{n})$. Cela est une fonction continue, et de plus nous avons

$$|f_n(x)| \leq \|f\|_\infty \quad (20.24)$$

pour tout x . En effet si x est en dehors de $B(x_0, \frac{1}{n})$ c'est évident, et si $x \in B(x_0, \frac{1}{n})$, alors $|f_n(x)|$ est majoré soit par $f(x_0 - \frac{1}{n})$ soit par $f(x_0 + \frac{1}{n})$ suivant que le raccord affine soit croissant ou décroissant. Avec ça nous avons

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{x_0 - 1/n}^{x_0 + 1/n} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \leq \int_{x_0 - 1/n}^{x_0 + 1/n} 4\|f\|_\infty^2 = \frac{8\|f\|_\infty^2}{n}. \quad (20.25)$$

Et nous voyons que $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Si f contient plusieurs points de continuité, on fait le même coup autour de chaque point, en prenant n assez grand pour que si x_0 est un point de discontinuité, $B(x_0, \frac{1}{n})$ n'en contienne pas d'autres. $\square$

Notons que la densité de $C^0(S^1)$ dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$ est impossible parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Théorème 20.9.

Le système trigonométrique $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est total dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_2)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$. Si elle est continue, le théorème de Fejèr 20.5 nous donne convergence uniforme sur S^1 d'une suite de polynômes trigonométriques vers f . Cette convergence est également une convergence L^2 parce que S^1 est compact.

Prenons donc $f \in \mathcal{D}$ non continue et $\epsilon > 0$ ¹. Par le lemme 20.8, il existe une fonction $g \in C^0(S^1)$ telle que

$$\|g - f\|_2 \leq \epsilon. \quad (20.26)$$

Le théorème de Fejèr donne aussi un polynôme trigonométrique P tel que $\|P - g\|_2 < \epsilon$; nous avons alors

$$\|P - f\|_2 \leq \|P - g\|_2 + \|g - f\|_2 \leq 2\epsilon. \quad (20.27)$$

□

Notons que cette histoire de fonctions de Dirichlet n'a pas attaqué le vrai fond du problème de la densité des polynômes trigonométriques dans $L^2(S^1)$ parce que nous restons avec une hypothèse de continuité, alors que les représentants des éléments de $L^2(S^1)$ n'ont strictement aucune régularité a priori.

20.3 Coefficients et série de Fourier

Définition 20.10.

La *série de Fourier* associée à f est

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i \frac{n}{T} x}. \quad (20.28)$$

Cette expression est pour l'instant purement formelle. Cela ne présume ni de la convergence de la série, ni, au cas où elle serait convergente, que la limite soit f .

Pour la suite nous allons considérer des fonctions périodiques de période 2π , et les coefficients de Fourier de f (quand ils existent) sont alors

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (20.29)$$

Proposition 20.11 ([252]).

Soit f une fonction continue et périodique telle que sa série de Fourier converge uniformément. Alors la convergence est vers f .

Démonstration. Notons d'abord que f étant continue sur $[0, 2\pi]$, elle y est bornée et L^2 . Par conséquent Parseval nous enseigne que

$$\|S_N(f) - f\|_{L^2} \rightarrow 0. \quad (20.30)$$

Cela signifie que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(t)|^2 dt = 0. \quad (20.31)$$

L'hypothèse de convergence uniforme nous dit que la fonction $|f(t) - S_N(t)|^2$ converge uniformément vers la fonction $|f(t) - S(t)|^2$ où nous avons écrit S la limite de S_N . En permutant la limite et l'intégrale,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - S(t)|^2 dt = 0, \quad (20.32)$$

ce qui signifie que la fonction $t \mapsto |f(t) - S(t)|^2$ est la fonction nulle. Nous en déduisons que $f = S$. □

1. Par exemple $\epsilon = 0.4$, mais ce n'est qu'un exemple hein. Si vous en voulez un autre, prenez p , un nombre premier puis calculez $\epsilon = 1/p$.

Proposition 20.12.

Soit f une fonction 2π -périodique. Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}. \quad (20.33)$$

De plus, la suite $(S_n f)$ converge uniformément vers f .

Démonstration. Nous posons

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}. \quad (20.34)$$

Étant donné les hypothèses, la série de droite converge absolument, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Nous avons

$$|g(x) - (S_n f)(x)| \leq \sum_{|k| > n} |c_k(f)|, \quad (20.35)$$

mais le terme de droite tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$ parce que c'est le reste d'une série convergente. Cela signifie que $S_n f$ converge uniformément vers g .

Par ailleurs nous savons que dans L^2 nous avons la convergence $S_n f \rightarrow f$ (parce que f est continue sur le compact $[0, 2\pi]$ et donc y est bornée et L^2), ce qui signifie que $g = f$ presque partout au sens L^2 . Ces deux fonctions étant continues, elles sont égales partout. $\square$

Théorème 20.13.

Soit f , une fonction C^1 et 2π -périodique. Nous notons $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier. Alors $(c_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}. \quad (20.36)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous posons $g(t) = f(t) e^{-int}$. Nous avons

$$0 = g(2\pi) - g(0) = \int_0^{2\pi} g'(t) dt = \int_0^{2\pi} [f'(t) e^{-int} - in f(t) e^{-int}]. \quad (20.37)$$

Du coup, $c_n(f') = in c_n(f)$. La fonction f' étant bornée (parce que continue sur $[0, 2\pi]$), elle est de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ et par les inégalités de Parseval (théorème 17.34) nous avons

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 < \infty. \quad (20.38)$$

Par conséquent $(c_n(f')) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et a fortiori $(c_n(f'))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous indique alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n(f)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} |c_n(f')| \leq \left(\sum_n \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_n |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} < \infty. \quad (20.39)$$

Nous procédons de même pour $n < 0$. Cela prouve que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty. \quad (20.40)$$

$\square$

Corollaire 20.14.

Soient f, g deux fonctions continues et 2π -périodiques. Si $c_n(f) = c_n(g)$ alors $f = g$.

Démonstration. Dans le cas de fonctions continues, le théorème de Fejér nous enseigne que si nous posons

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} \quad (20.41)$$

alors nous avons la convergence

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)(x) \rightarrow f(x). \quad (20.42)$$

C'est à dire qu'une fonction continue est déterminée par ses coefficients de Fourier. $\square$

Exemple 20.15

Considérons la fonction

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \quad (20.43)$$

sur $[-\pi, \pi]$. Nous la développons en série trigonométrique, et étant paire il n'y a pas de sinus. Un calcul montre que

$$a_0 = \frac{4}{3} \quad (20.44)$$

et

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2 \pi^2}, \quad (20.45)$$

de telle sorte que

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}. \quad (20.46)$$

Nous avons $f(\pi) = 0$, mais vu le développement,

$$f(\pi) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (20.47)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (20.48)$$

$\triangle$

20.3.1 Le contre-exemple que nous attendions tous

Nous montrons maintenant que la continuité et la périodicité ne sont pas suffisantes pour avoir convergence de la série de Fourier.

Proposition 20.16 ([1]).

Soit $C_{2\pi}^0$ l'ensemble des fonctions continues muni de la norme uniforme. Nous définissons

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}. \quad (20.49)$$

Alors il existe $f \in C_{2\pi}^0$ tel que la suite $n \mapsto S_n(f)(0)$ soit divergente. En particulier f n'est pas la somme de sa série de Fourier.

Démonstration. Nous considérons la forme linéaire

$$l_n: C_{2\pi}^0 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \mapsto S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^n c_k(f). \quad (20.50)$$

La forme est continue Nous montrons d'abord que $\|l_n\|$ est continue en montrant que $\|l_n\| < \infty$ et en utilisant la proposition 6.217. Pour cela nous calculons un peu :

$$l_n(f) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \quad (20.51)$$

où $D_n(t)$ est le noyau de Dirichlet dont nous savons une formule par le lemme 20.2. Nous avons donc

$$|l_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \|f\|_{\infty} dt. \quad (20.52)$$

En prenant $\|f\|_{\infty} = 1$ nous avons la borne suivante pour la norme de l_n :

$$\|l_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt < \infty. \quad (20.53)$$

Notons que la convergence de l'intégrale vient de la continuité de la fonction

$$t \mapsto \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad (20.54)$$

qui, elle même, se prouve avec une règle de l'Hospital :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(at)}{\sin(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \cos(at)}{\cos(t)} = a. \quad (20.55)$$

Donc $D_n(t)$ a une limite bien définie pour $t \rightarrow 0$ et est alors une fonction continue sur le compact $[-\pi, \pi]$.

La norme de l_n (début) Nous avons prouvé que $\|l_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$. Nous allons à présent prouver que cela est effectivement la norme de l_n . Pour $\epsilon > 0$ nous considérons la fonction

$$f_{\epsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{D_n(x)}{|D_n(x)| + \epsilon}. \quad (20.56)$$

C'est une fonction continue et 2π -périodique satisfaisant $\|f_{\epsilon}\| \leq 1$ parce que le dénominateur est toujours plus grand que le numérateur. Nous nous proposons de calculer

$$l_n(f_{\epsilon}) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\epsilon}(t) e^{-ikt} dt. \quad (20.57)$$

Vu que $f_{\epsilon}(t) e^{-ikt}$ vaut en norme $|f_{\epsilon}(t)|$ qui est une fonction intégrable (ne dépendant pas de k) sur $[-\pi, \pi]$, le théorème de la convergence dominée 7.134 nous permet de permuter la somme et l'intégrale :

$$l_n(f_{\epsilon}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \epsilon} \underbrace{\sum_{k=-n}^n e^{-ikt}}_{=D_n(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + \epsilon} dt. \quad (20.58)$$

Nous avons donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} l_n(f_{\epsilon}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt. \quad (20.59)$$

Mais vue l'inégalité (20.53) nous avons

$$\|l_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt. \quad (20.60)$$

Notre tâche est maintenant de donner une valeur à cette intégrale.

Norme de l_n tend vers ∞ Nous utilisons la divergence de l'intégrale du sinus cardinal (13.846).

D'abord nous écrivons

$$\|l_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{|\sin(t/2)|} dt, \quad (20.61)$$

ensuite nous nous souvenons que $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout x , ce qui nous permet de changer le dénominateur :

$$\|l_n\| \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{|t|} dt \quad (20.62)$$

Nous y effectuons le changement de variable $u = \frac{2n+1}{2}t$ qui donne

$$\|l_n\| \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{|u|} du. \quad (20.63)$$

Utilisant cette histoire de sinus cardinal nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|l_n\| = \infty. \quad (20.64)$$

La conclusion L'espace $(C_{2\pi}^0, \|\cdot\|_{\infty})$ est complet², donc le théorème de Banach-Steinhaus 18.8 s'applique. Par rapport aux notations de l'énoncé de Banach-Steinhaus, nous posons

$$E = (C_{2\pi}^0, \|\cdot\|_{\infty}) \quad (20.65a)$$

$$F = \mathbb{R} \quad (20.65b)$$

$$H = \{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (20.65c)$$

Vu que la suite $(\|l_n\|)$ n'est pas bornée, il existe $f \in C_{2\pi}^0$ tel que

$$\sup_n \|l_n(f)\| = \infty. \quad (20.66)$$

Pour cette fonction nous avons

$$\sup_{n \geq 0} S_n(f)(0) = \infty, \quad (20.67)$$

et donc la série de Fourier de f ne converge pas en zéro.

□

20.3.2 Inégalité isopérimétrique

Définition 20.17.

Une **courbe de Jordan** dans le plan est une application $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est continue et injective.

Une telle courbe peut évidemment être vue comme une application $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. En particulier il n'est jamais mauvais de se rappeler qu'on peut choisir une paramétrisation normale par la proposition 14.41.

Théorème 20.18 (Théorème de Jordan[253]).

Si γ est une courbe de Jordan, alors l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ a exactement deux composantes connexes. L'une est bornée, l'autre non. Les deux ont γ comme frontière.

Le théorème suivant dit que parmi les courbes C^1 , le cercle a la plus grande surface possible à périmètre donné.

Théorème 20.19 (Inégalité isopérimétrique[1]).

Soit $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe de Jordan de classe C^1 . Nous notons L sa longueur et S l'aire contenue de la surface délimitée³ par f . Alors

2. Parce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue, théorème 11.233.

3. C'est la partie connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ dont l'existence est donnée par le théorème de Jordan 20.18.

(1) Nous avons l'**inégalité isopérimétrique** : $L^2 \geq 4\pi S$.

(2) Nous avons l'égalité $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si la courbe donnée par f est un cercle.

Démonstration. Nous commençons par considérer un chemin dont la longueur est 2π et nous en considérons sa paramétrisation normale. Nous allons exprimer l'aire S en utilisant le théorème de Green, et plus particulièrement la formule de surface (13.442).

Si $f(s) = x(s) + iy(s)$, nous devons intégrer $y'x - x'y$, qui n'est rien d'autre que la partie imaginaire de $f'(s)\overline{f(s)}$. Donc

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} f'(s) \overline{f(s)} ds \quad (20.68)$$

Nous considérons les coefficients de Fourier de f donnés par la formule (20.29) :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} ds. \quad (20.69)$$

Ceux de f' (qui est aussi continue sur le compact S^1 et donc tout autant L^2) sont donnés par

$$c_n(f') = in c_n(f). \quad (20.70)$$

D'autre part en vertu du théorème 14.17, la longueur de γ s'exprime en terme de l'intégrale de la norme de sa dérivée :

$$2\pi = L = \int_0^{2\pi} |f'(s)| ds = \int_0^{2\pi} |f'(s)|^2 ds \quad (20.71)$$

parce que nous avons choisis une paramétrisation normale qui vérifie automatiquement $|f'(s)| = 1$ pour tout s . L'identité de Parseval sous sa forme (17.101) appliquée à f' nous enseigne que

$$L = 2\pi = \int_0^{2\pi} |f'(s)|^2 ds = 2\pi \langle f', f' \rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2 = 2\pi \sum_n n^2 |c_n(f)|^2. \quad (20.72)$$

Par ailleurs le système trigonométrique étant une base hilbertienne, et les fonctions f et f' étant dans $L^2([0, 2\pi])$ (parce que continues sur un compact), elles sont égales à leurs séries de Fourier (au sens L^2), c'est à dire que nous avons l'égalité (18.114). Nous avons alors

$$\langle f', f \rangle_{L^2} = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f') e_n, \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e_m \right\rangle \quad (20.73a)$$

$$= \sum_m \sum_n c_n(f') \overline{c_m(f)} \underbrace{\langle e_n, e_m \rangle}_{\delta_{m,n}} \quad (20.73b)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f') \overline{c_n(f)} \quad (20.73c)$$

$$= \sum_n in |c_n(f)|^2 \quad (20.73d)$$

où nous avons utilisé la continuité du produit scalaire pour sortir les sommes. Avec cela nous pouvons exprimer l'aire (20.68) en termes de coefficients de Fourier :

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} 2\pi \langle f', f \rangle = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n(f)|^2. \quad (20.74)$$

En utilisant les expressions (20.72) et (20.74) pour L et S , et en écrivant $L = 2\pi L$, nous avons

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^2 - n) |c_n(f)|^2 \geq 0. \quad (20.75)$$

Cela prouve l'inégalité demandée dans le cas où $L = 2\pi$.

Si γ n'est pas de longueur 2π mais L , alors nous considérons le chemin $\sigma(t) = \frac{2\pi\gamma(t)}{L}$. Sa longueur est 2π et son aire, au vu de la formule de Green (20.68), son aire est $4\pi^2 \frac{S}{L^2}$. L'inégalité isopérimétrique appliquée au chemin σ donne alors $L^2 \geq 4\pi S$.

Le cas d'égalité s'obtient uniquement si $c_n = 0$ pour tout n différent de 0 ou 1. Dans ce cas nous avons

$$f(s) = c_0(f) + c_1(f)e^{is}, \quad (20.76)$$

qui est un cercle de centre $c_0(f)$ et de rayon $|c_1(f)|$. $\square$

20.3.3 Suite équirépartie, critère de Weyl

Définition 20.20.

Soit u une suite dans $[0, 1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$ nous posons

$$X_n(a, b) = \text{Card} \{k \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } u_k \in [a, b]\}. \quad (20.77)$$

Nous disons que la suite u est **équirépartie** si pour tout $0 \leq a < b < 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(a, b)}{b} = 0. \quad (20.78)$$

Voir aussi la remarque 26.116 sur les nombres normaux.

Proposition 20.21 (Critère de Weyl[204, 1]).

Soit (x_n) une suite dans $[0, 1[$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) La suite (x_n) est équirépartie.
- (2) Pour toute fonction continue à valeurs réelles sur $[0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (20.79)$$

- (3) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} = 0. \quad (20.80)$$

Démonstration. On pose

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (20.81)$$

Une espèce de lemme Supposons connaître un ensemble de fonctions A dense dans $C^0([0, 1])$ pour toutes les fonctions duquel nous avons la limite (20.79). Alors la limite a lieu pour toute fonction de $C^0([0, 1])$. En effet, soit $f \in C^0([0, 1])$ et $g \in A$ tel que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. Alors

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \int_0^1 f(t) dt \right\| \leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - g(x_k)) \right\| \quad (20.82a)$$

$$+ \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k) - \int_0^1 g(t) dt \right\| \quad (20.82b)$$

$$+ \left\| \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right\|. \quad (20.82c)$$

Le premier terme se majore par ϵ . Le troisième est la même majoration : $\int_0^1 (f(t) - g(t)) dt \leq \|f - g\|_\infty = \epsilon$. Par hypothèse sur l'espace A , le second terme se majore par ϵ lorsque n est grand.

(1)⇒(2) Nous supposons que la suite est équirépartie et nous commençons par montrer le résultat pour les fonctions en escalier. Soit donc la fonction en escalier $\eta(x) = c_j$ sur $a_{j-1} < x < a_j$. Sur le point a_j lui-même, la fonction η vaut soit c_j soit c_{j+1} . Nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta(x_k) = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^m c_j X_n(a_j, a_{j+1}) - \sum_{j=1}^m c_j X_n(a_j, a_j) + \sum_{j=1}^m \eta(a_j) X_n(a_j, a_j) \right]. \quad (20.83)$$

À la limite $n \rightarrow \infty$, les deux derniers termes tombent ⁴ et il reste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta(x_k) = \sum_{j=1}^m c_j (a_{j+1} - a_j). \quad (20.84)$$

Or par construction, pour une fonction en escalier,

$$\sum_{j=1}^m c_j (a_{j+1} - a_j) = \int_0^1 \eta. \quad (20.85)$$

Étant donné que les fonctions en escalier sont denses dans les fonctions continues, l'espèce de lemme plus haut conclut.

(2)⇒(1) Nous prouvons maintenant le sens inverse. C'est à dire que pour toute fonction continue sur $[0, 1]$, nous avons

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (20.86)$$

Nous devons en déduire que (x_n) est équirépartie. Pour ce faire, soit $x \in [0, 1[$ et $\epsilon > 0$ tel que $x + \epsilon < 1$. Nous considérons $\varphi = \mathbb{1}_{[x, 1[}$ et

$$\varphi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, x[\\ \frac{t-x}{\epsilon} & \text{si } t \in [x, x+\epsilon[\\ 1 & \text{si } t \geq x+\epsilon. \end{cases} \quad (20.87)$$

Cela est une fonction continue, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\varphi_\epsilon(t)) = \int_0^1 \varphi_\epsilon(t) dt = \int_x^{x+\epsilon} \frac{t-x}{\epsilon} dt + \int_{x+\epsilon}^1 1 dt = 1 - x - \frac{\epsilon}{2}. \quad (20.88)$$

Mais $\varphi_\epsilon \leq \varphi$, donc $S_n(\varphi_\epsilon) \leq S_n(\varphi)$ et donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(\varphi) \geq 1 - x. \quad (20.89)$$

Notons que nous ne savons pas si la *vraie* limite de gauche existe; c'est pourquoi nous prenons la limite inférieure, qui existe toujours.

Nous définissons aussi

$$\psi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, x-\epsilon[\\ \frac{t-x+\epsilon}{\epsilon} & \text{si } t \in [x-\epsilon, x[\\ 1 & \text{si } t > x. \end{cases} \quad (20.90)$$

C'est encore une fonction continue et nous trouvons ⁵

$$\int_0^1 \psi_\epsilon(t) dt = 1 - x + \frac{\epsilon}{2}. \quad (20.91)$$

4. J'en profite pour mentionner que mon équation (20.83) n'est pas la même que celle de [204] dans laquelle il me semble voir une faute; quoi qu'il en soit, les termes litigieux tombent.

5. Je recommande chaudement de dessiner les fonctions φ_ϵ et ψ_ϵ pour avoir une idée de la situation.

Vu que $\psi_\epsilon \geq \varphi$, nous avons $S_n(\psi_\epsilon) \geq S_n(\varphi)$ et donc

$$\limsup_n S_n(\varphi) \leq 1 - x. \quad (20.92)$$

Nous avons déjà obtenu que

$$1 - x \leq \liminf S_n(\varphi) \leq \limsup S_n(\varphi) \leq 1 - x, \quad (20.93)$$

donc la limite existe et vaut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\varphi) = 1 - x. \quad (20.94)$$

Cela est pour la fonction caractéristique $\varphi = \mathbb{1}_{[x,1[}$. Si nous prenons une fonction caractéristique $\mathbb{1}_{[a,b]}$, nous avons la même chose parce que $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est une combinaison linéaire de fonctions du type $\mathbb{1}_{[x,1[}$.

Nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\mathbb{1}_{[a,b]}) = b - a, \quad (20.95)$$

alors que le membre de gauche n'est autre que

$$S_n(\mathbb{1}_{[a,b]}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[a,b]}(x_k) = \frac{1}{n} N(n, a, b). \quad (20.96)$$

(2)⇒(3) Vu que $e^{2i\pi p u_k} = \cos(2\pi p u_k) + i \sin(2\pi p u_k)$ est une fonction périodique, c'est immédiat.

(3)⇒(2) Par linéarité, le point (2) montre que si f est un polynôme trigonométrique, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt. \quad (20.97)$$

Il nous reste à prouver que les polynômes trigonométriques sont denses dans les fonctions continues sur $[0, 1]$. Soit une fonction continue sur $[0, 1]$ avec $f(0) = f(1)$. Alors le théorème de Stone-Weierstrass dans sa version trigonométrique (lemme 20.1) nous donne la densité.

Si $f(1) \neq f(0)$ c'est pas très grave : on peut trouver une fonction g vérifiant $g(0) = g(1)$ et $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$. Ensuite un polynôme trigonométrique approxime très bien g . .

□

20.3.4 À propos des coefficients

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} c: (L_{2\pi}^1, \|\cdot\|_1) &\rightarrow (C_0, \|\cdot\|_\infty) \\ f &\mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (20.98)$$

qui à une fonction 2π -périodique fait correspondre la suite (bornée) de ses coefficients de Fourier. Nous rappelons la définition

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (20.99)$$

Nous allons montrer que cette application est linéaire, continue, injective et non surjective. Pour la continuité, par la linéarité il suffit de la montrer en 0. Nous devons donc montrer que si nous avons une suite de fonctions f_k qui tend vers 0 au sens L^1 , alors $c(f_k) \rightarrow 0$ au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'ensemble des suites.

Si nous posons $r_k = \int_0^{2\pi} |f_k(t)| dt$, alors $r_k = \|f_k\|_1$ et nous avons $r_k \rightarrow 0$. Mais par définition

$$|c_n(f_k)| \leq r_k, \quad (20.100)$$

et donc $\|c(f_k)\|_\infty \leq r_k$. L'application c est donc continue. L'injectivité est donnée par le corollaire 20.14.

Si nous supposons que l'application c est continue, alors le théorème d'isomorphisme de Banach (18.2) nous dit que cela devrait être un homéomorphisme, c'est à dire que c^{-1} serait également continue. Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Nous considérons la suite de suite

$$(c_n)_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k < n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (20.101)$$

Ici $(c_n)_k$ est le terme numéro k de la suite n . Par injectivité de l'application qui à une fonction fait correspondre la suite de ses coefficients de Fourier, la seule fonction qui possède ces coefficients est

$$f_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{n,k} e^{ikt}. \quad (20.102)$$

Étant donné que $\|f_n\|_1 = n$, la suite $(\|f_n\|_1)$ n'est pas bornée alors que la suite de suites (20.101) est bornée dans l'ensemble des suites parce que $\|c_n\|_\infty = 1$.

Chapitre 21

Transformation de Fourier

Ici nous utilisons la convention de la transformée de Fourier de wikipedia, c'est à dire

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (21.1a)$$

$$f(x) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (21.1b)$$

Nous allons par ailleurs utiliser indifféremment les notations $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$ pour la transformée de Fourier de f . La notation $\mathcal{F}$ est pratique pour les transformées de loooooongues expressions ainsi que pour parler de l'application «transformée de Fourier» d'un espace de fonction vers un autre.

21.1.

Nous verrons dans le théorème 21.25 que la Transformée de Fourier n'est pas une isométrie de L^2 . Pour avoir une isométrie, il aurait fallu choisir des coefficients moins simples dans (21.1a).

21.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 21.2.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors nous définissons sa **transformée de Fourier** est la fonction donnée par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (21.2)$$

Lemme 21.3.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si $g(x) = f(\lambda x)$ alors

$$\hat{g}(\xi) = \lambda^{-d} \hat{f}(\xi/\lambda). \quad (21.3)$$

Démonstration. Il s'agit de faire le changement de variable $y = \lambda x$ dans l'intégrale

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x) e^{-i\xi x} dx. \quad (21.4)$$

Dans le changement de variables, vient le coefficient $dx = \lambda^{-d} dy$. □

Proposition 21.4.

La transformée de Fourier est un morphisme vis-à-vis de la convolution sur $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}. \quad (21.5)$$

Démonstration. Nous devons étudier l'intégrale

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(y) g(t-y) dy \right] e^{-it\xi} dt. \quad (21.6)$$

Ici nous avons choisit des représentants f et g dans les classes de L^1 . Montrons que f est borélienne. D'abord $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ où f_+ et f_- sont des fonctions positives. Afin d'alléger les notations nous supposons un instant que f est positive et nous posons

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{f(x) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[} \cdot \quad (21.7)$$

Le fait que f soit dans L^1 implique que chacune des fonctions f_n est borélienne et donc que f l'est aussi en tant que limite ponctuelle de fonctions boréliennes¹.

Nous allons appliquer le théorème de Fubini 13.79 à la fonction

$$\phi(x, y) = f(x)g(y)e^{-i\xi(x+y)} \quad (21.8)$$

qui est borélienne en tant que produit et composé de fonctions boréliennes. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-i\xi x}| |g(y)e^{-i\xi y}| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(|f(x)| \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right) dx \quad (21.9a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \|g\|_1 \quad (21.9b)$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \quad (21.9c)$$

Le théorème est donc applicable. D'abord nous avons :

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-i\xi y} dy \right) \quad (21.10a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)e^{-i\xi(x+y)} dy \right) dx \quad (21.10b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)e^{-i\xi t} dt \right) dx. \quad (21.10c)$$

Jusqu'ici nous n'avons pas utilisé Fubini. Nous avons seulement introduit le nombre $\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-i\xi y} dy$ dans l'intégrale par rapport à x et effectué le changement de variables $y \mapsto t = x + y$. Maintenant nous appliquons le théorème de Fubini pour inverser l'ordre des intégrales :

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)e^{-i\xi t} dx \right) dy \quad (21.11a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x) dx \right) dt \quad (21.11b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} (f * g)(t) dt \quad (21.11c)$$

$$= \widehat{f * g}(\xi). \quad (21.11d)$$

□

Proposition 21.5.

Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors sa transformée de Fourier est continue.

Démonstration. Nous considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} f(x) dx. \quad (21.12)$$

Pour montrer que cette fonction $\hat{f}$ est continue en ξ_0 nous considérons une suite $(\xi_n) \rightarrow \xi_0$ et nous voulons montrer que $\hat{f}(\xi_n) \rightarrow \hat{f}(\xi_0)$. Pour cela nous considérons les fonctions

$$g_n(x) = e^{-i\xi_n x} f(x) \quad (21.13)$$

1. Le fait que f soit borélienne est une conséquence du théorème 18.76.

qui convergent simplement vers $g(x) = e^{-i\xi x} f(x)$. Étant donné que

$$|g_n(x)| < |f(x)|, \quad (21.14)$$

le théorème de la convergence dominée donne alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \quad (21.15)$$

c'est à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi_n) = \hat{f}(\xi)$. La fonction $\hat{f}$ est donc continue. $\square$

Lemme 21.6.

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Démonstration. Cela est une simple vérification :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i x \xi} dx, \quad (21.16)$$

nous avons, pour tout ξ ,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx, \quad (21.17)$$

ce qui signifie exactement $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. $\square$

Lemme 21.7 (Lemme de Riemann-Lebesgue[254]).

Si f est une fonction $L^1(\mathbb{R})$ alors $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le résultat dans le cas d'une fonction g en escalier, et plus précisément par une fonction caractéristique d'un compact $K = [a, b]$. Au niveau de la transformée de Fourier nous avons

$$\hat{\mathbb{1}}_K(\xi) = \int_a^b e^{-i\xi x} dx = -\frac{1}{i\xi} (e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}). \quad (21.18)$$

Par conséquent

$$|\hat{\mathbb{1}}_K(\xi)| \leq \frac{2}{|\xi|}. \quad (21.19)$$

Plus généralement si $g = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{1}_{K_i}$, alors

$$|\hat{g}(\xi)| \leq \frac{2}{|\xi|} \sum_{i=1}^N |c_i|, \quad (21.20)$$

et donc nous avons effectivement $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} |\hat{g}(\xi)| = 0$.

Nous passons maintenant au cas général $f \in L^1(\mathbb{R})$. Étant donné que les fonctions L^1 en escalier sont denses dans L^1 , nous considérons une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ en escalier telle que $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Nous avons donc

$$\|\hat{f} - \hat{g}\|_\infty \leq \|f - g\|_1 < \epsilon. \quad (21.21)$$

Donc

$$\|\hat{f}(\xi)\| \leq \|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)\| + |\hat{g}(\xi)|. \quad (21.22)$$

Le premier terme est plus petit que ϵ . Il nous reste à voir que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |\hat{g}(\xi)| = 0, \quad (21.23)$$

mais cela est le résultat de la première partie de la preuve. $\square$

Corollaire 21.8.

La transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$ est bornée.

Démonstration. Par le corollaire 21.5, la transformée de Fourier d'une fonction L^1 est continue. Le lemme de Riemann-Lebesgue 21.7 impliquant qu'elle tend vers zéro en $\pm\infty$, elle doit être bornée. $\square$

21.1.1 Formule sommatoire de Poisson

Proposition 21.9 (Formule sommatoire de Poisson).

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $L^1(\mathbb{R})$. Nous supposons que

(1) il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(1 + |x|)^\alpha}, \quad (21.24)$$

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(2\pi n)| < \infty$.

Alors nous avons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi n). \quad (21.25)$$

Démonstration. **Convergence normale** Nous commençons par montrer qu'il y a convergence normale sur tout compact séparément des séries sur les $n \geq 0$ et sur les $n < 0$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans $[-A, A]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq 2A$. Pour $x \in K$ nous avons

$$|x + n| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq \frac{|n|}{2}. \quad (21.26)$$

Du coup nous avons un $\alpha > 1$ tel que

$$|f(x + n)| \leq \frac{M}{(1 + |x + n|)^\alpha} \leq \frac{M}{\left(1 + \frac{|n|}{2}\right)^\alpha}. \quad (21.27)$$

Lorsque n est grand, cela a le comportement de $M/|n|^\alpha$ et donc la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x + n) \quad (21.28)$$

est une série convergent normalement. Les deux séries (usuelles)

$$a_- = \sum_{n \leq 0} f(x + n) \quad (21.29a)$$

$$a_+ = \sum_{n > 0} f(x + n) \quad (21.29b)$$

convergent normalement.

Convergence commutative Au sens de la définition 6.186 nous avons

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) = a_+ + a_-. \quad (21.30)$$

En effet si nous prenons $J'_0 \subset \mathbb{N}$ fini tel que $|\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus J'_0} f(x + n) - a_+| \leq \epsilon$ et $J'_1 \in -\mathbb{N}$ tel que $|\sum_{n \in -\mathbb{N} \setminus J'_1} f(x + n) - a_-| < \epsilon$, et si nous posons $J_0 = J'_0 \cup J'_1$ alors si K est un ensemble fini de $\mathbb{Z}$ contenant J_0 nous avons

$$\left| \sum_{n \in K} f(n + x) - (a_+ + a_-) \right| \leq \left| \sum_{n \in K^+} f(n + x) - a_+ \right| + \left| \sum_{n \in K^-} f(n + x) - a_- \right| \leq 2\epsilon \quad (21.31)$$

où K^+ sont les éléments positifs de K et K^- sont les *strictement* négatifs. Maintenant que la famille $\{f(n + x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille sommable, nous savons qu'elle est commutativement sommable et que la proposition 6.191 nous permet de sommer dans l'ordre que l'on veut. Nous pouvons donc écrire sans ambiguïté l'expression $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n)$ ou $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n)$.

re-convergence normale Nous posons donc sans complexes la série

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) \quad (21.32)$$

qui converge tant commutativement que normalement. Notons que nous pouvons maintenant dire que la série sur $\mathbb{Z}$ converge normalement ; pas seulement les deux séries séparément.

Continuité, périodicité Étant donné que chacune des fonctions $f(x + n)$ est continue, la convergence normale nous assure que F est continue.

De plus F est périodique parce que

$$F(x + 1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 1 + n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(x + p) \quad (21.33)$$

où nous avons posé $p = 1 + n$.

Coefficients de Fourier En vertu de la définition (18.110) et de la périodicité de F ,

$$c_n(F) = \int_{-1/2}^{1/2} F(t) e^{-2\pi i n t} dt \quad (21.34a)$$

$$= \int_0^1 F(t) e^{-2\pi i n t} dt \quad (21.34b)$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + n) e^{-2\pi i n t} dt \quad (21.34c)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2\pi i (u-n)t} du \quad (21.34d)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i n u} du \quad (21.34e)$$

$$= \hat{f}(2\pi n). \quad (21.34f)$$

où nous avons effectué le changement de variables $u = t + n$, et permuté l'intégrale et la somme en vertu du fait que la somme converge normalement.

Conclusion Étant donné l'hypothèse $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ la proposition 20.12 nous dit que

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{2\pi i n x}, \quad (21.35)$$

c'est à dire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi n) e^{2\pi i n x}. \quad (21.36)$$

En écrivant cette égalité en $x = 0$ nous trouvons le résultat :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n). \quad (21.37)$$

□

Exemple 21.10

La formule sommatoire de Poisson peut être utilisée pour calculer des sommes dans l'espace de Fourier plutôt que dans l'espace direct. Nous allons montrer dans cet exemple l'égalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2 / \alpha}. \quad (21.38)$$

Si α est grand, alors la somme de gauche est plus rapide, tandis que si α est petit, c'est le contraire.

Nous appliquons la formule sommatoire de Poisson à la fonction

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}. \quad (21.39)$$

Nous avons

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2 - ixt} dt \quad (21.40a)$$

$$= e^{-x^2/4\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{\alpha}t + \frac{ix}{2\sqrt{\alpha}})^2} dt \quad (21.40b)$$

$$= e^{-x^2/4\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R} + \frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-u^2} du. \quad (21.40c)$$

Pour traiter cette intégrale nous utilisons la proposition 19.6 en considérant le chemin rectangulaire fermé qui joint les points $-R$, R , $R + ai$, $-R + ai$ et $f(z) = e^{-z^2}$. Calculons l'intégrale sur les deux côtés verticaux. Nous posons

$$\gamma_R(t) = R + tia \quad (21.41)$$

avec $t: 0 \rightarrow 1$. Nous avons

$$\int_{\gamma_R} f = \int_0^1 f(\gamma_R(t)) \|\gamma_R'(t)\| dt \quad (21.42a)$$

$$= ae^{-R^2} \int_0^1 e^{-2tRia + at^2} dt, \quad (21.42b)$$

donc en module nous avons

$$\left| \int_{\gamma_R} f \right| \leq ae^{-R^2} \int_0^1 e^{at^2} dt \leq Me^{-R^2}, \quad (21.43)$$

où M est une constante ne dépendant pas de R . Lorsque $R \rightarrow \infty$, la contribution des chemins verticaux s'annule et nous trouvons que

$$\int_{\mathbb{R} + ai} e^{-u^2} du = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du, \quad (21.44)$$

que nous pouvons utiliser pour continuer le calcul (21.40). Nous avons

$$\hat{f}(x) = \frac{e^{-x^2/4\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha} \quad (21.45)$$

où nous avons utilisé la formule (13.124). Par conséquent ce qui rentre dans la formule sommatoire de Poisson est

$$\hat{f}(2\pi n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2 / \alpha}. \quad (21.46)$$

△

21.2 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz

La définition de la transformée de Fourier de $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx. \quad (21.47)$$

Si α est un multiindice de taille m , nous notons

$$(M_\alpha f)(x) = x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_m} f(x). \quad (21.48)$$

Lemme 21.11 (Lemme de transfert).

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et si α est un multiindice, alors

$$\partial^\alpha \hat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{M_\alpha \varphi}. \quad (21.49)$$

et

$$\widehat{\partial^\alpha \varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi). \quad (21.50)$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $h(x, \xi) = \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi}$ dont la dérivée par rapport à ξ_i est donnée par $-i(M_i \varphi)(x) e^{-ix \cdot \xi}$. Cette fonction est majorée en norme par

$$G(x) = M_i \varphi(x), \quad (21.51)$$

qui est encore une fonction à décroissance rapide et donc parfaitement intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Le théorème 13.180 nous dit donc que la dérivée de $\hat{\varphi}$ par rapport à ξ_i existe et vaut

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi_i}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}^n} x_i \varphi(x) e^{-i\xi \cdot x} dx = -i \widehat{M_i \varphi}(\xi). \quad (21.52)$$

En appliquant ce résultat en chaîne, nous trouvons la première formule annoncée.

Nous passons à la seconde formule annoncée. Étant donné que $\varphi \in \mathcal{S}$, ses dérivées le sont aussi et par conséquent, il n'y a pas de problèmes pour écrire

$$\widehat{\partial_{x_k} \varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx. \quad (21.53)$$

Étant donné que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) e^{-ix \cdot \xi} - i \xi_k \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi}, \quad (21.54)$$

notre tâche sera de prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} \right) dx = 0. \quad (21.55)$$

Autrement dit, nous voulons montrer que le terme au bord d'une intégration par partie s'annule. D'abord le fait que φ soit à décroissance rapide nous assure que l'intégrale (21.55) converge. Pour chaque ξ , la fonction

$$f(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} \right) \quad (21.56)$$

est intégrable par rapport à x . De plus, f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour chacune de ses variables (les autres étant fixées). Le théorème de Fubini 13.78 nous permet alors de décomposer l'intégrale en

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d. \quad (21.57)$$

De plus nous pouvons intégrer dans l'ordre de notre choix et nous choisissons évidemment d'intégrer d'abord par rapport à x_k . Étudions donc l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi(x) e^{-ix\xi} \right) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi(x) e^{-ix\xi} \right) dx \quad (21.58)$$

dans laquelle nous avons un peu allégé les notations. Une primitive de ce qui est intégré est toute trouvée : c'est $\varphi(x) e^{-ix\xi}$, et nous pouvons utiliser le théorème fondamental du calcul intégral pour écrire que

$$\int_{-A}^A \left(\varphi(x) e^{-ix\xi} \right)' dx = \left[\varphi(x) e^{-ix\xi} \right]_{x=-A}^{x=A}. \quad (21.59)$$

Vu que φ est dans $\mathcal{S}$, la limite $A \rightarrow \infty$ donne zéro.

En substituant maintenant (21.54) dans (21.53) et en tenant compte du terme que nous venons de montrer s'annuler, nous avons

$$\widehat{\partial_k \varphi}(\xi) = -i\xi_k \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} = -i\xi_k \hat{\varphi}(\xi). \quad (21.60)$$

En recommençant la procédure $|\alpha|$ fois nous trouvons la seconde formule annoncée. $\square$

Proposition 21.12 ([134]).

L'espace de Schwartz est stable par transformée de Fourier. De plus l'application

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad (21.61)$$

est une bijection linéaire et continue.

Démonstration. La linéarité découle de celle de l'intégrale. La difficulté est de prouver que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons bien que $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que cette association est continue².

Stabilité Nous devons prouver que pour tout multiindices α et β , nous avons $p_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi}) < \infty$.

Nous avons

$$\xi^\beta \partial^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \xi^\beta (-i)^{|\alpha|} \widehat{M_\alpha \varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \widehat{\partial^\beta M_\alpha \varphi}(\xi). \quad (21.62)$$

Ensuite nous nous souvenons que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ parce que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) e^{-ix \cdot \xi}| = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_1. \quad (21.63)$$

Donc

$$p_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi}) = \|\partial^\beta M_\alpha \varphi\|_\infty \leq \|\partial^\beta M_\alpha \varphi\|_1. \quad (21.64)$$

Du fait que φ soit dans $\mathcal{S}$, la dernière expression est finie. Cela prouve déjà que

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \quad (21.65)$$

Continuité Nous supposons avoir une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, et nous devons prouver que $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$. Pour alléger les notations, nous posons $f_n = \varphi_n - \varphi$. Nous avons

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \|\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}\|_\infty \quad (21.66a)$$

$$= \|\partial^\beta M_\alpha f\|_\infty \text{ lemme 21.11.} \quad (21.66b)$$

$$\leq \|\partial^\beta M_\alpha f\|_1 \quad (21.66c)$$

La convergence $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ nous dit entre autres que $\partial^\beta M_\alpha f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$; en particulier la proposition 18.75 nous dit que $\partial^\beta M_\alpha f_n \xrightarrow{L^1} 0$, ce qui signifie, par les majorations (21.66) que

$$\|\hat{f}_n\|_{\alpha,\beta} \leq \|\partial^\beta M_\alpha f_n\|_1 \rightarrow 0, \quad (21.67)$$

ce qui prouve la continuité de transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Bijection Une preuve peut être trouvée dans [255]. $\square$

Proposition 21.13 ([8]).

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ et la transformée de Fourier partielle

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-iky} \varphi(x, y) dy. \quad (21.68)$$

Alors $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

2. Pour rappel, en dimension infinie, il n'est pas garanti qu'une application linéaire soit continue.

Démonstration. Il s'agit de reprendre les étapes de la partie correspondante de la preuve de la proposition 21.12. Soient des multiindices α, α', β et β' où α et β se réfèrent à la variable x tandis que α' et β' se réfèrent à la variable k .

Vu que la multiplication par $k^{\beta'}$ commute avec ∂^α nous avons

$$x^\beta k^{\beta'} \partial^\alpha \partial^{\alpha'} \tilde{\varphi}(x, k) = x^\beta k^{\beta'} \partial^\alpha (-i)^{|\alpha'|} \widetilde{M_{\alpha'} \varphi}(x, k) = (-i)^{|\alpha'|+|\beta'|} x^\beta \partial^\alpha \partial^{\beta'} \widetilde{M_{\alpha'} \varphi}(x, k). \quad (21.69)$$

D'autre part nous avons $\partial^\alpha \tilde{\varphi} = \widetilde{\partial^\alpha \varphi}$ parce que la fonction $\partial_x \varphi$ étant Schwartz, la fonction

$$G(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(\partial_x \varphi)(x, y)| \quad (21.70)$$

est dans $L^1(\mathbb{R}^m)$ par le corollaire 18.72. Par conséquent le théorème 13.180 permet de permuter la dérivée et l'intégrale dans

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}(x, k) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-iky} \varphi(x, y) dy. \quad (21.71)$$

Dans le même ordre d'esprit mais dans difficultés de permutation de limites nous avons $M_\beta \tilde{\varphi} = \widetilde{M_\beta \varphi}$.

D'autre part nous avons encore $\|\tilde{\varphi}\|_\alpha < \infty$ parce que

$$|\tilde{\varphi}(x, k)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(x, y)| dy \leq \sup_x \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(x, y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^m} |\sup_x \varphi(x, y)| dy < \infty \quad (21.72)$$

parce que φ est Schwartz et le corollaire 18.72 donne l'intégrabilité.

Donc nous avons

$$p_{(\alpha\alpha'), (\beta\beta')}(\tilde{\varphi}) = \|\partial^{\beta'} \widetilde{M_{\alpha'} M_\beta \partial^\alpha \varphi}\|_\infty < \infty. \quad (21.73)$$

Cela prouve que $\tilde{\varphi}$ est Schwartz. $\square$

21.2.1 Quelques transformées de Fourier

Exemple 21.14([1])

Soit la fonction $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x^2}$. Sa transformée de Fourier sera déduite dans le lemme 21.15 en utilisant le lemme de transfert 21.11. Nous nous proposons ici de déduire de façon directe l'équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier de g_ϵ .

Nous posons

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} dx. \quad (21.74)$$

et nous considérons la fonction

$$f(k, x) = e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2}. \quad (21.75)$$

Elle est de classe C^1 par rapport à k , et intégrable en x pour chaque k . De plus sa dérivée

$$(\partial_k f)(k, x) = -ix e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} \quad (21.76)$$

vérifie $|\partial_k f| \leq x e^{-\epsilon x^2}$. La dérivée est donc majorée (uniformément en k) par une fonction intégrable. Le théorème 13.180 permet de permuter la dérivée et l'intégrale :

$$I'(k) = \int_{\mathbb{R}} -ix e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} dx \quad (21.77a)$$

$$= i \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \frac{1}{2\epsilon} \frac{d}{dx} (e^{-\epsilon x^2}) dx \quad (21.77b)$$

$$= \frac{-i}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} (e^{-ikx}) e^{-\epsilon x^2} dx \quad \text{par partie} \quad (21.77c)$$

$$= \frac{-k}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon x^2} dx \quad (21.77d)$$

$$= \frac{-k}{2\epsilon} I(k). \quad (21.77e)$$

D'où l'équation différentielle $I'(k) = -\frac{k}{2\epsilon}I(k)$. $\triangle$

Lemme 21.15 (Transformée de Fourier de la Gaussienne [256]).

La transformée de Fourier de

$$\begin{aligned} g_\epsilon : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-\epsilon\|x\|^2} \end{aligned} \quad (21.78)$$

est donnée par

$$\hat{g}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4\epsilon} \quad (21.79)$$

Démonstration. Nous commençons par la fonction $g(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ et nous prouvons que sa transformée de Fourier est $\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{d/2}g(\xi)$.

Réduction à la dimension 1 La fonction g est dans l'espace de Schwartz. Par le théorème de Fubini,

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d e^{-x_k^2} e^{-i\xi_k x_k} dx = \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-\xi_k t} dt = \prod_{k=1}^d \hat{f}(\xi_k) \quad (21.80)$$

où f est la fonction d'une variable

$$f(x) = e^{-x^2/2}. \quad (21.81)$$

Notons que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Une équation différentielle Voyons l'équation différentielle satisfaite par la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction (21.81). Grâce au lemme 21.11 nous trouvons l'équation différentielle³

$$\xi \hat{f}(\xi) + (\hat{f})'(\xi) = 0. \quad (21.82)$$

C'est le moment d'utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz (16.123), appliqué à la fonction $f(t, y) = -ty$ qui est Lipschitz et continue au problème

$$\begin{cases} y' + ty = 0 \end{cases} \quad (21.83a)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \end{cases} \quad (21.83b)$$

possède une unique solution maximale, en l'occurrence $y(x) = y_0 e^{-x^2/2}$. En ce qui concerne la condition initiale nous avons

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (21.84)$$

par l'exemple 13.81. Donc

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}. \quad (21.85)$$

En reformant le produit (21.80) nous concluons.

Nous passons maintenant à la fonction g_ϵ . Nous pouvons écrire g_ϵ sous la forme

$$g_\epsilon(x) = g(\sqrt{2\epsilon}x). \quad (21.86)$$

Utilisant successivement la transformée de Fourier de g que nous venons de calculer et 21.3 (facteur d'échelle) nous trouvons

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{d/2} g(\xi) \quad (21.87a)$$

$$\hat{g}_\epsilon(\xi) = (2\epsilon)^{-d/2} \hat{g}(\xi/\sqrt{2\epsilon}) \quad (21.87b)$$

$$= \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4\epsilon}. \quad (21.87c)$$

Nous voyons que $\hat{g}_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (c'était gagné d'avance par la proposition 21.12). $\square$

3. Une façon directe de déduire cette équation différentielle est donnée dans l'exemple 21.14.

21.3 Suite régularisante

Définition 21.16.

Une **suite régularisante** est une suite (ρ_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que

- (1) pour tout n , $\rho_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$;
- (2) pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|t| > \alpha} \rho_n = 0. \quad (21.88)$$

Une telle suite est régularisante parce que souvent $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ce qui donne $f * \rho_n \in C^\infty$ par le corollaire 18.37.

Proposition 21.17 ([3, 257]).

Soit une suite régularisante $\rho_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors :

- (1) Si f est continue à support compact, nous avons la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^d$:

$$f * \rho_n \xrightarrow{\text{unif}} f. \quad (21.89)$$

- (2) Si $g \in L^p$ ($1 \leq p < \infty$) alors

$$g * \rho_n \xrightarrow{L^p} g. \quad (21.90)$$

Démonstration. Si f est continue à support compact, elle est uniformément continue⁴, et elle est bornée. Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que pour tout x, y tels que $\|x - y\| < \alpha$ nous ayons $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Nous prenons de plus n suffisamment grand pour avoir $\int_{B(0, \alpha)^c} \rho_n < \epsilon$. Nous avons alors

$$|f(x) - (f * \rho_n)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(y)) \rho_n(x - y) dy \right| \quad (21.91a)$$

$$\leq \int_{B(x, \alpha)} \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq \epsilon} \rho_n(x - y) dy + \int_{B(x, \alpha)^c} \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} \rho_n(x - y) dy \quad (21.91b)$$

$$\leq \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty). \quad (21.91c)$$

Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $n > N$ implique $|f(x) - (f * \rho_n)(x)| \leq \epsilon$. Cela prouve l'uniforme convergence sur $\mathbb{R}^d$ de $f * \rho_n$ vers f .

Pour le point (2) nous considérons $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons la majoration

$$\|g * \rho_n - g\|_p \leq \|g * \rho_n - \phi * \rho_n\|_p + \|\phi * \rho_n - \phi\|_p + \|\phi - g\|_p \quad (21.92)$$

En ce qui concerne le premier terme ;

$$\|(g - \phi) * \rho_n\|_p \leq \|g - \phi\|_p \quad (21.93)$$

par la proposition 18.35. Donc

$$\|g * \rho_n - g\|_p \leq 2\|g - \phi\|_p + \|\phi * \rho_n - \phi\|_p. \quad (21.94)$$

Par la densité de $\mathcal{D}$ dans L^p (théorème 18.40(5)) nous pouvons considérer une suite $\phi_i \xrightarrow{L^p} g$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout i nous avons

$$\|g * \rho_n - g\|_p \leq 2\|g - \phi_i\|_p + \|\phi_i * \rho_n - \phi_i\|_p. \quad (21.95)$$

Nous effectuons la limite sur $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g * \rho_n - g\|_p \leq 2\|g - \phi_i\|_p + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_i * \rho_n - \phi_i\|_p}_{=0} \quad (21.96)$$

4. Théorème de Heine 11.90.

parce que le point (1) s'applique à ϕ_i . Nous effectuons ensuite la limite sur $i \rightarrow \infty$ dans

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g * \rho_n - g\| \leq 2\|g - \phi_i\| \rightarrow 0. \quad (21.97)$$

□

Lemme 21.18.

Si $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon\|x\|^2}$ alors la suite

$$\rho_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{g}_{1/n} \quad (21.98)$$

est une suite régularisante (définition 21.16).

Démonstration. Nous savons déjà la transformée de Fourier de g_ϵ par le lemme 21.15. Nous montrons que la suite ρ_n est régularisante. Nous avons $\hat{g}_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{g}_\epsilon \geq 0$ ainsi que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,\alpha)} \hat{g}_\epsilon = 0$ pour tout α . Il y a seulement un couac avec la norme. Nous calculons $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}_\epsilon(\xi) d\xi$ avec la forme (21.87c). En utilisant sauvagement Fubini⁵ pour séparer les intégrales et en effectuant le changement de variable $u = t/(2\sqrt{\epsilon})$ nous calculons :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\xi|^2/4\epsilon} d\xi = \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4\epsilon} dt \quad (21.99a)$$

$$= 2\sqrt{\epsilon} \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \quad (21.99b)$$

$$= \prod_{k=1}^d 2\sqrt{\epsilon} \sqrt{\pi} \quad (21.99c)$$

$$= 2^d (\pi\epsilon)^{d/2}. \quad (21.99d)$$

Nous avons utilisé l'exemple 13.82 ou 13.81 (au choix). Avec tout cela nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}_\epsilon = (2\pi)^d. \quad (21.100)$$

Donc $\frac{1}{(2\pi)^d} \hat{g}_{1/n}$ est une suite régularisante. □

Le corollaire suivant regroupe les résultats à propos des suites régularisantes, leur utilité et leur existence.

Corollaire 21.19.

Si la suite régularisante ρ_n est dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ en posant $f_n = \rho_n * f$ nous avons

$$(1) \quad f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$$

$$(2) \quad f_n \xrightarrow{L^p} f$$

De plus, de telles suites existent.

Démonstration. Le fait que f_n soit de classe C^∞ est le corollaire 18.37, et la convergence est la proposition 21.17(2).

De telles suites existent, par exemple celle donnée par le lemme 21.18. □

5. Le pauvre !

21.3.1 Formule d'inversion

Proposition 21.20 (Formule d'inversion de Fourier[1]).

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors nous avons la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (21.101)$$

Cette formule peut s'écrire de plusieurs autres façons :

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = 2\pi f(-x), \quad (21.102a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x), \quad (21.102b)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(-x). \quad (21.102c)$$

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$ nous posons

$$f_{\epsilon}(k) = e^{-\epsilon k^2} e^{ikx} \hat{f}(k). \quad (21.103)$$

Nous allons calculer

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2} e^{ikx} \hat{f}(k) dk \quad (21.104)$$

de deux façons.

D'abord en utilisant directement le théorème de la convergence dominée 7.134. La fonction $\hat{f}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (théorème 21.12) et par conséquent $f_{\epsilon} \in L^1(\mathbb{R})$ parce que le facteur $e^{-\epsilon k^2}$ ne va certainement pas empêcher de converger. De plus $|f_{\epsilon}| \leq |\hat{f}|$ et $\hat{f} \in L^1$. Le théorème est de la convergence dominée est applicable et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2} e^{ikx} \hat{f}(k) dk = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (21.105)$$

Pour le deuxième calcul nous allons faire appel à Fubini⁶ pour la fonction

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (k, y) &\mapsto e^{ik(x-y)} e^{-\epsilon k^2} f(y). \end{aligned} \quad (21.106)$$

D'abord nous nous assurons que $u \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ par le corollaire 13.79, et ensuite nous utilisons le théorème de Fubini 13.78 pour manipuler les intégrales (et en particulier les inverser). Dans un premier temps nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |e^{ik(x-y)} e^{-\epsilon k^2} f(y)| dy dk \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right] dk < \infty \quad (21.107)$$

parce que f étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale intérieure se réduit à un nombre. Nous savons maintenant

6. Parce qu'il est toujours plus simple de refiler le boulot aux autres que de le faire soi-même... pauvre Fubini !

que $u \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Nous pouvons alors calculer un peu ...

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-\epsilon k^2} \hat{f}(k) dk = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-\epsilon k^2} e^{-iky} f(y) dy dk \quad (21.108a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y)} e^{-\epsilon k^2} f(y) dk \right] dy \quad (21.108b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y)} e^{-\epsilon k^2} dk \right] dy \quad (21.108c)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \hat{g}_{\epsilon}(y-x) dy \quad (21.108d)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(y-x)^2/4\epsilon} dy \quad (21.108e)$$

$$= 2\sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\sqrt{\epsilon}t) e^{-t^2} dt \quad (21.108f)$$

$$= 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\sqrt{\epsilon}t) e^{-t^2} dt \quad (21.108g)$$

$$(21.108h)$$

Justifications :

— La fonction g_{ϵ} est la gaussienne dont la transformée de Fourier est calculée dans le lemme 21.15.

— Nous avons effectué le changement de variables $t = (y-x)/(2\sqrt{\epsilon})$ qui donne $dt = dy/2\sqrt{\epsilon}$. La fonction f étant Schwartz (en particulier bornée), dans la dernière intégrale, nous pouvons effectuer la majoration

$$f(x + 2\sqrt{\epsilon}t) e^{-t^2} \leq \|f\|_{\infty} e^{-t^2}, \quad (21.109)$$

qui est une fonction intégrable. Nous pouvons donc permuter la limite et l'intégrale. Dans l'égalité

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-\epsilon k^2} \hat{f}(k) dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\sqrt{\epsilon}t) e^{-t^2} dt \quad (21.110)$$

À gauche nous avons déjà la limite depuis (21.105), et à droite nous obtenons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\sqrt{\epsilon}t) e^{-t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-t^2} dt = 2\sqrt{\pi} f(x) \sqrt{\pi} = 2\pi f(x) \quad (21.111)$$

où nous avons utilisé l'intégrale gaussienne 13.81.

En remettant tout ensemble,

$$2\pi f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon k^2} e^{ikx} \hat{f}(k) dk = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}(k) dk, \quad (21.112)$$

ce qu'il fallait prouver. □

Corollaire 21.21.

Nous avons la formule

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx dk = 2\pi f(0). \quad (21.113)$$

Démonstration. Poser $x = 0$ dans l'équation (21.101). □

21.22.

Les physiciens qui n'ont que rarement peur écrivent souvent la formule (21.113) sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} dk = \delta(x) \quad (21.114)$$

où δ serait la fonction de Dirac qui vaut zéro partout sauf en $x = 0$ où elle vaudrait l'infini, mais pas n'importe quel infini ; juste celui qu'il faut pour que sont intégrale vaille 1.

Lemme 21.23.

Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors

$$\partial_t \hat{\phi} = \widehat{\partial_t \phi} \quad (21.115)$$

où le chapeau dénote la transformée de Fourier par rapport à la variable dans $\mathbb{R}^n$ et non par rapport à celle dans $\mathbb{R}$. Le t par contre est la variable dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Par définition de la transformée de Fourier nous avons

$$(\partial_t \hat{\phi})(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t, x) e^{-ix\xi} dx. \quad (21.116)$$

Notre but est de permuter l'intégrale et la dérivée en utilisant le théorème 13.180. Il nous faut une fonction $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et telle que

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) \right| \leq G(x) \quad (21.117)$$

pour tout $t \in B(t_0, \delta)$. Étant donné que la fonction $\partial_t \phi$ est tout autant Schwartz que ϕ elle-même nous pouvons alléger les notations et chercher une fonction G qui convient pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Soit la fonction

$$G(x) = \sup_{t \in B(t_0, \delta)} |\varphi(t, x)|. \quad (21.118)$$

Pour tout multiindice α nous avons alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha G(x)| \leq \sup_{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} |x^\alpha \varphi(t, x)| \leq M_\alpha \in \mathbb{R}. \quad (21.119)$$

Grâce à la proposition 18.71, cela signifie que φ décroît plus vite que n'importe quel polynôme ; G est donc intégrable sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

21.4 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

La théorie des transformées de Fourier est intéressante sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ parce qu'elle y donne une isométrie. Nous allons la donner avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque 21.24.

Une remarque qui vaut ce qu'elle vaut, mais si u est une classe de fonction pour la relation $u \sim v$ si et seulement si $u(x) = v(x)$ pour presque tout x alors l'intégrale

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{ix\xi} dx \quad (21.120)$$

ne dépend pas du choix du représentant. Nous pouvons donc parfaitement parler de transformée de Fourier d'une classe de fonctions.

21.4.1 Extension de $L^1 \cap L^2$ vers L^2

Théorème 21.25 (Extension de la transformée de Fourier vers $L^2(\mathbb{R}^d)$ [256]).

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors

(1) Nous avons $\mathcal{F}(f) \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^d \|f\|_{L^2}$.

(2) L'application $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$ peut être étendue en une application $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^d \|f\|_{L^2} \quad (21.121)$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Le fait que $f \in L^1$ implique $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ (c'est le lemme 21.6). En particulier, $|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2$ est majoré et l'intégrale

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-\epsilon \xi^2} d\xi \quad (21.122)$$

existe et est finie.

Découper l'intégrale Dans un premier temps nous développons les intégrales. Dans les égalités suivantes, $x\xi$ est le produit scalaire $x \cdot \xi$ dans $\mathbb{R}^d$.

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} e^{ix\xi} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-y\xi} dy \right) e^{-\epsilon |\xi|^2} d\xi \quad (21.123a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(y) e^{i\xi(x-y)} dx dy \right] e^{-\epsilon |\xi|^2} d\xi. \quad (21.123b)$$

Nous avons utilisé le théorème de Fubini pour regrouper les intégrales⁷. Vu que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $(x, y, \xi) \mapsto f(x)f(y)e^{-\epsilon |\xi|^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et le théorème de Fubini 13.78 avec $\Omega_1 = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et $\Omega_2 = \mathbb{R}^d$ nous permet de permuter les intégrales pour avoir

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi(x-y)} e^{-\epsilon |\xi|^2} d\xi \right] dx dy. \quad (21.124)$$

Discuter de cette gaussienne En posant

$$g(x) = e^{-|x|^2/2} \quad (21.125a)$$

$$g_\epsilon(x) = g(\sqrt{2\epsilon}x) = e^{-\epsilon |x|^2} \quad (21.125b)$$

nous avons $g_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et le lemme 21.18 nous autorise à écrire

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{d/2} g(\xi) \quad (21.126a)$$

$$\hat{g}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4\epsilon} \quad (21.126b)$$

Nous voyons que $\hat{g}_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (c'était gagné d'avance par la proposition 21.12) et que $\hat{g}_\epsilon$ est une fonction paire (encore une fois, c'était gagné d'avance parce que la transformée de Fourier d'une fonction paire est paire).

Tout cela pour dire que l'intégrale entre crochet dans (21.124) est $\hat{g}_\epsilon(y-x) = \hat{g}_\epsilon(x-y)$, et donc

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(y) \hat{g}_\epsilon(x-y) dx dy. \quad (21.127)$$

Encore une fois le théorème de Fubini permet de séparer les intégrales et de calculer l'intégrale sur y en premier. Vu que $f \in L^1$ et que $\hat{g}_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution $f * \hat{g}_\epsilon$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par la proposition 18.79. Nous avons donc

$$\clubsuit = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} (f * \hat{g}_\epsilon)(x) dx. \quad (21.128)$$

Là, nous reconnaissons un produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-\epsilon \xi^2} d\xi = \langle f, f * \hat{g}_\epsilon \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (21.129)$$

Notons que tout a un sens : $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f * \hat{g}_\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$.

7. Dans la suite nous allons encore utiliser Fubini quelque fois pour regrouper et dégroupier des intégrales.

Suite régularisante Nous prenons la suite régularisante du lemme 21.18 donnée par

$$\rho_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{g}_{1/n}. \quad (21.130)$$

Première conclusion Nous reprenons (21.129)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-|\xi|^2/n} d\xi = \langle f, f * \hat{g}_{1/n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^d \langle f, f * \rho_n \rangle. \quad (21.131)$$

En prenant la limite $n \rightarrow \infty$ nous trouvons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|^2 e^{-|\xi|^2/n} d\xi = (2\pi)^d \|f\|^2. \quad (21.132)$$

Pour effectuer la limite du membre de gauche nous devons remarquer qu'en posant

$$g_n(\xi) = |\hat{f}(\xi)| e^{-|\xi|^2/n}, \quad (21.133)$$

nous avons une suite décroissante de fonction (c'est à dire que à ξ fixé, c'est décroissant en n). Par ailleurs ces fonctions sont toujours à valeurs dans $[0, \infty]$ et nous pouvons utiliser le théorème de la convergence monotone 7.129 pour permuter la limite et l'intégrale. Au final :

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^d \|f\|_{L^2}. \quad (21.134)$$

En ce qui concerne l'extension, soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et une suite (f_n) dans $L^1 \cap L^2$ telle que $f_n \xrightarrow{L^2} f$.

Existence d'une telle suite Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors nous pouvons poser

$$f_n(x) = f(x) e^{-|x|^2/n^2}. \quad (21.135)$$

Par l'inégalité de Hölder (18.44) nous avons $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$; de plus $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ parce que pour tout x nous avons $|f_n(x)| \leq |f(x)|$. Montrons que $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Nous avons

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)(1 - e^{-|x|^2/n^2})|^2 dx. \quad (21.136)$$

Nous voulons prendre la limite $n \rightarrow \infty$. Pour ce faire à droite nous remarquons que $e^{-|x|^2/n^2}$ est majoré par 1; ce qui se trouve dans l'intégrale est donc majoré (uniformément en n) par $|f(x)|^2$, qui est une fonction L^1 parce que f est L^2 . Le théorème de la convergence dominée 7.134 nous permet alors de permuter la limite et l'intégrale, ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x)(1 - e^{-|x|^2/n^2})|^2 dx = 0. \quad (21.137)$$

Définition de $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ La suite (f_n) est une suite convergence dans L^2 , et elle est donc de Cauchy. De plus pour chaque n, m nous avons

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\| = (2\pi)^d \|f_n - f_m\|. \quad (21.138)$$

La suite $(\hat{f}_n)$ est donc elle aussi de Cauchy, dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui est complet (lemme 18.29). Nous posons

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n. \quad (21.139)$$

Indépendance aux choix Nous devons montrer que la définition de $\hat{f}$ ne dépend pas de la suite approximant f dans $L^1 \cap L^2$. Soient dans deux suites $f_n \xrightarrow{L^2} f$ et $g_n \xrightarrow{L^2} f$ telles que $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} F$ et $\hat{g}_n \xrightarrow{L^2} G$. Alors

$$\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\| = (2\pi)^d \|f_n - g_n\| \leq (2\pi)^d \|f_n - f\| + (2\pi)^d \|g_n - f\| \rightarrow 0. \quad (21.140)$$

Par conséquent $(\hat{f}_n - \hat{g}_n)_n$ est une suite qui converge vers zéro. Par unicité de la limite, $F = G$.

□

Remarque 21.26.

Une autre suite possible, à la place de (21.135), est

$$f_n(x) = f(x)\mathbb{1}_{|x|<n}. \quad (21.141)$$

C'est à dire la fonction f limitée à une boule de rayon n autour de 0.

Chapitre 22

Distributions

Nous donnons ici une partie de la théorie sur les distributions. L'utilisation des distributions dans le cadre des équations différentielles est mise dans le chapitre sur les équations différentielles, section 24.10.

22.0.0.1 Dérivée partielle au sens faible

Définition 22.1.

Si $i = 1, \dots, n$, la **dérivée faible** de v dans la direction e_i est l'application¹ notée $\partial_i v$ définie par

$$\langle \partial_i v, \phi \rangle = -\langle v, \partial_i \phi \rangle \quad (22.1)$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lemme 22.2.

Si $v \in L^2$ admet une dérivée faible, alors cette dernière est unique.

Démonstration. Supposons f, g telles que $\langle g, \phi \rangle$ et $\langle f, \phi \rangle$ soient tous deux égaux à $-\langle v, \partial_i \phi \rangle$. En particulier pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous avons $\langle (f - g), \phi \rangle = 0$.

Cela donne $f - g = 0$ par la proposition 18.50. $\square$

22.1 Topologie

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Le but de notre histoire est de définir une distribution comme étant un élément de l'espace dual (topologique, voir définition 6.27) de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω . Pour ce faire nous devons voir un peu de topologie sur différents espaces de fonctions. Notons que cet espace n'est pas réduit à la fonction nulle comme en témoigne l'exemple donné par l'équation (16.303).

Pour chaque K compact dans Ω et multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ nous considérons sur $C^\infty(\Omega)$ la semi-norme suivante :

$$p_{K,m}(f) = \sum_{|\mu| \leq m} \|\partial^\mu f\|_{K,\infty}. \quad (22.2)$$

En particulier,

$$p_{K,0}(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{\infty, K}. \quad (22.3)$$

Définition 22.3.

Les topologies que nous allons considérer sont :

- (1) Sur $C^\infty(\Omega)$, la topologie des semi-normes $p_{K,m}$ (avec K et m comme paramètres).
- (2) Sur $\mathcal{D}(K)$, la topologie des semi-normes $p_{K,m}$ (avec seulement m comme paramètre).
- (3) Sur $\mathcal{D}(\Omega)$, la topologie induite de $C^\infty(\Omega)$.

1. En fait c'est une classe au sens de l'égalité presque partout.

Cela n'est pas très explicite, mais heureusement nous n'aurons souvent pas besoin de plus que de la notion de convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Rappelons que la topologie d'un espace donne la notion de convergence par la définition 5.4.

Lemme 22.4 (Convergence dans $\mathcal{D}(K)$).

Si α est un multiindice et si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \varphi$, alors nous avons

$$\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\text{unif}} \partial^\alpha \varphi. \quad (22.4)$$

Démonstration. Quitte à considérer la suite $\varphi_n - \varphi$ nous pouvons supposer $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} 0$. Nous avons

$$\|\partial^\alpha \varphi_n\| \leq \sum_{\mu \leq \alpha} \|\partial^\mu \varphi_n\|_{K, \infty}. \quad (22.5)$$

Vu que le membre de droite tend vers zéro, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_{K, \infty} \rightarrow 0, \quad (22.6)$$

ce qui revient à dire que $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément sur K vers $\partial^\alpha \varphi$. $\square$

Lemme 22.5.

Si une fonction $f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur chacun des $\mathcal{D}(K)$ pour tout K compact dans Ω alors est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration. Soit I ouvert dans $\mathbb{R}$; nous devons trouver un ouvert $\mathcal{O}$ dans $C^\infty(\Omega)$ tel que $f^{-1}(I) = \mathcal{D}(\Omega) \cap \mathcal{O}$. Vu que f est continue sur chacun des $\mathcal{D}(K)$ avec K compact dans Ω , pour tout tel compact nous avons un ouvert $\mathcal{O}_K$ dans $\mathcal{D}(K)$ tel que $f^{-1}(I) \cap \mathcal{D}(K) = \mathcal{O}_K$. En tant qu'union d'ouverts², l'ensemble

$$\mathcal{O} = \bigcup_{K \text{ compact de } \Omega} \mathcal{O}_K \quad (22.7)$$

est ouvert dans $C^\infty(\Omega)$. Si $\phi \in f^{-1}(I)$, nous avons $\phi \in \mathcal{D}(K)$ pour un certain K compact de Ω , donc $f^{-1}(I) \subset \mathcal{O}$. A fortiori nous avons $f^{-1}(I) \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{D}(\Omega)$.

Dans l'autre sens, si $\phi \in \mathcal{O}$, alors ϕ est dans un des $\mathcal{O}_K$ et donc dans $f^{-1}(I)$. Nous avons donc bien $f^{-1}(I) = \mathcal{D}(\Omega) \cap \mathcal{O}$. $\square$

Théorème 22.6 (Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ [61]).

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nous avons $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ si et seulement si il existe K compact dans Ω tel que $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ pour tout n et $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \varphi$.

Démonstration. Supposons que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ et qu'il n'existe pas de compacts contenant tous les supports des φ_n . Alors pour tout compact de Ω il existe un n tel que le support de φ_n ne soit pas dans K . Nous considérons une suite de compacts (K_i) tels que $\text{Int}(K_n) \subset K_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_n K_n$. Une telle suite existe par le lemme 5.140. Ensuite nous construisons des sous-suites de la façon suivante. D'abord $L_1 = K_1$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ est choisit de telle sorte que φ_{n_1} ait un support non contenu dans L_1 . Ensuite L_i est un compact de la suite (K_n) choisit plus loin que L_{i-1} et tel que $\varphi_{n_{i-1}} \in \mathcal{D}(L_i)$. Le nombre n_i est alors choisit plus grand que n_{i-1} de telle sorte que $\varphi_{n_i} \notin \mathcal{D}(L_i)$. Ce faisant, en posant $\phi_i = \varphi_{n_i}$ nous avons

$$\phi_i \in \mathcal{D}(L_{i+1}) \setminus \mathcal{D}(L_i) \quad (22.8)$$

et $\text{Int}(L_n) \subset L_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_n L_n$. Étant donné que (ϕ_i) et une sous-suite de (φ_i) nous avons encore $\phi_i \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$.

2. Voir définition 5.1.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Nous allons utiliser la seconde forme géométrique du théorème de Hahn-Banach 18.64 pour séparer les parties $\{\phi_i\}$ (compact) et $\mathcal{D}(L_i)$ (fermé) dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Nous avons $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} f_i(\phi_i) > \alpha \\ f(\mathcal{D}(L_i)) < \alpha. \end{cases} \quad \begin{matrix} (22.9a) \\ (22.9b) \end{matrix}$$

Nous redéfinissons immédiatement f_i de façon à avoir

$$\begin{cases} f_i(\phi_i) = 0 \\ f(\mathcal{D}(L_i)) < 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (22.10a) \\ (22.10b) \end{matrix}$$

Nous introduisons la fonction définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$p(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{f_i(\phi)}{|f_i(\phi_i)|}. \quad (22.11)$$

Si $\phi \in L_k$, alors $f_k(\phi) = 0$ et même $f_l(\phi) = 0$ pour tout $l \geq k$. Donc pour chaque k , la somme définissant p est finie sur $\mathcal{D}(L_k)$. Nous en déduisons que p est continue sur chacun des $\mathcal{D}(L_k)$ et donc sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par le lemme 22.5.

L'image de la suite convergente $\phi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ par p doit être bornée parce que p est continue. Mais dans la somme (22.11), tous les termes sont positifs et en particulier le terme $i = k$ vaut k , donc $p(\phi_k) \geq k$, ce qui contredit le fait que l'image de la suite soit bornée. Nous en déduisons donc l'existence d'un compact K tel que $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ pour tout n .

Nous devons encore prouver que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \varphi$ pour ce choix de K . Vu que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$, le lemme 5.65 nous dit que nous avons aussi $\varphi_n \xrightarrow{C^\infty(\Omega)} \varphi$, ce qui signifie que pour tout K et m nous avons

$$p_{K,m}(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0. \quad (22.12)$$

En particulier pour le K fixé plus haut nous avons $p_m(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$, c'est à dire que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \varphi$. $\square$

Proposition 22.7.

Si K est compact dans Ω , l'espace $\mathcal{D}(K)$ est métrique et complet.

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que $\mathcal{D}(K)$ est complet. Ensuite nous allons montrer que sa topologie peut être donnée par une distance.

Complet Nous considérons une suite de Cauchy (φ_n) dans $\mathcal{D}(K)$ au sens de la définition 5.29.

Soient $\epsilon > 0$ et $i \in \mathbb{N}$; si k et l sont assez grands nous avons

$$\varphi_k - \varphi_l \in B_i(0, \epsilon). \quad (22.13)$$

En particulier pour $i = 0$ nous avons l'inégalité

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty \leq \epsilon, \quad (22.14)$$

La suite (φ_n) est donc de Cauchy dans $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ et y converge donc par complétude, proposition 16.103. Il existe donc une fonction $\varphi \in C(K)$ telle que

$$\varphi_n \xrightarrow{\text{unif}} \varphi. \quad (22.15)$$

Notre jeu à présent est de prouver que $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, c'est à dire qu'elle est de classe C^∞ .

Soit un multiindice $\alpha = \mu_1, \dots, \mu_n, i$. Si k et l sont assez grands nous avons

$$\|\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi_l)\|_\infty \leq \epsilon, \quad (22.16)$$

c'est à dire que

$$\|\partial_i(\partial^\mu \varphi_k) - \partial_i(\partial^\mu \varphi_l)\|_\infty \leq \epsilon. \quad (22.17)$$

Si nous notons $\psi_k = \partial^\mu \varphi_k$ cela signifie que $(\partial_i \psi_n)$ est une suite de Cauchy dans $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Elle y converge donc et il existe une fonction $g_i \in C(K)$ telle que

$$\partial_i \psi_n \xrightarrow{\text{unif}} g_i. \quad (22.18)$$

Dans ce cas le théorème 11.235 nous indique que ψ est de classe C^1 , c'est à dire que $\varphi \in C^{n+1}(K)$.

Métrique La proposition 5.180 nous dit que la topologie donnée par l'écart

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{k \geq 1} \min\left\{\frac{1}{k}, p_{k-1}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\} \quad (22.19)$$

est la même que celle de $\mathcal{D}(K)$. Il reste à montrer que cette formule est bien une distance au sens de la définition 5.17.

- (1) Nous avons bien $d(\varphi_1, \varphi_2) \geq 0$ parce que tous les éléments du supremum et du minimum sont positifs.
- (2) Si $d(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ alors pour tout k nous devons avoir $p_{k-1}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$; en particulier pour $k = 1$ cela donne $\varphi_1 = \varphi_2$.
- (3) Nous avons

$$p_k(\varphi_1 - \varphi_2) = p_k(-(\varphi_2 - \varphi_1)) = p_l(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (22.20)$$

en utilisant la propriété (2) de la définition 5.175 de semi-norme.

- (4) Nous avons

$$p_k(\varphi_1 - \varphi_2) = p_k(\varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_2) \leq p_k(\varphi_1 - \varphi_3) + p_k(\varphi_3 - \varphi_2) \quad (22.21)$$

en utilisant la propriété (3) de la définition 5.175.

□

Notons que le proposition 5.180 nous dit que $\mathcal{D}(K)$ est complet tout autant pour la topologie des semi-normes que pour celle de la distance que nous venons de décrire. Ces deux topologies sont les mêmes. Étant métrique et complet, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est donc de Baire par le théorème 5.187. Ce qui est bien avec ces deux topologies identiques c'est qu'on peut utiliser la propriété de Baire même en ne parlant que des semi-normes.

22.2 Distributions

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, alors l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est contenu dans $C^\infty(\Omega)$. Nous allons commencer par définir une topologie sur $C^\infty(\Omega)$ et ensuite donner à $\mathcal{D}(\Omega)$ la topologie induite³.

Définition 22.8 (Distribution).

Une **distribution** sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$. C'est donc un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Le théorème suivant donne quelques façons de vérifier qu'une forme linéaire soit continue. En particulier il nous dit que pour prouver qu'une forme linéaire est une distribution il suffit de prouver la continuité séquentielle.

Théorème 22.9 ([61, 258]).

Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Nous avons équivalence entre les points suivants.

- (1) T est continue.

3. Définition 5.61.

(2) Pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ nous ayons

$$|T(\varphi)| \leq Cp_{m,K}(\varphi). \quad (22.22)$$

(3) T est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

(4) T est séquentiellement continue en 0.

(5) Pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction de T à $\mathcal{D}(K)$ est continue.

Un certain nombre d'ouvrages comme [259] prennent le point (2) comme la définition d'une distribution.

Définition 22.10 (Topologie sur $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Nous munissons l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la **topologie *-faible**, c'est à dire celle de la famille de semi-normes

$$\begin{aligned} p_\varphi: \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto |T(\varphi)|. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Oui, c'est bien une famille de semi-normes indicée par l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$. Il n'y en a donc a priori pas du tout une quantité dénombrable.

Proposition 22.11 (Convergence au sens des distributions).

Nous avons $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T$ si et seulement si $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration. La convergence $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T$ signifie que l'on ait $p_\varphi(T_n - T) \rightarrow 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui en retour signifie que

$$|(T_n - T)(\varphi)| \rightarrow 0. \quad (22.24)$$

□

Cette proposition suppose que l'on ait une distribution T qui vérifie $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$ et conclut qu'on a une convergence dans les distributions. Le théorème suivant est plus fort : il va seulement supposer que $T_n(\varphi)$ converge dans $\mathbb{C}$ et va conclure que $T: \varphi \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi)$ est une distribution.

Théorème 22.12 ([260]).

Soit (T_n) une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et nous supposons que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la suite $(T_n(\varphi))$ converge dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T$.

Proposition 22.13.

L'application

$$\begin{aligned} i: L^2(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ f &\mapsto T_f \end{aligned} \quad (22.25)$$

est une injection continue.

Démonstration. Le fait que ce soit une injection est le fait que si $T_f = T_g$ alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous avons $\langle f - g, \phi \rangle = 0$, et cela implique que $f - g$ est nulle presque partout en tant que fonction et est simplement nulle en tant que classe de fonction dans L^2 .

En ce qui concerne la continuité, il suffit de la prouver en zéro (par linéarité). Soit donc $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ et montrons que $T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T_0$. Pour prouver cela, la proposition 22.11 nous indique qu'il est suffisant de tester $T_n(\phi) \rightarrow 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Notons que si $\phi \in \mathcal{D}$ a fortiori $\phi \in L^2$. Nous avons

$$T_{f_n}(\phi) = \int_{\Omega} f_n \phi \leq \|f_n \phi\|_{L^1} \leq \|f_n\|_2 \|\phi\|_2 \rightarrow 0 \quad (22.26)$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder de la proposition 18.20.

□

Cette proposition permet de donner un sens à des phrases du type «Soit une distribution T . Si $T \in L^2$, alors ...». Cela signifie qu'il existe $u \in L^2$ tel que $T = T_u$. Notons que dans ce cas, la distribution est définie sur L^2 et non seulement sur $\mathcal{D}$.

22.2.1 Multiplication d'une distribution par une fonction

Définition 22.14.

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et si $f \in C^\infty(\Omega)$ nous définissons la distribution fT par

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi). \quad (22.27)$$

Souvent écrit sous la forme plus compacte $\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle$.

Cela a un sens parce que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $f\varphi$ est aussi dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Cette définition est motivée par ce que l'on ferait pour une distribution à densité. Si T est une distribution de densité notée également T , nous avons $T(\phi) = \int T(x)\phi(x)$ et donc

$$(fT)(\phi) = \int (fT)(x)\phi(x) = \int T(x)f(x)\phi(x) = \int T(x)(f\phi)(x) = T(f\phi). \quad (22.28)$$

En ce qui concerne les distributions tempérées, nous pouvons définir le produit avec une fonction $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$ par la même formule : si $f, \varphi \in \mathcal{S}'(\Omega)$ alors le produit $f\varphi$ est encore Schwartz. Notons toutefois que nous ne pouvons pas définir fT dans $\mathcal{S}'(\Omega)$ si f est seulement dans $C^\infty(\Omega)$.

22.2.2 Dérivée de distribution

Proposition-définition 22.15.

Soit T une distribution sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors la formule

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi) \quad (22.29)$$

définit une distribution $\partial^\alpha T$.

Cette distribution $\partial^\alpha T$ sera la **dérivée distributionnelle** de T . Notons que le même résultat est encore valide pour des distributions tempérées, et la démonstration est la même.

Démonstration. La forme linéaire $\partial^\alpha T$ sera continue si elle est séquentiellement continue par le théorème 22.9. Nous considérons donc une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ et nous vérifions que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\partial^\alpha T)(\varphi_n) = (\partial^\alpha T)(\varphi). \quad (22.30)$$

D'abord T étant une distribution (et donc continue) nous pouvons la permuter avec la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\partial^\alpha T)(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^\alpha \varphi_n\right). \quad (22.31)$$

Notons qu'à gauche la limite est une limite dans $\mathbb{R}$ tandis qu'à droite c'est une limite dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Ensuite le lemme 22.4 nous dit que l'hypothèse $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ signifie en particulier que nous avons un compact $K \subset \Omega$ contenant tous les supports des φ_n et que $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément (sur K et donc sur Ω) vers $\partial^\alpha \varphi$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\partial^\alpha T)(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^\alpha \varphi_n\right) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha T)(\varphi), \quad (22.32)$$

ce qui est la relation demandée. $\square$

Le lemme suivant montre une compatibilité entre la dérivée des distribution, la dérivée faible et l'injection de L^2 dans l'espace des distributions.

Lemme 22.16.

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$. Alors nous avons

$$\partial_i(T_f) = T_{\partial_i f} \quad (22.33)$$

où la dérivée à droite est la dérivée faible définie en 22.1.

Démonstration. En utilisant la définition de la dérivation de distribution, pour tout $\phi \in \mathcal{D}$ nous avons

$$\partial_i(T_f)\phi = -T_f(\partial_i\phi) = -\langle f, \partial_i\phi \rangle = \langle \partial_i f, \phi \rangle = T_{\partial_i f}(\phi). \quad (22.34)$$

Nous avons utilisé la définition (22.1) de la dérivée faible. $\square$

22.2.3 Ordre et support d'une distribution

Définition 22.17 (support d'une distribution[4]).

Soit T une distribution. Le **support** de T est le complémentaire de l'union des ouverts $\mathcal{O}$ tels que $T(\varphi) = 0$ pour tout φ à support dans $\mathcal{O}$.

Définition 22.18.

Si T est une distribution sur Ω , nous disons que T est d'**ordre inférieur** ou égal à $p \in \mathbb{N}$ si pour tout compact K de Ω , il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty. \quad (22.35)$$

Ici α est un multiindice.

La distribution T est d'ordre p si elle est d'ordre inférieur ou égal à p mais pas à $p - 1$.

Pour la proposition suivante, on peut se remémorer la définition 22.3 de la topologie sur $C^\infty(\Omega)$.

Proposition 22.19 ([261]).

Restriction entre C^∞ et $\mathcal{D}$.

- (1) Si $T \in C^\infty(\Omega)'$, alors la restriction de T à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution à support⁴ compact.
- (2) Si T est une distribution à support compact alors elle se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $C^\infty(\Omega)$.

Proposition 22.20 ([61]).

Une distribution à support compact est d'ordre fini.

Lemme 22.21 ([2]).

Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(\phi) = \emptyset$. Alors $\langle u, \phi \rangle = 0$.

Démonstration. Soit $x \notin \text{supp}(u)$. Alors il existe un voisinage V_x de x tel que $\langle u, \psi \rangle = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(V_x)$. En particulier, si $x \in \text{supp}(\phi)$, alors x n'est pas dans le support de u et les ensembles $\{V_x \text{ tel que } x \in \text{supp}(\phi)\}$ recouvrent $\text{supp}(\phi)$. Cependant ϕ est à support compact et nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini de $\text{supp}(\phi)$: il existe $x_1, \dots, x_p$ tels que

$$\text{supp}(\phi) \subset \bigcup_{i=1}^p V_{x_i}. \quad (22.36)$$

Nous prenons une partition de l'unité⁵ subordonnée à ce recouvrement. C'est à dire des fonctions $\chi_i \in \mathcal{D}(V_{x_i})$ telles que pour tout $x \in \text{supp}(\phi)$,

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(x) = 1. \quad (22.37)$$

4. Définition 22.17.

5. Lemme 13.128.

En particulier nous avons $\sum_i \chi_i(x)\phi(x) = \phi(x)$, et donc

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \sum \chi_i \phi \rangle = \sum \langle u, \chi_i \phi \rangle = 0 \quad (22.38)$$

parce que $\text{supp}(\chi_i \phi) \subset V_{x_i}$. $\square$

Lemme 22.22 ([2]).

Si u est une distribution d'ordre fini N sur $\mathbb{R}$, si $\text{supp}(u) = \{x_0\}$ et si

$$\phi(x_0) = \dots = \phi^{(N)}(x_0) = 0 \quad (22.39)$$

alors $\langle u, \phi \rangle = 0$.

Démonstration. Les fonctions plateaux dont nous avons parlé dans la section 16.6.1 nous permettent de considérer une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{B(0,1)} \\ 0 & \text{si } |x| > 2 \end{cases} \quad (22.40)$$

Ensuite nous posons $\chi_n(x) = \chi(n(x-x_0))$. Par conséquent $\chi_n(x_0) = \chi(0) = 1$ et même $\chi_n(x_0+\epsilon) = \chi(\epsilon) = 1$ tant que ϵ est plus petit que disons $\frac{1}{2}$ pour être sur. Nous en déduisons que la fonction $1 - \chi_n$ s'annule sur un voisinage de x_0 et que donc x_0 n'est pas dans le support de $1 - \chi_n$. Donc $\text{supp}(1 - \chi_n) \cap \text{supp}(u) = \emptyset$ et le lemme 22.21 est utilisable : $\langle u, (1 - \chi_n \phi) \rangle = 0$, ou encore :

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \chi_n \phi \rangle \quad (22.41)$$

pour tout n . Vu que le but est de prouver que $\langle u, \phi \rangle = 0$, nous allons prouver que

$$|\langle u, \chi_n \phi \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (22.42)$$

Dans ce dessin nous posons

$$\|f\|_n = \sup_{x \in B(0, \frac{2}{n})} \|f(x)\| \quad (22.43)$$

et

$$\|f\|_{(p)} = \sup_{i \leq p} \|\partial^i f\|_\infty. \quad (22.44)$$

La distribution u est d'ordre fini N , et nous en écrivons la définition 22.18 en prenant $\text{supp}(\chi_n \phi)$ en tant que K :

$$|\langle u, \chi_n \phi \rangle| \leq C \max_{k \leq N} \|\partial^k(\chi_n \phi)\|_\infty. \quad (22.45)$$

En remplaçant le maximum par une somme de $k = 0$ à $k = N$, nous majorons. De plus le support de χ_n étant contenu dans $B_n = B(x_0, 2/n)$ nous ne changeons rien en utilisant $\|\cdot\|_n$ au lieu de $\|\cdot\|_\infty$. Donc

$$|\langle u, \chi_n \phi \rangle| \leq C \sum_{k=0}^N \|\partial^k(\chi_n \phi)\|_n \leq C \sum_{k=0}^N \binom{k}{i} \|\partial^i \chi_n\|_n \|\partial^{k-i} \phi\|_n. \quad (22.46)$$

Notons que la seconde inégalité est une inégalité du type $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$. En dérivant un petit peu nous trouvons que

$$(\partial^i \chi_n)(x) = n^i (\partial^i \chi)(n(x - x_0)). \quad (22.47)$$

Donc ⁶

$$\|\partial^i \chi_n\|_n = \sup_{x \in B_n} n^i |(\partial^i \chi)(n(x - x_0))| = n^i \sup_{y \in [-2,2]} |(\partial^i \chi)(y)| = n^i \|\partial^i \chi\|_\infty. \quad (22.48)$$

Nous pouvons donc remplacer $\|\partial^u \chi_n\|_n$ par $n^i \|\partial^i \chi\|_\infty$.

6. Dans [2], la dernière égalité vient avec une inégalité, et je comprends pas pourquoi.

D'autre part nous voulons majorer $\|\partial^{k-i}\phi\|_n$ par quelque chose ne dépendant ni de k ni de i . Nous faisons le théorème des accroissements finis 6.231 : $\|\partial^l\phi\|_n \leq \frac{2}{n}\|\partial^{l+1}\phi\|_n$. Ce n au dénominateur est salutaire parce que nous avons un n^i apparu à cause du remplacement (22.48). Nous faisons donc $i + 1$ fois le théorème des accroissements finis :

$$\|\partial^{k-i}\phi\|_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{i+1} \|\partial^{k+1}\phi\|_n. \quad (22.49)$$

Toutes ces majorations donnent

$$|\langle u, \chi_n \phi \rangle| \leq C \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^k \binom{i}{k} n^i \underbrace{\|\partial^i \chi\|_\infty}_{\leq \|\chi\|_{(N)}} \left(\frac{2}{n}\right)^{i+1} \underbrace{\|\partial^{k+1}\phi\|_n}_{\leq \|\phi\|_{(N+1)}} \quad (22.50a)$$

$$\leq C \|\chi\|_{(N)} \|\phi\|_{(N+1)} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 2^{i+1} \quad (22.50b)$$

$$= \frac{C'}{n} \quad (22.50c)$$

où C' est une constante qui dépend de χ , de ϕ et de N , mais pas de n . Vu que $\frac{C'}{n} \rightarrow 0$ nous avons bien

$$\langle u, \phi \chi_n \rangle = 0, \quad (22.51)$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Proposition 22.23 ([2]).

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ avec $\text{supp}(u) = \{x_0\}$. Alors $u = \sum_{i=0}^N a_i \partial^i \delta_{x_0}$ où N est l'ordre de u .

Démonstration. D'abord il faut préciser que l'ordre de u est fini parce que son support est compact (proposition 22.20) ; nous notons N cet ordre.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Nous considérons $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{B(x_0, 1)} \\ 0 & \text{si } |x - x_0| > 2. \end{cases} \quad (22.52)$$

Encore une fois, $1 - \chi$ s'annule sur un voisinage autour de x_0 , ce qui fait que

$$\text{supp}(u) \cap \text{supp}((1 - \chi)\phi) = \emptyset, \quad (22.53)$$

et donc $\langle u, (1 - \chi)\phi \rangle = 0$. Au final,

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \chi \phi \rangle. \quad (22.54)$$

C'est le moment de poser

$$\psi(x) = \chi(x) \left[\phi(x) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} (\partial^k \phi)(x_0) (x - x_0)^k \right] \quad (22.55)$$

La fonction ψ ayant un support disjoint de celui de u , nous avons aussi $\langle u, \psi \rangle = 0$, ce qui donne

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \chi \phi \rangle = \langle u, \chi \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (\partial^k \phi)(x_0) (x - x_0)^k \rangle. \quad (22.56)$$

En posant $a_k = \frac{1}{k!} \langle u, x \mapsto \chi(x) (x - x_0)^k \rangle$ nous avons alors

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{k=0}^N a_k (\partial^k \phi)(x_0) = \sum_k (-1)^k a_k (\partial^k \delta_{x_0})(\phi). \quad (22.57)$$

$\square$

22.3 Distributions tempérées

L'espace de Schwartz⁷ $\mathcal{S}(\Omega)$ est défini dans la définition 18.68 ; sa topologie y est discutée.

Définition 22.24.

Une **distribution tempérée** est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Si T est une telle distribution, nous notons $\langle T, \varphi \rangle$ l'image de φ par T .

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ telle que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors nous définissons la distribution $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx. \quad (22.58)$$

Cette définition ne fonctionne pas pour toutes les fonctions. Par exemple pour $f(x) = e^{x^2}$, et $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nous avons $f\varphi = 1$ qui n'est pas du tout intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 22.25

La **distribution de Dirac** δ est donnée par

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0). \quad (22.59)$$

Montrons qu'elle est continue. Soit une suite $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. En particulier, $p_{0,0}(\varphi_n) = \sup_x |\varphi_n(x)| \rightarrow 0$. Donc $\varphi_n(0) \rightarrow 0$ comme il le faut. $\triangle$

Exemple 22.26

La **valeur principale** de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la distribution

$$T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}. \quad (22.60)$$

Montrons que cela définit bien une distribution tempérée.

D'abord l'intégrale existe pour tout ϵ , par exemple parce que pour les grands $|x|$ nous avons par exemple $|\varphi(x)| \leq x^3$ et donc $\varphi(x)/x \leq 1/x^2$ dont l'intégrale converge. Nous devons maintenant regarder la limite.

Nous considérons une suite $\epsilon_n \rightarrow 0$ et la suite

$$a_n = \int_{|x| \geq \epsilon_n} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (22.61)$$

Nous montrons que cette suite converge dans $\mathbb{R}$ en montrant qu'elle est de Cauchy. Pour cela nous travaillons un peu la forme de φ :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)dt = \varphi(0) + \int_0^1 x\varphi'(x\theta)d\theta. \quad (22.62)$$

Ce qui est dans l'intégrale est borné par $K = \|M_x \varphi'\|_\infty$ qui est parfaitement fini parce que φ est à décroissance rapide. Lorsque nous calculons $|a_m - a_n|$, le terme $\varphi(0)/x$ donne une intégrale nulle parce que le domaine d'intégration $\epsilon_n \leq |x| \leq \epsilon_m$ est symétrique alors que la fonction $1/x$ est impaire.

$$|a_m - a_n| \leq \left| \int_{\epsilon_m < |x| < \epsilon_n} K \right| = 2|\epsilon_n - \epsilon_m|K \quad (22.63)$$

7. Attention : ce Schwartz (avec un t) est le Schwartz des distributions dont le prénom est Laurent. À ne pas confondre avec Schwarz (sans t) dont le prénom est Cauchy.

Tout cela nous dit que T est bien définie. Nous devons encore étudier sa continuité.

Soit χ une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle valant 1 sur $[-1, 1]$, paire et à valeurs dans $[0, 1]$. Pour tout $\epsilon > 0$ nous avons $\int_{|x|>\epsilon} \frac{\chi(x)}{x} dx = 0$.

Nous avons aussi $\varphi = \chi\varphi + (1 - \chi)\varphi$, et donc

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{|\epsilon|>0} \chi(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{|\epsilon|>0} (1 - \chi(x)) \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (22.64a)$$

$$= \int_{|\epsilon|>0} \chi(x) \int_0^1 \underbrace{\varphi'(\theta x)}_{\leq \|\varphi'\|_\infty} d\theta + \int_{|x|\geq 1} (1 - \chi(x)) \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (22.64b)$$

$$\leq \|\varphi'\|_\infty \int_{|x|\geq \epsilon} \chi(x) dx + \|\varphi\|_{L^1} \quad (22.64c)$$

$$= C\|\varphi'\|_\infty + \|\varphi\|_1. \quad (22.64d)$$

Cela est valable pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mais nous savons que si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$, alors $\|\varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$, $\|\varphi'_n\|_\infty \rightarrow 0$ et $\|\varphi_n\|_1 \rightarrow 0$; donc si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$, alors

$$T(\varphi_n) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \leq C\|\varphi'_n\|_\infty + \|\varphi_n\|_1 \rightarrow 0. \quad (22.65)$$

△

22.3.1 Topologie

La topologie que nous mettons sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est le même type que celle que nous mettons sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire celle des semi-normes $p_\varphi(T) = |T(\varphi)|$. La définition 22.10 et la proposition 22.11 restent.

Proposition 22.27.

Nous avons $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} T$ si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$.

22.3.2 Distributions associées à des fonctions

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors nous lui associons une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ définie par la formule

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx. \quad (22.66)$$

Proposition 22.28.

L'application ainsi définie

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \\ f &\mapsto T_f \end{aligned} \quad (22.67)$$

est injective.

Démonstration. Si $T_f = 0$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ nous avons $\int_{\mathbb{R}^d} f\varphi = 0$. En vertu de la proposition 18.51 cela implique $f = 0$ presque partout. □

22.3.3 Composition avec une fonction

Proposition 22.29 ([260], page 113 et 32).

Soit $T \in \mathcal{S}'(\Omega)$ et $f \in C^k(A \times \Omega)$ où A est ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Nous posons

$$\begin{aligned} F: A &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto T(f(\lambda, \cdot)). \end{aligned} \quad (22.68)$$

Alors $F \in C^k(A)$.

22.3.4 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Définition 22.30.

La **transformée de Fourier** de la distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la distribution $\hat{T}$ définie par

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}) \quad (22.69)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 22.31.

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, nous avons $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$.

Démonstration. En utilisant les définitions,

$$\hat{T}_f(\varphi) = T_f(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) e^{-iyx} dy \right] dx \quad (22.70)$$

où nous avons noté xy le produit scalaire $x \cdot y$. Nous permutons les intégrales en utilisant le théorème de Fubini 13.78 avec la fonction

$$(x, y) \mapsto f(x) \varphi(y) e^{-ixy} \quad (22.71)$$

qui est parfaitement dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Nous écrivons alors

$$\hat{T}_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(y) e^{-iyx} dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \hat{f}(y) dy = T_{\hat{f}}(\varphi). \quad (22.72)$$

□

22.3.5 Convolution d'une distribution par une fonction

Nous savons que si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et si $x \in \mathbb{R}^d$ alors la fonction $y \mapsto \psi(x - y)$ est encore une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ nous pouvons considérer la fonction $T * \psi = \psi * T$ définie par

$$(T * \psi)(x) = T(y \mapsto \psi(x - y)). \quad (22.73)$$

Notons que $T * \psi$ est bien une fonction et non une distribution.

Le but de la définition est d'avoir

$$T_f * \psi = f * \psi. \quad (22.74)$$

En effet

$$(T_f * \psi)(x) = T_f(y \mapsto \psi(x - y)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \psi(x - y) dy = (f * \psi)(x). \quad (22.75)$$

Exemple 22.32

La distribution de Dirac est le neutre pour le produit de convolution. En effet

$$(\delta * \psi)(x) = \delta(y \mapsto \psi(x - y)) = \psi(x), \quad (22.76)$$

c'est à dire $\delta * \psi = \psi$.

△

Proposition 22.33 ([4]).

Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors la distribution associée à la fonction $T * \psi$ est tempérée.

Démonstration. En agissant sur $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$T_{T*\psi}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} T(y \mapsto (t_x\psi)(y))\varphi(x)dx \quad (22.77a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} T(y \mapsto \varphi(x)\psi(x-y))dx \quad (22.77b)$$

$$= T\left(y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x-y)dx\right) \quad (22.77c)$$

$$= T(y \mapsto (\varphi * \check{\psi})(y)) \quad (22.77d)$$

$$= T(\varphi * \check{\psi}). \quad (22.77e)$$

Attention : Problèmes et choses à faire

Le passage à la ligne (22.77c) n'est pas justifié. □

22.3.6 Approximation de la distribution de Dirac

Lemme 22.34 ([8]).

Soient des fonction $j_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^∞ telles que

- (1) Pour chaque n , la fonction $x \mapsto j_n(|x|)$ est strictement décroissante et converge ponctuellement vers zéro.
- (2) Pour chaque x , la suite $n \mapsto j_n(x)$ est décroissante et converge vers 0.
- (3) Pour tout $M > 0$, la suite j_n converge vers zéro uniformément sur $B(0, M)^c$.
- (4) Pour tout δ et ϵ , il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\int_{B(0, \delta)} j_n(x)dx - 1| \leq \epsilon$.
- (5) Pour tout n , nous avons $\int_{\mathbb{R}} j_n = 1$.

Alors si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)j_n(x)dx = u(0). \quad (22.78)$$

Démonstration. Nous posons

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} j_n u \quad (22.79a)$$

$$I_{\delta, n} = \int_{B(0, \delta)} j_n u \quad (22.79b)$$

$$Z_{\delta, n} = \int_{B(0, \delta)} u(0)j_n \quad (22.79c)$$

Nous allons progressivement montrer qu'en prenant δ assez petit et n assez grand, les quantités $|I_n - I_{\delta, n}|$, $|I_{\delta, n} - Z_{\delta, n}|$ et $|Z_{\delta, n} - u(0)|$ peuvent être simultanément majorées par ϵ .

Soit $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$; vu que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe M tel que $\int_{|x| > M} |u| < \epsilon$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_1$ nous avons $|j_n(x)| < 1$ dès que $|x| > M$ (hypothèse (3)). Alors

$$\int_{|x| > M} |j_n(x)u(x)| < \epsilon. \quad (22.80)$$

De plus en posant $s = \max\{|u(x)| \text{ tel que } \delta \leq |x| \leq M\}$ (qui existe parce que u est continue et prise sur un compact) nous pouvons considérer N_2 tel que $j_n(x) < \epsilon/s$ pour tout $|x| > \delta$.

Avec $n > \max\{N_1, N_2\}$ nous avons

$$\left| \int_{B(0, \delta)} j_n u - \int_{\mathbb{R}} j_n u \right| = \left| \int_{B(0, \delta)^c} j_n u \right| \quad (22.81a)$$

$$\leq \int_{\delta \leq |x| \leq M} |j_n u| + \int_{|x| \geq M} |j_n u| \quad (22.81b)$$

$$\leq \epsilon(1 + |M - \delta|). \quad (22.81c)$$

En redéfinissant le ϵ nous avons donc montré que pour tout ϵ et δ , il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|I_{\delta,n} - I_n| \leq \epsilon \quad (22.82)$$

dès que $n \geq N$.

La fonction u est uniformément continue sur tout $\overline{B(0, \delta)}$, et nous pouvons donc choisir δ tel que $|u(0) - u(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in \overline{B(0, \delta)}$. Pour ce δ , nous avons déjà trouvé un N tel que $|I_{\delta,n} - I_n| \leq \epsilon$ dès que $n > N$. Nous avons :

$$|I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| \leq \int_{B(0, \delta)} |u(x) - u(0)| j_n(x) dx \quad (22.83a)$$

$$\leq \epsilon \int_{B(0, \delta)} j_n \quad (22.83b)$$

$$\leq \epsilon. \quad (22.83c)$$

Nous avons donc prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ et un N tels que

$$\begin{cases} |I_{\delta,n} - I_n| \leq \epsilon \\ |I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| \leq \epsilon \end{cases} \quad (22.84a)$$

$$(22.84b)$$

dès que $n \geq N$.

Enfin nous avons

$$|z_{\delta,n} - u(0)| = u(0) \left(\int_{B(0, \delta)} j_n - 1 \right), \quad (22.85)$$

et par l'hypothèse (4) nous pouvons choisir n assez grand pour que la parenthèse soit plus petite que ϵ .

Pour ϵ donné, nous avons donc trouvé un δ et un N tels que

$$|I_n - u(0)| \leq |I_n - I_{\delta,n}| + |I_{\delta,n} - Z_{\delta,n}| + |Z_{\delta,n} - u(0)| \leq 3\epsilon. \quad (22.86)$$

En passant à la limite nous avons bien $I_n \rightarrow u(0)$ dans $\mathbb{R}$. □

Il va sans dire que nous connaissons de telles fonctions. Nous en donnons une maintenant.

Exemple 22.35([262])

Nous introduisons la fonction f_ϵ ($\epsilon > 0$) donnée par

$$f_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|}. \quad (22.87)$$

Nous calculons la transformée de Fourier de f_ϵ en divisant le domaine d'intégration :

$$\hat{f}_\epsilon(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon x} e^{-ikx} dx + \int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} e^{-ikx} dx \quad (22.88)$$

En décomposant les parties imaginaires et réelles, et avec un peu de changement de variables, nous pouvons utiliser les intégrales (13.850) et (13.851) pour obtenir

$$\hat{f}_\epsilon(k) = \frac{2\epsilon}{k^2 + \epsilon^2}. \quad (22.89)$$

Sachant que $\arctg(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ et avec encore un peu de changement de variables, nous avons⁸

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\epsilon(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} = 2[\arctg(x/\epsilon)]_{-\infty}^{\infty} = 2\pi. \quad (22.90)$$

8. Et en écrivant correctement l'intégrale sur $\mathbb{R}$ comme une limite, etc.

Cela montre que si nous introduisons la fonction δ_ϵ donnée par

$$\delta_\epsilon(k) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + k^2}, \quad (22.91)$$

alors nous avons une fonction qui tout en même temps ressemble à $\hat{f}_\epsilon$ et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(k) dk = 1 \quad (22.92)$$

pour tout ϵ .

Jusqu'ici nous avons montré que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx = 2\pi \delta_\epsilon(k). \quad (22.93)$$

Pour chaque $\epsilon > 0$ nous avons $\delta_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$. $\triangle$

Proposition 22.36 ([8]).

Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ixy} dx dy = 2\pi g(0). \quad (22.94)$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; nous multiplions l'équation (22.93) par $u(k)$ et nous intégrons par rapport à k :

$$\int_{\mathbb{R}} u(k) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx \right] dk = 2\pi \int_{\mathbb{R}} u(k) \delta_\epsilon(k) dk. \quad (22.95)$$

Il s'agit de passer à la limite dans l'équation (22.95). Les intégrales à gauche peuvent effectuées séparément parce qu'elles respectent le théorème de Fubini. En effet soit la fonction

$$f(k, x) = u(k) e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} \quad (22.96)$$

qui est dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ en vertu du critère du corollaire 13.79 et du fait que à la fois $k \mapsto |u(k)|$ et $x \mapsto e^{-\epsilon|x|}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$.

Nous pouvons donc grouper et dégroupier les intégrales et en particulier les inverser. Si nous effectuons d'abord l'intégrale sur k nous trouvons

$$\int_{\mathbb{R}} u(k) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx \right] dk = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon|x|} \int_{\mathbb{R}} u(k) e^{-ikx} dk dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon|x|} \hat{u}(x) dx. \quad (22.97)$$

La fonction $x \mapsto |e^{-\epsilon|x|} \hat{u}(x)|$ est majorée (uniformément en ϵ) par $x \mapsto \hat{u}(x)$ qui est intégrable parce que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ est dans $\mathcal{S}$ par la proposition 21.12. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 7.134 nous permet de permuter la limite $\epsilon \rightarrow 0$ avec l'intégrale et obtenir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(k) \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\epsilon|x|} dx dk = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(k) e^{-ikx} dk dx. \quad (22.98)$$

Notons qu'en passant à la limite nous avons perdu le droit de permuter les intégrales.

Nous devons encore prouver que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(k) \delta_\epsilon(k) dk = u(0). \quad (22.99)$$

Cela n'est rien d'autre que le lemme 22.34 appliqué à la suite de fonctions $j_n = \delta_{1/n}$. $\square$

22.37.

Notons que les intégrales dans (22.94) ne peuvent pas être permutées parce que $\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} dy$ n'existe pas. Il faut avouer que, malgré tous les conseils du type «attention : permuter des intégrales doit être fait avec prudence», ce n'est pas tous les jours que nous trouvons des intégrales qui ne peuvent pas être permutées, autrement que dans des exemples fait exprès.

22.3.7 Peigne de Dirac

Proposition 22.38.

La formule

$$\Delta_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ka} \quad (22.100)$$

définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La forme linéaire Δ_a est le **peigne de Dirac** de pas a .

Démonstration. Nous utilisons le critère de continuité séquentielle en zéro du théorème 22.9. Soit une suite $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par le théorème 22.6 il existe un compact K de $\mathbb{R}$ pour lequel $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ pour tout n et $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(K)$. La somme 22.100 est donc finie et nous pouvons la permuter avec une limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_a(\varphi_n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(ka). \quad (22.101)$$

La limite $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(K)$ signifie que nous avons convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées vers 0. En particulier $\|\varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$; disons que la somme (qui est finie) fasse s termes :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_n(ka) \leq s \|\varphi_n\|_\infty. \quad (22.102)$$

Le terme de droite tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. □

Donc Δ_a est bien une distribution au sens de la définition 22.8.

Lemme 22.39 ([240]).

Le peigne de Dirac vérifie la relation

$$\Delta_a = \frac{1}{a} \Delta_1 \circ D_a \quad (22.103)$$

où D_a est l'application $D_a: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$(D_a f)(x) = a f(ax). \quad (22.104)$$

Démonstration. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nous avons

$$\Delta_a(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(ka) = \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (D_a \varphi)(k) = \frac{1}{a} \Delta_1(D_a \varphi). \quad (22.105)$$

□

Proposition 22.40.

Le peigne de Dirac est une distribution tempérée.

Notez qu'il y a plus de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; il est donc plus difficile de rentrer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: il est plus compliqué d'avoir existence de $T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous avons

$$|\Delta_a(\varphi)| = \left| \sum_k \varphi(ak) \right| = \left| \sum_k \frac{(1 + a^2 k^2) \varphi(ak)}{1 + a^2 k^2} \right| \leq_{x \in \mathbb{R}} |(1 + x^2) \varphi(x)| \sum_k \frac{1}{1 + a^2 k^2}. \quad (22.106)$$

La somme $\sum_k \frac{1}{1 + a^2 k^2}$ est une somme convergente, et son supremum est borné par la proposition 18.71 en prenant $Q(x) = 1 + x^2$. En effet sur $\overline{B(0, r)}$ la fonction $x \mapsto (1 + x^2) \varphi(x)$ est bornée par ce que c'est une fonction continue sur un compact, et à l'extérieur de $B(0, r)$ cette fonction est alors bornée par 1. □

Si aucune ambiguïté n'est à craindre, nous noterons f la distribution T_f .

Exemple 22.41

La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est la fonction constante : $\hat{\delta} = 1$. En effet si nous agissons sur une fonction test,

$$\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx. \quad (22.107)$$

△

22.4 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$

D'abord parlons un peu de continuité en recopiant la proposition 5.184 dans notre contexte.

Proposition 22.42.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $u: I \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

- (1) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, l'application $t \mapsto u_t(\varphi)$ est continue.
- (2) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, nous avons la limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t(\varphi) = u_{t_0}(\varphi). \quad (22.108)$$

- (3) Nous avons la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t = u_{t_0}. \quad (22.109)$$

En ce qui concerne la définition de l'espace $C^\infty(I, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$, c'est la définition 5.185. Grâce au point (1) de la proposition 22.42, nous retenons que la propriété fondamentale d'une application $T \in C^k(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ est que pour tout $\varphi \in (\Omega)$, l'application

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto T_t(\varphi) \end{aligned} \quad (22.110)$$

est de classe C^k .

Proposition 22.43.

Soit $(T_t) \in C^0(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ et $\psi \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$. Alors l'application

$$t \mapsto T_t(\psi(t, \cdot)) \quad (22.111)$$

est continue sur I .

Démonstration. La fonction dont nous voulons prouver la continuité est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; il est donc loisible de se contenter de la continuité séquentielle. Soit $t_0 \in I$ et (t_j) une suite dans I convergeant vers t_0 . Nous posons $U_j = T_{t_j}$ et $\psi_j = \psi(t_j, \cdot)$. Par hypothèse de continuité de (T_t) nous avons $U_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T_{t_0}$. D'autre part le support de ψ étant compact nous avons $\text{supp}(\psi) \subset [c, d] \times K$ où $[c, d] \subset I$ et K est compact dans Ω . Par conséquent nous avons aussi $\text{supp}(\psi_j) \subset K$.

Afin d'alléger les notations notons $\tilde{\psi}(x) = \psi(t_0, x)$. Pour tout multiindice α et pour tout j nous avons

$$p_\alpha(\psi_j - \tilde{\psi}) = \left| \partial^\alpha \psi(t_j, x) - \partial^\alpha \psi(t_0, x) \right| \leq |t_j - t_0| \sup_{\substack{t \in [c, d] \\ x \in K}} |\partial_t \partial^\alpha \psi(t, x)| \rightarrow 0. \quad (22.112)$$

Nous avons donc la convergence

$$\psi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \psi(t_0, \cdot). \quad (22.113)$$

Étant donné que $U_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T_{t_0}$ et $\psi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \tilde{\psi}$, le point (3) du corollaire 18.9 nous donne la convergence

$$U_j(\psi_j) \rightarrow T_{t_0}(\tilde{\psi}) \quad (22.114)$$

dans $\mathbb{C}$. Cela est bien la continuité de la fonction $t \mapsto T_t(\psi(t, \cdot))$. $\square$

Proposition 22.44 ([260]).

Soit $(T_t) \in C^0(I, \mathcal{D}'(\Omega))$. Nous définissons l'application $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$T(\psi) = \int_I T_t(\psi(t, \cdot)) dt \quad (22.115)$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$. Alors $T \in \mathcal{D}'(I \times \Omega)$.

Démonstration. La proposition 22.43 nous indique que la fonction $t \mapsto T_t(\psi(t, \cdot))$ est continue. Étant donné qu'elle est seulement non nulle sur un compact, l'intégrale

$$\int_I T_t(\psi(t, \cdot)) dt \quad (22.116)$$

a un sens et est finie. L'application $T: \mathcal{D}(I \times \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie est linéaire. Il reste à voir qu'elle est continue. Pour cela nous allons utiliser le théorème 22.9(2) qui nous dit que nous pouvons nous fixer un compact $[c, d] \times K \subset I \times \Omega$ et considérer $\psi \in \mathcal{D}([c, d] \times K)$.

Soit, pour commencer, donnée une application $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. L'application $t \mapsto T_t(\varphi)$ est continue et non nulle sur le et il existe donc $C_\varphi > 0$ tel que

$$|T_t(\varphi)| \leq C_\varphi \quad (22.117)$$

pour tout $t \in [c, d]$.

Nous voulons utiliser le théorème de Banach-Steinhaus dans sa version 18.10 sur la famille d'applications paramétrée par $u \in [c, d]$:

$$\begin{aligned} U_u: \mathcal{D}([c, d] \times K) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto T_u(\psi(u, \cdot)). \end{aligned} \quad (22.118)$$

Commençons par prouver que cela est une application continue pour chaque u . Ce sera le cas si la projection

$$\begin{aligned} \text{proj}: \mathcal{D}([c, d] \times K) &\rightarrow \mathcal{D}(K) \\ \psi &\mapsto \psi(u, \cdot) \end{aligned} \quad (22.119)$$

est continue. Pour cela nous notons P_{kl} la semi-norme sur $\mathcal{D}([c, d] \times K)$ donnée par

$$P_{k,l}(\psi) = \sum_{n \leq k} \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{\substack{t \in [c,d] \\ x \in K}} |\partial_t^n \partial^\alpha \psi(t, x)|. \quad (22.120)$$

Nous montrons que **proj** est séquentiellement continue ; étant donné que les topologies sur $\mathcal{D}(K)$ et $\mathcal{D}([c, d] \times K)$ sont données par des métriques (proposition 22.7), cela suffit pour assurer la continuité grâce à la proposition 5.124. Montrons que si $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}([c,d] \times K)} 0$, alors **proj**(ψ_n) $\xrightarrow{\mathcal{D}(K)} 0$. Pour cela nous remarquons que

$$p_j(\text{proj}(\psi)) = \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(u, x)| \quad (22.121a)$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{t \in [c,d]} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(t, x)| \quad (22.121b)$$

$$= P_{0,j}(\psi). \quad (22.121c)$$

Par conséquent

$$p_j(\mathbf{proj}(\psi_n)) \leq P_{0,j}(\psi_n) \rightarrow 0 \quad (22.122)$$

où nous avons utilisé la proposition 5.178. Utilisant cette même proposition à l'envers, nous déduisons que $\mathbf{proj}(\psi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} 0$. Les applications U_u sont donc continues ; elles sont également bornées parce que si $\psi \in \mathcal{D}([c, d] \times K)$ nous avons

$$\sup_{u \in [c, d]} |U_u(\psi)| = \sup_u |T_u(\psi(u, \cdot))|, \quad (22.123)$$

et la continuité déjà évoquée, sur le compact $[c, d]$, nous dit que cette quantité est finie. Le théorème de Banach-Steinhaus peut maintenant être appliqué et il existe $C > 0$ et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\psi \in \mathcal{D}([c, d] \times K)$,

$$|U_u(\psi)| \leq CP_{k,l}(\psi) = C \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{n \leq l} \sup_{t,x} |\partial_t^n \partial^\alpha \psi(t, x)| \leq C \sum_{|\alpha| + n \leq k+l} \sup_{t,x} |\partial_t^n \partial^\alpha \psi(t, x)|. \quad (22.124)$$

Quelques remarques

- Nous n'avons pas mis de maximum devant le supremum (alors que la conclusion (18.14) en demande) parce que dans le cas des semi-normes P_{kl} , c'est toujours celle avec k et l le plus grand possible qui sont les plus grandes parce qu'elles sont des sommes emboîtées les unes les autres.
- La fusion de deux sommes est bien une majoration parce qu'il y a plus de termes dans la seconde que dans la première.
- La quantité la plus à droite est (à part le C) ce que nous pouvons noter $P_{k+l}(\psi)$: c'est bien une des semi-normes associées à l'espace de dimension $d + 1$.

Nous majorons maintenant $T(\psi)$ par

$$|T(\psi)| \leq \int_c^d |T_t(\psi(t, \cdot))| dt = \int_c^d |U_t(\psi)| dt \leq C|d - c|P_{k+l}(\psi). \quad (22.125)$$

Maintenant le théorème 22.9(2) appliqué à l'ouvert $I \times \Omega$ et avec ψ au lieu de φ nous informe que $T \in \mathcal{D}(I \times K)$. $\square$

22.4.1 Dérivation

Quelques propriétés de dérivation des fonctions $I \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ seront directement énoncées et démontrées dans le cas des distributions tempérées. Les résultats 22.51 et 22.52 seront a fortiori valables si nous remplaçons $\mathcal{S}$ par $\mathcal{D}$.

22.5 L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$

Dans cette section nous notons I un ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$; si ψ est une fonction sur $I \times \Omega$ nous allons noter $\psi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $\psi_t(x) = \psi(t, x)$. C'est une notation plus légère que $\psi(t, \cdot)$.

22.5.1 Propriétés générales

La définition de l'espace $C^\infty(I, \mathcal{S}'(\Omega))$ est encore la définition 5.185 et les propriétés énoncées dans la proposition 22.42 sont encore bonnes ici.

D'abord parlons un peu de continuité en recopiant la proposition 5.184 dans notre contexte.

Proposition 22.45.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $u : I \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

- (1) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'application $t \mapsto u_t(\varphi)$ est continue.

(2) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, nous avons la limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t(\varphi) = u_{t_0}(\varphi). \quad (22.126)$$

(3) Nous avons la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t = u_{t_0}. \quad (22.127)$$

Lemme 22.46.

Nous avons $C^\infty(I, \mathcal{S}'(\Omega)) \subset C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega))$.

Démonstration. Soit $(T_t) \in C^\infty(I, \mathcal{S}'(\Omega))$. Pour chaque t nous avons

$$T_t \in \mathcal{S}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \quad (22.128)$$

Ensuite il suffit de dire que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la fonction

$$t \mapsto T_t(\varphi) \quad (22.129)$$

est de classe C^∞ parce que c'est le cas pour toute fonction dans $\mathcal{S}(\Omega)$. La proposition 22.42 (en changeant $\mathcal{D}$ en $\mathcal{S}$) conclut que $(T_t) \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega))$. $\square$

Proposition 22.47.

L'espace $\mathcal{S}(\Omega)$ est complet et métrisable.

Démonstration. En ce qui concerne le métrisable nous reprenons la formule de l'écart (5.142). Dans notre cas pour l'écrire explicitement il faudrait une énumération de $\mathbb{N}^2$ à partir de 1 (et non de zéro). Cette formule donne bien une distance parce que si $d(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ alors en particulier $p_{00}(\varphi_1 - \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty = 0$ et donc $\varphi_1 = \varphi_2$.

Nous montrons maintenant que $\mathcal{S}(\Omega)$ est complet en y considérant une suite de Cauchy (φ_n) . Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ainsi que k, l assez grands pour que $\varphi_k - \varphi_l \in B_{\alpha\beta}(0, \epsilon)$. En particulier pour $\alpha = \beta = 0$ nous avons $\|\varphi_k - \varphi_l\|_\infty \leq \epsilon$, ce qui signifie que nous avons une suite vérifiant le critère de Cauchy uniforme 11.232. Elle converge donc uniformément vers une certaine fonction φ que la proposition 11.233 nous assure être continue. Il existe donc $\varphi \in C(\Omega)$ telle que

$$\varphi_k \xrightarrow{\text{unif}} \varphi. \quad (22.130)$$

Nous devons montrer que $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$. Le fait que φ soit de classe C^∞ s'obtient en utilisant les semi-normes $p_{0,\alpha}(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$ de la même façon que dans la preuve que $\mathcal{D}(\Omega)$ était complet (proposition 22.7). Nous obtenons en particulier que

$$\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{\text{unif}} \partial^\alpha \varphi \quad (22.131)$$

pour tout multiindice α . Montrons encore que φ est à décroissance rapide : nous devons montrer que pour tout α et β nous avons

$$p_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} |x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)| < \infty. \quad (22.132)$$

Étant donné que (φ_n) est de Cauchy dans $\mathcal{S}(\Omega)$ nous avons (pour ϵ fixé et k, l assez grands) :

$$|x^\beta (\partial^\alpha \varphi_k - \partial^\alpha \varphi_l)(x)| \leq \epsilon \quad (22.133)$$

pour tout $x \in \Omega$. En considérant l fixé et en prenant la limite $k \rightarrow \infty$ et en utilisant la convergence uniforme (22.131) nous trouvons que

$$|x^\beta (\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_l)(x)| \leq \epsilon \quad (22.134)$$

Du coup nous pouvons faire la majoration

$$\sup_{x \in \Omega} |x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)| \leq \sup_x |x^\beta (\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_l)(x)| + \sup_x |(\partial^\alpha \varphi_l)(x)| \leq \epsilon + p_{\alpha\beta}(\varphi_l) < \infty \quad (22.135)$$

du fait que $p_{\alpha\beta}(\varphi_l) < \infty$ parce que $\varphi_l \in \mathcal{S}(\Omega)$.

Donc $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ et ce dernier est alors complet. $\square$

Proposition 22.48.

Soit $(T_t) \in C^0(I, \mathcal{S}'(\Omega))$ et $\psi \in \mathcal{S}(I \times \Omega)$. Alors la fonction

$$t \mapsto T_t(\psi_t) \quad (22.136)$$

est continue sur I .

Démonstration. Soit $t_0 \in I$ et une suite convergente vers t_0 : $t_j \rightarrow t_0$ dans $\mathbb{R}$. Vu que (T_t) est continue en t , elle est en particulier séquentiellement continue et nous avons

$$T_{t_j} \xrightarrow{\mathcal{S}'(\Omega)} T_{t_0}. \quad (22.137)$$

Montrons que nous avons aussi $\psi_{t_j} \xrightarrow{\mathcal{S}(\Omega)} \psi_{t_0}$. Pour cela nous utilisons les semi-normes⁹ $p_{\alpha\beta}$ définies en (18.273) :

$$p_{\alpha\beta}(\psi_{t_j} - \psi_{t_0}) = \sum_{x \in \Omega} \left| x^\beta (\partial^\alpha \psi(t_j, x) - \partial^\alpha \psi(t_0, x)) \right| \quad (22.138a)$$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} \left| x^\beta |t_0 - t_j| \sup_{t \in [t_0, t_j]} |\partial_t \partial^\alpha \psi(t, x)| \right| \quad (22.138b)$$

$$\leq |t_0 - t_j| \sup_{x \in \Omega} \sup_{t \in I} |x^\beta \partial_t \partial^\alpha \psi(t, x)| \quad (22.138c)$$

$$\leq |t_0 - t_j| P_{(\alpha t), \beta}(\psi). \quad (22.138d)$$

Pour la première majoration nous avons utilisé le théorème des accroissements finie 11.187. Pour la dernière ligne nous avons noté $P_{\alpha\beta}$ les semi-normes de $\mathcal{S}(I \times \Omega)$ et $(t\alpha)$ est le multiindice qui commence par la variable t et qui continue par α . Étant donné que $P_{(\alpha t)\beta}(\psi) < \infty$ nous avons bien

$$p_{\alpha\beta}(\psi_{t_j} - \psi_{t_0}) \rightarrow 0 \quad (22.139)$$

et donc $\psi_{t_j} \xrightarrow{\mathcal{S}(\Omega)} \psi_{t_0}$.

Étant donné que $\mathcal{S}(\Omega)$ est métrisable et complet, le corollaire 18.9 nous dit que

$$T_{t_j}(\psi_{t_j}) \rightarrow T_{t_0}(\psi_{t_0}), \quad (22.140)$$

ce qui est bien le critère de continuité séquentielle de la fonction (22.136). $\square$

Remarque 22.49.

La proposition 22.44 nous dit, a fortiori, que si $(T_t) \in C^\infty(I, \mathcal{S}'(\Omega))$ alors la formule

$$\tilde{T}(\psi) = \int_I T_t(\psi_t) \quad (22.141)$$

donne un élément $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(I \times \Omega)$. Au cas où aucune confusion n'est à craindre, nous pourrions noter également T l'élément de $\mathcal{D}'(I \times \Omega)$ déduit de $T \in C^\infty(I, \mathcal{S}'(\Omega))$.

Notons que ce T ne sera pas toujours une distribution tempérée comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 22.50

En posant $T_t(\varphi) = e^{t^2} \varphi(0)$ avec $I = \mathbb{R}$, l'intégrale

$$T(\psi) = \int_{\mathbb{R}} T_t(\psi_t) = \int_{\mathbb{R}} e^{t^2} \psi(t, 0) dt \quad (22.142)$$

ne converge pas pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \Omega)$. En effet par rapport à t , la fonction $\psi(t, 0)$ décroît rapidement mais pas spécialement assez rapidement pour compenser e^{t^2} . $\triangle$

9. Pas parce que nous en avons envie, mais bien parce qu'elles font partie de la définition de la convergence et de tous ces trucs.

22.5.2 Dérivation

Proposition 22.51 ([260]).

Soit $T \in C^k(I, \mathcal{S}'(\Omega))$ et $0 \leq l \leq k$. Pour tout $t_0 \in I$ l'application

$$\begin{aligned} T_{t_0}^{(l)} : \mathcal{S}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \left(\frac{d^l}{dt} T_t(\varphi) \right) (t_0) \end{aligned} \quad (22.143)$$

est bien définie, est une distribution et de plus

$$t \mapsto T_t^{(l)} \in C^{k-l}(I, \mathcal{S}'(\Omega)). \quad (22.144)$$

Attention que la formule (22.143) est bonne si $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$. Si par contre $\psi \in \mathcal{S}(I \times \Omega)$ et qu'on veut regarder $u_t^{(1)}(\psi_t)$ alors il faut regarder la proposition 22.52 et utiliser la formule (22.149) dans laquelle se trouve $u_t^{(1)}(\psi_t)$.

Démonstration. Pour $k = 0$ nous avons $T_t^{(0)} = T_t$ et c'est bon. Pour le cas $k = 1$ et $l = 0$ c'est encore $T_t^{(0)} = T_t$ qui fonctionne.

Le premier cas non trivial à traiter est $k = 1$ et $l = 1$. Nous considérons $t_0 \in I$; par définition de la dérivée, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$, nous avons (pour peu que les limites existent) :

$$T_{t_0}^{(1)}(\varphi) = \frac{d}{dt} [T_t(\varphi)]_{t=t_0} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}(\varphi) - T_{t_0}(\varphi)}{\epsilon_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} U_j(\varphi) \quad (22.145)$$

où

$$U_j = \frac{1}{\epsilon_j} (T_{t_0+\epsilon_j} - T_{t_0}). \quad (22.146)$$

et (ϵ_j) est une suite de réels tendant vers zéro.

Vu que $(T_t) \in C^k(I, \mathcal{S}'(\Omega))$, l'application $t \mapsto T_t(\varphi)$ est de classe C^k et en particulier l'expression (22.145) a une limite lorsque $j \rightarrow \infty$. Donc $T_{t_0}^{(1)}(\varphi)$ est bien définie. Le point (1) du corollaire 18.9 nous dit que $\lim_{j \rightarrow \infty} U_j(\varphi) = T_{t_0}^{(1)}(\varphi)$ et $T_{t_0}^{(1)}$ est une distribution (linéaire et continue).

Nous devons encore voir que $t \mapsto T_t^{(1)}$ est une application $C^0(I, \mathcal{S}'(\Omega))$. Cela est une conséquence du fait que (T_t) soit de classe C^1 , ce qui se traduit par le fait que l'application

$$t \mapsto \frac{d}{dt} (T_t(\varphi)) \quad (22.147)$$

est continue (définition de la dérivée et point (1) de la proposition 22.45 appliquée à la dérivée).

Les cas $k \geq 1$ se traitent par récurrence. $\square$

Proposition 22.52 ([260]).

Soit $(T_t) \in C^1(I, \mathcal{S}'(\Omega))$ et $\psi \in \mathcal{S}(I \times \Omega)$. Alors la fonction

$$t \mapsto T_t(\psi(t, \cdot)) \quad (22.148)$$

est de classe C^1 sur I et

$$\frac{d}{dt} (T_t(\psi(t, \cdot))) = T_t^{(1)}(\psi(t, \cdot)) + T_t \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \right) \quad (22.149)$$

Démonstration. Soit $t_0 \in I$ et une suite réelle $\epsilon_j \rightarrow 0$. Le membre de gauche de (22.149), écrit en t_0 , donne

$$\spadesuit = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}(\psi(t_0+\epsilon_j, \cdot)) - T_{t_0}(\psi(t_0, \cdot))}{\epsilon_j} \quad (22.150)$$

Afin d'alléger les notations nous allons écrire $\psi_t = \psi(t, \cdot)$. Dans le numérateur de (22.150) nous ajoutons et soustrayons la quantité $T_{t_0+\epsilon_j}(\psi_{t_0})$ et nous découpons la limite en deux morceaux :

$$\spadesuit = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{T_{t_0+\epsilon_j}(\psi_{t_0+\epsilon_j} - \psi_{t_0})}{\epsilon_j} + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(T_{t_0+\epsilon_j} - T_{t_0})(\psi_{t_0})}{\epsilon_j} \quad (22.151)$$

Le second terme vaut

$$\frac{d}{dt} \left(T_t(\psi_{t_0}) \right)_{t=t_0} = T_{t_0}^{(1)}(\psi_{t_0}) \quad (22.152)$$

par la proposition 22.51. Occupons nous de l'autre morceau de $\spadesuit$. Nous posons $U_j = T_{t_0+\epsilon_j}$ et

$$\varphi_j = \frac{1}{\epsilon_j} (\psi_{t_0+\epsilon_j} - \psi_{t_0}). \quad (22.153)$$

Nous voulons utiliser le corollaire 18.9(3) pour obtenir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} U_j(\varphi_j) = T_{t_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, \cdot) \right). \quad (22.154)$$

D'une part (T_t) est de classe C^∞ en t et nous avons donc la convergence $U_j \xrightarrow{\mathcal{S}'(\Omega)} T_{t_0}$. Reste à prouver que

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\Omega)} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, \cdot). \quad (22.155)$$

Cela en remarquant bien que la variable de dérivation n'est pas celle par rapport à laquelle nous voulons la convergence Schwartz¹⁰. Soient α et β des naturels et calculons un peu :

$$p_{\alpha\beta} \left(\varphi_j - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, \cdot) \right) = \sup_{x \in \Omega} \left| x^\beta \partial^\alpha \left(\frac{1}{\epsilon_j} (\psi(t_0 + \epsilon_j, x) - \psi(t_0, x)) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, x) \right) \right| \quad (22.156)$$

Il est à présent l'heure d'utiliser un développement de Taylor avec le reste de la proposition 11.209 :

$$\psi(t_0 + \epsilon_j, x) = \psi(t_0, x) + \epsilon_j \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, x) + \frac{\epsilon_j^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\bar{t}, x) \quad (22.157)$$

pour un certain $\bar{t} \in [t_0, t_0 + \epsilon_j]$. En mettant ça dans le calcul (22.156) nous restons avec

$$p_{\alpha\beta} \left(\varphi_j - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, \cdot) \right) = \sup_{x \in \Omega} \left| x^\beta \partial^\alpha \left(\epsilon_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\bar{t}, x) \right) \right| \leq \epsilon_j P_{\alpha, 2; \beta, 0}(\psi) \quad (22.158)$$

où $P_{\alpha, k; \beta, l}$ sont les semi-normes de $\mathcal{S}(I \times \Omega)$ avec la notation plus ou moins évidente de prendre α dérivations sur x , k sur t puis de multiplier par $x^\beta t^l$. Au final nous avons bien

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_{\alpha\beta} \left(\varphi_j - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, \cdot) \right) = 0 \quad (22.159)$$

et donc la convergence $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\Omega)} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, \cdot)$. □

Lemme 22.53.

Soit $(T_t) \in C^1(I, \mathcal{S}'(\Omega))$ alors si $\mathcal{F}$ dénote la transformée de Fourier nous avons

$$\mathcal{F}(T_t^{(1)}) = (\mathcal{F}T)_t^{(1)} \quad (22.160)$$

où $(\mathcal{F}T)$ est la famille de distributions $(\mathcal{F}T)_t = \mathcal{F}T_t$.

Démonstration. Pour la preuve il suffit de tester l'égalité sur une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$:

$$(\mathcal{F}T_t^{(1)})(\varphi) = T_t^{(1)}(\mathcal{F}\varphi) = \frac{d}{dt} \left(T_t(\mathcal{F}\varphi) \right) = \frac{d}{dt} \left((\mathcal{F}T_t)(\varphi) \right) = (\mathcal{F}T)_t^{(1)}(\varphi). \quad (22.161)$$

□

10. Je ne sais pas si je me suis bien fait comprendre là.

22.6 Une équation de distribution

Nous allons étudier l'équation

$$(x - x_0)^\alpha u = 0 \quad (22.162)$$

pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ est donné fixé. Notons tout de suite que (22.162) est un petit abus de notation pour dire qu'en vertu de la définition 22.14 du produit d'une distribution par une fonction, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, nous avons $u\left(x \mapsto (x - x_0)\phi(x)\right) = 0$.

Lemme 22.54 ([2]).

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Une solution à l'équation

$$(x - x_0)^\alpha u = 0 \quad (22.163)$$

est une distribution à support dans $\{x_0\}$ et d'ordre fini.

Démonstration. Nous commençons par prouver que u est une solution de (22.163) si et seulement si ¹¹ $\langle u, \phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}$ telle que

$$\phi(x_0) = \dots = \partial^{\alpha-1} \phi(x_0) = 0. \quad (22.164)$$

Condition nécessaire Supposons que u soit une solution. Alors le corollaire 13.191 du théorème de Hadamard donne $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = (x - x_0)^\alpha \psi(x)$. Dans ce cas, si u est solution de (22.163), alors

$$0 = \langle (x - x_0)^\alpha u, \psi \rangle = \langle u, (x - x_0)^\alpha \psi(x) \rangle = \langle u, \phi \rangle. \quad (22.165)$$

Nous avons vu que si u est solution, alors $\langle u, \phi \rangle = 0$ pour tout ϕ satisfaisant la condition (22.164).

Condition suffisante Supposons maintenant l'inverse : u est une distribution s'annulant sur toute fonction $\phi \in \mathcal{D}'$ satisfaisant (22.164). Nous allons alors prouver que u est une solution. Soit donc $\psi \in \mathcal{D}$ et calculons

$$\langle (x - x_0)u, \psi \rangle = \langle u, (x - x_0)\psi \rangle = 0 \quad (22.166)$$

parce que la fonction $(x - x_0)\psi(x)$ vérifie la condition (22.164).

Nous passons maintenant au cœur de la preuve : nous supposons que u est une solution. Si le support de ϕ est contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ alors ϕ est nulle dans un voisinage de x_0 (et donc $\partial^k \phi = 0$ pour tout k) et $\langle u, \phi \rangle = 0$. Autrement dit, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ nous avons $\langle u, \phi \rangle = 0$, ce qui signifie que $\text{supp}(u) \cap (\mathbb{R} \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ ou encore que $\text{supp}(u) = \{x_0\}$.

Maintenant que u a un support compact, la proposition 22.20 nous indique qu'elle est d'ordre fini. □

Théorème 22.55 ([2]).

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ et l'équation

$$(x - x_0)^\alpha u = 0 \quad (22.167)$$

pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Les solutions sont les combinaisons linéaires des dérivées de δ_{x_0} jusqu'à la α^e exclue.

Démonstration. D'abord montrons que les $\partial^i \delta_{x_0}$ sont des solutions. Avec les définition 22.14 et 22.15 des dérivées de distributions et de leur produits avec des fonctions ¹²,

$$(x - x_0)^\alpha \partial^i \delta_{x_0}(\phi) = \delta_{x_0} \left(\partial^i \left((x - x_0)^\alpha \phi(x) \right) \right) \quad (22.168)$$

11. En réalité nous n'aurons besoin que de la condition nécessaire, en particulier pour le théorème 22.55.

12. Comme souvent, dans l'expression suivante, il y a un abus de notation parce que x est une variable muette : il faudrait écrire « $x \mapsto$ » au début de la grade parenthèse.

Si $i < \alpha$ alors dans chaque terme de Leibnitz, il y aura un facteur $(x - x_0)$, et la prise de δ_{x_0} annulera. Si par contre $i \geq \alpha$ alors il y aura le terme

$$\binom{i}{\alpha} \partial^\alpha ((x - x_0)^\alpha) \partial^{i-\alpha} = \binom{i}{\alpha} \alpha! (\partial^{i-\alpha} \phi)(x_0) \quad (22.169)$$

qui est le seul terme contenant $(\partial^{i-\alpha} \phi)(x_0)$. Il suffit alors de choisir $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de sorte que

$$(\partial^k \phi)(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i - \alpha \\ 1 & \text{si } k = i - \alpha \end{cases} \quad (22.170)$$

et alors on est certain que le tout n'est pas nul, et donc que $(x - x_0)^\alpha (\partial^i \delta_{x_0}) \neq 0$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que $\partial^i \delta_{x_0}$ est solution si et seulement si $0 \leq i < \alpha$.

Il faut encore prouver que les solutions sont toutes des combinaisons linéaires de dérivées de delta de Dirac centrées en x_0 . Pour cela nous invoquons d'abord le lemme 22.54 qui nous assure que u est d'ordre fini et de support $\{x_0\}$. Ensuite la proposition 22.23 nous indique que u doit alors être une combinaison linéaire de dérivées de Dirac. $\square$

Chapitre 23

Espaces de Sobolev, équations elliptiques

23.1 Espaces de Sobolev

23.1.1 Sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Sauf mention du contraire dans cette section I est un intervalle borné ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

Définition 23.1.

Soit $f \in L^p(I)$ où I est l'intervalle ouvert $]a, b[$. Sa **dérivée au sens des distributions** est une fonction¹ g telle que

$$\int_I f \varphi' = - \int_I g \varphi \quad (23.1)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$.

Lemme 23.2.

Lorsqu'une fonction admet une dérivée au sens des distributions, cette dernière est unique (et justifie le singulier dans la définition).

Démonstration. Soient $g, h \in L^2$ tels que

$$\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi = - \int_I h \varphi \quad (23.2)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Nous avons alors

$$\int_I (g - h) \varphi = 0. \quad (23.3)$$

Cela implique que $g - h = 0$ presque partout par la proposition 18.50². □

Définition 23.3.

Soit $I =]a, b[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$. L'**espace de Sobolev** $H^1(I)$ est l'ensemble

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I) \text{ tel que } \exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \right\}. \quad (23.4)$$

L'unique élément g de $L^2(I)$ vérifiant $\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi$ est noté u' est nommé **dérivée**; nous verrons dans les prochaines pages pourquoi.

L'espace H^1 accepte le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_I uv + \int_I u'v', \quad (23.5)$$

1. En réalité, c'est une classe au sens de l'égalité presque partout.

2. Ou alors par le lemme 18.42 qui est moins général mais tout aussi bien pour ici.

et nous notons $\|\cdot\|_{H^1}$ la norme correspondante qui n'est autre que

$$\|u\|_{H^1} = \langle u, u \rangle = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}. \quad (23.6)$$

Nous introduisons l'espace $L^1_{loc}(I)$ des fonctions étant L^1 sur tout compact de I .

Corollaire 23.4.

Si $u \in H^1(I)$ et si $u' = 0$ alors il existe une constante C telle que $u = C$ presque partout.

Démonstration. L'hypothèse $u' = 0$ signifie que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(I)$,

$$\int_I u\varphi' = \int_I u'\varphi = 0. \quad (23.7)$$

La proposition 18.51 nous dit alors qu'il existe une constante C telle que $u = C$ presque partout. $\square$

Lemme 23.5.

Tout élément de $H^1(I)$ admet un unique représentant continu.

Nous verrons dans le corollaire 23.7 que ce représentant pourra être prolongé par continuité sur $\bar{I}$.

Démonstration. Soit $y_0 \in I$ et $u \in H^1(I)$. Nous considérons la fonction

$$\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t) dt. \quad (23.8)$$

Notons que par définition, $u' \in L^2$ donc l'intégrale ne pose pas de problèmes. Montrons que $\bar{u}$ est continue sur $\bar{I}$. Pour cela nous considérons $x \in \bar{I}$ et h tel que $x + h \in \bar{I}$. Alors

$$|\bar{u}(x+h) - \bar{u}(x)| = \left| \int_x^{x+h} u' \right| \leq \int_x^{x+h} |u'|. \quad (23.9)$$

Mais la fonction $|u'|$ est dans $L^1_{loc}(I)$ par le lemme 18.22; elle est en particulier intégrable sur un ouvert contenant x et par conséquent la dernière intégrale tend vers zéro lorsque h tend vers 0.

Nous prouvons à présent que $\bar{u}$ est dans $H^1(I)$ et que sa dérivée est égale à u' ; pour cela nous allons montrer que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$,

$$\int_I \bar{u}\varphi' = - \int_I u'\varphi. \quad (23.10)$$

Nous avons

$$\int_I \bar{u}\varphi' = \int_I \left(\int_{y_0}^x u'(t) dt \right) \varphi'(x) dx = \int_a^{y_0} \left(\int_{y_0}^x u'(t) dt \right) \varphi'(x) dx + \int_{y_0}^b \left(\int_{y_0}^x u'(t) dt \right) \varphi'(x) dx. \quad (23.11)$$

Pour faire plus court, nous notons $f(t, x) = u'(t)\varphi'(x)$. La première intégrale vaut

$$\int_a^{y_0} \left(\int_{y_0}^x u'(t)\varphi'(x) \right) = \int_a^{y_0} \left(\int_{y_0}^a f(t, x) \mathbb{1}_{t < x}(t, x) dt \right) dx \quad (23.12a)$$

$$= \int_{y_0}^a \int_a^{y_0} f(t, x) \mathbb{1}_{t > x} dx dt \quad (23.12b)$$

$$= \int_{y_0}^a \int_a^t f(t, x) dx dt \quad (23.12c)$$

$$= - \int_a^{y_0} \int_a^t u'(t)\varphi'(x) dx dt \quad (23.12d)$$

La permutation d'intégrales pour obtenir (23.12b) est due au théorème de Fubini 13.78(3). Par le même petit jeu, la seconde intégrale vaut

$$\int_{y_0}^b \int_t^b u'(t) \varphi'(x) dx dt. \quad (23.13)$$

En refaisant la somme,

$$\int_I \bar{u} \varphi' = - \int_a^{y_0} u'(t) \left(\int_a^t \varphi'(x) dx \right) dt + \int_{y_0}^b u'(t) \left(\int_t^b \varphi'(x) dx \right) dt \quad (23.14a)$$

$$= - \int_a^{y_0} u'(t) (\varphi(t) - \varphi(a)) dt + \int_{y_0}^b u'(t) (\varphi(b) - \varphi(t)) dt \quad (23.14b)$$

$$= - \int_a^b u' \varphi \quad (23.14c)$$

$$= - \int_I u' \varphi. \quad (23.14d)$$

Notons que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ parce que φ est à support compact dans $]a, b[$. Nous avons donc prouvé que $\bar{u}$ est dans $H^1(I)$ et que $\bar{u}' = u'$. Par le corollaire 23.4, nous avons une constante C telle que $\bar{u} = u + C$ presque partout, c'est à dire $u = \bar{u} + C$ dans $H^1(I)$.

En résumé, $\tilde{u} \tilde{u} = \bar{u} + C$ est un représentant continu de u dans $L^2(I)$.

L'unicité du représentant continu est simplement le fait que deux fonctions continues égales presque partout sont égales (proposition 13.12).

□

Proposition 23.6.

Si $u \in H^1(I)$, alors

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u' \quad (23.15)$$

pour tout $x, y \in I$.

Démonstration. Pour fixer les idées, nous supposons $x < y$. Nous considérons une suite $\varphi_n \in C_c^\infty(I)$ convergeant uniformément sur I vers $\mathbb{1}_{[x,y]}$. Nous exigeons de plus que

- φ'_n est positive sur $[a, x + \frac{1}{n}]$
- φ'_n est négative sur $[y - \frac{1}{n}, b]$
- $\varphi_n = 1$ sur $[x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}]$.
- $\varphi_n = 0$ sur $[a, x - 1/n]$ et sur $[y + 1/n, b]$.

Pour chaque n , nous découpons l'intégrale comme

$$- \int_I u' \varphi_n = \int_I u \varphi'_n = \int_a^{x-1/n} u \varphi'_n + \int_{x-1/n}^{x+1/n} u \varphi'_n + \int_{x+1/n}^{y-1/n} u \varphi'_n + \int_{y-1/n}^{y+1/n} u \varphi'_n + \int_{y+1/n}^b u \varphi'_n. \quad (23.16)$$

Par construction de φ_n , de ces 5 morceaux, il n'en reste que deux de non nulles :

$$\int_I u \varphi' = \underbrace{\int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t) \varphi'_n(t) dt}_A + \underbrace{\int_{y-1/n}^{y+1/n} u(t) \varphi'_n(t) dt}_B \quad (23.17)$$

Soit $\epsilon > 0$ et n suffisamment grand pour avoir $u(t) \in B(u(x), \epsilon)$ pour tout $t \in B(x, \frac{1}{n})$ et (en même temps) $u(t) \in B(u(y), \epsilon)$ pour tout $t \in B(y, \frac{1}{n})$. C'est la continuité de u qui permet de trouver un tel n . Pour cette valeur de n , en tenant compte des hypothèses sur la positivité de φ'_n nous avons

$$\int_{x-1/n}^{x+1/n} (u(x) - \epsilon) \varphi'_n(t) dt \leq \int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t) \varphi'_n(t) dt \leq \int_{x-1/n}^{x+1/n} (u(x) + \epsilon) \varphi'_n(t) dt, \quad (23.18)$$

mais par hypothèse sur φ_n nous trouvons

$$\int_{x-1/n}^{x+1/n} \varphi'_n(t) dt = \varphi_n(x + \frac{1}{n}) - \varphi(x + \frac{1}{n}) = 1. \quad (23.19)$$

donc

$$u(x) - \epsilon \leq \int_{x-1/n}^{x+1/n} u(t) \varphi'_n(t) dt \leq u(x) + \epsilon. \quad (23.20)$$

Pour encadrer la seconde, il faut être plus prudent avec les signes parce que φ'_n y est négative. En posant $\psi_n = -\varphi_n$ nous avons

$$-B = \int_{y-1/n}^{y+1/n} u(t) \psi_n(t) dt, \quad (23.21)$$

et donc

$$u(y) - \epsilon \leq -B \leq u(y) + \epsilon \quad (23.22)$$

ou encore

$$-\epsilon - u(y) \leq B \leq \epsilon - u(y). \quad (23.23)$$

En additionnant avec (23.20) nous voyons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N(\epsilon)$ tel que nous ayons

$$u(x) - u(y) - 2\epsilon \leq \int_I u' \varphi_n \leq u(x) - u(y) + 2\epsilon \quad (23.24)$$

pour tout $n \geq N$. Nous voulons évidemment prendre la limite $\epsilon \rightarrow 0$, c'est à dire $n \rightarrow \infty$. Étant donné que $\varphi_n(t) < 1$ pour tout t et pour tout n , la fonction $t \mapsto u'(t) \varphi_n(t)$ est dominée par u' , qui est dans $L^1(I)$ par le lemme 18.22. Le théorème de la convergence dominée nous permet donc d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u' \varphi_n = \int_I u' \mathbb{1}_{[x,y]} = \int_x^y u', \quad (23.25)$$

et donc les inégalités (23.24) donnent le résultat, grâce au signe dans (23.16). $\square$

Corollaire 23.7.

Si $[u] \in H^1(I)$, le représentant continu $u \in C^0(I)$ peut être prolongé par continuité en $u \in C^0(\bar{I})$.

Démonstration. Soit (x_n) une suite strictement croissante dans $]a, b[$ convergeant vers b . Nous voulons montrer que la suite $(u(x_n))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, ce qui nous permettra de définir

$$u(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n). \quad (23.26)$$

qui sera évidemment continue. Cette construction ne dépendra pas du choix de la suite (x_n) parce que deux fonctions continues sur $\bar{I}$ et égales sur I sont égales sur $\bar{I}$.

En notant u' la dérivée de u dans H^1 , nous avons par construction du représentant continu : $u(x) = \int_{y_0}^x u'(t) dt$. Et donc

$$|u(x_n) - u(x_{n+p})| = \left| \int_{y_0}^{x_n} u' - \int_{y_0}^{x_{n+p}} u' \right| = \left| \int_{x_n}^{x_{n+p}} u' \right|. \quad (23.27)$$

Vu que la suite (x_n) est de Cauchy et que u' est intégrable (même sur $\bar{I}$), la limite $n \rightarrow \infty$ de cela est zéro, quelle que soit la valeur de p . Donc $(u(x_n))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et est donc convergente. $\square$

Proposition 23.8 ([1]).

Quelques propriétés de l'espace de Sobolev $H^1(I)$ où $I =]a, b[$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$.

- (1) $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.
- (2) $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$.
- (3) $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$.

Démonstration. Nous prouvons point par point.

- (1) Le seul critère à vérifier est la complétude. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy (u_n) dans $H^1(I)$. Si $\epsilon > 0$, alors il existe $N > 0$ tel que pour tout $p \geq 0$ nous ayons $\|u_{n+p} - u_n\|_{H^1}^2 \leq \epsilon$, c'est à dire

$$\|u_{n+p} - u_n\|_{L^2}^2 + \|u'_{n+p} - u'_n\|_{L^2}^2 + \quad (23.28)$$

En particulier les suites (u_n) et (u'_n) sont de Cauchy dans L^2 qui est complet par le théorème de Fischer-Riesz 18.27. Nous notons donc

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \quad (23.29a)$$

$$u'_n \xrightarrow{L^2} v. \quad (23.29b)$$

Nous allons démontrer les points suivants³

— $u \in H^1(I)$ avec $u' = v$.

— $u_n \xrightarrow{H^1} u$.

Pour cela nous introduisons la dérivée faible de u dans L^2 , c'est à dire la forme linéaire continue ∂u sur $C_c^\infty(I)$:

$$\begin{aligned} \partial u: C_c^\infty(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle \partial u, \varphi \rangle = - \int_I u \varphi'. \end{aligned} \quad (23.30)$$

Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$ nous avons

$$|\langle \partial u, \varphi \rangle - \langle u'_n, \varphi \rangle| = \left| - \int_I u \varphi' - \int_I u'_n \varphi' \right| \quad (23.31a)$$

$$= \left| - \int_I u \varphi' - \int_I u_n \varphi' \right| \quad (23.31b)$$

$$\leq \int_I |u - u_n| |\varphi'| \quad (23.31c)$$

$$\leq \|u - u_n\|_{L^2} \|\varphi'\|_{L^2} \text{ Cauchy-Schwartz dans } L^2 \quad (23.31d)$$

$$\rightarrow 0. \quad (23.31e)$$

À la première ligne, la première intégrale est la définition de l'action de la forme ∂u sur φ alors que la seconde est seulement un produit scalaire dans L^2 . Tout deux sont notés avec les crochets. En tant que limite dans $\mathbb{R}$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u'_n, \varphi \rangle = \langle \partial u, \varphi \rangle. \quad (23.32)$$

Dans le calcul suivant, les deux crochets sont des produits scalaires dans L^2 :

$$|\langle u'_n, \varphi \rangle - \langle v, \varphi \rangle| = \left| - \int_I u'_n \varphi - \int_I v \varphi \right| \quad (23.33a)$$

$$\leq \int_I |u'_n - v| |\varphi| \quad (23.33b)$$

$$\leq \|u'_n - v\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \quad (23.33c)$$

$$\rightarrow 0. \quad (23.33d)$$

Donc en tant que limite dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u'_n, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle. \quad (23.34)$$

3. C'est le moment de lire l'énoncé du problème 12 et de m'écrire si vous avez une réponse.

Par unicité de la limite nous en déduisons que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I)$,

$$\langle \partial u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle. \quad (23.35)$$

Encore une fois nous répétons qu'à gauche le crochet est l'application de la forme ∂u sur φ tandis qu'à droite c'est le produit scalaire dans L^2 .

Nous sommes maintenant à même de prouver que $u \in H^1(I)$ et que sa dérivée (au sens de H^1) est v . En effet

$$\int_I u \varphi' = -\langle \partial u, \varphi \rangle = -\langle v, \varphi \rangle = -\int_I v \varphi. \quad (23.36)$$

Par conséquent nous avons $u' = v$ dans H^1 et aussi $u' = v$ presque partout au sens des fonctions.

Nous pouvons alors prouver que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(I)$:

$$\|u_n - u\|_{H^1(I)}^2 = \|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|u'_n - u'\|_{L^2}^2. \quad (23.37)$$

Mais nous savons déjà que $u_n \rightarrow u$ dans L^2 (d'ailleurs c'est la définition de u) et que $u' = v$ alors que par définition de v , nous avons $u'_n \rightarrow v$ dans L^2 . Tout cela donne que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(I)$ et donc que $H^1(I)$ est un espace complet.

(2) L'application que nous allons prouver être compacte entre $H^1(I)$ et $C^0(\bar{I})$ est

$$\begin{aligned} \psi: H^1(I) &\rightarrow C^0(\bar{I}) \\ [u] &\mapsto \tilde{u} \end{aligned} \quad (23.38)$$

où $[u]$ désigne une classe de fonction dans $H^1(I)$ et $\tilde{u}$ est son représentant continu prolongé par continuité à $\bar{I}^4$, qui existe par le lemme 23.5 et le corollaire 23.7. Cette application est une injection par l'unicité du représentant continu. Nous allons prouver que c'est une application compacte en utilisant le critère (2) de la proposition 18.4. Pour cela nous allons commencer par utiliser le théorème d'Ascoli sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ des représentants continus des éléments de $\mathcal{B}$, prolongés par continuité sur $\bar{I}$; c'est à dire $\tilde{\mathcal{B}} \subset C^0(\bar{I})$.

Soit $u \in \tilde{\mathcal{B}}$; par la proposition 23.6, nous avons

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t) dt \right| \quad (23.39a)$$

$$= \left| \int_I \mathbb{1}_{[x,y]}(t) u'(t) dt \right| \quad (23.39b)$$

$$\leq \| \mathbb{1}_{[x,y]} \|_{L^2} \| u' \|_{L^2} \quad (23.39c)$$

$$\leq \sqrt{|x - y|} \| u' \|_{H^1} \quad (23.39d)$$

$$\leq \sqrt{|x - y|}. \quad (23.39e)$$

où nous insistons sur le fait que la continuité n'impliquant pas la dérivabilité, le u' ici est la dérivé au sens de H^1 , et non la dérivée usuelle. Quoi qu'il en soit, l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ est équicontinu⁵. Nous montrons à présent qu'il est également borné pour la norme uniforme. Soit $u \in \tilde{\mathcal{B}}$; vu la construction du représentant continu au lemme 23.5, nous avons

$$|u(x)| = \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dy \right| \quad (23.40a)$$

$$= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_y^x u'(t) dt - u(y) \right) dy \right| \quad (23.40b)$$

$$= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_y^x u'(t) dt dy - \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y) dy \right| \quad (23.40c)$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^b |u'(t)| dt dy + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(y)| dy. \quad (23.40d)$$

4. Encore que par soucis d'économie d'encre nous n'allons pas écrire toujours les tildes et noter u le représentant continu prolongé à $\bar{I}$ par le corollaire 23.7.

5. Définition 18.6

À ce niveau, il faut remarquer que dans la première intégrale, le passage de la valeur absolue à l'intérieur de l'intégrale en même temps que l'élargissement des bornes n'a rien d'innocent. Si $x < y$, les bornes ne sont pas «dans le bon ordre» et nous ne pouvons pas faire la majoration usuelle en entrant simplement la valeur absolue. Ici nous tenons compte de cela en élargissant les bornes, et en les mettant dans le bon ordre. Le passage exact est le suivant : si $x, y \in]a, b[$, nous avons

$$\left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_y^x |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)| dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt. \quad (23.41)$$

Notons en particulier que dans le cas du passage vers l'équation (23.40d), le nombre x est fixé alors que y est une variable d'intégration. Donc l'ordre des deux est certainement de temps en temps le «mauvais».

Quoi qu'il en soit, la première intégrale se réduit à une multiplication par $b - a$ et le calcul continue :

$$|u(x)| \leq \int_I |u'(t)| dt + \frac{1}{b-a} \int_I |u| \quad (23.42a)$$

$$\leq \sqrt{b-a} \|u'\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \|u\|_{L^2} \quad (23.42b)$$

$$\leq \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \right) (\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \quad (23.42c)$$

$$\leq \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \right) \|u\|_{H^1} \quad (23.42d)$$

$$= \sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}. \quad (23.42e)$$

Donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est borné pour la norme L^∞ . Et c'est même borné par un nombre facilement calculable connaissant I . En particulier l'ensemble

$$\{u(x) \text{ tel que } u \in H^1\} \quad (23.43)$$

est pour, tout x , contenu dans la boule de rayon $\sqrt{a-b} + \frac{1}{\sqrt{a-b}}$ et donc est relativement compact dans $\mathbb{R}$. Par conséquent le théorème d'Ascoli 18.7 nous dit que l'ensemble $\tilde{\mathcal{B}}$ est relativement compact dans $C^0(I)$.

Par conséquent nous avons montré que l'image par ψ de la boule unité fermée $\mathcal{B}$ de $H^1(I)$ est relativement compacte dans $C^0(\bar{I})$, ce qui signifie que ψ est une application compacte.

- (3) Les éléments de $H^1(I)$ sont des éléments de $L^2(I)$; donc l'identité est une injection. Nous devons seulement étudier la continuité. Si (u_n) est une suite dans H^1 convergeant dans H^1 vers u , alors

$$\|u_n - u\|_{L^2} \leq \|u_n - u\|_{L^2} + \|u'_n - u'\|_{L^2} = \|u_n - u\|_{H^1} \rightarrow 0. \quad (23.44)$$

Donc la suite des images (par l'identité) converge dans L^2 . L'identité est donc continue. □

Problèmes et choses à faire

Au point de la preuve auquel vous devriez être si vous lisez ceci, vous pourriez avoir envie de démontrer $u' = v$ de la façon suivante :

$$\int_I u \varphi' = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n \varphi' = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u'_n \varphi = - \int_I v \varphi. \quad (23.45)$$

J'avoue ne pas trouver d'exemples pour lesquels ça ne marche pas. Est-ce qu'on peut inverser la limite et l'intégrale dans L^2 ?

Ceci n'invalide pas la preuve donnée, mais ça suggère un sacré raccourci.

23.1.2 Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω , un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $v \in L^2(\Omega)$ (définition 18.28). Les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

23.1.2.1 Définition

Définition 23.9 (Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$).

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. L'espace de **Sobolev** $H^1(\Omega)$ est :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i = 1, \dots, n, \partial_i v \in L^2(\Omega)\}. \quad (23.46)$$

Nous munissons cet espace d'un produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2}, \quad (23.47)$$

où $\nabla u = \sum_i \partial_i u \in L^2$.

L'existence des intégrales dans le produit scalaire est assurée par le fait que u , v , ∇u et ∇v sont dans $L^2(\Omega)$. La définition du produit scalaire dans L^2 est la définition 18.101 (mais sans la conjugaison complexe).

Pour la même raison, $(u, u)_{H^1} = 0$ demande que chacun des deux termes est séparément nul, et nous avons $u = 0$ dans L^2 , et donc aussi dans H^1 .

Théorème 23.10 ([263]).

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert⁶.

Démonstration. Nous devons nous assurer que l'espace H^1 est complet. Pour cela nous considérons une suite de Cauchy (u_n) dans H^1 . Soit $\epsilon > 0$; il existe $N > 0$ tel que si $n, m > N$ alors $\|u_n - u_m\|_{H^1} < \epsilon$. Dans ce cas nous avons en particulier

$$\|u_m - u_n\|_{H^1}^2 = (u, u)_{H^1} = \langle u, u \rangle + \langle \nabla u, \nabla u \rangle = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2, \quad (23.48)$$

et en particulier les suites (u_n) et (∇u_n) sont de Cauchy dans L^2 . Vu que L^2 , lui, est complet (théorème 18.26), il existe $u \in L^2$ et $v_i \in L^2$ tels que

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \quad (23.49a)$$

$$\partial_i u_n \xrightarrow{L^2} v_i. \quad (23.49b)$$

Nous savons que l'injection $i: L^2 \rightarrow \mathcal{D}'$ est continue par la proposition 22.13. Nous avons donc aussi les limites

$$T_{u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_u \quad (23.50a)$$

$$T_{\partial_i u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_{v_i}. \quad (23.50b)$$

La dérivée étant une opération continue sur $\mathcal{D}'$ nous avons de plus

$$\partial_i(T_{u_n}) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial_i(T_u) \quad (23.51)$$

En utilisant le lemme 22.16 nous avons alors

$$T_{\partial_i u_n} = \partial_i(T_{u_n}) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial_i(T_u) = T_{\partial_i u}. \quad (23.52)$$

En comparant avec (23.50b) et par l'unicité de la limite, nous avons $T_{v_i} = T_{\partial_i u}$. Cela implique $v_i = \partial_i u$.

Vu que $v_i \in L^2$ nous avons aussi $\partial_i u \in L^2$. Par conséquent $u \in H^1(\Omega)$ parce que ses dérivées sont dans L^2 .

Nous devons maintenant prouver que $u_n \xrightarrow{H^1} u$. Nous avons

$$\|u_n - u\|_{H^1} = \|u_n - u\|_{L^2} + \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2} \quad (23.53)$$

Le premier terme tend vers zéro parce que $u_n \xrightarrow{L^2} u$ et le second parce que $\partial_i u_n \xrightarrow{L^2} \partial_i u$. $\square$

6. Définition 17.2.

23.1.3 Espace de Sobolev fractionnaire

Définition 23.11.

Pour $m \in \mathbb{N}$ et un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ nous définissons l'espace de Sobolev

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}. \quad (23.54)$$

Nous définissons également un produit scalaire sur H^m par

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2}. \quad (23.55)$$

Le lemme suivant montre que la proposition 21.11 fonctionne encore avec L^2 au lieu de $\mathcal{S}$.

Lemme 23.12 (Lemme de transfert[264], thème 52).

Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout multiindice α avec $|\alpha| \leq m$ nous avons

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = [\xi \mapsto i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)]. \quad (23.56)$$

Lemme 23.13.

Il existe des constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$c_1(1 + \|x\|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} (x^\alpha)^2 \leq c_2(1 + \|x\|^2)^m. \quad (23.57)$$

Lemme 23.14.

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous avons $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si l'application

$$\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{k/2} \hat{u} \quad (23.58)$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \leq m$. Ici $|\xi|$ est la norme euclidienne de ξ dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Vu le lemme 23.12, il suffit de montrer que

$$(1 + |\xi|^2)^{k/2} \hat{u} \quad (23.59)$$

est dans L^2 pour tout $k \leq m$ si et seulement si

$$\xi^\alpha \hat{u} \quad (23.60)$$

l'est pour tout α avec $|\alpha| \leq m$.

L'expression (23.59) est une somme d'expressions du type (23.60). Donc l'implication dans un sens est montrée. Pour l'autre sens, nous savons que

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad (23.61)$$

et donc

$$|\xi^\alpha| \leq |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_n|^{\alpha_n}. \quad (23.62)$$

Or $|\xi|^{|\alpha|} = |\xi|^{\sum_i \alpha_i} = |\xi|^{\alpha_1} \dots |\xi|^{\alpha_n}$ et $|\xi| \geq |\xi_i|$ pour tout i , donc

$$|\xi^\alpha| \leq |\xi|^{|\alpha|}. \quad (23.63)$$

D'autre part pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout k positif nous avons

$$(1 + x^2)^{k/2} \geq x^k \quad (23.64)$$

qui est facile à vérifier en prenant le carré des deux membres.

En remettant tout ensemble,

$$|\xi^\alpha \hat{u}| \leq |\xi^\alpha| |\hat{u}| \leq |\xi|^{|\alpha|} |\hat{u}| \leq (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|/2} |\hat{u}|. \quad (23.65)$$

Donc si le membre de droite est de carré intégrable, celui de gauche l'est également. $\square$

Définition 23.15 (Espace de Sobolev H^s [265]).

Pour $s > 0$ nous définissons l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ par

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}. \quad (23.66)$$

Nous y mettons le produit scalaire

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} (1 + \|\xi\|^2)^s d\xi. \quad (23.67)$$

23.16.

Vu que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (théorème 18.40), on pourrait croire à la densité a fortiori dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Mais attention : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^2 pour la norme L^2 . Nous n'avons encore rien dit pour la norme $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 23.17 ([266]).

La partie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Par définition l'application

$$\xi \mapsto (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \hat{u} \quad (23.68)$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Elle peut donc être approximée au sens L^2 par des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (théorème 18.40(5)), c'est à dire qu'il existe des fonctions $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\phi_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \hat{u}. \quad (23.69)$$

Nous posons

$$\psi_n = \frac{\phi_n}{(1 + \xi^2)^{s/2}} \quad (23.70)$$

Cela est encore une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, et donc de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Vu que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 21.12), nous pouvons considérer une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{\varphi}_n = \psi_n$, et nous allons montrer que $\varphi_n \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u$.

Nous avons :

$$\|\varphi_n - u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}_n - \hat{u}|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \quad (23.71a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\phi_n(\xi)}{(1 + \xi^2)^{s/2}} - \hat{u}(\xi) \right|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \quad (23.71b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\phi_n(\xi) - \hat{u}(\xi)(1 + \xi^2)^{s/2}|^2 d\xi \quad (23.71c)$$

$$= \|\phi_n - (1 + \xi^2)^{s/2} \hat{u}\|_{L^2}^2. \quad (23.71d)$$

Par définition de la suite ϕ_n nous avons donc bien

$$\|\varphi_n - u\|_{H^s}^2 = \|\phi_n - (1 + \xi^2)^{s/2} \hat{u}\|_{L^2}^2 \rightarrow 0. \quad (23.72)$$

Notons que même si ϕ_n est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, nous n'avons pas prouvé la convergence $\phi_n \xrightarrow{H^s} u$, mais bien $\varphi_n \xrightarrow{H^s} u$. Or les fonctions φ_n sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et rien n'assure qu'elles soient à support compact. Nous avons donc bien prouvé la densité de $\mathcal{S}$ et non celle de $\mathcal{D}$. $\square$

Remarque 23.18.

Pour qui a tout compris, cela peut sembler une évidence, mais nous précisons que nous parlons de densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, à aucun moment la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ n'entre en compte.

Un peu moins évident : ce que nous avons réellement montré est la densité de $\iota(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ où ι est l'application «prise de classe». Nous n'avons pas insisté là-dessus, mais il faut

dire que dans la preuve de la proposition 23.17, u est un représentant d'un élément choisit dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Nous avons ensuite prouvé la convergence $\|\varphi_n - u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ qui est une convergence d'une suite dans $\mathbb{R}$, et dans laquelle l'opération $\|\cdot\|_{H^s}$ est définie sur un espace de fonctions et n'est pas une norme (c'est pour que cela devienne une norme que l'on prend les classes).

Nous en avons déduit la convergence $\varphi_n \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u$ où maintenant φ_n et u sont des classes dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 23.19.

La partie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)})$.

Démonstration. Nous savons déjà que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ par la proposition 23.17. Nous devons seulement prouver que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^2(\mathbb{R}^d)})$. Pour cela nous utilisons la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la proposition 18.77. Soit donc $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et une suite f_k dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} f. \quad (23.73)$$

Vu que la transformée de Fourier est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 21.12) nous avons aussi

$$\hat{f}_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \hat{f}, \quad (23.74)$$

et en particulier pour tout polynôme P nous avons la convergence uniforme

$$Pf_k \xrightarrow{\text{unif}} P\hat{f}. \quad (23.75)$$

D'autre part la fonction $\xi \mapsto |\hat{f}_k(\xi) - \hat{f}(\xi)|^2(1 + \xi^2)^s$ est Schwartz et en tout point décroissante en k . Soit $\epsilon > 0$ et $r > 0$ choisit de telle sorte à avoir

$$\int_{\|\xi\| > r} |\hat{f}_k(\xi) - \hat{f}(\xi)|(1 + \xi^2)^s d\xi < \epsilon. \quad (23.76)$$

pour tout k . La convergence uniforme (23.75) permet de considérer k_0 tel que pour tout $k > k_0$,

$$|\hat{f}_k - \hat{f}|(1 + \xi^2)^s < \frac{\epsilon}{\text{Vol}(B(0, r))} \quad (23.77)$$

dans $B(0, r)$. Avec tout cela, dès que $k > k_0$ nous avons

$$\|f_k - f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_k - \hat{f}|(1 + \xi^2)^s d\xi = \int_{B(0, r)} \dots + \int_{\|\xi\| > r} \dots \leq 2\epsilon. \quad (23.78)$$

Donc nous avons bien $\|f_k - f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ et convergence de f_k vers f dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. $\square$

23.2 Trace

Définition 23.20 ([265]).

Nous définissons la **trace** d'une fonction par

$$\begin{aligned} \gamma_0: \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1}) \\ (\gamma_0 v)(x_1, \dots, x_{d-1}) &= v(x_1, \dots, x_{d-1}, 0). \end{aligned} \quad (23.79)$$

Théorème 23.21 ([265, 267]).

Si $s > \frac{1}{2}$, alors γ_0 accepte une unique extension en opérateur linéaire borné

$$\gamma_0: H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}). \quad (23.80)$$

Démonstration. Nous subdivisons la preuve en plusieurs pas.

Une inégalité pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ Nous commençons par considérer $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (fonction C^∞ à support compact). Nous allons alors prouver que

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq K \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \quad (23.81)$$

pour une certaine constante K (qui ne dépend en particulier pas de φ).

Nous avons

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 = (\gamma_0 \varphi, \gamma_0 \varphi)_{H^{s-\frac{1}{2}}} \quad (23.82a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{\gamma_0 \varphi}(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi \quad (23.82b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (\gamma_0 \varphi)(x) e^{-i\xi x} dx \right|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi \quad (23.82c)$$

$$(23.82d)$$

Nous appliquons la trace. en appliquant la formule du corollaire 21.21,

$$(\gamma_0 \varphi)(x) = \varphi(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} \varphi(x, y) dy dk \quad (23.83)$$

En remplaçant dans (23.82c) nous avons

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} e^{-i\xi x} \varphi(x, y) dy dk dx \right|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (23.84)$$

Nous voudrions permuter les intégrales en k et en x . Pour cela nous étudions la fonction $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$u(k, x) = e^{-ikx} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x, y) dy \quad (23.85)$$

Effectuer l'intégrale par rapport à y revient à calculer la transformée de Fourier partielle dont nous parlons dans la proposition 21.13⁷. Elle est donc une fonction Schwartz de k et de x (conjointement et non seulement séparément) et est donc dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$. Les intégrales sur k et sur x peuvent donc être réunies et permutes par le théorème de Fubini 13.78 (n'oubliez tout de même pas de vous convaincre que la condition (2) est remplie).

Nous avons donc

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-iky} e^{-i\xi x} \varphi(x, y) dy dx dk \right|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (23.86)$$

Étant donné que φ est à support compact, les intégrales sur x et sur y peuvent se réunir en utilisant encore le théorème de Fubini; ces intégrales donnent :

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} e^{-iky} e^{-i\xi x} \varphi(x, y) dx \otimes dy = \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} e^{-i(\xi, k) \cdot (x, y)} \varphi(x, y) dx \otimes dy = \hat{\varphi}(\xi, k). \quad (23.87)$$

Nous restons avec

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\hat{\varphi}(\xi, k)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (23.88)$$

Nous allons maintenant traiter la partie du milieu :

$$\clubsuit = \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, k) dk \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, k) (1 + \xi^2 + k^2)^{s/2} \frac{1}{(1 + \xi^2 + k^2)^{s/2}} dk \right| = |\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \quad (23.89)$$

7. Dont une relecture de la preuve ne serait vraiment pas de trop, ainsi que la preuve de 18.72.

Ici ξ est vu comme une constante et les fonctions f_1 et f_2 sont

$$f_1: k \rightarrow \hat{\varphi}(\xi, k)(1 + \xi^2 + k^2)^{s/2} \quad (23.90a)$$

$$f_2: k \rightarrow \frac{1}{(1 + \xi^2 + k^2)^{s/2}} \quad (23.90b)$$

Nous pouvons utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz 6.66 :

$$\clubsuit \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi, k)|^2 (1 + \xi^2 + k^2)^s dk \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + \xi^2 + k^2)^s} dk \right)^{1/2} \quad (23.91)$$

Nous notons $g(\xi)$ ce qui se trouve dans la seconde parenthèse (après intégration sur k). Avec cela nous continuons :

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |g(\xi)| |\hat{\varphi}(\xi, k)|^2 (1 + \xi^2 + k^2)^s (1 + \|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} dk d\xi. \quad (23.92)$$

Vu que $\hat{\varphi}$ est Schwartz, la fonction qui est à l'intérieur des deux intégrales est dans $L^1(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R})$ et nous pouvons réunir les deux intégrales :

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}} |g(\xi)| |\hat{\varphi}(\xi, k)|^2 (1 + \xi^2 + k^2)^s (1 + \|\xi\|^2)^{s-\frac{1}{2}} dk \otimes d\xi. \quad (23.93)$$

À ce point nous démontrons qu'en réalité la combinaison $g(\xi)(1 + \xi^2)^{s-\frac{1}{2}}$ ne dépend pas de ξ . En effet

$$g(\xi)(1 + \xi^2)^{s-\frac{1}{2}} = (1 + \xi^2)^{s-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + \xi^2 + k^2)^s} dk \quad (23.94a)$$

$$= \frac{1}{(1 + \xi^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1 + \xi^2}{1 + \xi^2 + k^2} \right)^s dk \quad (23.94b)$$

$$= \frac{1}{(1 + \xi^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 + \frac{k^2}{1 + \xi^2}} \right)^s dk. \quad (23.94c)$$

Nous effectuons le changement de variables $t = \frac{k}{\sqrt{1 + \xi^2}}$, $dk = (1 + \xi^2)^{1/2} dt$, et le tout vaut

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 + t^2} \right)^s dt, \quad (23.95)$$

qui est effectivement indépendant de ξ . Nous nommons cela K (auquel nous ajoutons le $\frac{1}{2\pi}$) :

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 \leq K \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}} |\hat{\varphi}(\xi, k)|^2 (1 + \xi^2 + k^2)^s dk \otimes d\xi = K \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (23.96)$$

Nous avons donc prouvé pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (avec redéfinition du K) :

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq K \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.97)$$

À propos de classes Il serait tentant de conclure en disant que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Hélas, techniquement, l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ n'est même pas un sous-ensemble de $H^s(\mathbb{R}^d)$ parce que ce dernier est un ensemble de *classes* de fonctions. Ce petit détail a ici son importance parce que γ_0 n'est pas une application qui descend aux classes. En effet, $\mathbb{R}^{d-1}$ étant de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$, deux fonctions de la même classe peuvent différer en *tous* les points de $\mathbb{R}^{d-1}$ en même temps.

Si nous notons ι l'application qui consiste à prendre la classe ce qui est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, c'est $\iota(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))$. Or chaque classe contient au maximum une seule fonction continue (qui sera même de classe C^∞ à support compact pour les éléments de $\iota(\mathcal{D})$).

L'application γ_0 considérée est l'application composée entre le γ_0 classique et le choix du représentant continu dans la classe. La formule (23.97) que nous venons de prouver est valide pour l'application γ_0 vue comme

$$\gamma_0: \iota(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1}). \quad (23.98)$$

Densité et conclusion Ce que la majoration (23.97) prouve est la continuité de l'application

$$\gamma_0: (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}) \rightarrow (H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), \|\cdot\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}). \quad (23.99)$$

Mais la proposition 23.19 nous donne la densité de la partie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. La proposition 16.166 nous donne alors une extension

$$\gamma_0: (H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}) \rightarrow (H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), \|\cdot\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}). \quad (23.100)$$

□

Remarque 23.22.

L'extension n'est pas évidente parce que les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont en général des classes de fonctions dont les valeurs sur le bord ne sont pas du tout fixées du fait que le bord soit de mesure nulle.

23.3 Théorème de plongement

L'objet des théorèmes de plongement de Sobolev est de montrer que si $s > \frac{d}{2} + k$ alors les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ possèdent des représentants de classe C^k . Avant de démontrer le théorème, pour alléger, nous allons donner deux lemmes.

Lemme 23.23.

Soit (u_j) une suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u \quad (23.101)$$

avec $s > 0$. Alors nous avons aussi la convergence

$$u_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} u. \quad (23.102)$$

Démonstration. Vu que $s > 0$ nous avons $(1 + k^2)^s > 1$ (ici nous écrivons k^2 pour $\|k\|^2$). Par conséquent

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} \bar{\hat{v}} (1 + k^2)^s dk \geq \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} \bar{\hat{v}} dk = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.103)$$

Nous avons alors

$$\|u_j - u\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{u}_j - \hat{u}\|_{L^2} \quad (23.104a)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_j - \hat{u}|^2 \quad (23.104b)$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_j - \hat{u}|^2 (1 + k^2)^s dk \quad (23.104c)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \|u_j - u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.104d)$$

□

Lemme 23.24.

Soient des fonctions $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$u_j \xrightarrow{(C_0^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)} v. \quad (23.105)$$

Alors nous avons la convergence

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_j \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} v \varphi \quad (23.106)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. La suite (u_j) est équibornée. En effet il existe une queue de suite pour laquelle $\|u_j - v\|_\infty < \epsilon$; cette queue de suite est alors équibornée par $\|v\|_\infty + \epsilon$. Le début de la suite est un nombre fini de fonctions, toutes bornées. Le maximum des bornes donne alors une borne.

Soit donc $M > 0$ tel que $|u_j(x)| < M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$. Nous avons alors $|u_j \varphi| < M|\varphi|$ pour tout j et les fonctions $|u_j \varphi|$ sont majorées par la fonction $M|\varphi|$ qui est intégrable. Nous pouvons donc utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 7.134 nous donne

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_j \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} v \varphi. \quad (23.107)$$

□

Nous pouvons écrire la conclusion du lemme 23.24 sous la forme

$$\langle u_j, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \langle v, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (23.108)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^r)$ (et non pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$).

Théorème 23.25 (Théorème de Sobolev avec $k = 0$ [268]).

Soit $s > \frac{d}{2}$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors u possède un représentant dans $C_0^0(\mathbb{R}^d)$ (les fonctions continues et qui s'annulent à l'infini). Nous écrivons cela $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^0(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et dans ce cas nous notons u le représentant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous allons prouver l'inégalité

$$\|u\|_\infty \leq c \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.109)$$

La formule d'inversion de Fourier 21.20 appliquée à u_j donne

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \hat{u}(k) dk, \quad (23.110)$$

nous avons alors

$$(2\pi)^d |u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(k)| dk \quad (23.111a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (1+k)^{s/2} |\hat{u}(k)| (1+k^2)^{-s+2} dk \quad (23.111b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(|\hat{u}(k)|^2 (1+k^2)^s)}_f \underbrace{\left((1+k^2)^{-s}\right)^{1/2}}_g dk \quad (23.111c)$$

$$= \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.111d)$$

Ici il convient nous arrêter un instant pour nous convaincre que f et g sont réellement des éléments de L^2 . En ce qui concerne f , c'est facile : $\hat{u}$ est une fonction Schwartz. En ce qui concerne g il faut l'intégrabilité de $|g|^2$, c'est à dire de $k \mapsto (1+k^2)^{-s}$. Cela a lieu si et seulement si $2s > n$

et donc a lieu dans les hypothèses du théorème. Nous utilisons le théorème de Cauchy-Schwarz⁸ pour continuer :

$$(2\pi)^d |u(x)| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \quad (23.112a)$$

$$= c \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(k)|^2 (1 + k^2)^s dk \right)^{1/2} \quad (23.112b)$$

$$= c \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.112c)$$

Donc en introduisant le facteur $(2\pi)^d$ dans la constante c nous avons

$$\|u\|_\infty \leq c \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.113)$$

Cela est tout ce que nous voulions faire avec $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nous considérons maintenant $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Vu que la densité des fonctions Schwartz dans H^s (proposition 23.17) nous considérons une suite (u_j) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u \quad (23.114)$$

Ici u est une classe, mais nous identifions u_j avec sa classe (parce qu'il ne faut pas exagérer non plus). La suite (u_j) est de Cauchy dans H^s , donc si $\epsilon > 0$ est donné, il existe N tel que si $n, m > N$, $\|u_m - u_n\| \leq \epsilon$. Nous avons alors aussi

$$\|u_m - u_n\|_\infty \leq c\epsilon, \quad (23.115)$$

ce qui signifie que (u_j) est également une suite de Cauchy dans $(C^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ qui est un espace complet par la proposition 16.103.

Il existe donc une fonction $v \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{(C_0^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)} v. \quad (23.116)$$

La question est de savoir si nous pouvons déduire que v est un représentant de u .

Par le lemme 23.23 nous avons également la convergence

$$u_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} u. \quad (23.117)$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons alors

$$\langle u_j, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow \langle u, \varphi \rangle_{L^2}. \quad (23.118)$$

Mais en même temps, la convergence (23.116) couplée au lemme 23.24 donne également

$$\langle u_j, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow \langle v, \varphi \rangle_{L^2}. \quad (23.119)$$

Par unicité de la limite (dans $\mathbb{R}$) nous avons

$$\langle v, \varphi \rangle_{L^2} = \langle u, \varphi \rangle_{L^2} \quad (23.120)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La proposition 18.1 appliquée à $u - v$ montre alors que $u - v = 0$ presque partout, c'est à dire que v est bien un représentant de u .

Le représentant v de u est non seulement continu (comme limite uniforme de fonction continues), mais également bornée, comme limite uniforme de fonctions Schwartz. $\square$

Proposition 23.26 ([268]).

Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ ($s \in \mathbb{R}$) alors

8. Formule 6.203.

(1) $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$,

(2) l'application

$$\partial^\alpha : H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d) \quad (23.121)$$

est continue.

Note : ici ∂ est l'opération de dérivée faible.

Démonstration. Nous allons seulement prouver que $\partial_j : H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ est bien définie⁹ et continue. Par composition, la thèse suivra.

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ par le lemme 23.12 nous avons

$$\widehat{\partial_j u} = i\xi_j \hat{u}. \quad (23.122)$$

D'autre part, la fonction

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (23.123)$$

$$x \mapsto \frac{x_i}{1 + \|x\|^2}$$

est bornée (et même indépendamment de i) par une constante K . Donc nous avons pour tout¹⁰ s :

$$k_i(1 + \|k\|^2)^{-s} < K(1 + \|k\|^2)^{-s+1}. \quad (23.124)$$

Avec cela nous pouvons calculer un peu : si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, nous avons

$$\|\partial_j u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\partial_j u}| (1 + k^2)^{s-1} dk \quad (23.125a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} k_j |\hat{u}| (1 + k^2)^{s-1} dk \quad (23.125b)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} K |\hat{u}| (1 + k^2)^s dk \quad (23.125c)$$

$$= K \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (23.125d)$$

Nous avons donc que $\|\partial_j u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)}$ est fini lorsque $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

La majoration $\|\partial_j u\| \leq K \|u\|$ donne la majoration suivante pour la norme de l'opérateur ∂_j :

$$\|\partial_j\| = \sup_{\|u\|_{H^s}=1} \|\partial_j u\|_{H^{s-1}} \leq K. \quad (23.126)$$

Le fait d'être borné implique d'être continu par la proposition 6.217. □

Théorème 23.27 (Théorème de plongement de Sobolev [268]).

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $m > \frac{d}{2} + k$. Alors

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^k(\mathbb{R}^d). \quad (23.127)$$

Remarques :

— L'espace $C_0^k(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^k qui s'annulent à l'infini.

— L'inclusion (23.127) signifie que tout élément dans H^s possède un représentant dans $C_0^k(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Pour $k = 0$, c'est le théorème 23.25. Si $|\alpha| < k$ nous savons que $\partial^\alpha u \in H^{s-k} \subset C_0^0(\mathbb{R}^d)$. Cela signifie que les dérivées faibles sont continues, mais pas qu'il existe un représentant qui est réellement k fois continument dérivable.

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et une suite (u_j) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$u_j \xrightarrow{H^s(\mathbb{R}^d)} u. \quad (23.128)$$

9. Au sens où l'espace d'arrivée est bien celui-là.

10. Question : dans [268], il faut dépendre cette constante de s . Je ne comprends pas pourquoi.

Vu que l'espace topologique $(C_0^k(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ est complet il existe $v \in C_0^k$ tel que

$$u_j \xrightarrow{C_0^k} v. \quad (23.129)$$

Il reste à montrer que v est un représentant de u . Cela se fait comme plus haut en montrant que $u_j \xrightarrow{L^2} u$. □

Chapitre 24

Équations différentielles

Une équation différentielle ordinaire est la recherche de toutes les fonctions définie sur une partie de $\mathbb{R}$ satisfaisant à une certaine égalité, faisant intervenir les dérivées de la fonction recherchée.

Dans la suite, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction sera **dérivable sur** I si elle est dérivable au sens usuel sur l'intérieur de I , et si elle est dérivable à droite (resp. à gauche) sur l'éventuel bord gauche (resp. droit) de I .

Définition 24.1.

Une **équation différentielle ordinaire d'ordre n sur** I est la recherche d'une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois, satisfaisant à une équation du type

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I \quad (24.1)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : (I \times D) \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Remarque 24.2.

L'équation différentielle (24.1) sera raccourcie sous la forme

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (24.2)$$

où la dépendance en t est sous-entendue.

Exemple 24.3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue fixée. L'équation différentielle

$$y' = f(t) \quad (24.3)$$

se ramène à la recherche des primitives de f sur l'intervalle I . $\triangle$

Le lemme suivant sert de temps en temps.

Lemme 24.4 (Lemme de Grönwall).

Soient ϕ et ψ deux fonctions telles que pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $\phi(t) \geq 0$, $\psi(t) \geq 0$ et

$$\phi(t) \leq +L \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds \quad (24.4)$$

où K et L sont des constantes positives. Alors

$$\phi(t) \leq K \exp \left(L \int_{t_0}^t \psi \right). \quad (24.5)$$

24.1 Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$?

Dans de nombreux exercices d'équations différentielles, nous tombons sur $u' = f(t)$, et nous faisons formellement

$$\frac{du}{dt} = f(t) \Rightarrow du = f(t)dt, \quad (24.6)$$

et ensuite, il y a la formule un peu magique

$$u - u_0 = \int_{t_0}^t f(t)dt. \quad (24.7)$$

Voyons ce qu'il en est. Tout d'abord, il faut comprendre ce que signifie la formule

$$f(z)dz = g(t)dt. \quad (24.8)$$

Il s'agit d'une égalité entre deux formes différentielles sur $\mathbb{R}$ où z est une fonction de t . Étant donné que z est une fonction de t , il faut voir dz comme la différentielle de cette fonction. La différentielle d'une fonction à une variable est donné par la dérivée :

$$dz_t = z'(t)dt \quad (24.9)$$

Écrire l'équation (24.8) pour chaque t revient donc à écrire

$$f(z(t))z'(t)dt = g(t)dt \quad (24.10)$$

Cela est une égalité entre deux formes différentielles. Nous avons donc égalité entre les intégrales des formes sur un chemin. Prenons un chemin tout simple de t_0 vers t :

$$\int_{t_0}^t f(z(t))z'(t)dt = \int_{t_0}^t g(t)dt. \quad (24.11)$$

Dans le premier membre, nous faisons un changement de variable $\xi = z(t)$, $d\xi = z'(t)dt$, et nous obtenons

$$\int_{z_0}^{z(t)} f(\xi)d\xi = \int_{t_0}^t g(t)dt. \quad (24.12)$$

où nous avons remplacé la constante $z(t_0)$ par z_0 dans la borne d'intégration. Si F est une primitive de f et G une primitive de g , nous avons

$$F(z) - F(z_0) = G(t) - G(t_0). \quad (24.13)$$

Si aucun problème de Cauchy n'est donné, les constantes $F(z_0)$ et $G(t_0)$ sont mises en une seule et nous écrivons la solution

$$F(z(t)) = G(t) + C, \quad (24.14)$$

qui est une équation implicite pour $z(t)$.

Nous trouvons assez souvent le cas simple

$$f(z)dz = dt. \quad (24.15)$$

En remplaçant $g(t) = 1$ dans (24.12), nous trouvons la fameuse

$$t - t_0 = \int_{z_0}^z f(z)dz, \quad (24.16)$$

dans laquelle il y a un abus de notation terrible entre le z de la borne (que les étudiants oublient souvent) et la variable d'intégration z !!

Le passage de (24.15) à (24.16) sera très souvent utilisé dans le cours de mécanique par exemple.

24.2 Équations linéaires du premier ordre

Une **équation différentielle linéaire** est une équation de la forme

$$y' + u(t)y = v(t). \quad (24.17)$$

Exemple 24.5

Tant qu'il n'y a pas de second membre, c'est facile. Prenons l'exemple suivant :

$$y' + 2ty = 0. \quad (24.18)$$

Nous mettons tous les t d'un côté et tous les y et y' de l'autre :

$$\frac{y'}{y} = -2t, \quad (24.19)$$

et puis on intègre sans oublier la constante d'intégration :

$$\ln(y) = -t^2 + C, \quad (24.20)$$

et donc $y(t) = Ke^{-t^2}$. $\triangle$

Lorsqu'il y a un second membre, il y a une astuce. Prenons par exemple

$$y' + 2ty = 4t. \quad (24.21)$$

L'astuce est de commencer par résoudre l'équation sans le second membre (l'équation homogène associée). Nous notons y_H la solution. Ici, la réponse est

$$y_H(t) = Ke^{-t^2}. \quad (24.22)$$

Ensuite le truc est d'essayer de trouver la solution de l'équation (24.21) sous la forme

$$y(t) = K(t)e^{t^2}. \quad (24.23)$$

L'idée est de prendre la même que la solution de l'équation homogène (sans second membre), mais en disant que K est une fonction. Afin de trouver la fonction K qui donne la solution, il suffit de remettre l'essai (24.23) dans l'équation (24.21) :

$$\underbrace{K'e^{-t^2} - 2tKe^{-t^2}}_{y'(t)} + \underbrace{2tKe^{-t^2}}_{2ty(t)} = 4t \quad (24.24)$$

Les deux termes avec K se simplifient et il reste

$$K'(t) = 4te^{t^2}, \quad (24.25)$$

ce qui signifie $K(t) = 2e^{t^2+C}$. Nous avons donc déterminé la fonction qui fait fonctionner l'essai, et la solution à l'équation est

$$y(t) = (2e^{t^2} + C)e^{-t^2} = 2 + Ce^{-t^2}. \quad (24.26)$$

La technique pour résoudre cette équation est de commencer par résoudre l'équation homogène associée. Si $U(t)$ est une primitive de $u(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} y'_H(t) + u(t)y_H(t) &= 0 \\ \frac{y'_H}{y_H} &= -u(t) \\ \ln(y_H) &= -U(t) + C \\ y_H(t) &= e^{-U(t)+C} = Ke^{-U(t)} \end{aligned} \quad (24.27)$$

où $K = e^C$.

Cela fournit la solution générale de l'équation homogène. Il existe un truc génial qui permet d'en tirer la solution générale du système non homogène. Lorsque nous avons trouvé $y_H(t) = Ke^{-U(t)}$, le symbole K désigne une constante. La méthode de **variation des constantes** consiste à essayer la solution

$$y(t) = K(t)e^{-U(t)}, \quad (24.28)$$

c'est à dire à dire que la constante est en réalité une fonction. Afin de trouver quelle fonction $K(t)$ fait en sorte que l'essai (24.28) soit une solution, nous la remplaçons dans l'équation de départ $y' + uy = v$. Maintenant,

$$y'(t) = K'(t)e^{-U(t)} - K(t)u(t)e^{-U(t)}. \quad (24.29)$$

En remettant dans l'équation,

$$y' + uy = K'e^{-U} - Kue^{-U} + uKe^{-U} = K'e^{-U} = v. \quad (24.30)$$

Notez que les termes en K se sont miraculeusement simplifiés. Cela est directement dû au fait que e^{-U} est solution de l'équation homogène. Nous restons avec l'équation

$$K' = \frac{v}{e^{-U}} \quad (24.31)$$

pour $K(t)$. La solution générale du problème non homogène est donc finalement donnée par

$$y(t) = (W(t) + C)e^{-U(t)} \quad (24.32)$$

si $W(t)$ est une primitive de $v(t)e^{U(t)}$.

Tout ceci est un peu heuristique. La proposition suivante dit dans quels cas ça fonctionne.

Proposition 24.6.

Soient u et v continues sur I et U , une primitive de u sur I et W une primitive de ve^{-U} sur I . Une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de $y' + u(t)y = v(t)$ si et seulement si il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(t) = (W(t) + C)e^{U(t)} \quad (24.33)$$

pour tout $t \in I$.

24.2.1 Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ?

Prenons une équation non homogène

$$z'(t) = f(t)z(t) + g(t), \quad (24.34)$$

et supposons avoir une solution de l'homogène associée sous la forme $z_H(t) = Ch(t)$. Le coup de la variation des constantes consiste à essayer une solution pour l'équation non homogène sous la forme¹

$$z(t) = K(t)h(t). \quad (24.35)$$

Nous injectons cette solution dans l'équation de départ en utilisant le fait que $z'(t) = K'(t)h(t) + K(t)h'(t)$:

$$K'(t)h(t) + K(t)h'(t) = f(t)K(t)h(t) + g(t). \quad (24.36)$$

Le terme $K(t)h'(t)$ se réécrit en utilisant la propriété de définition de h , c'est à dire que $h'(t) = f(t)h(t)$. Nous voyons que les termes ne contenant pas de K' se simplifient ; il reste

$$K'h = g. \quad (24.37)$$

1. Je ne sais plus qui a eu l'idée de changer le nom de la constante de C vers K au moment de la transformer en fonction, mais c'est une bonne idée.

Cette équation a comme solution

$$K = \int \frac{f}{h} + C. \quad (24.38)$$

J'insiste sur la constante d'intégration ! En réalité, celles et ceux qui auront compris l'équation (24.16) sauront que K est donné par

$$K(t) = \int_{\xi_0}^t \frac{f(\xi)}{g(\xi)} d\xi \quad (24.39)$$

où ξ_0 joue le rôle de la constante d'intégration.

Quoi qu'il en soit, la solution générale de l'équation non homogène est

$$z(t) = K(t)h(t) = \left(\int \frac{g}{h} + C \right) h. \quad (24.40)$$

Cette solution comprend deux termes : Ch qui est solution de l'homogène, et $\left(\int \frac{g}{h} \right) h$ qui est une particulière de l'équation non homogène.

Quelques conclusions :

- (1) Si vous avez encore du K (et pas que du K') dans votre équation qui donne K , c'est que vous n'êtes pas dans le cadre d'une équation de type (24.34). Le plus souvent, c'est que vous avez fait une faute de calcul quelque part.
- (2) La méthode des variations des constantes n'est pas en contradiction avec le principe de « SGEH+SPENH ». En effet, la SGEH et la SPENH sont toutes deux dans la solution (24.40).
- (3) La variation des constantes peut être vue comme une façon cool de trouver une solution particulière de l'équation non homogène.
- (4) La simplification ne se fait que après avoir remplacé Kh' par Kfh , c'est à dire après avoir utilisé le fait que z_H est solution de l'homogène. Sinon, la simplification n'est pas du tout évidente a priori. Il se peut même que, visuellement, les termes Kh' et Kfh ne se ressemblent pas du tout. Un exemple de cela arrivera par exemple dans l'exemple 24.9, pour arriver à l'équation (24.56).

24.3 Équations à variables séparées

Une **équation à variables séparées** est une équation de la forme

$$y' = u(t)f(y) \quad (24.41)$$

où $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues données. Les propositions 24.7 et 24.8 résolvent ce cas, mais avant de voir cela, nous allons donner quelque indication « pratiques ».

24.3.1 La méthode rapide

On peut évidemment mettre tous les y et y' d'un côté :

$$\frac{y'}{f(y)} = u(x). \quad (24.42)$$

Une fois que cela est fait, on écrit $y' = \frac{dy}{dx}$, et on envoie le dx du côté des x :

$$\frac{dy}{f(y)} = u(x)dx. \quad (24.43)$$

Maintenant il suffit de prendre l'intégrale des deux côtés : comme la position des dx et dy l'indiquent, il faut intégrer par rapport à y d'un côté et par rapport à dx de l'autre côté.

L'intégrale à gauche est facile : c'est $\ln(y)$. À droite, par contre, ça dépend tout à fait de u .

24.3.2 La méthode plus propre

$$y'(t) = u(t)f(y(t)). \quad (24.44)$$

Nous considérons U , une primitive de u sur I et G , une primitive de $1/f$ sur J . Si $I' \subseteq I$ et $y: I' \rightarrow J$, alors y est solution de (24.41) si et seulement si il existe une constante C telle que

$$G(y(t)) = U(t) + C. \quad (24.45)$$

La recherche des solutions de l'équation différentielle se ramène donc à la recherche de primitives et de solutions d'une équation algébrique (il faut isoler $y(t)$ dans (24.45)). Réciproquement toute solution régulière de cette dernière relation est solution de l'équation différentielle.

Remarque : lorsque nous cherchons U et G , nous ne cherchons que *une* primitive. Il ne faut pas considérer des constantes d'intégration à ce niveau.

24.3.3 Les théorèmes

Proposition 24.7.

Nous considérons l'équation (24.41) avec $u(t)$ continue sur I et f continue sur J avec $f(\eta) \neq 0$ pour tout $\eta \in J$. Soit U , une primitive de u sur I , et G , une primitive de $1/f$ sur J .

Si $y: I' \rightarrow J$ est une fonction sur un intervalle $I' \subset I$, alors y est solution de l'équation (24.41) si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$G(y(t)) = U(t) + C. \quad (24.46)$$

Cette proposition dit que toutes les solutions qui ne s'annulent jamais sur un intervalle ont la forme $G(y(t)) = U(t) + C$ et peuvent donc être trouvées en calculant des primitives.

La formule (24.46) peut être obtenue de la façon heuristique suivante, en écrivant $y' = dy/dt$, et en passant le dt à droite. Nous trouvons successivement

$$\begin{aligned} y' &= u(t)f(y) \\ dy &= u(t)f(y)dt \\ \frac{dy}{f(y)} &= u(t)dt \\ \int \frac{dy}{f(y)} &= \int u(t)dt \\ G(y) &= U(t) + C. \end{aligned} \quad (24.47)$$

Proposition 24.8.

Soient u continue sur I et f continue sur J , et $f(\eta) \neq 0$ sur J . Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Alors il existe $I' \subset I$ avec $t_0 \in I'$ et $f \in C^1(I' \rightarrow J)$ tels que

- (1) y est solution de (24.41) sur I' et vérifie $y(t_0) = y_0$,
- (2) si z est une solution de (24.41) sur $I'' \subset I'$ avec $t_0 \in I''$ et $z(t_0) = y_0$, alors $I'' \subset I'$ et $z(t) = y(t)$ pour tout $t \in I''$.

Exemple 24.9

Résoudre l'équation différentielle

$$y - \cos(t)y' = \cos(t)(1 - \sin(t))y^2. \quad (24.48)$$

La fonction $y = 0$ est solution. En posant $z = 1/y$, nous trouvons l'équation

$$z + \cos(t)z' = \cos(t)(1 - \sin(t)) \quad (24.49)$$

à laquelle z doit satisfaire. L'équation homogène est

$$z'_H = -\frac{z_H}{\cos(t)}. \quad (24.50)$$

Ceci est une équation à variables séparées que nous résolvons en suivant les méthodes données plus haut : nous posons

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\cos(t)}, \\ f(z) &= -z, \\ U(t) &= \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right] \quad (\text{voir formulaire}), \\ G(z) &= \ln \left(\frac{1}{z} \right). \end{aligned} \quad (24.51)$$

La solution z_H est donnée par l'équation

$$\ln \left(\frac{1}{z} \right) = \ln \left[K \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right], \quad (24.52)$$

c'est à dire

$$z_H(t) = \frac{K}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)}. \quad (24.53)$$

Nous appliquons maintenant la méthode de variation des constantes sur cette solution afin de trouver la solution générale de l'équation (24.49). En utilisant la règle de Leibnitz, $z' = K'z_H + Kz'_H$, nous trouvons

$$\frac{K}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)} + \cos(t) \left(\frac{K'}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)} - \frac{K}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)} \right) = \cos(t)(1 - \sin(t)). \quad (24.54)$$

Malgré leurs apparences, les deux termes en K se simplifient. En effet, en vertu de l'équation $z'_H = \frac{-z_H}{\cos(t)}$, nous avons

$$\frac{-K}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)} = \frac{-K}{\cos(t) \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)}. \quad (24.55)$$

Le travail de voir quel est le lien entre $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)$, $\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)$ et $\cos(t)$ est en réalité fait dans votre formulaire au moment où vous l'avez utilisé pour intégrer u pour obtenir le $U(t)$ de (24.51).

Après cette simplification durement méritée, nous trouvons l'équation suivante pour $K(t)$:

$$\frac{K'}{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)} = 1 - \sin(t). \quad (24.56)$$

Résoudre cela revient à trouver la primitive de

$$(1 - \sin(t)) \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right), \quad (24.57)$$

ce qui est relativement compliqué. La réponse est

$$\begin{aligned} K(t) &= \ln \left(\sin \left(\frac{2x + \pi}{4} \right) + 1 \right) + \ln \left(\sin \left(\frac{2x + \pi}{4} \right) - 1 \right) \\ &\quad + 2 \ln \sec \left(\frac{2x + \pi}{4} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{2x + \pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (24.58)$$

Nous pouvons un peu simplifier en utilisant le fait que $\ln(a+b) + \ln(a-b) = \ln(a^2 - b^2)$:

$$K(t) = \ln \left(-\cos^2 \left(\frac{2x + \pi}{4} \right) \right) + 2 \ln \sec \left(\frac{2x + \pi}{4} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{2x + \pi}{4} \right). \quad (24.59)$$

Il me semble toutefois qu'il faudrait prendre des valeurs absolues pour les logarithmes.

△

24.4 Équations linéaires d'ordre supérieur

24.4.1 Équations et systèmes linéaire à coefficients constants

Nous regardons l'équation

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = v(t) \quad (24.60)$$

où les coefficients a_k sont maintenant des constantes. Il faut commencer par résoudre le polynôme caractéristique

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (24.61)$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les solutions avec multiplicité $\mu_1, \dots, \mu_k$, alors le **système fondamental** de solutions linéairement indépendantes est l'ensemble suivant de solutions à l'équation homogène :

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\mu_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\mu_k-1} e^{\lambda_k t}. \end{aligned} \quad (24.62)$$

Nous notons y_i ces solutions. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$y_H = \sum_i c_i y_i. \quad (24.63)$$

Afin de trouver la solution générale de l'équation non homogène, nous appliquons la méthode de variation des constantes, en imposant les $n - 1$ conditions

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) y_i^{(l)}(t) = 0 \quad (24.64)$$

avec $l = 0, \dots, n - 2$. Ces conditions plus l'équation de départ (24.60) forment un système de n équations différentielles pour les n fonctions inconnues $c_i(t)$.

Cette condition peut paraître mystérieuse. Il est cependant encore possible de travailler sans poser la condition (24.64) en suivant la recette, en calculant des déterminants de Wronskien. Des exemples sont donnés dans les exercices sur le second ordre.

24.4.2 Si les coefficients ne sont pas constants ?

Une équation différentielle linéaire d'ordre n sur I est une équation de la forme

$$y^{(n)} + u_1(t) y^{(n-1)} + \dots + u_{n-1}(t) y' + u_n(t) y = v(t) \quad (24.65)$$

où v et u_k sont des fonctions continues fixées de I vers $\mathbb{R}$.

Pour résoudre cette équation, il faut commencer par résoudre l'équation homogène correspondante (c'est à dire celle que l'on obtient en posant $v(t) = 0$). Ensuite, nous trouvons la solution de l'équation (24.65) en appliquant la méthode de la **variation des constantes**.

Donnons un exemple du pourquoi la méthode de variations des constantes est efficace. Soit l'équation

$$u' + f(t)u = g(t), \quad (24.66)$$

et disons que u_H est une solution de l'équation homogène. La méthode de variations des constantes consiste à poser $u(t) = K(t)u_H(t)$, et donc $u'(t) = K'u_H + Ku'_H$. En remettant dans l'équation de départ,

$$K'u_H + Ku'_H + fKu_H = g. \quad (24.67)$$

La somme $Ku'_H + fKu_H$ est nulle, par définition de u_H . Par conséquent, il ne reste que

$$K' = \frac{g(t)}{u_H}. \quad (24.68)$$

Lorsqu'on utilise la méthode de variation des constantes, nous trouvons toujours une simplification « miraculeuse ».

Dans l'immédiat, nous ne considérons que le cas où les u_i sont des constantes. Le cas où les u_i deviennent des fonctions de t sera vu plus tard.

24.5 Système d'équations linéaires

24.5.1 La magie de l'exponentielle...

Prenons l'équation différentielle très simple

$$y' = ay. \quad (24.69)$$

La solution est $y(t) = Ae^{at}$. Et si on a la donnée que Cauchy $y(t_0) = y_0$, alors

$$y(t) = Ae^{at}e^{-at_0}e^{at_0} = e^{a(t-t_0)}y(t_0). \quad (24.70)$$

Donc on a le facteur multiplicatif $e^{a(t-t_0)}$ qui sert à faire passer de $y(0)$ à $y(t)$. C'est un peu un opérateur d'évolution. Ce qui fait la magie de l'exponentielle, c'est son développement en série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (24.71)$$

qui est tel que chaque terme est la dérivée du terme suivant.

Maintenant, si on a un système

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \quad (24.72)$$

il n'est pas du tout étonnant d'avoir comme solution $\bar{y}(t) = e^{At}$ où l'exponentielle de la matrice est définie exactement par la série (24.71). C'est un peu longuet, mais dans le cours, c'est effectivement ce qui est prouvé. La matrice résolvante $R(t, t_0): \bar{y}_0 \rightarrow \bar{y}(t; t_0, y_0)$ est donné par

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}, \quad (24.73)$$

exactement comme dans l'équation (24.70).

24.5.2 ... mais la difficulté

Maintenant, il est suffisant de calculer des exponentielles de matrices pour résoudre des systèmes. Hélas, il est en général très difficile de calculer des exponentielles. Tu peux essayer de prouver les deux suivantes :

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} &\leadsto e^A = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \\ S = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} &\leadsto e^S = \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24.74)$$

La première, tu vas la revoir si tu fais de la géométrie différentielle ou de la mécanique quantique : l'algèbre de Lie du groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 est l'algèbre des matrices antisymétriques.

La seconde se retrouve en relativité parce que e^S est la matrice qui préserve $x^2 - y^2$, tout comme e^A préserve $x^2 + y^2$. Quelque mots sur l'utilisation des fonctions hyperboliques en relativité dans 31.4.8.1.

24.5.3 La recette

Afin d'éviter de devoir calculer explicitement des exponentielles de matrices, nous faisons appel à toutes sortes de trucs, dont la forme de Jordan. Le résultat final est la méthode suivante. Soit le système homogène

$$\bar{y}' = A\bar{y}. \quad (24.75)$$

1. D'abord, nous calculons les valeurs propres de A .
2. Ensuite les vecteurs propres.

3. Une bonne valeur propre, c'est une valeur propre dont l'espace propre a une dimension égale à sa multiplicité. C'est à dire que si λ est de multiplicité m , alors on a, dans les bon cas, m vecteur propres linéairement indépendants.

Dans ce cas, si $v_1, \dots, v_m$ sont les vecteurs, alors on a les solutions linéairement indépendantes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_1 \\ \vdots \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \dots, \begin{pmatrix} \vdots \\ v_m \\ \vdots \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \quad (24.76)$$

Pour chaque bonne valeur propre, ça nous fait un tel paquet de solutions linéairement indépendantes.

4. Si λ n'est pas une bonne valeur propre, alors les choses se compliquent. Mettons que λ ait k vecteurs propres en moins que sa multiplicité. Dans ce cas, il faut chercher des solutions sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_1^{(k)} t^k + \dots + a_1^{(0)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} t^k + \dots + a_n^{(0)} \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \quad (24.77)$$

C'est à dire qu'on prend comme coefficient de $e^{\lambda t}$, un vecteur de polynômes de degré k . Il faut mettre cela dans l'équation de départ pour voir quelles sont les contraintes sur les constantes $a_i^{(j)}$ introduites.

5. Nous avons un cas particulier du cas précédent. Si λ est une valeur propre de multiplicité m qui n'a que un seul vecteur propre v , alors il faut chercher des polynômes de degré $m-1$, et on peut directement fixer le coefficient de t^{m-1} , ce sera l'unique vecteur propre :

$$\left[\begin{pmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^{(m-2)} \\ \vdots \\ a_n^{(m-2)} \end{pmatrix} t^{m-2} + \dots \right] e^{\lambda t}. \quad (24.78)$$

Cela économise quelques calculs par rapport à poser brutalement (24.77).

24.5.4 Système d'équations linéaires avec matrice constante

Nous considérons l'équation différentielle

$$y'(t) = Ay(t) \quad (24.79)$$

pour la fonction $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et A est une matrice ne dépendant pas de t . Nous supposons que A est diagonalisable pour les vecteurs propres v_i et les valeurs propres λ_i correspondantes.

La matrice

$$R(t) = [e^{\lambda_1 t} v_1 \dots e^{\lambda_n t} v_n] \quad (24.80)$$

est la **matrice résolvante** du système. Alors la solution du système (24.79) pour la condition initiale $y(0) = y_0$ est

$$y(t) = R(t)y_0. \quad (24.81)$$

En effet

$$AR(t) = \left[A \begin{pmatrix} \uparrow \\ e^{\lambda_1 t} v_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} \dots A \begin{pmatrix} \uparrow \\ e^{\lambda_n t} v_n \\ \downarrow \end{pmatrix} \right] = R'(t). \quad (24.82)$$

Par conséquent $y'(t) = R'(t)y_0 = AR(t)y_0 = Ay(t)$.

24.5.5 Système d'équations linéaires avec matrice non constante

Théorème 24.10 ([269]).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Si les composantes M_{ij} sont des fonctions continues sur I alors :

(1) pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ le système

$$y'(t) = M(t)y(t) \quad (24.83)$$

admet une unique solution maximale définie sur I telle que $y(t_0) = y_0$;

(2) l'ensemble des solutions de l'équation (24.83) sur I est un espace vectoriel de dimension n .

24.6 Réduction de l'ordre

Afin de diminuer l'ordre d'une équation dans laquelle le paramètre n'apparaît pas, il y a deux changements de variables très utiles. Le premier, le plus simple, est simplement de poser $z(t) = y'(t)$, ce qui donne $z'(t) = y''(t)$. Le second, *qui n'est pas le même*, est $z(y(t)) = y'(t)$, qui entraîne $y''(t) = z'(y(t))z(t)$. Dans ce second cas, il faut également changer de variable, et utiliser $y(t)$ comme variable au lieu de t .

Si ça ne marche pas, il faut suivre la procédure ci-après.

Nous supposons avoir une équation différentielle d'ordre p dans laquelle $y^{(p)}$ est isolée des autres dérivées :

$$y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \quad (24.84)$$

où f est une fonction $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, et la fonction cherchée est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

La méthode proposée ici consiste à transformer cette équation d'ordre p en un système d'équations d'ordre 1. Pour cela nous posons

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x, X) \mapsto \begin{pmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_p \\ f(x, X_1, \dots, X_p) \end{pmatrix}, \quad (24.85)$$

et à une fonction $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nous associons la fonction

$$Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(x) \end{pmatrix}. \quad (24.86)$$

La fonction y résout l'équation (24.84) si et seulement si la fonction Y résout l'équation

$$Y'(t) = F(t, Y(t)). \quad (24.87)$$

De plus si l'équation (24.84) est donnée avec les conditions initiales $y^{(k)} = a_k$ ($k = 0, \dots, p-1$) alors l'équation (24.87) vient avec les conditions initiales

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}, \quad (24.88)$$

c'est à dire $Y(t_0) = A_0$ avec $A_0 \in \mathbb{R}^p$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123 nous donne existence et unicité locale de la solution au système 24.87. Lorsque le système est linéaire, c'est à dire sous la forme $Y'(t) = M(t)Y(t)$, alors il y a mieux : le théorème 24.10.

24.7 Propriété des solutions

Dans cette section nous étudions les équations différentielles du type

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (24.89a) \\ (24.89b) \end{matrix}$$

24.7.1 Fuite des compacts et explosion en temps fini

Théorème 24.11 (Fuite des compacts[270, 271]).

Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (24.90a) \\ (24.90b) \end{matrix}$$

où $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Soit la solution maximale $y_M: J_M =]t_{\min}, t_{\max}[\rightarrow \Omega$. Si $t_{\max} < \sup(I)$ alors $y_M(t)$ sort de tout compact de Ω lorsque $t \rightarrow t_{\max}$.

Démonstration. Soit K un compact de Ω et nous considérons une suite (t_m) dans $]t_{\min}, t_{\max}[$ telle que $t_m \rightarrow t_{\max}$. Si nous supposons que $y_M(t)$ ne sort pas de K alors nous avons $y_M(t_m) \in K$, c'est à dire une suite dans un compact. Quitte à passer à une sous-suite, nous supposons qu'elle est convergente. Soit $x_1 \in K$ la limite $\lim_{m \rightarrow \infty} y_M(t_m) = x_1$.

Vu que $t_{\max} \in I$, la condition initiale $y(t_{\max}) = x_1$ est valide et le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123 nous donne une unique solution maximale y_P définie sur un ouvert J_P autour de $t_{\max}$.

Nous allons maintenant construire une solution au problème initial qui contredit la maximalité de y_M . Attention : il n'est pas évident a priori que $y_P(t) = y_M(t)$ sur l'intersection des domaines. Si c'était évident, la proposition serait démontrée.

Soit $\tilde{J} = J_M \cup J_P \cap]t_{\min}, +\infty[$ et la fonction

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y_M(t) & \text{si } t < t_{\max} \\ y_P(t) & \text{si } t \geq t_{\max}. \end{cases} \quad (24.91)$$

La fonction $\tilde{y}$ est continue par construction parce que

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} y_M(t) = x_1 = y_P(t_{\max}). \quad (24.92)$$

Nous vérifions à présent que $\tilde{y}$ est une solution : $\tilde{y}'(t_{\max}) = f(t_{\max}, y(t_{\max}))$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{y}(t_{\max} - \epsilon) - \tilde{y}(t_{\max})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y_M(t_{\max} - \epsilon) - y_P(t_{\max})}{\epsilon} \quad (24.93a)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y_M(t_{\max} - \epsilon) - y_P(t_{\max} - \epsilon) + y_P(t_{\max} - \epsilon) - y_P(t_{\max})}{\epsilon} \quad (24.93b)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{y_P(t_{\max} - \epsilon) - y_P(t_{\max})}{\epsilon} \quad (24.93c)$$

$$= y'_P(t_{\max}). \quad (24.93d)$$

Donc $\tilde{y}$ est solution pour la condition initiale $\tilde{y}(t_{\max}) = x_1$ et coïncide avec y_P en $t_{\max}$ et avec y_M avant $t_{\max}$. Donc en réalité y_P , y_M et $\tilde{y}$ sont identiques et cela contredit la maximalité de y_M . $\square$

Corollaire 24.12 (Explosion en temps fini).

Soit (y_m, J) la solution maximale du problème de Cauchy (16.444) :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (24.94a) \\ (24.94b) \end{matrix}$$

avec $f: U = I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ où I est ouvert dans $\mathbb{R}$ et Ω ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que f est continue sur U et localement Lipschitz par rapport à y .

Si $J =]t_{\min}, t_{\max}[$ alors nous avons l'alternative suivante :

- (1) Soit $t_{\max} = \sup(I)$,
 (2) soit $t_{\max} < \sup(I)$ et $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|y(t)\| = \infty$.

Le résultat tient aussi mutatis mutandis pour $t_{\min}$.

Démonstration. Attention : ceci n'est pas une simple paraphrase de la fuite des compacts. L'information supplémentaire que ce corollaire donne est que la solution sort de tout compact *pour ne plus y retourner*.

L'hypothèse $t_{\max} < \sup(I)$ signifie que la solution finit d'exister avant que les hypothèses sur f cessent d'être vraies. C'est à dire que la solution maximale est moindre que ce que nous aurions pu espérer.

Soit K compact et supposons que pour tout $t_0 < t_{\max}$ il existe $t \in]t_0, t_{\max}[$ tel que $y_M(t) \in K$. Alors cela crée une suite t_k dans J telle que $y_M(t_k)$ est dans K . Comme dans le théorème de la fuite des compacts nous concluons l'impossibilité de la chose.

Donc pour tout compact K de Ω , il existe $T < t_{\max}$ tel que $y_M(t) \in \Omega \setminus K$ pour tout $t \in [T, t_{\max}[$. En prenant des boules fermées de plus en plus grandes en guise de compacts nous concluons que

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|y_M(t)\| = \infty. \quad (24.95)$$

□

Exemple 24.13

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = y(y-1) \sin(yt) \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (24.96a) \\ (24.96b) \end{matrix}$$

La fonction $f(t, y) = y(y-1) \sin(yt)$ ayant une dérivée bornée partout, est localement Lipschitz et le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123 s'applique. Pour toute condition initiale, une solution maximale unique existe.

Si nous oublions la condition initiale, il est facile de trouver des solutions constantes : $y' = 0$ avec $y(t) = k$ donne l'équation

$$0 = k(k-1) \sin(kt). \quad (24.97)$$

Les solutions $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = 1$ sont des solutions existant pour tout t .

Le graphe de la solution correspondante à la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ ne pouvant pas croiser les graphes de y_1 et y_2 , elle est obligée d'exister pour tout t parce qu'elle ne peut pas exploser en temps fini. $\triangle$

24.7.2 Stabilité de Lyapunov

Définition 24.14.

Dans le cas de l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t), t)$ pour $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, un point $a \in \mathbb{R}^n$ est un **point d'équilibre** lorsque la fonction constante $y(t) = a$ est une solution.

Le point d'équilibre $a \in \mathbb{R}^n$ est **stable** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|y(0) - a\| < \delta$ implique $\|y(t) - a\| < \epsilon$ pour tout t .

Théorème 24.15 (Théorème de stabilité de Lyapunov[272, 2, 270]).

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (24.98a) \\ (24.98b) \end{matrix}$$

avec une fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous supposons que l'application linéaire df_0 n'a que des valeurs propres dont la partie réelle est strictement négative.

Alors

- (1) Il existe $k > 0$ tel que si $\|y_0\| < k$ alors la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$,
 (2) pour le même nombre $k > 0$, si $\|y_0\| < k$ alors $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ exponentiellement vite,
 (3) la solution $y = 0$ est un point d'équilibre attractif.

Démonstration. Placer ici une phrase intelligente².

Prolégomène Le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123 nous enseigne que l'équation différentielle considérée possède une unique solution maximale (entre autres parce qu'une fonction de classe C^1 est localement Lipschitz) et nous nommons J l'intervalle sur lequel elle est définie.

Système linéarisé Nous posons $A = df_0$. La fonction $y_L(t) = e^{tA}y_0$ est solution du système linéarisé

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (24.99a)$$

$$(24.99b)$$

Pour évaluer la norme de y_L nous utilisons le lemme 16.81 : il existe un polynôme P tel que

$$\|y_L(t)\| \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} \|y_0\|. \quad (24.100)$$

Mais par hypothèse, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ et si nous posons $\lambda = \max\{\operatorname{Re}(\lambda_i)\}$ nous avons $\lambda < 0$ et

$$\|y_L(t)\| \leq P(|t|) e^{\lambda t} \|y_0\|. \quad (24.101)$$

Donc quel que soit y_0 nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_L(t)\| = 0$ c'est à dire $\lim_{t \rightarrow \infty} y_L(t) = 0$.

Une forme linéaire Nous définissons la forme bilinéaire suivante sur $\mathbb{R}^n$:

$$b(x, y) = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt. \quad (24.102)$$

D'abord cela est bien défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ parce que

$$|\langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle| \leq \|e^{tA}x\| \|e^{tA}y\| \leq P_1(|t|) P_2(|t|) e^{2\lambda t} \|x\| \|y\|, \quad (24.103)$$

qui est intégrable entre 0 et ∞ à cause de la décroissance exponentielle³. Montrons que b est définie positive. Soit donc $x \neq 0$ et calculons

$$b(x, x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt. \quad (24.104)$$

Ce qui est dans l'intégrale est forcément (pas strictement) positif pour tout t . Mais si $x \neq 0$ alors $\|x\|^2$ est strictement positif et sur un voisinage de $t = 0$ nous avons aussi $\|e^{tA}x\|^2$ qui est strictement positif. Ergo $b(x, x) > 0$ dès que $x \neq 0$, ce qui signifie que b est strictement définie positive (lemme 6.296).

Nous notons $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à b et aussi la norme qui va avec : $\|x\|_q = \sqrt{q(x)}$. En ce qui concerne le gradient $\nabla q: V \rightarrow V$, nous avons la formule $\nabla q(x) \cdot y = 2b(x, y)$ [272]. En effet, nous utilisons une des nombreuses formules du lemme 11.132⁴ :

$$\nabla q(x) \cdot y = \frac{d}{dt} \left[q(x + ty) \right]_{t=0} \quad (24.105a)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[q(x) + t^2 q(y) + 2tb(x, y) \right]_{t=0} \quad (24.105b)$$

$$= 2b(x, y). \quad (24.105c)$$

2. Parce que sinon l'environnement `description` qui suit donne un mauvais effet.

3. Proposition 16.58.

4. Le fait que q soit différentiable est simplement le fait que b soit bilinéaire.

Nous avons aussi

$$\nabla q(x) \cdot Ax = 2b(x, Ax) \quad (24.106a)$$

$$= 2 \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle \quad (24.106b)$$

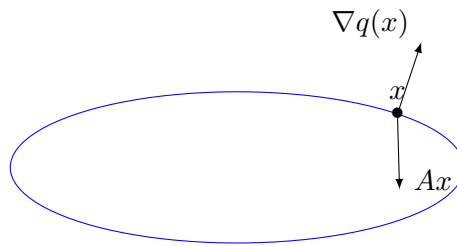
$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (\langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle)(t) dt \quad (24.106c)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle \right]_{t=0}^{t=T}. \quad (24.106d)$$

Mais vu que $\|e^{tA}x\| \rightarrow 0$, pour $t \rightarrow \infty$ il ne reste que terme $t = 0$ de la différence, c'est à dire

$$\nabla q(x) \cdot Ax = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2. \quad (24.107)$$

Étant donné que $\nabla q(x)$ est le vecteur dirigé vers l'extérieur de l'ellipsoïde de la courbe de niveau de q au point x , le vecteur Ax est dirigé vers l'intérieur.



Majoration de $q(y(t))'$ Nous posons

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) - Ax. \end{aligned} \quad (24.108)$$

Soit y la solution maximale au problème (24.98) que nous pouvons aussi écrire sous la forme

$$y'(t) = r(y(t)) + Ay(t). \quad (24.109)$$

Calculons un peu ...

$$q(y(t))' = b(y(t), y(t))' \quad (24.110a)$$

$$= 2b(y, y') \quad (24.110b)$$

$$= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \quad (24.110c)$$

$$= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \quad (24.107) \text{ avec } x = y(t) \quad (24.110d)$$

$$\leq -\|y\|^2 + 2\|y(t)\|_q \|r(y(t))\|_q \quad \text{Cauchy-Schwarz : } |b(a, b)| \leq \|a\|_q \|b\|_q. \quad (24.110e)$$

Chacun des deux termes peut encore être majoré. En ce qui concerne le premier, par équivalence des normes⁵, il existe une constante C telle que $\|y\| \geq C\|y\|_q$. En renommant immédiatement C^2 en C , $\|y\|^2 \geq C\|y\|_q^2 = Cq(y)$.

Pour le second, nous allons utiliser la différentiabilité de r et le théorème des accroissements finis. Vu que $df_0 = A$ nous avons $dr_0 = df_0 - A = 0$ et de plus r est de classe C^1 parce que f l'est. Toutes les normes étant équivalentes⁶ sur $\mathbb{R}^n$ nous pouvons exprimer la continuité de dr pour la norme $\|\cdot\|_q$: si $\epsilon > 0$ est fixé alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| < \alpha$ implique $\|dr_x\|_q < \epsilon$. Nous pouvons écrire les accroissements finis⁷ pour la fonction r :

$$\|r(x) - r(0)\|_q \leq \sup_{a \in [0, x]} \|df_a\| \|x\|_q. \quad (24.111)$$

5. Définition 6.137 et théorème 6.139.

6. Théorème 6.139.

7. Théorème 6.231.

La chose facile à remarquer est que $r(0) = f(0) = 0$. En ce qui concerne les choses difficiles, vu que dr est continue (parce que r est C^1) il existe un $\delta > 0$ tel que $\|dr_a\|_q < \epsilon$ dès que $a \in B_q(0, \delta)$. Si nous prenons $\|x\|_q < \delta$ alors cette majoration est valable pour tous les éléments sur lequel est pris le supremum dans la formule (24.111). Donc

$$\|r(x)\|_q \leq \epsilon \|x\|_q \quad (24.112)$$

tant que $\|x\|_q \leq \delta$. Par conséquent, tant que $\|y(t)\|_q \leq \delta$ nous avons $\|r(y(t))\| \leq \epsilon \|y(t)\|_q$. Nous continuons le calcul (24.110) :

$$q(y(t))' \leq Cq(y) + 2\epsilon \|y(t)\|_q^2 \quad (24.113a)$$

$$= -(C - 2\epsilon)q(y). \quad (24.113b)$$

Si ϵ est petit on a $C - 2\epsilon > 0$ et on pose $\beta = C - 2\epsilon$ pour écrire

$$q(y(t))' \leq -\beta q(y(t)) \quad (24.114)$$

tant que $\|y(t)\|_q < \delta$.

Si $q(y_0) < \delta$ alors $q(y(t)) < \delta$ Nous posons ⁸

$$t_1 = \min\{t > 0 \text{ tel que } q(y(t)) = \delta\} \quad (24.115a)$$

$$t_2 = \max\{t < 0 \text{ tel que } q(y(t)) = \delta\}. \quad (24.115b)$$

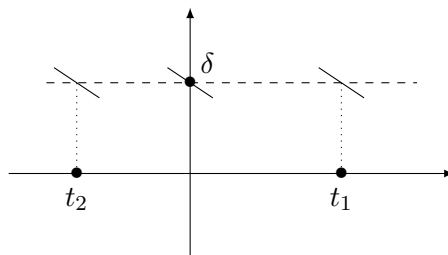
L'inégalité (24.114) est valable pour $t = 0$, $t = t_1$ et $t = t_2$; nous l'écrivons pour t_1 :

$$q(y(t))'_{t=t_1} \leq -\beta q(y(t_1)) \leq -\beta\delta < 0 \quad (24.116)$$

Nous avons donc $q(y(t_1)) = \delta$ et $q(y(t))'_{t=t_1} < 0$. Par conséquent pour tout t proche de t_1 avec $0 < t < t_1$ il y a $q(y(t)) > \delta$.

Pour la même raison, prise en $t = 0$ nous avons pour tout t proche de 0 avec $t > 0$ que $q(y(t)) < \delta$. Par continuité de $t \mapsto q(y(t))$ cette fonction doit passer par la valeur δ dans $]t_2, 0[$ et $]0, t_1[$, ce qui contredit la maximalité de t_2 et la minimalité de t_1 .

Ci-dessous, une partie de ce à quoi ressemble le graphe de $t \mapsto q(y(t))$:



Deux conclusions :

— Vu que $q(y(t))$ est borné pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous sommes dans le cas (1) de l'alternative du théorème d'explosion en temps fini 24.12. Donc la solution $y(t)$ existe sur tout $\mathbb{R}$ pourvu que $\|y_0\|$ soit assez petit. Plus précisément par équivalence des normes, il existe un nombre $D > 0$ tel que $\|x\| \geq D\|x\|_q$ pour tout x . Si $\|y_0\| \leq D\delta$ alors

$$D\|y_0\|_q \leq \|y_0\| \leq D\delta, \quad (24.117)$$

qui donne immédiatement $\|y_0\|_q \leq \delta$, ce qui faut pour faire fonctionner l'existence de $y(t)$ pour tout t .

8. t_1 est bien défini et est bien un minimum. J'en veux pour preuve que si $q(y(t_s)) = \delta$, on peut prendre le minimum seulement sur les $t \in [0, t_s]$; or par continuité $q(y(t)) = \delta$ définit un fermé. Bref t_1 est un infimum sur un compact (fermé borné) et donc bien un minimum atteint.

— Nous pouvons maintenant d'utiliser l'inégalité (24.114) pour tout $t \in \mathbb{R}$ sous la seule hypothèse que $q(y_0) < \delta$ au lieu de $q(y(t)) < \delta$.

La partie (1) de ce théorème est prouvée ; nous passons au reste à la partie (2). Pour cela nous supposons que $q(y_0) < \delta$.

À propos de $e^{\beta t}q(y)$ En sous-entendant la dépendance en t dans y nous avons

$$\left(e^{\beta t}q(y)\right)' = \beta e^{\beta t}q(y) + e^{\beta t}q(y)' = e^{\beta t}(\beta q(y) + q(y)'), \quad (24.118)$$

mais nous avons déjà prouvé que $q(y)' \leq -\beta q(y)$ (équation (24.114)), donc

$$\left(e^{\beta t}q(y)\right)' \leq 0 \quad (24.119)$$

Décroissance exponentielle Si $t \geq 0$, l'inégalité (24.119) donne

$$e^{\beta t}q(y(t)) \leq q(y_0), \quad (24.120)$$

c'est à dire

$$q(y(t)) \leq e^{-\beta t}q(y_0) \quad (24.121)$$

lorsque $t \geq 0$. Par équivalence des normes, nous avons des nombres D_1 et D_2 tels que

$$D_1\|x\|_q \leq \|x\| \leq D_2\|x\|_q \quad (24.122)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Nous avons donc pour tout $t \geq 0$ que

$$\|y(t)\| \leq D_2\|y(t)\|_q \leq D_2\|y_0\|_q e^{-\beta t}. \quad (24.123)$$

Pour rappel, $\beta > 0$, ce qui prouve la partie (2) du théorème.

Point d'équilibre Le point $y = 0$ est point d'équilibre (définition 24.14) parce que $f(0) = 0$, donc $y(t) = 0$ fonctionne. Dans ce cas, $y_0 = 0$.

Stabilité La stabilité est le fait que $\|y(t)\|_q \leq \delta$ dès que $\|y_0\|_q \leq \delta$.

□

24.7.3 Système proie et prédateurs : Lokta-Volterra

Le système de **Lokta-Volterra** est l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \quad (24.124a)$$

$$(24.124b)$$

où a, b, c, d sont des constantes positives et avec la condition $x(t_0) > 0, y(t_0) > 0$.

En ce qui concerne l'interprétation des équations[273],

- (1) $x(t)$ est le nombres proies
- (2) $y(t)$ est le nombres prédateurs
- (3) Les proies ont une reproduction rapide qui mène à une croissance exponentielle en absence de prédation (d'où le terme ax).
- (4) Au contraire, les prédateurs meurent (ou migrent) rapidement lorsqu'ils n'ont pas de proies et nous supposons une décroissance exponentielle du nombre de prédateurs en l'absence de proies. D'où le terme $-cy$ avec le signe négatif.
- (5) Les termes $-bxy$ et dxy sont les termes d'interaction entre le proies et les prédateurs. Ils sont proportionnels à la fréquence de leurs rencontres, lesquelles sont avantageuses pour les prédateurs et problématiques pour les proies.

Théorème 24.16 (Lokta-Volterra[2]).

Soient des constantes positives a, b, c, d et le système équations différentielles

$$\begin{cases} x' = ax - bxy & (24.125a) \\ y' = -cy + dxy & (24.125b) \\ x(t_0) > 0, y(t_0) > 0. & (24.125c) \end{cases}$$

Alors

- (1) Les solutions sont positives sur leur domaines.
- (2) Les solutions existent sur $\mathbb{R}$.
- (3) Les solutions sont périodiques.

Démonstration. Nous divisons la preuve.

Comment théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique Tel quel, le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123 ne s'applique pas parce qu'il demande une condition initiale pour avoir unicité. En ce qui concerne les notations, ce qui est noté « y » dans le théorème est ici le couple x, y et la fonction f est alors

$$f\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}. \quad (24.126)$$

C'est une fonction continue localement Lipschitz partout par le lemme 11.194 et la proposition 11.193.

Nous savons cependant que les solutions sont de classe C^1 et que moyennant la donnée d'une condition initiale, la solution est unique.

Les solutions restent positives Supposons $x(s) = 0$ pour un certain $s > t_0$. Alors la solution

$$\begin{cases} x(t) = 0 & (24.127a) \\ y(t) = \exp(-ct) & (24.127b) \end{cases}$$

est une solution pour $[t_0, s + \epsilon]$. Par unicité de la solution avec condition initiale $s(s) = 0$, nous avons aussi $x(t_0) = 0$ pour toutes les solutions, ce qui contredit notre condition.

De la même façon, avoir $y(s) = 0$ donne une solution avec $y(t) = 0$ pour tout t et donc une contradiction.

Solutions sur $\mathbb{R}$ Nous montrons maintenant que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Nous avons $x' < ax$, donc pour tout t où la solution est définie,

$$0 < x(t) < x(t_0)e^{a(t-t_0)}, \quad (24.128)$$

c'est à dire que la solution ne peut pas exploser en temps fini⁹ : elle est bornée par le haut et le bas. Elle doit donc exister pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $y' < dxy$ donc

$$0 < y(t) < y(t_0)e^{d \int_{t_0}^t x(s) ds} \quad (24.129)$$

qui est également contraire à l'explosion en temps fini.

4 zones : monotonie Nous divisons $\mathbb{R}^2$ en quatre zones d'après les signes de $a - by$ et $c - dx$.

Nous montrons que dans chacune de ces zones, les solutions sont monotones. Prenons par exemple la partie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a - by > 0\} \times \{c - dx < 0\}. \quad (24.130)$$

Vu l'équation $x' = x(a - by)$, tant que $(x(t), y(t))$ est dans cette zone, la fonction x' a le signe de x et est donc positive. Donc x est croissante dans cette zone.

De la même façon, $y' = -y(c - dx)$ est y' a un signe constant dans la zone.

9. Voir le corollaire 24.12.

4 zones : on bouge Nous prouvons à présent qu'une solution ne reste pas dans une zone.

(1) Supposons que $(x(t_0), y(t_0))$ soit dans la zone

$$\{a - by > 0\} \quad \times \quad \{c - dx > 0\} \quad (24.131a)$$

$$x' > 0 \quad \quad \quad y' < 0 \quad (24.131b)$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Nous avons en particulier $x' > 0$, donc x est croissante tout en ayant la borne supérieure $x < c/d$. Par conséquent x a une limite que nous appelons $x_1 \in [0, \frac{c}{d}]$.

De la même façon, y est décroissante et bornée vers le bas par zéro. Donc y a une limite que nous notons $y_1 \in [0, y(t_0)]$.

Vu que x est bornée et de classe C^1 nous avons forcément $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$. Mais vu que $x' = ax - bxy$ nous devons avoir

$$ax_1 - bx_1y_1 = 0. \quad (24.132)$$

Mais ni $x_1 > 0$ donc $a - by_1 = 0$, ce qui donne $y_1 = \frac{a}{b}$ et aussi $x_1 = \frac{c}{d}$. Bref, y est décroissante et tend vers a/b ; donc $y(t_0) > a/b$, ce qui contredit que $y(t_0)$ soit dans la zone considérée.

Étant donné que $x' > 0$ et $y' < 0$, la solution sort de la zone pour entrer dans la zone ...

(2) Supposons que $(x(t_0), y(t_0))$ soit dans la zone

$$\{a - by > 0\} \quad \times \quad \{c - dx < 0\} \quad (24.133a)$$

$$x' < 0 \quad \quad \quad y' > 0 \quad (24.133b)$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Les fonctions x et y sont convergentes. Par conséquent $\ln(y)$ converge aussi et vu que x est croissante,

$$\frac{y'}{y} = -c + dx \geq -x + dx(t_0) > 0 \quad (24.134)$$

Cela signifie que $\ln(y)'$ est toujours positive et bornée par le bas. Cela est impossible si y est borné.

Donc on sort de la zone pour entrer dans ...

(3) Supposons que $(x(t_0), y(t_0))$ soit dans la zone

$$\{a - by < 0\} \quad \times \quad \{c - dx < 0\} \quad (24.135a)$$

$$x' < 0 \quad \quad \quad y' > 0 \quad (24.135b)$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$).

Le même type de raisonnement fait passer à la zone...

(4) Supposons que $(x(t_0), y(t_0))$ soit dans la zone

$$\{a - by < 0\} \quad \times \quad \{c - dx > 0\} \quad (24.136a)$$

$$x' < 0 \quad \quad \quad y' < 0 \quad (24.136b)$$

et que la solution reste dans cette zone (pour les $t > t_0$). Encore une fois, cela nous fait sortir de la zone et retourne vers la première zone.

À ce moment nous voyons déjà que la relation entre proie et prédateurs, c'est un peu le mythe de Sisyphe

Une intégrale première Posons la fonction

$$H(x, y) = by + dx - a \ln(y) - c \ln(x). \quad (24.137)$$

Une simple dérivation montre que $x \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto H\left(\frac{c}{d}, s\right) \end{aligned} \quad (24.138)$$

dont la dérivée n'est autre que $f'(s) = b - \frac{a}{s}$. La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[\frac{a}{b}, \infty[$ et donc injective. Sur les changements de zones, il existe un t_0 tel que

$$x(t_0) = \frac{d}{c} \quad (24.139a)$$

$$y(t_0) > 0. \quad (24.139b)$$

Pour cette valeur t_0 nous avons alors $H(x(t_0), y(t_0)) = f(y(t_0))$. En posant $s_0 = y(t_0) > 0$ nous avons

$$H(x_0, y_0) = f(s_0) \quad (24.140)$$

et f étant injective, ce s_0 est la seule valeur de s à vérifier $H(x_0, y_0) = f(s)$.

Conclusion La fonction x passant d'une zone à l'autre, il existe un $t_1 > t_0$ tel que $x(t_1) = a/b$. Nous avons évidemment

$$H(x(t_1), y(t_1)) = H(x_0, y_0) \quad (24.141)$$

parce que H est constante le long du mouvement. Cela se traduit par

$$H\left(\frac{a}{b}, y(t_1)\right) = f(s_0), \quad (24.142)$$

et donc $y(t_1) = f(s_0) = y(t_0)$. Avec tout cela nous avons

$$\begin{cases} y(t_1) = y(t_0) \end{cases} \quad (24.143a)$$

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) = \frac{a}{b}. \end{cases} \quad (24.143b)$$

Cela est donc un point par lequel la solution repasse. Par unicité de la solution, elle est donc périodique. □

24.8 Équation du second ordre

24.8.1 Wronskien

Nous considérons ici une équation différentielle de la forme

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0 \quad (24.144)$$

Dans ce point nous allons considérer la fonction q sans hypothèse de périodicité. L'équation de Hill (sous-section 24.8.4) sera la même équation, mais en supposant que q est périodique.

Nous commençons par argumenter que si q est continue, alors l'ensemble des solutions de l'équation (24.144) est un espace vectoriel de dimension deux. Pour cela il suffit d'appliquer la méthode de réduction de l'ordre (section 24.6) puis le théorème de dimension pour les systèmes linéaires (théorème 24.10). En effet si la fonction y_1 est solution de (24.144) si et seulement si le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est solution du système linéaire

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} Y(t). \quad (24.145)$$

Soient deux solutions y_1 et y_2 de l'équation différentielle. Le **Wronskien** de ces deux solutions est le déterminant

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \quad (24.146)$$

Si nous considérons l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (24.147)$$

le Wronskien peut être déterminé sans savoir explicitement y_1 et y_2 parce que $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$, et en dérivant,

$$W' = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \quad (24.148a)$$

$$= y_1(-py_2' - qy_2) - (-py_1' - qy_1)y_2 \quad (24.148b)$$

$$= -p \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad (24.148c)$$

c'est à dire

$$W' = -pW. \quad (24.149)$$

Il suffit donc de savoir une condition initiale pour obtenir une équation différentielle pour W .

24.8.2 Avec second membre

Une équation différentielle du second ordre avec un second membre se présente sous la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = v(t) \quad (24.150)$$

où $v(t)$ est une fonction donnée. Le truc est de commencer par résoudre l'équation différentielle sans second membre, c'est à dire trouver la fonction $y_H(t)$ telle que

$$ay_H''(t) + by_H'(t) + cy_H(t) = 0. \quad (24.151)$$

Cela se fait en utilisant la méthode du polynôme caractéristique.

Ensuite, il faut trouver une solution particulière $y_P(t)$ de l'équation avec le second membre. Une seule. Pour y parvenir, il faut du doigté et un peu de technique. Il faut faire des essais en fonction de ce à quoi ressemble le $v(t)$:

- (1) Si $v(t)$ est un polynôme, alors il faut essayer un polynôme,
- (2) Si $v(t) = \cos(\omega t)$ ou bien $v(t) = \sin(\omega t)$, alors essayer $y_P(t) = A \cos(t) + B \sin(\omega t)$,
- (3) Si $v(t) = e^{\omega t}$, alors essayer $y_P(t) = Ae^{\omega t}$.

24.8.3 Équation $y'' + q(t)y = 0$

Nous allons donner quelque propriété des solutions de l'équation

$$y'' + qy = 0 \quad (24.152)$$

en fonction de telle ou telle hypothèse sur q .

Proposition 24.17.

Si $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si

$$\int_0^\infty |q(t)| dt \quad (24.153)$$

converge, alors

- (1) toute solution bornée de $y'' + qy = 0$ vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$,
- (2) l'équation $y'' + qy = 0$ admet des solutions non bornées.

Démonstration. Soit y une solution bornée, et intégrons l'équation différentielle entre 0 et ∞ :

$$\int_0^\infty y''(t)dt = - \int_0^\infty q(t)y(t)dt. \quad (24.154)$$

La fonction y étant bornée, l'hypothèse sur q permet de dire que l'intégrale de droite existe. Par ailleurs,

$$\int_0^\infty y'' = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a y'' = \lim_{a \rightarrow \infty} y'(a) - y'(0). \quad (24.155)$$

Cela justifie que la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)$ existe. Posons $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)$ et supposons par l'absurde que $\alpha \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$ et λ assez grand pour que

$$\|y' - \alpha\|_{[\lambda, \infty[} < \epsilon. \quad (24.156)$$

Soit aussi $x > \lambda$. Nous avons

$$y(x) = y(\lambda) + \int_\lambda^x y'(t)dt \quad (24.157a)$$

$$\geq y(\lambda) \int_\lambda^x (\alpha - \epsilon) \quad (24.157b)$$

$$= y(\lambda) + \alpha x - \epsilon x. \quad (24.157c)$$

En prenant la limite des deux côtés on voit que $y(x) \rightarrow \infty$ dès que $\alpha \neq 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc $\alpha = 0$.

Pour la seconde partie de la proposition, nous devons prouver que l'équation $y'' + qy = 0$ possède des solutions non bornées. Si l'équation a seulement des solutions bornées et si $\{u, v\}$ est une base de solutions, alors nous avons $u', v' \rightarrow 0$. Si nous reprenons l'équation (24.149) avec $p = 0$ nous savons que dans notre cas le Wronskien satisfait à $W' = 0$, c'est à dire qu'il est constant. Mais vu que u et v sont bornées et que les dérivées tendent vers zéro, nous avons $W(t) \rightarrow 0$ et donc $W(t) = 0$.

Or l'annulation identique du Wronskien contredit que $\{u, v\}$ serait une base de solutions. Donc il existe des solutions non bornées. $\square$

Proposition 24.18.

Soit l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Si q est C^1 , strictement positive et croissante, alors toutes les solutions sont bornées.

Démonstration. Soit y une solution et multiplions l'équation par $2y'$ (qui est non nulle par hypothèse) :

$$2y'y'' + 2qy'y = 0. \quad (24.158)$$

Nous allons intégrer cela en nous souvenant que $2y'y''$ est la dérivée de $(y')^2$. Pour tout $t > 0$ nous avons

$$0 = y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2 \underbrace{\int_0^t q(t)y'(t)y(t)dt}_{\text{par partie}} \quad (24.159a)$$

$$= y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2 \left([qy^2]_0^t - \int_0^t q'y^2 \right) \quad (24.159b)$$

$$(24.159c)$$

Le terme qui nous intéresse est celui qui contient $y(t)$:

$$2q(t)y(t)^2 = -y'(t)^2 + y'(0)^2 + 2q(0)y(0)^2 + 2 \int_0^t q'y^2 \quad (24.160)$$

Nous pouvons majorer $-y'(t)^2$ par zéro et remplacer toutes les constantes par K :

$$q(t)y(t)^2 \leq \int_0^t q' y^2 + K = \int_0^t \frac{q'}{q} q y^2. \quad (24.161)$$

C'est le moment d'utiliser le lemme de Grönwall 24.4 avec $\phi = qy^2$ et $\psi = q'/q$. Les hypothèses de croissance et de positivité ont été posées exprès. Bref, on a

$$qy^2 \leq K \exp \left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} ds \right) \quad (24.162a)$$

$$= K \exp \left(\ln \frac{q(t)}{q(0)} \right) \quad (24.162b)$$

$$= K \frac{q(t)}{q(0)}. \quad (24.162c)$$

Notons que $q(0)$ est strictement positif. Nous déduisons que

$$y^2 \leq \frac{K}{q(0)} \quad (24.163)$$

et donc y est bornée. □

24.8.4 Équation de Hill

L'équation **de Hill** est une équation différentielle de la forme

$$y'' + qy = 0 \quad (24.164)$$

où

- (1) $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- (2) q est paire et π -périodique

Nous nous intéressons aux solutions complexes de cette équation différentielle.

Nous nommons $W \subset C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des solutions complexes de l'équation (24.164). Nous savons par ce qui a été dit en 24.8.3 que cet espace est de dimension deux. De plus avec le hypothèses faites ici sur q , nous savons que les solutions sont de classe C^3 parce que si y est une solution, alors l'équation $y'' = -qy$ nous indique que y est C^1 parce que y'' existe (y' est dérivable et donc continue). Mais si y est de classe C^1 , alors le membre de droite qy est C^1 et donc y'' est C^1 , ce qui prouve que y est de classe C^3 . La récurrence ne va pas plus loin parce que q est seulement de classe C^1 .

Nous considérons l'application de translation

$$\begin{aligned} T: C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\rightarrow C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ (Ty)(x) &= y(x + \pi). \end{aligned} \quad (24.165)$$

En utilisant la règle de dérivation de fonctions composées, $(Ty)' = Ty'$ et $(Ty)'' = Ty''$, de telle sorte que si u est solution de l'équation (24.164), alors Tu est également solution. Donc W est un espace stable par T .

Le théorème 24.10 nous permet de choisir une base de W en imposant des conditions. Nous choisissons une base $\{y_1, y_2\}$ telles que

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 & y_2(0) &= 0 \\ y_1'(0) &= 0 & y_2'(0) &= 1. \end{aligned} \quad (24.166)$$

Le théorème 24.10 nous assure que deux telles solutions existent et qu'elles forment une base de W parce que W est de dimension 2.

Lemme 24.19 ([269]).

Avec ce choix de base $\{y_1, y_2\}$ la matrice de T est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}. \quad (24.167)$$

De plus la fonction y_1 est paire et la fonction y_2 est impaire.

Démonstration. Cherchons la matrice de T dans cette base en associant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à y_1 et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à y_2 . Si

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$Ty_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = ay_1 + cy_2. \quad (24.168)$$

En évaluant cela en $t = 0$,

$$(Ty_1)(0) = ay_1(0) + cy_2(0) = a, \quad (24.169)$$

donc $a = (Ty_1)(0) = y_1(\pi)$. En dérivant (24.168), en tenant compte du fait que $(Ty_1)' = Ty_1'$ et en évaluant en $t = 0$, nous trouvons de même $c = y_1'(\pi)$. Puis le même cinéma avec y_2 donne

$$T = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}. \quad (24.170)$$

Passons maintenant à la parité de y_1 et y_2 . Nous posons $\psi(t) = y_1(-t)$. Alors $\psi'(t) = -y_1'(-t)$ et $\psi''(t) = y_1''(t)$, tant et si bien que

$$\psi''(t) + q(t)\psi(t) = y_1''(-t) + q(t)y_1(-t) = 0. \quad (24.171)$$

donc ψ est une solution de l'équation. Mais

$$\begin{cases} \psi(0) = y_1(0) \end{cases} \quad (24.172a)$$

$$\begin{cases} \psi'(0) = -y_1'(0) = 0, \end{cases} \quad (24.172b)$$

donc ψ a les mêmes conditions initiales que y_1 . Par conséquent $\psi = y_1$ (par le l'unicité donnée dans le théorème de Cauchy-Lipschitz 16.123) et y_1 est paire. Nous procédons de même en partant de $\varphi(t) = -y_2(-t)$ pour trouver que $\varphi = y_2$ et que donc que y_2 est impaire. □

Remémorons nous toutefois, pour calmer toute enthousiasme excessif, que T dépend de deux solutions et donc de la fonction q donnée dans l'équation.

Proposition 24.20 ([1]).

Nous considérons l'équation $y'' + qy = 0$ et sa base de solutions $\{y_1, y_2\}$ en suivant les notations données plus haut.

- (1) Si $|\text{Tr}(T)| < 2$, alors toutes les solutions de l'équation sont bornées.
- (2) Si $|\text{Tr}(T)| = 2$ alors nous avons une solution non bornée.
- (3) Si $|\text{Tr}(T)| > 2$ alors toutes les solutions de l'équation sont non bornées.
- (4) Le cas $|\text{Tr}(T)| = 2$ se présente si et seulement si $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

Démonstration. Remarquons que le déterminant de la matrice T est égal au Wronskien des solutions y_1 et y_2 calculé en $t = \pi$. Calculons sa valeur :

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2. \quad (24.173)$$

En dérivant et en remplaçant y_i'' par $-qy_i$, nous trouvons tout de suite $W(y_1, y_2)' = 0$. Donc le Wronskien est constant et il est facile de le calculer en $t = 0$:

$$W(y_1, y_2)(0) = 1 - 0 = 1. \quad (24.174)$$

Donc pour tout t nous avons $W(y_1, y_2)(t) = 1$. En particulier

$$\det(T) = W(y_1, y_2)(\pi) = 1, \quad (24.175)$$

et notons au passage que T est inversible.

Nous écrivons le polynôme caractéristique de T sous la forme $\chi_T = X^2 - \text{Tr}(T)X + \det(T)$, c'est à dire

$$\chi_T = X^2 - \text{Tr}(T)X + 1, \quad (24.176)$$

dont le discriminant est $\Delta = \text{Tr}(T)^2 - 4$.

Nous passons à présent aux différents points de la proposition.

- (1) Si $|\text{Tr}(T)| < 2$, alors $\Delta < 0$ et χ_T a deux racines complexes conjuguées que nous notons ρ et $\bar{\rho}$. De plus le produit des racines étant le terme indépendant, $\rho\bar{\rho} = 1$; en particulier $|\rho| = |\bar{\rho}| = 1$. Notons $\{u, v\}$ une base de vecteurs propres : $Tu = \rho u$ et $Tv = \bar{\rho}v$. Il est vite vu que la fonction $|u|$ est π -périodique :

$$|u|(t + \pi) = |u(t + \pi)| = |(Tu)(t)| = |(\rho u)(t)| = |\rho||u|(t) = |u|(t). \quad (24.177)$$

La fonction $|u|$ est continue¹⁰ et périodique ergo bornée. La fonction $|v|$ est bornée pour la même raison et par linéarité, toutes les fonctions de W sont bornées.

- (2) Si $\text{Tr}(T) = \pm 2$, alors $\Delta = 0$ et χ_T a une racine réelle double¹¹ qui doit être ± 1 . Soit u un vecteur propre de T pour la valeur propre ± 1 . Nous avons

$$|u|(t + \pi) = |Tu(t)| = |\pm u(t)|, \quad (24.178)$$

ce qui prouve encore que $|u|$ est périodique et donc bornée.

Notons que nous n'avons pas d'informations sur le fait qu'une autre solution soit ou non bornée.

- (3) Si $|\text{Tr}(T)| > 2$, alors χ_T a deux racines réelles distinctes r et r' avec $rr' = 1$ (toujours les relations coefficients-racines). En raison de quoi $r' = r^{-1}$ et quitte à échanger r et r' nous supposons $|r| > 1$. L'opérateur est maintenant diagonalisable et nous considérons $\{u, v\}$ une base de vecteurs propres pour les valeurs propres r et r' . Une solution non nulle de l'équation s'écrit donc sous la forme

$$y = \alpha u + \beta v \quad (24.179)$$

avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

— Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et nous choisissons une valeur t telle que $v(t) \neq 0$. Dans ce cas,

$$y(t + n\pi) = \beta v(t + n\pi) = \beta(T^n v)(t) = \beta(r')^n v(t), \quad (24.180)$$

et en faisant $n \rightarrow -\infty$ nous obtenons $\pm\infty$ suivant le signe de β .

— Si $\alpha \neq 0$, alors nous fixons¹² t tel que $u(t) \neq 0$. Alors

$$y(t + n\pi) = \alpha r^n u(t) + \beta(r')^n v(t). \quad (24.181)$$

En faisant $n \rightarrow \infty$, nous avons $(r')^n \rightarrow 0$ tandis que le premier terme tend vers $\pm\infty$ suivant le signe de α .

10. La fonction u elle-même n'est cependant pas garantie d'être périodique.

11. Ce qui n'implique pas le fait d'avoir deux vecteurs propres pour cette valeur propre, mais tout de même au moins un, voir l'exemple 6.269.

12. Mais pas trop hein ; nous aurons encore besoin d'assigner à t d'autres valeurs dans d'autres théorèmes.

- (4) D'abord le théorème de Cayley-Hamilton 6.262 nous indique que $\chi_T(T) = 0$, c'est à dire que

$$T^2 - \text{Tr}(T)T + 1 = 0. \quad (24.182)$$

Nous avons déjà mentionné le fait que T était inversible. Multiplions donc (24.182) par T^{-1} :

$$T + T^{-1} = \text{Tr}(T)\mathbb{1}_2. \quad (24.183)$$

Vu que T^{-1} est l'endomorphisme $T^{-1}u(t) = u(t - \pi)$, sa matrice est donnée par

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix} \quad (24.184)$$

où nous avons utilisé le fait que y_1 était paire et y_2 impaire (lemme 24.19). Si nous notons $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ et

$$T + T^{-1} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}. \quad (24.185)$$

L'équation (24.183) donne alors, vu que $\text{Tr}(T) = a + d$,

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix}, \quad (24.186)$$

ce qui donne immédiatement $a = d$. La matrice de T a donc comme forme $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et $\text{Tr}(T) = 2a$.

Donc $\text{Tr}(T) = \pm 2$ si et seulement si $a = \pm 1$ et vu que $1 = \det(T) = a^2 - bc$, nous avons $a = \pm 1$ si et seulement si $bc = 0$, ce qui signifie exactement $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

□

24.9 Différents types d'équations différentielles

24.9.1 Équation homogène

Une équation différentielle **homogène** est une équation de la forme

$$y' = f(t, y) \quad (24.187)$$

où $f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y)$ pour tout $\lambda \neq 0$.

Elle se présente sous la forme

$$y' = \frac{\text{degré } n \text{ en } t, y}{\text{degré } n \text{ en } t, y}, \quad (24.188)$$

avec pas de y' à droite : juste du y et du t .

Lemme 24.21.

L'équation $y' = f(t, y)$ est homogène si et seulement si $f(t, y)$ est une fonction de y/t seulement.

Pour résoudre l'équation homogène, on pose

$$z(t) = \frac{y(t)}{t}, \quad (24.189)$$

donc $tz = y$, et

$$y'(t) = tv'(t) + v(t), \quad (24.190)$$

à remettre dans l'équation de départ.

24.9.2 Équation de Bernoulli

C'est une équation du type

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha \quad (24.191)$$

où $\alpha \neq 0$ ou 1 . Pour la résoudre, on divise l'équation par y^α , et on pose $u = y^{1-\alpha}$, et on tombe sur une équation linéaire

$$u' = (1 - \alpha)(a(t)u + b(t)). \quad (24.192)$$

24.9.3 Équation de Riccati

C'est une équation de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t). \quad (24.193)$$

En général, on ne peut pas la résoudre, mais si on en connaît *a priori* des solutions particulières, alors on peut s'en sortir.

(1) Si on sait que $y_1(t)$ est une solution, alors on pose

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{u(t)}, \quad (24.194)$$

et on obtient une équation linéaire

$$u' = -(2y_1(t)a(t) + b(t))u - a(t). \quad (24.195)$$

(2) Si y_1 et y_2 sont solutions, alors nous avons y sous forme implicite

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = K e^{\int a(t)(y_1(t) - y_2(t)) dt}. \quad (24.196)$$

Pour résoudre une équation de Riccati, il faut donc d'abord deviner une ou deux solutions.

24.9.4 Équation différentielle exacte

24.9.4.1 Résolution lorsque tout va bien

Avant de vous lancer dans les équations différentielles exacte, vous devez lire la section sur les formes différentielles 13.9. Une équation différentielle exacte est de la forme $P(t, y) + Q(t, y)y' = 0$ que nous allons écrire sous la forme

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0. \quad (24.197)$$

Nous savons que si $\partial_y P = \partial_t Q$, alors il existe une fonction $f(t, y)$ telle que $Pdt + Qdy = df$. Pour trouver une telle fonction, nous pouvons simplement intégrer la forme $Pdt + Qdy$. En effet, si $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un chemin tel que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (t, y)$, alors en définissant

$$f(t, y) = \int_{\gamma} [Pdt + Qdy] = \int_0^1 [(P \circ \gamma)(u)dt + (Q \circ \gamma)(u)](\gamma'(u))du, \quad (24.198)$$

nous avons $df = Pdt + Qdy$. N'importe quel chemin fait l'affaire. Calculons avec $\gamma(u) = (tu, yu)$. La dérivée de ce chemin est donnée par

$$\gamma'(u) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (24.199)$$

Étant donné que $dt \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a$ et $dy \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b$, nous avons

$$\begin{aligned} f(t, y) &= \int_0^1 [Pdt + Qdy](\gamma(u)) \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) du \\ &= \int_0^1 P(\gamma(t))tdu + \int_0^1 Q(\gamma(t))ydu \\ &= \int_0^1 [tP(tu, uy) + yQ(tu, yu)]du. \end{aligned} \quad (24.200)$$

Nous retrouvons exactement la formule (13.558). Si ça t'étonne, c'est que tu n'as pas compris ;)
Dans le cas où nous avons la fonction f qui vérifie $P = \partial_t f$ et $Q = \partial_y f$, l'équation (24.197) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0, \quad (24.201)$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt} [f(t, y(t))] = 0, \quad (24.202)$$

dont la solution

$$f(t, y(t)) = C \quad (24.203)$$

donne la solution $y(t)$ sous forme implicite.

24.9.4.2 Facteur intégrant (quand tout ne va pas bien)

Si la forme $Pdt + Qdy$ n'est pas exacte, il n'existe pas de fonction f qui résolve l'affaire. Nous pouvons toutefois essayer de trouver un **facteur intégrant**. Nous cherchons une fonction M telle que

$$(MP)dt + (MQ)dy \quad (24.204)$$

soit exacte. Nous cherchons donc $M(t, y)$ telle que $\partial_y(MP) = \partial_t(MQ)$. En utilisant la règle de Leibnitz, nous trouvons l'équation suivante pour M :

$$M(\partial_y P - \partial_t Q) = Q(\partial_t M) - P(\partial_y M). \quad (24.205)$$

Cette équation est en générale extrêmement difficile à résoudre, mais dans certains cas particuliers, il est possible d'en trouver une solution à tâtons.

24.10 Distributions pour les équations différentielles

Nous commençons par définir l'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ en disant que $t \mapsto u_t$ est dans cet espace si

- (1) pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons $u_t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,
- (2) l'application $t \mapsto u_t$ est de classe C^∞ .

Pour définir ce que nous entendons par une fonction de classe C^k à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ nous nous souvenons de la proposition 22.27.

24.10.1 Équation de Schrödinger

Théorème 24.22 (Équation de Schrödinger[1]).

Soit $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et le problème

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - i\Delta \tilde{u} = 0 \\ u_0 = g \end{cases} \quad (24.206a)$$

$$(24.206b)$$

où $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ est lié à u par la remarque 22.49. Alors

- (1) Il existe une unique solution dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$.
 (2) Cette solution u vérifie de plus $\tilde{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Nous allons donner explicitement une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ et nous allons vérifier l'équation (24.206a) en testant sur une fonction $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Cela prouvera le point (2) ainsi que la partie existence de (1). Dans ce qui suit toutes les transformées de Fourier seront par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$ ou par rapport à ξ . Jamais par rapport à $t \in \mathbb{R}$.

Existence Pour $t \in \mathbb{R}$ nous posons¹³

$$u_t = \mathcal{F}^{-1}(f_t \hat{g}) \quad (24.207)$$

où $f_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $f_t(x) = e^{-it\|x\|^2}$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$u_t(\varphi) = (f_t \hat{g})(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)) = \hat{g}(f_t \mathcal{F}^{-1}(\varphi)) = g(\mathcal{F}(f_t \mathcal{F}^{-1}(\varphi))). \quad (24.208)$$

Le fait que $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ soit une fonction Schwartz fait partie de la proposition 21.12. Pour chaque t nous avons bien $u_t \in \mathcal{S}'(\Omega)$.

De plus la fonction $h(t, x) = e^{-it\|x\|^2}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, et par conséquent l'application

$$t \mapsto \hat{g}(h(t, \cdot)) \quad (24.209)$$

est également C^∞ par la proposition 22.29. Ceci pour dire que $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$. Il faut encore vérifier que cette fonction est bien une solution de notre problème. Nous testons cette équation sur $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Pour alléger les notations nous posons $\psi_t: x \mapsto \psi(t, x)$ et par conséquent aussi $(\partial_t \psi_t)(x) = (\partial_t \psi)(t, x)$. Nous avons :

$$\heartsuit = (\partial_t \tilde{u} - i\Delta \tilde{u})(\psi) \quad (24.210a)$$

$$= -\tilde{u}(\partial_t \psi) - i\tilde{u}(\Delta \psi) \quad (24.210b)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} u_t((\partial_t \psi_t) + i(\Delta \psi_t)) dt \quad (24.210c)$$

Ici nous nous souvenons du lemme 21.23 qui nous dit que nous pouvons permuter $\mathcal{F}^{-1}$ et ∂_t . Et pour l'autre terme il faut utiliser le lemme 21.11 avec $|\alpha| = 2$ et une somme pour obtenir que

$$\widehat{\Delta \varphi}(x) = -\|x\|^2 \hat{\varphi}(x), \quad (24.211)$$

qui dans notre cas s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}^{-1}((\Delta \psi_t))(x) = -\|x\|^2 \mathcal{F}^{-1}\psi(t, x). \quad (24.212)$$

En remettant bout à bout,

$$\heartsuit = - \int_{\mathbb{R}} (f_t \hat{g})((\partial_t - i\|\cdot\|^2)\mathcal{F}^{-1}\psi_t) dt \quad (24.213a)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x \mapsto e^{-it\|x\|^2}(\partial_t - i\|x\|^2)(\mathcal{F}^{-1}\psi)(t, x)) dt \quad (24.213b)$$

Pour alléger les notations nous notons $\check{\psi}_t(x) = (\mathcal{F}^{-1}\psi)(t, x)$. Nous avons

$$\partial_t(e^{-it\|x\|^2}\check{\psi}_t(x)) = -i\|x\|^2 e^{-it\|x\|^2}\check{\psi}_t(x) + e^{-it\|x\|^2}(\partial_t \check{\psi}_t)(x) = e^{-it\|x\|^2}(\partial_t - i\|x\|^2)\check{\psi}_t(x); \quad (24.214)$$

13. En utilisant la définition (22.27) du produit d'une distribution par une fonction.

cela nous permet d'un peu factoriser une dérivée dans $\heartsuit$:

$$\heartsuit = - \int_{\mathbb{R}} \hat{g} \left(\partial_t \left(e^{-it\|\cdot\|^2} \check{\psi}_t(\cdot) \right) \right) dt \quad (24.215a)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \partial_t \hat{g} \left(e^{-it\|\cdot\|^2} \check{\psi}_t(\cdot) \right) dt \quad (24.215b)$$

$$= - \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\hat{g} \left(e^{-it\|\cdot\|^2} \check{\psi}_t(\cdot) \right) \right]_{t=-N}^{t=N}. \quad (24.215c)$$

Histoire de bien comprendre les notations, il ne s'agit pas de calculer $\hat{g}(e^{-it\|\cdot\|^2} \check{\psi}_t)$ pour un t général et de remplacer ensuite t par N et $-N$. En effet la valeur de $\hat{g}(e^{-it\|\cdot\|^2} \check{\psi}_t)$ pour un t donné est celle qu'on obtient en calculant $\hat{g}(\dots)$ après avoir remplacé t par ce que l'on veut. Par conséquent, en posant $\varphi(t, \xi) = e^{-it\|\xi\|^2} \check{\psi}_t(\xi)$ nous avons :

$$\heartsuit = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[g \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(t, \xi) d\xi \right) \right]_{t=-N}^{t=N} \quad (24.216a)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} g \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(N, \xi) d\xi \right) - \lim_{N \rightarrow \infty} g \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(-N, \xi) d\xi \right) \quad (24.216b)$$

La limite commute avec g parce que cette dernière est une distribution (continue). De plus la limite commute avec l'intégrale parce que ce qui est dedans est Schwartz. La fonction φ étant Schwartz, la limite est nulle. Donc

$$\heartsuit = 0 \quad (24.217)$$

et la fonction u proposée est bien une solution de l'équation de Schrödinger dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$.

Unicité Nous considérons deux solutions $u_1, u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ et la fonction $u = u_1 - u_2$ doit satisfaire au problème

$$\begin{cases} (\partial_t \tilde{u} - i\Delta \tilde{u})(\psi) = 0 \\ u_0 = 0. \end{cases} \quad (24.218a)$$

$$(24.218b)$$

Nous allons montrer que seule la fonction $u_t = 0$ peut satisfaire à cela pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Nous allons même montrer qu'en imposant ces équations seulement sur la partie de $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ qui est à support compact par rapport à $\mathbb{R}$, la seule solution est $u_t = 0$. Soit donc $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ à support compact vis-à-vis de sa variable t . Alors

$$0 = -\tilde{u}(\partial_t \psi + i\Delta \psi) = - \int_{\mathbb{R}} u_t \left((\partial_t \psi)_t + i(\Delta \psi)_t \right) dt \quad (24.219)$$

où encore une fois $\partial_t \psi_t$ est la fonction $x \mapsto (\partial_t \psi)(t, x)$. Maintenant nous utilisons la proposition 22.52 pour dire que

$$\frac{d}{dt} \left(u_t(\psi_t) \right) = u_t^{(1)}(\psi_t) + u_t \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \cdot) \right) \quad (24.220)$$

pour écrire

$$0 = - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(u_t(\psi_t) \right) - u_t^{(1)}(\psi_t) + u_t \left(i(\Delta \psi)(t, \cdot) \right) dt \quad (24.221)$$

Le premier terme est facile :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(u_t(\psi_t) \right) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[u_t(\psi_t) \right]_{t=-N}^{t=N} = 0 \quad (24.222)$$

parce que ψ est à support compact par rapport à t . Nous restons donc avec

$$\int_{\mathbb{R}} u_t^{(1)}(\psi_t) - i u_t((\Delta \psi)(t, \cdot)) dt = 0 \quad (24.223)$$

Nous traitons le terme en $u_t^{(1)}$ en utilisant le fait évident $T(\varphi) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$ et en remarquant le lemme 22.53 :

$$u_t^{(1)}(\psi_t) = (\mathcal{F}u_t^{(1)})(\mathcal{F}^{-1}\psi_t) = (\mathcal{F}u)_t^{(1)}(\mathcal{F}^{-1}\psi_t). \quad (24.224)$$

Pour l'autre terme on fait un peu la même chose en nous souvenant ce que fait la transformée de Fourier en traversant le laplacien :

$$u_t(\Delta\psi_t) = (\mathcal{F}u_t)(\mathcal{F}^{-1}\Delta\psi_t) = (\mathcal{F}u_t)(x \mapsto -\|x\|^2(\mathcal{F}^{-1}\psi_t)(x)). \quad (24.225)$$

En recollant encore :

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}u)_t^{(1)}(\mathcal{F}^{-1}\psi_t) + i(\mathcal{F}u_t)(\|\cdot\|^2\mathcal{F}^{-1}\psi_t) dt = 0. \quad (24.226)$$

Cette équation est valable tant que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ avec support compact en t . Nous allons nous en créer une super cool. D'abord nous choisissons $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et nous considérons¹⁴

$$\psi(t, x) = \mathcal{F}\left(\xi \mapsto e^{it\|\xi\|^2}\varphi(\xi)\chi(t)\right)(x). \quad (24.227)$$

Notons que la transformée de Fourier conserve le fait qu'une fonction soit Schwartz¹⁵, mais pas le fait d'avoir support compact. Cependant nous ne prenons que la transformée de Fourier par rapport à x . Le résultat est donc une fonction ψ qui est Schwartz par rapport à x et support compact par rapport à t . Nous pouvons donc écrire (24.226) en utilisant la fonction (24.227) :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}u)_t^{(1)}\left(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\chi(t)\right) + i(\mathcal{F}u_t)\left(x \mapsto \|x\|^2 e^{it\|x\|^2}\varphi(x)\chi(t)\right) dt. \quad (24.228)$$

Là dedans, $\chi(t)$ peut sortir à la fois de la transformée de Fourier et de l'application des distributions ; il doit seulement rester dans l'intégrale. Dans le second terme nous allons utiliser l'égalité (due entre autre à la proposition 22.52) :

$$\frac{d}{dt}(\hat{u}_t(e^{it\|\cdot\|^2}\varphi)) = \frac{d}{dt}\left(u_t(\mathcal{F}e^{it\|\cdot\|^2}\varphi)\right) \quad (24.229a)$$

$$= u_t^{(1)}(\mathcal{F}e^{it\|\cdot\|^2}\varphi) + u_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}e^{it\|\cdot\|^2}\varphi\right) \quad (24.229b)$$

$$= (\mathcal{F}u_t^{(1)})(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)) + (\mathcal{F}u_t)(x \mapsto i\|x\|^2 e^{it\|x\|^2}\varphi(x)) \quad (24.229c)$$

$$= (\mathcal{F}u)_t^{(1)}(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)) + (\mathcal{F}u_t)(x \mapsto i\|x\|^2 e^{it\|x\|^2}\varphi(x)). \quad (24.229d)$$

Et là, magie c'est exactement ce qui est dans (24.228). Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\hat{u}_t(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x))\chi(t) dt = 0 \quad (24.230)$$

pour toute fonctions à support compact χ . Donc la proposition 18.1 nous dit que

$$\partial_t \hat{u}_t(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)) = 0. \quad (24.231)$$

C'est zéro partout et non seulement presque partout parce qu'en plus nous avons la continuité. Par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\hat{u}_t(x \mapsto e^{it\|x\|^2}\varphi(x)) = \hat{u}_0(x \mapsto \varphi(x)) = 0. \quad (24.232)$$

Et cela est vrai pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous considérons donc $t_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour construire

$$\varphi(x) = e^{-it_0\|x\|^2}\theta(x). \quad (24.233)$$

14. Le candidat qui parvient à effectivement présenter ça comme développement, il est fort.

15. Proposition 21.12.

Nous avons alors $\hat{u}_{t_0}(x \mapsto \theta(x)) = 0$, ce qui signifie que $\hat{u}_{t_0} = 0$. Du coup pour tout $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $u_{t_0}(\mathcal{F}\theta) = 0$, mais comme la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 21.12) nous avons en fait $u_{t_0}(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire $u_{t_0} = 0$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et au final $u = 0$.

□

24.11 Équations différentielles du premier ordre

Définition 24.23 (Équation différentielle du premier ordre).

Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation qui, sur un intervalle donné, I , décrit la relation entre une variable réelle, notée x ou t dans I , une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, et la dérivée première de y qui on note y' .

Souvent on écrit « $y'(x) =$ une formule contenant x et $y(x)$ », c'est à dire

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{pour } x \in I, \quad (24.234)$$

où f est une fonction de deux variables réelles.

Remarque 24.24.

La théorie des fonctions de deux variables ne sera pas abordée dans ce cours, nous allons nous contenter de prendre f dans (24.234) comme une simple notation.

On peut presque toujours omettre d'écrire la dépendance de y en x et écrire simplement (24.234) sous la forme $y' = f(x, y)$.

Définition 24.25 (Solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre).

Une **solution particulière** de l'équation (24.234) sur l'intervalle I est une fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (1) z est dérivable sur I ;
- (2) $z'(x) = f(x, z(x))$, pour tout $x \in I$.

Définition 24.26 (Solution générale d'une équation différentielle du premier ordre).

Résoudre une équation différentielle veut dire trouver l'ensemble qui contient toutes ses solutions particulières. Cet ensemble s'appelle **solution générale** de l'équation.

Exemple 24.27

- (1) Résoudre une équation du type $y'(x) = f(x)$ revient à trouver l'ensemble des primitives de la fonction f , qui est donc la solution générale de cette équation. Il y a donc une infinité de solutions particulières, déterminées par une constante additive.
Si $f(x) = \sin(x)$ alors la solution générale sera $\mathcal{Y} = \{-\cos(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$.
- (2) L'équation

$$y' = y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (24.235)$$

a peut-être été abordée dans votre cours de terminale lors de la définition de la fonction exponentielle. Sa solution générale est $\mathcal{Y} = \{Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$. Ici aussi il y a une infinité de solutions particulières.

△

Remarque 24.28.

La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre est une famille à un paramètre de fonctions.

Définition 24.29 (Équation différentielle du second ordre).

Une **équation différentielle du second ordre** est une équation qui, sur un intervalle donne, I , décrit la relation entre une variable réelle, notée x ou t dans I , une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, et les dérivées première et seconde de y qui on note y' et y'' respectivement.

On utilise la forme générale

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{pour } x \in I. \quad (24.236)$$

où f est une fonction de trois variables réelles.

On peut définir de manière analogue les équations différentielles d'ordre supérieur. Les définitions de solution particulière et de solution générale se généralisent aux équations différentielles d'ordre supérieur à un.

Définition 24.30 (Trajectoire).

La trajectoire tracée par une solution particulière y de l'équation (24.234) est le graphe de y en tant que fonction de x .

Exemple 24.31

Nous allons regarder de plus près l'équation (24.235), $y' = y$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soient y_1 et y_2 deux solutions distinctes de cette équation. S'il existe un point $\bar{x}$ tel que $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$ alors forcément $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x}) = 1$. Or, la solution générale de l'équation est $\mathcal{Y} = \{Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$, donc $y_i(x) = C_i e^x$, $i = 1, 2$, où les C_i sont des constantes. Le rapport $y_1(\bar{x})/y_2(\bar{x})$ vaut C_1/C_2 et par conséquent $C_1 = C_2$. Ce résultat contredit l'hypothèse que les deux solutions soient distinctes. On a donc montré que *deux trajectoires distinctes de cette équations ne se croisent jamais*.

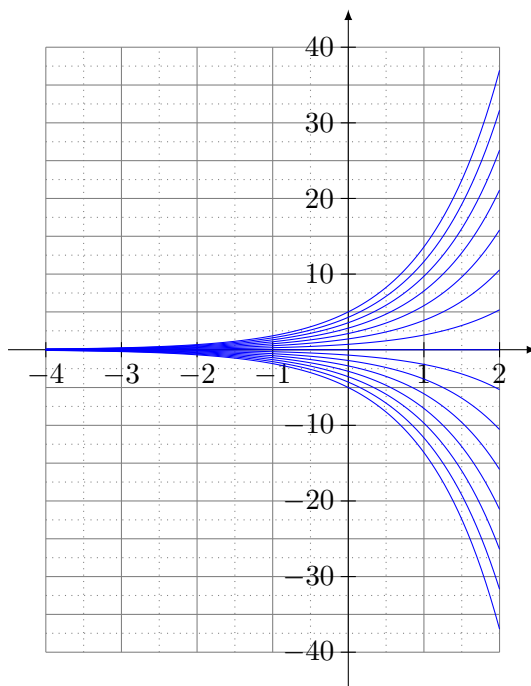


FIGURE 24.1 – Quelques trajectoires de l'équation $y' = y$.

La figure 24.1 représente quelques trajectoires de l'équation. Si on les avait tracées toutes elles recouvriraient tout le plan x - y . Cela veut dire que *par tout point (x, y) passe une et une seule trajectoire de l'équation (24.235)*.

Définition 24.32 (Condition initiale).

Une **condition initiale** pour l'équation (24.234) sur l'intervalle I est un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$.

On dit que la solution particulière z de (24.234) satisfait la condition initiale $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times \mathbb{R}$ si $z(\bar{x}) = \bar{y}$.

Définition 24.33 (Problème de Cauchy).

L'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale est appelée **problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in I, \\ y(\bar{x}) = \bar{y}. \end{cases} \quad (24.237)$$

Remarque 24.34.

Sous des conditions assez générales qui seront toujours vérifiées dans ce cours, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

Pour passer de la solution générale d'une équation différentielle de premier ordre à une solution particulière il faut choisir une valeur du paramètre. Comme il y a un seul paramètre une seule condition (la trajectoire de la solution doit passer par un point fixe du plan) peut suffire. Pour une équation différentielle de second ordre comme (24.236), nous aurons besoin de plus de conditions. Sans rentrer dans les détails, nous allons constater ce fait dans l'exemple suivant.

Exemple 24.35

La solution générale de l'équation

$$y'' = -y, \quad (24.238)$$

est $\mathcal{Y} = \{C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$. Remarquez que l'équation est du second ordre et que sa solution générale est une famille d'équations à deux paramètres réels. Ce sera toujours le cas pour les équations abordées dans la section 24.14. Pour déterminer une solution particulière de (24.238) il faut fixer les valeurs des deux paramètres et donc, en général, il sera nécessaire de donner deux conditions. $\triangle$

Remarque 24.36.

Une condition comme $y(0) = 4$ nous dit que la constante $C_1 = 4$ mais elle ne nous permet pas de trouver C_2 . Il y a donc une infinité de solutions de (24.238) qui satisfont à la condition $y(0) = 4$.

On peut fixer les deux conditions de deux manières différentes.

- (1) Problème de Cauchy : on fixe une terne de valeurs réels $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ et on cherche la solution telle que $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y'(\bar{x}) = \bar{y}'$.

Exemple 24.37

Les conditions $y(0) = 4$, $y'(0) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4 \cos(x) + 15 \sin(x)$. $\triangle$

- (2) Problème aux bords : on fixe deux points dans le plan x - y , $A = (\bar{x}, \bar{y})$ et $B = (\tilde{x}, \tilde{y})$, et on cherche la solution dont la trajectoire passe par A et B , c'est à dire, on impose $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

Exemple 24.38

Les conditions $y(0) = 4$, $y(\pi/2) = 15$ permettent de trouver la solution $z(x) = 4 \cos(x) + 15 \sin(x)$. $\triangle$

24.12 Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

Pour certaines équations différentielles la recherche d'une solution particulière se réduit à une recherche de primitive moyennant un changement de variables.

Définition 24.39 (Équation différentielle du premier ordre à variables séparables).

Une *équation différentielle du premier ordre à variables séparables* est une équation qui, pour tout x dans un intervalle donné, I , peut se mettre sous la forme

$$f(y)y' = g(x), \quad (24.239)$$

où f et g sont deux fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous pouvons intégrer les deux cotes de l'égalité par rapport à x et obtenir

$$\int f(y(x))y'(x) dx = G(x) + C,$$

où G est une primitive de g et C une constante réelle. Il est facile à ce point d'effectuer un changement de variable dans le membre de gauche de l'équation en posant (sans surprise) $y = y(x)$ et donc $y'(x) dx = dy$.

$$\int f(y(x))y'(x) dx = \int f(y) dy = F(y(x)) + C,$$

où F est une primitive de f et C une constante réelle. En somme nous avons

$$F(y(x)) = G(x) + C,$$

et, si F admet une fonction réciproque, alors

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C). \quad (24.240)$$

Remarque 24.40.

L'expression de F^{-1} peut être difficile à calculer. Il sera alors préférable de garder y dans la forme implicite.

Exemple 24.41

L'équation

$$3y^2y' = x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (24.241)$$

est une équation à variables séparables. Pour reprendre les notations du début du chapitre, ici $f(y) = 3y^2$ et $g(x) = x$. En intégrant de deux cotes on trouve

$$y^3 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc nous pouvons écrire la solution générale de l'équation (24.241) dans la forme

$$\mathcal{Y} = \left\{ \left(\frac{x^2}{2} + C \right)^{1/3} \text{ tel que } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 24.42

En intégrant de deux cotes l'équation à variables séparables

$$2yy' = x, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (24.242)$$

on trouve

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + C.$$

La fonction $F(y) = y^2$ est *n'est pas inversible* sur tout $\mathbb{R}$, et on sait que $\sqrt{y^2} = |y|$. Au moment de rendre y explicite on doit choisir entre

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad y = -\left(\frac{x^2}{2} + C\right)^{1/2}.$$

Ce choix se fait suivant la condition initiale, si elle est donnée. S'il n'y a pas de condition initiale nous pouvons écrire que la solution générale est l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \left\{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } y^2 = \frac{x^2}{2} + C \text{ et } C \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 24.43

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} e^y y' = \frac{1}{x+3}, & x \in]-\infty, -3[, \\ y(-4) = 0. \end{cases} \quad (24.243)$$

En intégrant des deux cotes nous trouvons

$$e^y = \ln(|x+3|) + C.$$

Nous pouvons alors imposer la condition initiale et obtenir $e^0 = \ln(|-4+3|) + C$, c'est à dire $C = 1 - \ln(1) = 1$.

Remarque 24.44.

L'énoncé du problème de Cauchy dit que x peut varier dans $]-\infty, -3[$, mais nous voyons maintenant que la solution n'est pas définie sur toute la demi-droite, parce que e^y est toujours positif et $\ln(|x+3|) + 1$ est positif seulement pour $x < -(1/e+3) \approx -3,3679$.

Donc la solution du problème de Cauchy est $y(x) = \ln(|x+3|) + 1$ pour tout $x \in]-\infty, -(1/e+3)[$.
△

Exemple 24.45

Attention, cet exemple est le plus important de la section !

On considère l'équation à variables séparables

$$y' = \sin(x)y, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24.244)$$

Dans ce cas, pour pouvoir écrire l'équation dans la forme (24.239) il faut pouvoir multiplier les deux côtés par $1/y$. Il faut donc éliminer tout de suite le cas où $y = 0$.

Si $y = 0$ alors $y' = 0$ et on a une solution constante (on dit souvent : une solution stationnaire) de l'équation. Par ailleurs les trajectoires des solutions ne peuvent pas se croiser ; donc si y_G est une solution non nulle de l'équation (24.244) alors $y_G(x) \neq 0$ pour tout x ¹⁶. Il n'y a donc aucun danger à diviser par y dans la recherche d'une solution non identiquement nulle.

Supposons maintenant que $y \neq 0$ et écrivons $y'/y = \sin(x)$. En intégrant des deux cotes on trouve

$$\ln(|y|) = -\cos(x) + C,$$

d'où

$$|y| = e^{-\cos(x)+C} = e^C e^{-\cos(x)}.$$

16. Ça vaut la peine de prendre un peu de temps pour bien comprendre cela.

Si on avait imposé une condition initiale alors on pourrait déterminer une solution particulière de l'équation en choisissant une valeur de la constante C . Nous pouvons observer cependant que la fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et par conséquent il n'y a pas de perte de généralité en disant que la solution générale de l'équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ y : |y| = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R}^{+,*} \right\} \cup \{y \equiv 0\}.$$

Il n'empêche qu'il serait plus élégant d'écrire la solution générale de l'équation sous une forme plus explicite, sans valeur absolue. Nous pouvons le faire en nous rappelant que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Il suffit alors d'autoriser K dans $\mathbb{R}^*$ pour éliminer la valeur absolue.

Pour écrire la solution générale de façon encore plus compacte nous observons que si $K = 0$ alors $y \equiv 0$, c'est à dire, on retrouve la solution constante nulle.

Finalement, la solution générale de cette équation sera toujours écrite sous la forme suivante

$$\mathcal{Y} = \left\{ y = Ke^{-\cos(x)}, \text{ pour } K \in \mathbb{R} \right\}. \quad (24.245)$$

△

24.13 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 24.46 (Équation différentielle linéaire du premier ordre).

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle .

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation différentielle de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad \text{pour } x \in I, \quad (24.246)$$

où a, b, c sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$.

On dit que a, b, c sont les coefficients de l'équation (24.246).

Remarque 24.47.

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *linéaire* si pour tout x_1, x_2 dans $\mathbb{R}$ et pour tout couple de constantes λ et μ on a

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2). \quad (24.247)$$

Ces équations différentielles sont dites linéaires parce que la partie de l'équation qui contient y (le membre de gauche) satisfait la propriété (24.247) par rapport à y . En effet par les propriétés de la dérivée nous avons que

$$a(x)(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(a(x)y_1' + b(x)y_1) + \mu(a(x)y_2' + b(x)y_2).$$

Définition 24.48.

L'équation (24.246) est dite **homogène** quand c est la fonction nulle. Si (24.246) n'est pas homogène on dit que l'équation

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (24.248)$$

est son **équation homogène associée**.

Toute équation linéaire du premier ordre homogène est une équation du premier ordre à variables séparables, comme on en a vu dans la section précédente et en particulier dans l'exemple 24.45. Nous n'allons pas répéter les détails du procédé pour trouver sa solution générale, qui aura la forme suivante

À retenir 24.49

$$\mathcal{Y}_h = \left\{ K e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} : K \in \mathbb{R} \right\}. \quad (24.249)$$

Proposition 24.50. (1) Soit y_p une solution particulière de l'équation (24.246) et y_h une solution particulière de l'équation homogène associée (24.248). Alors la fonction somme $z = y_p + y_h$ est encore une solution particulière de l'équation (24.246).

(2) Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de (24.246). Alors la fonction différence $w = y_1 - y_2$ est une solution particulière de (24.248).

Démonstration. (1)

$$a(x)(y_p + y_h)' + b(x)(y_p + y_h) - c(x) = (a(x)y_p' + b(x)y_p - c(x)) + (a(x)y_h' + b(x)y_h) = 0. \quad (24.250)$$

(2)

$$a(x)(y_1 - y_2)' + b(x)(y_1 - y_2) = (a(x)y_1' + b(x)y_1 - c(x)) - (a(x)y_2' + b(x)y_2 - c(x)) = 0. \quad (24.251)$$

□

Cette proposition permet de démontrer le théorème suivant, qui est le plus important de cette section.

Théorème 24.51.

Soit y_p une solution particulière de l'équation (24.246) et $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation (24.248), alors la solution générale de l'équation (24.246) est l'ensemble

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \{z = y_h + y_p : y = h \in \mathcal{Y}_h\}. \quad (24.252)$$

À retenir 24.52

La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre comporte trois étapes :

- (1) résolution de l'équation homogène associée ;
- (2) recherche d'une solution particulière de l'équation non homogène ;
- (3) somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière trouvée au point précédent.

La partie qui nous manque encore est de savoir comment trouver une solution particulière de l'équation non homogène (24.246). Si la fonction c dans (24.246) est une constante ou un polynôme simple, ou une exponentielle alors on peut essayer de deviner. Cette méthode cependant n'est pas la plus sûre pour des débutants.

Exemple 24.53

On considère l'équation

$$y' - 5y = 10, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24.253)$$

Comme tous les coefficients de l'équation sont constants on peut essayer de trouver une solution constante.

Toutes les fonctions constantes ont dérivée nulle, par conséquent, si une solution constante existe elle doit satisfaire $-5y = 10$, ce qui veut dire que la solution constante est $y(x) \equiv -2$. $\triangle$

Exemple 24.54

On considère l'équation

$$xy' + y = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}^{+,*}. \quad (24.254)$$

Comme le membre de droite de l'équation est un polynôme de degré un on cherche une solution de la forme $y(x) = Ax + B$ avec A et B dans $\mathbb{R}$.

Par substitution on obtient $Ax + (Ax + B) = x + 1$, c'est à dire que une solution particulière de l'équation est $y(x) = x/2 + 1$. $\triangle$

Exemple 24.55

L'équation

$$xy' - y = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}^{+,*}. \quad (24.255)$$

ressemble beaucoup à celle de l'exemple précédent, cependant il n'existe pas un polynôme de degré un qui en soit solution.

Dans un cas comme celui-ci, il faut rapidement abandonner la divination et replier sur la méthode, plus technique mais plus sûre, dite *variation de la constante* $\triangle$

24.13.1 Méthode de variation de la constante

- Soit $\mathcal{Y}_h$ la solution générale de l'équation homogène associé à (24.246). Il s'agit d'une famille à un paramètre de fonctions. La première étape de cette méthode consiste à construire un candidat solution particulière y_p en remplaçant le paramètre dans $\mathcal{Y}_h$ par une fonction $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à déterminer.

Exemple 24.56

L'équation homogène associée à $y' - y = \cos(x)$ est $y' - y = 0$, dont la solution générale est $\mathcal{Y}_h = \{Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$. Le candidat solution sera alors $y_p = C(x)e^x$, avec C fonction à déterminer. $\triangle$

- La deuxième étape de cette méthode consiste à injecter y_p dans l'équation. Cela permet de trouver une équation différentielle à variables séparables pour C , en principe plus facile à résoudre que l'équation de départ.

Exemple 24.57

On continue avec l'exemple précédent. On a $y_p' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, d'où

$$(C'(x)e^x + C(x)e^x) - C(x)e^x = \cos(x),$$

c'est à dire

$$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

$\triangle$

- La troisième étape de la méthode consiste à trouver une solution particulière de l'équation différentielle pour C et, par conséquent déterminer une y_p .

Exemple 24.58

La solution générale de

$$C'(x) = \cos(x)e^{-x}.$$

est $\mathcal{C} = \left\{ e^{-1} \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2} + K : K \in \mathbb{R} \right\}$. Il nous suffit une solution particulière, nous pouvons donc choisir $K = 0$ et alors la solution particulière de (24.246) sera $y_p(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$. $\triangle$

Remarque 24.59.

Le plus souvent en intégrant l'équation pour C on en trouvera la solution générale. Dans ce cas on peut remplacer C par cette solution générale et obtenir d'un seul coup la solution générale de l'équation (24.246), c'est à dire sans faire la somme entre la solution générale de l'homogène associée et la solution particulière.

Exemple 24.60

Dans l'exemple qu'on vient de voir la solution générale de (24.246) est

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_h + y_p = \left\{ C e^x + \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2} : C \in \mathbb{R} \right\}. \quad (24.256)$$

On obtient le même résultat en écrivant $\mathcal{Y} = \left\{ e^{-x} \left(e^{-1} \frac{(\sin(x) - \cos(x))}{2} + K \right) : K \in \mathbb{R} \right\}$. Notez qu'on a changé le nom du paramètre de C à K seulement pour souligner qu'on obtient de même résultat par deux chemins différents, sinon les deux expressions sont équivalentes ! $\triangle$

24.14 Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition 24.61 (Équation différentielle linéaire du second ordre).

Une *équation différentielle linéaire du second ordre* est une équation différentielle de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x), \quad \text{pour } x \in I, \quad (24.257)$$

où a, b, c et d sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$ pour tout $x \in I$.

On dit que a, b, c et d sont les coefficients de l'équation (24.257).

Dans ce cours nous allons étudier exclusivement le cas où a, b et c sont des fonctions constantes.

Définition 24.62 (Équation différentielle linéaire du second ordre homogène).

Une *équation différentielle linéaire du second ordre homogène* est une équation différentielle de la forme (24.257), telle que le coefficient d est nul.

À toute équation de la forme (24.257) on peut associer une équation homogène exactement comme on a fait dans la section précédente pour les équations linéaires du premier ordre.

24.14.1 Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants

Remarque 24.63.

L'application qui à la fonction y fait correspondre $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$ est linéaire, au sens de la remarque 24.47.

Cela nous dit en particulier, que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène alors toute leur combinaison de la forme $z = \lambda y_1 + \mu y_2$, avec λ et μ dans $\mathbb{R}$, est encore une solution.

Jusqu'ici nous avons toujours travaillé avec des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans cette section nous nous autorisons à passer par des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais cela sera uniquement une étape dans nos calculs. Au final toutes les solutions que nous allons considérer sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La solution générale à **valeurs dans les complexes** d'une équation de ce type a la forme

$$\mathcal{Y}_h^{\mathbb{C}} = \{ C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} : C_1, C_2 \in \mathbb{C}, x \in I \}, \quad (24.258)$$

où r_1 et r_2 sont aussi des nombres complexes. Remarquez que la solution générale est une famille à deux paramètres. Il faut aussi observer que en tout cas l'intervalle I dans lequel varie x est un intervalle dans $\mathbb{R}$, parce que I est une des données du problème.

À partir de cette information nous pouvons, pour toute équation donnée, chercher la solution générale **complexe** par substitution. Il suffit de remplacer y dans l'équation par e^{rx} et chercher les valeurs de r qui nous conviennent.

Si notre équation de départ est

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{pour } x \in I, \quad (24.259)$$

alors la substitution nous donne

$$e^{rx} (ar^2 + br + c) = 0.$$

Il est connu que la fonction exponentielle ne prend pas la valeur 0, par conséquent ce qui s'annule est le polynôme de degré deux $ar^2 + br + c$. Il est donc très facile de trouver les valeurs de r qu'on pourra utiliser comme r_1 et r_2 dans la solution générale **complexe**.

Si $b^2 - 4ac > 0$: le polynôme admet deux solutions réelles et distinctes, r_1 et r_2 ;

Si $b^2 - 4ac < 0$: le polynôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$;

Si $b^2 - 4ac = 0$: le polynôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$.

Il faut maintenant écrire la solution générale **réelle** de l'équation, qui est celle que nous intéresse vraiment. La façon de l'obtenir est différente dans les trois cas.

Si $b^2 - 4ac > 0$: la solution générale réelle a la même forme que la solution complexe, (24.258), il suffit de prendre les paramètres C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{Y}_h = \{C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} : C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I\}, \quad (24.260)$$

Si $b^2 - 4ac < 0$: le polynôme admet deux solutions complexes conjuguées, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$; Il faut alors utiliser les formules suivantes

$$\begin{aligned} e^{\alpha+i\beta} &= e^\alpha (\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \\ e^{\alpha-i\beta} &= e^\alpha (\cos(\beta) - i \sin(\beta)). \end{aligned} \quad (24.261)$$

La somme $e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$, où x est dans $I \in \mathbb{R}$, vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

et la différence $e^{r_1 x} - e^{r_2 x}$ vaut

$$e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) - e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) = 2e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Par ces deux calculs élémentaires nous avons trouvé deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de zéros en commun. Elles sont les génératrices de la famille des solutions réelles de l'équation différentielle (la solution générale)

$$\mathcal{Y}_h = \{e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I\}, \quad (24.262)$$

Si $b^2 - 4ac = 0$: le polynôme admet une solution réelle double $r = r_1 = r_2$. Dans ce cas la solution générale de l'équation est la famille

$$\mathcal{Y}_h = \{(C_1 + C_2 x)e^{rx} : C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I\}. \quad (24.263)$$

Pour justifier cette formule nous observons d'abord que toute fonction $x \mapsto Ce^{rx}$, pour $C \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (par construction). Ensuite nous utilisons la méthode de variation de la constante. On trouve rapidement que si une fonction de la forme $x \mapsto C(x)e^{rx}$ est une solution alors $C(x)$ est un polynôme de degré au plus 1, c'est à dire $C(x) = C_1 + C_2 x$ avec C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$.

24.14.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes

Nous ne présentons pas une méthode générale pour la résolution de ces équations. Comme dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre non homogènes, la solution générale de (24.257) est donnée par la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée. La recherche d'une solution particulière est facilitée par le fait que les coefficients de (24.257) sont supposés constants, c'est à dire que a , b et c sont des fonctions constantes. Il faut essayer de deviner la forme d'une solution particulière à partir de la forme du second membre de l'équation, la fonction d . Si d est un polynôme il faut essayer avec un polynôme du même degré, si d est une exponentielle, par exemple $d(x) = e^{5x}$, on pourra essayer avec un multiple de la même fonction exponentielle, dans l'exemple $f(x) = ke^{5x}$, avec k à déterminer. Si d est une combinaison linéaire de sinus et cosinus, comme par exemple $12 \cos(x) + 2 \sin(x)$, on peut essayer avec $k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)$.

Exemple 24.64

On considère l'équation différentielle

$$y'' + 12y' + 36y = -192e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24.264)$$

Son équation homogène associée est

$$y'' + 12y' + 36y = 0, \quad (24.265)$$

dont le polynôme caractéristique est $r^2 + 12r + 36$. Ce polynôme admet une racine double, qui est -6 , par conséquent la solution générale de (24.265) est

$$\mathcal{Y}_h = \{(C_1 + C_2x)e^{-6x} : C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}.$$

Le membre de droite de (24.264) est une fonction exponentielle, nous allons donc chercher une solution particulière de (24.264) de la forme $f(x) = ke^{2x}$. Par substitution nous trouvons

$$ke^{2x}(4 + 12 \times 2 + 36) = -192e^{2x},$$

ce qui veut dire que k doit être -3 .

La solution générale de l'équation (24.264) est donc

$$\mathcal{Y} = \{(C_1 + C_2x)e^{-6x} - 3e^{2x} : C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}.$$

△

Exemple 24.65

Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 12 \cos(x) + 2 \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24.266)$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (24.265), comme dans l'exemple précédent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (24.264).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)$. Par substitution on trouve

$$\begin{aligned} & -(k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)) + 12(-k_1 \sin(x) + k_2 \cos(x)) + 36(k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)) \\ & = 12 \cos(x) + 2 \sin(x) \end{aligned}$$

Cette équation doit être satisfaite pour toute valeur de x , en particulier pour $x = 0$ et $x = \pi/2$. Cela revient à considérer séparément les coefficients des fonctions sinus et cosinus. Il faut alors que k_1 et k_2 soient solutions du système

$$\begin{cases} -k_1 + 12k_2 + 36k_1 & = 12, \\ -k_2 - 12k_1 + 36k_2 & = 2. \end{cases}$$

On trouve $k_1 = 396/1369$ et $k_2 = 214/1369$, et la solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ (C_1 + C_2 x) e^{-6x} + \frac{396}{1369} \cos(x) + \frac{214}{1369} \sin(x) : C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Exemple 24.66

Nous allons résoudre l'équation

$$y'' + 12y' + 36y = 10x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24.267)$$

Cette équation a comme homogène associée l'équation (24.265), comme dans l'exemple précédent. Il nous suffit donc de trouver une solution particulière de (24.264).

Nous pouvons essayer avec $f(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$. Par substitution on trouve

$$(2k_1) + 12(2k_1 x + k_2) + 36(k_1 x^2 + k_2 x + k_3) = 10x^2 + 3.$$

Pour trouver les bonnes valeurs des coefficients nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} 36k_1 &= 10, \\ 24k_1 + 36k_2 &= 0, \\ 2k_1 + 12k_2 + 36k_3 &= 3, \end{cases}$$

ce qui donne $k_1 = 5/18$, $k_2 = -5/27$ et $k_3 = 7/54$. La solution générale de notre équation est

$$\mathcal{Y} = \left\{ (C_1 + C_2 x) e^{-6x} + \frac{5}{18} x^2 - \frac{5}{27} x + \frac{7}{54} : C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

△

Chapitre 25

Calcul numérique

D'autres lectures agréables dans [274]

25.1 Représentations numériques

Dans cette section les séquences de chiffres écrites entre crochet sont à comprendre comme des séquences de chiffres qui représentent une quantité suivant un codage donné.

25.1.1 Entier relatif en complément à deux (binaire)

Si nous avons m bits pour coder un entier relatif, une idée serait de prendre le premier bit pour le signe (0 pour positif et 1 pour négatif) et les autres pour la valeur absolue. Deux inconvénients :

- (1) Il y a deux codages pour le zéro, donc gaspillage.
- (2) L'algorithme pour faire la somme passe mal. Par exemple pour faire $1 + (-1)$, le 1 est codé comme [001] et le -1 par [101] et la somme se ferait naïvement comme

$$\begin{array}{r} 0 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Donc le résultat est [110] qui s'interprète comme -2 . Complètement faux.

Une solution est d'utiliser le **complément à deux**, qui est la façon usuelle de représenter des entiers signés.

Les entiers positifs se codent normalement, en laissant à zéro le premier bit (donc si nous disposons de m bits, nous codons sur $m - 1$ bits).

Les entiers négatifs se codent en trois étapes.

- coder la valeur absolue
- inverser tous les bits (d'où le nom de «complément à deux»)
- soustraire 1.

Exemple 25.1

Pour coder -1 nous faisons

- Nous codons 1 : [001]
- Nous inversons tous les bits : [110]
- Nous faisons -1 : [101].

△

Avec ce système, la somme passe bien : calculer $1 + (-1)$ donne

$$\begin{array}{r} 0 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

La réponse est donc [110] qu'il faut interpréter via le complément à deux.

$$110 \xrightarrow{+1} 111 \xrightarrow{\text{complément}} 000. \quad (25.1)$$

Et ce dernier [000] s'interprète comme zéro.

Définition 25.2 (Entier signé en complément à deux[275]).

La suite de bits $[a_{m-1} \dots a_0]$ s'interprète via la formule

$$-a_{m-1}2^{m-1} + \sum_{i=0}^{m-2} a_i 2^i. \quad (25.2)$$

Le premier bit donne effectivement le signe du nombre, mais l'interprétation d'un nombre n'est pas aussi simple que ce que l'on pourrait croire de prime abord.

Exemple 25.3 (Entier signé en 8 bits)

Que pouvons nous faire avec 8 bits? Le plus grand nombre est codé par [01111111] qui vaut $\sum_{k=0}^6 2^k = 2^7 - 1 = 127$. (avez-vous utilisé la somme (6.347)?)

Le plus petit nombre codable en 8 bits n'est pas [11111111] mais bien [10000000] (cela est plus clair en regardant la formule (25.2) qu'en tentant de suivre la construction du complément à deux) qui signifie $-2^7 = -128$.

Nous pouvons donc coder tous les nombres de -128 à 127 . $\triangle$

Plus généralement un système qui codes des entiers signés en N bits utilisant le complément à deux peut coder de $-(2^{N-1})$ à $2^{N-1} - 1$.

25.4 (Le dépassement).

Que se passe-t-il lorsque nous commençons un dépassement? Calculons sur 3 bits la somme [011] + [001] qui revient à ajouter 1 au nombre le plus grand :

$$\begin{array}{r} 0 \ 1 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \end{array}$$

qui signifie $-2^2 = -4$. Lors d'un dépassement, nous retombons automatiquement sur le plus petit.

Ce phénomène est bien connu des personnes qui programment sans faire attention dans certains langages de programmation qui ne font pas attention à votre place.

Définition 25.5 (Représentation en virgule fixe).

Soit x un réel. On définit sa **représentation en virgule fixe** par

$$x = \{[x_n x_{n-1} \dots x_0, x_{-1} \dots x_{-m}], b, s\} \quad (25.3)$$

avec $b \in \mathbb{N}, b \geq 2, s \in \{0, 1\}$ et $x_j \in \mathbb{N}, x_j < b$ suivant la formule

$$x = (-1)^s \sum_{j=-m}^n x_j \cdot b^j. \quad (25.4)$$

25.1.2 Représentation en virgule flottante

Définition 25.6 (Représentation en virgule flottante).

La **représentation en virgule flottante normalisée** en base b d'un nombre est la donnée de

- (1) Un bit s pour le signe
- (2) Un entier non signé q de e chiffres pour l'exposant
- (3) Une suite de chiffres $[a_1 \dots a_m]$ pour la mantisse.

Ces données s'interprètent via la formule

$$\text{fl}(s, q, [a_1, \dots, a_m]) = (-1)^s \sum_{j=1}^m b^j a_j \times b^{q-d} \quad (25.5)$$

où $d = b^{e-1}$ est le **décalage**.

Une idée à retenir est que l'exposant est un entier non signé parce qu'il est plus simple d'introduire un décalage dans la formule (25.5) que de compliquer l'écriture de l'exposant.

25.1.3 Simple précision, IEEE-754

En écriture binaire, la représentation en virgule flottante est un peu différente parce qu'il y a une idée supplémentaire; la simple précision que nous allons voir maintenant n'est donc pas un cas particulier de 25.6 avec $b = 2$.

Nous commençons par une description informelle de la précision simple avant de donner la définition. La représentation en **précision simple** d'un nombre se fait sur 32 bits répartis comme suit :

- (1) 1 bit pour le signe,
- (2) 8 bits pour l'exposant interprété comme nombre entier non signé
- (3) 23 bits pour la mantisse

Soit le triple

$$(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]) \quad (25.6)$$

Dans le cas générique, l'idée est de donner 24 bits pour la mantisse, mais en gardant en tête le fait que de toutes façons, le premier bit doit être 1, sinon il suffirait de décaler, c'est à dire changer l'exposant. Par conséquent la mantisse ne reçoit que 23 bits; il y a un «1» sous-entendu en première position. Donc la mantisse $[a_1, \dots, a_{23}]$ est à lire comme le nombre

$$1, a_1 \dots a_{23} = 1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \quad (25.7)$$

Exemple 25.7

La mantisse $[011100 \dots 0]$ signifie $1,0111 = 1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. $\triangle$ Cela pour justifier la formule

$$\text{sp}(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]) = (-1)^s \left(1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}\right) 2^{q-127}. \quad (25.8)$$

Notons :

- (1) Le «1+» dans la parenthèse correspond au 1 implicite en première position de la mantisse.
- (2) Il y a un décalage de 127 dans l'exposant, parce que q est un entier non signé.

Notons que cette règle du 1 implicite dans la mantisse empêche d'écrire le nombre 0, et ne permet pas d'écrire des nombres franchement petits parce que le 1 implicite est en *première* position dans la mantisse.

D'où l'idée de donner une règle particulière lorsque l'exposant vaut 0. Lorsque l'exposant est $q = 0$, alors nous ne considérons pas de 1 implicite dans la mantisse, et le décalage de l'exposant est -126 au lieu de -127 . D'où la formule

$$\text{sp}(s, q = 0, [a_1 \dots a_{23}]) = (-1)^s 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \quad (25.9)$$

En particulier, si $q = 0$ et $a = [0 \dots 0]$, nous avons le nombre zéro exact (il y a deux possibilités pour le code).

Enfin, nous avons des cas particuliers lorsque l'exposant est maximum, c'est à dire $q = [1111\ 1111] = 2^8 - 1 = 255$. Dans ce cas, le nombre codé est soit $+\infty$ soit NaN. Nous posons $\text{sp}(s, q = 255, a = 0) = +\infty$ et $\text{sp}(s, q = 255, a \neq 0) = \text{NaN}$. Il y a en réalité plusieurs valeurs différentes de NaN, mais nous n'entrons pas dans ces détails[276].

Définition 25.8 (Représentation en simple précision (binaire)).

La représentation en **précision simple** d'un nombre se fait sur 32 bits répartis comme suit :

- (1) 1 bit pour le signe,
- (2) 8 bits pour l'exposant interprété comme nombre entier non signé
- (3) 23 bits pour la mantisse

Un nombre est représenté par un triple

$$(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]) \quad (25.10)$$

Selon que l'exposant $q - d$ soit égal à 0, $2^8 - 1 = 255$ ou autre chose, les règles d'interprétation sont différentes. Il y a donc trois cas.

Exposant q générique[277] Si $q \neq 0$ et $q \neq 255$ alors le nombre est **normalisée**. La règle de lecture est alors

$$\text{sp}(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]) = (-1)^s \left(1 + \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}\right) 2^{q-127}. \quad (25.11)$$

Exposant q égal à 0 Le nombre est dit **dénormalisé** et la règle de lecture est

$$\text{sp}(s, q, [a_1, \dots, a_{23}]) = (-1)^s 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} a_j 2^{-j}. \quad (25.12)$$

Exposant q égal à 255 La règle de lecture est alors au cas pas cas ou à peu près.

- (1) $\text{sp}(s, q = 255, a = 0) = +\infty$.
- (2) $\text{sp}(s, q = 255, a \neq 0) = \text{NaN}$.

Vous pouvez jouer avec la simple précision dans [278].

Exemple 25.9(Plus petit normalisé)

Pour faire un nombre normalisé, il faut au minimum $q = 1$. En prenant $a_j = 0$ nous obtenons le plus petit nombre normalisé possible en simple précision. La formule (25.11) donne

$$\text{sp}(1, q = 1, a = 0) = 2^{1-127} = 2^{-126} \simeq 1.17549435082229 \times 10^{-38}. \quad (25.13)$$

△

Exemple 25.10(Plus grand normalisé)

L'exposant q ne peut pas être maximum, sous peine de tomber dans les règles spéciales de $+\infty$ ou NaN. Donc $q = [1111\ 1110] = 2^8 - 2 = 254$. En ce qui concerne la mantisse, il faut la prendre maximale, c'est à dire $a_j = 1$ pour tout j . Nous avons alors le nombre

$$\text{sp}(1, q = 254, a = [1 \dots 1]) = \left(1 + \sum_{j=1}^{23} 2^{-j}\right) 2^{254-127} = \left(1 - \frac{1}{2^{24}}\right) 2^{128} \quad (25.14a)$$

$$= 3.40282346638528859811704183484516925440 \times 10^{38} \quad (25.14b)$$

où nous avons utilisé la somme (6.347) (et Sage pour le dernier calcul).

△

Notons ceci avec Sage :

```

1 SageMath Version 7.0, Release Date: 2016-01-19
2 Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
3 Type "help()" for help.
4
5
6 sage: A=(1- (1/2**24) )*2**(128)
7 sage: type(A)
8 <type 'sage.rings.rational.Rational'>

```

sageSnip003.sage

La précision du nombre donné en (25.14b) aurait été embarrassante si le type avait été un nombre en simple précision. Précision technique : en Python, le type `int` n'a pas de limite supérieure à part la mémoire.

Exemple 25.11 (Plus petit non nul dénormalisé)

Pour être dénormalisé il faut $q = 0$ (ce qui est toutefois assez logique si nous voulons un petit nombre), et pour ne pas être nul, il faut une mantisse non nulle. Donc $a = [0 \dots 01]$. La formule (25.12) donne alors

$$\text{sp}(s = 0, q = 0, a = [0 \dots 01]) = 2^{-126} 2^{-23} = 2^{-149} \simeq 1.40129846432482 \times 10^{-45}. \quad (25.15)$$

△

Exemple 25.12 (Plus grand dénormalisé)

Pour être dénormalisé il faut toujours $q = 0$, mais cette fois nous prenons la plus grande mantisse possible :

$$\text{sp}(s = 0, q = 0, a = [1 \dots 1]) = 2^{-126} \sum_{j=1}^{23} 2^{-j} = 2^{-216} (1 - 2^{-23}) = 1.17549421069244 \times 10^{-38} \quad (25.16)$$

△

Notons ceci avec Sage :

```

1 sage: B=2**(-126)*(1-2**(-23))
2 sage: A=2**(-126)
3 sage: n(A-B)
4 1.40129846432482e-45

```

sageSnip004.sage

Vu que $2^{-23} \simeq 1.2 \times 10^{-7}$, approximer la parenthèse par 1 donne une faute sur la septième décimale, ce qui est visible en simple précision.

25.2 Problèmes pour écrire des nombres

Définition 25.13.

L'erreur relative commise en remplaçant un nombre réel x par une valeur approchée $\hat{x}$ est définie par

$$\epsilon_x := \left| \frac{x - \hat{x}}{x} \right|. \quad (25.17)$$

L'erreur relative n'est pas influencée par l'ordre de grandeur de x . En effet, l'ordre de grandeur de $\hat{x}$ est certainement la même que celle de x , dans la majorité des cas sans problèmes. Du coup si $x' = 200x$ alors $\hat{x}' \simeq 200\hat{x}$ et le 200 se simplifie.

Le nombre de chiffres significatifs correct dans l'approximation est donné par $-\log_{10}(\epsilon_x)$. La partie entière de ce nombre est le nombre de chiffres tout à fait exacts et la partie décimale donne une idée sur le fait que le chiffre suivant est plus ou moins bien.

Remarque 25.14.

Si nous voulons donner $x \in \mathbb{R}$ à un ordinateur, nous sommes soumis à deux erreurs :

- (1) D'abord, vu que nous ne pouvons pas taper sur le clavier toutes les décimales de x , nous faisons une **erreur de troncature**.
- (2) L'ordinateur devant convertir cela en base deux, il commet une seconde erreur, dite **erreur d'assignation**.

25.2.1 Troncature : la base

Supposons que nous voulions écrire le nombre (écrit ici en base 10)

$$0.4567894251 \quad (25.18)$$

de façon plus facile à lire, on peut demander de ne laisser que t chiffres significatifs. Disons $t = 3$.

Technique de troncature On garde 3 chiffres significatifs : 0.456. Facile.

Technique d'arrondi Vu que le premier qu'on supprime est un 7, le dernier qu'on garde est majoré de 1 : on écrit 0.457.

Que faire si le premier chiffre rejeté est un 5 ? En première approximation, nous pouvons prendre la règle suivante : si le premier chiffre rejeté est un 5, il faut augmenter de 1 de dernier chiffre gardé parce qu'il y a presque certainement encore un chiffre non nul derrière.

Remarque 25.15.

Les ordinateurs travaillent tous en mode d'arrondi.

Exemple 25.16

Si on doit entrer le nombre 0.38358546 dans un ordinateur qui ne garde que 3 chiffres significatifs, il faut taper 0.384 au clavier (erreur classique dans les exercices). $\triangle$

25.2.2 Troncature : le drift

Soit une machine ne pouvant retenir que 3 chiffres significatifs et effectuant les arrondis vers le haut lorsque le chiffre à éliminer est un 5. Nous notons $\oplus$ et $\ominus$ les opérations d'addition et soustraction avec arrondis[279]. Les égalités comprenant plus de trois chiffres significatifs sont des égalités au sens de la machine. Nous écrirons donc sans états d'âme :

$$1 \oplus 0.555 = 1.555 = 1.56. \quad (25.19)$$

Considérons la suite numérique

$$\begin{cases} x_0 = 1.00 \\ x_n = (x_{n-1} \ominus y) \oplus y \end{cases} \quad (25.20a)$$

$$(25.20b)$$

avec $y = -0.555$.

Nous avons

$$x_1 = (1 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 1.56 \ominus 0.555 = 1.005 = 1.01 \quad (25.21)$$

et ensuite

$$x_2 = (1.01 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 1.565 \ominus 0.555 = 1.57 \ominus 0.555 = 1.015 = 1.02. \quad (25.22)$$

Et ainsi de suite. La suite est donc croissante alors que la définition nous donnerait envie d'avoir $x_n = x_0$ pour tout n .

Remarque 25.17.

En réalité, cette suite se stabilise à $x_n = 10$ pour tout n à partir de $n = 845$. En effet,

$$(10 \oplus 0.555) \ominus 0.555 = 10.555 \ominus 0.555 = 10.6 \ominus 0.555 = 10.045 = 10. \quad (25.23)$$

Le fait est qu'à ce moment, l'erreur de troncature est assez loin dans les décimales pour que le premier chiffre négligé soit un “0” au lieu d'un “5”.

Notons toutefois que cette stabilité n'est pas là pour nous rassurer parce qu'elle n'en est pas moins complètement fausse.

La règle de troncature adoptée dans Sage est d'arrondir au nombre pair le plus proche lorsque le premier nombre à négliger est un 5. Donc 12.5 s'arrondit à 12 plutôt que 13.

Exemple 25.18

Soient les expressions (algébriquement égales) :

$$(1) \quad A = x(x + 1)$$

$$(2) \quad B = x^2 + x$$

Nous savons que

$$x = \text{fl}(x) = 10^{-30} \quad (25.24)$$

et

$$1 = \text{fl}(1) \quad (25.25)$$

parce que pour 1 et 10^{-30} , il n'y a pas d'erreurs d'assignation.

En précision simple, $10^{-30} + 1 = 1$ parce qu'en précision simple, il n'y a que 7 ou 8 chiffres significatifs¹.

Nous avons $A = 10^{-30}$, mais x^2 donne un **underflow** parce que 10^{-60} ne peut pas être représenté en précision simple. En pratique, beaucoup de logiciels en font 0. Dans ce cas, en réalité B donne effectivement 10^{-30} après avoir fait $x^2 + x = 0 + x = 10^{-30}$. $\triangle$

25.2.3 Quelques bonnes règles

- (1) Si on a plusieurs nombres à additionner ou soustraire, il vaut mieux commencer par sommer ou soustraire ceux dont on sait qu'ils ont le même ordre de grandeur. Il n'y a donc pas tout à fait «associativité» des erreurs.
- (2) Les opérations délicates sont l'addition et la soustraction. La multiplication et la division sont sans dangers, à part l'erreur de dépassement du maximum. Dans une multiplication, on perd au pire quelques chiffres significatifs, mais certainement les derniers, pas les premiers.

25.3 Erreur de “cancellation”

Lorsque deux nombres sont de même ordre de grandeur, avec plusieurs nombres significatifs identiques. La cancellation est le fait que, suite à la soustraction, tous les chiffres significatifs ou presque se sont simplifiés et qu'il ne reste plus que des chiffres non significatifs.

Exemple 25.19([280])

Sur une machine ne gardant que 4 chiffres significatifs, faire

$$0.5678 \times 10^6 - 0.5677 \times 10^6 = 0.0001 \times 10^6 = 0.1000 \times 10^3. \quad (25.26)$$

Le fait est que les trois derniers zéros ne sont pas significatifs, mais maintenant la machine nous fait croire qu'ils le sont.

1. Erreur de « relation normale ».

Une autre façon de voir ce problème est d'imaginer qu'il faille faire la différence entre $0.5678\,289798 \times 10^6$ et $0.5677\,3136907$ sur cette machine. Certes la machine nous autorise à avoir 4 chiffres significatifs, donc au moment d'entrer les nombres nous perdons un beau paquet de chiffres. Mais au moment de faire la différence, nous perdons (presque) tout le reste. Donc là où nous pouvions espérer avoir 4 chiffres significatifs de la différence, nous n'en avons que 1. Les trois derniers zéros de la réponse (0.1000×10^3) sont faux. $\triangle$

Exemple 25.20

Soit à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Solution :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (25.27)$$

Supposons que $|4ac| \ll b^2$ avec tout de même pas tellement petit qu'on se perd dans la précision. Bref, on suppose que seules quelques dernières décimales de $b^2 - 4ac$ sont différentes de zéro.

On a :

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\tilde{b}} = |\tilde{b}| \quad (25.28a)$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (25.28b)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (25.28c)$$

Si $b > 0$, nous avons une erreur de cancellation dans x_2 parce qu'on fait la différence entre deux nombres presque égaux. Donc x_2 mal calculé. Par contre x_1 est bien calculé.

Si par contre $b < 0$, c'est le contraire.

Avec $a = 10^{-3}$, $b = 0.8$, $c = -1.2 \times 10^{-5}$. À la main nous obtenons : $x_1 = -800$, $x_2 = 1.5 \times 10^{-5}$, et un ordinateur se tromperait ...

```

1 SageMath Version 7.0, Release Date: 2016-01-19
2 Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
3 Type "help()" for help.
4
5
6 sage: f(x)=10**(-3)*x**2+0.8*x-1.2*10**(-5)
7 sage: solve(f(x)==0,x)
8 [x == -1/50*sqrt(400000030) - 400, x == 1/50*sqrt(400000030) - 400]
9 sage: numerical_approx(-1/50*sqrt(400000030))
10 -400.000015000000
11 sage: numerical_approx( 1/50*sqrt(400000030) - 400 )
12 0.0000149999996779115

```

sageSnip001.sage

Donc Sage ne tombe pas dans le piège. $\triangle$

Comment résoudre ce problème ? Ou, autre façon de poser la question : comment Sage a fait pour résoudre le problème ?

Utilisons les relations coefficients-racines :

$$x_1 + x_2 = -b/a \quad (25.29a)$$

$$x_1 x_2 = c/a \quad (25.29b)$$

La première lie les deux racines par des opérations de addition et soustractions, et donc n'est pas intéressantes. La seconde est bien. Si nous connaissons x_1 , nous calculons

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}. \quad (25.30)$$

Quitte à redéfinir x_1 et x_2 , la solution bien calculée est :

$$x_1 = \frac{-b - \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (25.31)$$

Exemple 25.21

Nous considérons :

$$f(x) = \cos(x + \delta) - \cos(x). \quad (25.32)$$

Cela a une erreur de cancellation lorsque $|\delta| \ll |x|$. On élimine l'erreur de cancellation par

$$f(x) = -2 \sin(\delta/2) \sin\left(x + \frac{\delta}{2}\right). \quad (25.33)$$

Problèmes et choses à faire

Pourquoi la condition pour avoir l'erreur est $\delta \ll x$ et non simplement $\delta \ll 1$?

△

Exemple 25.22

Pour

$$f(x) = \sqrt{x + \delta} - \sqrt{x}. \quad (25.34)$$

On fait la coup du binôme conjugué :

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{x + \delta} + \sqrt{x}}. \quad (25.35)$$

Plus d'erreur de cancellation, vu qu'au dénominateur nous avons une somme de deux positifs. △

Les erreurs de cancellation ne se résolvent pas en augmentant la précision des nombres donnés.

25.3.1 Erreur d'absorption

L'addition d'un nombre avec un nombre très différent peut faire perdre de l'information sur le plus petit. Par exemple avec 4 chiffres significatifs,

$$0.5678 \oplus 0.0001237 = 0.5679 \quad (25.36)$$

où nous avons perdu presque toute l'information du petit nombre.

Une situation particulièrement ennuyeuse est celle où justement c'est le petit nombre qui nous intéresse parce que le grand est censé se simplifier :

$$(0.0001327 \oplus 0.5678) \ominus 0.5678 = 0.5679 \ominus 0.5678 = 0.0001 \quad (25.37)$$

qui ne possède qu'un seul chiffre significatif correct alors que voyant le calcul, la réponse aurait pu être trouvée.

Moralité : si certains manipulations algébrique peuvent faire apparaître des simplifications avant de passer le calcul à la machine, il est bon de les effectuer.

25.3.2 Calcul d'une dérivée

Pour calculer la dérivée de f en a , il est loisible d'utiliser la formule

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (25.38)$$

Le numérateur est alors sujet à une erreur d'absorption dans le calcul de $a+h$ et ensuite une erreur de cancellation dans le calcul de la différence.

En utilisant la formule

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad (25.39)$$

nous pouvons espérer avoir une erreur de cancellation plus petite.

25.4 Conditionnement et stabilité

Définition 25.23.

Soit F une fonction à valeurs réelles définie sur $X \times D$ où X et D sont des espaces vectoriels réels normés. Le problème de la recherche des solutions de

$$F(x, d) = 0 \quad (25.40)$$

est dit **stable** autour de $d_0 \in D$ si

- (1) la solution $x = x(d)$ existe et est unique pour tout d ;
- (2) Pour tout $\eta > 0$, et pour tout d_0 , il existe un nombre $K > 0$ tel que $\|d - d_0\| < \eta$ entraîne $\|x(d) - x(d_0)\| \leq K \|d - d_0\|$.

La seconde condition est le fait que x soit Lipschitz² sur un voisinage de d_0 .

Exemple 25.24 (Stabilité de la différence)

Prenons le problème qui consiste à calculer la différence entre deux nombres : $x = a - b$. Cela se traduit par

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - a + b. \end{aligned} \quad (25.41)$$

Nous avons :

$$|x(a, b) - x(a', b')| = |a - b - a' + b'| \quad (25.42a)$$

$$\leq |a - a'| + |b - b'| \quad (25.42b)$$

$$= \|(a, b) - (a', b')\|_1 \quad (25.42c)$$

où nous avons utilisé la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par la proposition 6.138 sur les équivalences de normes, le nombre $K = \sqrt{2}$ fonctionne pour toute valeurs de η .

La problème de la différence est donc un problème stable. $\triangle$

Exemple 25.25 (Stabilité de la multiplication)

Si a est fixé, le problème de calculer ab (b est la donnée) est stable. En effet ce problème est donné par la fonction $F(x, b) = x - ab$, dont la solution est $x(b) = ab$. Nous avons donc

$$|x(b) - x(b')| = |ab - ab'| = |a||b - b'|. \quad (25.43)$$

La constante de Lipschitz de ce problème est donc $|a|$. $\triangle$

2. Définition 11.189.

Définition 25.26.

Le nombre

$$K_{abs}(d_0, \eta) := \sup_{d \text{ tel que } |d_0 - d| < \eta} \frac{\|x(d) - x(d_0)\|_X}{\|d - d_0\|_D} \quad (25.44)$$

est appelé le **conditionnement absolu** du problème autour de d_0 .

Soit $F(x, d) = 0$ un problème stable de conditionnement absolu $K_{abs}(d, \eta)$. Le conditionnement relatif est défini par

$$K_{rel}(d, \eta) := K_{abs}(d, \eta) \frac{\|d\|_D}{\|x(d)\|_X}. \quad (25.45)$$

Le problème est dit **bien conditionné** près de d si $K_{rel}(d, \eta)$ est petit.

Exemple 25.27(Mauvais conditionnement de la différence)

Reprenons le problème de la différence, mais en fixant a . Nous avons donc $x(b) = a - b$ et le conditionnement absolu est

$$\sup \frac{|x(b) - x(b_0)|}{|b - b_0|} = 1 \quad (25.46)$$

Le conditionnement relatif est :

$$K_{rel}(b_0, \eta) = \frac{|b|}{|a - b|}. \quad (25.47)$$

Et donc le problème est mal conditionné autour de a .

Autrement dit, si a' est un nombre proche de a , calculer la différence $a - a'$ est un problème mal conditionné. $\triangle$

Exemple 25.28(Bon conditionnement de la multiplication)

Pour le problème $F(x, b) = x - ab$ nous avons

$$K_{abs} = \sup_{b'} \frac{|ab - ab'|}{|b - b'|} = |a|. \quad (25.48)$$

Et aussi

$$K_{rel} = a \frac{|b|}{|ab|} = 1. \quad (25.49)$$

Le conditionnement relatif du problème de la multiplication est donc toujours 1. Il est donc un toujours un problème bien conditionné. $\triangle$

Ne pas confondre :

Le conditionnement provient du problème lui-même.

La stabilité provient de l'algorithme de résolution.

Exemple 25.29(Un problème mal conditionné)

Le système

$$\begin{cases} 2.1x + 3.5y = 8 \\ 4.19x + 7.0y = 15 \end{cases} \quad (25.50a)$$

$$(25.50b)$$

Solution : $x = 100$, $y = -57.714285 \dots$ (périodique)

Perturbons : nous remplaçons 4.19 par 4.192. L'erreur relative est : 4.77×10^{-4} .

Solution : $\bar{x} = 125$, $\bar{y} = -72.714285 \dots$, avec donc erreur relative de 0.26. Autrement dit : l'erreur relative sur la solution est grande même avec une petite erreur relative sur la donnée.

C'est un problème mal conditionné.

Le fait est que c'est une intersection de deux droites presque parallèles. Donc effectivement une petite perturbation d'une des deux droites donne une grande perturbation du point d'intersection.

Le fait est qu'un ordinateur effectue *toujours* une perturbation, au moins de l'ordre 10^{-16} pour ne fut-ce que représenter les nombres. C'est à dire une perturbation sur les six nombres définissant le système. Il n'y a donc pas d'espoir d'obtenir un algorithme donnant une bonne réponse. $\triangle$

Un résultat pratique pour étudier le conditionnement d'un problème est le suivant.

Corollaire 25.30.

Soit $x = x(d)$ un problème stable. Supposons $\mathbb{D}$ de dimension finie, supposons que U est ouvert dans $\mathbb{D}$. Supposons encore $x: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en d_0 . Alors quand η est petit, on a

$$K_{abs}^\eta(d_0) \sim \|\nabla x(d_0)\|. \quad (25.51)$$

Lemme 25.31.

Tout problème de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^1(\mathbb{R})$ est stable.

Démonstration. Il faut démontrer qu'une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifie automatiquement la condition (2) de la définition de la stabilité. Pour cela, remarquons qu'une fonction C^1 possède une dérivée continue, et donc bornée sur tout compact³

Prenons $\eta > 0$ et $d_0 \in \mathbb{R}$ et puis un d tel que $|d - d_0| < \eta$. Par le théorème des bornes atteintes, la fonction x' est bornée sur l'intervalle $[d_0 - \eta, d_0 + \eta]$. Appelons K un majorant de x' sur cet intervalle. La fonction

$$f(d) = x(d_0) + K|d - d_0| \quad (25.52)$$

majoré $x(d)$, et donc on a

$$|x(d) - x(d_0)| \leq K|d - d_0|. \quad (25.53)$$

Attention : vérifier si ce raisonnement est correct avec $d_0 > d$, et adapter au besoin. $\square$

Exemple 25.32

Un exemple de problème stable de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$.

La fonction

$$x(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (25.54)$$

est continue, mais pas C^1 (non dérivable en $x = 0$). La dérivée est partout bornée par 1, et donc le problème est stable.

Un autre exemple très classique serait de prendre $x(d) = |d|$. Dans ce cas, on peut prendre n'importe quel η et $K = 1$. Le calcul est que

$$|x(d) - x(d_0)| < K|d - d_0| \quad (25.55a)$$

$$||d| - |d_0|| < |d - d_0|. \quad (25.55b)$$

Cette dernière inéquation est correcte, comme on peut le voir en mettant au carré les deux membres.

$\triangle$

Exemple 25.33

Un exemple de problème instable de la forme $x = x(d)$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $x \in C^0(\mathbb{R})$.

Un exemple assez classique de fonction dont la dérivée n'est pas bornée sans pour autant que la fonction aie un comportement immoral⁴ est $x \mapsto \sqrt{x}$. Afin d'avoir une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, nous regardons la fonction

$$x(d) = \sqrt{|d|}. \quad (25.56)$$

3. Un compact est un ensemble fermé et borné, typiquement un intervalle du type $[a, b]$.

4. Penser à $x \mapsto x \sin(1/x)$.

Si nous considérons maintenant $d_0 = 0$ et n'importe quel η , nous avons

$$\frac{|x(d) - x(d_0)|}{|d - d_0|} = \frac{\sqrt{d}}{d} = \frac{1}{\sqrt{d}}. \quad (25.57)$$

Il n'est pas possible de trouver un K qui majore ce rapport. Le problème est donc mal conditionné.

Attention : dans ce calcul nous avons supposé $d > 0$. Pensez à adapter au cas $d < 0$. $\triangle$

Exemple 25.34(Problème bien conditionné avec algorithme instable)

Soit à calculer

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx \quad (25.58)$$

avec $n \geq 0$. Par partie, nous obtenons :

$$I_n = 1 - nI_{n-1}. \quad (25.59)$$

D'autre part, $I_0 = \frac{e-1}{e}$, $I_1 = \frac{1}{e}$. Puis par récurrence, c'est tout en main.

Du côté de l'ordinateur, nous lui donnons forcément une approximation de I_1 , parce que nous lui donnons une approximation de e . Soit l'erreur ϵ_1 sur I_1 .

Sans démonstration :

Lemme 25.35.

Nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Mais numériquement, il n'est pas possible de rester longtemps sous ϵ_1 parce que nous n'espérons pas avoir une erreur plus petite que ça. Donc à partir du moment où $I_n < \epsilon_1$, les valeurs sont toutes complètement fausses. Cela est le mieux que l'on puisse espérer. Mais la réalité est pire.

En réalité, en lançant le calcul sur un ordinateur, les valeurs sont même croissantes avec n à partir d'un certain moment.

On peut étudier l'erreur et montrer que l'erreur est donnée par :

$$\epsilon_n = (-1)^{n-1} n! \epsilon_1. \quad (25.60)$$

Mais comme la factorielle est tellement forte que c'est sans espoir d'aller loin en essayant très fort de donner une petite erreur sur ϵ_1 .

$\triangle$

Il existe heureusement un algorithme stable pour cette intégrale. La formule est :

$$I_{n-1} = \frac{1}{n} (1 - I_n). \quad (25.61)$$

Si nous savons un I_N avec N grand, cette formule donne les I_i avec $i = N, N-1, \dots, 2$. Posons donc $I_N = a \in \mathbb{R}$ n'importe comment. Donc ϵ_N est grand. Mais il se trouve que l'erreur sur ϵ_1 est donnée par

$$\epsilon_1 = \frac{(-1)^{N-1}}{N!} \epsilon_N. \quad (25.62)$$

Donc même en prenant vraiment n'importe quoi pour I_N , nous obtenons de bonnes approximations pour I_i avec les petits i . Même avec $I_{20} = 1000$ (qui est complètement faux), nous trouvons énormément de chiffres significatifs corrects pour I_1 .

25.4.1 Comment choisir et penser le K ?

La formule (25.44) contient une formule qui ressemble étrangement à la dérivée. La stabilité d'un problème est très liée à la dérivée de F . La stabilité et la dérivée ne sont pas les mêmes choses,

mais il n'est pas mauvais de penser au K de la stabilité comme la dérivée. Ou plus précisément : le supremum de la dérivée.

Un fil conducteur du lemme 25.31 et des exemples 25.32, 25.33 est que l'on a un K qui fonctionne lorsque la dérivée est bornée sur l'intervalle $]d_0 - \eta, d_0 + \eta[$. Dans le cas où ce supremum existe, le prendre en guise de K fonctionne souvent.

Il faut cependant parfois faire acte d'imagination. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Il n'empêche que $K = 1$ fait fonctionner la définition de la stabilité. Remarquez que $K = 1$ est le supremum de la dérivée là où elle existe.

À partir du moment où c'est clair que le K est le supremum de la dérivée, on comprend pourquoi c'est le gradient qui arrive dans le corollaire 25.30. En effet, le gradient indique la direction de plus grande pente. C'est donc bien dans cette direction qu'il faut chercher la «plus grande dérivée».

Proposition 25.36.

Pour le problème stable $x = x(d)$ avec $x \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a

$$K_{abs}(d) \sim |dx_d|_{op} \quad (25.63)$$

où dx_d désigne la différentielle de x en d .

25.5 Conditionnement d'une matrice

Soit le système d'équations linéaires $Au = b$ avec la matrice inversible A ainsi que le système perturbé $(A + \Delta A)u' = (b + \Delta b)$. Nous notons $\Delta u = u' - u$ et nous voudrions pouvoir dire des choses de l'erreur relative $\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|}$.

Exemple 25.37([281])

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad (25.64)$$

et $b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$. La solution de $Au = b$ est $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Si nous conservons la même matrice mais nous considérons $b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. La solution devient $u' = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix}$

En norme $\|\cdot\|_\infty$ nous avons⁵

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{0.1}{32} = 0.003125 \quad (25.65)$$

et

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} = \frac{1.7}{6} = 0.28. \quad (25.66)$$

Cela montre environ amplification d'un facteur 100 entre l'erreur sur b et l'erreur sur la solution.

△

Définition 25.38.

Le **conditionnement** de la matrice inversible $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ est le nombre positif

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (25.67)$$

Cette dénomination sera justifié par le corollaire 25.44 parce qu'il est évident que le conditionnement d'une matrice est lié au conditionnement du problème de résolution d'un système linéaire.

5. La proposition 6.138(3) montre que si nous voulions des estimations en norme $\|\cdot\|_2$, il y aurait au maximum un facteur $\sqrt{2}$ par-ci par là.

Remarque 25.39.

Le conditionnement dépend de la norme choisie, mais cette dépendance est contrôlée par la proposition 6.138 qui nous indique que si le conditionnement d'une matrice est grand dans une norme, il sera grand dans une autre norme.

D'autre part, lorsque nous écrirons $\|A\|$ nous supposons toujours que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre⁶ et donc que nous avons toujours

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \quad (25.68)$$

De plus nous supposons toujours avoir une norme subordonnée à une norme sur l'espace $\mathbb{C}^n$, de telle sorte à avoir

$$\|Au\| \leq \|A\|\|u\| \quad (25.69)$$

pour tout $u \in \mathbb{C}^n$. Voir aussi la proposition 6.88.

Proposition 25.40 ([281]).

Si A est une matrice inversible et si $\alpha \in \mathbb{C}$ nous avons :

- (1) $\text{Cond}(A) \geq 1$
- (2) $\text{Cond}(A) = \text{Cond}(A^{-1})$
- (3) $\text{Cond}(\alpha A) = \text{Cond}(A)$.

Si $Q \in O(n)$ alors

- (1) Nous avons $\text{Cond}_2(Q) = 1$ où Cond_2 est le conditionnement pour la norme $\|\cdot\|_2$.
- (2) Nous avons aussi

$$\text{Cond}_2(A) = \text{Cond}_2(AQ) = \text{Cond}_2(QA). \quad (25.70)$$

Démonstration. Nous savons que $\text{Cond}(\mathbb{1}) = 1$ et donc

$$1 = \|\mathbb{1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| \quad (25.71)$$

parce que la norme utilisée est une norme matricielle.

Les deux autres formules sont évidentes à partir du fait que la définition du conditionnement de A est symétrique entre A et A^{-1} .

En ce qui concerne les formules relatives à la matrice orthogonale Q nous savons par la proposition 6.61(3) qu'une matrice orthogonale est une bijection de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$. Par conséquent

$$\|AQ\| = \sup_{x \text{ tel que } \|x\|=1} \|AQx\| = \sup_{Q^{-1}x \text{ tel que } \|x\|=1} \|AQQ^{-1}x\| = \|A\|. \quad (25.72)$$

Donc $\|AQ\| = \|A\|$. Les assertions s'ensuivent immédiatement en remarquant que Q^{-1} est également orthogonale. $\square$

Lemme 25.41 ([281]).

Si A est une matrice carré et inversible,

$$\text{Spec}(A^*A) = \text{Spec}(AA^*) \quad (25.73)$$

Démonstration. Nous allons montrer l'égalité des polynômes caractéristiques. D'abord une simple multiplication montre que

$$(A^*A - \lambda\mathbb{1})A^{-1} = A^{-1}(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \quad (25.74)$$

Nous prenons le déterminant de cette égalité en utilisant les propriétés 6.49(1) et (3) :

$$\det(A^*A - \lambda\mathbb{1}) \det(A^{-1}) = \det(A^{-1}) \det(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \quad (25.75)$$

En simplifiant par $\det(A^{-1})$ (qui est non nul parce que A est inversible) nous obtenons l'égalité des polynômes caractéristiques et donc l'égalité des spectres. $\square$

6. Définition 6.82.

Soit une matrice inversible $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$. La matrice A^*A est hermitienne⁷ et le théorème 6.286 nous assure que ses valeurs propres sont réelles. Par la remarque 6.287, ses valeurs propres sont même positives.

Proposition 25.42 ([281]).

Soit une matrice inversible $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ les valeurs propres de A^*A . Alors nous avons la formule

$$\text{Cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}. \quad (25.76)$$

Démonstration. Par le théorème 6.91, la norme de A est liée au rayon spectral de A^*A par

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\mu_n}. \quad (25.77)$$

Vu que le spectre de AA^* est le même que celui de A^*A (lemme 25.41) nous avons aussi

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^*A^{-1})} = \sqrt{\rho((A^*A)^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \quad (25.78)$$

parce que la plus grande valeur propre de $(A^*A)^{-1}$ est l'inverse de la plus petite de A^*A .

Ces deux calculs étant,

$$\text{Cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\mu_n}{\mu_1}}. \quad (25.79)$$

□

25.5.1 Perturbation du vecteur

Proposition 25.43 (Système linéaire : perturbation du vecteur[281]).

Soit une matrice inversible A et les systèmes d'équations linéaires

$$Au = b \quad (25.80a)$$

$$Au' = b'. \quad (25.80b)$$

En notant $\Delta u = u' - u$ et $\Delta b = b' - b$ nous avons

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \quad (25.81)$$

Démonstration. En soustrayant les équations (25.80) nous avons $\Delta b = A\Delta u$, et donc $\Delta u = A^{-1}\Delta b$. D'une part nous avons alors

$$\|\Delta u\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|. \quad (25.82)$$

Et d'autre part, $\|b\| \leq \|A\| \|u\|$, ce qui donne

$$\frac{\|b\|}{\|A\|} \leq \|u\|. \quad (25.83)$$

En mettant les deux ensemble,

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta b\|}{\|b\|} \|A\| = \text{Cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \quad (25.84)$$

□

Le corollaire suivant justifie le nom «conditionnement» au conditionnement d'une matrice.

7. Définition 6.275.

Corollaire 25.44.

Soit $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ fixée et le problème de résoudre $Au = b$, c'est à dire la fonction

$$F(u, b) = Au - b. \quad (25.85)$$

(1) Ce problème est stable pour toute valeur de b .

(2) Nous avons une majoration pour le conditionnement relatif⁸ :

$$K_{rel}(\eta, b_0) \leq \text{Cond}(A). \quad (25.86)$$

Démonstration. **Stabilité** Vu que A est inversible, il existe une solution unique à tout système de la forme $Au = b'$. De plus $u(b) = A^{-1}b$, donc

$$\|u(b) - u(b_0)\| = \|A^{-1}(b - b_0)\| \leq \|A^{-1}\| \|b - b_0\|, \quad (25.87)$$

de telle sorte que la condition 25.23(2) fonctionne avec $K = \|A^{-1}\|$.

Conditionnement En partant de la définition 25.45, et en utilisant la majoration de la proposition 25.43 sous la forme

$$\|u(b) - u(b_0)\| \leq \text{Cond}(A) \|u(b_0)\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}, \quad (25.88)$$

nous obtenons :

$$K_{rel}(b_0, \eta) = K_{abs}(b_0, \eta) \frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} \quad (25.89a)$$

$$= \sup_{\|b-b_0\| \leq \eta} \frac{\|u(b) - u(b_0)\|}{\|b - b_0\|} \frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} \leq \sup_b \text{Cond}(A) \frac{\|u(b_0)\|}{\|b_0\|} \|\Delta b\| \frac{1}{\|b - b_0\|} \frac{\|b_0\|}{\|u(b_0)\|} \quad (25.89b)$$

$$= \text{Cond}(A). \quad (25.89c)$$

□

Remarque 25.45.

La notion de conditionnement relatif dépend aussi de la norme choisie. Dans la formule (25.86) il faut prendre le conditionnement $\text{Cond}(A)$ pour la norme dans laquelle le K_{rel} est écrit. Encore une fois, toutes les normes étant équivalentes, cette majoration est à constante près bonne pour toutes les normes. Si la dimension est très grande, cette constante peut par contre être grande.

25.5.2 Perturbation de la matrice

Proposition 25.46 (Système linéaire : perturbation de la matrice[281]).

Soient les systèmes linéaires

$$Au = b \quad (25.90a)$$

$$A'u' = b \quad (25.90b)$$

avec A et A' inversibles. Nous notons $\Delta A = A' - A$. Alors

(1)

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u'\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \quad (25.91)$$

(2)

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} (1 + \alpha(\|\Delta A\|)) \quad (25.92)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$.

8. Si vous doutez de la norme à prendre, lisez la remarque 25.45

Démonstration. D'abord nous avons

$$0 = Au' - Au \quad (25.93a)$$

$$= (A' - A)u' - Au' - Au \quad (25.93b)$$

$$= \Delta Au' + A\Delta u. \quad (25.93c)$$

Par conséquent, $\Delta u = -A^{-1}(\Delta A)u'$ et

$$\|\Delta u\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|u'\|. \quad (25.94)$$

Donc

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u'\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \text{Cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \quad (25.95)$$

Cela est (1).

Pour l'autre inégalité, nous avons $A' = A + \Delta A$ et donc

$$\|A'^{-1}\| = \|(A + \Delta A)^{-1}\| \quad (25.96)$$

Nous repartons alors de (25.94) en changeant le rôle de A et A' (et donc aussi de u et u'). Ce changement étant, $\|\Delta u\|$ et $\|\Delta A\|$ ne changent pas. Nous avons :

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \|A'^{-1}\| \|\Delta A\| \quad (25.97a)$$

$$= \|(A + \Delta A)^{-1}\| \|\Delta A\| \frac{\text{Cond}(A)}{\|A\| \|A^{-1}\|} \quad (25.97b)$$

$$= \frac{\|(A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \text{Cond}(A). \quad (25.97c)$$

Il reste à voir que

$$\lim_{\|\Delta A\| \rightarrow 0} \frac{\|(A + \Delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = 1, \quad (25.98)$$

ou autrement dit que

$$\lim_{A \rightarrow A'} \frac{\|A'^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = 1 \quad (25.99)$$

où la limite est celle dans $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Par définition de la topologie, la norme est continue (quelle qu'elle soit par l'équivalence de norme 6.139). Par le théorème 6.234, l'application $A \mapsto A^{-1}$ est également continue et commute donc avec la limite. Nous avons donc

$$\lim_{A' \rightarrow A} \|A'^{-1}\| = \|(\lim_{A' \rightarrow A} A')^{-1}\| = \|A^{-1}\|. \quad (25.100)$$

Donc la limite du quotient (25.99) est bien 1. $\square$

25.6 Un peu de points fixes

25.6.1 Choix de la fonction à point fixe

Pour l'équation $f(x) = 0$, il existe une infinité de fonctions g pour lesquelles l'équation est équivalente à $x = g(x)$.

Exemple : $f(x) = x^2 - 2 - \ln(x)$, nous pouvons faire

(1) $x = x^2 - 2 - \ln(x) + x$

(2) Poser $x^2 = 2 + \ln(x)$ et donc

$$x = -\sqrt{2 + \ln(x)} \quad (25.101a)$$

$$x = \sqrt{2 + \ln(x)}. \quad (25.101b)$$

(3) Ou encore

$$x = \frac{2 + \ln(x)}{x} \quad (25.102)$$

où nous savons déjà que $x \neq 0$ parce que $x = 0$ n'est pas dans le domaine de f .

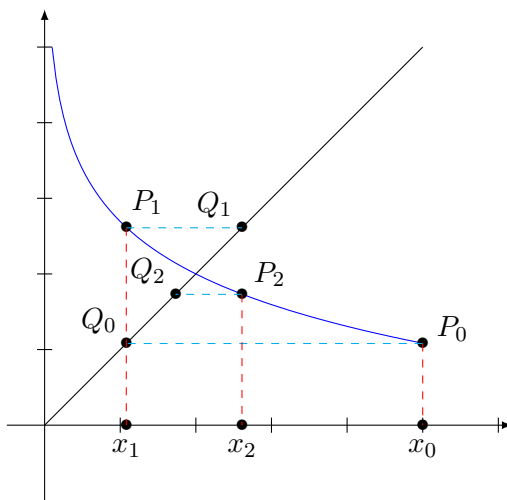
(4) Ou par l'exponentielle :

$$x = e^{x^2-2}. \quad (25.103)$$

Dans tous ces cas nous pouvons construire une suite (x_n) en posant un nombre arbitraire pour x_0 et ensuite la récurrence

$$x_{n+1} = g(x_n). \quad (25.104)$$

Graphiquement, la solution de l'équation est l'intersection entre les courbes $y = x$ et $y = g(x)$. Un petit dessin pour montrer la convergence :



Attention : cette méthode ne converge pas toujours. Parfois elle converge de façon monotone, et parfois pas. Le choix de la fonction g qui fait $x = g(x)$ peut énormément changer la vitesse de convergence.

Théorème 25.47 (Condition suffisante pour existence d'un point fixe).

Une fonction continue $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Théorème 25.48 (Condition suffisante pour l'unicité).

Soit f continue sur $[a, b]$ avec $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Supposons qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ nous ayons $|g'(x)| \leq k$ alors

- (1) La fonction g possède un unique point fixe dans $[a, b]$.
- (2) Pour tout $x_0 \in [a, b]$, tous les termes de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ sont dans $[a, b]$.
- (3) Ladite suite (x_n) converge vers le point fixe.

Théorème 25.49.

Soit f continue sur $[a, b]$ avec $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Supposons

- (1) qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ nous ayons $|g'(x)| \leq k$ et
- (2) g est p fois dérivable sur $[a, b]$.
- (3) $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha)$ et $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ où α est l'unique point fixe.

Alors la suite (x_n) converge avec un ordre p .

Exemple 25.50

Nous reprenons

$$f(x) = x^2 - 2 - \ln(x). \quad (25.105)$$

Et nous voulons résoudre $f(x) = 0$. Graphiquement c'est l'intersection entre $y = x^2 - 2$ et $y = \ln(x)$. Il est vite tracé de savoir qu'il y a deux solutions : $\alpha_1 \in [0, 1]$ et $\alpha_2 \in [\sqrt{2}, 2]$.

Déjà un petit problème : l'intervalle $[0, 1]$ ne va pas parce que f n'y est pas continue. Un petit raffinement d'analyse nous fournit $\alpha_1 \in [e^{-2}, 1]$.

Nous avons au moins les fonctions de points fixes suivantes :

$$g_1(x) = \sqrt{2 + \ln(x)} \quad (25.106a)$$

$$g_2(x) = e^{x^2 - 2}. \quad (25.106b)$$

Pour la première, il y avait un $\pm$ qui a été négligé parce que nous savons que les deux solutions cherchées sont positives. Travaillons avec la première. D'abord

$$g'_1(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2 - \ln(x)}}. \quad (25.107)$$

Nous avons $\lim_{x \rightarrow e^{-2}} g'_1(x) = +\infty$. Il ne sera donc pas possible de trouver $0 < k < 1$ tel que $|g'(x)| \leq k$. Tentons quand même la méthode :

$$x_0 = 0.5 \quad (25.108)$$

Il se fait que cela est plus proche de α_1 que de α_2 . Mais en réalité la suite converge vers α_2 .

Passons à la seconde méthode.

$$g'_2(x) = 2xe^{x^2 - 2}. \quad (25.109)$$

Sur l'intervalle $[e^{-2}, 1]$, g'_2 est croissante et prend toutes ses valeurs dans $[e^{-2}, 1]$. Nous pouvons prouver que

$$|g'_2(x)| \leq 2e^{-1} < 1. \quad (25.110)$$

Donc poser $k = 2e^{-1}$ fait fonctionner la proposition. Donc quel que soit le x_0 pris dans cet intervalle, nous aurons une suite convergente vers un point fixe à l'intérieur de l'intervalle. C'est à dire convergente vers α_1 .

Cela est un exemple de problème pour lequel changer de fonction g change réellement la vie.

$\triangle$

25.6.2 Convergence quadratique

Définition 25.51.

Une suite (x_n) a une convergence **quadratique** vers α si elle converge vers α et si il existe un C tel que pour tout n nous ayons

$$\|x_{n+1} - \alpha\| \leq C\|x_n - \alpha\|^2. \quad (25.111)$$

Il est bien entendu possible de parler de convergence quadratique si la relation (25.111) a lieu seulement à partir d'un certain indice.

Le lemme suivant donne l'importance du choix de point de départ lorsqu'on utilise une méthode itérative dont la convergence est quadratique.

Lemme 25.52.

Soit une suite $x_n \rightarrow \alpha$ de convergence quadratique. Si $\|x_0 - \alpha\| \leq r$ alors

$$\|x_n - \alpha\| \leq \frac{1}{C}(Cr)^{2^n} \quad (25.112)$$

Démonstration. Nous pourrions directement prouver la formule (25.112) par récurrence, mais nous allons la reconstruire un peu. Nous cherchons

$$\|x_n - \alpha\| \leq C^{k(n)} r^{2^n}. \quad (25.113)$$

Nous avons les inégalités

$$\|x_{n+1} - \alpha\| \leq C\|x_n - \alpha\|^2 \quad (25.114a)$$

$$\leq CC^{2k(n)}r^{2^{n+1}} \quad (25.114b)$$

$$= C^{2k(n)+1}r^{2^{n+1}} \quad (25.114c)$$

d'où nous voyons que la fonction k doit vérifier

$$\begin{cases} k(0) = 0 \\ k(n+1) = 2k(n) + 1 \end{cases} \quad (25.115a)$$

$$(25.115b)$$

La première équation est l'hypothèse $\|x_0 - \alpha\| \leq r$ comparée à la formule (25.113). Il est vite vérifié que $k(n) = 2^n - 1$. D'où le résultat. $\square$

Si le point de départ est choisit de façon à avoir $Cr < 1$ alors nous avons là un très bon majorant parce qu'il s'agit d'un majorant convergeant très rapidement vers zéro. Si au contraire $Cr > 1$ alors ce majorant ne sert à rien.

25.53.

Le fait d'avoir une convergence quadratique signifie que le nombre décimales correctes double (environ) à chaque itérations, dans n'importe quelle base. En effet supposons que x_n ait k décimales correctes ; cela signifie que $|x_n - \alpha| \sim 10^{-k}$. Donc

$$|x_{n+1} - \alpha| \lesssim M10^{-2k}. \quad (25.116)$$

Cela est le double de décimales correctes de $|x_n - \alpha|$, moins l'ordre de grandeur de M .

Pour la méthode de bisection, le nombre de décimales augmente de 1 à chaque itération, mais seulement en base 2. En base 10, de façon générique⁹ il faut entre 3 et 4 itérations pour avoir une décimale de plus.

25.54 (Condition d'arrêt[282]).

D'autre part, lorsqu'une méthode a une convergence quadratique, nous avons un test d'arrêt. Pour ce voir, nous avons la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C|x_n - \alpha|^2}{|x_n - \alpha|} = 0. \quad (25.117)$$

Cette limite est alors également valable sans les valeurs absolues et si nous soustrayons $x_n - \alpha$ au numérateur, la limite devient -1 :

$$-1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - \alpha}. \quad (25.118)$$

Ou encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n - \alpha} = 1. \quad (25.119)$$

Cela a pour conséquence que si n est grand,

- (1) x_{n+1} a le même ordre de grandeur que $x_n - \alpha$.
- (2) $x_n - x_{n+1}$ et $x_n - \alpha$ ont le même signe.

Donc si nous voulons une approximation de α avec une erreur ϵ , il suffit d'arrêter le calcul lorsque $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$. Et ce faisant nous savons de plus si l'approximation est par excès ou par défaut.

9. C'est à dire sauf coup de malchance ou coup de chance.

25.6.3 Convergence

Proposition 25.55 (Convergence d'une méthode de point fixe[282]).

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et α un point fixe attractif¹⁰ de g . Soit k tel que $|g'(\alpha)| < k < 1$ et δ tel que $\|g'\|_{B(\alpha, \delta)} < k$.

Alors

- (1) La fonction g est k -contractante¹¹ sur $B(\alpha, \delta)$.
- (2) Nous avons $g(B(\alpha, \delta)) \subset B(\alpha, \delta)$.
- (3) Pour tout $x_0 \in B(\alpha, \delta)$ la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α et

$$|x_n - \alpha| \leq |x_0 - \alpha| k^n. \quad (25.120)$$

Si de plus $g'(\alpha) = 0$ et g est de classe C^2 alors nous avons convergence quadratique (définition 25.51).

Démonstration. Vu que α est un point fixe attractif de g nous pouvons considérer un k tel que $|g'(\alpha)| < k < 1$. Et comme g est de classe C^1 , la fonction g' est continue et donc bornée sur toute boule du type $\overline{B(\alpha, \delta)}$. Soit δ le plus grand nombre tel que $\|g'\|_{\overline{B(\alpha, \delta)}} \leq k$. Nous notons $I = \overline{B(\alpha, \delta)}$ pour cette valeur de δ .

Pour tout $x \in I$ nous avons, en utilisant le théorème des accroissements finis 11.99(2) :

$$|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \quad (25.121a)$$

$$\leq \sup_{t \in I} |g'(t)| |x - \alpha| \quad (25.121b)$$

$$\leq k |x - \alpha| \quad (25.121c)$$

$$< \delta \quad (25.121d)$$

parce que $k < 1$ et $|x - \alpha| \leq \delta$. Par conséquent $g(x) \in B(\alpha, \delta)$. Cela prouve le point (2). Pour le point (1), soient $x, y \in B(\alpha, \delta)$ et

$$|g(x) - g(y)| \leq \sup_{a \in I} |g'(a)| |x - y| \leq k |x - y|. \quad (25.122)$$

Pour le point (3) nous avons $|g(x_n) - \alpha| \leq k |x_n - \alpha|$, c'est à dire

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq k |x_n - \alpha|. \quad (25.123)$$

Le résultat annoncé s'obtient par récurrence sur n .

En ce qui concerne la convergence quadratique, c'est du Taylor. Développons $g(x_n)$ autour de $g(\alpha)$:

$$g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2 \epsilon(x_n - \alpha) \quad (25.124)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$. En posant $C = \frac{1}{2} \sup_{t < \delta} |\epsilon(t)|$ nous avons $|g(x_n) - g(\alpha)| \leq C |x_n - \alpha|^2$, c'est à dire

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|^2. \quad (25.125)$$

□

Ce corollaire est une paraphrase de la proposition 25.55. Il en retient seulement les points intéressants en pratique.

Corollaire 25.56.

Soit α une solution de l'équation $x = g(x)$, avec g continue sur un voisinage de α et dérivable dans l'intérieur. Nous supposons que

$$|g'(\alpha)| < 1. \quad (25.126)$$

Alors il existe un rayon δ tel que si $x_0 \in B(\alpha, \delta)$, la suite (x_n) converge vers α .

10. Définition 16.105.

11. Définition 16.108

Certes cette proposition demande moins d'hypothèses, mais en réalité, il ne donne pas de vrais moyens de choisir un point de départ x_0 . Avec les deux théorèmes précédents, nous pouvons prendre x_0 n'importe où dans $[a, b]$. Le fait est que pour choisir x_0 nous pouvons tracer et donner à la main un x_0 proche de ce qui semble être α . Si ça ne converge pas, il faut donner un x_0 plus proche. La proposition nous assure que si nous jouons bien à choisir x_0 très proche, la suite finira par converger.

Notons que le corollaire 25.56 a encore l'inconvénient de demander de calculer $g'(\alpha)$ alors que α est inconnu. La résolution de l'inéquation $|g'(x)| < 1$ nous donne un certain nombre d'intervalles dans $\mathbb{R}$.

Soient I_n les intervalles solutions de l'inéquation. Si $\alpha \in I_n$ alors la méthode converge. Sinon, c'est pas garanti. En tout cas nous ne devons pas savoir réellement α pour appliquer le théorème. Il suffit de savoir que α est dans un des I_n .

25.7 Méthode de Newton

L'objectif de la méthode de Newton est d'évaluer une racine a de l'équation $f(x) = 0$ lorsque nous avons déjà une approximation x_0 de la racine α .

Définition 25.57.

Le nombre α est une **racine simple** de l'équation $f(x) = 0$ si $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. Le nombre α est une **racine multiple** d'ordre r de $f(x) = 0$ si

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad (25.127)$$

et $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple 25.58

La fonction $x \mapsto x^3$ en $x = 0$ est une racine d'ordre 3. △

25.7.1 «Justification» par la formule par Taylor

Soit une fonction f continue et dérivable sur $[a, b]$. Soit α une racine de f et x_n une de ses approximation. Nous notons l'erreur θ et nous avons $\alpha = x_n + \theta$. Du coup nous avons $f(x_n + \theta) = f(\alpha) = 0$.

Écrivons la série de Taylor du théorème 11.204 autour de x_n : il existe une fonction $\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$ telle que

$$f(\alpha) = f(x_n + \theta) = f(x_n) + \theta f'(x_n) + \frac{\theta^2}{2} \epsilon(\theta). \quad (25.128)$$

Nous isolons le θ du terme d'ordre 1 en nous souvenant que le membre de gauche est nul :

$$\theta = -\frac{f(x_n) + \frac{\theta^2}{2} \epsilon(\theta)}{f'(x_n)} \quad (25.129)$$

Vu que $\alpha = x_n + \theta$, nous pouvons écrire

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n) + \frac{\theta^2}{2} \epsilon(\theta)}{f'(x_n)}. \quad (25.130)$$

Il est donc raisonnable de poser

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (25.131)$$

en espérant que cela soit une meilleur approximation de α que x_n .

En tout cas l'erreur sur x_{n+1} est

$$\alpha - x_{n+1} = x_n + \theta - x_n + \frac{f(x_n) + \theta^2 \epsilon(\theta)}{f'(x_n)} = \theta + \frac{f(x_n) + \theta^2 \epsilon(\theta)}{f'(x_n)}, \quad (25.132)$$

qui ne doit pas être fondamentalement plus grand que θ dès que θ est petit, surtout que si x_n est une approximation de α , nous pouvons espérer que $f(x_n)$ soit également petit. Là où les choses peuvent déraiper en grand, c'est si $f'(x_n)$ est petit.

Cette méthode de Newton ne converge pas toujours. Le pire est lorsque par malheur il y a une bosse pas loin de la racine. Alors il y a un risque de tomber sur $f'(x_{n+1}) = 0$ ou en tout cas très proche de zéro. Dans ce cas le point x_{n+2} est envoyé très loin.

25.7.2 «Justification» par points fixes

Nous savons que pour résoudre $f(x) = 0$ par une méthode de point fixe, il y a de nombreux choix possibles de fonctions g telles que $g(x) = x$ donne la même solution que $f(x) = 0$. Soit α une solution de $f(x) = 0$ et cherchons une fonction g de la forme

$$g(x) = x - kf(x). \quad (25.133)$$

Nous savons par la proposition 25.55 que la fonction g donne une convergence quadratique lorsque $g'(\alpha) = 0$. Pour la forme (25.133) nous avons $g'(\alpha) = 1 - kf'(\alpha)$, ce qui nous donne l'idée de poser $k = \frac{1}{f'(\alpha)}$.

Le fait est que $f'(\alpha)$ n'est pas connu, mais nous pouvons l'approximer par $f'(x)$ lorsque x est proche de α . D'où l'idée de considérer la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (25.134)$$

et donc la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ c'est à dire

$$x_{n+1} = x - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (25.135)$$

Dès que x_n est proche de α , sous l'hypothèse (raisonnable par continuité) que $f'(x_n)$ soit proche de $f'(\alpha)$, la méthode devrait donner une convergence quadratique.

Remarque 25.59.

Cette justification par points fixes n'est pas vraiment différente de celle par Taylor parce que Taylor est utilisé dans la preuve de la proposition 25.55.

Définition 25.60 (Méthode de Newton).

La **méthode de Newton** pour la fonction f est la suite définie par récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (25.136)$$

Cette définition ne précise pas la valeur de x_0 , ni de condition d'arrêt.

25.7.3 Convergence de la méthode de Newton

Théorème 25.61 (Convergence quadratique de la méthode de Newton[282]).

Soit f une fonction continue vérifiant $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. Nous considérons la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (25.137)$$

que nous supposons être de classe C^2 .

Si C est une majoration de $\|g''\|$ sur un intervalle contenant α , alors en posant $\delta = 1/C$ nous avons

- (1) La boule $B(\alpha, \delta)$ est préservée par $g : g(B(\alpha, \delta)) \subset B(\alpha, \delta)$.
 (2) Pour tout $x_0 \in B(\alpha, \delta)$ nous avons convergence quadratique vers α de la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$.
 (3) Nous avons l'estimation

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{C} (C|x_0 - \alpha|)^{2^n} \quad (25.138)$$

où C est la constante de la définition de convergence quadratique.

Démonstration. Nous commençons par calculer la dérivée de g :

$$g'(x) = -\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}, \quad (25.139)$$

d'où nous déduisons que $g'(\alpha) = 0$. Ensuite nous utilisons abondamment la formule des accroissements finis (théorème 11.187) en commençant par

$$|g(t) - g(\alpha)| \leq \|g'\|_{[t, \alpha]} |t - \alpha| \quad (25.140)$$

où par $\|f\|_A$ nous entendons la norme uniforme de f sur A , c'est à dire $\|f\|_A = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$. Note : nous écrivons $[t, \alpha]$, mais ça pourrait être $[\alpha, t]$.

Si $x \in [t, \alpha]$ alors

$$|g'(x)| = |g'(x) - g'(\alpha)| \quad (25.141a)$$

$$\leq \|g''\|_{[x, \alpha]} |x - \alpha| \quad (25.141b)$$

$$\leq \|g''\|_{[x, \alpha]} |t - \alpha| \quad (25.141c)$$

$$\leq \|g''\|_{[t, \alpha]} |t - \alpha|. \quad (25.141d)$$

En particulier, $\|g'\|_{[t, \alpha]} \leq \|g''\|_{[t, \alpha]} |t - \alpha|$, et nous pouvons continuer les majorations (25.140) :

$$|g(t) - g(\alpha)| \leq \|g''\|_{[t, \alpha]} |t - \alpha|^2. \quad (25.142)$$

La fonction g étant de classe C^2 , la dérivée seconde g'' est bornée (nous supposons déjà travailler sur un compact contenant α). Soit C une borne. Nous sommes en mesure de prouver le point (1) avec $\delta = 1/C$. En effet si $t \in B(\alpha, 1/C)$ alors

$$|g(t) - \alpha| = |g(t) - g(\alpha)| \leq C|t - \alpha|^2 \leq C \frac{1}{C^2} = \frac{1}{C}, \quad (25.143)$$

ce qui prouve que $g(t) \in B(\alpha, 1/C)$.

Le point (2) se prouve de la même manière : si $x_n \in B(\alpha, 1/C)$ alors

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq C|x_n - \alpha|^2, \quad (25.144)$$

ce qui est bien la convergence quadratique.

La majoration du point (3) s'obtient par récurrence sur n . Pour $n = 0$, la relation (25.138) devient $|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - \alpha|$ qui est vraie. Ensuite par la convergence quadratique et la récurrence,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2 \leq C \left[\frac{1}{C} (C|x_0 - \alpha|)^{2^n} \right]^2 = \frac{1}{C} [M|x_0 - \alpha|]^{2^{n+1}}. \quad (25.145)$$

□

La proposition suivante nous indique que dans le cas d'une fonction convexe, le choix de point de départ de la méthode de Newton n'est pas tellement crucial parce que il sont tous bons. De plus la convergence se faisant de façon décroissante (si on part de la droite), nous savons que le résultat sera une approximation par excès de α .

Proposition 25.62 (Newton dans le cas convexe).

Soit f de classe C^2 et une racine α telle que $f'(\alpha) > 0$. Soit $b > \alpha$ tel que f soit convexe sur $[\alpha, b]$.

Alors pour tout $x_0 \in [\alpha, b]$ la suite de la méthode de Newton est

- (1) décroissante
- (2) reste dans $[\alpha, b]$
- (3) converge vers α .

Démonstration. Nous savons par la proposition 11.216(2) que la fonction f' est croissante, et par hypothèse $f'(\alpha) > 0$, donc sur $[\alpha, b]$ nous avons $f' > 0$. Par conséquent, nous avons aussi $f > 0$ sur $[\alpha, b]$.

Le graphe de f est au dessus de la tangente de f en $x = x_n$ (proposition 11.222). Si nous nommons t_x la fonction qui donne la tangente en x nous avons $t_{x_n}(\alpha) < 0$ parce que $f(\alpha) = 0$. Par conséquent

$$t_{x_n}(x) = 0 \quad (25.146)$$

pour $\alpha < x < x_n$. Cela prouve que $x_{n+1} \in [\alpha, b]$, et que (x_n) est une suite décroissante

Étant donné que (x_n) est une suite décroissante dans le compact $[\alpha, b]$, elle est convergente. Notons β sa limite. Nous avons la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (25.147)$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$ nous avons l'équation

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}. \quad (25.148)$$

Vu que $f(x) > 0$ sur $]\alpha, b]$ nous avons automatiquement $\beta = \alpha$. □

25.7.4 Formalisation de l'algorithme

La méthode de Newton consiste à exprimer la solution x de $f(x) = 0$ avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ comme limite d'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (25.149)$$

où x_0 est arbitraire.

Si on veut exprimer cela en terme d'algorithme, nous disons que l'algorithme de Newton est donné par la suite de problèmes

$$F_n(x_{n+1}, x_n, f) = x_{n+1} - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (25.150)$$

La donnée du problème est la fonction f , et rien que elle.

Plus précisément, une fois que la fonction f est donnée, il existe une infinité de problèmes : pour chaque $a \in \mathbb{R}$ nous avons le problème

$$G_a(x_n, f) = x - a + \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (25.151)$$

La méthode de Newton consiste à sélectionner une partie de ces problèmes de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_0 = G_{x_0} \\ F_n = G_{x_n}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (25.152a) \\ (25.152b) \end{matrix}$$

Le problème F_0 fournit un nombre x_1 qui nous permet de sélectionner le problème G_{x_1} qui va fournir le nombre x_2 , etc.

Au moment de calculer le conditionnement de F_n , nous ne devons pas voir x_{n-1} comme fonction de x_0 et de la donnée f . Il ne faut donc pas dériver à travers les x_n .

Proposition 25.63.

Si une racine est multiple, alors l'ordre de convergence de la méthode de Newton est 1.

Voici un algorithme possible :

```

1 def Newton(f,x0,toll,maxit):
2     fp=f.derivative()
3     n=0
4     x=x0
5     diff=toll+1
6     while abs(diff)>toll and n<maxit:
7         n=n+1
8         diff=-f(x)/fp(x)
9         x=x+diff
10    return x,n

```

codeSnip_2.py

Commentaires :

- (1) Notons que dans un langage vraiment numérique comme Matlab, il faut passer f' en argument.
- (2) Dans le **while** il faudrait mettre $x_{n+1} - x_n$ (en valeur absolue), mais cette différence est aussi utilisée pour calculer x_{n+1} donc on la calcule une seule fois.
- (3) Il faudrait faire une vérification sur $f(x_n) \neq 0$. Il n'y a pas tellement de choix que de changer le point initial.

25.7.5 Caractéristiques

L'algorithme de Newton a les caractéristiques suivantes :

- (1) Pour résoudre le problème numéro n , il faut avoir résolu le problème numéro $n - 1$.
- (2) Aucune des solutions x_n aux problèmes intermédiaires n'est une solution au problème de départ (à moins d'un coup de chance).
- (3) Étant donné que la donnée du problème F_n est la fonction f de départ, nous avons $d_m = d_n = d$ pour tout m et n .

Théorème 25.64.

Soit f continue sur un voisinage de α , racine simple. Alors il existe un voisinage de α de rayon σ tel que pour tout x_0 dans ce voisinage, la méthode converge vers α avec ordre de convergence $p = 2$.

Donc dès qu'on a continuité autour de la solution recherchée, il suffit de prendre x_0 assez proche pour que tout se passe bien. Cela se fait par localisation des racines, par exemples en traçant la fonction avec un bon niveau de zoom. Le fait est qu'on cherche disons 3 décimales à la main (travail sur ordinateur et graphique) et Newton donne les 20 décimales suivantes à la vitesse de la lumière.

25.7.6 Exemple de la racine carré

Nous allons nous lancer dans un exemple : le cas de la racine carré. Soit à calculer une approximation numérique de $\sqrt{2}$. Il s'agit d'une racine de la fonction $f(x) = x^2 + 2$. La fonction de la méthode de Newton associée est :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 - 2}{2x}. \quad (25.153)$$

Cherchons un intervalle autour de $\sqrt{2}$ sur lequel nous avons convergence de la méthode de Newton. Cela s'obtient grâce à la proposition 25.55 qui nous informe qu'il suffit de trouver un intervalle autour de $\sqrt{2}$ sur lequel $|g'(x)| \leq 1$.

Nous avons

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}, \quad (25.154)$$

et nous cherchons à résoudre $|g'(x)| \leq 1$. D'abord $g'(x) = 1$ n'a aucune solutions alors que $g'(\sqrt{2}) = 0$. Donc nous avons $g'(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Par contre l'équation $g'(x) = -1$ a des solutions : $x = \pm\sqrt{2/3}$.

Nous avons donc convergence de la méthode de Newton pour x_0 dans un intervalle de la forme

$$[\sqrt{2/3}, \sqrt{2} + \dots] \quad (25.155)$$

où les trois points représentent l'expression qu'il faut pour que ce soit symétrique autour de $\sqrt{2}$. La valeur précise n'a pas tellement d'importance parce, vu que nous sommes en train de chercher $\sqrt{2}$, il est peu probable que nous ayons déjà en main une bonne approximation de nombres du type $\sqrt{2/3}$.

Proposition 25.65.

La méthode de Newton pour la fonction $f(x) = x^2 - 2$ converge vers $\sqrt{2}$ pour toute valeur de départ dans $]0, +\infty[$.

Démonstration. La fonction $f(x) = x^2 - 2$ est convexe et $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} > 0$. Donc la méthode converge vers $\sqrt{2}$ pour tout $x_0 \geq \sqrt{2}$ par la proposition 25.62.

Si par contre $x_0 \in]0, \sqrt{2}[$ nous avons

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0}. \quad (25.156)$$

En posant $h(x) = (x^2 + 2)/2x$ et en résolvant $h'(x) = 0$ nous trouvons $x = \sqrt{2}$. Et là, $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Donc $h(x)$ est toujours plus grand que $\sqrt{2}$ pour tout $x \in]0, \sqrt{2}[$.

En d'autres termes, si $x_0 \in]0, \sqrt{2}[$ alors $x_1 \geq \sqrt{2}$ et nous retombons dans le premier cas. $\square$

25.7.7 Si multiplicité

Supposons que α soit de multiplicité r (définition 25.57).

Cela se remarque en voyant que la méthode de Newton demande plutôt 20 itérations que 5. Le problème que cela pose est que chaque itération, les évaluations provoquent des erreurs. Donc moins d'itérations, c'est mieux.

Nous pouvons modifier la formule avec

$$x_{n+1} = x_n - r \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (25.157)$$

Il est possible de prouver que cette suite est à nouveau à convergence quadratique.

Ou alors on pose $F(x) = f^{(r-1)}(x)$ et α est une racine simple pour F . Donc faire Newton pour F est à nouveau quadratique, tout en donnant la même solution parce que $F(\alpha) = 0$ et $F'(\alpha) \neq 0$.

La seconde façon est bien parce que le théorème de localisation fonctionne 25.64

Et si r n'est pas connu ?

Il est toujours possible de faire $r = 2$ puis $r = 3$ et caetera jusqu'au moment où l'on remarque que le nombre d'itérations baisse un grand coup.

Mais ça demande beaucoup de calculs. Le mieux est de changer de méthode.

25.7.8 Et la dérivée ?

Un des problèmes de la méthode de Newton est que l'on doit pouvoir calculer la dérivée. Typiquement, il faut savoir f de façon analytique. Si cela n'est pas possible, nous pouvons changer de méthode et utiliser la méthode des sécantes décrite en 25.10.

25.7.9 Méthode de Newton : le cas général

Lemme 25.66.

Soient A et B deux matrices inversibles telles que la matrice $(A + \epsilon B)$ soit inversible pour tout ϵ assez petit. Alors il existe une matrice $X(\epsilon)$ telle que

$$(A + \epsilon B)^{-1} = (A^{-1} + \epsilon X) \quad (25.158)$$

et telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X(\epsilon) = -A^{-1}BA^{-1}$.

Démonstration. Le candidat matrice X est relativement simple à trouver en écrivant

$$(A + \epsilon B)(A^{-1} + \epsilon X) = \mathbb{1} + \epsilon AX + \epsilon BA^{-1} + \epsilon^2 BX. \quad (25.159)$$

En imposant que cela soit $\mathbb{1}$, nous trouvons

$$X(\epsilon) = -(A + \epsilon B)^{-1}BA^{-1}. \quad (25.160)$$

La matrice $X(\epsilon)$ étant un inverse à droite de $(A + \epsilon B)$, son déterminant est non nul et X est inversible. Par conséquent elle est également inversible au sens usuel. Le calcul de la limite est direct :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -(A + \epsilon B)^{-1}BA^{-1} = A^{-1}BA^{-1} \quad (25.161)$$

parce que l'inverse est une fonction continue sur $M(n, \mathbb{R})$. □

Remarque 25.67.

Un calcul naïf nous permet de trouver le même résultat de façon plus heuristique. En effet un développement usuel (dans $\mathbb{R}$) est

$$\frac{1}{a + \epsilon b} = \frac{1}{a} - \frac{\epsilon b}{a^2} + \dots \quad (25.162)$$

Si nous récrivons cela avec des matrices, nous écrivons (attention : passage heuristique!) :

$$(A + \epsilon B)^{-1} = A^{-1} - \epsilon A^{-1}BA^{-1} + \dots \quad (25.163)$$

Notons le choix de généraliser b/a^2 par $a^{-1}ba^{-1}$. Dans les réels les deux écritures sont équivalentes, mais pas dans les matrices.

Étudions si $A^{-1} - \epsilon A^{-1}BA^{-1}$ est bien un inverse à ϵ^2 près de $(A + \epsilon B)$:

$$(A + \epsilon B)(A^{-1} + \epsilon A^{-1}BA^{-1}) = 1 - \epsilon BA^{-1} + \epsilon BA^{-1} - \epsilon^2 BA^{-1}BA^{-1} = 1 - \epsilon^2 BA^{-1}BA^{-1}. \quad (25.164)$$

Par conséquent, à des termes en ϵ^2 près la matrice $A^{-1} - \epsilon A^{-1}BA^{-1}$ est bien un inverse de $A + \epsilon B$.

Théorème 25.68 (Méthode de Newton[283]).

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 et un point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. Nous supposons que df_a est inversible.

Alors il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x_0 \in V$ la suite définie par récurrence

$$x_{n+1} = x_n - (df_a)^{-1}(f(x_n)) \quad (25.165)$$

converge vers a . De plus la vitesse est quadratique au sens où il existe $C > 1$ tel que

$$\|x_n - a\| \leq C^{-1-2^n}. \quad (25.166)$$

Démonstration. Étant donné que df_a est inversible et que df est continue, l'application df_x est continue¹² pour tout x dans un voisinage de a . Nous prenons $r > 0$ tel que df_x est inversible pour tout $x \in B(a, r)$.

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} F: B(a, r) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x - (df_x)^{-1}(f(x)). \end{aligned} \quad (25.167)$$

Cela est une application C^1 . La clef est de montrer que l'application de F à un point $a+h$ rapproche de a pourvu que h soit assez petit. Nous avons la formule suivante :

$$F(a+h) - F(a) = h - (df_{a+h})^{-1}(f(a+h)). \quad (25.168)$$

Nous allons maintenant utiliser un développement de Taylor par rapport à h en suivant la formule (11.472). Nous avons

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|^2 \xi(h) \quad (25.169)$$

où $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction qui tend vers une constante lorsque $h \rightarrow 0$. Nous avons aussi

$$df_{a+h} = df_a + \|h\| \tau(h) \quad (25.170)$$

où $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ est une application qui tend vers une constante lorsque $h \rightarrow 0$. En ce qui concerne l'inverse nous utilisons le lemme¹³ 25.66 :

$$(df_a + \|h\| \tau(h))^{-1} = (df_a)^{-1} + \|h\| A(h) \quad (25.171)$$

où A est une autre matrice fonction de h qui tend vers une constante lorsque h tend vers zéro. En substituant le tout dans (25.168) nous trouvons

$$F(a+h) - F(a) = \|h\|^2 (df_a)^{-1} \xi(h) + \|h\| (A(h) \circ df_a)(h) + \|h\|^3 A(h) \xi(h). \quad (25.172)$$

En ce qui concerne la norme nous utilisons le fait que si T est un opérateur, $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$. Nous trouvons

$$\|F(a+h) - F(a)\| \leq \|h\|^2 \|(df_a)^{-1}\| \|\xi(h)\| + \|h\|^2 \|A(h) \circ df_a\| + \|h\|^3 \|A(h)\| \|\xi(h)\| \quad (25.173a)$$

$$= \|h\|^2 \alpha(h) \quad (25.173b)$$

pour une certaine fonction $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers une constante lorsque $h \rightarrow 0$.

En posant $C = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h)$ nous avons la majoration

$$\|F(x) - a\| \leq C \|x - a\|^2. \quad (25.174)$$

Nous pouvons également supposer que $C > 1$. Afin de prouver la vitesse de convergence (25.166), nous allons encore redéfinir r en demandant $r < 1/C^2$. De cette manière nous avons

$$\|x_0 - a\| \leq \frac{1}{C^2} \quad (25.175)$$

et la récurrence sur n est :

$$\|x_{n+1} - a\| = \|F(x_n) - a\| \leq C \|x_n - a\|^2 \leq C (C^{-1-2^n})^2 = C^{-1-2^{n+1}}. \quad (25.176)$$

Note : ce dernier calcul est le lemme 25.52 appliqué à $r = (1/C^2)$. $\square$

Remarque 25.69.

La valeur de la constante C a été fixée par l'équation (25.174). Certes nous pouvons toujours choisir C plus grand afin d'augmenter la vitesse de convergence, mais le point de départ x_0 devant être dans une boule de taille $1/C^2$ autour de a , demander C plus grand revient à demander un point de départ plus précis.

12. Nous pouvons voir df comme l'application qui à x fait correspondre la matrice $df_x \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Cette application étant continue et la non inversibilité d'une matrice étant donnée par l'annulation du déterminant, les matrices inversibles forment un ouvert dans l'ensemble des matrices.

13. Pour l'inversibilité de $\|h\| \tau(h)$, notons que df_a est inversible et que par hypothèse la somme $df_a + \|h\| \tau(h)$ est inversible.

25.8 Estimation de l'ordre de convergence

Définition 25.70 ([284]).

Nous disons que la suite (x_n) de limite x est **convergente d'ordre q** pour $q > 1$ si il existe $\mu > 0$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^q} = \mu. \quad (25.177)$$

En particulier :

- la convergence d'ordre 2 est dite quadratique,
- la convergence d'ordre 3 est dite cubique,
- la convergence d'ordre 4 est dite quartique.

Comment estimer numériquement l'ordre p de convergence de la méthode ? Soit une suite (x_n) convergente vers α . Considérons les 4 termes x_{n-3} , x_{n-2} , x_{n-1} , x_n . Alors nous pouvons écrire l'approximation

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \simeq \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-2} - x_{n-3}|} \right)^p. \quad (25.178)$$

Cette approximation ne serait pas trop mauvaise tant que n est assez grand pour que la convergence soit bien engagée. Passons au logarithme :

$$\ln \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \simeq p \ln \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-2} - x_{n-3}|} \right). \quad (25.179)$$

et donc

$$p \simeq \frac{\ln \left(\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|} \right)}{\ln \left(\frac{|x_{n-1} - x_{n-2}|}{|x_{n-2} - x_{n-3}|} \right)}. \quad (25.180)$$

Avec cette approximation, en réalité nous calculons une suite (p_i) qui sont les approximation de p à partir des termes i à $i + 3$ de la suite (x_n) . Il s'agit d'une suite d'estimations de p .

- (1) Dans le cas de la bisection, nous obtenons toujours $p_i = 1$.
- (2) Dans le cas de la méthode de Newton (25.7) nous avons $p = 2$. Mais les premières valeurs de p_i peuvent être aussi bien 0 que 7. Après quelque itérations pourtant les p_i se regroupent autour de 2.

En tout cas, le plus important est de savoir si $p > 1$ ou non. Rappel : nous voulons la superlinéarité parce que nous voulons utiliser le test d'arrêt de la différence entre deux termes, voir 25.54.

25.9 Autres méthodes

25.9.1 Méthode de Schröder

La formule est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (25.181)$$

Cette méthode est d'ordre 2 pour toute racine et toute valeur de multiplicité. Le problème de cette méthode est qu'elle demande 3 évaluations de f . Son efficacité :

$$E = \sqrt[3]{2} \simeq 1.25 \quad (25.182)$$

Cela est donc moins efficace que Newton.

25.9.2 Halley

Il a $p = 3$ lorsque α est racine simple. Mais encore $p = 1$ pour les racines multiples. Plus efficace que Newton pour les racines simples, mais même problème pour les racines multiples.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (25.183)$$

25.10 Méthode des sécantes variables

Supposons de ne pas avoir f analytique, mais seulement la possibilité de calculer $f(x)$ pour tout x . Newton ne fonctionne pas, mais la bisection fonctionne.

Nous pouvons approximer

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \quad (25.184)$$

En substituant dans la formule de Newton, nous obtenons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (25.185)$$

Il s'agit de prendre la droite qui passe par $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et par $(x_n, f(x_n))$ et de prendre l'intersection de cette droite avec l'axe $y = 0$. Cela donne le x_{n+1} .

Pour cette méthode, il ne faut pas seulement x_0 mais également x_1 .

L'ordre de convergence est le nombre d'or

$$p = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618. \quad (25.186)$$

Cela est donc superlinéaire.

La nombre d'évaluations est $s = 1$ (il y a deux apparitions de f dans la formule, mais l'une des deux est récupérée dans l'itération suivante). Donc l'efficacité est

$$E = p. \quad (25.187)$$

Donc bien efficace.

Proposition 25.71.

Si α est racine simple, il existe un voisinage de α tel que pour tout choix de x_0, x_1 dans ce voisinage, la méthode converge.

Psychologiquement, on est tenté de prendre x_0 et x_1 de part et d'autre de α (pensant à la bisection), mais en réalité ce n'est pas obligatoire du tout et n'a aucune influence. Il faut seulement les prendre très proches de α .

Remarque 25.72.

La méthode de la sécante est souvent écrite sous la forme

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (25.188)$$

C'est évidemment algébriquement équivalent.

Les formules (25.186) et (25.188) ont toutes deux des erreurs de cancellation. Laquelle est la plus grave ?

Dans la première, si la fraction est mal calculée, elle ne fait que modifier x_n . C'est à dire qu'on peut espérer qu'à la prochaine itération, ça aille mieux. En tout cas, dans ce cas si la fraction est mal calculée, ça ne détruit pas tout.

Dans la seconde, c'est la valeur elle-même qui risque d'être mal calculée. Et si la fraction est mal calculée, alors on casse complètement l'éventuel bonne approximation que nous avons déjà.

25.10.1 Aitken

La méthode du Δ^2 de Aitken est une méthode d'accélération de la convergence.

Soit (x_n) une suite qui converge. Nous voudrions une nouvelle suite (y_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - \alpha}{x_n - \alpha} \quad (25.189)$$

C'est la définition d'une convergence accélérée.

La façon de faire est :

$$y_n = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \quad (25.190)$$

La première expressions a deux cancellations (la seconde une seule) et de plus la première est y_n elle-même alors que la seconde est une correction.

Donc la seconde expression est numériquement meilleure.

L'opérateur Δ appliqué à une suite est :

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n \quad (25.191)$$

Donc

$$(\Delta^2 x)_n = (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = x_{n+2} - x_{n+1} - x_{n+1} + x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \quad (25.192)$$

L'accélération a alors la formule

$$y_n = \frac{(\Delta x)_n^2}{(\Delta^2 x)_n}. \quad (25.193)$$

Le problème est que ça accélère tellement que l'on arrive vite à des erreurs de cancellations, et donc à une précision en pics oscillants.

25.11 Équations algébrique

C'est une équation du type $P(x) = 0$ où P est un polynôme. Soit un polynôme de degré n . Nous en savons des choses.

- (1) L'équation a exactement n solutions dans $\mathbb{C}$ en comptant les multiplicités.
- (2) Les racines complexes arrivent par paire complexes conjuguée. Elles sont donc toujours en nombre pair.

Si donc nous avons $n = 3$, nous ne pouvons pas avoir 2 racine réelles. Il y en a donc 1 ou 3 réelles. Pas zéro ni deux.

Quelque méthodes : Müller, matrice compagnon, Laguerre.

25.11.1 Résoudre un système linéaire

Pour résoudre un système linéaire d'équations, nous échelonons la matrice du système. Soit à résoudre le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (25.194)$$

En termes de problèmes, on écrit $F(x, (A, b)) = Ax - b$. La donnée de ce problème est le couple (A, b) .

En ce qui concerne l'algorithme, on pose comme premier problème

$$F_1(x_1, (A_1, b_1)) = A_1 x_1 - b_1 = 0 \quad (25.195)$$

avec $A_1 = A$ et $b_1 = b$.

Ensuite, on commence à échelonner et le second problème est

$$F_2(x_2, (A_2, b_2)) = A_2 x_2 - b_2 = 0 \quad (25.196)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}. \quad (25.197)$$

Le troisième problème sera

$$F_3(x_3, (A_3, b_3)) = A_3 x_3 - b_3 = 0 \quad (25.198)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (25.199)$$

Ce problème est facile à résoudre «à la main». Nous nous arrêtons donc ici avec l'algorithme, et nous trouvons le x_3 qui résout le problème F_3 .

25.11.2 Caractéristiques

L'algorithme de résolution de systèmes linéaires d'équations a les propriétés suivantes, à mettre en contraste avec celles de Newton :

- (1) Pour résoudre le problème numéro n , il n'a pas fallu résoudre le problème numéro $n - 1$.
- (2) Toutes les solutions x_n des problèmes intermédiaires sont solutions du problème de départ. Nous avons $F_n(x, d_n) = 0$ pour tout n (ici, $d_n = (A_n, b_n)$).
- (3) D'un problème à l'autre, les données changent énormément : la matrice échelonnée peut être très différente de la matrice de départ.

25.11.3 Définitions

Nous allons maintenant formaliser en donnant quelques définitions pour nommer les propriétés que nous avons vues. D'abord, un algorithme est une suite de problèmes. Un **algorithme** pour résoudre un problème $F(x, d) = 0$ est une suite de problèmes $\{F_n(x_n, d_n) = 0\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 25.73.

Un tel algorithme est dit **fortement consistant** si pour toutes données admissibles d_n , on a

$$F_n(x, d_n) = 0 \quad \forall n, \quad (25.200)$$

où x est la solution de $F(x, d) = 0$.

L'algorithme des matrices est fortement consistant, mais pas l'algorithme de Newton.

Définition 25.74.

Un algorithme est **consistant** si $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, d_n) = 0$.

Dans le cas de l'algorithme de Newton, c'est plutôt une telle consistance qu'on attend.

L'algorithme est dit **stable** si pour tout n le problème correspondant est stable. Dans ce cas, on note K^{num} le **conditionnement relatif asymptotique** défini par

$$K^{\text{num}} = \limsup_n K_n \quad (25.201)$$

où K_n est le conditionnement relatif du problème $F_n(x_n, d_n) = 0$.

Définition 25.75.

Un algorithme est dit **convergent** (en d) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = N(\epsilon)$ et $\delta = \delta(N, \epsilon)$ tels que pour $n \geq 0$ et $|d - d_n| < \delta$, on ait $|x(d) - x_n(d_n)| < \epsilon$.

Remarque 25.76.

Dans le cas de l'algorithme de Newton, nous avons vu que la donnée d_n du problème F_n était en fait la même que la donnée initiale d , donc nous avons $d_n = d$, et par conséquent nous avons toujours $|d - d_n| < \delta$. Dans ce cas, la définition de la convergence revient à demander que la suite numérique des x_n converge vers la solution x .

Remarque 25.77.

Dans le cas des matrices par contre, les données sont très différentes les unes des autres, nous avons donc en général que $|d - d_n| > \delta$. Mais en revanche nous savons que tous les problèmes intermédiaires F_n acceptent une solution unique¹⁴ $x_n(d_n) = x(d)$. Par conséquent, $|x_n(d_n) - x(d)|$ est toujours plus petit que ϵ . L'algorithme des matrices est donc toujours un algorithme convergent.

25.12 Équations non linéaire

Certains équations non linéaires sont résoluble explicitement, par exemples les polynômes de degré jusqu'à 4 ou des choses comme

$$\sin^2(x) + 3\sin(x) + 5 = 0. \quad (25.202)$$

Mais ces exemples sont très rares.

Nous allons étudier des équations du type $f(x) = 0$, dans $\mathbb{R}$.

- (1) Un problème écrit sous la forme $x = g(x)$ peut utiliser des théorèmes de points fixes.
- (2) Un problème sous la forme $f(x) = 0$ peut utiliser des méthodes de bisection, Newton ou autres.

Il y a évidemment beaucoup de façons de transformer un problème pour passer d'une forme à l'autre.

Exemple 25.78

Soit $f(x) = x^2 - a = 0$ avec $a > 0$. Nous pouvons l'écrire

$$x^2 + x - a = x \quad (25.203)$$

qui donne une forme $g(x) = x$ pour $g(x) = x^2 + x - a$.

Ou encore $x = \frac{a}{x}$ et donc $g(x) = a/x$ (si par ailleurs on sait que $x \neq 0$). Notons que $x \neq 0$ n'est pas une hypothèse très forte parce qu'on la vérifie directement sur a . $\triangle$

Exemple 25.79

Soit l'équation à résoudre

$$f(x) = x^2 - 2 - \ln(x) = 0 \quad (25.204)$$

Les solutions de cette équations peuvent être vues comme les intersections avec l'axe X du graphe $y = x^2 - 2 - \ln(x)$. Tracer peut donc aider. Par ailleurs, il faut noter que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty, \quad (25.205)$$

donc les solutions sont certainement contenues dans un compact de $\mathbb{R}$.

À part tracer nous pouvons écrire

$$x^2 - 2 = \ln(x). \quad (25.206)$$

Et là, ce sont deux fonctions dont nous pouvons tracer le graphe pour trouver graphiquement les points d'intersection. Une étude de fonction montre vite qu'il y a exactement deux solutions, qu'elles sont strictement positives. Pour trouver des bornes, il faut calculer par exemple pour $x = 2$ les valeurs de $\ln(x)$ et $x^2 - 2$ pour voir si le graphe de $x^2 - 2$ est déjà plus haut. $\triangle$

La majorité des méthodes numériques de résolution d'équation du type $f(x) = 0$ ou $x = g(x)$ seront sous la forme de suites. Avec questions à la clefs :

14. Nous n'envisageons que le cas où le déterminant est non nul.

- (1) Quel point de départ choisir ?
- (2) Convergence ?
- (3) Est-ce que la limite est bien une solution ?
- (4) Vu que la limite est unique, comment faire si l'équation a plusieurs solutions ? (souvent c'est le choix du point initial qui va jouer sur ce point)

25.80.

Si la fonction est très plate, il est possible d'avoir

$$|f(\tilde{\alpha})| \leq \epsilon \quad (25.207)$$

sans que $\tilde{\alpha}$ ne soit une bonne approximation.

Lorsqu'on fait tourner une méthode itérative résolvant $f(x) = 0$, il n'est pas suffisant de s'arrêter lorsque

$$f(x_n) \leq \epsilon_1. \quad (25.208)$$

Il faut aussi s'assurer que, si $\bar{x}$ est la solution exacte, $|x_n - \bar{x}| \leq \epsilon_2$. Ici ϵ_1 et ϵ_2 sont deux «précisions» que nous nous fixons au départ.

Évidemment, vérifier la condition $|x_n - \bar{x}| \leq \epsilon_2$, il faudrait savoir $\bar{x}$. Et savoir $\bar{x}$ c'est justement le problème. Nous sommes donc amenés à faire des estimation de $|x_n - \bar{x}|$.

25.81.

Lorsque nous effectuons une méthode itérative, il faut donc contrôler deux grandeurs :

$$|\bar{x} - x_n| \leq \epsilon_1 \quad (25.209a)$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon_2. \quad (25.209b)$$

Proposition 25.82.

Soit p l'ordre de convergence de la suite (x_n) vers $\bar{x}$. Si $p > 1$ et $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon_2$ alors $|\bar{x} - x_n| \leq \epsilon_2$.

25.12.1 Méthode de bisection

Il y a ce théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 25.83.

Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]a, b[$.

Pour démarrer une bisection, il est toujours bon de prendre l'intervalle $[a, b]$ de façon à ne contenir qu'une seule solution.

Soit donc un premier intervalle $[a_0, b_0]$ tel que $f(a_0)f(b_0) < 0$ et ne contenant qu'une seule solution. À chaque itération nous considérons la moitié de l'intervalle précédent, mais la moitié contenant la solution.

Le test d'arrêt de la méthode de bisection se base uniquement sur la taille de l'intervalle qui reste. En effet si nous avons

$$|b_n - a_n| \leq \epsilon \quad (25.210)$$

nous avons certainement

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (25.211)$$

où x_n est le point du milieu de $[a_n, b_n]$.

25.84.

La fonction f n'intervient dans la méthode que via son signe, pas via ses valeurs exactes.

25.85.

Notons que le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas très puissant pour choisir l'intervalle de départ ; penser à la fonction

$$f(x) = x^2 - 5 \quad (25.212)$$

sur l'intervalle $[-10, 10]$. Il y a bien deux solutions dans l'intervalle, mais elles sont invisibles du théorème des valeurs intermédiaires. La fonction $x \mapsto x^2$ a sa solution en $x = 0$, mais elle aussi n'est pas visible.

25.86.

Certes la méthode de bisection assure la convergence vers une solution, mais elle n'assure pas la convergence monotone. Il peut arriver que $|\bar{x} - x_n| < |\bar{x} - x_{n+1}|$. C'est le cas lorsque la solution est très proche du milieu de l'intervalle choisit. Le x_0 est alors proche de $\bar{x}$ alors que x_1 sera à une distance de $\bar{x}$ d'environ un quart de l'intervalle de départ.

Supposons déjà avoir trouvé un intervalle $[a, b]$ dans lequel se trouve une unique solution à $f(x) = 0$. Voici un algorithme possible.

```

1 from __future__ import division
2
3 def bisection(f, a, b, toll, mmax):
4     """
5     f : une fonction
6     a,b : les limites de l'intervalle
7     toll : la tolérance. C'est l'amplitude de l'intervalle à ←
8           partir duquel nous nous arrêtons.
9     nmax : le nombre maximum d'itérations.
10
11     Nous supposons que \(\ b>a\)).
12
13     Retourne un tuple (x,n) où 'x' est la solution approchée et 'n' ←
14           ' est le nombre d'itérations effectuées
15     """
16     n = -1
17     amp = toll + 1 # Pour s'assurer que l'on entre dans le cycle
18     while amp > toll and n < mmax :
19         n = n + 1
20         amp = abs(b - a)
21         x = a + amp / 2
22         if f(a) * f(x) < 0:
23             b = x
24         elif f(a)*f(x) > 0:
25             a = x
26         else : # Problème ZERO
27             amp = 0
28     return (x, n)

```

codeSnip_1.py

Plusieurs remarques :

- (1) Le fait de retourner le nombre d'itérations effectuées permet à l'utilisateur de savoir la précision et si le nombre maximum d'itérations est dépassé. Si ce n retourné est égal à $n_{\max}$, l'utilisateur sait que le x retourné n'est pas fiable.
- (2) La ligne `from __future__ import division` fait en sorte que l'opération `/` est bien la division usuelle. Sinon, le défaut en python 2 est que `/` soit la division *entière*, c'est à dire

que $1/2 = 0$ en python 2.0 En python 3, le symbole $/$ désigne bien la division usuelle, mais Sage utilise Python 2.

- (3) Même si l'intervalle $[a, b]$ contient plus d'une solution, la méthode fonctionne et donne une solution. Il est simplement éventuellement très compliqué de savoir laquelle.
- (4) Nous faisons `amp=toll+1` parce que nous voulons absolument lancer le cycle au moins une fois. Sinon, le `x` à retourner ne serait pas défini au moment de sortir du cycle (si le cycle n'est pas exécuté).
- (5) Calculer le point milieu d'un intervalle $[a, b]$ est par la formule $(a + b)/2$ sauf que cette opération est numériquement dangereuse parce qu'à cause de l'arithmétique en précision finie, il est possible que cela tombe *exactement* sur a ou b . D'où le fait de calculer le point milieu par

$$x = a + \frac{amp}{2}. \quad (25.213)$$

- (6) Dans le cas **Problème ZERO** nous déduisons $f(x) = 0$. Attention que c'est pas que $f(x) = 0$ mais simplement que en mettant x dans f , la *machine* retourne son zéro.
Il peut cependant avoir une fonction telle que $f(1) = 10^{-50}$ et $f(2) = 0$. L'algorithme de bisection risque de s'arrêter si $x_n = 1$. Parce que la machine risque de calculer $f(x_n) = 0$.
Quoi qu'il en soit, nous y mettons `amp=0` pour être sûr de sortir de la boucle dès la prochaine vérification.
- (7) Il y a moyen de sauver les valeurs de $f(a)$ et $f(x)$ pour ne pas les recalculer, et en particulier au moment de faire `b=x` nous pouvons poser `fa=fx`.

Si τ est la précision de la solution voulue, nous pouvons fixer a priori le nombre d'itérations à faire grâce à la formule

$$n \geq \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\tau} \right) \right\rceil. \quad (25.214)$$

Il y a un " $\geq$ " et non une égalité parce qu'en arithmétique numérique, le nombre obtenu à droite pourrait ne pas être le bon à 1 près.

Ici pour $\nu \in \mathbb{R}$ le nombre $\lceil \nu \rceil$ est le plus petit entier à être plus grand ou égal à ν .

25.87.

Notons l'importance de la continuité de f . Par exemple que ferait la bisection sur la fonction $f(x) = 1/x$ pour l'intervalle $[-3, 1]$?

Il y a changement de signe sans avoir de racine.

Vu que 2^{10} est déjà 1024. Donc si on veut de la précision de l'ordre de $1/1000$, dix itération suffisent. Si donc nous avons besoin de 200 itérations pour atteindre la précision voulue, c'est l'occasion de trouver un intervalle plus petit. Par exemple en traçant la fonction, en faisant un zoom et en trouvant des valeurs de a et b qui sont déjà proches.

25.88.

Dans le monde réel, il arrive souvent d'utiliser une méthode de bisection pour se donner un point de départ pour une autre méthode.

25.13 Efficacité

Définition 25.89.

L'*efficacité* est le nombre

$$E = \sqrt[s]{p} \quad (25.215)$$

où p est l'ordre de convergence de la méthode et s est le nombre de fois qu'il faut calculer une valeur de la fonction à chaque itération (nous ne comptons pas l'initialisation).

Que le nombre de d'évaluations de f intervienne est logique parce que chaque évaluation provoque une erreur possible.

Exemple 25.90(Bisection)

Pour la méthode de bisection, nous avons $s = 1$ parce que chercher x_{n+1} , il faut seulement calculer $f(x_n)$. $\triangle$

Exemple 25.91(Newton)

Pour l'algorithme de Newton nous avons $p = 2$ et il y a deux évaluations à chaque itérations (une fois f et une fois f'), donc $s = 2$ et $E = \sqrt{2}$. $\triangle$

25.14 Exercices

Exercice 1

Nous supposons une machine acceptant 5 chiffres significatifs. Elle retient les nombres sous la forme $\pm 0.x \cdots \times 10^{\cdots}$.

$$x = 1.403, y = 0.4112 \times 10^{-3}, z = -0.4111 \times 10^{-3}.$$

Soient $a = (x \oplus y) \oplus z$ et $b = (y \oplus z) \oplus x$.

- (1) D'abord la calculer à la main.
- (2) Quel est le calcul préférable ?
- (3) Donner l'erreur relative avec 3 chiffres significatifs.

Correction de l'exercice 1

Dans le cas du calcul à la main, il faut en faire un seul parce que, algénriquement, $a = b$.

Nous avons $x = 1.403$, $y = 0.0004112$ et $z = -0.0004111$. Et la somme donne :

$$a = b = 1.4030001 = 0.14030001 \times 10^1. \quad (25.216)$$

Faisons d'abord la normalisation de x , c'est à dire $\text{fl}(x)$.

$$\text{fl}(x) = 0.1403 \times 10^1. \quad (25.217)$$

et y est déjà normalisé :

$$\text{fl}(y) = 0.4112 \times 10^{-3}. \quad (25.218)$$

Il n'y a pas d'erreurs d'assignation pour ces deux nombres.

Pour faire la somme, il faudra déjà un peu casser les nombres pour les écrire de façon à pouvoir les sommer. En effet, il faut écrire les deux nombres avec le même exposant de 10 (le plus grand), pour pouvoir les mettre en colonne :

$$0.1404 \times 10^1 \rightarrow 0.1404 \times 10^1 \quad (25.219a)$$

$$0.4112 \times 10^{-3} \rightarrow 0.00004 \times 10^1. \quad (25.219b)$$

La somme donne 0.14034×10^1 . Et ça, c'est à nouveau arrondi. Le premier chiffre supprimé est un 4, donc

$$x \oplus y = 0.1403 \times 10^1. \quad (25.220)$$

Et là on remarque que nous avons la même chose que x . C'est un classique du calcul numérique.

Nous avons aussi

$$\text{fl}(z) = 0.4111 \times 10^{-3}. \quad (25.221)$$

Et pour faire la somme de cela avec $x \oplus y$ nous devons le remettre sous la forme d'un 10^1 :

$$\text{fl}(z) \rightarrow -0.00004 \times 10^1 \quad (25.222)$$

(erreur de conversion), et en sommant on trouve

$$(x \oplus y) \oplus z = 0.140216 \times 10^1, \quad (25.223)$$

qui est encore arrondi. Le premier chiffre supprimé est un 6, donc

$$\text{fl}(a) = 0.1403 \times 10^1, \quad (25.224)$$

Le nom de l'erreur qui consiste à avoir $x \oplus y = x$ est "relation annulaire".

Calculons b .

Les nombres y et z ont même ordre de grandeur, donc pas d'erreur au moment de les mettre sous forme sommable.

$$\text{fl}(x) + \text{fl}(y) = 0.00010 \times 10^{-3}. \quad (25.225a)$$

Cela est renormalisé et arrondi : $\text{fl}(x) \oplus \text{fl}(y) = 0.1000 \times 10^{-6}$.

Notons que nous avons ici commis potentiellement une erreur de cancellation parce que entre y et z , il y a 3 chiffres sur 4 qui sont identiques. Seul le chiffre 1 est significatif en réalité.

Il faut maintenant ajouter x à cela. D'abord

$$\text{fl}(x) = 0.1403 \times 10^1. \quad (25.226)$$

Pour cette somme, il faudra remettre notre 0.1000×10^{-6} avec une puissance 10^1 . Et là, nous obtenons zéro parce que vraiment ce nombre est trop petit pour être écrit avec 10^1 . Résultat des courses :

$$\text{fl}(b) = 0.1403 \times 10^1. \quad (25.227)$$

Dans le premier calcul nous avons deux "relations anormales" et dans le second nous en avons une plus une cancellation.

Nous préférons avoir deux relations anormales, parce que l'erreur de cancellation est plus grave : elle consiste à une perte de chiffre significatifs. Le fait est que faisant la différence à l'ordinateur nous avons obtenu 0.1 qui est certes exact, mais qui est un coup de bol : la différence aurait aussi bien pu être 0.19 avec d'autres nombres, machinement égaux.

Note : avec les données ici, il n'y a en fait pas d'erreur de cancellation. Mais il y a une erreur potentielle de cancellation, potentiellement grave.

En ce qui concerne l'erreur relative. Dans la formule

$$\epsilon_r = \frac{|a - a^*|}{|a|}, \quad (25.228)$$

la différence ne peut pas être calculée à la calculatrice justement parce qu'elle est très potentiellement sujette à erreur de cancellation.

$$\epsilon_r = \frac{|0.1030001 \times 10^1 - 0.1403 \times 10^1|}{0.14030001 \times 10^1} = \frac{0.1 \times 10^{-6}}{0.14030001 \times 10^1} \simeq 0.712758 \times 10^{-7}. \quad (25.229)$$

En passant à 3 chiffres significatifs, 0.713×10^{-7} (le premier chiffre supprimé est un 7).

Exercice 2

Soient $x = 0.1 \times 10^{21}$ et $y = 0.5 \times 10^{20}$ et les expressions

$$(1) \quad z_1 = \frac{x-y}{y} + \frac{x+y}{x}$$

$$(2) \quad z_2 = \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Ces deux expressions sont algébriquement équivalentes.

(1) Calculer les valeurs.

(2) On suppose une machine en précision simple. Laquelle des deux expressions est préférable ?

Correction de l'exercice 2

Pour z_1 , en arithmétique exacte :

$$z_1 = \frac{0.5 \times 10^{20}}{0.5 \times 10^{20}} + \frac{1.5 \times 10^{20}}{1 \times 10^{20}} = 0.25 \times 10^1. \quad (25.230)$$

Le calcul exact de z_2 donne la même chose.

Calcul de z_1 Les deux valeurs sont mémorisables et la différence $x - y < ++ >$ se fait sans erreurs de cancellation. Idem pour la somme $x + y$. Idem pour les divisions.

Calcul de z_2 Pour faire x^2 , c'est pas possible parce que c'est de l'ordre de 10^{40} alors que nous sommes en précision simple. Idem pour le produit xy .

Morale : z_2 donne un **overflow** alors que z_1 fonctionne de façon exacte.

Remarque 25.92.

En réalité le z_1 n'est pas tout à fait calculable de façon exacte sur la machine parce qu'elle doit d'abord convertir en binaire, ce qui n'est pas toujours possible. Mais sur notre machine qui fonctionne en base 10, il n'y a pas de problèmes.

Exercice 3

Soit la fonction

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - e^{-x}. \quad (25.231)$$

- (1) Identifier la plus grande des solutions réelles de $f(x) = 0$.
- (2) Effectuer une bisection pour la savoir.
- (3) Sachant que

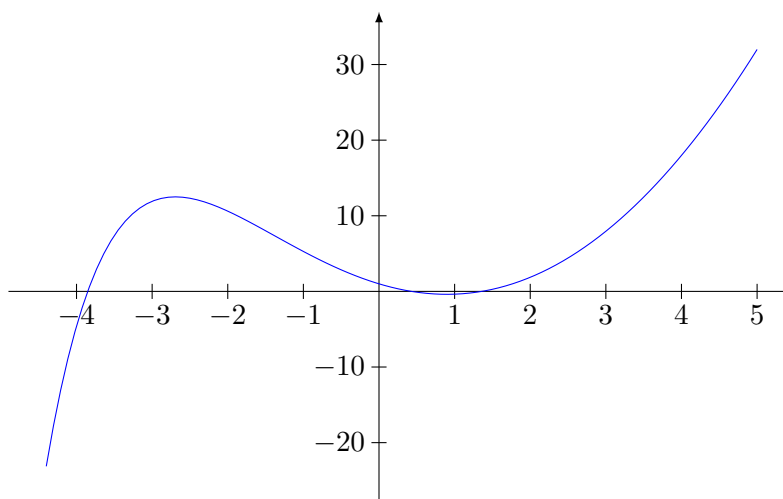
$$\alpha \simeq 1.358500220734946, \quad (25.232)$$

quelle est l'erreur relative ?

Correction de l'exercice 3

Note : si c'est pour chercher à la main des approximation pour démarrer, il est évidemment préférable de dessiner $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 2$ et $f_2(x) = -e^{-x}$ séparément.

Quoi qu'il en soit, voici un graphique :



Nous voyons trois racines : $\alpha_1 \in [0, 0.5]$, $\alpha_2 \in [1, 1.5]$ et $\alpha_0 \in [-4, -3.5]$.

La plus grande solution est α_2 . Nous pouvons déjà remplir le tableau des précisions :

n	a_n	b_n	x_n	$g(x_n)$	$ b_n - a_n $
$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	0.5
$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	0.25
$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	$< ++ >$	0.125

Et nous calculons les valeurs de f aux points d'extrémité de l'intervalle. Note que seul le signe nous importe :

$$f(1) \simeq -0.368 \quad (25.233a)$$

$$f(1.5) \simeq 0.278. \quad (25.233b)$$

Voici donc le tableau avec le signe de f indiqué :

n	a_n	b_n	x_n	$g(x_n)$	$ b_n - a_n $
0	1(+)	1.5(-)	< ++ >	-0.162×10^0	0.5
1	< ++ >	< ++ >	< ++ >	< ++ >	0.25
2	< ++ >	< ++ >	< ++ >	< ++ >	0.125

Puis :

n	a_n	b_n	x_n	$g(x_n)$	$ b_n - a_n $
0	1(+)	1.5(-)	1.25(-)	-0.162×10^0	0.5
1	< ++ >	< ++ >	< ++ >	< ++ >	0.25
2	< ++ >	< ++ >	< ++ >	< ++ >	0.125

Et enfin :

n	a_n	b_n	x_n	$g(x_n)$	$ b_n - a_n $
0	1(+)	1.5(-)	1.25(-)	-0.162×10^0	0.5
1	1.25(-)	1.5(+)	1.375(+)	$+0.284 \times 10^{-1}$	0.25
2	1.25(-)	1.375(+)	1.3125(-)	-0.738×10^{-1}	0.125

Note que les $f(x_n)$ restent toujours du même ordre de grandeur. Si un moment on voit un 1.6×10^7 , c'est qu'une erreur a été commise.

En ce qui concerne le calcul de l'erreur relative, la première chose à faire est de vérifier que le α proposé est dans l'intervalle qui nous reste. Sinon c'est qu'une erreur a été commise.

De plus notre approximation est $x_n = 1.3125$, dont déjà deux chiffres sont corrects. En deux itérations de bisection en partant de 0.5, nous ne pouvons pas nous attendre à mieux.

25.15 Approximations de fonctions

- (1) D'habitude on n'approxime pas une fonction sur tout son domaine, mais seulement sur une partie.
- (2) Il y a le problème du choix de la classe des fonctions qui vont approximer. Nous allons travailler avec des polynômes.
- (3) Il nous faut un critère disant si une approximation est bonne ou non.

25.15.1 Critère d'interpolation

À partir de $n + 1$ abscisses points distinctes x_i , nous calculons $y_i = f(x_i)$. Il y a ce théorème qui dit qu'il existe un unique polynôme de degré (au plus) $n + 1$ passant par les points (x_i, y_i) .

Proposition-définition 25.93 (Base de Lagrange).

Étant donnés $n + 1$ valeurs distinctes x_i , l'espace des polynômes de degré n admet la base

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (25.234)$$

pour $i = 0, \dots, n$.

Soit par exemple les valeurs de f données dans

x_i	$y_i = f(x_i)$
$x_0 = 5$	1
$x_1 = -7$	-23
$x_2 = 6$	-54
$x_3 = 0$	-954

Les polynômes de Lagrange pour ces données dépendent seulement des x_i , pas des y_i . En particulier,

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}, \quad (25.235)$$

etc.

La réponse est que

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{x^3 + 13x^2 + 42x}{660} \quad (25.236a)$$

$$L_1^{(3)}(x) = \frac{-x^3 - x^2 + 30x}{84} \quad (25.236b)$$

$$\text{etc.} \quad (25.236c)$$

Ce qu'il y a de bien avec cette base est que en posant $a_i = f(x_i)$ alors le polynôme

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i^{(n)}(x) \quad (25.237)$$

passer par les points $(x_i, f(x_i))$. Du coup il suffit d'écrire

$$P_3(x) = L_0^{(3)}(x) - 23L_1^{(3)}(x) - 54L_2^{(3)}(x) - 954L_3^{(3)}(x) = 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954. \quad (25.238)$$

Un inconvénient de cette base est qu'elle est complètement dépendante des points choisis. Si on ajoute un point ou qu'on en prend un à peine différent, tous les coefficients changent. Mais en pratique, ajouter des points est quelque chose qui arrive souvent parce que souvent, après avoir vu le résultat d'un polynôme d'interpolation, on veut ajouter un point pour avoir un meilleur résultat.

25.94.

Une habitude : le premier et le dernier nœud se choisissent aux extrémités de l'intervalle sur lequel nous voulons une approximation.

Le but d'une approximation est d'avoir des approximations de $f(x^*)$ pour des valeurs de x^* qui ne soit pas une des abscisses données (parce que sur ces points, le polynôme et la fonction sont égaux). Nous considérons donc

$$f(x^*) \simeq P_n(x^*). \quad (25.239)$$

Si x^* est dans l'intervalle $I = [x_{\min}, x_{\max}]$ alors nous disons que nous calculons f par **interpolation**. Si au contraire x^* est en dehors de cet intervalle nous parlons d'**extrapolation**.

Si x^* est pris à l'extérieur de I , alors l'erreur risque d'être très grande, surtout parce que les polynômes tendent tous vers $\pm\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

Autant l'interpolation via polynômes est le plus souvent valable, il faut garder à l'esprit que les extrapolations sont souvent mauvaises si x^* est trop loin des extrémités de I .

25.15.2 Base de Newton

Après la base canonique et la base de Lagrange, nous voyons la base de Newton. Soient encore $n + 1$ points donnés du graphe de f .

Définition 25.95.

La **base de Newton** pour les abscisses x_i est l'ensemble des polynômes suivants :

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (25.240)$$

Notons que ces polynômes n'utilisent pas le dernier point des x_i . Le polynôme passant par les points est

$$P_n(x) = x_0 + \sum_{i=1}^n c_i \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j). \quad (25.241)$$

Le calcul des c_i n'est pas absolument évident. Mais si nous ajoutons un point d'interpolation, les polynômes déjà calculés sont encore bons ; en particulier

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + c_{n+1} \prod_{j=0}^n (x - x_j). \quad (25.242)$$

Et cela est bien, parce que ça donne une façon de les calculer par récurrence.

Il y a plusieurs façons de calculer les c_i .

Les différences divisées sont des façons d'approximer les dérivées.

Définition 25.96.

Soient $n + 1$ nœuds x_i pour la fonction f . La **différence divisée** sont :

Ordre 0

$$f[x_i] = f(x_i) \quad (25.243)$$

Ordre 1

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}. \quad (25.244)$$

Ordre 2

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}. \quad (25.245)$$

Ordre n

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}. \quad (25.246)$$

Les ordres font référence à l'ordre de dérivation qui est approximé.

Nous avons alors

$$c_i = f[x_0, \dots, x_i]. \quad (25.247)$$

Cela donne effectivement une méthode de récurrence pour trouver les coefficients c_i .

Remarque 25.97.

Pour calculer c_0 , il faut seulement calculer $f[x_0] = f(x_0)$. Mais pour calculer c_1 il faut $f[x_0]$ et $f[x_1]$. Et pour c_2 il faut $f[x_0, x_1, x_2]$ qui demande $f[x_0, x_1]$ et $f[x_1, x_2]$, qui demande etc.

Il faut donc calculer en réalité tous les $f[x_i]$ pour terminer le calcul. Par contre, pour ajouter un point, il ne faut pas tout recalculer, et même pas tout conserver en mémoire. Il faut seulement garder en mémoire la dernière diagonale.

Exercice 4

Soit les nœuds

x	$f(x)$
3	1
1	-3
5	2
6	4

Trouver le polynôme d'interpolation via la base de Newton.

Correction de l'exercice 4

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
3	1	$\frac{1+3}{2} = 2$	$\frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{-2} = -\frac{3}{8}$
1	-3	$\frac{-3-2}{-4} = \frac{5}{4}$	$\frac{\frac{5}{4} - 2}{-5} = \frac{3}{20}$
5	2	$\frac{2-4}{-1} = 2$	$\frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} = \frac{4}{40}$
6	4	$< ++ >$	$< ++ >$

Le polynôme d'interpolation sera

$$P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \quad (25.248)$$

Un exercice typique serait de donner tout pour 3 points puis de demander le polynôme qui aurait un quatrième point.

25.15.3 Méthode des minima quadratiques

Soient $m + 1$ points connus sur le graphe de la fonction f que nous devons approximer. Au lieu d'exiger que notre approximation ne passe par tous les points, nous allons chercher une approximation qui minimise la somme des carrés des erreurs sur ces points.

Soit $\mathcal{F}$ une classe de fonctions dans laquelle nous allons chercher l'approximation. Nous cherchons $g \in \mathcal{F}$ qui minimise

$$E(g) = \sum_{i=0}^m (f(x_i) - g(x_i))^2 \omega_i \quad (25.249)$$

où $\omega_i > 0$ est une pondération. Souvent on prend $\omega_i = 1$, mais pas toujours. La fonction E sur $\mathcal{F}$ est la **fonction d'erreur**.

25.98.

À part dans les exercices à la main, le nombre de points est grand, du type du milliard. Il est bien entendu pas envisageable de faire passer un polynôme *exactement* par un milliard de points, parce que cela demanderait un polynôme de degré un milliard.

Plus généralement, d'un point de vue scientifique, avoir n paramètres libres pour n données expérimentales, ça ne passe pas Popper.

Afin de faire de la science qui passe Popper nous nous restreignons à une classe de fonction $\mathcal{F}$ dont la dimension n'est pas grande : $\dim(\mathcal{F}) \ll m$. Et nous notons $\dim(\mathcal{F}) = n + 1$.

Exemple 25.99

La qualité d'une expérience peut être influencée par des paramètres extérieurs comme l'humidité, le vent, etc. Donc il est normal d'avoir des expériences moins précises que d'autres. On le pèse moins. $\triangle$

Exemple 25.100

Dans un questionnaire, il se met des questions volontairement contradictoires. Si quelqu'un répond «oui» aux deux questions, il y a une indication que la personne a répondu un peu n'importe comment, et il faut moins peser ses réponses. $\triangle$

Soit $g \in \mathcal{F}$, et une base $\{g_i\}_{i=0, \dots, n}$ de $\mathcal{F}$. Nous écrivons

$$g = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \dots + a_n g_n \quad (25.250)$$

La fonction donnée E donnée en (25.249), est, à partir du moment où $\mathcal{F}$ et une base sont choisis, une fonction des paramètres a_i que nous nommons $F(a_0, \dots, a_n)$. Il faut minimiser F , c'est à dire poser

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0 \quad (25.251)$$

pour $j = 0, \dots, n$. Cela sont $n + 1$ équations pour $n + 1$ inconnues. Notons que ces équations sont linéaires parce que chacun des termes est du type

$$\left(f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j g_j(x_i) \right)^2, \quad (25.252)$$

et lors de la dérivation par rapport à a_j , nous obtenons du degré 1.

25.15.4 Notre espace de Hilbert

Nous allons maintenant formaliser un peu tout cela. Dans [285] il est expliqué que si ω est une fonction strictement positive, alors l'espace $L_\omega^2([a, b])$ dérivé de la norme

$$\|f\|_{L_\omega^2}^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx \quad (25.253)$$

est un espace de Hilbert. Nous allons tenter le coup avec $\omega = \sum_{i=0}^m \omega_i \delta_{x_i}$ où δ_a est la distribution de Dirac¹⁵ centrée en a .

Sur l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nous considérons la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i = 0, \dots, m$. Nous notons L_ω^2 cet ensemble.

Proposition 25.101.

La formule

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^m f(x_i) g(x_i) \omega_i \quad (25.254)$$

définit un produit scalaire sur L_ω^2 . Ce dernier devient un espace de Hilbert.

Démonstration. Pour être un produit scalaire (définition 6.65), la forme considérée doit être symétrique et strictement définie positive. La symétrie de la formule (25.254) ne fait pas de doute. Le fait que ce soit semi-défini positif non plus. Pour le strict,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^m |f(x_i)|^2 \omega_i. \quad (25.255)$$

Étant donné que $\omega_i > 0$ pour tout i , l'annulation de $\langle f, f \rangle$ implique l'annulation de $f(x_i)$ pour tout i . Cela signifie que f est dans la classe de 0 et donc est nul dans L_ω^2 .

En ce qui concerne la complétude, la proposition 17.3 répond à notre place, étant donné que L_ω^2 est de dimension finie. Une base est donnée par exemple par $e_i(x) = \delta_{x, x_i}$. Ici le δ est celui de Kronecker, et non celui de Dirac. $\square$

Lemme 25.102.

Si la classe de fonctions $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de L_ω^2 et si $f \in L_\omega^2$ il existe un unique élément g de $\mathcal{F}$ minimisant la distance à f .

Démonstration. Le théorème de projection (au choix 6.235 ou 17.6) nous assure l'existence et l'unicité d'un élément de $\mathcal{F}$ minimisant la distance à $f \in L_\omega^2$. $\square$

25.103.

Ce lemme est gentil, mais ne nous donne pas de méthodes pour trouver ce minimum. Nous allons donc écrire explicitement un système d'équations permettant de le trouver. Si $\{g_\alpha\}$ est une base (finie) de $\mathcal{F}$ alors nous cherchons le minimisant sous la forme $f = \sum_\alpha a_\alpha g_\alpha$.

Nous devons minimiser

$$E(g) = \sum_{i=0}^m (f(x_i) - g(x_i))^2 \omega_i = \sum_{i=0}^m (f(x_i) - \sum_\alpha a_\alpha g_\alpha(x_i))^2 \omega_i. \quad (25.256)$$

15. Définition dans l'exemple 22.25.

Vu que cela est maintenant plutôt une fonction des coefficients a_α que de la fonction g nous la notons $F(a_0, \dots, a_n)$. Il s'agit d'étudier le système d'équations

$$\frac{\partial F}{\partial a_\alpha} = 0. \quad (25.257)$$

Un tout petit peu de calcul mène au système

$$\sum_i \sum_\beta a_\beta \omega_i g_\alpha(x_i) g_\beta(x_i) = \sum_i \omega_i g_\alpha(x_i) f(x_i). \quad (25.258)$$

À droite nous reconnaissons $\langle f, g_\alpha \rangle$. et à gauche, $\sum_\beta a_\beta \langle g_\alpha, g_\beta \rangle$. Donc le système s'écrit

$$\sum_\beta a_\beta \langle g_\alpha, g_\beta \rangle = \langle f, g_\alpha \rangle. \quad (25.259)$$

Il y a une équation pour chaque valeur de α .

La matrice $A \in \mathbb{M}(n+1, \mathbb{R})$ donnée par $\langle g_\alpha, g_\beta \rangle$ étant strictement définie positive (c'est un produit scalaire), le système a une unique solution. Et comme cette matrice est de plus symétrique, elle est diagonalisable par le théorème spectral 6.292. Toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Notons pour la curiosité que si l'on considère la matrice $B \in \mathbb{M}(m \times n)$ donnée par

$$B_{ij} = \sqrt{\omega_i} g_j(x_i), \quad (25.260)$$

alors nous avons $A = B^t B$.

25.15.5 Droite de régression

La droite de régression est le cas particulier $n = 1$, c'est à dire un système 2×2 . Nous cherchons $P = a_0 + a_1 x$. Et la base choisie est $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$. Nous avons

$$\langle g_0, g_0 \rangle = \sum_i \omega_i g_0(x_i) g_0(x_i) = \sum_i \omega_i \quad (25.261a)$$

$$\langle g_0, g_1 \rangle = \sum_i \omega_i x_i \quad (25.261b)$$

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \sum_i \omega_i x_i^2. \quad (25.261c)$$

Donc pour approximer une fonction f il faut résoudre le système

$$\begin{pmatrix} \sum_i \omega_i & \sum_i \omega_i x_i \\ \sum_i \omega_i x_i & \sum_i \omega_i x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, g_0 \rangle \\ \langle f, g_1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (25.262)$$

Pour calculer les produits $\langle f, g_\alpha \rangle$ il suffit de savoir f sur les points x_i . Et encore heureux, parce que toute la méthode est basée sur le fait que nous ne connaissons pas f ailleurs. C'est pour cela que nous avons défini L_ω^2 comme un ensemble quotient.

Exemple 25.104

Faisons la droite de régression pour les données avec tous les poids $\omega_i = 1$.

x_i	$f(x_i)$
-5	18
-3	7
1	0
3	7
4	16
6	50
8	67

Nous avons

$$\langle g, g_0 \rangle = \sum_i f(x_i) = 165 \quad (25.263a)$$

$$\langle f, f_1 \rangle = \sum_i f(x_i)x_i = 810. \quad (25.263b)$$

et

Nous avons le système

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 14 & 160 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165 \\ 810 \end{pmatrix}. \quad (25.264)$$

La résolution donne la droite de régression. $\triangle$

Proposition 25.105.

Si tous les poids sont identiques, alors la droite de régression passe par le barycentre des points donnés :

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_i \\ y_M = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m y_i. \end{cases} \quad (25.265a)$$

$$\quad (25.265b)$$

Cela donne une vérification possible de la réponse trouvée.

Définition 25.106.

L'erreur quadratique est la fonction $F(a_0, \dots, a_n)$ dont il est question plus haut. Et si une solution est connue, son erreur quadratique est la valeur de F pour cette solution.

25.16 Système linéaires (généralités)

Soit un système d'équations linéaires $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Le problème est évidemment de savoir si il existe une unique solution x et de la déterminer. Nous supposons l'existence et l'unicité. C'est à dire que les conditions équivalentes¹⁶ sont vérifiées :

- (1) A est inversible, c'est à dire qu'il existe une matrice notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$.
- (2) $\det(A) \neq 0$.

Note : si nous avons un système pas carré du type $Bx = v$ avec $B \in \mathbb{M}(n \times m)$ alors nous pouvons nous ramener à un système carré en écrivant

$$B^t Bx = B^t v. \quad (25.266)$$

Mais attention : bien que $B^t B$ soit symétrique et semi-définie positive, certaines valeurs propres peuvent être nulles.

25.107.

Deux choses générales en calcul numérique :

- (1) On ne calcule pas l'inverse d'une matrice.
- (2) On ne calcule même pas son déterminant.

Par conséquent nous ne faisons pas $x = A^{-1}v$.

Il faut garder en tête le fait que dans la pratique, la matrice A possède des millions de lignes et colonnes, si pas pire. Pour une matrice de taille de l'ordre du million, il y a 1000 milliards d'entrées. Si on compte 32 bits par nombre (précision simple, définition 25.8), c'est à dire 4 octets, il faut 4000 giga-octets pour enregistrer la matrice. Même pour la mémoire actuellement disponible, ce

¹⁶. L'équivalence est la proposition 6.49(2).

n'est pas rien. Surtout que souvent, la précision simple n'est pas utilisée, mais la précision double, ce qui donne 8000 giga pour enregistrer la matrice.

Heureusement, dans la majorité des cas pratiques, les matrices géantes qui apparaissent sont pleines de zéros.

Définition 25.108.

Une matrice est **creuse** si elle possède beaucoup de zéros. Une matrice non creuse est dite **dense**.

Notons que lorsqu'on parle de matrice comprenant beaucoup de «zéros», nous pensons à des éléments très petits, et non de vrai zéros.

Les matrices creuses ne sont pas mémorisées entièrement, mais plutôt comme un dictionnaire (i, j, v) qui donne la valeur v de A_{ij} .

Définition 25.109.

Une matrice est de «grande dimension» si elle ne peut pas être mise en mémoire sur un ordinateur donné. Sur certains ordinateurs, ça commence à 5000 inconnues. Mais sur des plus forts, on peut aller jusqu'au million ou le milliard.

Si la matrice est de petite dimension, il est possible d'utiliser des méthodes dites «directes». Sinon, il faudra utiliser des méthodes itératives.

25.16.1 Les méthodes directes

Une méthode directe consiste à successivement transformer un système $A^{(0)}x = b^{(0)}$ en de nouveaux systèmes $A^{(i)}x = b^{(i)}$ dont la solution est identique jusqu'à obtenir un système $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ qui est à résolution immédiate.

L'avantage d'une méthode directe est qu'elle fournit une réponse exacte, pour autant que les calculs intermédiaires soient bien faits (ce qui n'est pas le cas sur un ordinateur).

Une méthode directe fonctionne en général avec un nombre de pas fixés par la taille du système. Par exemple pour un système $n \times n$, la méthode de Gauss demande exactement n pas, et il n'y a pas moyen de faire mieux. Or chaque pas demande de recalculer tous les éléments de la matrice. Encore une fois, si la matrice a une taille de l'ordre du milliard, cela fait 10^{18} éléments à recalculer un milliard de fois (sans compter les éléments du vecteur b). Infaisable.

Souvent une méthode directe passe par une factorisation $A = BC$ avec $B, C \in \mathbb{M}(n \times n)$.

Quelques types de matrices dont la résolution est immédiate :

- Matrice diagonale.
- Matrice orthogonale parce que si A est orthogonale alors $Ax = v$ se résout par $x = A^t v$ qui n'est pas particulièrement lourd à faire numériquement.
- Matrice triangulaire.

Remarque 25.110.

Pour une matrice diagonale, le déterminant et l'inverse sont faciles. Mais également pour la triangulaire. Pour une matrice triangulaire, le déterminant est le produit des éléments diagonaux, et il se fait qu'il y a une algorithmie facile pour calculer l'inverse.

Donc en fait les matrices à résolution immédiates sont des matrices pour lesquelles l'inverse et le déterminant sont facile à calculer.

25.16.2 Méthodes itératives

Si la matrice est trop grande, il n'est pas possible de faire des manipulations de matrices à chaque itération.

En général, les méthodes itératives ne convergent pas toujours. Mais lorsqu'une méthode converge, c'est une propriété de la matrice, et donc la convergence aura lieu pour tout vecteur de départ x_0 . Cela est très différent du cas des équations non linéaires type Newton pour lesquelles la convergence peut fortement dépendre du point de départ.

25.17 Système linéaires (méthodes directes)

Les matrices que nous sommes autorisés à inverser sont les matrices

- orthogonales : l'inverse est la transposée
- diagonales : l'inverse est diagonale avec les inverses sur la diagonale
- triangulaires : nous en parlons maintenant.

25.17.1 Inversion de matrice triangulaire

Si T est une matrice triangulaire (mettons supérieure pour fixer les idées), il est possible d'en calculer l'inverse sans trop d'efforts. Notons B la matrice inverse que nous allons construire ligne par ligne. Vu que $BT = \mathbb{1}$ nous avons

$$\delta_{1j} = \sum_{k=1}^n B_{1k} T_{kj} = \sum_{k=1}^j B_{1k} T_{kl} \quad (25.267)$$

parce que $T_{kj} = 0$ pour $k > j$. Donc nous pouvons calculer les éléments B_{1j} un par un parce que chacun ne dépend que des précédents. Le même procédé fonctionne pour les autres lignes :

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^j B_{ik} T_{kj}. \quad (25.268)$$

Et tu notes que le calcul peut être parallélisé : le calcul de la ligne numéro j ne dépend pas du résultat des autres lignes.

25.17.2 Transformation gaussienne

Définition 25.111 (Transformation gaussienne[286]).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x_k \neq 0$. La k^e **transformation gaussienne** pour x est la matrice

$$M_k(x) = \mathbb{1} - T_k(x) \quad (25.269)$$

où $T_k(x)$ est la matrice unité à qui on a ajouté le vecteur

$$\tau_k(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1}/x_k \\ \vdots \\ x_n/x_k \end{pmatrix} \quad (25.270)$$

à la k^e colonne.

Autrement dit, la matrice $M_k(x)$ est la matrice

$$M_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & -x_{k+1}/x_k & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & -x_n/x_k & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25.271)$$

En coordonnées nous avons

$$(M_k(x))_{ij} = \delta_{ij} - \tau_k(x)_i \delta_{kj}. \quad (25.272)$$

25.112.

Les matrices de transformation gaussienne sont des matrices triangulaires de diagonale unitaire (c'est à dire avec des 1 sur la diagonale).

Lemme 25.113.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ alors nous avons

$$M_k(x)x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25.273)$$

Démonstration. Nous avons

$$(M_k(x)x)_i = \sum_l M_k(x)_{il}x_l = \sum_l (\delta_{il} - \tau_k(x)_i \delta_{kl})x_l = x_i - \tau_k(x)_i x_k. \quad (25.274)$$

Si $i \leq k$ nous avons $\tau_k(x)_i = 0$ et donc $(M_k(x)x)_i = x_i$. Si par contre $i \geq k+1$ alors $\tau_k(x)_i = \frac{x_i}{x_k}$ et alors $(M_k(x)x)_i = 0$. $\square$

Lemme 25.114.

Si $y \in \mathbb{R}^n$ vérifie $y_i = 0$ pour $i > k$ alors $M_{k+1}(x)y = y$.

Démonstration. C'est une simple vérification :

$$(M_{k+1}(x)y)_i = \sum_l (\delta_{il} - \tau_{k+1}(x)_i \delta_{k+1,l})y_l = y_i - \tau_{k+1}(x)_i y_{k+1}. \quad (25.275)$$

Mais comme $y_{k+1} = 0$ il nous reste automatiquement y_i . $\square$

Le sens de ce lemme est si un vecteur est déjà «gaussiannisé» au niveau k , alors en lui appliquant une transformation gaussienne de niveau plus élevé que k , il ne change pas. Ce fait est important parce qu'il assure que lorsque l'on avance dans le processus de Gauss, chaque étape ne détruit pas les précédentes.

Le lemme suivant nous indique que l'inverse d'une matrice de transformation gaussienne est facile à calculer¹⁷.

Lemme 25.115.

L'inverse de la transformation gaussienne

$$M_k(x)_{ij} = \delta_{ij} - \tau_k(x)_i \delta_{kj}. \quad (25.276)$$

est la matrice donnée par

$$M_k(x)_{ij}^{-1} = \delta_{ij} + \tau_k(x)_i \delta_{kj}. \quad (25.277)$$

Autrement dit, il suffit de changer le signe de la partie non diagonale.

Démonstration. Il s'agit d'une simple vérification, utilisant le produit matriciel explicite, et en remarquant que $\tau_k(x)_k = 0$ pour tout k . $\square$

25.17.3 Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU)

La méthode de Gauss est encore utilisée aujourd'hui dans les vrais problèmes.

La méthode de Gauss est souvent aussi appelée méthode «LU» qui va décomposer $A = LU$ où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure. La décomposition est même plus précise que cela : on demande que L ait seulement des 1 sur la diagonale.

17. Elle rentre d'ailleurs dans la catégorie des matrices triangulaires dont nous avons déjà discuté l'inverse.

Si A est une matrice nous notons

$$\Delta_k(A) = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \quad (25.278)$$

la matrice tronquée dont nous ne gardons que le carré $k \times k$ en haut à gauche.

Lemme 25.116.

Soit S une matrice triangulaire inférieure. Soient également A et B telles que $B = SA$. Alors

$$\Delta_k(B) = \Delta_k(S)\Delta_k(A). \quad (25.279)$$

Démonstration. En effet nous avons

$$\Delta_k(B)_{ij} = \sum_{l=1}^n S_{il}A_{lj}. \quad (25.280)$$

Dans la somme sur l il ne reste que les termes $l \leq i$. Mais dans le calcul des éléments de matrice $\Delta_k(B)_{ij}$, nous avons évidemment $i, j \leq k$. Donc $l \leq i \leq k$. Les seuls éléments de matrice de A qui sont utilisés dans la somme (25.280) sont les éléments A_{lj} avec $l, j \leq k$.

Nous pouvons donc limiter la somme à $l = k$ au lieu de $l = n$ et écrire $\Delta_k(A)_{lj}$ au lieu de A_{lj} .

Même chose en ce qui concerne S . À partir du moment où l est limité à k , les éléments S_{il} et $\Delta_k(S)_{il}$ sont les mêmes. $\square$

Théorème 25.117 (Décomposition LU [287, 8]).

Soit une matrice A inversible telles que $\det(\Delta_k(A)) \neq 0$ pour tout k . Alors il existe un unique couple de matrices (L, U) telles que

- U soit triangulaire supérieure
- L soit triangulaire inférieure, de diagonale unité
- $A = LU$.

De plus pour tout $k \leq n$ nous avons

$$\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U). \quad (25.281)$$

Démonstration. Nous allons prouver par récurrence le fait suivant : pour tout $1 \leq k \leq n-1$ il existe des matrices E_i ($i = 1, \dots, k$) telles que en posant

$$A_k = E_k \dots E_1 A, \quad (25.282)$$

- E_j est une transformation gaussienne pour la j^{e} colonne,
- pour tout $j \leq k$, $A_{ij} = 0$ dès que $i > j$. Autrement dit la matrice A_k est triangulaire supérieure jusqu'à y compris la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne (laquelle est quelconque). Exemple pour fixer les idées : pour une matrice $A \in M(4 \times 4)$, la matrice A_2 doit avoir la forme

$$A_2 = E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \circledast & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad (25.283)$$

où les éléments notés $*$ sont a priori non nuls,

- l'élément de matrice $(A_k)_{k+1, k+1}$ est non nul (celui entouré dans l'exemple).

La chose un peu triste dans cette démonstration est que l'initialisation va être très ressemblante au pas de récurrence.

Initialisation : $k = 1$ Vu que $\Delta_1(A)$ est inversible, l'élément A_{11} est non nul. Il existe donc une transformation gaussienne E_1 telle que la première colonne de la matrice $A_1 = E_1 A$ soit nul sauf la première composante. En particulier $(A_1)_{21} = 0$.

Par le lemme 25.116, nous avons $\Delta_2(A_1) = \Delta_2(E_1)\Delta_2(A)$, donc¹⁸

$$\det(\Delta_2(A_1)) = \det(\Delta_2(E_1)) \det(\Delta_2(A)). \quad (25.284)$$

Étant donnée la forme (25.271), toutes les matrices du type $\Delta_k(E_i)$ ont un déterminant unité, et par hypothèse $\Delta_2(A)$ est inversible, donc de déterminant non nul. Par conséquent $\det(\Delta_2(A_1)) \neq 0$. Mais comme ce déterminant est le produit des éléments diagonaux (c'est une matrice triangulaire), ces derniers ne sont pas nuls. Finalement, $(A_1)_2 \neq 0$.

Le pas de récurrence Nous supposons avoir $A_k = E_k \dots E_1 A$ avec $(A_k)_{k+1,k+1} \neq 0$. Alors il existe une transformation gaussienne E_{k+1} de la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne telle que $A_{k+1} = E_{k+1}A_k$ soit une matrice dont la $(k+1)^{\text{e}}$ colonne n'ait que des zéros en dessous de la $(k+1)^{\text{e}}$ position. Vu le lemme 25.114, cette transformation n'affecte pas les colonnes précédentes.

La matrice A_{k+1} est donc triangulaire supérieure jusqu'à la $(k+2)^{\text{e}}$ colonne.

Vu que le produit $E_k \dots E_1$ est une matrice triangulaire inférieure, le lemme 25.116 fonctionne encore et nous avons

$$\Delta_{k+1}(A_k) = \Delta_{k+1}(E_k \dots E_1)\Delta_{k+1}(A). \quad (25.285)$$

Au niveau des déterminants par hypothèse nous avons $\det(\Delta_{k+1}(A)) \neq 0$ et $\det(\Delta_{k+1}(E_k \dots E_1)) = 1$. Donc

$$\det(\Delta_{k+1}(A_k)) \neq 0. \quad (25.286)$$

Cette matrice état triangulaire, ses éléments diagonaux sont non nuls et nous avons $(A_k)_{k+1,k+1} \neq 0$.

En poussant la récurrence jusqu'au bout, la matrice

$$A_{n-1} = E_{n-1} \dots E_n A \quad (25.287)$$

est triangulaire supérieure.

Nous posons alors $L = (E_{n-1} \dots E_n)^{-1}$ et $U = A_{n-1}$. Cela prouve l'existence parce que

$$A = (E_{n-1} \dots E_1)^{-1} A_{n-1}. \quad (25.288)$$

Encore une fois, le lemme 25.116 nous donne

$$\Delta_k(A) = \Delta_k((E_{n-1} \dots E_1)^{-1})\Delta_k(A_{n-1}), \quad (25.289)$$

ou encore $\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U)$.

En ce qui concerne l'unicité, si $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ alors $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$. Vu qu'à gauche nous avons une matrice triangulaire inférieure et que à droite nous avons une triangulaire inférieure, nous savons que les deux membres représentent une matrice diagonale. Mais à gauche, la diagonale est unitaire. Donc les deux membres représentent la matrice unité. $\square$

25.118.

En pratique, pour résoudre $Ax = b$, il faut seulement appliquer les transformations gaussiennes à la matrice élargie $(A|b)$ pour finir sur un système du type

$$Ux = b' \quad (25.290)$$

qui est immédiatement soluble. Autrement dit, en effectuant les annulations de colonnes, la matrice U est «gratuite».

Il n'est pas indispensable de calculer la matrice L qui, elle, demande à chaque étape de se souvenir de la matrice E_i utilisée. Si il faut résoudre plusieurs systèmes $Ax_i = b_i$, nous pouvons encore travailler avec la matrice encore plus élargie $(A|b_1 \dots b_m)$.

Si par contre nous ne connaissons pas à l'avance l'ensemble des vecteurs b avec lesquels il faudra résoudre le système, il est bon de calculer la décomposition $A = LU$ in extenso, c'est à dire de garder une trace des matrices L et U séparément. Dans ce cas, résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $Ly = b$, et ensuite $Ux = y$. Ce sont deux systèmes de résolution directe parce que les matrices sont triangulaires.

18. Le déterminant est multiplicatif, proposition 6.49(1).

25.119.

Le fait que

$$\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U) \quad (25.291)$$

nous dit que si après avoir calculer L et U nous remarquons que le système est un peu plus petit ou un peu plus grand que prévu, tout le travail n'est pas perdu. En particulier si le système est plus petit que prévu, l'adaptation de L et U est immédiate.

Notons que U et L sont inversibles, et que $\det(L) = 1$. Donc $\det(U) = \det(A)$.

Exemple 25.120

Pour travailler la méthode de Gauss pour le système $Ax = b$, nous introduisons la matrice un peu augmentée $(A|b)$. Nous faisons un exemple. Soit à résoudre

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (25.292)$$

Nous introduisons la matrice augmentée

$$(A|b)^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}. \quad (25.293)$$

Le premier pas consiste à annuler tous les éléments sous la diagonale de la première colonne. Autrement dit, nous prenons le 2 comme pivot. Nous introduisons les multiplicateurs $l_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{i1}}$. La nouvelle matrice est :

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{pmatrix} \quad (25.294)$$

où nous avons utilisé les multiplicateurs $l_{21} = 2$, $l_{31} = -1$.

Et la matrice suivante est :

$$(A|b)^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (25.295)$$

où nous avons utilisé le multiplicateur $l_{32} = 2$.

Cela est un système de résolution immédiate :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 & (25.296a) \\ y + 4z = 6 & (25.296b) \\ 2z = 2. & (25.296c) \end{cases}$$

La troisième donne $z = 1$. Ensuite $y + 4 = 6$, donc $y = 2$. Et la première donne : $2x + 2 + 3 = 11$, c'est à dire $2x = 6$, enfin : $x = 3$.

Solution : $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

Nous notons surtout que dans $(A|b)^{(2)}$ nous avons une matrice triangulaire supérieure. Où est la matrice triangulaire inférieure ? En réalité la matrice L est la matrice des multiplicateurs :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.297)$$

△

Le problème de cette méthode est que faisant ainsi nous risquons d'avoir un zéro sur un des pivots. Par exemple tomber sur

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}. \quad (25.298)$$

Le zéro sur la deuxième ligne nous ennuie si nous voulons tout faire dans l'ordre. Mais notons qu'en échangeant les deux dernière lignes, tout va bien : le système donné par

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (25.299)$$

fonctionne très bien. Et même tellement bien qu'il est de résolution immédiate, dans ce cas.

Un autre problème est que si un des pivots est 10^{-14} , le multiplicateur sera de l'ordre 10^{14} , qui est mal représenté en mémoire. Il est donc bon de prendre les pivots le plus grand possible. Si le pivot est le plus grand nombre en valeur absolue d'une colonne, alors les nombres x_{k+i}/x_k qui entrent dans la matrice de transformation gaussienne sont des nombres dans $[-1, 1]$ qui sont bien représentés en mémoire.

Tout cela nous incite à développer une méthode de Gauss qui permet de tenir une trace des permutations.

25.17.4 Matrice de permutation élémentaires

Définition 25.121.

Une **matrice de permutation élémentaire** est une matrice obtenue en permutant deux lignes de la matrice identité. Nous notons P_{ij} la matrice obtenue en inversant les lignes i et j de la matrice identité.

Exemple 25.122

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{12}. \quad (25.300)$$

△

Lemme 25.123.

La matrice $P_{ij}A$ est la matrice A avec ses lignes i et j inversées.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$(P_{ij}A)_{kl} = \sum_m (P_{ij})_{km} A_{ml} \quad (25.301)$$

et de faire trois cas selon que $k = i$, $k = j$ ou k différent de i et j . Si $k = i$ alors $(P_{ij})_{im} = \delta_{mj}$ et si k est différent de i et j alors $(P_{ij})_{mk} = \delta_{km}$ (troisième cas similaire au premier). □

Et la matrice AP_{12} est la A avec ses deux premières colonnes échangées.

Avec ces notations, notre matrice $(A|b)^{0'}$ est

$$P_{12}(A|b)^{(0)}. \quad (25.302)$$

Puis la matrice $(A|b)^{(1')}$ est

$$P_{23}(A|b)^{(1)}. \quad (25.303)$$

Et la matrice P qui arrive dans $PA = LU$ est la matrice $P = P_{23}P_{21}$, qui est une matrice de permutation non élémentaire. Elle vaut :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25.304)$$

Lemme 25.124 ([288]).

Si $i, j > k$ alors les matrices de permutation élémentaires ont la relation de «commutation» suivante avec les transformations gaussiennes :

$$M_k(x)P_{ij} = P_{ij}M_k(P_{ij}(x)). \quad (25.305)$$

Démonstration. Il suffit de calculer les éléments de matrice :

$$(P_{ij}M_k(x))_{st} = (P_{ij})_{st} - \sum_m (P_{ij})_{sm} \tau_k(x)_m \delta_{kt}, \quad (25.306)$$

mais

$$\sum_m (P_{ij})_{sm} \tau_k(x)_m = (P_{ij} \tau_k(x))_s = \tau_k(P_{ij}(x))_s \quad (25.307)$$

parce que $i, j > k$ implique que dans $P_{ij} \tau_k(x)$ nous inversons deux élément non nuls de $\tau_k(x)$, tout en laissant le k^e élément. Le dénominateur ne change pas et il s'agit réellement d'une inversion de ligne. Donc

$$(P_{ij}M_k(x))_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k(P_{ij}(x))_s \delta_{kt}. \quad (25.308)$$

De l'autre côté,

$$(M_k(y)P_{ij})_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k(y)_s (P_{ij})_{kt}. \quad (25.309)$$

Mais comme $i, j > k$ la k^e ligne de P_{ij} est la même que celle de la matrice unité, donc $(P_{ij})_{kt} = \delta_{kt}$.

$$(M_k(y)P_{ij})_{st} = (P_{ij})_{st} - \tau_k(y)_s \delta_{kt}. \quad (25.310)$$

Cela correspond bien à (25.308). $\square$

25.17.5 Méthode de Gauss avec pivot partiel

À chaque pas, nous faisons une permutation de ligne. Nous permutons à chaque pas la première ligne avec celle qui a le pivot le plus grand (en valeur absolue). Donc :

$$(A|b)^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (25.311)$$

Nous commençons par déplacer des lignes :

$$(A|b)^{(0')} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}. \quad (25.312)$$

Les multiplicateurs sont $l_{21} = 1/2$ et $l_{31} = -1/2$. Le fait est que les multiplicateurs ont toujours le plus grand dénominateur possible et nous avons alors toujours $0 \leq |l_{ij}| \leq 1$, qui sont des nombres relativement petits, et bien représentés en mémoire.

Nous avons la nouvelle matrice

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & -1/2 & -2 & -3 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \end{pmatrix}. \quad (25.313)$$

Le pivot serait $-1/2$. Nous cherchons un pivot plus grand en dessous de ce $-1/2$ (et pas au dessus, sinon on casserait les zéros déjà trouvés). Nous trouvons le $5/2$ qui est plus grand. Nous permutons donc les deux dernières lignes :

$$(A|b)^{(1')} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \\ 0 & -1/2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad (25.314)$$

où le pivot est maintenant $l_{32} = -1/5$. La matrice suivante :

$$(A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & 5/2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix} \quad (25.315)$$

Dans ce cas, la matrice L n'est pas aussi simple à construire parce que nous avons permuté des choses. Dans ce cas, la matrice L est encore de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.316)$$

Mais vu que nous avons permuté les lignes 2 et 3 au deuxième pas, nous devons permuter l_{21} et l_{31} avant de remplir la matrice L avec les multiplicateurs :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.317)$$

Notons que ces L et U ne sont pas les mêmes que le LU obtenu sans pivot. Où est l'unicité ? Elle est que en fait maintenant nous n'avons pas $A = LU$, mais

$$PA = LU \quad (25.318)$$

où P est une matrice de permutation.

Proposition 25.125 (Méthode de Gauss avec pivot partiel[288]).

Soit une matrice inversible $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Il existe

- une matrice de permutation P
- une matrice triangulaire inférieure de diagonale unitaire L ,
- une matrice triangulaire supérieure inversible U

telles que

$$PA = LU. \quad (25.319)$$

Notons que cette proposition ne demande que l'hypothèse d'inversibilité pour A . Il n'y a pas d'hypothèses sur tous les mineurs comme c'était le cas avec Gauss sans pivot.

Démonstration. Nous prouvons par récurrence qu'il existe des matrices $Q_k, E_1, \dots, E_k$ et A_k telles que

$$Q_k A = E_1 \dots E_k A_k \quad (25.320)$$

avec

- (1) Q_k est une matrice de permutation
- (2) E_i est une transformation gaussienne sur la i^{e} colonne
- (3) A_k est triangulaire supérieure jusqu'à la k^{e} colonne.

Sachant que $\det(Q_k) = \pm 1$, et que $\det(E_i) = 1$, le passage au déterminant dans (25.320) nous donne $\det(A_k) \neq 0$ et si nous notons $\Omega_k(A)$ la matrice tronquée de A , ne gardant que les entrées plus grandes que k , nous avons

$$\det(A_k) = \prod_{i=1}^k (A_k)_{ii} \det(\Omega_{k+1}(A_k)). \quad (25.321)$$

Donc : $(A_k)_{ii} \neq 0$ pour $i \leq k$ et $\det(\Omega_{k+1}(A_k)) \neq 0$.

Pour fixer les idées, voici une image de $k = 2$:

$$\begin{array}{c} \Delta_k(A_2) \\ \left(\begin{array}{ccccc} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right) \\ \Omega_{k+1}(A_2) \end{array}$$

Étant donné que $\det(\Omega_{k+1}(A_k)) \neq 0$, parmi les nombres $(A_k)_{i,k+1}$ ($i \geq k+1$), au moins un est non nul et nous posons r_{k+1} tel que $|(A_k)_{r_{k+1},k+1}|$ soit maximum parmi ces éléments.

Le nombre r_{k+1} est enregistré parce qu'il servira à écrire la matrice P plus tard. Les matrices E_i ne sont pas enregistrées, parce que nous verrons qu'elles vont encore changer. Seule la dernière sera enregistrée.

La composante $(k+1, k+1)$ de la matrice

$$P_{r_{k+1},k+1} A_k \quad (25.322)$$

est non nulle et peut donc servir de pivot. Soit M_{k+1} la transformation gaussienne pour la $(k+1)^e$ colonne de la matrice $P_{r_{k+1},k+1} A_k$. La matrice

$$A_{k+1} = M_{k+1} P_{r_{k+1},k+1} A_k \quad (25.323)$$

est alors une matrice triangulaire supérieure jusqu'à la $(k+1)^e$ colonne. En posant $E_{k+1} = M_{k+1}^{-1}$ nous avons

$$P_{r_{k+1},k+1} E_{k+1} A_{k+1} = A_k, \quad (25.324)$$

et nous nous sentons en droit de récrire l'équation de départ (25.320) :

$$Q_k A = E_1 \dots E_k A_k = E_1 \dots E_k P_{r_{k+1},k+1} E_{k+1} A_{k+1}. \quad (25.325)$$

Le lemme 25.124 nous permet de ramener la matrice $P_{r_{k+1},k+1}$ en première position, quitte à modifier un peu (pas beaucoup) chacune des matrices E_i ($i = 1, \dots, k$). C'est pour cela que nous n'enregistrons pas les matrices E_i . Nous avons donc

$$P_{r_{k+1},k+1} Q_k A = E'_1 \dots E'_k E_{k+1} A_{k+1} \quad (25.326)$$

où

— Le produit $P_{r_{k+1},k+1} Q_k$ est encore une matrice de permutation, et mieux : elle vaut

$$\prod_{i=1}^{k+1} P_{r_i,i}. \quad (25.327)$$

Cela montre qu'il est suffisant d'enregistrer les nombres r_i pour reconstituer cette partie.

— La matrice E'_i est une transformation gaussienne pour la i^e colonne.

— La matrice A_{k+1} est triangulaire supérieure jusqu'à la $k+1^e$ colonne.

La récurrence est maintenant finie et nous pouvons écrire avec $k = n$:

$$Q_n A = E_1 \dots E_n A_n \quad (25.328)$$

où le produit $E_1 \dots E_n$ est triangulaire inférieure et A_n est triangulaire supérieur.

Maintenant nous enregistrons la matrice $U = A_n$, le produit $L = \prod_{i=1}^n E_i$ et les nombres r_i qui permettent de retrouver P . $\square$

Note : dans l'équation (25.328) nous avons bien entendu massivement renommé les E'_i en E_i . En réalité la matrice E_1 vient avec n primes sur la tête.

Dans les exemples 25.127, 25.128 et 25.129, nous allons résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (25.329)$$

d'abord de façon exacte, et ensuite en supposant une machine ne tenant que 8 chiffres significatifs en utilisant la méthode de Gauss avec ou sans pivot.

Commençons par voir comment se passe en pratique la décomposition $PA = LU$ de Gauss avec pivot partiel.

Exemple 25.126

Décomposons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25.330)$$

Sur la première colonne, le plus grand nombre est 3. Nous commençons par permuter la première et la troisième ligne en utilisant la matrice de permutation $P_1 = P_{3,1}$ et nous enregistrons $r_1 = 3$. Nous avons alors la matrice

$$A'_0 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (25.331)$$

La matrice de transformation gaussienne pour la première colonne est alors

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25.332)$$

et $L_1 = M_1^{-1}$. Le lemme 25.115 nous dit comment calculer facilement cet inverse :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25.333)$$

En suivant l'équation (25.323) nous posons $A_1 = M_1 A'_0$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \end{pmatrix} \quad (25.334)$$

et nous avons

$$Q_1 A = L_1 A_1 \quad (25.335)$$

où L_1 , A_1 et $r_1 = 3$ sont enregistrés. La matrice Q_1 peut être retrouvée en sachant r_1 parce que P est la matrice de permutation $P_{r_1,1}$.

Nous travaillons maintenant sur la deuxième colonne de A_1 . Le plus grand élément en valeur absolue (sous la diagonale) est $-2/3$. Nous posons $r_2 = 3$ et

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad (25.336)$$

et la matrice gaussienne pour la deuxième colonne est

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (25.337)$$

Le $-1/2$ provient du calcul $-((-1/3)/(-2/3))$. L'inverse de cette matrice est facile :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (25.338)$$

et la matrice suivante à enregistrer est

$$A_2 = M_2 P_{3,2} A_1 = M_2 A'_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \quad (25.339)$$

Notons toutefois que pour calculer cette matrice, seul le dernier élément demande un calcul. La première colonne ne change pas (par construction), la seconde gagne un zéro en dernière ligne (la matrice M_2 sert à ça) et sur la dernière colonne, seule la dernière ligne est sujette à changement.

Avec la matrice A_2 , la trigonalisation supérieure est faite. La décomposition n'est cependant pas terminée. Nous devons encore trouver la partie triangulaire inférieure. Nous en sommes à

$$Q_1 A = L_1 A_1 = L_1 P_{3,2} L_2 A \quad (25.340)$$

où Q_1 est la première matrice de permutation.

Utilisant le lemme 25.124, il est facile de permuter L_1 avec $P_{3,2}$:

$$L_1 P_{3,2} = P_{3,2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L'_1} \quad (25.341)$$

Nous avons donc

$$P_{3,2} P_{3,1} A = L'_1 L_2 A \quad (25.342)$$

Deux multiplications matricielles plus tard nous terminons :

$$PA = LU \quad (25.343)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \quad (25.344)$$

△

Notons que Sage utilise la méthode de Gauss avec pivots :

```

1 sage: A=matrix([ [1,2,3],[2,5,0],[3,8,0] ])
2 sage: A
3 [1 2 3]
4 [2 5 0]
5 [3 8 0]
6 sage: A.LU()
7 (
8 [0 1 0] [ 1 0 0] [ 3 8 0]
9 [0 0 1] [1/3 1 0] [ 0 -2/3 3]
10 [1 0 0], [2/3 1/2 1], [ 0 0 -3/2]
11 )

```

Mais attention : Sage crée une décomposition $A = PLU$ et non $PA = LU$. D'où le fait que la matrice de permutation de Sage est l'inverse de celle donnée ici.

Nous nous lançons dans la résolution du système

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (25.345)$$

Exemple 25.127

Nous commençons de façon exacte, par la méthode de Gauss sans pivot. La première transformation gaussienne est

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \quad (25.346)$$

et nous calculons

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-9} \end{pmatrix}. \quad (25.347)$$

Vu que cette dernière est triangulaire supérieure, nous avons fini la méthode de Gauss et $U = E_1 A$. En ce qui concerne la matrice L , elle est donnée par $L = E_1^{-1}$, c'est à dire

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.348)$$

Au final nous avons la décomposition $A = LU$ exacte suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-9} \end{pmatrix}. \quad (25.349)$$

Résoudre le système $Ax = b$ revient à résoudre $LUx = b$ et donc résoudre successivement les systèmes

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y. \end{cases} \quad (25.350a)$$

$$(25.350b)$$

D'abord le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (25.351)$$

donne $y_1 = 1$ et $y_2 = 2 - 10^9$.

Ensuite nous résolvons

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 10^9 \end{pmatrix}. \quad (25.352)$$

Cela donne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10^9}{1-10^9} \\ \frac{2-10^9}{1-10^9} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.353)$$

C'est également le résultat que trouve Sage :

```

1 sage: var('y')
2 y
3 sage: solve([10**(-9)*x+y==1, x+y==2], [x, y])
4 [[x == (1000000000/999999999), y == (999999998/999999999)]]

```

△

Exemple 25.128([288])

Nous recommençons tout le calcul avec une précision limitée à 8 chiffres significatifs, sans pivot.

Nous avons à nouveau la transformation gaussienne

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25.354)$$

mais pour calculer U nous effectuons le produit matriciel

$$U = E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}. \quad (25.355)$$

Nous détaillons à présent le calcul de l'élément noté $*$. Le calcul de $10^9 \ominus 1$ donne

$$999999999 = 9.99999999 \times 10^8, \quad (25.356)$$

mais la précision étant limitée à 8 chiffres, un arrondit arrive. Étant donné que le premier chiffres supprimé est un 9 nous retombons sur 10^9 , et donc notre machine à précision limitée donnera

$$U = \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & -10^9 \end{pmatrix}. \quad (25.357)$$

Ensuite le calcul de $L = E_1^{-1}$ ne cause pas de problèmes :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^9 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.358)$$

Maintenant il s'agit de résoudre les systèmes $Ly = b$ et $Ux = y$. Du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (25.359)$$

nous tirons tout de suite $y_1 = 1$ et ensuite $10^9 + y_2 = 2$, c'est à dire $y_2 = 2 - 10^9$, qui en précision limitée donne encore $y_2 = -10^9$. À résoudre maintenant :

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & -10^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^9 \end{pmatrix}. \quad (25.360)$$

Cela donne immédiatement $x_2 = 1$ et ensuite

$$10^{-9}x_1 + 1 = 1, \quad (25.361)$$

donc $x_1 = 0$. La solution trouvée est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (25.362)$$

qui est complètement faux au niveau de la première variable. △

Exemple 25.129([288])

Nous résolvons encore le même système en précision limitée, mais en utilisant cette fois la méthode de Gauss avec pivot partiel.

Le plus grand élément de la première colonne est 1 ; nous utilisons donc la permutation $P_{1,2}$:

$$P_{1,2}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.363)$$

La matrice de transformation gaussienne pour la première colonne de cette matrice est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \quad (25.364)$$

et nous posons

$$A_1 = M_1 P_{1,2} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -10^{-9} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U \quad (25.365)$$

où un arrondi a eu lieu pour $-10^{-9} + 1 = 1$. En inversant M_1 nous avons

$$L_1 = M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.366)$$

La décomposition est

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_U \quad (25.367)$$

Le moment de résoudre est venu. Vu que $PLUx = b$ nous devons résoudre les systèmes

$$\begin{cases} Pz = b & (25.368a) \\ Ly = z & (25.368b) \\ Ux = y. & (25.368c) \end{cases}$$

Pour z c'est facile :

$$z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.369)$$

Pour y il y a un arrondi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.370)$$

Tout de suite : $y_1 = 2$ et ensuite $2 \times 10^{-9} + y_2 = 1$, ce qui donne $y_2 = 1 \ominus 2 \times 10^{-9} = 1$. Donc

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.371)$$

Et enfin pour x c'est le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.372)$$

Nous avons $x_2 = 1$ et ensuite $x_1 + 1 = 2$ c'est à dire $x_1 = 1$. Au final la solution trouvée est

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.373)$$

Cette solution est considérablement meilleure que (25.362). △

25.130.

L'utilisation du pivot non seulement assure le fait que la trigonalisation va bien se passer (on évite les zéros en pivot), mais aussi et surtout, en choisissant de prendre le plus grand pivot possible, nous obtenons une meilleur stabilité numérique.

25.17.6 Déterminant

Pour calculer un déterminant lorsque nous avons la décomposition $A = LU$ nous pouvons faire

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \det(U) = \det(U) \quad (25.374)$$

parce que L est triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

Si par contre nous avons fait des pivots, nous avons $PA = LU$. Il nous faut le déterminant de P , qui n'est autre que ± 1 . Nous avons

$$\det(P) = (-1)^s \quad (25.375)$$

où s est le nombre de permutations effectives effectuées. Nous précisons «effectives» parce qu'il ne faut pas compter le pas où nous n'avons pas permuter (les cas où le bon pivot était présent du premier coup). Nous avons alors

$$\det(A) = (-1)^s \det(U). \quad (25.376)$$

25.17.7 Plusieurs termes indépendants

Mettons un système $Ax = b$ qu'il faut résoudre pour plusieurs b différents. C'est typiquement le cas où l'on voudrait calculer l'inverse de A . Mais on va directement se calmer. Soient donc à résoudre $Ax_1 = b_1, \dots, Ax_n = b_n$.

Les opérations (avec ou sans pivot) que nous faisons ne dépendent que de la matrice A , mais aucune décisions concernant les pivots ou la matrice des multiplicateurs ne dépend de b . Autre façon de dire : si le système $(A|b_1)$ devient $(U|y_1)$, le système $(A|b_i)$ devient $(U|y_i)$ avec le même U .

Nous ne sommes donc pas obligés de faire tout le travail autant de fois qu'il n'y a de systèmes à résoudre. Donc si on a plusieurs systèmes à résoudre avec la même matrice, on fait mieux de retenir une fois pour toute la décomposition LU (avec ou sans pivots), avant de vraiment résoudre.

Ou alors on peut aussi faire que, au lieu de faire $(A|b_i)$ plein de fois, faire une seule fois

$$(A|b_1 \dots b_n). \quad (25.377)$$

Et on fait tout le travail sur tous les vecteurs d'un en même temps.

Soit e_i la base canonique. Si nous notons x_n les solutions des problèmes $Ax_i = e_i$, tous les problèmes $Ax_i = e_i$ s'écrivent d'un seul coup

$$AX = Y \quad (25.378)$$

où X est la matrice des x_i en colonnes, et Y est celle des e_i en colonnes. Oh, mais $Y = \mathbb{I}$ évidemment. Donc

$$AX = \mathbb{I}. \quad (25.379)$$

Si nous supposons que A est inversible, alors ce X est l'inverse.

Donc pour calculer l'inverse d'une matrice de dimension non trop grande, il suffit d'utiliser la méthode de Gauss sur les vecteurs de la base canonique. Cette idée est la base du calcul de l'inverse par matrice companion. En effet, si nous partons du problème

$$(A|\mathbb{I}) \quad (25.380)$$

et nous appliquons la méthode de Gauss avec pivot, nous arrivons à

$$(U|L^{-1}P). \quad (25.381)$$

Attention : le produit $L^{-1}P$ est une permutation des colonnes de L^{-1} . Vu que L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, L^{-1} est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Donc si la matrice n'est pas trop grande, on peut assez facilement remettre les colonnes de $L^{-1}P$ dans l'ordre pour recomposer une matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale.

Une autre façon de calculer l'inverse, si $A = LU$ est connue, il suffit de faire

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}. \quad (25.382)$$

Et il existe un algorithme facile pour l'inverse d'une matrice triangulaire.

25.17.8 Cholesky

Le commandant Cholesky travaillait sur le tir de canon (chose éminemment liée à de nombreuses mathématiques ingénieuses). La méthode de Cholesky est encore utilisée aujourd'hui dans les vrais problèmes.

La méthode de Gauss s'applique sans hypothèses sur la matrice A , à part qu'elle doit être de petite dimension, comme pour toute méthode directe. Souvent nous savons des choses sur la matrice. Ici nous allons supposer que A est symétrique et définie positive.

Comment numériquement vérifier ces hypothèses ? En ce qui concerne la symétrie, il suffit de faire le test complet :

$$A^t = A. \quad (25.383)$$

La vérification de cela coûte au maximum n^2 comparaisons (et en fait la moitié de ça moins la diagonale).

Le fait que A soit définie positive est facile à vérifier pour utiliser Cholesky parce que il suffit de le faire, et si il n'y a pas de nombres complexes qui arrivent, c'est que la matrice était définie positive.

Un lemme très simple à mettre en oeuvre numériquement nous permet de traiter certains cas.

Lemme 25.131.

Une matrice symétrique possédant un élément négatif sur la diagonale n'est pas définie positive.

Démonstration. Un simple calcul ou effort d'imagination montre que $\langle Me_k, e_k \rangle = M_{kk}$. Donc si M doit être définie positive, M_{kk} doit être positive par le lemme 6.296. $\square$

Ce lemme est un moyen déjà de faire quelques vérifications. Et si les éléments diagonaux de A sont tous négatifs, on peut prendre $-A$.

Lemme 25.132.

Si A est une matrice symétrique strictement définie positive, alors pour tout k , la matrice tronquée $\Delta_k(A)$ l'est également.

Démonstration. Le fait que $\Delta_k(A)$ soit symétrique est évidemment. Le fait qu'elle soit définie positive l'est moins. Soit $y \in \mathbb{R}^k$ et le vecteur $\tau y \in \mathbb{R}^n$, qui est «complété» avec des zéros.

Nous avons $\langle \Delta_k(A)y, y \rangle_k = \langle A\tau y, \tau \rangle_n$. En effet

$$\langle \Delta_k(A)y, y \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k A_{il} y_l y_i. \quad (25.384)$$

Et à droite :

$$\langle A\tau y, \tau y \rangle = \sum_{i=1}^n (A\tau y)_i (\tau y)_i = \sum_{i=1}^k (A\tau y)_i y_i = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^n A_{il} (\tau y)_l y_i = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k A_{il} y_l y_i \quad (25.385)$$

où nous avons utilisé le fait que $(\tau y)_i = 0$ dès que $i > k$ et que $(\tau y)_i = y_i$ sinon.

En conséquence de quoi $\langle \Delta_k(A)y, y \rangle > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^k$ et la matrice $\Delta_k(A)$ est strictement définie positive. $\square$

Lemme 25.133.

Si T est une matrice triangulaire, alors $(T_{ii})^{-1} = (T^{-1})_{ii}$.

Démonstration. Il suffit de se rendre compte que le coefficient ii de l'égalité $\mathbb{1} = TT^{-1}$ donne

$$1 = \sum_l T_{il} (T^{-1})_{li}. \quad (25.386)$$

Dans la somme il ne reste que le terme $l = i$. $\square$

Nous allons chercher une décomposition de type LU sous la forme $A = LL^t$, c'est à dire $U = L^t$. Attention : maintenant nous n'avons plus des 1 sur la diagonale. Ce n'est donc pas exactement la décomposition LU dont nous parlions plus haut. C'est pour cela que nous n'allons pas la noter LL^t mais BB^t .

Théorème 25.134 (Cholesky[287]).

Soit une matrice réelle symétrique strictement définie positive. Il existe une unique matrice réelle B telle que

- B est triangulaire inférieure,
- la diagonale de B est positive,
- $A = BB^t$.

Démonstration. Par la décomposition LU du théorème 25.117 nous avons des matrices L et U telles que $A = LU$. Soit D la matrice diagonale donnée par

$$D_{ii} = \sqrt{U_{ii}}. \quad (25.387)$$

Cette définition fonctionne parce que $U_{ii} > 0$. En effet nous savons que $\Delta_k(A) = \Delta_k(L)\Delta_k(U)$, et en passant au déterminant,

$$\det(\Delta_k(A)) = \det(\Delta_k(U)). \quad (25.388)$$

Vu que $\Delta_k(A)$ est strictement définie positive par le lemme 25.132, son déterminant est strictement positif¹⁹ et nous avons

$$\det(\Delta_k(U)) > 0. \quad (25.389)$$

En appliquant cela à $k = 1$ nous avons $U_{11} > 0$ puis de proche en proche, $U_{ii} > 0$ pour tout i .

Nous posons :

$$B = LD \quad \text{qui est triangulaire inférieure} \quad (25.390a)$$

$$C = D^{-1}U \quad \text{qui est triangulaire supérieure.} \quad (25.390b)$$

Nous avons bien entendu $A = BC$ et nous allons prouver que $C = B^t$. Vu que $A = A^t$ nous pouvons identifier BC et C^tB^t :

$$BC = C^tB^t. \quad (25.391)$$

En mettant les matrices triangulaires supérieures à gauche et inférieures à droite :

$$C(B^t)^{-1} = B^{-1}C^t, \quad (25.392)$$

qui sont donc deux matrices diagonales. Nous montrons que cette diagonale est en réalité l'identité.

D'abord

$$B_{ii} = \sum_{l=1}^n L_{il}D_{li} = L_{ii}\sqrt{U_{ii}} = \sqrt{U_{ii}} \quad (25.393)$$

parce que $L_{ii} = 1$. Notons en passant que la diagonale de B est positive. Ensuite

$$C_{ii} = \sum_{l=1}^n (D^{-1})_{il}U_{li} = (D^{-1})_{ii}U_{ii} = \frac{1}{\sqrt{U_{ii}}}U_{ii} = \sqrt{U_{ii}}. \quad (25.394)$$

Donc B et C ont des diagonales égales. Calculons alors la diagonale de $B^{-1}C^t$:

$$(B^{-1}C^t)_{ii} = \sum_l (B^{-1})_{il}(C^t)_{li} = (B^{-1})_{ii}C_{ii} \quad (25.395)$$

parce que encore une fois, de la somme il ne reste que le terme $l = i$.

¹⁹. Le théorème 6.292 donne une diagonalisation par des matrices de déterminant 1. Vu que les valeurs propres forment sur la diagonale, et qu'elles sont toutes positives, el déterminant est positif.

Mais B est une matrice triangulaire qui tombe sous le coup du lemme 25.133. Donc $(B^{-1})_{ii} = (B_{ii})^{-1} = (C_{ii})^{-1}$. Nous avons alors

$$(B^{-1}C^t)_{ii} = 1. \quad (25.396)$$

Cela conclut l'existence de la décomposition de Cholesky.

En ce qui concerne l'unicité, soient $A = BB^t = CC^t$. Nous regroupons les supérieures et les inférieures :

$$B^t(C^t)^{-1} = B^{-1}C. \quad (25.397)$$

Ces deux matrices sont donc diagonales et nous posons $D = B^{-1}C$, c'est à dire $C = BD$. Nous remplaçons donc C par BD dans (25.397) :

$$A = BB^t = BD(BD)^t = BDD^tB^t. \quad (25.398)$$

Donc $DD^t = \mathbb{1}$, ce qui signifie que les éléments diagonaux de D sont ± 1 . Nous montrons qu'ils sont positifs : à partir de $C = BD$ nous déballons

$$C_{ii} = \sum_l B_{il}D_{li}, \quad (25.399)$$

et donc

$$B_{ii}D_{ii} = C_{ii}. \quad (25.400)$$

En sachant que les conditions de la décomposition de Cholesky demandent les éléments diagonaux positifs nous en déduisons que D_{ii} est positif et donc égal à 1. Finalement $D = \mathbb{1}$ et $B = C$. $\square$

Prenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & -7 \\ -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \quad (25.401)$$

Elle est symétrique et définie positive. Nous posons

$$\{ l_{11} = \sqrt{a_{11}}l_{i1} = a_{i1}/l_{11} \quad (25.402a)$$

pour $i = 2, \dots, n$. Et aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2} \end{array} \right. \quad (25.403a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/a_{jj} \end{array} \right. \quad (25.403b)$$

pour $i = j + 1, \dots, n$.

Les formules (25.402) nous disent comment remplir la première colonne. Cela donne la matrice

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{4} = 2 & . & . \\ 2/2 = 1 & . & . \\ -2/2 = -1 & . & . \end{pmatrix} \quad (25.404)$$

Les formules (25.403) donnent les autres colonnes en fonction des précédentes.

Dans Sage :

```

1 sage: A=matrix( [ [4,2,-2],[2,10,-7],[-2,-7,9] ] )
2 sage: A
3 [ 4  2 -2]
4 [ 2 10 -7]
5 [-2 -7  9]
6 sage: A.cholesky()
```

7	[	2	0	0]
8	[	1	3	0]
9	[	-1	-2	2]

sageSnip005.sage

25.18 Système linéaire (méthodes itératives)

Nous trouvons des méthodes itératives lorsque les matrices sont grandes, ce qui arrive lorsque l'on discrétise une équation différentielle.

Nous allons chercher des méthodes de la forme $x_{n+1} = Bx_n + q$; ce sont des méthodes stationnaires. La convergence d'une méthode est toujours liée à la matrice B et en général, la convergence ne dépend pas du choix du vecteur initial. Nous faisons donc souvent $x_0 = 0$ et donc $x_1 = q$. Voilà donc une itération de faire gratuitement.

Nous notons e_k le **vecteur d'erreur** qui est défini par $e_k = x - x_k$. Et le **vecteur résidu** $r_k = b - Ax_k$. Attention : ici k n'est pas un indice mais un numéro de vecteur.

Notons que si x est solution, alors $b - Ax = 0$, ce qui motive le vecteur résidu.

Les conditions d'arrêt d'un algorithme seraient

$$\begin{cases} \|e_k\|_\infty \ll \epsilon_1 \\ \|r_k\|_\infty < \epsilon_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (25.405a) \\ (25.405b) \end{matrix}$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont des précisions décidées à l'avance par l'utilisateur.

Proposition 25.135.

Si A est une matrice inversible, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0. \quad (25.406)$$

Vu que $r_k = Ae_k$, si la matrice A est mal conditionnée, il peut arriver que r_k reste grand alors que e_k est déjà petit.

Remarque 25.136.

Dans les méthode stationnaires, nous avons $x_{n+1} = Bx_n + q$ avec B et q fixés au départ de l'algorithme. Il existe des méthodes non stationnaires pour lesquelles l'itération prend la forme $x_{n+1} = B_n x_n + q_n$ avec B_n et q_n qui changent avec les étapes.

Proposition 25.137.

Pour la méthode $x_{n+1} = Bx_n + q$ nous avons équivalence de

- (1) La méthode converge pour tout x_0
- (2) B est une matrice convergente²⁰
- (3) $\rho(B) < 1$ (rayon spectral).

De plus si $\|B\| < 1$ alors la méthode converge (quelle que soit la norme algébrique).

La norme d'une matrice (en tout cas, certaines normes) est quelque chose de facile à calculer à l'ordinateur. Typiquement $\|\cdot\|_\infty$ est un simple maximum. Cependant si après avoir calculer $\|B\|_i$ pour des dizaines de normes i différentes, nous avons toujours $\|B\|_i \geq 1$, alors nous ne pouvons rien conclure.

20. C'est à dire $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$.

25.18.1 La méthode générale

Nous décomposons la matrice A sous la forme $A = M - N$ avec M inversible. Le système $Ax = b$ devient

$$Mx - Nx = b \quad (25.407)$$

puis $Mx = Nx + b$ et finalement

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b, \quad (25.408)$$

et voila une méthode stationnaire avec $B = M^{-1}N$ et $q = M^{-1}b$.

Mais ici nous voyons que M doit être non seulement inversible, mais en plus doit être facilement calculable. En sachant que nous travaillons avec des grandes matrices, il n'est pas question d'inverser M avec une méthode de Gauss.

En bref, il faut choisir M triangulaire parce que c'est en gros la seule que nous pouvons inverser facilement ²¹.

Remarque 25.138.

La matrice B ne doit pas spécialement être inversible. Si elle ne l'est pas, ce n'est pas un problème.

25.18.2 Jacobi

Nous décomposons

$$A = D - E - F \quad (25.409)$$

où D est la diagonale de A , $-F$ est la partie triangulaire supérieure (sans la diagonale) et $-E$ la triangulaire inférieure (sans la diagonale). Donc D , E et F sont simplement des extraction de parties de la matrice A (et quelque changements de signes).

La méthode de Jacobi prend $M = D$ et $N = (E + F)$. L'inverse de M est facile à calculer parce que M est diagonale. Nous notons B_J la matrice B de la méthode de Jacobi.

Remarque 25.139.

Il se peut que la matrice A ait des zéros sur la diagonale, même si elle est inversible. Et cela est un problème parce qu'alors la matrice D ici construite n'est pas inversible. Dans ce cas, avant de nous lancer dans la méthode de Jacobi, il faut permuter deux lignes de A et donc de b .

Attention cependant que l'on pourrait vouloir effectuer ces permutations en mettant sur la diagonale des nombres les plus grands possibles (parce qu'ensuite, ce qui rentre dans les calculs, c'est D^{-1} qui aura alors des petits nombres). Mais il faut toutefois faire en sorte que le rayon spectral de la matrice B résultante reste plus petit que 1.

Chaque changement dans A induit des changements dans B et donc sur la convergence de la méthode.

25.18.3 Gauss-Seidel

Nous partons de la même décomposition $A = D - E - F$ que dans (25.409). La méthode de Gauss-Seidel prend $M = (D - E)$ et $N = F$.

25.18.4 Autres

Voir la méthode des gradients, et des gradients conjugués.

21. Les matrices orthogonales sont aussi facilement inversibles, mais ne se prêtent pas bien à une décomposition de type somme.

Chapitre 26

Variables aléatoires et théorie des probabilités

26.1 Espace de probabilité

Une **mesure de probabilité** sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A})$ est une mesure positive telle que $P(\Omega) = 1$. Dans ce cas, le triple $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace de probabilité**.

Un point $\omega \in \Omega$ est une **observation**, une partie mesurable $A \in \mathcal{A}$ est un **événement**. L'ensemble $A \cup B$ représente l'événement A ou B tandis que l'ensemble $A \cap B$ représente l'événement A et B .

Si les A_n sont des événements, nous avons défini en 7.87 limite supérieure et la limite inférieure de la suite A_n par

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad (26.1)$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad (26.2)$$

Si $\omega \in \liminf A_n$, alors ω réalise tous les A_n sauf un nombre fini.

Nous avons

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}. \quad (26.3)$$

Théorème 26.1 (Borel-Cantelli).

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \quad (26.4)$$

alors $P(\limsup A_n) = 0$.

Démonstration. La condition $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$ signifie que la fonction

$$\varphi = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{A_n} \quad (26.5)$$

est P -intégrable. Par conséquent, elle est finie presque partout (au sens de P), c'est à dire

$$P(\varphi = \infty) = 0. \quad (26.6)$$

Les points ω sur lesquels $\varphi(\omega) = \infty$ sont ceux tels que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty, \quad (26.7)$$

c'est à dire les ω qui appartiennent à une infinité d'ensembles A_n , ou encore les $\omega \in \limsup A_n$. Nous avons donc montré que

$$\{\omega \text{ tel que } \varphi(\omega) = \infty\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\} = \limsup A_n. \quad (26.8)$$

Or l'hypothèse signifie que la probabilité du membre de gauche est nulle. $\square$

Corollaire 26.2.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(\mathbb{C}A_n) < \infty$, alors presque sûrement tous les B_n sont réalisés à l'exception d'un nombre fini.

26.2 Variables aléatoires

Définition 26.3.

Une **variable aléatoire** est une application mesurable

$$X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)). \quad (26.9)$$

Nous convenons que $\mathbb{R}^1 = \bar{\mathbb{R}}$, c'est à dire que dans le cas où la variable aléatoire X est réelle, nous acceptons les valeurs $\pm\infty$.

Définition 26.4.

Une variable aléatoire réelle X est **absolument continue** si il existe une fonction positive et intégrable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$P(X \in I) = \int_I f(t) dt. \quad (26.10)$$

Nous disons alors que f est la **densité** de X .

Cela ne devrait pas être sans rappeler la définition 13.182.

26.2.1 Indépendance

La définition suivante vient de l'instructive motivation de [7]. La définition d'indépendance de deux événements se généralise à n événements de la façon suivante.

Définition 26.5.

Nous disons que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont **indépendants** si pour tout choix $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ nous avons

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}). \quad (26.11)$$

Les sous tribus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sont **indépendantes** si pour tout choix $A_i \in \mathcal{A}_i$, les événements A_i sont indépendants.

Exemple 26.6

Soit $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $A = [0, a] \times [0, 1]$ et $B = [0, 1] \times [0, b]$. Nous avons $P(A) = a$ et $P(B) = b$ ainsi que $P(A \cap B) = ab$. $\triangle$

Lemme 26.7.

Les tribus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n) \quad (26.12)$$

pour tout $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Démonstration. L'implication dans le sens direct découle immédiatement des définitions.

Nous supposons avoir un choix $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $A_i \in \mathcal{A}_i$ et nous devons montrer que ces événements sont indépendants, c'est à dire que si $J \subset \{1, \dots, n\}$ alors les événements $(A_j)_{j \in J}$ sont indépendants. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que si $i \notin J$, $A_i = \Omega$. Alors nous avons

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i) = \prod_{j \in J} P(A_j) \quad (26.13)$$

parce que $P(A_i) = P(\Omega) = 1$ lorsque i n'est pas dans J . $\square$

Si A est un événement, la **tribu engendrée** par A est

$$\sigma(A) = \{\emptyset, A, \complement A, \Omega\}. \quad (26.14)$$

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire. Conformément à la définition 7.69, la **tribu engendrée** est

$$\mathcal{A}_X = \{X^{-1}(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}. \quad (26.15)$$

Cela est la plus petite tribu sous tribu de $\mathcal{A}$ pour laquelle X est mesurable. Elle sera aussi (le plus) souvent notée $\sigma(X)$.

Définition 26.8.

Nous disons que les variables aléatoires $X_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ sont **indépendantes** si les tribus $\mathcal{A}_{X_1}, \dots, \mathcal{A}_{X_n}$ le sont.

Remarque 26.9.

Il n'a de sens de dire que X_1 et X_2 sont indépendants que si X_1 et X_2 sont des application dont l'espace de départ est identique.

Si nous voulons modéliser le jet de deux pièce indépendantes, le mauvais choix est de faire $\Omega = \{0, 1\}$, y mettre la mesure d'équiprobabilité, et de considérer les deux variables aléatoires

$$X_i(\omega) = \begin{cases} f & \text{si } \omega = 0 \\ p & \text{si } \omega = 1. \end{cases} \quad (26.16)$$

Ces deux variables sont évidemment pas indépendantes. Il faut poser $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, y mettre la mesure d'équiprobabilité et poser

$$X_1(x, y) = \begin{cases} f & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases}, \quad (26.17)$$

$$X_2(x, y) = \begin{cases} f & \text{si } y = 0 \\ p & \text{si } y = 1 \end{cases}, \quad (26.18)$$

Ces variables aléatoires sont indépendantes. Par exemple

$$X_1^{-1}\{p\} = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad (26.19a)$$

$$X_2^{-1}\{p\} = \{(0, 1), (1, 1)\} \quad (26.19b)$$

et on a bien

$$P(X_1^{-1}\{p\} \cap X_2^{-1}\{p\}) = P\{(1, 1)\} = \frac{1}{4} \quad (26.20)$$

ainsi que

$$P\{X_p^{-1}(p)\} = \frac{1}{2} \quad (26.21a)$$

pour $i = 1$ et $i = 2$.

Proposition 26.10.

Soient $(X_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_k})$ des variables aléatoires indépendantes.

(1) Si $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_k})$. Alors

$$P(X_k \in B_k \forall k \leq n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n). \quad (26.22)$$

(2) Les événements $\{X_i \in B_i\}$ sont indépendants.

(3) Les tribus engendrées par des X_i et d'autres sont indépendantes. Plus précisément, si I et J sont deux ensembles disjoints de $\mathbb{N}$ alors les tribus

$$\sigma(\{X_i, i \in I\}) \quad (26.23)$$

et

$$\sigma(\{X_i, i \in J\}) \quad (26.24)$$

sont indépendantes.

Démonstration. Lorsque nous écrivons $X_i \in B_i$, nous parlons de l'événement

$$(X_i \in B_i) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_i(\omega) \in B_i\} = X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}_{X_i}. \quad (26.25)$$

Vu que par hypothèse les tribus $(\mathcal{A}_i)$ sont indépendantes, le lemme 26.7 nous montre que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \in B_i\right) = \prod_i P(X_i \in B_i). \quad (26.26)$$

Il reste à voir que l'ensemble $X_i^{-1}(B_i)$ fait partie de la tribu $\mathcal{A}$ de départ. Cela est la définition du fait que l'application X_i soit une variable aléatoire : elle doit être mesurable en tant qu'application

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)). \quad (26.27)$$

Les affirmations (2) et (3) ne sont que des façons alternatives d'exprimer la même chose. $\square$

Lemme 26.11.

Les événements $(A_i)_{i=0,\dots,n}$ sont indépendants si et seulement si les événements obtenus en remplaçant certains des A_i par $\mathbb{C}A_i$ le sont.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons nous contenter de prouver que les événements $\mathbb{C}A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants sous l'hypothèse que les événements $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont indépendants. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$. Nous avons

$$P(\mathbb{C}A_0 \bigcap_{i \in I} A_i) = P\left(\bigcap_{i \in I} A_i \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \cap A_0\right) \quad (26.28a)$$

$$= P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) - P\left(\bigcap_{i \in I} A_i \cap A_0\right) \quad (26.28b)$$

$$= P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) (1 - P(\mathbb{C}A_0)) \quad (26.28c)$$

$$= P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) P(\mathbb{C}A_0). \quad (26.28d)$$

$\square$

Proposition 26.12.

Les événements $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ sont indépendants si et seulement si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$ le sont.

Démonstration. La tribu engendrée par la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_k}$ est

$$\mathcal{A}_{\mathbb{1}_{A_k}} = \{\emptyset, A_k, \complement A_k, \Omega\}. \quad (26.29)$$

En effet si $1 \in B$, alors $A_i \subset \mathbb{1}_{A_i}^{-1}(B)$, et si $0 \in B$, alors $\complement A_i \subset \mathbb{1}_{A_i}^{-1}(B)$. Les éléments 0 et 1 sont tous deux soit dans B , soit hors de B . Cela donne les 4 possibilités énumérées dans (26.29).

Supposons que les événements (A_i) sont indépendants. Nous devons vérifier que les tribus le soient, c'est à dire que les événements A_i et $\complement A_j$ sont indépendants. Cela est une conséquence du lemme 26.11. $\square$

Théorème 26.13 (Doob[117]).

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une variable aléatoire. Une fonction $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une variable aléatoire $\mathcal{A}_X$ -mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que $Y = f(X)$.

Proposition 26.14.

Soient des variables aléatoires $X_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_k}$ des variables aléatoires indépendantes et des fonctions boréliennes $f_k: \mathbb{R}^{d_k} \rightarrow \mathbb{R}^{p_k}$. Alors les variables aléatoires $f_k(X_k)$ sont indépendantes.

Démonstration. Le théorème 26.13 assure que les applications

$$f_k \circ X_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_k} \quad (26.30)$$

sont $\mathcal{A}_{X_k}$ -mesurables. En particulier pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^{p_k}$, nous avons $X_k^{-1} \circ f_k^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{X_k}$. Nous avons donc

$$\sigma(f_k \circ X_k) \subset \sigma(X_k), \quad (26.31)$$

et par conséquent les tribus $\sigma(f_k \circ X_k)$ sont indépendantes étant donné que les tribus $\sigma(X_k)$ le sont. $\square$

Lemme 26.15 (Lemme de regroupement).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{A})_{i \in I}$ une famille de tribus indépendantes dans $\mathcal{A}$. Si $(M_j)_{j \in J}$ est une partition de I , alors les tribus

$$\mathcal{B}_j = \sigma\left(\bigcup_{i \in M_j} \mathcal{A}_i\right) \quad (26.32)$$

sont indépendantes.

Si les variables aléatoires $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ sont indépendantes, et si f et g sont des fonctions mesurables, alors les variables aléatoires $f(X_2, X_3, X_5)$ et $g(X_1, X_4)$ sont indépendantes.

Une preuve a l'air d'être donnée dans [289].

26.2.2 Lois conjointes et indépendance

Définition 26.16.

*Deux événements A et B sont dits **indépendants** si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (26.33)$$

Si nous considérons n variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la loi du n -uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ appelée la **loi conjointe** des lois X_i . Dans ce cas, les variables aléatoires X_i elles-mêmes sont dites lois **marginales** de X .

Proposition 26.17.

Les variables aléatoires $\{X_i\}$ sont indépendantes si et seulement si

$$P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}. \quad (26.34)$$

Définition 26.18.

Soient $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires réelles (pas spécialement indépendantes). La **densité conjointe** de $X_1, \dots, X_n$ est la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

- (1) $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
- (2) $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$,
- (3) pour tout $A_i \subset \mathbb{R}$ nous avons

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \in A_i\right) = \int_{\prod_{i=1}^n A_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (26.35)$$

Proposition 26.19.

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont des densités $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$, alors la variable aléatoire conjointe $X = (X_1, \dots, X_n)$ a pour densité conjointe la fonction

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n). \quad (26.36)$$

Démonstration. En partant de la définition de l'indépendance et de la fonction de densité conjointe, ainsi qu'en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) \\ &= P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n) \\ &= \left(\int_{A_1} f_{X_1}(x_1) dx_1 \right) \dots \left(\int_{A_n} f_{X_n}(x_n) dx_n \right) \\ &= \int_{A_1 \times \dots \times A_n} f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (26.37)$$

La fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$ vérifie donc la condition (3) de la définition 26.18. La vérification des autres conditions est immédiate. $\square$

La proposition suivante provient du fait que la mesure d'une loi conjointe est le produit des mesures lorsque les variables aléatoires sont indépendantes (proposition 26.17).

Proposition 26.20 ([117]).

Si les variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ sont intégrables et indépendantes, alors leur produit est intégrable et l'espérance du produit est égal au produit des espérances :

$$E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n). \quad (26.38)$$

26.2.3 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y , deux variables aléatoires réelles indépendantes. Nous voudrions étudier la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$. Nous commençons par calculer la fonction de répartition en utilisant le résultat de la proposition 26.19 :

$$F_{X+Y}(z) = P(X + Y \leq z) = \int_{x+y \leq z} f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (26.39a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} dy f_X(x) f_Y(y) \quad (26.39b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) dy \right) f_X(x) dx \quad (26.39c)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F_Y(z - x) f_X(x) dx. \quad (26.39d)$$

Pour calculer la fonction de densité de S , nous dérivons la fonction de répartition :

$$f_{X+Y}(z) = \frac{dF_{X+Y}}{dz}(z) \quad (26.40a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_Y(z-x)f_X(x)dx, \quad (26.40b)$$

ce qui nous amène à dire que la densité de la somme est le produit de convolution¹ des densités :

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x-t)f_X(t)dt, \quad (26.41)$$

ou encore $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

Notez que nous avons passé sous le silence la difficulté d'inverser la dérivée et l'intégrale. Un exemple sera donné au point 26.5.8.

Lemme 26.21.

Soient X et Y , deux variables aléatoires indépendantes. Alors

$$E(XY) = E(X)E(Y). \quad (26.42)$$

Démonstration. Par indépendance et par proposition 26.19, la fonction de densité conjointe de X et Y vaut $f_{X,Y} = f_X f_Y$. Par conséquent l'utilisation de Fubini sous la forme (13.102) entraîne

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy = E(X)E(Y). \quad (26.43)$$

□

Nous dirons tout un tas de chose sur l'indépendance et la variance en 26.5.13, mais pour l'instant nous allons mentionner et démontrer déjà ceci :

Lemme 26.22.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Alors

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y). \quad (26.44)$$

Démonstration. Par définition, $\text{Var}(X+Y) = E([X+Y - E(X) - E(Y)]^2)$. En développant le carré et en utilisant le lemme 26.21,

$$\text{Var}(X+Y) = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y). \quad (26.45)$$

□

Exemple 26.23

Deux variables aléatoires non indépendantes dont la covariance est nulle. Nous considérons la variable aléatoire

$$Z: \Omega \rightarrow \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\} \quad (26.46)$$

de loi uniforme. C'est à dire que $P(Z=z) = \frac{1}{4}$ pour tout z . Ensuite nous considérons les variables aléatoires $X = \text{proj}_1 \circ Z$ et $Y = \text{proj}_2 \circ Z$. Toute personne étant capable de compter jusqu'à 4 voit que

$$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{4} \quad (26.47a)$$

$$P(X=0) = \frac{1}{2}, \quad (26.47b)$$

1. Définition 18.33.

et les mêmes probabilités pour Y . De même $E(X) = E(Y) = 0$. Par conséquent

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) = 0 \quad (26.48)$$

parce que pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons soit $X(\omega) = 0$ soit $Y(\omega) = 0$. Ces variables aléatoires X et Y ne sont donc pas corrélées.

Mais elles ne sont pas indépendantes pour autant, comme nous allons le voir pas plus tard qu'immédiatement. Nous avons

$$P(X = 0 | Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = 0 \quad (26.49)$$

parce que X et Y ne peuvent pas être simultanément nulles, tandis que

$$P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{4}. \quad (26.50)$$

△

26.2.4 Espérance

Nous dirons que la variable aléatoire X a un **moment d'ordre** p si $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ($1 \leq p < \infty$). Si X est **intégrable** (c'est à dire si $X \in L^1$), alors nous définissons l'**espérance** de X par

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP \in \mathbb{R}^d. \quad (26.51)$$

Si $E(X) = 0$ nous disons que la variable aléatoire est **centrée**. La variable aléatoire $X - E(X)$ est la variable aléatoire centrée associée à X .

Le **moment** d'ordre p de la variable aléatoire X est l'espérance

$$m_n(X) = E(X^n). \quad (26.52)$$

Proposition 26.24.

Si X et Y sont deux variables aléatoires (pas spécialement indépendantes), nous avons

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \quad (26.53)$$

Nous donnons la preuve dans le cas de variables aléatoires indépendantes. Le cas plus général de variable aléatoires non indépendantes peut être trouvé dans [290].

Démonstration. Nous avons le calcul suivant :

$$E(X + Y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X+Y}(x) dx \quad (26.54a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x \int_{\mathbb{R}} f_Y(x - t) f_X(t) dt dx \quad (26.54b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x f_Y(x - t) dx}_{=E(Y)+t} dt \quad (26.54c)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(t) (E(Y) + t) dt \quad (26.54d)$$

$$= E(Y) + \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt \quad (26.54e)$$

$$= E(Y) + E(X) \quad (26.54f)$$

où nous avons utilisé la proposition 26.41 et le fait que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une densité vaut 1. □

Une application de l'inégalité de Hölder (proposition 18.20) est la suivante. Si X et Y sont des variables aléatoires intégrables alors

$$E(XY) \leq E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2}. \quad (26.55)$$

En effet

$$E(XY) \leq \|XY\|_{L^1(\Omega)} \leq \|X\|_{L^2(\Omega)} \|Y\|_{L^2(\Omega)}. \quad (26.56)$$

26.2.5 Variance

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors nous définissons la **variance** de X par

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2). \quad (26.57)$$

Proposition 26.25.

La variance de la variable aléatoire X peut être exprimée par la formule

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (26.58)$$

où $X^2 = X \cdot X$ et $E(X)^2 = E(X) \cdot E(X)$ sont des produits scalaires dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. De façon explicite, nous avons

$$E([X - E(X)]^2) = \int_{\Omega} (X(\omega) - E(X)) \cdot (X(\omega) - E(X)) dP(\omega) \quad (26.59)$$

où $E(X) \in \mathbb{R}^d$ est une constante. En développant le produit scalaire nous avons

$$E([X - E(X)]^2) = E(X^2 - 2X \cdot E(X) + E(X)^2) \quad (26.60a)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \quad (26.60b)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2. \quad (26.60c)$$

□

Nous définissons l'**écart-type** de X par

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (26.61)$$

En d'autres termes,

$$\sigma_X = \|X - E(X)\|_{L^2}. \quad (26.62)$$

On définit encore la **moyenne quadratique** de X par

$$\|X\|_{L^2} = [E(X^2)]^{1/2}. \quad (26.63)$$

La variable aléatoire

$$\bar{V}_n = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad (26.64)$$

est la **variance empirique** de l'échantillon (X_i) .

Lemme 26.26.

Si X est une variable aléatoire,

(1) $\text{Var}(ax) = a^2 \text{Var}(X)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$;

(2) Si de plus Y est une variable aléatoire indépendante de X , alors $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Démonstration. Nous avons

$$\text{Var}(X + Y) = E(X^2 + Y^2 + 2XY) - (E(X) + E(Y))^2 \quad (26.65a)$$

$$= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E(X)^2 - E(Y)^2 + 2E(X)E(Y). \quad (26.65b)$$

Étant donné que X et Y sont indépendantes nous avons $E(XY) = E(X)E(Y)$ par le lemme 26.21. $\square$

Si les $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires on considère la **moyenne empirique**

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}. \quad (26.66)$$

26.2.6 Covariance

Soient X et Y , deux variables aléatoires réelles. Leur **covariance** est définie par

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] \quad (26.67)$$

L'idée est que la covariance devient grande si X et Y s'écartent de leurs moyennes dans le même sens. Il existe une formule alternative :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (26.68)$$

En ce qui concerne les dimensions plus hautes, si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un vecteur aléatoire de carré intégrable, nous définissons

$$\text{Cov}(X) = E\left[(X - E(X)) \otimes (X - E(X))\right] \quad (26.69)$$

où par $a \otimes b$ nous entendons la matrice $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$. Cela peut aussi être noté $a^t b$ si l'on fait bien attention à qui est un vecteur colonne et qui est un vecteur ligne.

Proposition 26.27.

Si X et Y sont deux variables aléatoires non spécialement indépendantes, nous avons

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y). \quad (26.70)$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul en partant de

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) \\ &\quad + (E(X) + E(Y))^2 - 2E(X)^2 - 2E(X)E(Y) \\ &\quad - 2E(Y)E(X) - 2E(Y)^2. \end{aligned} \quad (26.71)$$

À partir d'ici il s'agit de recombinaison tous les termes pour former la formule annoncée. $\square$

Plus généralement nous avons la formule

$$\text{Var}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j). \quad (26.72)$$

26.2.7 Probabilité conditionnelle, première

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$. Nous pouvons introduire une nouvelle loi de probabilité P_B sur $(\Omega, \mathcal{A})$ en définissant

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B). \quad (26.73)$$

La première égalité est la définition de P_B . La seconde est une notation. Le nombre $P(A|B)$ est nommée **probabilité conditionnelle** de A sachant B .

On vérifie que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité parce que $P_B(\Omega) = 1$ et

$$P_B\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P_B(A_i) \quad (26.74)$$

si les A_i sont deux à deux disjoints.

Une conséquence immédiate de (26.73) est que si A et B sont des événements indépendants alors

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A). \quad (26.75)$$

La probabilité conditionnelle à B est quelque chose qui ne tient compte que de ce qui se passe dans B . Si K est un événement tel que $A \cap B = K \cap B$, alors

$$P(A|B) = P(K|B). \quad (26.76)$$

Théorème 26.28.

Soient $(B_n)_{n \geq 1}$ une partition finie de Ω telle que $P(B_i) > 0$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 0$.

(1) Si A , B et C sont des événements, alors

$$P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C). \quad (26.77)$$

(2) Si $P(B) > 0$, alors $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

(3) On a la **formule des probabilités totales** :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) = \sum_i P(A \cap B_i). \quad (26.78)$$

(4) On a la **formule de Bayes** :

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}. \quad (26.79)$$

Démonstration. (1) En développant le membre de droite,

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A \cap B|C). \end{aligned} \quad (26.80)$$

(2) C'est la définition de $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

(3) Vu que les B_i forment une partition, nous avons

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i). \quad (26.81)$$

(4) En utilisant les deux premiers points, nous trouvons

$$\begin{aligned} P(A|B_k)P(B_k) &= P(A \cap B_k) \\ &= P(B_k|A)P(A) \\ &= P(B_k|A) \sum_i P(A|B_i)P(B_i). \end{aligned} \quad (26.82)$$

□

26.2.8 Espérance conditionnelle

Théorème 26.29 (Définition de l'espérance conditionnelle[226]).

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire intégrable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pour chaque sous tribu $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, il existe une (presque partout) unique variable aléatoire $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (1) Y est $\mathcal{F}$ -mesurable
- (2) Y est P -intégrable
- (3) pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\int_B X dP = \int_B Y dP. \quad (26.83)$$

Cette variable aléatoire sera notée $E(X|\mathcal{F})$ pour des raisons qui apparaîtront plus tard.

Remarque 26.30.

Prendre $Y = X$ ne fonctionne pas parce qu'en général si $\mathcal{O}$ est mesurable dans $\mathbb{R}$, alors $X^{-1}(\mathcal{O})$ est dans la tribu $\mathcal{A}$, mais n'est pas automatiquement dans la tribu $\mathcal{F}$.

Démonstration. **Unicité** Si Y_1 et Y_2 vérifient tous les deux les conditions, l'ensemble $\{Y_1 < Y_2\}$ est un élément de $\mathcal{F}$ et nous avons

$$\int_{\{Y_1 < Y_2\}} X = \int_{Y_1 < Y_2} Y_1 = \int_{Y_1 < Y_2} Y_2. \quad (26.84)$$

En particulier nous avons $\int_{\{Y_1 < Y_2\}} (Y_1 - Y_2) = 0$ et donc

$$(Y_1 - Y_2)\mathbb{1}_{Y_1 < Y_2} = 0 \quad (26.85)$$

presque partout. Le corollaire 7.124 montre alors que $Y_1 - Y_2 \geq 0$ presque partout. De la même manière, l'ensemble $\{Y_2 < Y_1\}$ est dans $\mathcal{F}$ et nous trouvons que $Y_2 - Y_1 \geq 0$ presque partout. Par conséquent $Y_1 = Y_2$ presque partout.

Existence dans le cas de carré intégrable Nous supposons que $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et nous considérons K , le sous ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des fonctions $\mathcal{F}$ -mesurables. Le théorème des projections 17.6 nous indique que

$$L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) = K \oplus K^\perp \quad (26.86)$$

par la décomposition $X = \text{proj}_K X + (X - \text{proj}_K X)$. La variable aléatoire $Y = \text{proj}_K X$ a les propriétés d'être $\mathcal{F}$ -mesurable et $\langle Y - X, Z \rangle = 0$ pour tout $Z \in K$. Soit $A \in \mathcal{F}$, si nous considérons $Z = \mathbb{1}_A$, la dernière condition signifie que

$$\int_\Omega X \mathbb{1}_A = \int_\Omega Y \mathbb{1}_A, \quad (26.87)$$

ou encore

$$\int_A Y = \int_A X. \quad (26.88)$$

La variable aléatoire $Y = \text{proj}_K X$ répond donc à la question dans le cas où $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Existence en général Nous considérons maintenant que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Quitte à décomposer X en deux fonctions positives X_+ et X_- telles que $X = X_+ + X_-$, nous pouvons supposer que X est positive. Par hypothèse $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$; pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$X_n(\omega) = \min\{X(\omega), n\}. \quad (26.89)$$

Étant donné que la mesure P est une mesure de probabilité, les constantes sont intégrables et $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. De plus la suite (X_n) est croissante et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega). \quad (26.90)$$

Si nous notons encore K l'ensemble des variables aléatoires dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui sont $\mathcal{F}$ -mesurables, pour chaque n nous avons donc la variable aléatoire

$$Y_n = \text{proj}_K X_n = E(X_n | \mathcal{F}) \quad (26.91)$$

qui est $\mathcal{F}$ -mesurable et telle que

$$\int_A X_n = \int_A Y_n \quad (26.92)$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$. Nous voudrions prouver que la variable aléatoire $Y = \lim_n Y_n$ existe et est la solution au problème, c'est à dire est $E(X | \mathcal{F})$.

Commençons par prouver que $Y_n \geq 0$ presque partout. Pour cela nous remarquons que l'ensemble $\{Y_n < 0\}$ est mesurable et

$$0 \geq \int_{Y_n < 0} Y_n = \int_{Y_n < 0} X_n \geq 0. \quad (26.93)$$

La première inégalité est évidente et la dernière est due au fait que X_n est positive. Par conséquent

$$\int_{Y_n < 0} Y_n = 0 \quad (26.94)$$

et le lemme 7.124 conclut que $P(Y_n < 0) = 0$.

Soit $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire positive dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrons que $\text{proj}_K Z$ est encore positive. Pour cela nous considérons l'ensemble $A = \{\text{proj}_K Z < 0\}$ et les inégalités

$$0 \leq \int_A Z = \int_A \text{proj}_K Z \leq 0, \quad (26.95)$$

ce qui montre que $\int_A \text{proj}_K Z = 0$ et par conséquent que $P\{\text{proj}_K(Z) < 0\} = 0$. Cela nous montre que la projection depuis L^2 conserve la positivité.

Étant donné que $X_{n-1} - X_n \geq 0$ nous avons aussi

$$Y_{n-1} - Y_n \geq 0 \quad (26.96)$$

La suite de fonctions

$$n \mapsto Y_n = E(X_n | \mathcal{F}) \quad (26.97)$$

est croissante et vérifie le théorème de la convergence monotone :

$$\int_A X = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A X_n \quad (26.98a)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A E(X_n | \mathcal{F}) \quad (26.98b)$$

$$= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | \mathcal{F}) \quad (26.98c)$$

$$= \int_A Y. \quad (26.98d)$$

Par conséquent $E(X | \mathcal{F})$ existe et

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | \mathcal{F}) = E(X | \mathcal{F}). \quad (26.99)$$

□

Proposition 26.31 (Transitivité de l'espérance conditionnelle).

Si $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}$ alors

$$E\left(E(X | \mathcal{B}_1) | \mathcal{B}_2\right) = E(X | \mathcal{B}_2). \quad (26.100)$$

Démonstration. Si $B \in \mathcal{B}_2$, nous avons

$$\int_B E(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) dP = \int_B E(X|\mathcal{B}_1) dP = \int_B dP. \quad (26.101)$$

La première égalité est la définition de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_2$. La seconde égalité est celle de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_1$ et le fait que $B \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. Ce que nous avons prouvé est que

$$E(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) \quad (26.102)$$

est une variable aléatoire $\mathcal{B}_2$ -mesurable vérifiant la condition

$$\int_B E(E(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) = \int_B E(X|\mathcal{B}_2) \quad (26.103)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}_2$. C'est donc $E(X|\mathcal{B}_2)$ par la partie unicité du théorème 26.29. $\square$

Proposition 26.32.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, soit $\mathcal{A}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X , une variable aléatoire $\mathcal{F}$ -mesurable et intégrable. Alors la variable aléatoire $E(X|\mathcal{A})$ du théorème 26.29 est l'unique (presque partout) variable aléatoire à être $\mathcal{A}$ -mesurable telle que nous ayons

$$E(E(X|\mathcal{A})Y) = E(XY). \quad (26.104)$$

pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{A}$ -mesurable.

Démonstration. Supposons pour commencer que Y soit une fonction simple positive, alors $Y = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$ et nous avons

$$\int_{\Omega} E(X|Y) = \sum_i a_i \int_{E_i} E(X|\mathcal{A}) \quad (26.105a)$$

$$= \sum_i a_i \int_{E_i} X \quad (26.105b)$$

$$= \int_{\Omega} XY. \quad (26.105c)$$

Maintenant si Y est mesurable et bornée, elle est limite croissante de fonctions étagées bornées (proposition 7.107) et le résultat tient par la convergence monotone, théorème 7.129.

Si Y n'est pas positive, nous séparons $Y = Y_+ - Y_-$.

Pour l'unicité, soit Z et Z' deux variables aléatoires telles que pour toute variable aléatoire Y ,

$$\int_{\Omega} ZY = \int_{\Omega} XY = \int_{\Omega} Z'Y. \quad (26.106)$$

Si nous prenons $Y = \mathbb{1}_{\{Z \neq Z'\}}$, nous avons

$$0 = \int_{\Omega} (Z - Z') \mathbb{1}_{Z \neq Z'} = \int_{Z \neq Z'} Z - Z', \quad (26.107)$$

d'où le fait que $P(Z \neq Z') = 0$. $\square$

Si X est une variable aléatoire dont la tribu engendrée est indépendante de la tribu $\mathcal{F}$, nous voudrions que la connaissance de $\mathcal{F}$ n'influence pas la connaissance de X , c'est à dire que

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X). \quad (26.108)$$

Ce que nous avons est même mieux. Nous avons le lemme suivant.

Lemme 26.33 ([117]).

Les tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes si et seulement si

$$E(U|\mathcal{F}_1) = E(U) \quad (26.109)$$

pour toute variable aléatoire U étant $\mathcal{F}_1$ -mesurable.

Ici, par $E(U)$ nous entendons la variable aléatoire constante prenant la valeur numérique $E(U)$ en tout point de Ω .

Démonstration. Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes, alors pour tout $B \in \mathcal{F}_2$ nous avons

$$\int_B U dP = E(U \mathbb{1}_B) \quad (26.110a)$$

$$= E(U)E(\mathbb{1}_B) \quad (26.110b)$$

$$= E(U) \int_{\Omega} \mathbb{1}_B dP \quad (26.110c)$$

$$= \int_B E(U) dP. \quad (26.110d)$$

Justifications.

- L'intégrale $\int_B U dP$ a un sens même si $B \in \mathcal{F}_2$ alors que U est $\mathcal{F}_1$ -mesurable. Le supremum (7.292) définissant l'intégrale est tout de même bien défini, en particulier, l'ensemble sur lequel on prend le supremum est non vide.
- Pour (26.110b), la variable aléatoire U est $\mathcal{F}_1$ -mesurable (donc la tribu engendrée par U est dans $\mathcal{F}_1$) alors que $\mathbb{1}_B$ est $\mathcal{F}_2$ -mesurable. Les tribus engendrées étant indépendantes, les variables aléatoires le sont et nous pouvons décomposer l'espérance.

Ce que montre le calcul (26.110) est que $E(U)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_2$ -mesurable (parce que constante) dont l'intégrale sur chaque élément de $\mathcal{F}_2$ vaut l'intégrale de U . Par la partie unicité du théorème 26.29, nous déduisons que $E(U) = E(U|\mathcal{F}_2)$. $\square$

Corollaire 26.34.

Si X est une variable aléatoire et si $\mathcal{F}$ est une tribu, alors

$$E(E(X|\mathcal{F})) = E(X). \quad (26.111)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition (26.83) à $B = \Omega$:

$$E(E(X|\mathcal{F})) = \int_{\Omega} E(X|\mathcal{F})(\omega) dP(\omega) \quad (26.112a)$$

$$= \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) \quad (26.112b)$$

$$= E(X). \quad (26.112c)$$

$\square$

Exemple 26.35

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec probabilité $1/2$ et indépendantes. Nous considérons $S = X_1 + X_2$. La situation est modélisée par l'espace

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \quad (26.113)$$

et les variables aléatoires

$$X_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i \quad (26.114a)$$

$$S(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2. \quad (26.114b)$$

Pour vérifier que de cette manière nous avons bien que X_1 est indépendante de X_2 , nous commençons par voir les tribus associées. Un ouvert de $\mathbb{R}$ soit contient 0 et 1, soit contient un seul des deux soit n'en contient aucun des deux. En appliquant X_1^{-1} à chacune de ces quatre situations nous voyons que la tribu $\sigma(X_1)$ est

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1) = \{\{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \Omega, \emptyset\}. \quad (26.115)$$

De la même façon nous avons

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(X_2) = \{\{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \Omega, \emptyset\}. \quad (26.116)$$

Nous posons

$$A_0 = \{(0, 0), (0, 1)\} \quad (26.117a)$$

$$A_1 = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad (26.117b)$$

$$B_0 = \{(0, 0), (1, 0)\} \quad (26.117c)$$

$$B_1 = \{(0, 1), (1, 1)\}. \quad (26.117d)$$

Étant donné que $A_i \cap B_j = \{(i, j)\}$, nous avons toujours que $P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{4} = P(A_i)P(B_j)$. L'indépendance est donc assurée.

Calculons l'espérance conditionnelle $E(S|\mathcal{F}_1)$. Une fonction $\mathcal{F}_1$ -mesurable doit être constante sur A_0 et A_1 , donc l'espérance conditionnelle est une fonction constante sur A_0 et A_1 dont l'intégrale sur ces ensembles est égale à l'intégrale de S . Nous avons en particulier

$$\int_{A_0} E(S|\mathcal{F}_1) = \int_{A_0} S, \quad (26.118)$$

c'est à dire

$$E(S|\mathcal{F}_1)(0, 0) + E(S|\mathcal{F}_1)(0, 1) = S(0, 0) + S(0, 1) = 1. \quad (26.119)$$

Nous en concluons que $E(S|\mathcal{F}_1)(0, 0) = E(S|\mathcal{F}_1)(0, 1) = \frac{1}{2}$. Cela correspond à l'intuition que si on est au point $(0, 1)$ ou au point $(0, 0)$ en ne sachant que X_1 , nous ne savons que le premier zéro, et donc l'espérance de la somme est $\frac{1}{2}$.

Un calcul très similaire montre que

$$E(S|\mathcal{F}_1)(1, 0) = E(S|\mathcal{F}_1)(1, 1) = \frac{3}{2}. \quad (26.120)$$

Cela correspond au fait qu'en ces points, nous ne savons que le fait que le premier tirage a donné 1, et donc que l'espérance est $\frac{3}{2}$.

Complétons ce tour d'horizon en mentionnant que la tribu engendrée par X_1 et X_2 est la tribu des parties de Ω , de telle façon que l'espérance conditionnelle de S sachant X_1 et X_2 est égale à S . $\triangle$

Proposition 26.36 ([117]).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur Ω réelles. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Nous supposons que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et que $XZ \in L^1(\Omega, P)$. Alors

$$E(ZX|\mathcal{B}) = ZE(X|\mathcal{B}) \quad (26.121)$$

presque sûrement.

Démonstration. Nous commençons par prouver que

$$\int_{\Omega} ZE(X|\mathcal{B}) = \int_{\Omega} ZX. \quad (26.122)$$

Si $Z = \mathbb{1}_B$ pour un ensemble $B \in \mathcal{B}$, alors cette égalité est vraie par définition de l'espérance conditionnelle². Donc cette égalité est correcte tant que Z est une variable aléatoire $\mathcal{B}$ -mesurable et étagée. Nous considérons alors, grâce au lemme 7.104, une suite Z_n de variables aléatoires étagées et $\mathcal{B}$ -mesurables avec $|Z_n| < Z$. Pour chaque n nous avons donc

$$\int_{\Omega} Z_n X = \int_{\Omega} Z E(X|\mathcal{B}). \quad (26.123)$$

Notre idée est de passer à la limite. Vu que Z et Z_n sont bornées (et donc intégrables sur Ω), pour chaque n nous avons $|Z_n X| \leq M|X|$ où M majore Z et donc tous les Z_n de façon uniforme vis-à-vis de n . Tout cela pour dire que le théorème de la convergence dominée fonctionne et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Z_n X = \int_{\Omega} Z X. \quad (26.124)$$

D'autre part vu que $X \in L^1$ et que $\Omega \in \mathcal{B}$ nous avons l'égalité $\int_{\Omega} E(X|\mathcal{B}) = \int_{\Omega} X$, ce qui prouve que $|E(X|\mathcal{B})|$ est intégrable. Cela nous permet d'utiliser encore la convergence dominée avec l'inégalité $|Z_n E(X|\mathcal{B})| \leq |E(X|\mathcal{B})|$ pour écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Z_n E(X|\mathcal{B}) = \int_{\Omega} Z E(X|\mathcal{B}). \quad (26.125)$$

En passant à la limite des deux côtés de (26.123) nous avons donc

$$\int_{\Omega} Z E(X|\mathcal{B}) = \int_{\Omega} Z X. \quad (26.126)$$

L'égalité (26.122) est prouvée.

Nous passons maintenant à la preuve de l'égalité demandée : $E(EX|\mathcal{B}) = ZE(X|\mathcal{B})$. Pour cela il faut montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}$ nous avons

$$\int_B Z E(X|\mathcal{B}) = \int_B Z X. \quad (26.127)$$

Cela n'est rien d'autre que l'égalité (26.122) que nous venons de prouver avec $Z\mathbb{1}_B$ au lieu de Z . $\square$

Définition 26.37.

Soit Z une variable aléatoire. L'**espérance conditionnelle** « X sachant Z » est la variable aléatoire

$$E(X|Z) = E(X|\sigma(Z)) \quad (26.128)$$

où $\sigma(Z)$ est la tribu engendrée par Z .

Proposition 26.38.

Soit une variable aléatoire réelle $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, il existe une fonction borélienne $\mathcal{A}_Y$ -mesurable $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$E(X|Y) = h \circ Y. \quad (26.129)$$

Démonstration. Nous utilisons le résultat de Doob (théorème 26.13). Par définition $E(X|Y)$ est une variable aléatoire réelle $\mathcal{A}_Y$ -mesurable, et il existe une fonction borélienne $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $E(X|Y) = h \circ Y$. $\square$

Cette fonction $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ nous permet de définir

$$E(X|Z = z) = h(z). \quad (26.130)$$

Cela est l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une valeur donnée d'une autre variable aléatoire.

2. Théorème 26.29.

26.2.9 Probabilité conditionnelle, seconde

Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement et $\mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Nous définissons $P(A|\mathcal{F})$ par

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}). \quad (26.131)$$

Notons que cela est une variable aléatoire et non un réel.

Pour la suite de la construction nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 26.39.

Soit $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition de Ω en éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints tels que $P(B_i) \neq 0$. Soit $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les B_i . Une variable aléatoire réelle est $\mathcal{F}$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque B_i .

Si X est une variable aléatoire, alors $E(X|\mathcal{F})$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}$ -mesurable et elle est donc constante sur les ensembles B_i :

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \mathbb{1}_{B_i}. \quad (26.132)$$

Étant donné que, par construction, B_i est $\mathcal{F}$ -mesurable, nous avons

$$\int_{B_i} X dP = \int_{B_i} E(X|\mathcal{F}) = \sum_j a_j \int_{B_i} \mathbb{1}_{B_j} = \sum_j a_j \delta_{ij} P(B_j) = a_i P(B_i). \quad (26.133)$$

Par conséquent

$$a_i = \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \quad (26.134)$$

et

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) \mathbb{1}_{B_i}. \quad (26.135)$$

En particulier si $B \in \mathcal{A}$ nous considérons la partition $\{B, \complement B\}$ de Ω et la tribu engendrée

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, B, \complement B, \Omega\}. \quad (26.136)$$

La formule (26.135) devient

$$E(X|\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{P(B)} \int_B X dP \right) \mathbb{1}_B + \left(\frac{1}{P(\complement B)} \int_{\complement B} X dP \right) \mathbb{1}_{\complement B}. \quad (26.137)$$

Si nous considérons $A \in \mathcal{A}$, nous écrivons cette égalité avec $X = \mathbb{1}_A$ pour obtenir

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \mathbb{1}_B + \frac{P(A \cap \complement B)}{P(\complement B)} \mathbb{1}_{\complement B} \quad (26.138a)$$

$$= P(A|B) \mathbb{1}_B + P(A|\complement B) \mathbb{1}_{\complement B} \quad (26.138b)$$

où nous avons noté

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (26.139)$$

l'espérance conditionnelle de « A sachant B ».

Remarque 26.40.

La définition $P(A|\mathcal{F}) = P(\mathbb{1}_A|\mathcal{F})$ n'est pas la probabilité conditionnelle de A sachant B , même si la tribu $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par l'événement B .

Il nous reste à définir la probabilité conditionnelle d'un événement relativement à une variable aléatoire. Si la variable aléatoire X est à valeurs discrètes, nous disons que $P(A|X)$ est la variable aléatoire de valeur

$$P(A|X)(\omega) = P(A|X = X(\omega)). \quad (26.140)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs continues, cette définition ne fonctionne pas parce que la condition $X = X(\omega)$ est souvent de probabilité nulle, tandis que c'est toujours une mauvaise idée de conditionner par rapport à un événement de probabilité nulle. C'est la base du paradoxe de Borel. La bonne définition du conditionnement de l'événement A par rapport à la variable aléatoire X est

$$P(A|X) = P(A|\sigma(X)) = E(\mathbb{1}_A|\sigma(X)). \quad (26.141)$$

Proposition 26.41.

Si X est une variable aléatoire et si A est un événement, alors

$$E(P(A|X)) = P(A). \quad (26.142)$$

Démonstration. Nous commençons par le cas discret, c'est à dire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$. Nous notons $p_k = P(X = k)$. En décomposant l'intégrale sur Ω par rapport à l'union disjointe

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = k\}, \quad (26.143)$$

nous obtenons

$$E(P(A|X)) = \int_{\Omega} P(A|X)(\omega) dP(\omega) \quad (26.144a)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} P(A|X = X(\omega)) dP(\omega) \quad (26.144b)$$

$$= \sum_k \int_{A_k} \frac{P(A \cap X = k)}{P(X = k)} dP(\omega) \quad \text{dans } A_k, X(\omega) = k \quad (26.144c)$$

$$= \sum_k \frac{1}{p_k} P(A \cap X = k) \underbrace{\int_{A_k} 1 dP(\omega)}_{=P(A_k)=p_k} \quad (26.144d)$$

$$= \sum_k P(A \cap X = k) \quad (26.144e)$$

$$= P(A). \quad (26.144f)$$

Nous devons maintenant prouver la propriété dans le cas où X prend des valeurs continues. Pour cela il suffit d'appliquer le corollaire 26.34 :

$$E(E(\mathbb{1}_A|\sigma(A))) = E(\mathbb{1}_A) = P(A). \quad (26.145)$$

□

26.2.10 Un petit paradoxe

Attention : ce qui est écrit ici est ma réflexion personnelle sur le sujet. Merci de me dire si je me trompe.

26.2.10.1 Le cas facile

Vous frappez à la porte d'une famille dont vous savez seulement qu'il y a exactement deux enfants. Une fille ouvre et vous dit «je suis l'aînée». Quelle est la probabilité que le cadet soit une fille ?

Si nous notons X_0 et X_1 les variables aléatoires donnant le sexe des deux enfants, ce sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $P(X_i = f) = \frac{1}{2}$. La formule (26.73) de la probabilité conditionnelle ainsi que l'indépendance donnent :

$$P(X_1 = f | X_2 = f) = \frac{P(X_1 = f, X_2 = f)}{P(X_2 = f)}. \quad (26.146)$$

Le numérateur vaut $\frac{1}{4}$ et le dénominateur vaut $\frac{1}{2}$; le résultat vaut $\frac{1}{2}$. Fin de l'histoire.

Voici maintenant le problème à peine modifié. Vous frappez à la porte d'une famille dont vous savez seulement qu'il y a exactement deux enfants. Une fille ouvre. Quelle est la probabilité que l'autre soit une fille? Naïvement on croirait que la probabilité est également $\frac{1}{2}$. Un raisonnement moins naïf montre le contraire. Et nous allons voir qu'un raisonnement encore moins naïf montre que la probabilité est bien $\frac{1}{2}$.

26.2.10.2 Premier raisonnement

Voici le raisonnement qui est, à mon avis, faux. Vu que l'enfant qui ouvre la porte est une fille, la famille a une des compositions suivantes : fg , ff ou gf . Le cas où une fille ouvre la porte *et* que l'autre est également une fille est seulement le cas ff dont la probabilité est $\frac{1}{3}$. Pour justifier cela nous considérons le couple de variables aléatoires (X_1, X_2) et le conditionnement $A = \{X_1 = f\} \cup \{X_2 = f\}$: évidemment $P(A) = \frac{3}{4}$. Nous calculons facilement la loi du couple (X_1, X_2) conditionné à A :

$$P(X_1 = f, X_2 = f | A) = \frac{P(\{X_1 = f, X_2 = f\} \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}; \quad (26.147)$$

de même,

$$P(X_1 = g, X_2 = f | A) = \frac{1}{3} \quad (26.148a)$$

$$P(X_1 = f, X_2 = g | A) = \frac{1}{3} \quad (26.148b)$$

$$P(X_1 = g, X_2 = g | A) = 0 \quad (26.148c)$$

Donc sachant A , la probabilité que la famille soit constituée de deux filles est $\frac{1}{3}$.

26.2.10.3 Simulation

Pour en avoir le cœur net, nous avons écrit ce programme :

```

1  #! /usr/bin/python3
2  # -*- coding: utf8 -*-
3
4  import random
5
6  def famille():
7      """
8      return a pair of 'f' and 'g'
9      """
10     a=[random.choice( ['g','f'] )]
11     a.append(random.choice( ['g','f'] ))
12     return a
13
14 def toctoc():
15     F=famille()
16     s=random.choice([0,1])

```

```

17     if F[s] != 'f':
18         #print("ce n'est pas une fille qui ouvre")
19         return None
20     else :
21         t=(s+1)%2
22         #print("L'autre sera ",t,"c'est à dire",F[t])
23         if F[t]=='f':
24             return 1
25         else :
26             return 0
27
28 N_girl_opens=0
29 N_girl_other=0
30 for k in range(1,10000):
31     print('-----')
32     res=toctoc()
33     if res is not None:
34         N_girl_opens = N_girl_opens+1
35         N_girl_other = N_girl_other + res
36         print(res,N_girl_opens,N_girl_other)
37
38 proba=N_girl_other/N_girl_opens
39 print(proba)

```

simul_famille.py

Le faisant tourner, la réponse est sans appel : la fréquence observée est beaucoup plus proche de 0.5 que de 0.33 ou 0.66.

26.2.10.4 La vraie réponse

Nous considérons les variables aléatoires $X_0, X_1: \Omega_E \rightarrow \{f, g\}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$. De plus nous considérons une nouvelle variable aléatoire qui donne le numéro de l'enfant qui ouvre la porte :

$$\sigma: \Omega_C \rightarrow \{0, 1\}. \quad (26.149)$$

Nous devons calculer

$$P(X_{1-\sigma} = f | X_\sigma = f) = \frac{P(X_{1-\sigma} = f, X_\sigma = f)}{P(X_\sigma = f)}. \quad (26.150)$$

L'univers de toute cette expérience est, donnée en triples pour les valeurs (X_1, X_2, σ) :

(1) $g, g, 0$	(3) $g, f, 0$	(5) $f, g, 0$	(7) $f, f, 0$
(2) $g, g, 1$	(4) $g, f, 1$	(6) $f, g, 1$	(8) $f, f, 1$.

Cela fait 8 cas en tout. Nous avons

$$\{X_\sigma = f\} = \{(g, f, 1), (f, g, 0), (f, f, 0), (f, f, 1)\}. \quad (26.151)$$

et

$$\{X_{1-\sigma} = f\} \cap \{X_\sigma = f\} = \{(f, f, 0), (f, f, 1)\}. \quad (26.152)$$

Donc

$$P(X_{1-\sigma} = f, X_\sigma = f) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad (26.153)$$

et

$$P(X_\sigma = f) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \quad (26.154)$$

Au final,

$$P(X_{1-\sigma} = f | X_\sigma = f) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad (26.155)$$

26.2.10.5 Le même, tourné à peine différemment

Nous avons une famille de deux enfants dont nous savons qu'au moins un des deux est une fille. Quelle est la probabilité que la famille contienne deux filles ? Cela est a priori la même question que celle où une fille ouvre la porte sans dire si elle est l'aînée ou non.

Nous avons les variables aléatoires X_1 et X_2 qui valent 0 ou 1 suivant que l'enfant soit une fille ou un garçon ; ce sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Nous définissons la variable aléatoire somme

$$S = X_1 + X_2 \quad (26.156)$$

qui compte le nombre de filles. La question est de calculer

$$P(S = 2 | S \geq 1) = \frac{P(S = 2 \cap S \geq 1)}{P(S \geq 1)} = \frac{P(S = 2)}{P(S \geq 1)}. \quad (26.157)$$

L'événement $S = 2$ est réduit au singleton $\{ff\}$ et sa probabilité est $\frac{1}{4}$. Au contraire l'événement $S \geq 1$ est l'ensemble $\{fg, gf, ff\}$ et sa probabilité est $\frac{3}{4}$. Nous avons donc

$$P(S = 2 | S \geq 1) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}. \quad (26.158)$$

Notons que l'événement $S \geq 1$ n'est pas le même que l'événement $X_\sigma = f$. En effet

$$S \geq 1 = \{(ff, 1), (ff, 2), (fg, 1), (fg, 2), (gf, 1), (gf, 2)\} \quad (26.159)$$

tandis que

$$\{X_\sigma = f\} = \{(ff, 1), (ff, 2), (fg, 1), (gf, 2)\}. \quad (26.160)$$

26.2.11 Résumé des choses conditionnelles

La probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un autre est le nombre :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (26.161)$$

La probabilité conditionnelle d'un événement vis-à-vis d'une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire :

$$P(A|X)(\omega) = P(A|X = X(\omega)). \quad (26.162)$$

Dans le cas continu,

$$P(A|X) = P(A|\sigma(X)) = E(\mathbb{1}_A | \sigma(X)). \quad (26.163)$$

La probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à une tribu est la variable aléatoire

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A | \mathcal{F}). \quad (26.164)$$

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une tribu $E(X|\mathcal{F})$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}$ -mesurable telle que

$$\int_B E(X|\mathcal{F}) = \int_B X \quad (26.165)$$

pour tout $X \in \mathcal{F}$. Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors $E(X|\mathcal{F}) = \text{proj}_K(X)$ où K est le sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des fonctions $\mathcal{F}$ -mesurables (théorème 26.29). Cela au sens des projections orthogonales.

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une autre est une variation sur le thème :

$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y)). \quad (26.166)$$

26.2.12 Inégalité de Jensen

Proposition 26.42 (Inégalité de Jensen).

Soit g une fonction convexe³ sur $\mathbb{R}$ et une variable aléatoire $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $g \circ Y$ soit également L^1 . Alors

$$g(E(Y|\mathcal{F})) \leq E((g \circ Y)|\mathcal{F}). \quad (26.167)$$

Démonstration. La convexité de g et la proposition 11.224 nous donnent deux suites (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n x + b_n). \quad (26.168)$$

Nous avons alors

$$a_n E(Y|\mathcal{F}) \stackrel{p.s.}{=} E(a_n Y + b_n|\mathcal{F}) \leq E(g \circ Y|\mathcal{F}). \quad (26.169)$$

L'inégalité est due au fait que $g \circ Y$ est le supremum sur les n de $a_n Y + b_n$. Pour chaque n , l'inégalité (26.169) est fausse sur un ensemble de mesure nulle $R_n \subset \Omega$. L'union

$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \quad (26.170)$$

est encore de mesure nulle. Sur $\Omega \setminus R$, nous avons

$$a_n E(Y|\mathcal{F}) + b_n \leq E(g \circ Y|\mathcal{F}). \quad (26.171)$$

Vu que cela est vrai presque partout et pour tout n nous passons à supremum et nous avons encore presque partout l'inégalité

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n E(Y|\mathcal{F}) + b_n) \leq E(g \circ Y|\mathcal{F}). \quad (26.172)$$

□

Si nous ne nous intéressons pas à $E(Y|\mathcal{F})$ mais seulement à $E(Y)$, alors une démonstration plus simple est donnée sur Wikipédia[291].

26.2.13 Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire réelle, nous définissons sa **fonction de répartition** par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ F_X(x) &= P(X \leq x). \end{aligned} \quad (26.173)$$

26.2.14 Fonction caractéristique

La **fonction caractéristique** de la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction réelle définie par

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}). \quad (26.174)$$

Une autre façon d'écrire la définition est

$$\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x), \quad (26.175)$$

ou encore, si X a une densité f_X ,

$$\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx \quad (26.176)$$

Nous reconnaissons la transformée de Fourier :

$$\Phi_X(t) = \hat{f}_X(-t/2\pi). \quad (26.177)$$

La proposition suivante se déduit en utilisant le théorème de dérivation sous l'intégrale 13.183.

3. Définition 11.211.

Proposition 26.43.

Soit X une variable aléatoire qui accepte un moment d'ordre $r \geq 1$. Alors la fonction caractéristique Φ_X est r fois continument dérivable et

$$\Phi_X^{(r)}(t) = E((iX)^r e^{itX}). \quad (26.178)$$

Démonstration. Nous étudions la fonction

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} dP(\omega). \quad (26.179)$$

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto e^{itX(\omega)}. \end{aligned} \quad (26.180)$$

et nous regardons si ce contexte vérifie les hypothèses du théorème 13.183.

- (1) Étant donné que X est mesurable, f sera mesurable.
- (2) La fonction $t \mapsto e^{itX(\omega)}$ est absolument continue pour chaque ω .
- (3) Note : par rapport aux notations du théorème 13.183, nous avons ici $A = \mathbb{R}$. Prenons donc un intervalle (compact) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et calculons

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, \omega) = iX(\omega)e^{itX}, \quad (26.181)$$

et

$$\int_a^b \int_{\Omega} |iX(\omega)e^{itX(\omega)}| d\omega dt = \int_a^b \int_{\Omega} |X(\omega)| d\omega dt. \quad (26.182)$$

Par hypothèse X accepte un moment d'ordre 1, de sorte que l'intégrale par rapport à ω converge vers un nombre qui ne dépend pas de t . L'intégrale sur t ne pose alors aucun problèmes.

Par conséquent nous pouvons effectuer la première dérivation :

$$\Phi'(t) = \frac{d\Phi}{dt}(t) = \int_{\Omega} iX(\omega)e^{itX(\omega)} d\omega = E(iXe^{itX}) \quad (26.183)$$

et la fonction Φ' est absolument continue. Ce dernier point est important parce que c'est lui qui permet de faire la récurrence et passer à l'ordre deux.

Le résultat ressort alors en dérivant successivement l'expression (26.181). $\square$

Exemple 26.44

Sachant la fonction caractéristique de X , nous pouvons calculer les moments. Par exemple

$$E(X^2) = \Phi_X''(0). \quad (26.184)$$

$\triangle$

Théorème 26.45.

Si $\Phi_X = \Phi_Y$, alors $P_X = P_Y$.

Notons que cela n'implique pas que $X = Y$. En effet X et Y peuvent même être définis sur des espaces probabilisés différents.

Dans le cas d'une variable aléatoire vectorielle, nous définissons $\Phi_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi_X(v) = E(e^{i\langle v, X \rangle}) \quad (26.185)$$

26.2.15 Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace

Soit X une variable aléatoire. Sa **transformée de Laplace** ou **fonction génératrice des moments** est la fonction

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad (26.186)$$

pour chaque t tel que cette espérance existe.

Théorème 26.46 ([292]).

Soit X une variable aléatoire réelle et

$$I_X = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } E(e^{tX}) \text{ existe}\}. \quad (26.187)$$

La fonction

$$\begin{aligned} M_X : I_X &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E(e^{tX}) \end{aligned} \quad (26.188)$$

*est la **transformée de Laplace** de X .*

(1) I_X est un intervalle contenant 0.

(2) Si I_X n'est pas réduit à $\{0\}$ alors M_X se développe en série entière

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n. \quad (26.189)$$

(3) Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $I_{X+Y} = I_X \cap I_Y$ et

$$M_{X+Y} = M_X M_Y \quad (26.190)$$

sur I_{X+Y} .

Démonstration. Le fait que 0 soit dans I_X est évident : $E(1) = 1$. Pour montrer que I_X est un intervalle nous prenons $z \in I_X$ et $0 < s < z$ ou $z < s < 0$, puis nous montrons que $s \in I_X$. Il faut remarquer que dans tous les cas,

$$e^{sX} \leq 1 + e^{zX}. \quad (26.191)$$

En effet soit sX et zX sont tous deux à gauche de zéro et alors ils sont tous deux plus petit que 1 ; soit ils sont tous deux à droite de 0 et alors $e^{zX} > e^{sX}$ par croissance de l'exponentielle. Nous avons donc dans tous les cas que

$$E(e^{sX}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{sX} dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_X(x) (1 + e^{zX}) = 1 + E(e^{zX}). \quad (26.192)$$

Soit maintenant $a > 0$ tel que $[-a, a] \in I_X$. Étant donné que $e^{a|X|} < e^{aX} e^{-aX}$, l'espérance $E(e^{a|X|})$ existe toujours pour $|t|$. Nous avons

$$\left| M_X(t) - \sum_{n=0}^N \frac{E(X^n)}{n!} t^n \right| = \left| E \left(e^{tX} - \sum_{n=0}^N \frac{X^n}{n!} t^n \right) \right| \quad (26.193a)$$

$$= \left| E \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} t^n \right) \right| \quad (26.193b)$$

$$\leq E \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX|^n}{n!} \right). \quad (26.193c)$$

Maintenant le but est de prendre la limite $N \rightarrow \infty$ en inversant la limite et l'espérance par le théorème de la convergence dominée (7.134). L'intégrale à traiter est

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX(\omega)|^n}{n!} dP(\omega). \quad (26.194)$$

L'intégrante est uniformément borné (en N) par $e^{tX(\omega)}$, qui est intégrable par hypothèse (choix de t). Du coup

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX(\omega)|^n}{n!} dP(\omega) = E \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|tX|^n}{n!} \right) = 0. \quad (26.195)$$

□

26.2.16 Loi d'une variable aléatoire

La **loi** de la variable aléatoire X , notée P_X est la mesure image de P par X , c'est à dire

$$P_X(B) = P(X \in B) \quad (26.196)$$

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$. Note :

$$P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)). \quad (26.197)$$

En particulier P_X est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ parce que

$$P_X(\mathbb{R}^d) = P(\Omega) = 1. \quad (26.198)$$

Si Q est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, nous notons $X \sim Q$ si $P_X = Q$. Nous disons alors que « X suit la loi Q ».

La proposition suivante permet de calculer en pratique les intégrales qui définissent par exemple l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

Proposition 26.47 (Théorème de transfert[293]).

Si X est une variable aléatoire, alors

$$E(f \circ X) = \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dP_X(x) \quad (26.199)$$

dès que $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est telle qu'une des deux intégrales existe. En particulier, ça marche si f est borélienne.

En utilisant cette proposition nous trouvons une formule pratique pour l'espérance d'une variable aléatoire réelle :

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x), \quad (26.200)$$

en vertu de la proposition 26.47 appliquée à la fonction $f(x) = x$.

Proposition 26.48.

Une variable aléatoire réelle X est intégrable si et seulement si $P(x = \pm\infty) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |x| dP_X(x) < \infty. \quad (26.201)$$

Le lien entre la densité f_X de la variable aléatoire X et sa loi est

$$P_X(A) = \int_A f_X(x) dx \quad (26.202)$$

pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$. Le lien entre la mesure de Lebesgue et celle de la loi de X est alors donné par

$$dP_X(x) = f_X(x) dx. \quad (26.203)$$

En particulier l'espérance de X peut être calculée à partir de sa densité via la formule

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx. \quad (26.204)$$

26.2.17 Changement de variables

Théorème 26.49.

Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}'$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ ainsi qu'un difféomorphisme C^1 $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$. Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire prenant presque sûrement ses valeurs dans $\mathcal{O}$. Si nous supposons que X a la densité f_X , alors la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$ accepte la densité $f_Y: \mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f_Y(v) = f_X(\varphi^{-1}(v)) |J_{\varphi^{-1}}(v)|. \quad (26.205)$$

Démonstration. Nous devons vérifier la relation

$$P(Y \in B) = \int_B f_Y(v) dv \quad (26.206)$$

pour tout borélien $B \subset \mathcal{O}'$. Nous avons

$$P(Y \in B) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_B(v) dP_Y(v) \quad (26.207a)$$

$$= E(\mathbb{1}_B \circ Y) \quad (26.207b)$$

$$= E((\mathbb{1}_B \circ \varphi) \circ X) \quad (26.207c)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(u) dP_X(u) \quad (26.207d)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{1}_B \circ \varphi)(u) f_X(u) du. \quad (26.207e)$$

À ce niveau, nous utilisons la formule de changement de variables du théorème 13.97. Nous trouvons alors

$$P(Y \in B) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_B(\varphi^{-1}(v)) f_X(\varphi^{-1}(v)) |J_{\varphi^{-1}}(v)| dv. \quad (26.208)$$

□

26.3 Convergence

Soient X_i des variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nous disons que X_i converge **presque sûrement** vers la variable aléatoire X et nous notons

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \quad (26.209)$$

si

$$P(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1 \quad (26.210)$$

où la convergence $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ est la convergence usuelle dans $\mathbb{R}$.

Lemme 26.50.

Nous avons $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si et seulement si il existe un événement $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) = 1$ et tel que $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ pour tout $\omega \in A$.

Lemme 26.51.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, alors

$$X \wedge n \xrightarrow{p.s.} X \quad (26.211)$$

Démonstration. Si $\omega \in \{X = \infty\}$ alors $(X \wedge n)(\omega) = n$ et d'accord. Si par contre $\omega \in \{X < \infty\}$ alors il existe N tel que si $n \geq N$ alors $n \geq X(\omega)$ et pour ces grandes valeurs de n nous avons $(X \wedge n)(\omega) = X(\omega)$. □

Nous disons que les variables aléatoires réelles X_n convergent **en probabilité** vers la variable aléatoire X si pour tout $\eta > 0$, on a

$$P(|X_n - X| \geq \eta) \rightarrow 0, \quad (26.212)$$

et on note

$$X_n \xrightarrow{P} X. \quad (26.213)$$

Nous disons que X_n converge vers X **en loi** vers la variable aléatoire X et nous notons

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad (26.214)$$

si pour toute fonction continue et bornée g nous avons

$$E(g(X_n)) \rightarrow E(g(X)) = \int g dP_X. \quad (26.215)$$

Proposition 26.52.

Deux autres caractérisations de la convergence en loi.

(1) Nous avons $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si

$$\Phi_{X_n}(v) \rightarrow \Phi_X(v) \quad (26.216)$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^d$. Ici Φ_X est la fonction caractéristique de X .

(2) Dans la définition de la convergence en loi nous pouvons indifféremment utiliser les fonctions continues et bornées, les fonctions continues à support compact ou les fonctions bornées uniformément continues.

Proposition 26.53.

Les types de convergence sont reliées par les implications suivantes :

$$\text{presque sûre} \Rightarrow \text{en probabilité} \Rightarrow \text{en loi}. \quad (26.217)$$

La convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité, et par conséquent pas non plus la convergence presque certaine.

Dans le cas particulier $d = 1$ nous avons quelques critères supplémentaires.

Proposition 26.54.

Supposons que les variables aléatoires X_n soient réelles, et notons F_n la fonction de répartition de X_n . Si $F_n(x) \rightarrow F(x)$ pour tout x dans l'ensemble des points de continuité de F , alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 26.55.

Si les X_n sont des variables aléatoires réelles positives, et si X est une variable aléatoire positive, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si les transformées de Laplace des fonctions de répartition convergent ponctuellement, c'est à dire si

$$E(e^{-\alpha X_n}) \rightarrow E(e^{-\alpha X}) \quad (26.218)$$

pour tout $\alpha \geq 0$.

Proposition 26.56.

Si les X_n et X sont des variables aléatoires réelles discrètes à valeurs dans $\{x_0, x_1, \dots\}$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si

$$P(X_n = x_k) \rightarrow P(X = x_k) \quad (26.219)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 26.57 ([7]).

Soient X_n et X des variables aléatoires réelles. Nous avons

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad (26.220)$$

si et seulement si pour tout t où F_X est continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(t) = F_X(t). \quad (26.221)$$

Proposition 26.58 ([7]).

Soit X_n une suite de variables aléatoires $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$, alors

$$X_n \xrightarrow{P} a. \quad (26.222)$$

Démonstration. Quitte à passer aux composantes, nous pouvons supposer que $d = 1$. Nous avons

$$P(|X_n - a| > \eta) = P(X_n - a > \eta) + P(-X_n - a > \eta) \quad (26.223a)$$

$$= P(X_n > \eta + a) + 1 - P(X_n > a - \eta) \quad (26.223b)$$

$$= 1 - F_{X_n}(\eta + a) + F_{X_n}(a - \eta). \quad (26.223c)$$

Nous allons utiliser la proposition 26.57. La fonction de répartition de la variable aléatoire constante $X = a$ est donnée par

$$F_a(t) = P(a < t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t - a). \quad (26.224)$$

Par conséquent, la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ nous montre que

$$F_{X_n}(t) \rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t - a) \quad (26.225)$$

pour tout $t \neq a$ parce que $t = 0$ est un point de discontinuité de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$. Nous avons par conséquent

$$P(|X_n - a| > \eta) = 1 - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\eta) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(-\eta) = 0 \quad (26.226)$$

parce que $\eta > 0$. □

Problèmes et choses à faire

Dans [7], l'équation (26.223b) arrive avec une inégalité. Pourquoi ?

Le lemme de Slutsky sera utilisé en combinaison avec la proposition 26.60 pour calculer des intervalles de confiance, voir par exemple ce qui se passe autour de l'équation (27.126).

Lemme 26.59 (Slutsky[294]).

Soient X_n et Y_n des suites de variables aléatoires réelles telles que

$$\begin{aligned} X_n &\xrightarrow{\mathcal{L}} X \\ Y_n &\xrightarrow{P} a \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (26.227)$$

Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, a)$.

Démonstration. Étant donné que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$, nous avons $Y_n \xrightarrow{P} a$ par la proposition 26.58. Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; nous devons prouver que

$$E(f(X_n, Y_n)) \rightarrow E(f(X, a)). \quad (26.228)$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$E(\|f(X_n, Y_n) - f(X, a)\|) \leq E(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|) + E(\|f(X_n, a) - f(X, a)\|). \quad (26.229)$$

La fonction $g(t) = f(t, a)$ étant continue et bornée, la convergence en loi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ donne

$$E(\|f(X_n, a) - f(X, a)\|) \rightarrow 0. \quad (26.230)$$

Étudions à présent le premier terme du membre de droite de (26.229). Pour tout $\eta > 0$ et toute variables aléatoires Z et Z' nous avons

$$E(Z) = E(Z\mathbb{1}_{|Z'|<\eta}) + E(Z\mathbb{1}_{|Z'|\geq\eta}). \quad (26.231)$$

Nous décomposons donc le premier terme de (26.229) en

$$\begin{aligned} E(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|) &= E(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n-a|<\eta}) \\ &\quad + E(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n-a|\geq\eta}). \end{aligned} \quad (26.232)$$

Choisissons maintenant une valeur de η telle que

$$|(x, y) - (x', y')| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leq \epsilon. \quad (26.233)$$

Un tel η existe par l'uniforme continuité de f . Dans le premier terme, $|Y_n - a| < \eta$, par conséquent

$$\|(X_n, Y_n) - (X_n, a)\| = |Y_n - a| < \eta \quad (26.234)$$

et donc

$$\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\| \leq \epsilon. \quad (26.235)$$

Le premier terme devient donc

$$E(\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\|\mathbb{1}_{|Y_n-a|<\eta}) \leq \epsilon E(\mathbb{1}_{|Y_n-a|<\eta}) \leq \epsilon \quad (26.236)$$

parce que $E(\mathbb{1}_A) = P(A) \leq 1$. Pour le second terme de (26.232) nous effectuons la majoration

$$\|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)\| \leq 2\|f\|_\infty \quad (26.237)$$

tandis que la convergence $Y_n \xrightarrow{P} a$ entraîne

$$P(|Y_n - a| \geq \eta). \quad (26.238)$$

□

Proposition 26.60 ([295]).

Soient X_i des variables aléatoires telles que

$$X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad (26.239)$$

et h , une fonction mesurable sur l'espace d'arrivée de X_i . Soit C l'ensemble des points de continuité de h au sens

$$C = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } h \text{ est continue en } X_i(\omega)\}. \quad (26.240)$$

Alors si $P(X \in C) = 1$, nous avons

$$h(X_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X). \quad (26.241)$$

Une conséquence de cette proposition couplée au lemme de Slutsky est le résultats suivant, qui est donné sous le nom de théorème de Slutsky sur wikipédia.

Corollaire 26.61.

En reprenant les notations du lemme de Slutsky, si

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad (26.242a)$$

$$Y_n \xrightarrow{P} a, \quad (26.242b)$$

alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a \quad (26.243a)$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX \quad (26.243b)$$

$$Y_n^{-1} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1} X \quad (26.243c)$$

$$(26.243d)$$

pourvu que a soit inversible.

Lemme 26.62 (Borel-Cantelli).

Soit (A_n) une suite d'événements (avec $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout n).

(1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ converge, alors

$$P(A_n \text{ i.s.}) = 0. \quad (26.244)$$

(2) Si la somme $\sum_n P(A_n)$ diverge, et si de plus les A_i sont indépendants, alors

$$P(A_n \text{ i.s.}) = 1. \quad (26.245)$$

La notation $P(A_n \text{ i.s.})$ signifie «infiniment souvent», c'est à dire

$$P(A_n \text{ i.s.}) = P\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq N} A_k\right) = P(\limsup A_n) \quad (26.246)$$

Une façon de paraphraser le lemme de Borel-Cantelli est que nous avons l'alternative

$$P(\limsup A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (26.247)$$

Proposition 26.63.

Soit X_n , une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoires. Si

$$\sum_n P(\|X_n - X\| > \eta) < \infty \quad (26.248)$$

pour tout ϵ , alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Démonstration. Fixons ϵ et considérons les événements $A_n = \|X_n - X\| > \epsilon$. L'hypothèse dit que

$$\sum_n P(A_{n,\epsilon}) < \infty \quad (26.249)$$

et le lemme de Borel-Cantelli implique que

$$P(\limsup \|X_n - X\| > \epsilon) = 0. \quad (26.250)$$

Un élément ω est dans $\limsup A_n$ si il est contenu dans tous les A_n , par conséquent, pour chaque ϵ nous avons l'inclusion

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} \subset \complement \limsup A_n. \quad (26.251)$$

Nous pouvons aller plus loin et écrire

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\} = \complement \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \|X_n - X\| > \epsilon, \forall \epsilon > 0\}. \quad (26.252)$$

Or la probabilité de l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \|X_n - X\| > \epsilon\} \quad (26.253)$$

est 0 pour chaque ϵ , et par conséquent la probabilité du membre de droite de (26.252) est 1. $\square$

Exemple 26.64

Considérons une suite de 0 et de 1 dans laquelle le 1 arrive avec une probabilité p et le 0 avec une probabilité $1 - p$. Une telle suite est modélisée par une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes de paramètre p .

Question : une telle suite contient-elle une infinité de 1 ? Considérons les événements indépendants $A_n = \{X_n = 1\}$. Nous avons

$$\sum_n P(A_n) = \sum_n P(X_n = 1) = \sum_n p = \infty. \quad (26.254)$$

Par Borel-Cantelli et son expression (26.247), nous avons alors

$$P(\limsup A_n) = 1. \quad (26.255)$$

Donc une infinité d'événements A_n se produisent, et nous avons bien une infinité de 1 dans la suite.

Remarque : dans ce raisonnement nous pouvons considérer une probabilité non constante p_n tant que la série $\sum_n p_n$ diverge. $\triangle$

Exemple 26.65

À propos de maximum. La fonction $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $h(x_1, \dots, x_d) = \max_i \{x_i\}$ est une fonction continue. Nous voudrions prouver que si on a une famille (finie en $i = 1, \dots, l$) de suites (en n) variables aléatoires $X_n^{(i)} \xrightarrow{p.s.} a$ convergeant toutes vers la même limite a , alors

$$M_n = \max_i \{X_n^{(i)}\} \xrightarrow{p.s.} a. \quad (26.256)$$

D'abord si nous avons l suite numériques $(x_n^{(i)})$, alors la suite

$$M_n = \max_i x_n^{(i)} \quad (26.257)$$

converge vers la même limite. En effet si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre N_i l'entier tel que $|x_n^{(i)} - a| \leq \epsilon$ pour tout $n > N_i$. Et ensuite on prend $N > \max\{N_i\}$.

Si maintenant au lieu de suites numériques, nous avons des variables aléatoires, le résultat reste valable. Nous cherchons à prouver que

$$P\left(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } \max\{X_n^{(i)}(\omega)\} \rightarrow a\}\right) = 1. \quad (26.258)$$

Par ce que nous venons de dire sur les suites numériques, un élément ω n'est pas dans cet ensemble seulement si il y a un ∞ pour lequel $X_n^{(i)}$ ne converge pas vers a . Or cela, pour chaque i est un événement de probabilité zéro.

Les ω qui ne fonctionneront pas dans l'équation (26.258) sont ceux de la réunion d'un ensemble fini d'ensembles de probabilité nulle. C'est donc de probabilité nulle. $\triangle$

26.4 Loi des grands nombres, théorème central limite

26.4.1 Loi des grands nombres

Lemme 26.66 (Inégalité de Markov[296]).

Soit une variable aléatoire $X \in L^p$ et $\epsilon > 0$. Nous avons

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^r} E(|X|^r). \quad (26.259)$$

Démonstration. Nous avons

$$E(|X|^r) \geq \int_{|X| \geq \epsilon} |X|^r dP(\omega) \geq \epsilon^r \int_{|X| \geq \epsilon} dP = \epsilon^r P(|X| \geq \epsilon). \quad (26.260)$$

$\square$

Corollaire 26.67 ([296]).

Soit ϕ , une fonction croissante et positive ou nulle sur l'intervalle I . Soit aussi une variable aléatoire $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $P(Y \in I) = 1$. Alors pour tout $b \in I$ tel que $\phi(b) > 0$ nous avons

$$P(Y \geq b) \leq \frac{E[\phi(Y)]}{\phi(b)}. \quad (26.261)$$

Théorème 26.68 (Loi forte des grands nombres).

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles

- (1) indépendantes et identiquement distribuées,
- (2) intégrables (c'est à dire dans L^1),

alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1). \quad (26.262)$$

Note : étant donné que les variables aléatoires sont identiquement distribuées, nous avons évidemment $E(X_1) = E(X_2) = \dots$

Problèmes et choses à faire

Est-ce que les variables aléatoires doivent vraiment être réelles ?

Corollaire 26.69.

Si les variables aléatoires réelles X_n sont

- (1) indépendantes et identiquement distribuées,
- (2) dans L^2

alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1). \quad (26.263)$$

Démonstration. Nous voulons prouver que pour tout $\eta > 0$,

$$P(|\bar{X}_n - E(X_1)| > \eta) \rightarrow 0. \quad (26.264)$$

Remarquons d'abord que les variables aléatoires X_n étant identiquement distribuées, $E(\bar{X}_n) = E(X_1)$ parce que $E(X_i) = E(X_1)$ pour tout i . L'inégalité de Markov avec $r = 2$ nous donne

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \eta) \leq \frac{1}{\eta^2} E(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)|^2) \quad (26.265)$$

où nous reconnaissons $E(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)|^2) = \text{Var}(\bar{X}_n)$. Par la proposition 26.26 nous avons $\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}(X_1)/n$ et par conséquent

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \frac{1}{n\eta^2} \text{Var}(X_1), \quad (26.266)$$

qui tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. □

Proposition 26.70.

Soient X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_n \geq 0$. Nous acceptons $E(X_1) = \infty$, c'est à dire que nous relaxons la condition $X_n \in L^1$ par rapport à la loi des grands nombres.

Alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} E(X_1) \in [0, \infty]. \quad (26.267)$$

Démonstration. Si $E(X_1) < \infty$, nous sommes dans le cas de la loi des grands nombres. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ nous considérons la suite de variables aléatoires

$$X_n^{(N)} = \min(X_n, N). \quad (26.268)$$

Nous avons évidemment $\bar{X}_n^{(N)} \leq \bar{X}_n$. Les variables aléatoires $X_n^{(N)}$ étant bornées par N , elles vérifient la loi des grands nombres pour chaque N séparément. Par conséquent nous avons pour chaque N la limite

$$\bar{X}_n^{(N)} \rightarrow E(X_1^{(N)}) \quad (26.269)$$

Nous supposons que $E(X_1) = \infty$, par conséquent $\lim_{N \rightarrow \infty} E(X_1^{(N)}) = \infty$. Soit $\eta > 0$ et choisissons N de telle manière à avoir

$$E(X_1^{(N)}) > \eta + 1. \quad (26.270)$$

La limite (26.269) nous permet de trouver n_0 tel que pour tout $n > n_0$ nous ayons $\bar{X}_n^{(N)} > \eta$. Au final,

$$\eta < \bar{X}_n^{(N)} \leq \bar{X}_n, \quad (26.271)$$

ce qui montre que $\bar{X}_n \rightarrow \infty$. $\square$

Exemple 26.71

La loi des grands nombres justifie la pratique courante d'approximer une grandeur physique par la moyenne empirique d'un grand nombre de mesures. $\triangle$

Exemple 26.72

Citons ici le dernier paragraphe de *Le mystère de Marie Roget* par Edgar Allan Poe, traduit par Charles Baudelaire ⁴.

Rien, par exemple, n'est plus difficile que de convaincre le lecteur non spécialiste que, si un joueur de dés a amené les six deux fois coup sur coup, ce fait est une raison suffisante de parier gros que le troisième coup ne ramènera pas les six. Une opinion de ce genre est généralement rejetée tout d'abord par l'intelligence. On ne comprend pas comment les deux coups déjà joués, et qui sont maintenant complètement enfouis dans le Passé, peuvent avoir de l'influence sur le coup qui n'existe que dans le Futur. La chance pour amener les six semble être précisément ce qu'elle était à n'importe quel moment, c'est-à-dire soumise seulement à l'influence de tous les coups divers que peuvent amener les dés. Et c'est là une réflexion qui semble si parfaitement évidente, que tout effort pour la controverser est plus souvent accueilli par un sourire moqueur que par une condescendance attentive.

Dans le cours de la nouvelle, Edgar Poe cite et utilise la théorie des probabilités avec une justesse inaccoutumée dans la littérature. Mais dans ce paragraphe final, Poe montre de façon la plus formelle qu'il n'a *rien* compris à la loi des grands nombres. $\triangle$

26.4.2 Théorème central limite

Lemme 26.73.

Soit $z_n \rightarrow z$ une suite convergente dans $\mathbb{C}$. Alors

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow e^z. \quad (26.272)$$

Théorème 26.74.

Si les variables aléatoires X_n sont

- (1) indépendantes et identiquement distribuées de loi parente X ,
- (2) $X_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{A})$,

alors nous notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et nous avons

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (26.273)$$

4. Disponible sur https://fr.wikisource.org/wiki/Le_Mystère_de_Marie_Roget

Démonstration. Nous allons écrire la démonstration dans le cas de variables aléatoires réelles. La proposition 26.52 dit que la suite X_n converge en loi vers X si et seulement si les fonctions caractéristiques convergent ponctuellement. Nous devons donc prouver, pour chaque ⁵ $t \in \mathbb{R}$, que

$$\Phi_{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \rightarrow \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t). \quad (26.274)$$

Supposons dans un premier temps que $E(X_i) = 0$ et $\sigma(X_i) = 1$. Dans ce cas nous considérons la fonction

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = E\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k}\right) \quad (26.275a)$$

$$= \prod_{k=1}^n E\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}} X_k}\right) \quad (26.275b)$$

$$= \prod_{k=1}^n \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \quad (26.275c)$$

$$= \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n. \quad (26.275d)$$

Cette quantité est a priori complexe ; nous ne pouvons donc pas immédiatement passer au logarithme. Nous pouvons par contre utiliser un développement en puissances de t en nous servant de la proposition 26.43 et de l'hypothèse comme quoi $X_1 \in L^2$:

$$\Phi_{X_1}(t) = \Phi_{X_1}(0) + \Phi'_{X_1}(0)t + \Phi''_{X_1}(0)\frac{t^2}{2} + \alpha(t)t^2 \quad (26.276)$$

où α est une fonction qui a la propriété $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$.

En utilisant les hypothèses et la formule de dérivation de la fonction caractéristique,

$$\Phi_{X_1}(0) = 1 \quad (26.277a)$$

$$\Phi'_{X_1}(0) = E((iX)) = 0 \quad (26.277b)$$

$$\Phi''_{X_1}(0) = E(-X^2) = -\text{Var}(X_1) = -1. \quad (26.277c)$$

Nous avons donc

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{t^2}{n}\alpha\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}_{\in \mathbb{C}}, \quad (26.278)$$

de telle sorte que, en considérant une valeur fixée de t ,

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{\frac{t^2}{2} + \beta_n}{n}\right)^n \quad (26.279)$$

où $\beta_n = t^2\alpha(t/\sqrt{n})$. Nous avons bien entendu $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Nous pouvons appliquer le lemme 26.73 pour obtenir la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = e^{-t^2/2}. \quad (26.280)$$

La convergence (26.274) est par conséquent prouvée dans le cas où $E(X_i) = 0$ et $\text{Var}(X_i) = 1$.

Considérons maintenant des variables aléatoires avec $E(X_i) = m$ et $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Elles peuvent être écrites sous la forme

$$X_i = \sigma X'_i + m \quad (26.281)$$

où X'_i est d'espérance nulle et de variance un. Nous avons alors

$$S_n = \sigma \sum_{i=1}^n X'_i + nm, \quad (26.282)$$

5. Chuck Norris peut *vraiment* le faire pour *chaque* $t \in \mathbb{R}$

et

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sqrt{n}} \quad (26.283)$$

où $S'_n = \sum_i X'_i$. L'étude de la variable aléatoire

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \quad (26.284)$$

revient donc à celle de $S'_n/\sqrt{n}$ qui vient d'être effectuée. $\square$

Remarque 26.75.

Le théorème central limite s'applique quelle que soit la distribution des variables aléatoires X_i (dans les limites de hypothèses) ; en particulier il ne dit rien sur la moyenne des X_i . Il dit seulement que l'écart de la moyenne « mesurée » à la moyenne « théorique » est une variable aléatoire gaussienne si on a mesuré assez de fois.

Autrement dit, si la durée d'attente à la poste est de 5 minutes, et si j'y vais 2000 fois, alors la probabilité que ma moyenne d'attente soit de 4 minutes est la même que la probabilité qu'elle soit de 6 minutes⁶.

Voir la question (8).

Problèmes et choses à faire

La remarque 26.75 est une interprétation personnelle. J'aimerais avoir l'avis de quelqu'un de plus compétent.

Remarque 26.76.

Nous pouvons obtenir la limite (26.280) d'une façon alternative. Nous considérons la détermination du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$; cela est une fonction analytique vérifiant l'équation

$$e^{\ln(z)} = z \quad (26.285)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et le développement

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}. \quad (26.286)$$

En particulier, $\ln(1+z) = z + z\alpha(z)$ où $\lim_{z \rightarrow 0} \alpha(z) = 0$. Nous reprenons à l'équation (26.279) en fixant t . Nous avons

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \exp \left[\ln \left(\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \right) \right] \quad (26.287a)$$

$$= \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2} - \beta_n}{n} \right) \right] \quad (26.287b)$$

$$= \exp \left[-\frac{t^2}{2} - \beta_n + \left(-\frac{t^2}{2} - \beta_n \right) \alpha \left(\frac{-\frac{t^2}{2} - \beta_n}{n} \right) \right]. \quad (26.287c)$$

À la limite $n \rightarrow \infty$ nous tombons sur $e^{-t^2/2}$.

Remarque 26.77.

Étant donné que la variable aléatoire

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \quad (26.288)$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$, nous avons la convergence des fonctions de répartition partout où la fonction de répartition de la normale est continue (donc sur tout $\mathbb{R}$). En particulier,

$$\left| P \left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \right| \rightarrow 0. \quad (26.289)$$

6. Et en l'occurrence, cette probabilité est nulle parce qu'on est en train de parler de variable aléatoire continue, mais vous voyez l'idée.

Nous avons la borne de **Berry-Esséen** qui donne une estimation de la vitesse de convergence : si $X \in L^3$, alors il existe une constante C , indépendante de x , des X_i et de n telle que

$$\left| P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \right| \leq \frac{X\mu_3}{\sigma^3\sqrt{n}} \quad (26.290)$$

où $\mu_3 = E(|X_1 - m|^3)$ est le moment d'ordre 3 de X . La chose à retenir est que la convergence est à la vitesse de $1/\sqrt{n}$.

En dimension $d > 1$, nous avons encore un théorème central limite.

Théorème 26.78.

Si $d > 1$, et si nous avons des variables aléatoires X_n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ avec

- (1) les X_n sont indépendantes et identiquement distribuées
- (2) les X_n sont dans L^2 .

Alors nous notons $X_1 = (X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(d)})$. Nous avons

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad (26.291)$$

où Σ est la matrice de covariance du vecteur aléatoire X_1 :

$$\Sigma = (\text{Cov}(X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(d)}))_{i,j=1,\dots,d}. \quad (26.292)$$

26.4.3 Marche aléatoire

Nous considérons un mobile qui se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$. À chaque pas de temps, nous supposons qu'il va faire un pas à gauche avec une probabilité p et un pas à droite avec une probabilité $(1-p)$. Nous nous demandons quel est le mouvement du mobile sur le long terme.

La position S_n du mobile à l'instant n est donnée par

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (26.293)$$

où X_i est le pas effectué à l'instant i . Ce sont des variables de Bernoulli indépendantes avec

$$X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1 \quad (26.294)$$

c'est à dire

$$P(X_i = -1) = p \quad (26.295a)$$

$$P(X_i = 1) = 1 - p. \quad (26.295b)$$

Ces variables vérifient les hypothèses de la loi des grands nombres :

- (1) elles sont indépendantes et identiquement distribuées,
- (2) elles sont intégrables.

Pour le second point, le calcul est

$$\int_{\Omega} |X_i| dP = \int_{\mathbb{R}} |x| dP_X = \int_{\mathbb{R}} |x|(p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1) = |1-p| + |p| = 1. \quad (26.296)$$

Nous avons par conséquent

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1) = (1-2p) \quad (26.297)$$

et

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow (1-2p). \quad (26.298)$$

Si $p \neq 1/2$ nous pouvons conclure que

- (1) si $p > 1/2$, alors $S_n \xrightarrow{p.s.} -\infty$
 (2) si $p < 1/2$, alors $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$.

De plus nous connaissons la vitesse de divergence : elle est linéaire. Le mobile suit essentiellement l'équation $p(n) = (1 - 2p)n$.

Remarque 26.79.

Cela ne traite pas le cas $p = 1/2$. Dans ce cas, nous pouvons simplement dire que $S_n = o(n)$.

26.5 Les lois usuelles

26.5.1 Loi de Bernoulli

Une expérience de Bernoulli consiste à tirer au hasard un 0 ou un 1 avec une probabilité p de tomber sur 1 et $1 - p$ de tomber sur zéro. Il s'agit donc d'une expérience qui réussit ou qui rate.

Le cas typique est une urne avec des boules indiscernables blanches ou noires. La probabilité p est la proportion de blanches dans l'urne (avec remise entre les tirages). Dans ce cas, nous avons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω représente l'ensemble des boules, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω et P est l'équiprobabilité sur Ω . Une variable aléatoire est une application

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \{0, 1\} \\ \omega &\mapsto \text{couleur de la boule } \omega. \end{aligned} \quad (26.299)$$

Nous notons $\mathcal{B}(1, p)$ la loi de Bernoulli. Elle a une expression très simple :

$$\mathcal{B}(0, 1)(\{1\}) = p \quad (26.300a)$$

$$\mathcal{B}(0, 1)(\{0\}) = 1 - p \quad (26.300b)$$

Une variable aléatoire réelle est de **Bernoulli** de paramètre p ($0 < p < 1$) si

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (26.301)$$

avec $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. En tant que mesure sur $\mathbb{R}$, nous avons

$$P_X = p\delta_1 + (1 - p)\delta_0. \quad (26.302)$$

Une fonction h qui réalise le supremum de la formule (7.292) est par exemple une fonction en escalier qui vaut en x le plus petit entier plus grand ou égal à x . L'espérance d'une loi de Bernoulli est alors

$$E(X) = p. \quad (26.303)$$

Étant donné que la variable aléatoire X prend seulement les valeurs 0 et 1, nous avons pour tout ensemble mesurable B

$$P_{X^2}(B) = P(X^2 \in B) = P(X \in B), \quad (26.304)$$

et par conséquent $P_{X^2} = P_X$ et $E(X^2) = E(X)$. Nous trouvons donc la variance

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p). \quad (26.305)$$

26.5.2 Loi binomiale

Une expérience binomiale consiste à répéter n expériences de Bernoulli de paramètre p et de compter le nombre de réussites. Une telle expérience peut être réalisée selon la procédure suivante.

Soit une urne contenant N boules dont une proportion p de 1 et $1 - p$ de 0. Une expérience binomiale de paramètres n et p consistera à prendre n boules *avec remise* et à compter le nombre de 1 obtenus.

En termes d'espaces probabilisés, nous avons Ω qui est l'ensemble des tuple de taille n à valeurs dans $\{0, 1\}$, la tribu $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω , et la probabilité P est l'équiprobabilité :

$$P(\omega) = \frac{1}{N^n} \quad (26.306)$$

si il y a N boules dans l'urne. Nous construisons alors la variable aléatoire

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (26.307)$$

où ω est une suite de taille n de 0 et de 1.

Calculons $P(X = k)$. Il s'agit de considérer tous les sous-ensembles de taille n de Ω contenant exactement k fois 1. Il y a $\binom{n}{k}$ manière de décider lesquelles des n boules seront blanches. Ensuite, chaque boule blanche peut être choisie parmi les m boules disponibles, et chaque boule noire peut être choisie parmi les $(N - m)$ disponibles. Nous avons donc

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{m^k (N - m)^{n-k}}{N^n}. \quad (26.308)$$

En effet la mesure de probabilité sur Ω est la mesure de comptage renormalisée par le cardinal de Ω qui vaut N^n . Étant donné que $p = m/N$, nous transformons facilement (26.308) en

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (26.309)$$

Une variable aléatoire de loi binomiale étant une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, l'espérance⁷ et la variance⁸ s'obtiennent en sommant les espérances et variances termes à terme :

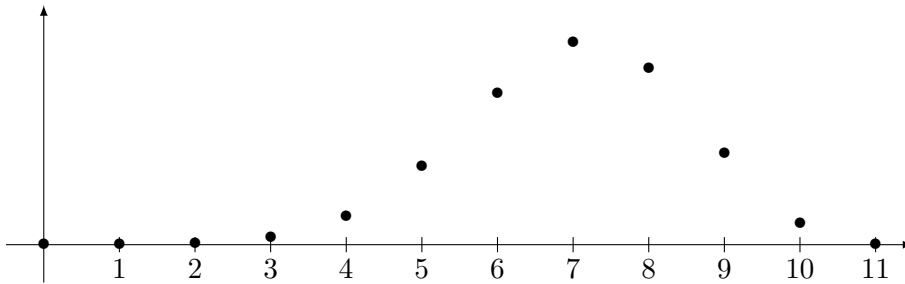
$$E(X) = np \quad (26.310)$$

et

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = np(1 - p) \quad (26.311)$$

en vertu de (26.305).

La loi binomiale lorsque $p = 0.7$ et $n = 10$.



26.5.3 Loi multinomiale

La loi multinomiale $\mathcal{M}(n; k; p_1, \dots, p_k)$ consiste à effectuer n épreuves d'une démarche aléatoire qui peut avoir k issues différentes avec probabilités $p_1, \dots, p_k$. Les variables aléatoires multinomiales sont N_i avec les contraintes

$$\sum_{i=1}^k N_i = n \quad (26.312a)$$

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1. \quad (26.312b)$$

7. Valable même sans indépendance, proposition 26.24

8. Lemme 26.22.

La fonction de probabilité multinomiale est

$$P(N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}. \quad (26.313)$$

Chacune des N_i est une binomiale de probabilité p_i .

26.5.4 Loi géométrique

Soit (X_n) une suite indépendante et identiquement distribuée de lois de Bernoulli de paramètre p . Alors la variable aléatoire

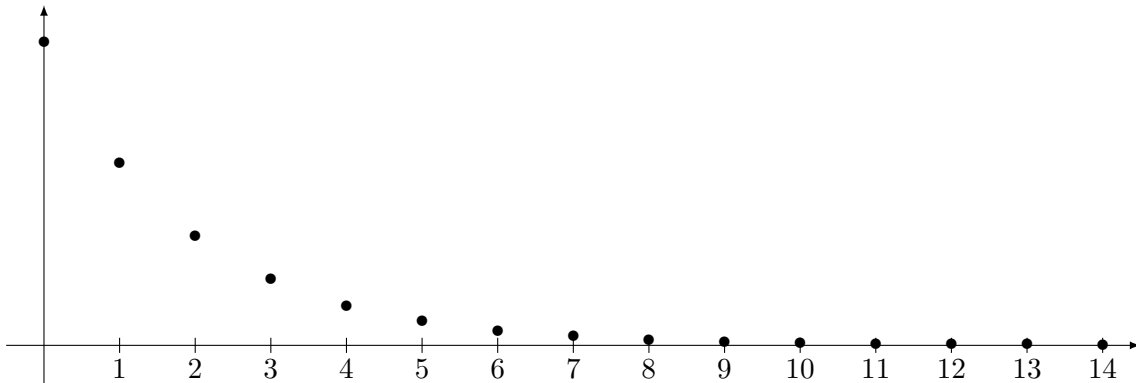
$$Z = \inf\{n \geq 1 \text{ tel que } X_n = 1\} \quad (26.314)$$

est une loi géométrique de paramètre p .

La loi géométrique compte donc le nombre d'expériences de Bernoulli à effectuer avant que le premier succès soit au rendez-vous. Nous avons

$$P(Z = k) = P(X_k = 1)P(X_1, \dots, X_{k-1} = 0) = p(1-p)^{k-1} \quad (26.315)$$

La loi géométrique de paramètre $p = 0.2$.



Note : si p est trop grand, on ne voit vite plus rien parce que la probabilité d'attendre longtemps est vite très faible.

26.5.5 Loi de Poisson

Une variable aléatoire Z suit une **loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$ si

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (26.316)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent.

Si un événement se produit en moyenne p fois par seconde, la probabilité d'observer l'événement k fois durant n secondes est donnée par $P(Z = k)$ où Z est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = pn$.

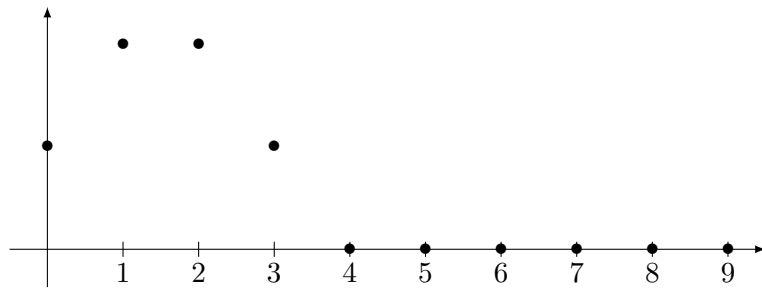
Théorème 26.80 (wikipedia).

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire de Poisson sont λ :

$$E(X) = \lambda \quad (26.317a)$$

$$\text{Var}(X) = \lambda. \quad (26.317b)$$

La loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.



26.5.6 Loi exponentielle

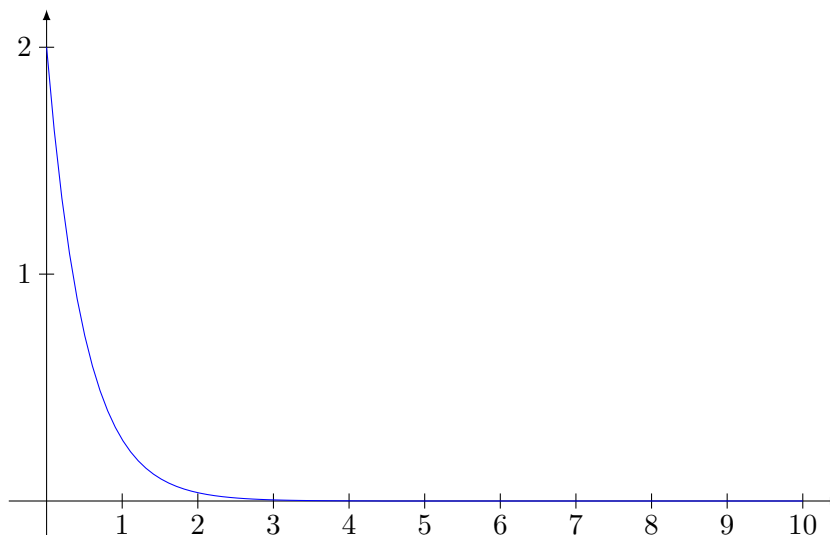
La loi de exponentielle représente le temps qu'il faut attendre pour qu'une particule se désintègre si elle a en permanence une probabilité⁹ λdt de se désintégrer entre t et $t + dt$. L'espérance est donc $1/\lambda$.

Il se passe donc en moyenne λ événements par seconde. La proposition 26.87 nous montrera que le nombre d'événements se produisant en une seconde suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Plus formellement, la loi exponentielle de paramètre λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$ est la loi de densité

$$f_X: x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (26.318)$$

Densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.



Proposition 26.81.

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (26.319)$$

La fonction caractéristique est donnée par

$$E(e^{itX}) = \frac{\lambda}{\lambda - it}. \quad (26.320)$$

L'espérance et la variance sont données par

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (26.321)$$

9. Étant donné que λ n'est pas limité à 1, en réalité ce n'est pas une probabilité. Je suis preneur d'une bonne interprétation physique de ce paramètre.

Démonstration. Pour la fonction caractéristique,

$$E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) dx \quad (26.322a)$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(-\lambda + it)} dx \quad (26.322b)$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{x(-\lambda + it)}}{-\lambda + it} \right]_{x=0}^{x=A} \quad (26.322c)$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{A(it-\lambda)}}{it-\lambda} - \frac{1}{it-\lambda}. \quad (26.322d)$$

Le premier terme est nul parce que si on prend la norme,

$$\left| \frac{e^{A(-\lambda + it)}}{-\lambda + it} \right| = \frac{e^{-\lambda A}}{|-\lambda + it|} \rightarrow 0. \quad (26.323)$$

En ce qui concerne l'espérance nous faisons le calcul suivant :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^+} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \quad (26.324)$$

Pour la variance, nous utilisons la formule (26.58). Nous avons

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}. \quad (26.325)$$

Donc $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. □

La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** en ce sens que

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x). \quad (26.326)$$

En effet nous utilisons la règle de la probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (26.327)$$

Ici,

$$P(X > x + y | X > y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = e^{-\lambda x}. \quad (26.328)$$

La proposition suivante montre que la loi exponentielle est à peu près la seule à être sans mémoire. D'où son importance dans l'étude des machines dont les pièces ne subissent pas d'usure.

Proposition 26.82.

Soit X , une variable aléatoire admettant une densité continue f par rapport à la mesure de Lebesgue. Si elle est sans mémoire, alors elle est exponentielle.

Démonstration. Nous posons $\varphi(x) = P(X \geq x)$. Cela est la fonction de répartition de X (à part que cette dernière est $1 - \varphi(x)$ mais c'est pas grave), et est donnée par

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x f(t) dt. \quad (26.329)$$

Cette dernière intégrale vérifie les hypothèses du théorème 26.82, de telle sorte que φ soit une fonction dérivable et $\varphi'(x) = f(x)$.

D'autre part en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle la propriété de ne pas avoir de mémoire donne

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (26.330)$$

et de plus $\varphi(0) = 0$. Calculons la dérivée de φ :

$$\varphi'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \epsilon) - \varphi(x)}{\epsilon} = \varphi(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\epsilon) - 1}{\epsilon} = \varphi(x)\varphi'(0). \quad (26.331)$$

Donc φ vérifie l'équation différentielle de l'exponentielle.

□

Exemple 26.83

Une machine a une durée de vie représentée par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Soit T_y la variable aléatoire qui représente la temps de vie restant sachant que la machine a déjà vécu un temps y . Nous voulons trouver la fonction de répartition de T_y . Nous avons

$$P(T_y > x) = P(X > x + y | X > y) = P(X > x) = e^{-\lambda x}. \quad (26.332)$$

Dans ce cas, la loi de T_y ne dépend pas de y . Cela signifie que la machine ne vieillit pas et surtout que le modèle n'est pas réaliste. $\triangle$

Proposition 26.84.

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ sont indépendantes, alors

- (1) $P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$
- (2) $P(X > Y) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$
- (3) $P(X = Y) = 0$
- (4) $\min(X, Y) \sim \mathcal{E}(\lambda + \mu)$.

De plus les variables aléatoires exponentielles ont une propriété d'absence de mémoire :

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t) = e^{-\lambda t}. \quad (26.333)$$

Démonstration. Étant donné que X et Y sont indépendantes, la densité conjointe est le produit des densités (26.19). Nous avons donc

$$P(X > Y) = \int_D \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dx dy \quad (26.334)$$

où D est le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x, y > 0, x > y\}$. Nous avons donc

$$P(X > Y) = \lambda \mu \int_0^\infty dx \int_0^x dy e^{-\lambda x} e^{-\mu y} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (26.335)$$

```
sage: var('a,b')
(a, b)
sage: f(x,y)=exp(-a*x)*exp(-b*y)
sage: assume(a>0)
sage: assume(b>0)
sage: a*b*f.integrate(y,0,x).integrate(x,0,oo)
(x, y) |--> a*b/(a^2 + a*b)
```

Pour trouver la loi de $\min(X, Y)$, nous écrivons

$$P(\min(X, Y) > t) = P(X > t, Y > t) \quad (26.336a)$$

$$= P(X > t)P(Y > t) \quad \text{par indépendance} \quad (26.336b)$$

$$= (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) \quad (26.336c)$$

$$= e^{-(\lambda + \mu)t} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(t) \quad (26.336d)$$

$$= 1 - F_Z(t) \quad (26.336e)$$

où $Z \sim \mathcal{E}(\lambda + \mu)$.

□

26.5.7 Approximation de la binomiale par une Poisson

Proposition 26.85.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires avec $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ telle que np_n converge vers une constante $\lambda > 0$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration. Commençons par écrire la loi binomiale sous une forme plus adaptée au passage à la limite :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (26.337)$$

Le produit au numérateur contient k termes dans lesquels nous mettons n en évidence. Nous trouvons

$$P(X = k) = \frac{(np)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (26.338)$$

Lorsque nous passons à la limite, tous les facteurs du type $1 - l/n$ tendent vers 1 ainsi que $(1-p)^{-k}$. Les facteurs dont la limite n'est pas 1 sont donc

$$P(X_n = k) \simeq \frac{(np_n)^k}{k!} (1-p_n)^k. \quad (26.339)$$

Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n = e^{-\lambda}. \quad (26.340)$$

La thèse est alors obtenue en remettant les morceaux ensemble. $\square$

Exemple 26.86

Considérons un serveur informatique qui reçoit des requêtes. Toutes les 10^{-3} s il reçoit une requête avec une probabilité $p = 0.05$. La variable aléatoire qui consiste à donner le nombre de requêtes effectivement effectuées en une seconde suit une loi binomiale $\mathcal{P}(1000, p)$.

Déterminons la probabilité que le serveur reçoive 20 requêtes en une seconde. Nous approximations $\mathcal{B}(1000, 0.05)$ par $\mathcal{P}(50)$, et la réponse est

$$e^{-50} \frac{50^{20}}{20!} \simeq 7 \cdot 10^{-7}. \quad (26.341)$$

$\triangle$

26.5.8 Loi de Poisson et loi exponentielle

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . En utilisant le produit de convolution, nous pouvons trouver la fonction de densité de la somme (voir point 26.2.3). Commençons avec deux variables aléatoires X et Y . Les densités sont

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[x \geq 0]} \lambda e^{-\lambda x} \quad (26.342a)$$

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{[y \geq 0]} \lambda e^{-\lambda y}, \quad (26.342b)$$

et la densité conjointe est alors

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-t \geq 0]} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{1}_{[t \geq 0]} \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (26.343a)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x 1 dt \quad (26.343b)$$

$$= x \lambda^2 e^{-\lambda x}. \quad (26.343c)$$

Par récurrence si $S = X_1 + \dots + X_n$ nous trouvons

$$f_S(x) = x^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda x}. \quad (26.344)$$

Proposition 26.87 ([297]).

Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Nous considérons la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$ nous considérons

$$N_t = \max\{n \geq 1 \text{ tel que } \sum_{i=1}^n T_i \leq t\}. \quad (26.345)$$

Alors $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Démonstration. Ce que nous devons calculer est

$$P(N_t = k) = P(S_n \leq t \leq S_{n+1}). \quad (26.346)$$

Nous introduisons la variable aléatoire $V_{n+1} = (X_1, \dots, X_{n+1})$ ainsi que l'ensemble

$$A_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } x_1 + \dots + x_n \leq t \leq x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}\}. \quad (26.347)$$

Le problème est donc de calculer

$$P(S_n \leq t \leq S_{n+1}) = P(V_{n+1} \in A_{n+1}^+) = \int_{A_{n+1}^+} f_{n+1}(x) dx \quad (26.348)$$

où A_{n+1}^+ est la partie de A_{n+1} dans laquelle $x_i \geq 0$ pour tout i et f_{n+1} est la fonction de densité conjointe des variables aléatoires X_i . Nous effectuons le changement de variables

$$s_k = \sum_{i \leq k} x_i \quad (26.349a)$$

$$x_k = s_k - s_{k-1} \quad (26.349b)$$

dont le déterminant vaut 1. D'autre part par indépendance des variables aléatoires X_i , la fonction de partition jointe f_{n+1} s'exprime sous la forme

$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_{n+1}}(x_{n+1}) \quad (26.350a)$$

$$= \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_{n+1})} \quad (26.350b)$$

$$= \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}}. \quad (26.350c)$$

En ce qui concerne les bornes de l'intégrale dans les variables s_i , nous voulons que tous les x_i soient positifs, par conséquent $s_1 \geq 0$ et ensuite l'équation $x_k = s_k - s_{k-1}$ demande $s_k \geq s_{k-1}$. Les bornes sont donc données par l'ensemble

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq t \leq s_{n+1}, \quad (26.351)$$

c'est à dire $B_n \times]t, \infty[$ où

$$B_n = \{(s_1, \dots, s_n) \text{ tel que } 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq t\}. \quad (26.352)$$

Le théorème de Fubini nous permet de décomposer l'intégrale :

$$P(S_n \leq t \leq S_{n+1}) = \int_{B_n \times]t, \infty[} \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} ds_1 \dots ds_{n+1} \quad (26.353a)$$

$$= \lambda^{n+1} \left(\int_{B_n} ds_1 \dots ds_n \right) \underbrace{\left(\int_t^\infty e^{-\lambda s_{n+1}} ds_{n+1} \right)}_{= \lambda^{-1} e^{-\lambda t}} \quad (26.353b)$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda t} \text{Vol}(B_n) \quad (26.353c)$$

où $\text{Vol}(B_n)$ est le volume de B_n qui reste à calculer. L'ensemble $C^n = [0, t]^n$ se décompose en cellules disjointes (à ensemble de mesure nulle près) de la forme

$$C_\sigma = \{0 \leq s_{\sigma(1)} \leq s_{\sigma(2)} \leq \dots \leq s_{\sigma(n)} \leq t\} \quad (26.354)$$

pour chaque permutation $\sigma \in S_n$. Il y a exactement $n!$ telles cellules dans C^n . Par conséquent

$$t^n = \text{Vol}(C^n) = n! \text{Vol}(C_\sigma) = n! \text{Vol}(B_n) \quad (26.355)$$

et $\text{Vol}(B_n) = \frac{t^n}{n!}$. Finalement nous avons

$$P(n_t = n) = P(S_n \leq t \leq S_{n+1}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}. \quad (26.356)$$

□

26.5.9 Loi normale

La loi normale de paramètres m et $\sigma > 0$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la loi donnée par la densité

$$\gamma_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (26.357)$$

Proposition 26.88.

Si la variable aléatoire réelle X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors nous avons $E(X) = m$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Démonstration. L'espérance d'une variable aléatoire se calcule à partir de la formule (26.204) :

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right] dx \quad (26.358a)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{\mathbb{R}} (\sigma u + m) e^{-u^2/2} du \quad (26.358b)$$

où nous avons effectué le changement de variable $u = (x-m)/\sigma$. Nous utilisons ensuite l'intégrale remarquable

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}. \quad (26.359)$$

En ce qui concerne la variance, nous avons le même genre de calculs. □

La **loi normale réduite** est la densité

$$\gamma(x) = \gamma_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (26.360)$$

La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Proposition 26.89.

La fonction caractéristique de la distribution normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est

$$\Phi_{\mathcal{N}(m, \sigma^2)}(t) = \exp \left(itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right). \quad (26.361)$$

Démonstration. En suivant la formule (26.176), l'intégrale à calculer est

$$\Phi_{\mathcal{N}(m, \sigma^2)}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2} dx. \quad (26.362)$$

Nous reconnaissons une transformée de Fourier. Afin de la calculer sans encombres, nous passons par les fonctions intermédiaires suivantes :

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ h(x) &= g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \\ k(x) &= h(x-m). \end{aligned} \quad (26.363)$$

La fonction caractéristique que nous cherchons est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\hat{k}(t)$. Les formules liées à la transformée de Fourier nous donnent

$$\hat{k}(t) = \hat{h}(t)e^{itm} \quad (26.364a)$$

$$\hat{h}(t) = \sigma\hat{g}(\sigma t) \quad (26.364b)$$

$$\hat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}. \quad (26.364c)$$

Attention : l'intégrale à calculer est une transformée de Fourier *inverse*, d'où la formule (26.364a) qui a un signe de différence avec la formule usuelle. En recombinaison toutes ces expressions nous trouvons

$$\Phi_{\mathcal{N}(m, \sigma^2)} = e^{-\sigma^2 t^2/2} e^{itm}, \quad (26.365)$$

ce qu'il nous fallait. $\square$

Exemple 26.90

Une espérance qui sert de temps en temps est celle de $X = e^{\beta Z}$ lorsque $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Elle se calcule en remarquant que $x^2 - 2\beta x = (x - \beta)^2 - \beta^2$, donc

$$E(e^{\beta Z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} e^{-x^2/2} dx \quad (26.366a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-\beta)^2} e^{\beta^2/2} dx \quad (26.366b)$$

$$= \frac{e^{\beta^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \quad (26.366c)$$

$$= e^{\beta^2/2}. \quad (26.366d)$$

$\triangle$

26.5.10 Vecteurs gaussiens

Source : [117, 298].

Définition 26.91.

Un vecteur aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un **vecteur gaussien** si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont des variables aléatoires normales. En d'autres termes, X est un vecteur gaussien si pour tout vecteur u , la variable aléatoire $u \cdot X$ est gaussienne.

Le vecteur moyenne d'un vecteur gaussien est $E(X) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$ et sa matrice de **variance-covariance** est la matrice

$$K_X = \text{Var}(X) = E[(X - E(X)) \otimes (X - E(X))] \quad (26.367)$$

où l'opération $\otimes$ est celle introduite dans la section 6.36. Cela n'est rien d'autre que la matrice de covariance de la variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Lemme 26.92.

Si les variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes, alors le vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

Démonstration. Nous devons montrer que si X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, alors $X + Y$ est encore gaussienne. L'indépendance nous assure les égalités suivantes pour la fonction caractéristique :

$$\Phi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}) E(e^{itY}). \quad (26.368)$$

Dans le cas où X et Y sont gaussiens nous trouvons

$$\Phi_{X+Y}(t) = \exp\left(im_1t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right) \exp\left(im_2t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(i(m_1 + m_2)t - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}\right). \quad (26.369)$$

Étant donné que la loi d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (théorème 26.45), nous déduisons que $X + Y$ est une normale de moyenne $m_1 + m_2$ et de variance $\sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. $\square$

Proposition 26.93.

La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien est donnée par

$$\Phi_X(u) = \exp\left(iu \cdot E(X) - \frac{1}{2}u \cdot K_X u\right) \quad (26.370)$$

où K_X est la matrice de covariance de X .

Démonstration. Nous considérons la variable aléatoire réelle gaussienne $u \cdot X$. Son espérance $m = E(u \cdot X) = u \cdot E(X)$. Nous commençons par établir la formule suivante :

$$u^t K_X u = u \cdot K_X u = E\left([X - E(X)] \cdot u\right)^2. \quad (26.371)$$

Utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\sum_{kl} E(A_{kl})u_k u_l = \sum_{kl} E(A_{kl}u_k u_l), \quad (26.372)$$

nous trouvons

$$K_X(u, u) = E\left([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\right)(u, u) \quad (26.373a)$$

$$= E\left([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]\right)(u, u) \quad (26.373b)$$

$$= E\left([X - E(X)] \cdot u\right)\left([X - E(X)] \cdot u\right) \quad (26.373c)$$

$$= E\left([X - E(X)] \cdot u\right)^2. \quad (26.373d)$$

Par la linéarité du produit scalaire et de l'espérance,

$$[X - E(X)] \cdot u = u \cdot X - E(u \cdot X), \quad (26.374)$$

ce qui nous ramène à la variable aléatoire $u \cdot X$. Nous avons alors

$$K_X(u, u) = E\left([X - E(X)] \cdot u\right)^2 = \text{Var}(u \cdot X). \quad (26.375a)$$

Nous avons donc obtenu une forme pour la variance de la variable aléatoire $u \cdot X$. Étant donné que $u \cdot X$ est gaussienne de moyenne $m = u \cdot E(X)$ et de variance $\sigma^2 = K_X(u, u)$, nous avons

$$\Phi_{u \cdot X}(t) = \exp\left(itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right). \quad (26.376)$$

Par ailleurs nous avons $\Phi_X(u) = \Phi_{u \cdot X}(1)$ parce que

$$\Phi_X(u) = E(e^{iu \cdot X}) = \Phi_{u \cdot X}(1). \quad (26.377)$$

En utilisant la forme (26.376) pour $\Phi_{u \cdot X}$ nous trouvons

$$\Phi_X(u) = \Phi_{u \cdot X}(1) = \exp\left(im - \frac{1}{2}\sigma^2\right) = \exp\left(iE(u \cdot X) - \frac{1}{2}u \cdot K_X u\right). \quad (26.378)$$

$\square$

Théorème 26.94.

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$, un vecteur gaussien. Les composantes sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Démonstration. Nous savons que les variables aléatoires indépendantes sont non corrélées. Nous devons donc surtout prouver le contraire. Le fait que les variables aléatoires X_i soient non corrélées signifie que la matrice de covariance est

$$K_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^2 \end{pmatrix} \quad (26.379)$$

où $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$. Notons $m_k = E(X_k)$. Si $u \in \mathbb{R}^d$, nous avons en vertu de la proposition 26.93 que

$$\Phi_X(u) = \exp\left(i(u_1 m_1 + \dots + u_d m_d) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 u_1^2 + \dots + \sigma_d^2 u_d^2)\right) \quad (26.380a)$$

$$= \exp\left(iu_1 m_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 u_1^2\right) \dots \exp\left(iu_d m_d - \frac{1}{2}\sigma_d^2 u_d^2\right) \quad (26.380b)$$

$$= \Phi_{X_1}(u_1) \dots \Phi_{X_d}(u_d). \quad (26.380c)$$

Les variables aléatoires X_i sont donc indépendantes parce que la fonction caractéristique se factorise. $\square$

Exemple 26.95

Nous donnons à présent un exemple de deux variables aléatoires gaussiennes qui ne forment pas un vecteur gaussien. Pour ce faire nous devons chercher des variables aléatoires non indépendantes. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et ϵ une variable aléatoire (indépendante de Y) donnée par $P(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$, $P(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Nous considérons le vecteur $(Y, \epsilon Y)$.

D'abord montrons que ϵY est une variable aléatoire gaussienne. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Nous avons

$$P(\epsilon Y \in A) = P(\epsilon = -1, Y \in A) + P(\epsilon = -1, -Y \in A). \quad (26.381)$$

Par indépendance et par symétrie de Y ¹⁰ nous trouvons

$$P(\epsilon Y \in A) = P(\epsilon = 1)P(Y \in A) + P(\epsilon = -1)P(-Y \in A) \quad (26.382a)$$

$$= \frac{1}{2}P(Y \in A) + \frac{1}{2}P(-Y \in A) \quad (26.382b)$$

$$= P(Y \in A). \quad (26.382c)$$

Nous avons donc $Y \sim \epsilon Y$, et donc ϵY est gaussienne.

En ce qui concerne la covariance, nous savons que $E(Y) = E(\epsilon) = 0$, donc

$$\text{Cov}(Y, \epsilon Y) = E(Y \cdot \epsilon Y) = E(\epsilon Y^2) = E(\epsilon)E(Y^2) = 0. \quad (26.383)$$

Note : $E(Y^2) = 1$.

Les variables aléatoires Y et ϵY ne sont pas indépendantes. En effet si elles l'étaient, Y serait aussi indépendante de $(\epsilon Y)^2 = Y^2$, alors que Y et Y^2 ne sont pas indépendantes. Donc $X = (Y, \epsilon Y)$ n'est pas un vecteur gaussien. $\triangle$

Théorème 26.96 ([117]).

Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et $K \in \mathbb{M}(d, \mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Alors il existe un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance K .

10. C'est à dire que $P(Y \in A) = P(Y \in -A) = P(-Y \in A)$.

Démonstration. Nous effectuons la preuve avec $m = 0$. Nous choisissons l'espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^r, \mathcal{B}(\mathbb{R}^r))$ où r est le rang de K muni de la probabilité de densité

$$\gamma(u) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2\right). \quad (26.384)$$

Nous considérons la variable aléatoire

$$\begin{aligned} Y_0: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^r \\ u &\mapsto u. \end{aligned} \quad (26.385)$$

C'est une variable aléatoire gaussienne de loi $P_{Y_0} = \gamma\lambda_d$ où λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Sa densité (26.384) s'écrit comme le produit de r gaussiennes indépendantes; sa matrice de covariance est donc $\mathbb{1}_{r \times r}$.

Étant donné que K est symétrique et positive, il existe une matrice $d \times r$ telle que $K = AA^t$. Pour voir cela, remarquons qu'il existe une matrice $d \times d$ qui fait le travail. En effet K se diagonalise par une orthogonale (théorème 6.292) :

$$K = ADA^t = A\sqrt{D}\sqrt{D}A^t \quad (26.386)$$

où D est une matrice diagonale contenant $d - r$ zéros et $\sqrt{D}$ est la matrice que l'on imagine. Donc la matrice $L = A\sqrt{D}$ est une matrice telle que $LL^t = K$. Maintenant, étant donné que les $d - r$ dernières lignes de D sont vides, les $d - r$ dernières lignes de L n'ont pas d'importance et peuvent être choisies nulles, voire même ne pas exister. La matrice $A \in \mathbb{M}_{d \times r, \mathbb{R}}$ qui réalise $AA^t = K$ est la «troncature» de L à ses r premières lignes.

Nous considérons la variable aléatoire $Y = AY_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Étant donné que AY_0 est une transformation linéaire d'un vecteur gaussien, c'est un vecteur gaussien. Nous avons encore $m(Y) = 0$ et

$$\text{Var}(Y) = E(Y \otimes Y) = E((AY_0) \otimes (AY_0)) = AE(Y_0 \otimes Y_0)A^t = AA^t = K \quad (26.387)$$

parce que $E(Y_0 \otimes Y_0) = \mathbb{1}$. Nous avons utilisé les formules de la section 6.36, et en particulier la formule (6.929). $\square$

Lorsqu'une matrice symétrique et positive K est donné, nous avons créé un vecteur gaussien de covariance K en créant $X = AY$ où Y est le vecteur gaussien «le plus simple» et où A est donné par $AA^t = K$. La proposition suivante montre l'inverse : un vecteur gaussien X peut se réduire au vecteur gaussien «le plus simple» en utilisant la transformation $Y = A^{-1}X$ où A est encore donnée par $AA^t = K$. Ce résultat nous permettra de voir les vecteurs gaussiens généraux comme des «changements de coordonnées» par rapport au vecteur gaussien simple $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ avec $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Proposition 26.97.

Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ le vecteur gaussien formé des variables aléatoires indépendantes $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit K une matrice symétrique et positive et la matrice A telle que $AA^t = K$. Alors le vecteur $X = AY$ est gaussien de covariance K .

Démonstration. Nous montrons que la covariance de $X = AY$ est donnée par K . Nous avons

$$K_X = E([X - E(X)] \otimes [X - E(X)]) \quad (26.388a)$$

$$= E(A(Y - E(Y)) \otimes A(Y - E(Y))) \quad (26.388b)$$

$$= E\left(A([Y - E(Y)] \otimes [Y - E(Y)])A^t\right) \quad (26.388c)$$

$$= E(AA^t) \quad (26.388d)$$

$$= K_X. \quad (26.388e)$$

Nous avons utilisé le lemme 6.387 ainsi que le fait que

$$[Y - E(Y)] \otimes [Y - E(Y)] = K_Y = \mathbb{1}. \quad (26.389)$$

Notons que $E(Y) = 0$, mais cela ne joue pas ici. $\square$

Théorème 26.98.

Un vecteur gaussien $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si sa matrice de covariance est inversible. Dans ce cas nous avons la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{|\det(K_X)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}[X - E(X)] \cdot K_X^{-1}[X - E(X)]\right). \quad (26.390)$$

Démonstration. Nous supposons que $E(X) = 0$. En utilisant la proposition 26.97, nous posons $X = AY$ où Y est un vecteur gaussien $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{1})$ et $AA^t = K_X$. Si K n'est pas inversible, alors A n'est pas inversible non plus. Notons $r < d$ le rang de A . Étant donné que $X = AY$, la variable aléatoire X prend presque sûrement ses valeurs dans l'image de A , c'est à dire dans un sous-espace de dimension $r < d$ de $\mathbb{R}^d$. Ce sous-espace est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, mais de mesure 1 pour la mesure P_X . La mesure P_X ne peut donc pas avoir de densité par rapport à celle de Lebesgue.

Supposons maintenant que K_X soit inversible. La matrice A l'est aussi. Nous anticipons l'utilisation du théorème de changement de variable 13.97. Ici le changement de variable sera la transformation linéaire A dont le jacobien vaut

$$|\det(A^{-1})| = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\sqrt{|\det K_X|}}. \quad (26.391)$$

Soit γ la densité de Y . Nous posons

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{|\det K_X|}} \gamma(A^{-1}x) \quad (26.392)$$

où γ est le produit des densités de d gaussiennes usuelles $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous allons d'abord montrer que cette formule est bien la fonction (26.390) et ensuite que X admet f_X comme densité. Nous avons

$$\gamma(A^{-1}x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|A^{-1}x\|^2\right), \quad (26.393)$$

et

$$\|A^{-1}x\|^2 = \langle A^{-1}x, A^{-1}x \rangle \quad (26.394a)$$

$$= \langle (A^{-1})^t A^{-1}x, x \rangle \quad (26.394b)$$

$$= \langle (AA^t)^{-1}x, x \rangle \quad (26.394c)$$

$$= x \cdot K_X^{-1}x, \quad (26.394d)$$

ce qui nous donne bien la formule (26.390). Nous vérifions maintenant que f_X est bien une densité pour X . Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$. Nous avons d'abord

$$P(X \in B) = P(AY \in B) = P(Y \in A^{-1}B). \quad (26.395)$$

Ici nous avons utilisé le fait que A était bijectif. Nous avons ensuite

$$P(X \in B) = \int_{A^{-1}B} \gamma(t) dy = \int_B \gamma(A^{-1}x) |J_{A^{-1}}(x)| dx = \int_B f_X(x) dx. \quad (26.396)$$

C'est ici que nous avons utilisé le théorème de changement de variable 13.97. □

26.5.11 Variable aléatoire de Rademacher

Une variable aléatoire **de Rademacher** est une variable aléatoire de loi

$$\epsilon \sim \delta_0 - \delta_1, \quad (26.397)$$

sur l'ensemble $\Omega = \{0, 1\}$. C'est la variable aléatoire qui prend valeur 1 ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Parmi les propriétés évidentes de cette variable aléatoire nous avons $E(\epsilon) = 0$ et $E(\epsilon^2) = 1$.

Proposition 26.99 (Inégalité de Khintchine[1]).

Soient $r_1, \dots, r_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de Rademacher et une combinaison linéaire

$$X = \sum_{i=1}^n a_i r_i \quad (26.398)$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$. Alors

$$\|X\|_2 \leq \sqrt{e} E(|X|). \quad (26.399)$$

Démonstration. Pour rappel la définition est que

$$\|X\|_2 = \sqrt{E(|X|^2)}. \quad (26.400)$$

Vu que c'est de la quantité $E(|X|)$ que nous voulons parler, nous notons l'inégalité

$$E(|X|) = \int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) \geq \left| \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) \right| = |E(X)|. \quad (26.401)$$

Nous supposons que $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$; sinon nous multiplions les a_j parce qu'il faut pour l'avoir et ce facteur sortira des deux côtés de (26.399).

Nous allons passer par la variable aléatoire intermédiaire

$$Y = \prod_{j=1}^n (1 + ia_j r_j) \quad (26.402)$$

et pour presque tout $\omega \in \Omega$ nous avons

$$|Y(\omega)| = \prod_{j=1}^n |1 + ia_j r_j(\omega)| \quad (26.403a)$$

$$= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2 \underbrace{r_j(\omega)^2}_{=1}} \quad (26.403b)$$

$$= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2} \quad (26.403c)$$

$$\leq \prod_{j=1}^n \sqrt{e^{a_j^2}} \quad (26.403d)$$

$$= \sqrt{\prod_{j=1}^n e^{a_j^2}} \quad (26.403e)$$

$$= \sqrt{e^{\sum a_j^2}} \quad (26.403f)$$

$$= \sqrt{e}. \quad (26.403g)$$

Donc $\|Y\|_{\infty} \leq \sqrt{e}$ où $\|\cdot\|_{\infty}$ est la norme supremum sur Ω . Cela nous permet de donner une première inégalité à propos de $E(|X|)$. D'abord

$$|E(XY)| = \left| \int_{\Omega} X(\omega) Y(\omega) dP(\omega) \right| \leq \int_{\Omega} |X(\omega)| \|Y\|_{\infty} dP(\omega) = \|Y\|_{\infty} E(|X|), \quad (26.404)$$

ensuite en remplaçant $\|Y\|_{\infty}$ par la majoration que nous venons de donner de $|Y(\omega)|$,

$$\sqrt{e} E(|X|) \geq |E(XY)|. \quad (26.405)$$

Il nous reste à prouver que $|E(XY)| \geq \|X\|_2$.

Pour ce faire nous commençons par noter que pour chaque j nous avons $E(r_j) = 0$ et $E(ia_j r_j^2) = ia_j$; en utilisant l'indépendance des r_j et le lemme 26.21 nous avons alors

$$E(r_j Y) = E\left(r_j(1 + ia_j r_j) \prod_{k \neq j} (1 + ia_k r_k)\right) \quad (26.406a)$$

$$= E(r_j(1 + ia_j r_j)) \prod_{k \neq j} E(1 + ia_k r_k) \quad (26.406b)$$

$$= ia_j \prod_{k \neq j} (1 + ia_k E(r_k)) \quad (26.406c)$$

$$= ia_j. \quad (26.406d)$$

Par conséquent, en utilisant la proposition 26.24 dans le cas non indépendant,

$$E(XY) = \sum_{j=1}^n a_j E(r_j Y) = \sum_j a_j ia_j = i \sum_j a_j^2 = i. \quad (26.407)$$

Nous pouvons compléter l'équation (26.405) en

$$\sqrt{e}E(|X|) \geq |E(XY)| = 1, \quad (26.408)$$

et nous nous efforçons de montrer que $\|X\|_2 = 1$. En effet $\|X\|_2 = \sqrt{E(|X|^2)}$ alors que

$$\|X\|_2^2 = E\left(\left(\sum_i a_i r_i\right)^2\right) \quad (26.409a)$$

$$= E\left(\sum_k a_k^2 r_k^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j r_i r_j\right) \quad (26.409b)$$

$$= \sum_k a_k^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j E(r_i r_j) \quad (26.409c)$$

$$= 1 \quad (26.409d)$$

□

26.5.12 Loi de Student

Définition 26.100.

La loi χ^2 à d degrés de liberté est la loi de la variable aléatoire $Y_1^2 + \dots + Y_n^2$ si les (Y_i) sont des variables aléatoires normales indépendantes centrées et réduites.

La loi de **Student** à d degrés de liberté est la loi de la variable aléatoire

$$\frac{X}{\sqrt{K/d}} \quad (26.410)$$

où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $K \sim \chi^2(d)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Cette loi est notée $\mathcal{T}(d)$

Nous avons une illustration de la densité de la loi $\chi^2(10)$ à la figure 26.1.

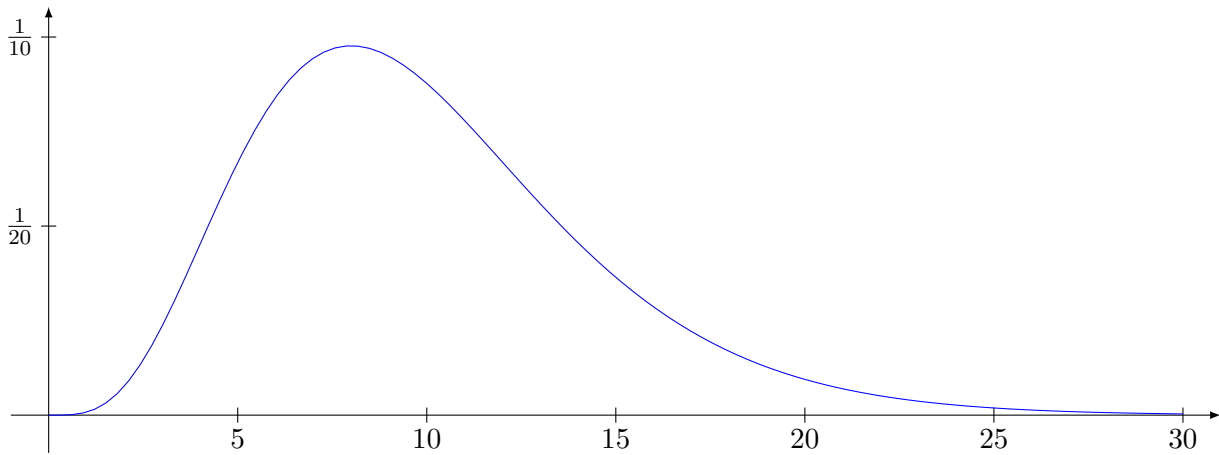
L'importance de cette loi sera dans le théorème de Cochran 27.15.

26.5.13 Indépendance, covariance et variance de somme

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles, nous avons défini la covariance par (26.67) :

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] \quad (26.411)$$

Une clef est le lemme 26.21 qui dit que lorsque X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. Nous avons les liens suivants.

FIGURE 26.1 – La densité de $\chi^2(10)$.

- (1) Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
- (2) La réciproque n'est pas vraie par l'exemple 26.23.
- (3) Si Z est un vecteur gaussien, les composantes Z_i sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance est diagonale, c'est à dire que les Z_i sont deux à deux non corrélés ; c'est le théorème 26.94.
- (4) En ce qui concerne la variance d'une somme,

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y). \quad (26.412)$$

Donc lorsque X et Y ne sont pas corrélées, la variance est sympa avec la somme. En particulier lorsqu'elles sont indépendantes, mais pas seulement.

26.6 Estimation des grands écarts

Si S_n est une somme de variables aléatoires de Bernoulli X_i indépendantes de probabilité p , l'espérance de S_n/n est p , et nous voudrions savoir quelle est la probabilité d'avoir un taux de succès un peu plus important :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right). \quad (26.413)$$

La loi des grands nombres nous permet de dire que ça ne va pas être très grand. En effet si nous posons

$$Y_i = X_i - p - \epsilon \quad (26.414)$$

et

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{S_n}{n} - p - \epsilon, \quad (26.415)$$

la loi des grands nombres (théorème 26.68) nous indique que

$$Z_n \xrightarrow{p.s.} E(Y_1) = -\epsilon. \quad (26.416)$$

La proposition 26.53 sur le lien entre les types de convergence nous donne immédiatement la convergence en loi. C'est à dire que pour tout $\eta > 0$,

$$P(|Z_n + \epsilon| \geq \eta) \rightarrow 0. \quad (26.417)$$

En prenant $\eta = \frac{\epsilon}{2}$,

$$P(Z_n = 0) \leq P(|Z_n + \epsilon| \geq \frac{\epsilon}{2}) \rightarrow 0. \quad (26.418)$$

Tout cela montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) = 0. \quad (26.419)$$

Autrement dit, la probabilité de tomber à une distance fixée de la moyenne tend vers zéro lorsque le nombre d'essais augmente. Rien d'étonnant.

Le théorème suivant nous indique la vitesse de convergence. Elle est exponentielle et le coefficient est donné en fonction de p et de ϵ .

Théorème 26.101 ([1]).

Soient des variables aléatoires $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ et

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p). \quad (26.420)$$

Pour $\epsilon \in]0, 1 - p[$, nous définissons

$$h_+(\epsilon) = (p + \epsilon) \ln \left(\frac{p + \epsilon}{p} \right) + (1 - p - \epsilon) \ln \left(\frac{1 - p - \epsilon}{1 - p} \right). \quad (26.421)$$

Alors

(1) $h_+(\epsilon) > 0$.

(2) Pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \leq e^{-nh_+(\epsilon)}. \quad (26.422)$$

(3) L'estimation (26.422) est optimale au sens que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \right) = -h_+(\epsilon). \quad (26.423)$$

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$ nous avons :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) = P(S_n \geq np + n\epsilon) \quad (26.424a)$$

$$\leq E\left(e^{t(S_n - np - n\epsilon)}\right) \quad (26.424b)$$

$$= e^{-nt(p+\epsilon)} E\left(e^{tS_n}\right) \quad (26.424c)$$

$$= e^{-nt(p+\epsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(S_n = k) \quad (26.424d)$$

$$= e^{-nt(p+\epsilon)} \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (26.424e)$$

$$= e^{-nt(p+\epsilon)} ((1-p) + pe^t)^n \quad (26.424f)$$

$$= \exp\left(-n(t(p+\epsilon) - \ln(1-p+pe^t))\right). \quad (26.424g)$$

Justifications :

— L'inégalité (26.424b) est l'inégalité de Markov (corollaire 26.67) avec $\phi(x) = e^{tx}$.

— La ligne (26.424d) est une utilisation du théorème de transfert 26.47.

Nous posons maintenant

$$h = \sup_{t \geq 0} (t(p+\epsilon) - \ln(1-p+pe^t)). \quad (26.425)$$

Pour cette valeur de h nous avons

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \leq e^{-nh}. \quad (26.426)$$

Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t(p + \epsilon) - \ln(1 - p + pe^t). \end{aligned} \quad (26.427)$$

Elle vérifie $g(0) = 0$ et

$$g'(t) = (p + \epsilon) - \frac{pe^t}{1 - p + pe^t} \quad (26.428a)$$

$$g'(0) = (p + \epsilon) - \frac{p}{1 - p + p} = \epsilon > 0. \quad (26.428b)$$

Par conséquent sur un voisinage de $t = 0$ la fonction g est strictement croissante et nous concluons que g prend (au moins) quelques valeurs strictement positives. Du coup nous avons

$$h = \|g\|_\infty > 0. \quad (26.429)$$

Nous cherchons maintenant pour quelle valeur de t est réalisé le maximum de g . D'abord résoudre $g'(t) = 0$ donne

$$t_0 = \ln \left(\frac{(p + \epsilon)(1 - p)}{p(1 - p - \epsilon)} \right) \quad (26.430)$$

Vu que $g'(t) \rightarrow p + \epsilon - 1 < 0$, nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\infty$ et donc le t_0 trouvé est bien un maximum et non un minimum.

Il est maintenant loisible de calculer une valeur pour h : il suffit de calculer $g(t_0)$. Le calcul n'est pas très compliqué et donne

$$h = g(t_0) = (p + \epsilon) \ln \left(\frac{p + \epsilon}{p} \right) + (p + \epsilon - 1) \ln \left(\frac{1 - p}{1 - p - \epsilon} \right), \quad (26.431)$$

ce qui est bien $h = h_+(\epsilon)$. Cela démontre les points (1) et (2).

Nous montrons à présent l'aspect optimal de l'estimation. Nous savons déjà que

$$\frac{1}{n} \ln \left(P \left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon \right) \right) \leq h_+(\epsilon). \quad (26.432)$$

Nous posons $k_n = \lceil n(p + \epsilon) \rceil$. Vu que $p + \epsilon < 1$ et que $S_n \leq n$, nous avons

$$P \left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon \right) = P(S_n \geq n(p + \epsilon)) \geq P(S_n = k_n) = \binom{n}{k_n} p^{k_n} (1 - p)^{n - k_n}. \quad (26.433)$$

C'est maintenant que nous utilisons la formule de Stirling (lemme 6.149) pour chacune des factorielles intervenant dans le coefficient binomial. Nous trouvons :

$$P \left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon \right) \geq P(S_n = k_n) = \clubsuit = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \alpha(n) p^{k_n} (1 - p)^{n - k_n}}{\left(\frac{k_n}{e}\right)^{k_n} \sqrt{2\pi k_n} \alpha(k_n) \left(\frac{n - k_n}{e}\right)^{n - k_n} \sqrt{2\pi(n - k_n)}}. \quad (26.434)$$

Nous savons que $k_n = n(p + \epsilon) + \sigma(n)$ avec σ borné par 1. Par conséquent $n - k_n \rightarrow \infty$ et nous pouvons regrouper les coefficients en α en

$$\beta(n) = \frac{\alpha(n)}{\alpha(k_n)\alpha(n - k_n)} \rightarrow 1. \quad (26.435)$$

Nous remarquons aussi que les e se simplifient. Nous récrivons $\clubsuit$ sous la forme

$$\clubsuit = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k_n(n - k_n)}}}_{=A(n)} \beta(n) \frac{n^n p^{k_n} (1 - p)^{n - k_n}}{k_n^{k_n} (n - k_n)^{n - k_n}} \quad (26.436a)$$

$$= A(n) n^n \left(\frac{p}{k_n} \right)^{k_n} \left(\frac{1 - p}{n - k_n} \right)^{n - k_n} \quad (26.436b)$$

$$= A(n) \left(\frac{np}{k_n} \right)^{k_n} \left(\frac{n(1 - p)}{n - k_n} \right)^{n - k_n}. \quad (26.436c)$$

Nous passons au logarithme et nous étudions $\frac{1}{n} \ln (P(S_n = k_n))$. Nous avons les termes suivants à étudier :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln (P(S_n = k_n)) &= -\frac{1}{2n} \ln(2\pi) + \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{n}{k_n(n - k_n)} \right) \\ &+ k_n \ln \left(\frac{np}{k_n} \right) + (n - k_n) \ln \left(\frac{n(1 - p)}{n - k_n} \right) + \frac{1}{n} \ln (\alpha(n)). \end{aligned} \quad (26.437)$$

Nous étudions terme à terme la limite de cela lorsque $n \rightarrow \infty$.

- (1) Le terme $\frac{1}{2n} \ln(2\pi)$ ne pose pas de problèmes. Il tend vers zéro.
- (2) Si nous remplaçons k_n par $n(p + \epsilon) + \sigma(n)$ nous voyons que ce qui est dans le logarithme est majoré par $\frac{1}{P(n)}$ pour un certain polynôme P . Ce terme est dans le cas $\frac{\ln(P(n))}{n}$ qui tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (3) Pour ce terme nous remplaçons k_n par $n(p + \epsilon) + k_n - n(p + \epsilon)$. Nous devons alors étudier la limite de

$$(p + \epsilon) \ln \left(\frac{np}{k_n} \right) + \frac{k_n - n(p + \epsilon)}{n} \ln \left(\frac{np}{k_n} \right). \quad (26.438)$$

Ce qui est dans les logarithmes est encadré de la façon suivante :

$$\frac{n(p + \epsilon)}{np} \leq \frac{k_n}{np} \leq \frac{n(p + \epsilon) + 1}{np}. \quad (26.439)$$

Donc la limite de k_n/np est $(p + \epsilon)/p$. Les logarithmes restent bornés. Pour le second terme de (26.438), le numérateur du coefficient est borné par 1. Donc le second terme tend vers zéro et le tout tend vers

$$(p + \epsilon) \ln \left(\frac{p}{p + \epsilon} \right). \quad (26.440)$$

- (4) Nous devons enfin étudier le dernier terme. La combinaison $\frac{n - k_n}{n}$ s'étudie de la façon suivante :

$$\frac{n - k_n}{n} = \frac{n - n(p + \epsilon) + n(p + \epsilon) - k_n}{n} = \frac{n(1 - p - \epsilon) + n(p + \epsilon) - k_n}{n} \rightarrow 1 - p - \epsilon \quad (26.441)$$

parce que $n(p + \epsilon) - k_n$ est borné par 1. Sachant cela, notre terme a pour limite

$$\frac{n - k_n}{n} \ln \left(\frac{n(1 - p)}{n - k_n} \right) \rightarrow (1 - p - \epsilon) \ln \left(\frac{1 - p}{1 - p - \epsilon} \right). \quad (26.442)$$

En remettant tous les morceaux bouts à bout,

$$\frac{1}{n} P(S_n = k_n) \rightarrow (1 + \epsilon) \ln \left(\frac{p}{p + \epsilon} \right) + (1 - p - \epsilon) \ln \left(\frac{1 - p}{1 - p - \epsilon} \right) = -h_+(\epsilon). \quad (26.443)$$

Étant donné que nous avons déjà prouvé que $P(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon) \geq P(S_n = k_n)$, nous avons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} P(S_n = k_n) = -h_+(\epsilon). \quad (26.444)$$

En combinant avec (26.432) nous trouvons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \right) = h_+(\epsilon). \quad (26.445)$$

Pour cette dernière déduction nous utilisons le fait que si (a_n) est une suite telle que $a_n \leq l$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, alors (a_n) admet une limite qui vaut l . $\square$

26.7 Simulations de réalisations de variables aléatoires

Le générateur de base que possède un système informatique est un générateur de nombres pseudo-aléatoires de nombres entiers entre 0 et $m - 1$ généré par une suite du type

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \mod m. \quad (26.446)$$

26.7.1 Générateur uniforme

26.7.1.1 Première méthode

Une première façon de générer une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ est de diviser par $m - 1$ la suite de x_n . En effet nous avons la proposition suivante.

Proposition 26.102.

Si (Y_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{0, \dots, m - 1\}$. Alors

$$\frac{Y_n}{m} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{U}[0, 1]. \quad (26.447)$$

Démonstration. Nous prouvons la convergence en loi en passant par la fonction de répartition et la proposition 26.54. La fonction de répartition de la densité $\mathcal{U}[0, 1]$ est

$$F_X(x) = x \mathbb{1}_{[0, 1]}. \quad (26.448)$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire (discrète) $X_n = \frac{Y_n}{m}$ est

$$P\left(\frac{Y_n}{m} \leq x\right) = P(Y_n \leq mx) = \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \quad (26.449)$$

où $\lfloor a \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à a . Nous avons évidemment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x, \quad (26.450)$$

ce qui montre la convergence des fonctions de répartition et donc la convergence en loi qui nous intéresse. $\square$

26.7.1.2 Seconde méthode

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $Y_n \sim \mathcal{U}\{0, \dots, m - 1\}$. Alors la série de variables aléatoires

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_k}{m^{k+1}} \quad (26.451)$$

est une série qui converge presque sûrement parce que Y_k est borné par m . Avec probabilité zéro nous avons $Z = \sum_{k=0}^{\infty} 1/m^{k+1}$ qui converge. Nous avons

$$Z \sim \mathcal{U}[0, 1]. \quad (26.452)$$

L'argument pour montrer cette loi est qu'en base m , la variable aléatoire Z a un développement décimal $Z = 0.Y_1Y_2Y_3Y_4 \dots$.

26.7.2 Simulation par inversion

Nous cherchons maintenant à simuler une loi X de fonction de répartition F .

Définition 26.103.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante, continue à droite et telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad (26.453a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1. \quad (26.453b)$$

L'inverse généralisé de f , notée f^{-1} est la fonction définie par

$$f^{-1}(t) = \inf\{x \text{ tel que } f(x) \geq t\}. \quad (26.454)$$

Remarque 26.104.

L'inverse généralisé d'une fonction bijective est la vraie fonction réciproque usuelle.

Proposition 26.105.

Soit f une fonction admettant un inverse généralisé f^{-1} . Alors nous avons $f^{-1}(t) \leq a$ si et seulement si $t \leq f(a)$.

La continuité à droite joue pour démontrer cette proposition.

Proposition 26.106.

Si F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X et si V est une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$, alors $F^{-1}(U)$ a la même loi que X .

Démonstration. Nous montrons que les fonction de répartition de X et de $F^{-1}(U)$ sont identiques. En utilisant la proposition 26.105, nous avons

$$P(F^{-1}(U) \leq y) = P(U \leq F(y)) \quad (26.455a)$$

$$= F(y) \quad (26.455b)$$

$$= P(X \leq y). \quad (26.455c)$$

Donc $F^{-1}(U)$ est la fonction de répartition de X . $\square$

La difficulté de la méthode par inversion est qu'il faut être capable de calculer l'inverse de la fonction de répartition de la loi à simuler.

26.7.2.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi qui peut être simulée par inversion. La fonction de répartition vaut

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (26.456)$$

et l'inverse vaut

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y). \quad (26.457)$$

Par conséquent, une bonne formule pour simuler une loi exponentielle est

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U). \quad (26.458)$$

Notez que U étant uniforme, nous pouvons tout autant prendre $-\ln(U)/\lambda$.

26.7.3 Algorithme de Box-Muller

Il s'agit de simuler une loi gaussienne. La proposition est la suivante.

Proposition 26.107.

Si U et V sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$, alors le couple

$$(X, Y) = (\sqrt{-2 \ln(U)} \cos(2\pi V), \sqrt{-2 \ln(U)} \sin(2\pi V)) \quad (26.459)$$

vérifie

- (1) X est indépendante de Y
 (2) X et Y sont de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Démonstration. Nous allons montrer la proposition en utilisant les fonctions tests. Soit donc $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et mesurable. Soient Z et W , deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous allons montrer que

$$F(\varphi(X, Y)) = E\left[\varphi\left(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\right)\right]. \quad (26.460)$$

Par indépendance de U et V , la densité du couple est le produit des densités, donc en passant aux coordonnées polaires,

$$\diamond = E[\varphi(Z, W)] \quad (26.461a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy \quad (26.461b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-r^2/2} r dr. \quad (26.461c)$$

Nous posons $u = e^{-r^2/2}$ et $v = \frac{\theta}{2\pi}$. En particulier $r = \sqrt{-2\ln(u)}$ et

$$\diamond = \int_0^1 \int_0^1 \varphi\left(\sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v), \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v)\right) dudv \quad (26.462a)$$

$$= E\left(\varphi\left(\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)\right)\right) \quad (26.462b)$$

parce que mesure $dudv$ est la densité de la loi uniforme. $\square$

En pratique, la formule

$$(x, y) \mapsto \left(\sqrt{-2\ln x}\cos(2\pi y), \sqrt{-2\ln x}\sin(2\pi y)\right) \quad (26.463)$$

est une façon d'obtenir deux gaussiennes à partir de deux variables uniformes.

26.7.4 Méthode du rejet

La méthode du rejet permet de simuler des lois à densité. Soit f la densité de la loi à simuler. Nous faisons les hypothèses suivantes.

- (1) Il existe une densité g d'une variable aléatoire facile à simuler.
 (2) Il existe un $k \geq 0$ tel que $f(x) \leq kg(x)$.

Remarque 26.108.

Le k de la seconde hypothèse est nécessairement plus grand que 1. En effet,

$$1 = \int f \leq k \int g = k \quad (26.464)$$

parce que f et g sont des densités et ont donc une intégrale égale à 1.

Proposition 26.109.

Soient (X_n) et (U_n) des suites de variables aléatoires indépendantes au sens où non seulement les X_i et U_k sont indépendants entre eux, mais de plus X_i est indépendant de U_j pour tout i et j . Nous supposons que les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, de densité g et que les U_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme.

Nous introduisons la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$p(\omega) = \inf\{n \geq 0 \text{ tel que } \alpha(X_n(\omega)) \geq U_n(\omega)\} \quad (26.465)$$

où α est la fonction définie par

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{kg(x)} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0. \end{cases} \quad (26.466)$$

Alors la variable aléatoire Y définie par

$$Y(\omega) = X_{p(\omega)}(\omega) \quad (26.467)$$

admet f pour densité.

Démonstration. D'abord étant donné que $f(x) \leq kg(x)$ nous avons $\alpha(x) \in [0, 1]$. Nous pouvons a priori avoir $p(\omega) = \infty$, ce qui rendrait caduque la définition de $Y(\omega)$. Montrons donc pour commencer que $P(p = \infty) = 0$. En utilisant l'indépendance nous avons

$$P(\alpha(X_n) < U_n, \forall n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N P(\alpha(X_i) < U_i) \quad (26.468a)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} P(\alpha(X_1) < U_1)^N. \quad (26.468b)$$

Pour conclure nous devons prouver que $P(\alpha(X_1) < U_1) < 1$. Pour cela nous calculons

$$P(\alpha(X_1) < U_1) = \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 du \mathbb{1}_{\alpha(x) < u} g(x) \quad (26.469a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) (1 - \alpha(x)) dx \quad (26.469b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(g(x) - \frac{f(x)}{k} \right) dx \quad (26.469c)$$

$$= 1 - \frac{1}{k} \quad (26.469d)$$

$$< 1. \quad (26.469e)$$

L'équation (26.468) nous permet donc de conclure que $P(\alpha(X_n) < U_n, \forall n) = 0$. Par conséquent la variable aléatoire $Y(\omega) = X_{p(\omega)}(\omega)$ a un sens.

Nous devons maintenant prouver que Y a bien f pour densité. Pour cela nous considérons un ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et nous montrons que $P(Y \in A) = \int_A f(x) dx$. Nous avons

$$P(Y \in A) = P(X_p \in A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \in A, p = j). \quad (26.470)$$

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned} P(X_j \in A, p = j) &= P(X_j \in A, \alpha(X_j) \geq U_j, \alpha(X_m) < U_m \forall m \leq j-1) \\ &= P(X_j \in A, \alpha(X_j) \geq U_j) P(\alpha(X_1) < U_1)^{j-1} \\ &= P(X_j \in A, \alpha(X_j) \geq U_j) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1}. \end{aligned} \quad (26.471)$$

Étant donné que $g(x)dx$ est la densité de X_j et que du est la densité de U , nous avons

$$P(X_j \in A, \alpha(X_j) \geq U_j) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \mathbb{1}_{x \in A} \mathbb{1}_{\alpha(x) \geq u} g(x) du dx \quad (26.472a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathbb{1}_{x \in A} \underbrace{\int_0^1 \mathbb{1}_{\alpha(x) \geq u} du}_{\alpha(x)} dx. \quad (26.472b)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x \in A} \frac{f(x)}{k} dx \quad (26.472c)$$

$$= \frac{1}{k} P(X \in A). \quad (26.472d)$$

En remplaçant dans l'équation (26.471) nous trouvons

$$P(X_j \in A, p = j) = \frac{1}{k} P(X \in A) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{j-1}. \quad (26.473)$$

Et enfin, l'équation (26.470) donne

$$P(Y \in A) = \frac{1}{k} P(X \in A) \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{i-1} = P(X \in A). \quad (26.474)$$

□

26.7.5 Simuler une loi géométrique à l'ordinateur

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, alors

$$Z = \min\{k \geq 1 \text{ tel que } X_k = 1\} \sim \mathcal{G}(p). \quad (26.475)$$

Nous avons alors $P(Z = k) = (1 - p)^k p$.

Si nous avons un générateur de lois de Bernoulli de paramètre p , alors nous on simulons jusqu'à obtenir 1 et nous comptons combien de simulations ont été nécessaires.

26.7.6 Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur

Nous pouvons utiliser la méthode de l'inversion. Étant donné que la fonction de répartition de la loi exponentielle est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, nous avons $F^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$. Par conséquent à partir d'un générateur uniforme U , nous pouvons calculer

$$F^{-1}(U) = \frac{1}{\lambda} \ln(U) \quad (26.476)$$

qui suivra une loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$.

26.7.7 Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur

Nous savons du point 26.5.8 que si les T_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors nous avons

$$\max\{n \geq 1 \text{ tel que } \sum_i T_i \leq 1\} \sim \mathcal{P}(\lambda). \quad (26.477)$$

La façon usuelle pour créer une loi exponentielle est d'avoir un générateur de loi uniforme U_i et d'écrire que

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(U_i) \sim \mathcal{E}(\lambda). \quad (26.478)$$

Nous devons donc faire la somme de telles variables aléatoires et voir à partir de quel moment la somme dépasse 1. Le calcul est le suivant :

$$-\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} \ln(U_i) \leq 1 \quad (26.479)$$

implique

$$\prod_{i=1}^n U_i \leq e^{-\lambda}. \quad (26.480)$$

En pratique, la variable aléatoire qui se comporte comme une loi de Poisson de paramètre λ est

$$N = \max\{n \geq 1 \text{ tel que } \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda}\}. \quad (26.481)$$

Nous générons donc des nombres aléatoires entre 1 et 1 et nous effectuons le produit jusqu'à ce qu'il passe en dessous de $e^{-\lambda}$. À ce moment, nous retournons le nombre de nombres qu'il a fallu générer.

26.8 Sage

Nous allons montrer maintenant quelques trucs importants dans l'utilisation de Sage pour réaliser des petits graphiques.

Remarque 26.110.

Dans ce qui suit, nous allons parler de «Sage», mais en réalité nous allons surtout parler du module `scipy` qui fait partie des modules hyper-usuels de Python. Les remerciements vont donc au moins autant du côté de l'équipe de `scipy` que vers celle de Sage.

26.8.1 Loi exponentielle

Il faut savoir que la définition d'une loi continue retourne automatiquement la loi centrée réduite. Pour avoir une loi exponentielle de moyenne donnée, il faut donc préciser de façon plus maligne que ce que l'on croit.

```

1 from scipy import stats
2
3 X=stats.expon(scale=5)
4 print(X.mean())      # retourne 5
5
6 P=plot( X.pdf,x,0,10 )
7 show(P)              # Affiche le graphique

```

code_sage1.py

26.8.2 Inverser des lois

Pour trouver des intervalles de confiance, il faut souvent calculer des inverses de loi. Bien entendu Sage le fait. Ce que sage connaît, c'est l'inverse de la fonction de survie. Autrement dit si X est une variable aléatoire, $X.sf$ est la fonction $x \mapsto 1 - P(X < x)$ et $X.isf$ en est l'inverse. Pour résoudre $P(X < \xi) = \alpha$, il faut résoudre $F(\xi) = \alpha$, c'est à dire

$$1 - F(\xi) = 1 - \alpha, \quad (26.482)$$

ce qui se fait de la façon suivante : le programme suivant donne pour une loi normale centrée réduite la valeur de ξ pour laquelle $P(N < \xi) = 0.05$:

```

1 from scipy import stats
2
3 N=stats.norm
4 print N.mean()      # 0
5 print N.var()       # 1
6
7 xi = N.isf(0.95)
8 print xi            # -1.64485
9
10 N.cdf(xi)           # Vérification : 0.05
11
12 # Graphiques de la fonction de densité et la cumulative.
13 P=plot(N.cdf,x,-10,10)
14 Q=plot(N.pdf,x,-10,10,color="red")
15 show(P+Q)

```

code_sage2.py

26.9 Monte-Carlo

Nous voudrions calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx. \quad (26.483)$$

Les méthodes classiques consistent à discrétiser l'intervalle $[a, b]$ et en calculant une somme de la forme $\sum_i w_i f(x_i)$.

L'idée de Monté Carlo est de remplacer le découpage déterministe x_i par des variables aléatoires X_i en trois étapes.

- (1) Pour cela nous commençons par écrire l'intégrale comme une espérance : $I = E(X)$ où X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à déterminer. Une contrainte est évidemment d'avoir $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- (2) Nous générons une suite indépendantes et identiquement distribuée de variables aléatoires (X_n) de même loi que X et la loi (forte) des grands nombres implique que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{p.s.} E(X) = I. \quad (26.484)$$

- (3) Le dernier point sera de donner un intervalle de confiance.

Exemple 26.111

Nous voudrions déterminer de façon approchée l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$. Si $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, alors

$$I = E(f(U)) \quad (26.485)$$

et il suffit de faire

$$I \simeq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_i). \quad (26.486)$$

où mes U_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}[0, 1]$. $\triangle$

Exemple 26.112

Supposons que la fonction à intégrer se présente sous la forme $f(x) = h(x)g(x)$ avec $g \geq 0$ et telle que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g$ existe. Notons

$$c = \int_{\mathbb{R}} g \quad (26.487)$$

et

$$I = \int_{\mathbb{R}} h(x)c \frac{g(x)}{c} dx. \quad (26.488)$$

Nous avons alors $I = E(ch(Y))$ où Y admet la densité $g(x)c$. $\triangle$

Passons au cas de plusieurs variables et considérons l'intégrale

$$I = \int_{[0,1]^1} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d. \quad (26.489)$$

Nous écrivons

$$I = E(f(U_1, \dots, U_d)) \quad (26.490)$$

où les U_i sont de loi uniformes sur $[0, 1]$. En pratique, nous générons une suite de variables aléatoires de (Z_k) de lois uniformes que nous regroupons par paquets :

$$V_k = (Z_{dk}, Z_{dk+1}, \dots, Z_{d(k+1)-1}). \quad (26.491)$$

Ces variables aléatoires V_k sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}[0, 1]^d$. Ensuite la loi des grands nombres nous indique que

$$I \sim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(V_k). \quad (26.492)$$

26.9.1 Intervalle de confiance

26.9.1.1 Principe

Nous supposons que nous travaillons sur une approximation de Monte-Carlo telle que la variable aléatoire choisie soit dans L^2 . La loi des grands nombres nous dit que $\bar{X}_n \sim I$ tandis que le théorème central limite nous enseigne que

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (26.493)$$

Par conséquent

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-u, u]\right) \simeq P(-u \leq Z \leq u) \quad (26.494)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En remplaçant $E(X)$ par I et en effectuant les manipulations usuelles, nous trouvons que $P(I \in J_\alpha) = 1 - \alpha$ si

$$J_\alpha = \left[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (26.495)$$

où σ^2 est la variance de X . Si σ n'est pas connue, alors nous le remplaçons par un estimateur

$$S'_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 \quad (26.496)$$

et nous considérons l'intervalle

$$J'_\alpha = \left[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{S'_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha \frac{S'_n}{\sqrt{n}}\right]. \quad (26.497)$$

Il y a deux façons de faire diminuer la longueur de l'intervalle de confiance : augmenter n ou diminuer σ . Pour le second point, le choix de X dans $I = E(X)$ est essentiel.

Exemple 26.113

Soit à calculer

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\beta z} e^{-z^2/2} dz \quad (26.498)$$

avec $\beta > 0$. Nous introduisons la variable aléatoire $X = e^{\beta Z}$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Nous avons alors

$$I = E(X). \quad (26.499)$$

Par ailleurs l'intégrale demandée vaut $e^{\beta^2/2}$. En appliquant les formules vues plus haut nous trouvons

$$J_\alpha = \left[\bar{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (26.500)$$

où

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(e^{2\beta Z}) - E(e^{\beta Z})^2 = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}. \quad (26.501)$$

Nous avons utilisé la formule (26.366). Si nous choisissons $\beta = 2$, nous trouvons $\sigma^2 \simeq 2926$. Donc si nous voulons une longueur de J_α plus petite que 10^{-2} tout en demandant $\alpha = 0.05$ (ce qui implique $u_\alpha = 1.96$), nous devons avoir

$$1.96 \frac{2973}{\sqrt{n}} < 10^{-2}, \quad (26.502)$$

c'est à dire environ $n = 10^{11}$, ce qui soit dit en passant est très largement au delà des capacités de la commande rand de scilab. $\triangle$

Nous allons maintenant voir quelques méthodes pour réduire la variance.

26.9.1.2 Échantillonnage préférentiel

Nous devons calculer $I = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$. Pour cela nous introduisons artificiellement une densité g et nous écrivons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = E \left(\frac{f(Y)}{g(Y)} \right) \quad (26.503)$$

où Y est de densité g . Il faut essayer de trouver g de telle sorte à ce que

$$\text{Var} \left(\frac{f(Y)}{g(Y)} \right) \quad (26.504)$$

soit la plus petite possible.

26.9.1.3 Méthode de la variable de contrôle

Soit $I = E(X)$. Nous introduisons une variable aléatoire Z et nous écrivons

$$I = E(X - Z) + E(Z). \quad (26.505)$$

Il faut alors choisir Z de telle sorte que $E(Z)$ soit calculable et que $X - Z$ ait une variance plus faible. En particulier, Z ne peut pas être indépendante de X .

26.9.1.4 Variables antithétiques

Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$. La première idée (exemple 26.111) est d'écrire

$$I = E(f(U)) \quad (26.506)$$

où $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, mais nous n'avons pas de garanties sur la variance de $f(U)$. Nous pouvons écrire

$$I = E(f(U)) = E \left[\frac{1}{2} (f(U) - f(1 - U)) \right]. \quad (26.507)$$

Ici $1 - U$ est encore une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, mais il se fait que la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{2} (f(U) + f(1 - U)) \quad (26.508)$$

a une variance inférieure à $\text{Var}(f(U))$. En effet, $f(U)$ et $f(1 - U)$ ne sont pas indépendantes, par conséquent le résultat du lemme 26.22 n'est pas valide, par contre la proposition 26.27 reste vraie et nous avons

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{4} \text{Var}(f(U)) + \frac{1}{4} \text{Var}(f(1 - U)) + \frac{1}{2} \text{Cov}(f(U), f(1 - U)). \quad (26.509)$$

Nous avons $\text{Var}(f(1 - U)) = \text{Var}(f(U))$. En ce qui concerne le terme avec la covariance, nous lui appliquons l'équation (26.56) :

$$\text{Cov}(f(U), f(1 - U)) = E((f(U) - I)(f(1 - U) - I)) \quad (26.510a)$$

$$\leq E((f(U) - I)^2)^{1/2} E((f(1 - U) - I)^2)^{1/2} \quad (26.510b)$$

$$= \text{Var}(f(U)) \quad (26.510c)$$

où nous avons utilisé le fait que $E(f(U)) = E(f(1 - U)) = I$. Au final nous avons bien obtenu

$$\text{Var}(Z) \leq \text{Var}(f(U)). \quad (26.511)$$

26.10 Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires

26.10.1 Nombres normaux

Tout nombre $x \in [0, 1[$ admet un unique¹¹ développement en base $b \geq 2$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n(x)}{b^n} \quad (26.512)$$

avec $\epsilon_n(x) \in \mathcal{A} = \{0, \dots, b-1\}$.

Soit $k \geq 1$ et $r \in \mathcal{A}^k$; nous posons

$$N_x(r, n) = \text{Card} \{i \in \{1, \dots, n-k+1\} \text{ tel que } \epsilon_1(x) = r_1, \dots, \epsilon_{i+k-1}(x) = r_k\}. \quad (26.513)$$

C'est le nombre d'occurrences du motif r (de longueur k) dans les n premières décimales de x .

Définition 26.114.

Un nombre $x \in [0, 1[$ est **normal** en base b si pour tout $r \in \{0, \dots, b-1\}^k$ nous avons

$$\frac{N_x(b, n)}{n} \rightarrow \frac{1}{b^k}. \quad (26.514)$$

Un nombre est normal si il est normal en toute base.

Proposition 26.115 ([299, 1]).

Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tous les nombres de $[0, 1[$ sont normaux.

Démonstration. Pour $x \in [0, 1[$, nous notons $\epsilon_n(x)$ son développement en base b . Cela nous donne des variables aléatoire $\epsilon_i: [0, 1[\rightarrow \mathcal{A}$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$P(\epsilon_1 = d) = P\left(\left[\frac{d}{b}, \frac{d+1}{b}\right[\right) = \frac{1}{b} \quad (26.515)$$

parce que l'intervalle $\left[\frac{d}{b}, \frac{d+1}{b}\right[$ est l'ensemble des nombres de $[0, 1[$ dont la première décimale est d . Pour la loi des ϵ_i , il faut un peu plus découper, mais ça donne le même résultat : $P(\epsilon_i = d) = 1/b$. Ces variables aléatoire sont indépendantes et identiquement distribuées. Nous considérons aussi la variable aléatoire

$$\begin{aligned} N(r, n): [0, 1[&\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto N_x(r, n) \end{aligned} \quad (26.516)$$

Pour un $r \in \mathcal{A}$ fixé, nous définissons encore la variable aléatoire

$$\begin{aligned} X_j: \mathcal{A} &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_j(x) = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (26.517)$$

Les variables aléatoire X_j sont des variables aléatoire de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de paramètre $E(X_j) = P(X_j = 1) = P(\epsilon_1 = b) = \frac{1}{b}$. Nous pouvons utiliser dessus la loi forte des grands nombres (théorème 26.68). Pour dire que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} E(X_1) = \frac{1}{b}. \quad (26.518)$$

Mais en réalité nous avons aussi $\sum_{j=1}^n X_j = N(r, n)$ parce que en appliquant à $x \in [0, 1[$:

$$\sum_{j=1}^n \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_j(x) = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \text{Card} \{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \epsilon_i(x) = b\} = N_x(r, n), \quad (26.519)$$

11. Nous excluons 1 parce que son développement en puissances négatives de b est zéro.

de sorte que l'équation (26.518) nous dit exactement que pour tout $r \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_x(r, n)}{n} = \frac{1}{b} \quad (26.520)$$

pour presque tout $x \in [0, 1[$.

Il reste à prouver la même chose pour tout $r \in \mathcal{A}^k$. Voyons avec $k = 2$ et $r = (u, v) \in \mathcal{A}^2$. Nous posons

$$Y_j = \mathbb{1}_{\{\epsilon_j = u, \epsilon_{j+1} = v\}}, \quad (26.521)$$

et $N(r, n) = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j$. Les Y_i sont encore des binomiales de paramètre $\frac{1}{b^2}$, mais elles ne sont pas indépendantes. En effet pour avoir $Y_1(x) = Y_2(x) = 1$, il faut que les trois premières décimales de x soit en même temps de la forme uv . et $.uv$, donc

$$P(Y_1, Y_2 = 1) = b^3 \delta_{u,v} \quad (26.522)$$

alors que $P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1) = b^4$. Nous pouvons contourner ce problème en remarquant que les ϵ_i , eux, sont indépendants. Donc le lemme de regroupement 26.15 nous dit que la famille $\{Y_{2n}\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes (et idem pour la famille Y_{2n-1}). En effet, les variables aléatoires Y_{2n} correspondent à la partition 23, 45, 67, etc.

Nous appliquons la loi des grands nombres sur les deux familles indépendamment :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{2j-1} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \quad (26.523)$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{2j} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \quad (26.524)$$

Pour rappel, le but pour l'instant est d'établir la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j = \frac{1}{b^2}$. Nous allons l'établir séparément pour les termes pairs et impairs de la suite. Pour les pairs :

$$\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} Y_j = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{2j-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{2j} \right) \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{b^2} \quad (26.525)$$

Pour les impairs¹²,

$$\frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{2n-1} Y_j = \frac{n}{2n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{2j-1} \right) + \frac{n}{2n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{2j} \right) \rightarrow \frac{1}{b^2} \quad (26.526)$$

parce que les deux parenthèses convergent vers $\frac{1}{b^2}$ alors que les coefficients devant convergent vers $\frac{1}{2}$.

Au final nous avons bien

$$\frac{N(r, n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} Y_j = \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} Y_j \right) \rightarrow \frac{1}{b^2} \quad (26.527)$$

tant que $r \in \mathcal{A}^2$.

Pour prouver la même chose avec $r \in \mathcal{A}^k$, il suffit de faire le même raisonnement en divisant en plus de paquets : $\{Y_{kj+m}\}_{m=1, \dots, k-1}$ sont indépendants et nous utilisons k fois la loi des grands nombres.

Donc pour toute base b nous savons que les nombres normaux en base b forment un ensemble de mesure nulle dans $[0, 1[$. Il reste à voir que leur union reste de mesure nulle. Cela est vrai parce que nous avons une union dénombrable et qu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle par le lemme 7.34. $\square$

12. Ici dans [1], la seconde somme va jusqu'à $n-1$ et je ne comprends pas pourquoi.

Remarque 26.116.

Un nombre x est normal en base b si et seulement si la suite $u_k = xb^k$ est équirépartie modulo 1 sur $[0, 1]$ (c'est à dire que la suite des parties fractionnelles des u_k est équirépartie). Pour le nombre $0.2357873\dots$, nous parlons de la suite $0.2357873\dots; 0.357873\dots; 0.57897\dots$ etc. C'est la suite des queues de suites de la suite de ses décimales¹³.

26.10.2 Théorème de Bernstein

Théorème 26.117 (Théorème de Bernstein[1]).

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ et son module de continuité

$$\begin{aligned} \omega: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \sup\{|f(u) - f(v)| \text{ tel que } |u - v| < h\}. \end{aligned} \quad (26.528)$$

Pour $n \geq 0$ nous définissons le n^e **polynôme de Bernstein** de f par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (26.529)$$

Alors il existe C tel que pour tout $n \geq 1$:

$$(1) \quad \|f - B_n(f)\|_{\infty} \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (26.530)$$

$$(2) \quad B_n(f) \xrightarrow{\text{unif}} f \quad (26.531)$$

sur $[0, 1]$.

(3) L'inégalité (26.530) est optimale : il existe une fonction $g \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $N \geq 1$, $\|g - B_N(g)\|_{\infty} \geq \frac{\delta}{\sqrt{N}}$. Cette fonction peut être choisie Lipschitzienne. Une telle fonction est donnée par exemple par $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

Démonstration. Soit $x \in [0, 1]$ et une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes¹⁴ et identiquement distribuées $(X_i)_{i \geq 1}$ de paramètre x . Nous notons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(1) Pour cette histoire de convergence, il faut majorer la quantité $|f(x) - B_n(f)(x)|$. Pour cela il y a trois astuces. La première est de se souvenir que $E(f(x)) = f(x)$, et la seconde est que le théorème de transfert 26.47 appliqué à $x \mapsto f(x/n)$ donne¹⁵

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (26.532)$$

c'est à dire que

$$B_n(f)(x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right). \quad (26.533)$$

Et enfin la troisième astuce est d'utiliser le lemme 16.168 pour avoir

$$\omega\left(|x - \frac{S_n}{n}|\right) = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sqrt{n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}|\right) \leq \left(\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (26.534)$$

13. C'est pas trop bien dit, mais on se comprend, non ?

14. Définition 26.8.

15. Nous avons aussi utilisé la formule de l'espérance pour les variables aléatoires discrètes.

À partir de là nous pouvons un peu calculer :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| E \left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right) \right| \quad (26.535a)$$

$$\leq E \left(\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \right) \quad (26.535b)$$

$$\leq E \left(\omega \left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right| \right) \right) \quad (26.535c)$$

$$\leq \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) E \left(\left| \sqrt{n}x - \frac{S_n}{n} \right| + 1 \right). \quad (26.535d)$$

Le dernier facteur peut être réécrit sous la forme

$$E \left(\left| \sqrt{n}x - \frac{S_n}{n} \right| + 1 \right) = \sqrt{n} E \left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right| \right) + 1, \quad (26.536)$$

et c'est là que nous pouvons utiliser l'inégalité de Hölder 18.20 :

$$E(|X|) = \|X\|_1 \leq \|X\|_2 \quad (26.537)$$

où $\|X\|_2$ désigne

$$\|X\|_2 = \sqrt{E(|X|^2)}. \quad (26.538)$$

Nous pouvons donc écrire

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(\sqrt{n} \|x - \frac{S_n}{n}\|_2 + 1 \right). \quad (26.539)$$

Nous étudions maintenant de plus près la quantité $\|x - \frac{S_n}{n}\|_2$. D'abord

$$E \left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right|^2 \right) = x^2 - 2 \frac{x}{n} E(S_n) + \frac{1}{n^2} E(S_n^2). \quad (26.540)$$

Ensuite nous savons l'espérance de S_n (qui vaut $E(S_n) = nx$) par (26.310) et le lemme 26.21 nous permet de calculer $E(S_n^2)$ par indépendance des X_i qui composent S_n . Nous avons alors

$$E \left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right|^2 \right) = x^2 - 2x^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E(X_i)E(X_j) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) \quad (26.541a)$$

$$= -x^2 + \frac{n^2 - n}{n^2} x^2 + \frac{nx}{n^2} \quad (26.541b)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n}. \quad (26.541c)$$

Quelques justifications :

- $E(X_i) = E(X_i^2) = x$ parce que X_i est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre x .
- La première somme contient tous les couples (i, j) sauf les diagonaux ; il y en a donc $n^2 - n$.

En recombinaison le tout,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(\sqrt{n} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} + 1 \right) \quad (26.542a)$$

$$= \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) (\sqrt{x(1-x)} + 1) \quad (26.542b)$$

$$\leq \frac{3}{2} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (26.542c)$$

La dernière majoration est une rapide étude de la fonction $x(1-x)$.

Étant donné que les majorations (26.542) sont valables pour tout x , en passant au supremum nous avons

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0. \quad (26.543)$$

Ceci prouve les deux premiers points du théorème.

(2) Fait.

(3) Nous considérons la fonction

$$g(x) = \|x - \frac{1}{2}j\| \quad (26.544)$$

et nous vérifions qu'elle vérifie toutes les conditions. D'abord si $u, v \in [0, 1]$ alors

$$|g(u) - g(v)| \leq |u - v| \quad (26.545)$$

et donc $\omega(h) \leq h$, ce qui signifie que g est 1-Lipschitz. Le principe de cette partie est de montrer que $\|g - B_n(g)\|_\infty$ est plus grand que d'autres trucs (et non plus petit que d'autres trucs comme d'habitude). Nous commençons par

$$\|g - B_n(g)\|_\infty \geq g\left(\frac{1}{2}\right) - B_n(g)\left(\frac{1}{2}\right). \quad (26.546)$$

Très vite nous nous rendons compte que $g(1/2) = 0$. Ensuite nous nous souvenons que

$$B_n(g)\left(\frac{1}{2}\right) = E\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = E\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|\right) = \frac{1}{2n}E(|2S_n - n|). \quad (26.547)$$

si nous posons $\epsilon_i = 2X_i - 1$, alors les ϵ_i sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes et identiquement distribuées qui satisfont à $2S_n - n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$. Nous utilisons la proposition 26.99 :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \geq \frac{1}{2n}E(|\sum_i \epsilon_i|) \geq \frac{1}{2n\sqrt{e}}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_j\right\|_2. \quad (26.548)$$

Calculons ce qui est dans la norme :

$$\left\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j\right\|_2^2 = E\left(\left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j\right)^2\right) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E(\epsilon_i)E(\epsilon_j) + \sum_{i=1}^n E(\epsilon_i^2) = 0 + n = n. \quad (26.549)$$

Nous finissons alors notre travail de majoration :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \geq \frac{1}{2n\sqrt{e}}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_j\right\|_2 \geq \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{e}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (26.550)$$

□

Chapitre 27

Statistiques

27.1 Notations et hypothèses

Nous notons X le caractère à étudier, et Ω l'ensemble des individus. Le caractère à étudier est vu comme une fonction sur Ω :

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{N}, \{0, 1\}, \dots \quad (27.1)$$

Les **statistiques descriptives** sont les techniques pour présenter et résumer les données : diagrammes, graphiques, indicateurs numériques : moyenne, écart-type, médiane, ...

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (1) Chaque observation x_i est la réalisation de la variable aléatoire X qui sera de loi inconnue μ .
- (2) Le n -uple $(x_1, \dots, x_n)$ est la réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$ qui est l'échantillon de taille n .
- (3) Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune μ . La loi μ est la **loi parente** de l'échantillon.

Exemple 27.1

Un échantillon de taille 1 consisterait à tirer au sort une personne dans une population et mesurer sa taille. $\triangle$

Exemple 27.2

Une échantillon de taille n consisterait à tirer au sort n personnes dans une population et de mesurer leurs tailles. $\triangle$

L'**inférence statistique** est l'art de dégager des informations sur la population à partir d'informations partielles : intervalles de confiance, estimateurs, test d'hypothèses, ...

En théorie des probabilités, nous connaissons la loi de la variable aléatoire X et nous en déduisons des informations sur le réalisations de X : valeur la plus probable, moyenne, intervalle dans lequel $X(\omega)$ a le plus de chance d'appartenir. En statistique, au contraire, la loi est inconnues et nous cherchons des informations sur la loi à partir d'un échantillon de données numériques observées.

27.2 Modèle statistique

Une **modèle statistique** est un triplet

$$\mathcal{S} = \left[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta)_{\theta \in \Theta}, (\mu_\theta)_{\theta \in \Theta} \right] \quad (27.2)$$

où $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé, (X_θ) est une famille de variables aléatoires définies sur Ω et telles que pour tout $\theta \in \Theta$, la variable aléatoire X_θ suit la loi μ_θ . Les μ_θ sont des mesures sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nous avons

$$P(X_\theta \in B) = \mu_\theta(B). \quad (27.3)$$

Remarque 27.3.

D'une certaine manière, l'introduction de μ_θ dans la définition est redondante parce que ces mesures sont déjà contenues dans la données des variables aléatoires X_θ .

Exemple 27.4(Modèle statistique gaussien)

Si nous savons que les variables aléatoires X_i suivent une loi gaussienne, alors nous considérons $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $\theta = (m, \sigma^2 j)$. Dans ce cas, $\mu_\theta = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et le but de la statistique est de déterminer la valeur de θ qui correspond à une population en partant de l'observation d'un échantillon. $\triangle$

Définition 27.5.

Si $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, nous disons que le modèle statistique est un modèle **paramétrique**.

Le modèle gaussien est un modèle paramétrique : dès que m et σ^2 sont déterminés, la loi du phénomène X est connue.

Définition 27.6.

Pour chaque $\theta \in \Theta$, un **échantillon** de taille n associé à un modèle statistique $[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), (\mu_\theta)]$ est un vecteur $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ de taille n de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de la même loi que la variable aléatoire X_θ . La loi μ_θ est la **loi parente** de l'échantillon.

Définition 27.7.

Un **modèle d'échantillonnage** sur le modèle statistique $\mathcal{S}$ est une famille $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})_{\theta \in \Theta}$ d'échantillons de taille $n \geq 1$.

Nous noterons souvent $(X_1, \dots, X_n)$ à la place de $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ un échantillon, mais il faut se souvenir que les X_i suivent toujours la même loi donnée par θ . La loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est $\mu_\theta \otimes \dots \otimes \mu_\theta$ et est définie sur l'espace $(\Omega^n, \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}, P^{\otimes n})$.

Remarque 27.8.

Le travail du statisticien est de proposer un modèle statistique $\mathcal{S}$ a priori. Si nous étudions la taille d'une population, nous allons choisir un modèle gaussien. Plus le modèle est précis, plus l'espace Θ est petit mais plus il y a de risques que la vérité soit hors de l'ensemble considéré.

Exemple 27.9

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable que l'on sait simuler. Afin d'évaluer la moyenne μ de X , nous pouvons considérer la moyenne empirique des simulations : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ où les variables aléatoires X_i sont indépendantes, identiquement distribuées et de même loi que X .

La loi des grands nombres nous enseigne que $\bar{X}_n \rightarrow \mu$. De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right) = \int_{-a}^a e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \quad (27.4)$$

En effet, la condition sur μ est équivalente à

$$-a \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a, \quad (27.5)$$

tandis que le théorème central limite nous enseigne que la variable aléatoire $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ se comporte comme $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque n est grand. Dans ce cas, nous avons que

$$P \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-a, a] \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx. \quad (27.6)$$

Notons que dans ce calcul nous avons utilisé le fait que $\mu = E(X_1)$.

Montrons que la suite

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \quad (27.7)$$

converge presque sûrement vers σ^2 . Le théorème central limite implique que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_1^2) \quad (27.8)$$

et que

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \xrightarrow{p.s.} E(X_1)^2. \quad (27.9)$$

La différence converge donc presque sûrement vers σ^2 en vertu de la proposition 26.25.

Nous avons également $E(\sigma_n^2) = \sigma^2$. En effet, sachant que $E(X_i) = E(X_1) = \mu$ et que $E(X_i^2) = E(X_1^2) = \mu^2 + \sigma^2$,

$$E(\sigma_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) \right) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) \quad (27.10a)$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2} (n(\sigma^2 + \mu^2) + (n^2 - n)\mu^2) \quad (27.10b)$$

$$= \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2, \quad (27.10c)$$

dont la limite $n \rightarrow \infty$ donne bien σ^2 .

Nous voudrions à présent montrer que

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_n / \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.11)$$

Vu que le théorème central limite donne une convergence en loi, nous pouvons utiliser le lemme de Slutsky pour montrer que

$$\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{1/\sqrt{n}}, \sigma_n^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\sigma Z, \sigma^2) \quad (27.12)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En vertu de la proposition 26.60 appliqué à la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (27.13)$$

nous avons la convergence en loi

$$f \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{1/\sqrt{n}}, \sigma_n^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(\sigma Z, \sigma^2), \quad (27.14)$$

c'est à dire

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_n / \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z. \quad (27.15)$$

Afin d'être complet, précisons que

$$P((\sigma Z, \sigma) \in \mathbb{R} \times \{0\}) = 0. \quad (27.16)$$

△

Proposition 27.10.

Soit X_i des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi parente $\mathcal{B}(n, p)$. Alors si $\bar{X}_n$ désigne la moyenne empirique,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.17)$$

Démonstration. Cela est une application de la loi des grands nombres, du théorème central limite, du lemme de Slutsky et de la proposition 26.60.

D'abord, la loi des grands nombres nous indique que $\bar{X}_n \rightarrow p$ parce que p est l'espérance de Bernoulli. Ensuite nous avons

$$\frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1 - p)}} \quad (27.18)$$

parce que la variance d'une loi de Bernoulli est $p(1 - p)$. Le théorème central limite nous indique par conséquent que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1 - p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.19)$$

Le lemme de Slutsky implique alors la convergence du couple :

$$\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1 - p)}}, \bar{X}_n \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Z, p). \quad (27.20)$$

Nous appliquons maintenant la proposition 26.60 avec la fonction

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{p(1 - p)}x}{\sqrt{y(1 - y)}} \quad (27.21)$$

qui est une fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est $C = \{0\}$. Étant donné que $P(\bar{X}_n = 0) = 0$, la proposition s'applique et nous avons

$$f \left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1 - p)}}, \bar{X}_n \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(Z, p), \quad (27.22)$$

c'est à dire

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.23)$$

□

27.3 Modèles d'échantillonnages

Soit X , une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un **échantillon** de taille n pour X est une suite de n variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indépendantes et de même loi que X . Nous disons que la loi de X est la **loi parente** de la suite X_i .

Définition 27.11.

Soit

$$\mathcal{S} = \left[(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), (\mu_\theta) \right]_{\theta \in \Theta}, \quad (27.24)$$

un modèle statistique. Un **modèle d'échantillonnage** de taille n associée au modèle statistique $\mathcal{S}$ est la donnée d'une famille de n -échantillons $(X_{\theta,1}), \dots, X_{\theta,n}$ telle que pour tout $\theta \in \Theta$, l'échantillon $(X_{\theta,i})$ soit de variable parente X_θ .

La **moyenne empirique** du n -échantillon (X_i) est la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (27.25)$$

La proposition suivante signifie que la moyenne empirique est une «bonne» façon d'approcher la variable aléatoire.

Proposition 27.12.

Soit X , une variable aléatoire dans $L^2(\Omega)$ (c'est à dire $E(X^2) < \infty$) d'espérance m et de variance σ^2 . Alors

(1) $E(\bar{X}_n) = m$ et $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

(2) Nous avons les convergences

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} m \quad (27.26a)$$

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.26b)$$

(3) Si X est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$, c'est à dire

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.27)$$

Remarque 27.13.

L'intérêt de cette proposition en statistique descriptive expérimentale est le suivant. La taille moyenne des français est un nombre m qui existe, mais qui est largement hors de portée de l'expérience (mesurer $65 \cdot 10^6$ personnes risque de prendre un sacré temps). Si on mesure seulement n personnes dont les tailles sont $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ (ici x_i est un *nombre expérimental*, pas une variable aléatoire), alors on peut calculer la moyenne $\bar{x}_n$ de ces n personnes-là. La proposition indique que si n est assez grand, alors $\bar{x}_n$ donne une bonne idée de m .

Ne pas confondre X_n qui est une variable aléatoire, c'est à dire une application mesurable, qui nous sert à démontrer des théorèmes en mathématique, avec x_n qui est un nombre mesuré sur le terrain, qui a une existence *physique* bien définie, mais aucun status mathématique.

Si on croit que toute cette histoire de variables aléatoires, de tribu et de mesures décrit effectivement la réalité, alors on peut croire que le comportement de la suite $\bar{X}_n$ décrit bien le comportement de la suite $\bar{x}_n$ (cette dernière n'étant même pas une suite parce qu'on n'a jamais qu'un nombre fini de mesures expérimentales).

La **variance empirique** d'un échantillon est la variable aléatoire

$$V_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2. \quad (27.28)$$

La **variance empirique corrigée** est la variable aléatoire

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2. \quad (27.29)$$

Lemme 27.14.

La variance corrigée et la variance empirique ont comme espérances :

$$E(V_n^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (27.30a)$$

$$E(S_n^2) = \sigma^2. \quad (27.30b)$$

Démonstration. Nous commençons par calculer l'espérance de la variance non corrigée. La première étape est de la récrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 V_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_k (X_k^2 - 2X_k\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_k X_k^2 - \frac{2}{n} \bar{X}_n \underbrace{\sum_k X_k}_{=n\bar{X}_n} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_k \bar{X}_n^2}_{=n\bar{X}_n^2} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_k X_k^2 - 2\bar{X}_n^2 + \bar{X}_n^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_k X_k^2 - \bar{X}_n^2.
 \end{aligned} \tag{27.31}$$

Nous calculons séparément l'espérance de ces deux termes. Si X est la loi parente des X_i , en utilisant l'indépendance des X_i nous trouvons

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{n} \sum_k X_k^2\right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k^2) \\
 &= E(X^2) \\
 &= E(X)^2 + \text{Var}(X).
 \end{aligned} \tag{27.32}$$

Nous devons à présent calculer l'espérance de $\bar{X}_n^2$:

$$E(\bar{X}_n^2) = E(\bar{X}_n)^2 + \text{Var}(\bar{X}_n). \tag{27.33}$$

En utilisant le lemme 26.22,

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_k X_k\right) \tag{27.34a}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_k \text{Var}(X_k) \tag{27.34b}$$

$$= \frac{1}{n} \text{Var}(X). \tag{27.34c}$$

Par conséquent

$$E(V_n^2) = \text{Var}(X) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n} \text{Var}(X). \tag{27.35}$$

En ce qui concerne la variance corrigée,

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_k (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} V_n^2, \tag{27.36}$$

par conséquent $E(S_n^2) = \frac{n}{n-1} E(V_n^2) = \text{Var}(X)$. □

Théorème 27.15 (Théorème de Cochran[117]).

Soient (X_i) des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$. Alors

- (1) $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$,
- (2) $(\frac{n-1}{\sigma^2}) S_n^2 = (\frac{n}{\sigma^2}) \bar{V}_n^2 \sim \chi^2(n-1)$,
- (3) les variables aléatoires $\bar{X}_n$ et $\bar{V}_n$ sont indépendantes et

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\bar{V}_n/(n-1)}} \sim \mathcal{T}(n-1). \tag{27.37}$$

Nous pouvons aussi écrire le dernier résultat en termes de la variance corrigée S_n , l'estimateur sans biais de la variance parce que

$$\sqrt{\frac{\bar{V}_n}{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \quad (27.38)$$

en vertu de la définition (27.29).

Proposition 27.16.

Soit X une variable aléatoire de variance $\text{Var}(X) = \sigma$. Si $E(X^4) < \infty$, alors

$$(1) S_n^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2.$$

(2)

$$\frac{S_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{\mu^4 - \sigma^4}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (27.39)$$

où $\mu^4 = E(X^4)$ est le moment d'ordre 4 de X .

Théorème 27.17.

Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n -échantillon de loi parente $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

(1) Les variables aléatoires

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad (n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \quad (27.40)$$

sont indépendantes.

(2) La loi de $(n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2}$ est $\chi^2(n-1)$.

Si un échantillon vérifie ces deux propriétés, alors les X_i sont de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

L'inégalité de Markov donne une borne supérieure à la probabilité qu'une variable aléatoire positive soit plus grande ou égale à une constante.

Théorème 27.18 (Inégalité de Markov).

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty[$. Alors

$$P(\varphi(X) \geq a) \leq \frac{E(\varphi(X))}{a} \quad (27.41)$$

pour tout $a > 0$.

Démonstration. Calculons le second membre :

$$\begin{aligned} \frac{E(\varphi(X))}{a} &= \int_{\Omega} \frac{\varphi(X)}{a} dP \\ &= \int_{\varphi(X) \geq a} \underbrace{\frac{\varphi(X)}{a}}_{\leq 1} dP + \int_{\varphi(X) < a} \frac{\varphi(X)}{a} dP \\ &\geq \int_{\varphi(X) \leq a} dP \\ &= P(\varphi(X) \leq a). \end{aligned} \quad (27.42)$$

D'où l'inégalité voulue. □

27.4 Estimation ponctuelle

Nous considérons un modèle statistique

$$\mathcal{S} = [(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_\theta), (\mu_\theta)]_{\theta \in \Theta} \quad (27.43)$$

et pour tout θ nous notons $X = (X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ un échantillon de loi parente μ_θ . Tant que nous travaillerons avec un θ fixé, nous écrirons $X = (X_1, \dots, X_n)$ sans expliciter la paramètre θ . Nous noterons

$$E_\theta(\varphi(X_1, \dots, X_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) d\mu_\theta^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n). \quad (27.44)$$

Dans cette notation nous plaçons le θ sur l'espérance, tandis qu'en réalité le θ devrait être sur chaque X_1 . Tant qu'aucune confusion n'est possible nous ferons toujours cet abus d'écriture.

Le but de la théorie de l'estimation est de déduire la valeur de θ (et donc la loi μ_θ) à partir d'un échantillon de loi parente θ .

Nous posons les hypothèses suivantes.

- (1) Le modèle statistique $\mathcal{S}$ est paramétré, c'est à dire que $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ avec le plus souvent $d = 1, 2$. Typiquement les paramètres seront la moyenne et la variance.
- (2) Le modèle statistique est **identifiable**, c'est à dire que pour tout couple $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta^2$, si $\theta_1 \neq \theta_2$, alors $\mu_{\theta_1} \neq \mu_{\theta_2}$.
- (3) Le modèle $\mathcal{S}$ est **dominé** par la mesure de Lebesgue si les lois μ_θ sont continues et par la mesure de comptage si les lois μ_θ sont discrètes.

Exemple 27.19

La famille des lois exponentielles $(\mathcal{E}(\lambda))_{\lambda>0}$ est identifiable. Les lois gaussiennes $(\mathcal{N}(m, \sigma^2))_{m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0}$ sont également identifiables.

En réalité il est assez compliqué de trouver un exemple de modèle non identifiable à moins de la faire exprès. Par exemple en paramétrant les lois exponentielles de la façon suivante : $(\mathcal{E}(\sin(\lambda)))_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Cette famille n'est pas identifiable. $\triangle$

Le corollaire 13.6 ainsi que l'hypothèse de modèle dominé implique que les lois ont des densités. Si la loi μ_θ est discrète, nous notons

$$p(x, \theta) = \mu_\theta(\{x\}) \quad (27.45)$$

la densité de μ_θ par rapport à la mesure de comptage. Si la loi μ_θ est continue, nous notons

$$p(x, \theta) = f_\theta(x) \quad (27.46)$$

la densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si μ_θ est une loi discrète et si $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon de taille n , alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \mu_\theta^{\otimes n}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \mu_\theta(\{x_1\}) \dots \mu_\theta(\{x_n\}) = p(x_1, \theta) \dots p(x_n, \theta). \quad (27.47)$$

La première et la dernière égalité sont des notations; la seconde est une conséquence de l'indépendance des X_i contenues dans l'échantillon. Pour une loi continues, nous adoptons la même notation. Le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ admet la densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = f_\theta(x_1) \dots f_\theta(x_n) = p(x_1, \theta) \dots p(x_n, \theta). \quad (27.48)$$

Exemple 27.20

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi $\mathcal{B}(1, \theta)$ avec $\theta \in]0, 1[$. C'est une loi discrète portée par l'ensemble $\{0, 1\}$. Nous avons

$$p(x, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \neq x \neq 1 \\ 1 - \theta & \text{si } x = 0 \\ \theta & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (27.49)$$

De façon plus condensée nous pouvons écrire

$$p(x, \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x). \quad (27.50)$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$, la densité du n -échantillon est donnée par

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \theta^{x_1 + \dots + x_n} (1 - \theta)^{1 - \sum_i (1 - x_i)} \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x_1, \dots, x_n). \quad (27.51)$$

△

27.5 Statistiques et estimateurs

Définition 27.21.

Une **statistique** sur un modèle d'échantillonnage est une variable aléatoire fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépendant pas de θ ¹. C'est à dire une application borélienne $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ne dépendant pas de θ . La statistique associée à cette application est $S = T(X_1, \dots, X_n)$.

Les fonctions $T(X_1, \dots, X_n)$ données par $\sum_i X_i$, $e^{\sum X_i}$ sont des statistiques. La constante $\frac{1}{2}$ est également une statistique (mais elle est moins intéressante).

Un **estimateur** est une statistique qui prend ses valeurs dans Θ . Nous la noterons

$$\hat{\theta}_n = \theta(X_1, \dots, X_n). \quad (27.52)$$

La fonction $\hat{\theta}_n$ est borélienne à valeurs dans Θ .

Exemple 27.22

Soit un n -échantillon de loi $\mathcal{B}(1, \theta)_{\theta \in [0,1]}$. Les fonctions $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{2}$ sont des estimateurs. Cependant nous devinons que la première va être plus intéressante que la seconde.

△

Pour la suite, nous travaillerons avec des estimateurs de carré intégrable, c'est à dire que

$$E_\theta(|\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)|^2) < \infty \quad (27.53)$$

pour tout $\theta \in \Theta$.

27.5.1 Qualité des estimateurs

Définition 27.23.

Une estimateur est **convergent** ou **consistant** si pour tout $\theta \in \Theta$, la suite de variables aléatoires $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ converge en probabilité vers θ .

En d'autres termes, l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergent si pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \eta) = 0. \quad (27.54)$$

La probabilité dans le membre de gauche est donnée par

$$\mu_\theta^{\otimes n} \left(\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n) - \theta| > \eta \} \right). \quad (27.55)$$

Soit $\hat{\theta}_n$ un estimateur pour θ . Nous cherchons à minimiser l'erreur commise en remplaçant θ par $\hat{\theta}_n$. Nous introduisons donc le **risque quadratique** de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ par

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = E_\theta((\hat{\theta}_n - \theta)^2). \quad (27.56)$$

Nous disons qu'un estimateur $\hat{\theta}_{n,1}$ est préférable à $\hat{\theta}_{n,2}$ si pour tout $\theta \in \Theta$ nous avons

$$R(\hat{\theta}_{n,1}, \theta) < R(\hat{\theta}_{n,2}, \theta). \quad (27.57)$$

1. Parce que d'habitude c'est ce qu'on cherche à estimer.

Lemme 27.24.

Une formule alternative pour le risque quadratique :

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \text{Var}(\hat{\theta}_n) + (E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta)^2 \quad (27.58)$$

Démonstration. Nous avons

$$E_\theta \left((\hat{\theta}_n - \theta)^2 \right) = \text{Var}(\hat{\theta}_n - \theta) + E_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2. \quad (27.59)$$

D'une part $\text{Var}(\hat{\theta}_n - \theta) = \text{Var}(\hat{\theta}_n)$ et d'autre part $E_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = [E(\hat{\theta}_n) - \theta]^2$. Par conséquent

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \text{Var}(\hat{\theta}_n) + (E(\hat{\theta}_n) - \theta)^2. \quad (27.60)$$

□

Le **biais** de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est la quantité

$$E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta. \quad (27.61)$$

À ce niveau, nous rappelons que nous écrivons E_θ l'espérance calculée en supposant la valeur θ pour le paramètre des différentes variables aléatoires entrant dans le calcul. Voir la discussion autour de la définition (27.44).

Exemple 27.25

Dans le cadre de la proposition 26.87, nous voulons savoir si $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur sans biais de λ . Pour ce faire nous calculons

$$E_\lambda \left(\frac{N_t}{t} \right) = \frac{1}{t} E_\lambda(N_t) = \lambda \quad (27.62)$$

parce que $E(N_t) = \lambda t$. Ici nous avons calculé $E(N_t)$ en prenant λ pour valeur du paramètre du processus de Poisson, alors que en principe c'est justement le paramètre que nous voulons estimer. $\triangle$

Exemple 27.26

La moyenne empirique $\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de la moyenne. L'estimateur

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad (27.63)$$

est un estimateur sans biais de la variance. $\triangle$

Un estimateur sans biais n'est pas toujours de meilleure qualité qu'un estimateur avec biais. En effet ce que nous voulons est de se donner un (petit) intervalle I autour de la bonne valeur de θ et de maximiser $P(\hat{\theta}_n \in I)$. Sur la figure 27.1, c'est l'estimateur biaisé rouge tombe plus souvent sur le bon intervalle que l'estimateur non biaisé bleu.

Nous allons maintenant étudier quelques manières de construire des estimateurs convergents. Il vont évidemment s'appuyer sur la loi des grands nombres.

27.5.2 Méthode des moments

Sans surprises, un bon estimateur pour la moyenne est

$$\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (27.64)$$

Plus généralement, nous supposons qu'il existe une fonction borélienne² $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$E_\theta(|M(X)|) < \infty \quad (27.65)$$

2. Définition 7.64.

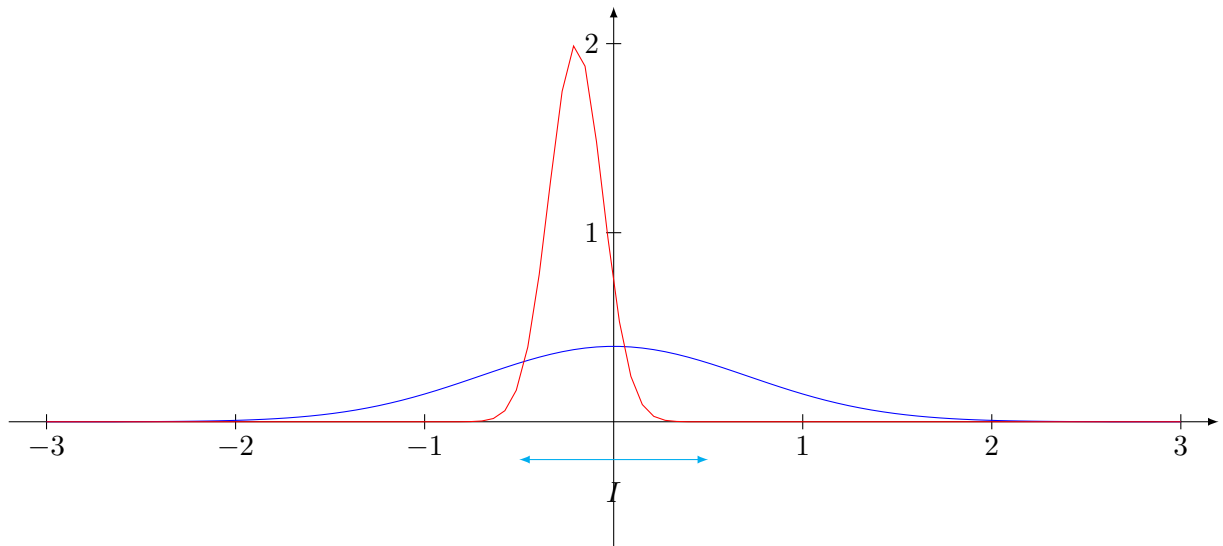


FIGURE 27.1 – Un estimateur sans biais et un avec biais.

où X est la loi parente de l'échantillon. Supposons également que la fonction

$$h(\theta) = E_{\theta}(M(X)) \quad (27.66)$$

soit inversible et continue sur Θ . Dans ce cas, pour estimer le paramètre θ , nous considérons l'estimateur

$$\hat{\theta}_n = h^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right). \quad (27.67)$$

Cela est un estimateur convergent. En effet, la loi des grands nombres dit que

$$\frac{1}{n} \sum_i M(X_i) \xrightarrow{p.s.} E_{\theta}(M(X)). \quad (27.68)$$

En composant avec la fonction h , nous avons

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} h^{-1}(E_{\theta}(M(X))) = \theta. \quad (27.69)$$

Dans cette construction, $M(X)$ est le moment de X que l'on souhaite déterminer.

Exemple 27.27

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Construire $\hat{\lambda}_n$. Pour une loi exponentielle,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad (27.70)$$

Nous devons donc déterminer le moment d'ordre 1 de X (c'est à dire sa moyenne). Nous considérons donc la fonction $M(x) = x$; par conséquent

$$h(\lambda) = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (27.71)$$

et $h^{-1}(\theta) = 1/\theta$. L'estimateur que nous considérons pour λ est finalement

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}. \quad (27.72)$$

△

27.5.3 Méthode de substitution

Supposons que nous connaissions un estimateur convergent $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$. Si $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$g(\hat{\theta}_n) \rightarrow g(\theta). \quad (27.73)$$

27.5.4 Méthode du maximum de vraisemblance

Exemple 27.28

Nous désirons contrôler la qualité d'une chaîne de production ; pour cela nous prélevons un échantillon de 10 pièces, et nous en trouvons 3 défectueuses. Que dire de la proportion de pièces défectueuses ?

Évidemment, le plus probable est que la proportion de pièces défectueuses soit de $1/3$. Analysons en détail comment nous arrivons à ce résultat. Nous considérons que le fait de tirer 10 pièces revient à une expérience binomiale de paramètres 10 et de probabilité p inconnue. Dans ce cas, la probabilité d'observer exactement 3 pièces défectueuses est de

$$L(p) = P(X = 3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7. \quad (27.74)$$

Le maximum de $L(p)$ est $p = 3/10$.

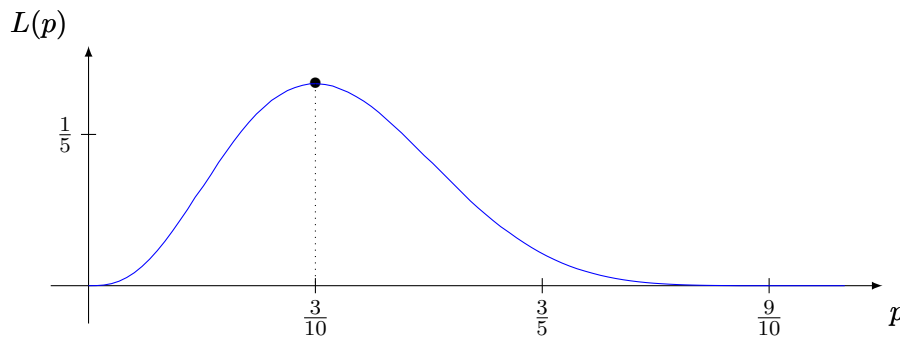


FIGURE 27.2 – La fonction de vraisemblance de l'exemple 27.28.

△

Soit $(x_1, \dots, x_n)$, une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$. L'application

$$\theta \mapsto p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) \quad (27.75)$$

est la **vraisemblance** de l'échantillon. Nous définissons $\hat{\theta}_n$ par

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_n) = \sup_{\theta \in \Theta} p_n(x_1, \dots, x_n; \theta). \quad (27.76)$$

Remarque 27.29.

Nous passons sous le silence le fait que la fonction sup soit une fonction mesurable, et que par conséquent $\hat{\theta}_n$ soit bien une variable aléatoire.

La variable aléatoire $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ est l'**estimateur de maximum de vraisemblance** de θ .

Exercice 1

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{B}(1, \theta)$ avec $\theta \in [0, 1]$. Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ .

Correction de l'exercice 1

En utilisant la densité de la loi multinomiale,

$$p_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_i p(x_i, \theta) = \prod_i \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1-x_i} \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x_1, \dots, x_n). \quad (27.77)$$

En passant au logarithme, si $x_i \in \{0, 1\}$,

$$L_n(\theta) = \sum_i x_i \ln(\theta) + (1 - x_i) \ln(1 - \theta) \quad (27.78)$$

En passant à la dérivée, nous trouvons que l'extremum est donné par

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (27.79)$$

Exercice 2

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\theta > 0$. Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ .

Correction de l'exercice 2

Nous avons

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \theta_i e^{-\theta x_i}. \quad (27.80)$$

En passant au logarithme la fonction à minimiser est

$$L(\theta) = n \ln(\theta) - \theta \sum_i x_i. \quad (27.81)$$

La minimisation donne

$$\theta = \frac{n}{\sum_i x_i}, \quad (27.82)$$

c'est à dire

$$\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\sum_i X_i} = \frac{1}{\bar{X}_n}. \quad (27.83)$$

Ce résultat n'est pas étonnant vu que le paramètre λ de la loi exponentielle est l'inverse de la moyenne.

Exercice 3

Soit $(X_1, \dots, X_n)$, un échantillon de loi parente uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

(1) Montrer que la fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(\min(x_1, \dots, x_n)) \mathbb{1}_{[\max(x_1, \dots, x_n), \infty[}(\theta). \quad (27.84)$$

(2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .

Correction de l'exercice 3

Lorsque nous parlons de paramètres qui peuvent prendre un spectre continu de valeurs, il est inutile de calculer la *probabilité* parce qu'elle est nulle. Le système de maximum de vraisemblance fonctionne avec les densités. Dans notre cas, la fonction de vraisemblance est le produit des densités :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) \quad (27.85a)$$

$$= \prod_i \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x_i) \quad (27.85b)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \theta]^n}(x_1, \dots, x_n). \quad (27.85c)$$

De cette expression nous voyons que $\min\{x_1, \dots, x_n\}$ doit être positif en même temps que le maximum doit être plus petit que θ . Cette seconde condition peut s'écrire $\mathbb{1}_{[\max\{x_1, \dots, x_n\}, \infty[}(\theta)$. Au final nous avons

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(\min(x_1, \dots, x_n)) \mathbb{1}_{[\max\{x_1, \dots, x_n\}, \infty[}(\theta). \quad (27.86)$$

Il n'est évidemment pas possible de dériver explicitement cette expression. Par contre pour cette fonction soit non nulle, il faut obligatoirement $\theta \geq \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Par conséquent elle prend son maximum pour $\theta = \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

La conclusion est que l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ est $\hat{\theta}_n = \max_i\{X_i\}$.

Exercice 4

Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de la moyenne pour un modèle statistique dans laquelle la famille de probabilités est

$$(\mu_\theta) = \{\mathcal{N}(\theta, \sigma^2) \text{ tel que } \theta \in \mathbb{R}\}. \quad (27.87)$$

Nous supposons que σ est connu.

Correction de l'exercice 4

La densité de la variable aléatoire conjointe $(X_1, \dots, X_n)$ au point $(x_1, \dots, x_n)$ est le produit des densités, donc

$$\prod_{i=1}^n \gamma_{m, \sigma}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp -\frac{1}{2} \left(\sum_i \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2 \right). \quad (27.88)$$

Étant donné que le but est de minimiser, nous pouvons oublier le facteur et passer au logarithme :

$$L_0(\bar{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2. \quad (27.89)$$

Nous pouvons également supprimer le $\frac{1}{2}$ et le $1/\sigma^2$. La fonction à minimiser devient

$$L(x_1, \dots, x_n) = - \sum_i (x_i - m)^2, \quad (27.90)$$

dont la dérivée vaut $2nm - 2 \sum_i x_i$. Par conséquent nous avons un minimum avec

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (27.91)$$

27.5.5 Estimation d'une fonction de répartition

Théorème 27.30 (Glivenko-Cantelli[300]).

Soient X_i des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi dont la fonction de distribution est F (inconnue). Nous définissons l'estimateur

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leq x}. \quad (27.92)$$

Alors

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - F\|_\infty = 0\right) = 1. \quad (27.93)$$

Autrement dit, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(\omega, \cdot) - F\|_\infty = 0. \quad (27.94)$$

C'est à dire qu'il y a presque certainement convergence en probabilité.

Notons que de façon générale lorsqu'on parle d'estimateurs, partout où il y a un «n» dans une variable aléatoire, il y a une dépendance sous-entendue en ω .

Proposition 27.31.

Pour presque tout x , l'estimateur $F_n(x)$ est sans biais par rapport à $F(x)$:

$$E(F_n(x)) = F(x). \quad (27.95)$$

Démonstration. C'est juste un calcul :

$$E(F_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x) = F(x). \quad (27.96)$$

□

Exercice 5

Dans cet exercice nous construisons un estimateur biaisé qui présente un risque quadratique inférieur à un estimateur non biaisé.

Soit un modèle statistique dont la famille de lois est $\{\mathcal{N}(m, \sigma^2)\}_{\theta \in]0, \infty[}$ où m est un paramètre réel connu. En ce qui concerne la variance nous considérons

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2. \quad (27.97)$$

- (1) Montrer que $\hat{\sigma}_n^2$ est un estimateur sans biais de θ .
- (2) Montrer que le risque quadratique de $\hat{\sigma}_n^2$ est

$$R(\hat{\sigma}_n^2, \theta) = \frac{2\theta^2}{n}. \quad (27.98)$$

- (3) Considérer la famille d'estimateurs $c\hat{\sigma}_n^2$ avec $c > 0$. Déterminer la valeur de c qui minimise le risque quadratique de l'estimateur.

Correction de l'exercice 5

- (1) Nous calculons

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_n^2) &= \frac{1}{n} \sum_i E[(X_i - m)^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \text{Var}(X_i - m) - \frac{1}{n} \sum_i E(X_i - m)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \text{Var}(X_i) \\ &= \sigma^2. \end{aligned} \quad (27.99)$$

- (2) Par la formule (27.60) nous savons que le risque d'un estimateur sans biais est donné par sa variance :

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = \text{Var}(|\hat{\sigma}_n^2 - \theta|) = \text{Var}(\hat{\sigma}_n^2). \quad (27.100)$$

Étant donné que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, le lemme 26.22 nous enseigne que la variance de la somme est la somme des variances. Nous avons donc à calculer

$$\begin{aligned} \text{Var}(|\hat{\sigma}_n^2 - \theta|) &= \text{Var}(\hat{\sigma}_n^2) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_i \text{Var}[(X_i - m)^2] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_i E[(X_i - m)^4] - E[(X_i - m)^2]^2. \end{aligned} \quad (27.101)$$

Ces espérances ne sont pas très compliquées à calculer en utilisant la fonction caractéristique donnée par la proposition 26.89 :

$$\Phi_{X-m}(t) = E(e^{it(X-m)}) = e^{-itm} E(e^{itX}) = e^{-itm} \Phi_X(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \quad (27.102)$$

Nous avons $\Phi^{(4)}(0) = 3\sigma^4$ et $\Phi''(0) = -\sigma^2$. Par conséquent

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{1}{n^2} \sum_i 2\theta^2 = \frac{2\theta^2}{n}. \quad (27.103)$$

Notez ici que $\theta = \sigma^2$.

(3) En tenant compte du fait que $\text{Var}(\hat{\sigma}_n^2) = \frac{2\theta^2}{n}$ et $E(\hat{\sigma}_n^2) = \theta$, nous avons

$$E((c\hat{\sigma}_n^2 - \theta)^2) = \text{Var}(c\hat{\sigma}_n^2 - \theta) + E(c\hat{\sigma}_n^2 - \theta)^2 \quad (27.104a)$$

$$= 2\frac{c^2\theta^2}{n} + (c-1)^2\theta^2. \quad (27.104b)$$

La dérivée (par rapport à c) de cela s'annule pour $c_0 = \frac{n}{n+2}$. Notons que nous n'avons pas tout à fait démontré que cela est bien un minimum. Calculons cependant le risque quadratique de notre estimateur pour cette valeur de c . Pour cela nous reportons $c = c_0$ dans l'expression (27.104b) :

$$E\left(\frac{n}{n+2}\hat{\sigma}_n^2\right) = \frac{2\theta^2}{n+2}. \quad (27.105)$$

Cela est effectivement plus petit que $R(\hat{\sigma}_n^2, \theta)$.

Nous avons ainsi construit un estimateur biaisé qui a un risque quadratique plus petit que l'estimateur non biaisé.

Exercice 6

Nous considérons la famille de probabilités $\mu_\theta = \mathcal{N}(\theta)$ où $\theta = (m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre $\theta = (m, \sigma^2)$.

Correction de l'exercice 6

Pour chaque observation x_i nous avons une densité gaussienne. Le produit donne

$$p(x_1, \dots, x_n; (m, \sigma^2)) = \frac{1}{\sigma^2(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - m)^2\right]. \quad (27.106)$$

En passant au logarithme et en supprimant des facteurs inutiles à la minimisation,

$$L(m, \sigma) = -n \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - m)^2. \quad (27.107)$$

L'annulation de la dérivée par rapport à m donne immédiatement $m = \frac{1}{n} \sum_i x_i$. L'annulation de la dérivée par rapport à σ donne

$$-n\sigma^2 + \sum_i (x_i - m)^2 = 0 \quad (27.108)$$

et donc

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x}_n)^2. \quad (27.109)$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance du couple $\theta = (m, \sigma^2)$ est donc

$$\hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_i X_i, \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \right). \quad (27.110)$$

27.5.6 Espérance et variance d'un estimateur

Soit $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$ un estimateur du paramètre θ dans un modèle d'échantillonnage. Les moyennes et variances de l'estimateur sont les variables aléatoires

$$m_{\theta,n} = E_{\theta}(T_n) = \int_{\mathbb{R}^n} T_n(x_1, \dots, x_n) d\mu_{\theta}^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n), \quad (27.111a)$$

$$\text{Var}_{\theta}(T_n) = \int_{\mathbb{R}^n} [T_n(x_1, \dots, x_n) - m_{\theta,n}]^2 d\mu_{\theta}^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n), \quad (27.111b)$$

Lemme 27.32.

Si l'estimateur T_n satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\theta}(T_n) = \theta \quad (27.112a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{\theta}(T_n) = 0, \quad (27.112b)$$

alors il est convergent.

Démonstration. Nous utilisons l'inégalité de Markov (théorème 27.18) et nous introduisons l'espérance de l'estimateur :

$$P(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E(T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta) \quad (27.113a)$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon} E(|T_n - m_{n,\theta}|) + \frac{1}{\epsilon} E(|m_{n,\theta} - \theta|) \quad (27.113b)$$

$$(27.113c)$$

Le second terme est l'espérance d'une constante. Nous majorons le premier terme en utilisant le fait que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$ (voir la remarque 18.21 après l'inégalité de Hölder) :

$$P(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E(|T_n - m_{n,\theta}|^2)^{1/2} + \frac{1}{\epsilon} |E_{\theta}(T_n) - \theta| \quad (27.114a)$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \text{Var}(T_n)^{1/2} + \frac{1}{\epsilon} |E_{\theta}(T_n) - \theta|. \quad (27.114b)$$

Les deux termes tendent séparément vers zéro par hypothèse. Nous avons par conséquent la convergence en probabilité $T_n \rightarrow \theta$. $\square$

27.6 Estimation par intervalle de confiance

Nous voudrions estimer la proportion d'individus dans une population ayant un certain caractère déterminé par une variable booléenne : chaque individu a ou non le caractère étudié. L'échantillon sera donc une suite de 0 et de 1.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ nous notons

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème individu a la caractère} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (27.115)$$

et $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Notre modèle statistique sera

$$\mathcal{S} = [(\Omega, \mathcal{F}, P), (X_{\theta}), B(1, \theta)] \quad (27.116)$$

où Ω est l'ensemble des individus étudiés, P est la manière de choisir les individus lors du sondage (essentiellement c'est une loi uniforme) et X_{θ} est la variable aléatoire

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ a le caractère} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (27.117)$$

Cela est une variable aléatoire de distribution $\mathcal{B}(1, p)$ où p est inconnu. Ici, $\Theta = [0, 1]$ est l'ensemble des p possibles.

Remarque 27.33.

Nous supposons que Ω est la population entière et que la variable aléatoire est l'opinion de la personne ω . En cela, nous considérons que le tirage de l'échantillon est sans remise. Le fait que nous modélisons par une variable aléatoire de Bernoulli signifie que nous considérons l'approximation dans laquelle la population globale est grande.

Nous supposons que nous ayons un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ dont nous avons observé une réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ de fréquence $\bar{x}_n$. Nous voudrions déterminer un intervalle dans lequel $\bar{X}_n$ a de fortes chances de se trouver. Plus précisément nous considérons un petit α et nous cherchons ϵ tel que

$$P(p \in [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]) = 1 - \alpha. \quad (27.118)$$

Typiquement, $\alpha = 5\%$. Le nombre α est le **niveau de confiance** que nous nous fixons a priori.

Si nous trouvons un intervalle I tel que $P(p \in I) = 1 - \alpha$, nous disons que l'intervalle est **exact**, si nous avons $P(p \in I) \geq 1 - \alpha$, nous disons que l'intervalle est **par excès**.

Il y a deux points de départ pour trouver l'intervalle. Le plus simple est d'utiliser le théorème central limite et considérer

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.119)$$

La seconde est d'utiliser la loi exacte : $n\bar{X}_n = \sum_i X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Bien entendu la seconde donne lieu à des calculs plus compliquée.

Remarque 27.34.

Dans certaines vraies vies (par exemple en médecine), la taille des échantillons est très réduite. Dans ce cas le théorème central limite n'a aucun sens et les calculs exact s'imposent.

De plus dans de nombreux cas de la vraie vie, nous avons un ordinateur à disposition pour calculer avec la loi exacte. L'utilisation du théorème central limite dans le but de produire un intervalle de confiance semble donc de plus en plus être une survivance du passé.

Dans la suite, nous allons supposer que n est suffisamment grand pour justifier l'approximation normale du théorème central limite 26.74. Si Z est une variable aléatoire normale centrée réduite, notre premier essai est de faire

$$1 - \alpha = P(p \in [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]) \quad (27.120a)$$

$$= P\left(\frac{-\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \quad (27.120b)$$

$$\simeq P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \quad (27.120c)$$

$$= 2P\left(Z \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1. \quad (27.120d)$$

La dernière ligne utilise la symétrie de la distribution $\mathcal{N}(0, 1)$. Le nombre ϵ que nous cherchons vérifie donc

$$P\left(Z \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (27.121)$$

De nos jours, les ordinateurs donnent la loi de répartition inverse des normales. Cela nous fournit un nombre t_α tel que

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = t_\alpha \quad (27.122)$$

où t_α est le nombre tel que $P(Z \leq t_\alpha) = 1 - \alpha/2$.

Conclusions de ce premier essai :

- (1) Le problème est que nous ne pouvons pas déduire ϵ de l'équation (27.122) parce que p est inconnu.
- (2) Cela ruine notre premier essai et nous demande de trouver mieux.
- (3) L'astuce est évidemment de remplacer p par $\bar{X}_n$, mais il faut le justifier.

Méthode Slutsky Le point de départ du premier essai infructueux était la convergence

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (27.123)$$

donnée par le théorème central limite 26.74. Ce que nous voudrions en réalité est la convergence

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \quad (27.124)$$

La loi des grands nombres nous donne

$$\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \xrightarrow{p.s.} p(1 - p). \quad (27.125)$$

Par conséquent le lemme de Slutsky implique la convergence en loi du couple :

$$\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}, \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (N, \sqrt{p(1-p)}). \quad (27.126)$$

À ce point des opérations nous pouvons utiliser la proposition 26.60 au couple avec la fonction

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \sqrt{p(1-p)} \quad (27.127)$$

dont la probabilité d'être continue est 1 ($y = 0$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$). La conclusion du théorème est que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.128)$$

C'est à partir de là que nous pouvons construire notre intervalle de confiance :

$$1 - \alpha = P(\bar{X}_n - \epsilon \leq p \leq \bar{X}_n + \epsilon) \quad (27.129a)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \geq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \geq \frac{-\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \right) \quad (27.129b)$$

$$\simeq P\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \geq N \geq \frac{-\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \right). \quad (27.129c)$$

Nous cherchons maintenant dans les tables le ξ qui fait

$$P(-\xi \leq N \leq \xi) = 1 - \alpha \quad (27.130)$$

puis nous cherchons ϵ de telle sorte à avoir

$$\frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} = \xi. \quad (27.131)$$

Dans cette équation tout est connu à part le ϵ qui se découvre.

Méthode piétonne Nous remarquons que l'événement

$$-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \quad (27.132)$$

est le même que l'événement

$$\left| \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right| \leq t_\alpha. \quad (27.133)$$

Vu que t_α est positif, cela est encore le même événement que

$$n \frac{(\bar{X}_n - p)^2}{p(1-p)} \leq t_\alpha^2 \quad (27.134)$$

ou encore

$$p^2(n + t_\alpha^2) - p(2n\bar{X}_n + t_\alpha^2) + n\bar{X}_n^2 \leq 0. \quad (27.135)$$

Les racines du polynôme du membre de gauche sont

$$p_\pm = \frac{2n\bar{X}_n + t_\alpha^2 \pm \sqrt{(2n\bar{X}_n + t_\alpha^2)^2 - 4(n + t_\alpha^2)n\bar{X}_n^2}}{2(n + t_\alpha^2)}. \quad (27.136)$$

Le but étant d'effectuer une limite $n \rightarrow \infty$, nous factorisons d'abord n . Après simplification

$$p_\pm = \frac{\bar{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} \pm t_\alpha \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{4n^2} + \frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}}{1 + \frac{t_\alpha^2}{n}}. \quad (27.137)$$

Étant donné que nous considérons que n est grand, nous allons négliger les termes en $\frac{1}{n}$ en faisant attention à ce que le terme en $\frac{1}{n}$ sous la racine est en réalité $1/\sqrt{n}$ et ne doit pas être négligé. Nous trouvons, à cette approximation, que

$$p \in \left[\bar{X}_n - t_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + t_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \right] \quad (27.138)$$

avec une probabilité $1 - \alpha$.

27.6.1 Région de confiance

Soit un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente μ_θ . Nous supposons $\Theta \subset \mathbb{R}$ avec Θ ouvert. Soit $\alpha \in [0, 1]$ un intervalle de confiance et une application mesurable

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{B}(\Theta) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \Lambda(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (27.139)$$

On appelle **région de confiance exact** au niveau de confiance $1 - \alpha$ une région aléatoire $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ telle que

$$P(\theta \in \Lambda(x_1, \dots, x_n)) = 1 - \alpha. \quad (27.140)$$

Si $d = 1$, la région $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ est un intervalle.

27.6.2 Fonction pivotale

Soit $\hat{\theta}_n$, un estimateur de θ . Une fonction v sur $\Theta \times \Theta$ est **pivotale** pour θ si la loi de la variable aléatoire $v(\hat{\theta}_n, \theta)$ ne dépend pas de θ . Elle est **asymptotiquement pivotale** si

$$v(\hat{\theta}_n, \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi \quad (27.141)$$

où ξ est une variable aléatoire indépendante de θ .

En pratique, nous essayons de faire apparaître une variable aléatoire de loi connue qui ne dépend pas du paramètre que l'on recherche. Si la variance est connue et si l'échantillon est grand, le théorème central limite nous permet d'introduire une loi normale centrée réduite.

Exemple 27.35

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de loi parente $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Une fonction asymptotiquement pivotale pour m est

$$v(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (27.142)$$

parce que la variable aléatoire

$$v(\bar{X}_n, m) = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (27.143)$$

tend vers $\mathcal{N}(0, 1)$ qui ne dépend pas de m . $\triangle$

Exemple 27.36

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne m et d'écart type σ que nous supposons inconnus. Le fonction suivante est asymptotiquement pivotale pour m :

$$v(\bar{X}_n, m) = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}. \quad (27.144)$$

$\triangle$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$ avec σ_0^2 connu. Nous cherchons un intervalle de confiance $1 - \alpha$ pour m . Pour cela nous allons utiliser une fonction asymptotiquement pivotale, à savoir

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.145)$$

Nous devrions chercher des valeurs z_+ de z_- telles que

$$P\left(z_- \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq z_+\right) = 1 - \alpha. \quad (27.146)$$

Pour des raisons de symétries (de la courbe gaussienne), nous allons chercher un intervalle symétrique : $z_- = -z_+$. Le nombre à chercher est donc le z_α tel que

$$P(|Z| \leq z_\alpha) = 1 - \alpha. \quad (27.147)$$

Si nous demandons $\alpha = 5\%$, la réponse est $z_\alpha = 1.96$, c'est à dire que

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right) = 0.95. \quad (27.148)$$

Nous avons donc

$$P\left(m \in \left[\bar{X}_n - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0.95. \quad (27.149)$$

Supposons maintenant que nous avons observé 100 valeurs numériques avec $\bar{x}_n = 12$ et $\sigma = 1$. La réalisation de l'intervalle de confiance pour m au niveau de confiance 0.95 est :

$$[12 - 0.196, 12 + 0.196]. \quad (27.150)$$

Cet intervalle est à interpréter de la façon suivante : si nous recommençons un grand nombre de fois le sondage, la moyenne tombera 95% des fois dans l'intervalle ainsi calculé. Mais il faut bien comprendre que la probabilité

$$P\left(m \in [12 - 0.196, 12 + 0.196]\right) \quad (27.151)$$

vaut zéro ou un.

Exercice 7

Soit un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m et σ^2 sont inconnus. Déterminer un intervalle de confiance exact symétrique au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Déterminer un intervalle de confiance pour σ^2 .

Correction de l'exercice 7

Nous savons que la moyenne empirique est un estimateur de la moyenne :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (27.152)$$

Nous cherchons un intervalle du type $I = [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon]$ pour lequel $P(m \in I) = 1 - \alpha$. Nous savons que la variable aléatoire

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\alpha/\sqrt{n}} \quad (27.153)$$

suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, mais la variance est inconnue. La subtilité à savoir est que la variable aléatoire

$$Z = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{\sigma}} \quad (27.154)$$

où $S_n^2 = \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 / (n - 1)$ suit une loi de Student à n degrés de liberté $\mathcal{T}(n - 1)$ en vertu du théorème de Cochran 27.15. Comme il est usuel de le faire, nous inversons l'intervalle :

$$1 - \alpha = P(-\epsilon \leq \bar{X}_n - m \leq \epsilon) \quad (27.155a)$$

$$= P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n} \leq Z \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n}\right). \quad (27.155b)$$

Les valeurs se trouvent dans des tables ; par exemple pour $n = 10$ et $\alpha = 5\%$ nous trouvons

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{S_n} = 2.262. \quad (27.156)$$

Plus généralement nous notons $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{T}(n - 1)$, c'est à dire le nombre tel que

$$P(Z \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (27.157)$$

si $Z \sim \mathcal{T}(n - 1)$. L'intervalle de confiance est alors donné par

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} S_n}{\sqrt{n}} \right]. \quad (27.158)$$

Cela est un intervalle exact pour m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Nous pouvons aussi trouver un intervalle asymptotique en utilisant le théorème central limite :

$$\frac{\bar{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} T \quad (27.159)$$

avec $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Rappel : dire que I_n est un **intervalle de confiance asymptotique** signifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(m \in I_n) = 1 - \alpha. \quad (27.160)$$

En ce qui concerne la variance σ^2 , l'intervalle de confiance se construit en utilisant la partie (2) du théorème de Cochran 27.15. Nous introduisons la variable aléatoire pivot

$$Z = (n - 1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \quad (27.161)$$

qui suit une loi $\chi^2(n-1)$. Cette loi n'étant pas symétrique (voir figure 26.1), nous n'allons pas chercher un intervalle de confiance symétrique. Nous cherchons c_1 et c_2 tels que

$$\begin{cases} P(\sigma^2 \in [c_1, c_2]) = 1 - \alpha & (27.162a) \\ P(\sigma^2 \in [0, c_1]) = \frac{\alpha}{2} & (27.162b) \\ P(\sigma^2 \in [c_2, \infty]) = \frac{\alpha}{2} & (27.162c) \end{cases}$$

La situation est représentée à la figure 27.3.

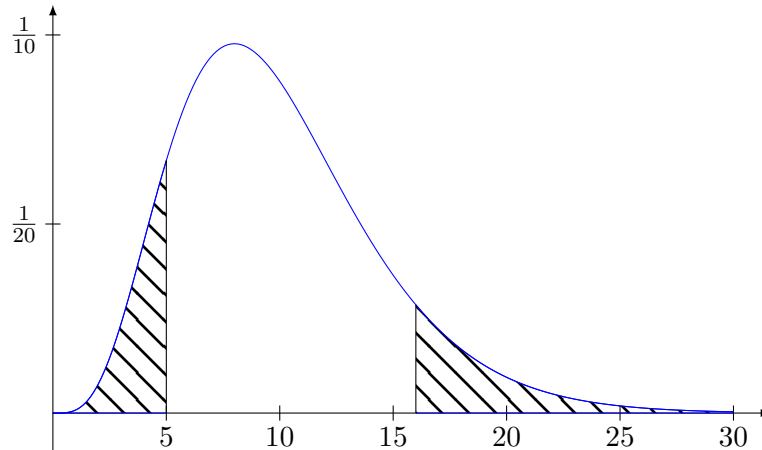


FIGURE 27.3 – L'intervalle de confiance pour une χ^2 .

Le construction des nombres c_1 et c_2 passe par la relation

$$P(c_1 \leq \sigma^2 \leq c_2) = P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{c_2} \leq Z \leq \frac{(n-1)S_n^2}{c_1}\right). \quad (27.163)$$

Nous notons $t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$ et $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ les quantiles donnés sur la figure 27.3, c'est à dire

$$P(Z \leq t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \quad P(Z \geq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (27.164a)$$

Ce que nous obtenons est

$$\frac{(n-1)S_n^2}{c_2} = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \quad (27.165a)$$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{c_1} = t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (27.165b)$$

et par conséquent l'intervalle de confiance pour σ^2 est

$$I = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right] \quad (27.166)$$

avec $P(\sigma^2 \in I) = 95\%$.

Remarque 27.37.

Il n'est pas clair a priori que la longueur de l'intervalle I décroisse avec n parce qu'il y a n dans les t au numérateur.

27.6.3 Sondage de proportion

Une utilisation classique des statistiques est d'interpréter une proportion donnée par un sondage. Nous considérons une élection avec deux candidats A et B . Nous avons interrogés $n = 2500$

personnes et nous avons obtenus 51% pour le candidat A et 49% pour le candidat B . Que peut on dire ?

La modélisation de cette situation est que nous avons des variables aléatoires $X_i \sim \mathcal{B}(p_A)$ et que nous en avons observés n avec une moyenne

$$\bar{x}_n = 0.51. \quad (27.167)$$

La loi de $\bar{X}_n$ est une binomiale. Sa densité n'est pas symétrique, mais si n est grand, elle le devient. Nous cherchons un intervalle

$$I = [\bar{X}_n - \epsilon, \bar{X}_n + \epsilon] \quad (27.168)$$

tel que $P(p_A \in I) = 1 - \alpha$. Pour cela nous considérons le fait que $n = 2500$ est grand et nous utilisons la limite de la proposition 27.10 :

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p_A}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.169)$$

La variable aléatoire Z_n est asymptotiquement pivotale et normale centrée réduite. Nous cherchons donc un intervalle symétrique pour $\bar{X}_n - p_A$:

$$1 - \alpha = P(-\epsilon \leq \bar{X}_n - p_A \leq \epsilon), \quad (27.170)$$

c'est à dire, si n est grand,

$$1 - \alpha = P\left(-\epsilon \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \leq Z_n \leq \epsilon \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}}\right) \quad (27.171)$$

où Z_n est une normale centrée réduite. Nous trouvons ainsi, via les tables que

$$\frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} = 1.96 \quad (27.172)$$

si nous voulons un intervalle à 5%. Par conséquent nous avons $\epsilon = 1.96 \frac{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}$ et l'intervalle de confiance est

$$I_C = \left[\bar{X}_n - \frac{1.96 \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{1.96 \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (27.173)$$

La propriété de cet intervalle est que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(p_A \in I_C) = 1 - \alpha. \quad (27.174)$$

Remarque 27.38.

À quel moment avons nous fait une hypothèse sur la taille de la population globale ? En modélisant les sondés par des variables de Bernoulli et leur somme par une binomiale, nous supposons que le sondage est *avec remise*, sinon, elles ne seraient pas indépendantes. En supposant les sondés indépendants, nous avons donc fait comme si la population totale était infinie.

27.7 Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien

Nous supposons avoir une série d'observations issues d'un processus complexe dont nous n'avons aucune idée de la loi parente, et nous voudrions nous faire une idée de la densité de cette loi inconnue.

Nous observons une suite de réalisations que nous modélisons comme étant des variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ de loi parente (inconnue) μ . Notre but est de trouver un estimateur $\hat{\mu}$ de μ . Par simplicité nous allons nous restreindre aux lois admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est à dire que nous allons estimer μ par une suite de lois $\hat{\mu}_n$ qui sont toutes des lois acceptant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

27.7.1 Distance entre des mesures

Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures de densité sur $\mathbb{R}$, la **distance** entre ν_1 et ν_2 est définie par

$$d(\nu_1, \nu_2) = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\nu_1(A) - \nu_2(A)| \quad (27.175)$$

où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.

Théorème 27.39 (de Scheffé[301]).

Si f_1 et f_2 sont les densités de ν_1 et ν_2 par rapport à la mesure de Lebesgue, alors

$$d(\nu_1, \nu_2) = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| = \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|_1 \quad (27.176)$$

où f_+ est la partie positive de f (pour la décomposition $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$).

Démonstration. La dernière égalité est simplement une notation usuelle ; nous devons seulement prouver les deux premières. Pour la première nous commençons par prouver que le borélien réalisant le supremum est

$$B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f_1(x) \geq f_2(x)\}. \quad (27.177)$$

En effet si A est un borélien nous avons

$$\nu_1(A) - \nu_2(A) = \int_A f_1 - f_2 \leq \int_{A \cap B} f_1 - f_2 \leq \int_B f_1 - f_2 = \int_B (f_2 - f_2)_+ = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ \quad (27.178)$$

Justifications :

- $f_1 - f_2$ négative sur $A \cap \complement B$.
- Vu que $f_1 - f_2 \geq 0$ sur B , l'intégrale augmente si on augmente le domaine.
- Sur B nous avons $f_1 - f_2 = (f_1 - f_2)_+$.

Donc pour tout borélien A nous avons

$$d(\nu_1, \nu_2) \leq \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+. \quad (27.179)$$

Mais pour $A = B$ nous avons égalité :

$$\nu_1(B) - \nu_2(B) = \int_B f_1 - f_2 = \int_B (f_1 - f_2)_+ = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+. \quad (27.180)$$

Pour la seconde égalité nous savons que f_1 et f_2 s'intègrent toutes deux à 1 (parce que ce sont des densités de probabilité), donc

$$\int_{\mathbb{R}} f_1 - f_2 = 0. \quad (27.181)$$

En particulier nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ = \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_-, \quad (27.182)$$

ce qui donne bien

$$\int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2)_+ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2|. \quad (27.183)$$

□

27.7.2 Estimateur par fenêtres glissantes

Nous considérons les estimations suivantes de la fonction de répartition :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}, \quad (27.184)$$

et un nombre h_n qui sera la taille de la fenêtre glissante. Nous avons en tête de faire $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$. Nous considérons ceci comme estimateur de la densité inconnue f des variables aléatoires X_i :

$$\hat{f}_n(x) = \frac{F_n(x + h_n) - F_n(x - h_n)}{2h_n}. \quad (27.185)$$

L'idée sous-jacente est de prendre la dérivée de la fonction de répartition comme densité.

Lemme 27.40 ([301]).

Pour tout $h_n > 0$, l'estimateur $\hat{f}_n$ est une densité de probabilité.

Démonstration. D'abord $\hat{f}_n$ est bien à valeurs positives ou nulle. Ensuite devons parler de son intégrale. Pour le numérateur nous avons

$$F_n(x + h_n) - F_n(x - h_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \in B(x, h_n)}. \quad (27.186)$$

En réalité cette égalité est valable seulement presque partout parce qu'elle n'est pas valable en $x = x \pm h_n$, mais cela ne va pas nous ennuyer dans la mesure où nous avons dans l'idée d'intégrer cela sur $\mathbb{R}$. Avant de nous lancer dans l'intégrale nous remarquons que $X_i \in B(x, h_n)$ est la même chose que $x \in B(X_i, h_n)$, c'est à dire que

$$\{X_i \in B(x, h_n)\} = \{x \in B(X_i, h_n)\}. \quad (27.187)$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n = \frac{1}{2h_n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B(X_i, h_n)}}_{2h_n} = \frac{1}{2nh_n} \sum_{i=1}^n 2h_n = 1. \quad (27.188)$$

□

Lemme 27.41 ([301]).

L'estimateur $\hat{f}_n$ est déjà pas mal parce que

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} E(\hat{f}_n(x)) \rightarrow f(x) \quad (27.189)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous commençons par nous rappeler le fait que $F_n(x)$ est un estimateur sans biais de $F(x)$ (proposition 27.31). Donc

$$E(\hat{f}_n(x)) = \frac{F(x + h_n) - F(x - h_n)}{2h_n}. \quad (27.190)$$

Nous devons prendre la limite de cela lorsque $h_n \rightarrow 0$, c'est à dire considérer la dérivée de F . Attention : rien ne dit que F soit dérivable, si ce n'est la proposition 13.186 qui indique qu'elle est dérivable presque partout avec f comme dérivée.

La limite $h_n \rightarrow 0$ dans (27.190) nous donne donc bien presque partout

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} E(\hat{f}_n(x)) = f(x). \quad (27.191)$$

□

Proposition 27.42 ([301]).

Si la suite (h_n) est telle que $h_n \rightarrow 0$ et $nh_n \rightarrow \infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons les convergences

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{L^2(P)} f(x) \quad (27.192)$$

et

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{P} f(x). \quad (27.193)$$

Démonstration. Il faut d'abord comprendre ce que signifie la convergence $L^2(P)$ pour presque tout x . Pour cela il faut comprendre que $\hat{f}_n(x)$ est en soi une variable aléatoire et est en réalité une fonction $\omega \mapsto \hat{f}_n(x, \omega)$. Ce que nous allons montrer est que pour presque tout x (maintenant fixé), cette variable aléatoire converge vers une constante (par rapport à ω) et que cette constante est $f(x)$.

La convergence $X_n \xrightarrow{L^2(P)} X$ signifie $E(|X_n - X|^2) \rightarrow 0$, c'est à dire

$$\int_{\Omega} |X_n(\omega) - X(\omega)|^2 dP(\omega) \rightarrow 0. \quad (27.194)$$

En faisant une décomposition biais-variance nous devons donc étudier

$$E[(\hat{f}_n(x) - f(x))^2] = E[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 + \text{Var}(\hat{f}_n(x) - f(x)) \quad (27.195)$$

Ici $f(x)$ doit être vue comme la variable aléatoire constante sur Ω . Par le lemme 27.41 et la proposition 26.24 le terme de biais converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour traiter le terme de biais, nous savons déjà que

$$2nh_n \hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \in B(x, h_n)\}}, \quad (27.196)$$

où le membre de droite (et donc aussi celui de gauche) est une variable aléatoire binomiale comptant le nombre de succès de l'expérience $X_i \in B(x, h_n)$ en n essais. Nous notons $p_{x,n} = P(X_i \in B(x, h_n))$. Si μ est la loi parente des X_i , alors

$$p_{x,n} = P(X_i \in B(x, h_n)) = \mu(B(x, h_n)) = F(x + h_n) - F(x - h_n) \quad (27.197)$$

où F est la fonction de répartition (parente) des X_i .

Alors la variance de ladite binomiale est donnée par (26.311), c'est à dire $np_{x,n}(1 - p_{x,n})$. Nous avons alors

$$\text{Var}(2nh_n \hat{f}_n(x)) = bp_{x,n}(1 - p_{x,n}) \quad (27.198)$$

et

$$\text{Var}(\hat{f}_n(x)) = \frac{1}{4n^2 h_n^2} np_{x,n}(1 - p_{x,n}). \quad (27.199)$$

Nous pouvons faire la majoration $t(1 - t) \leq t$ qui est valable pour tout t et écrire

$$\text{Var}(\hat{f}_n(x)) \leq \frac{1}{4nh_n} \frac{p_{x,n}}{h_n}. \quad (27.200)$$

Le premier facteur tend vers zéro parce que nous avons supposé que $nh_n \rightarrow \infty$. Pour le second facteur, il faut remarquer que l'expression (27.197) nous donne presque partout

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{p_{n,x}}{h_n} = 2f(x), \quad (27.201)$$

qui est constant et certainement borné.

Nous avons maintenant prouvé que pour presque tout x nous avons $\hat{f}_n(x) \xrightarrow{L^2(P)} f(x)$. Montrons que cela implique la convergence en loi, c'est à dire que pour tout $\eta > 0$, nous avons la limite

$$P(|\hat{f}_n(x) - f(x)| > \eta) \rightarrow 0. \quad (27.202)$$

Si cela n'était pas vrai, nous aurions un nombre $\eta_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que pour tout n à partir d'une certaine taille,

$$P(|\hat{f}_n(x) - f(x)|^2 > \eta_0) > \epsilon, \quad (27.203)$$

et en particulier en notant A l'événement $|\hat{f}_n(x) - f(x)|^2 > \eta_0^2$, $P(A) > \epsilon$. Alors

$$\int_{\Omega} |\hat{f}_n(x, \omega) - f(x, \omega)|^2 dP(\omega) \geq \int_A |\hat{f}_n(x, \omega) - f(x, \omega)|^2 dP(\omega) \geq \int_A \eta_0^2 = \eta_0^2 P(A). \quad (27.204)$$

Cela signifie que

$$\|\hat{f}_n(x) - f(x)\|_{L^2(P)} \geq \eta_0 P(A), \quad (27.205)$$

ce qui contredit la première convergence démontrée. $\square$

Note : l'hypothèse $nh_n \rightarrow \infty$ revient à dire que nous voulons que chaque boîte contienne de plus en plus d'observations. Si nous avons $nh_n \rightarrow 0$, alors avec n qui augmente, la majorité des boîtes deviendraient vides, ce qui reviendrait à une perte d'information.

27.8 Test d'hypothèses, prise de décision

27.8.1 Exemple : qualité des pièces d'usine

Une usine fabrique des composantes électronique garantis un an. Le constructeur ne veut pas accepter que plus de 5% des pièces tombent en panne avant un an.

Nous supposons que la durée de vie T d'une pièce soit une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (qui est l'inverse de la moyenne : $\theta = 1/\lambda$). Le fabricant veut donc s'assurer que

$$0.95 \leq P(T \geq 1), \quad (27.206)$$

ou encore

$$P(T \geq 1) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = e^{-1/\theta} \geq 0.95, \quad (27.207)$$

donc le fabricant doit s'assurer que

$$\theta \geq \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{0.95}\right)}. \quad (27.208)$$

Nous posons donc $\theta_0 = 19.5$ et nous prenons comme modèle de décision que si $\theta < \theta_0$, alors la chaîne de production doit être revue, et si $\theta > \theta_0$, alors l'usine peut continuer son travail.

Ce dont nous disposons n'est pas de θ , mais d'une estimation de θ à partir d'un échantillon. Cela étant il faudra aussi pouvoir estimer la probabilité de faire un mauvais choix.

27.8.2 Exemple : la résistance d'un fil

Un artisan a besoin d'un fil qui a une résistance à une traction de 100 g en moyenne. Si la résistance est trop faible, le fil casse ; si elle est trop grande, c'est trop rigide et ça ne convient pas.

Remarque 27.43.

Dans l'exemple précédent, avoir $\theta > \theta_0$ ne dérange pas. Si la durée de vie moyenne est de 2 ans, le directeur de l'usine ne sera pas malheureux. Ici par contre l'artisan cherche une valeur précise et a donc une borne vers le haut et vers le bas.

L'artisan reçoit un lot de fils et souhaite savoir si il est conforme. Pour cela, il prend 4 fils au hasard et mesure une moyenne de 112 g. Est-ce que cela est cohérent avec une moyenne de 100 g ?

Nous faisons l'hypothèse que la résistance des fils suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m inconnu. Pour la simplicité nous supposons que σ est connu et vaut 10.

Nous devons prendre une décision entre deux hypothèses. L'hypothèse H_0 sera de dire que le lot a une résistance de 100 g et l'hypothèse alternative sera que le lot a une résistance différente.

Les 4 observations sont quatre variables aléatoires $(X_i)_{i=1,2,3,4}$, et le nombre 112 est une réalisation de la variable aléatoire

$$\bar{X}_4 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4). \quad (27.209)$$

Nous supposons que H_0 est vraie, et nous calculons quelle est l'intervalle autour de $m = 100$ qui a 95% de chances de contenir la moyenne observée. Si 112 est dedans, nous acceptons H_0 et si 112 est hors de cet intervalle, nous refusons H_0 .

Compte tenue de l'hypothèse H_0 , nous avons

$$\frac{\bar{X}_4 - 100}{\frac{10}{\sqrt{4}}} = \frac{\bar{X}_4 - 100}{5} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.210)$$

Nous commençons à connaître par cœur l'intervalle de confiance à 95% d'une loi normale centrée réduite; le quantile est à 1.96, c'est à dire

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}_4 - 100}{5} \leq 1.96\right) = 0.95, \quad (27.211)$$

ou encore

$$P(\bar{X}_4 \in [90.2, 109.8]). \quad (27.212)$$

Il y a donc moins de 5% de chances que la moyenne de ces quatre fils tombent en dehors de l'intervalle $[90.2, 109.8]$. L'artisan doit donc rejeter l'hypothèse et considérer que le lot est mauvais.

La région

$$]-\infty, 90.2] \cup [109.8, \infty[\quad (27.213)$$

est la **région de rejet**, ou **région critique**.

Ici, le nombre 5% représente le risque de refuser H_0 alors qu'elle était vraie. Notons que nous ne pouvons pas calculer le risque d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse. En effet, si H_0 est fausse, nous ne savons pas quelles sont les valeurs de $\bar{X}_4$ acceptables parce qu'il y a une infinité de possibilités pour m qui soient alternatifs à $m = 100$.

Évidemment si la vraie moyenne est $100 + 10^{-7}$, l'hypothèse H_0 sera acceptée, mais nous n'avons aucun moyen de savoir si elle est vraie ou non.

27.8.3 Vocabulaire et théorie

Nous avons un modèle d'échantillonnage paramétrique $(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ de taille n et de paramètre inconnu θ , de loi parente μ_θ appartenant à une famille paramétrique de lois $(\mu_\theta)_{\theta \in \Theta}$.

Soient H_0 et H_1 deux ensembles disjoints tels que $\Theta = H_0 \cup H_1$. L'ensemble H_0 sera nommé **hypothèse nulle** et l'ensemble H_1 sera l'**hypothèse alternative**.

Pour l'exemple des fils, nous avons $H_0 = \{100\}$ et $H_1 = \mathbb{R} \setminus \{100\}$. Si une hypothèse est réduite à un singleton, nous parlons d'hypothèse **simple** et sinon c'est une hypothèse **composite** ou **multiple**. Faire un tests consiste à déterminer une région critique.

Définition 27.44.

Un **test** est une application mesurable δ qui à $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe

$$\delta(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}. \quad (27.214)$$

Si $\delta(x_1, \dots, x_n) = 0$ on accepte l'hypothèse H_0 pour l'échantillon $x_1, \dots, x_n$, et si $\delta(x_1, \dots, x_n) = 1$, alors on rejette H_0 et on choisit H_1 . L'ensemble

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \delta(x_1, \dots, x_n) = 1\} \quad (27.215)$$

est la **région de rejet** ou la **région critique**.

L'ensemble $W = \delta^{-1}(1)$ est un borélien de $\mathbb{R}^n$ parce que δ est mesurable. L'événement auquel nous sommes intéressé est l'événement

$$R = \{(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}) \in W\}. \quad (27.216)$$

Exemple 27.45

Pour l'exemple de 27.8.2 nous avons

$$\delta(x_1, \dots, x_4) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}[90.2, 109.8]}(\bar{x}_4). \quad (27.217)$$

△

27.8.4 Risque de première et seconde espèce

Le modèle de décision que nous avons introduit comprend deux façons de se tromper. Soit nous rejetons H_0 alors qu'elle est vraie (c'est le **risque de première espèce**), soit nous acceptons H_0 alors qu'elle est fausse (risque de **seconde espèce**). Nous pouvons formaliser ces concepts de la façon suivante.

Nous considérons un test de région critique W . Le risque de première espèce, noté α est la fonction

$$\begin{aligned}\alpha: H_0 &\rightarrow [0, 1] \\ \theta &\mapsto P((X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}) \in W).\end{aligned}\quad (27.218)$$

Il s'agit de la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie. Le risque de seconde espèce est la fonction

$$\begin{aligned}\beta: H_1 &\rightarrow [0, 1] \\ \theta &\mapsto P((X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}) \notin W).\end{aligned}\quad (27.219)$$

C'est la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse.

Définition 27.46.

Soit δ un test de région critique W . La **puissance** du test est la fonction

$$\begin{aligned}\eta: H_1 &\rightarrow [0, 1] \\ \theta &\mapsto P((X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}) \in W).\end{aligned}\quad (27.220)$$

La **courbe d'efficacité** du test est la fonction

$$\begin{aligned}h: \Theta &\rightarrow [0, 1] \\ \theta &\mapsto P((X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n}) \notin W).\end{aligned}\quad (27.221)$$

La puissance d'un test est la probabilité de rejeter H_0 lorsque H_1 est vraie. Plus la puissance est grande, mieux c'est. La courbe d'efficacité du test est la probabilité d'accepter H_0 pour une certaine valeur de θ .

Soit un test δ . Une statistique $T_\theta = T_n(X_{\theta,1}, \dots, X_{\theta,n})$ est une **variable de décision** pour δ si $\mathbb{C}W$ peut s'écrire d'une des façons suivantes

$$\mathbb{C}W = \begin{cases} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T_n(x_1, \dots, x_n) < c\} & \text{test unilatéral à droite} \\ \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T_n(x_1, \dots, x_n) > c\} & \text{test unilatéral à gauche} \\ \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } c_1 \leq T_n(x_1, \dots, x_n) < c_2\} & \text{test bilatéral.} \end{cases} \quad (27.222)$$

Le plus souvent la variable de décision sera la moyenne : $T_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Les valeurs c, c_1, c_2 sont des **valeurs critiques**.

En ce qui concerne les notations, ici T_n représente la valeur mesurée sur un n -échantillon (d'où l'indice n) alors que T_θ est la valeur *théorique* de T lorsque θ est la vraie valeur du paramètre qu'on veut estimer.

Pour un test unilatéral à gauche, nous fixons la valeur critique c de telle manière à avoir

$$P(T_\theta > c) \leq \alpha. \quad (27.223)$$

Pour un test unilatéral à droite, nous fixons c de telle manière à avoir

$$P(T_\theta < c) \leq \alpha \quad (27.224)$$

et pour un test bilatéral nous fixons c_1 et c_2 de telle façon à avoir

$$P(T_\theta > c_2) = P(T_\theta < c_1) \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (27.225)$$

27.8.5 Modèle paramétrique de loi gaussienne

Soit un modèle statistique paramétrique de lois gaussiennes $\mathcal{N}(m, 1)$ de moyenne m inconnue avec $m \in \mathbb{R}^+$. Nous avons $\Theta = [0, \infty[$.

Nous observons un échantillon de taille $n = 36$. Avec un risque de première espèce de 5% nous voulons estimer l'hypothèse $H_0 = \{0\}$ contre l'hypothèse $H_1 =]0, \infty[$. De notre échantillon nous construisons la variable aléatoire

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (27.226)$$

dans laquelle les X_i sont les éléments de l'échantillon, elles sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(m, 1)$ avec m inconnu.

Si $\bar{X}_n$ est proche de zéro nous acceptons H_0 , sinon nous la rejetons. La région de rejet s'écrit donc sous la forme

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i > u\} \quad (27.227)$$

dans lequel il faut fixer le u pour satisfaire au risque de première espèce de 5%. La contrainte est d'avoir

$$P(\bar{X}_n > u) = \alpha \quad (27.228)$$

si H_0 est vérifiée. Cela revient à dire que dans 5% des cas où H_0 est correcte, nous la rejeterons. Si H_0 est vraie alors $\bar{X}_n$ est une moyenne de gaussiennes de moyennes m et nous avons

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (27.229)$$

avec $m = 0$ et $\sigma = 1$. L'équation (27.228) devient donc

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X}_n}{1/\sqrt{n}} > \frac{u}{1/\sqrt{n}}\right) = P(T > \sqrt{n}u) \quad (27.230)$$

où $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Avec $n = 36$ et $\alpha = 5\%$ nous trouvons

$$u = \frac{1.645}{6} \simeq 0.274 \quad (27.231)$$

La règle de décision est donc la suivante : si $\bar{x}_n > 0.274$ alors nous rejetons H_0 , et sinon nous l'acceptons.

Calculons la puissance de ce test (définition 27.46). C'est la fonction donnée par

$$\begin{aligned} \eta: H_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ m &\mapsto P((X_{1,m}, \dots, X_{n,m}) \in W) = P\left(\frac{1}{n} \sum X_i > u\right). \end{aligned} \quad (27.232)$$

Dans ce calcul, les X_i sont d'une loi normale $\mathcal{N}(m, 1)$, et non $\mathcal{N}(0, 1)$. En retranchant m et en divisant par $1/\sqrt{n}$ nous trouvons

$$\eta(m) = P\left(\frac{\frac{1}{n} \sum X_i - m}{1/\sqrt{n}} > \frac{u - m}{1/\sqrt{n}}\right) \quad (27.233a)$$

$$= P(T > \sqrt{n}(u - m)) \quad (27.233b)$$

$$= P(T > 16.45 - 6m) \quad (27.233c)$$

$$= 1 - \Phi(16.45 - 6m) \quad (27.233d)$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$. La fonction η a les propriétés suivantes :

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \eta(m) = 0 \quad (27.234a)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \eta(m) = 1 \quad (27.234b)$$

$$\eta(0) = \frac{5}{100}. \quad (27.234c)$$

Remarque 27.47.

Si nous regardons $m = 0.001$, le risque de seconde espèce est quasiment de 90%. En effet le risque de seconde espèce est d'accepter H_0 alors qu'il est faux. Lorsque $m = 0.001$, l'hypothèse H_0 est fautive, mais la probabilité qu'on l'accepte est grande. D'ailleurs les conséquences de l'accepter à tort ne sont peut-être pas si grandes que cela.

27.9 Tests paramétriques

La proposition suivante montre le lien entre région de confiance et les tests.

Proposition 27.48.

Soit $\Lambda(X_1, \dots, X_n)$ une région de confiance par excès de niveau de confiance $1 - \alpha$. Alors il existe un tests pur de niveau α pour tester $H_0 = \{\theta_0\}$ de région de rejet

$$W_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \theta_0 \notin \Lambda(x_1, \dots, x_n)\}. \quad (27.235)$$

Démonstration. L'hypothèse sur Λ signifie qu'avec les observations $(X_1, \dots, X_n)$, il y a une forte probabilité (plus grande que $1 - \alpha$) que θ soit dans $\Lambda(X_1, \dots, X_n)$. Avec ou sans H_0 nous avons donc

$$P(\theta \in \Lambda) \geq 1 - \alpha. \quad (27.236)$$

Supposons maintenant l'hypothèse H_0 , alors

$$P((X_1, \dots, X_n) \in W_n) = P(\theta_0 \notin \Lambda(X_1, \dots, X_n)) \leq \alpha. \quad (27.237)$$

□

Remarque 27.49.

Soit W_n la région de confiance d'un test de niveau α pour tester $H_0 = \{\theta_0\}$. Alors

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x \notin W_n\} \quad (27.238)$$

est une région de confiance $1 - \alpha$ pour θ .

Exercice 8

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi parente $\mathcal{N}(\theta, 1)$ avec $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$. Nous supposons $\theta_0 < \theta_1$. Nous voulons tester $H_0 = \{\theta_0\}$ contre $H_1 = \{\theta_1\}$. Nous proposons le test suivant. La variable de décision sera $\bar{X}_n$ et la région de rejet sera

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \frac{1}{n} \sum_i x_i > \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\}. \quad (27.239)$$

- (1) Donner le risque de première espèce de ce test.
- (2) Soit $0 < \alpha < 1$. Pour quelle valeur de n le tests a-t-il un risque de première espèce égal à α ?
- (3) Donner la puissance du test.

Le réponses peuvent être exprimées en termes de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite.

Correction de l'exercice 8

Le risque de première espèce est donné par

$$\alpha = P\left(\frac{1}{n} \sum_i X_i > \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) \quad (27.240)$$

où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi parente $\mathcal{N}(\theta_0, 1)$. Cela est la probabilité d'être dans la région de rejet alors que l'hypothèse H_0 est vraie. La formule (27.240) se transforme en

$$\alpha = P\left(\frac{\frac{1}{n} \sum X_i - \theta_0}{1/\sqrt{n}} > \frac{\frac{\theta_0 + \theta_1}{2} - \theta_0}{1/\sqrt{n}}\right) \quad (27.241a)$$

$$= P(T > \sqrt{n} \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}). \quad (27.241b)$$

En termes de la fonction de répartition nous avons alors

$$\alpha = 1 - F\left(\sqrt{n} \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\right) \quad (27.242)$$

Il s'agit maintenant de trouver le nombre n qui réalise cette égalité. Pour cela nous utilisons l'inverse F^{-1} de la fonction de répartition de la normale :

$$n = \left(\frac{2}{\theta_1 - \theta_0} F^{-1}(1 - \alpha)\right)^2. \quad (27.243)$$

Le risque de seconde espèce est la possibilité d'accepter H_0 lorsque H_1 est vraie, c'est à dire

$$\beta = P\left(\frac{1}{n} \sum_i X_i < \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) \quad (27.244)$$

sous l'hypothèse H_1 . Dans le calcul de (27.244) nous prenons donc $X_i \sim \mathcal{N}(\theta_1, 1)$. Le résultat est que

$$\beta = F\left(\sqrt{n} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}\right). \quad (27.245)$$

Remarque 27.50.

L'expression (27.243) diminue lorsque θ_0 et θ_1 s'éloignent, ce qui est normal : plus les nombres à discerner sont éloignés, moins l'échantillon à prendre pour réaliser le travail doit être grand.

Notons aussi que $\theta_0 - \theta_1 < 0$, par conséquent augmenter n diminue la valeur de

$$\beta = F\left(\sqrt{n} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}\right) \quad (27.246)$$

27.10 Tests d'adéquation

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi parente X finie prenant ses valeurs dans $\{a_1, \dots, a_k\}$. La loi de X est donnée par les nombres

$$p_i = P(X = a_i) \quad (27.247)$$

pour $i = 1, \dots, k$. Nous introduisons l'**effectif empirique**, la variable aléatoire N_i qui compte le nombre de fois que a_i est observé dans l'échantillon. La **fréquence empirique** est la variable aléatoire

$$F_i = \frac{N_i}{n}. \quad (27.248)$$

Nous savons que la loi de N_i est $\mathcal{B}(n, p_i)$, et la loi des grands nombres dit que

$$F_i \xrightarrow{p.s.} p_i \quad (27.249)$$

pour chaque i . Le théorème central limite nous indique de plus que

$$\frac{N_i - np_i}{\sqrt{np_i(1 - p_i)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} T \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.250)$$

Nous considérons un cas où les p_i sont inconnus. Ils peuvent être approchés par $N_i \simeq np_i$. Le théorème de Pearson nous indique comment.

Théorème 27.51 (Théorème de Pearson).

Nous avons

$$\sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow{\mathcal{L}} K \sim \chi^2(k-1) \quad (27.251)$$

où la distribution $\chi^2(l)$ est la somme des carrés de l gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Démonstration. Nous commençons par le cas $k = 2$. Dans ce cas nous avons $N_2 = n - N_1$ et $p_1 + p_2 = 1$. La sommes que nous regardons est

$$\frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_1 - np_1)^2}{n(1 - p_1)} \quad (27.252a)$$

$$= \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1(1 - p_1)}. \quad (27.252b)$$

Étant donné que N_1 est une variable aléatoire binomiale nous avons

$$\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} T \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (27.253)$$

Par conséquent la limite de (27.252b) est

$$\left(\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}} \right)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} T^2 \simeq \chi^2(1). \quad (27.254)$$

Cela conclut le cas $k = 2$.

Passons à présent au cas général. Le k -uplet $(N_1, \dots, N_k)$ est une variable aléatoire multinomiale de loi

$$\mathcal{M}(n; k; p_1, \dots, p_k). \quad (27.255)$$

Nous introduisons les variables aléatoires U_i données par $U_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ avec

$$P(U_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)) = p_i; \quad (27.256)$$

c'est le vecteur aléatoire qui prend ses valeurs dans les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^k$ et qui prend la valeur e_i avec probabilité p_i . Par construction nous avons

$$(N_1, \dots, N_k) = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (27.257)$$

Nous allons étudier la fonction caractéristique de $(N_1, \dots, N_k)$ définie par l'équation (26.185) :

$$\begin{aligned} \Phi_{(N_1, \dots, N_k)}: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{C} \\ e_j &\mapsto E(e^{ie_j \cdot N}) = E(e^{iN_j}). \end{aligned} \quad (27.258)$$

Plus généralement,

$$\Phi_{(N_1, \dots, N_k)}(t_1, \dots, t_k) = E(e^{i\langle t, N \rangle_{\mathbb{R}^k}}). \quad (27.259)$$

Nous avons

$$e^{i\langle t, N \rangle} = e^{i\sum_j \langle t, U_j \rangle} = \prod_j e^{i\langle t, U_j \rangle} \quad (27.260)$$

et vu que les U_i sont indépendantes et identiquement distribuées nous pouvons écrire U_1 à la place de U_j de façon à avoir

$$\Phi_{(N_1, \dots, N_k)}(t_1, \dots, t_k) = \prod_j E(e^{i\langle t, U_1 \rangle}) \quad (27.261a)$$

$$= \prod_j \sum_l p_l e^{i\langle t, e_l \rangle} \quad (27.261b)$$

$$= \prod_j \sum_l p_l e^{it_l} \quad (27.261c)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^k p_l e^{it_l} \right)^n. \quad (27.261d)$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{(N_1, \dots, N_n)}(t_1, \dots, t_k) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n t_j^2} - \left(\sum_{j=1}^k t_j \sqrt{p_j} \right)^2. \quad (27.262)$$

Pour ce faire, nous allons effectuer un développement limité. D'abord nous introduisons les variables aléatoires

$$\alpha_j = \frac{N_j - np_j}{\sqrt{np_j}} \quad (27.263)$$

et nous calculons

$$\Phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(t_1, \dots, t_k) = E \left[\exp \left(i \langle t, \left(\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1}}, \dots, \frac{N_k - np_k}{\sqrt{np_k}} \right) \rangle \right) \right] \quad (27.264)$$

Étant donné que n et p_j sont des variables déterministes, nous pouvons les sortir de l'espérance. Nous avons alors

$$\Phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(t_1, \dots, t_k) = \exp \left(-i \sum_{j=1}^k t_j \sqrt{np_j} \right) \Phi_{(N_1, \dots, N_k)} \left(\frac{t_1}{\sqrt{np_1}}, \dots, \frac{t_k}{\sqrt{np_k}} \right) \quad (27.265)$$

parce que

$$E \left(e^{t_j \frac{N_j - np_j}{\sqrt{np_j}}} \right) = e^{\frac{-t_j np_j}{\sqrt{np_j}}} E \left(e^{t_j N_j / \sqrt{np_j}} \right) \quad (27.266)$$

En remplaçant (27.261) dans (27.265) nous trouvons

$$\Phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(t_1, \dots, t_k) = \exp \left(-i \sum_{j=1}^k t_j \sqrt{np_j} \right) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^k p_j e^{i \frac{t_j}{\sqrt{np_j}}} \right)^n}_A \quad (27.267)$$

Nous analysons maintenant le terme A . Nous écrivons l'égalité $A = A + 1 - 1$ en tenant compte de $\sum_j p_j = 1$ sous la forme

$$A = \left(1 + \sum_{j=1}^k p_j (\exp(it_j / \sqrt{np_j}) - 1) \right)^n, \quad (27.268)$$

Nous avons alors

$$\ln(A) = n \ln \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j (e^{it_j / \sqrt{np_j}} - 1) \right] \quad (27.269)$$

Nous développons l'exponentielle en

$$e^{it_j / \sqrt{np_j}} - 1 = \frac{it_j}{\sqrt{np_j}} - \frac{t_j^2}{2np_j} + \frac{1}{n} \epsilon(1/n) \quad (27.270)$$

et ensuite le logarithme selon la formule

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \alpha(x^2). \quad (27.271)$$

Nous avons

$$\ln(A) = n \ln \left[1 + \sum_j p_j \left(\frac{it_j}{\sqrt{np_j}} - \frac{t_j^2}{2np_j} + \frac{1}{n} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \quad (27.272a)$$

$$= n \ln \left[1 + \sum_j p_j \left(it_j \sqrt{\frac{p_j}{n}} - \frac{t_j^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \quad (27.272b)$$

$$= n \sum_{j=1}^k \underbrace{\left(it_j \sqrt{\frac{p_j}{n}} - \frac{t_j^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon(1/n) \right)}_K \quad (27.272c)$$

$$- n \frac{1}{2} \left[\sum_j \left(it_j \sqrt{\frac{p_j}{n}} - \frac{t_j^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon(1/n) \right)^2 \right] \quad (27.272d)$$

$$+ nK^2\alpha(K) \quad (27.272e)$$

Nous introduisons dans ϵ tous les termes en $1/n^2$ et nous trouvons

$$\ln(A) = \sum_j \left(it_j \sqrt{p_j n} - \frac{t_j^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_j it_j \sqrt{p_j} \right)^2 + \epsilon(1/n) + K^2\alpha(K). \quad (27.273)$$

En remplaçant dans (27.267) et en passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$,

$$\Phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(t_1, \dots, t_k) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_j t_j^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_j t_j \sqrt{p_j} \right)^2 \right). \quad (27.274)$$

Nous reconnaissons des lois gaussiennes dans le premier terme de l'exponentielle. Nous allons maintenant nous atteler à identifier le second terme.

Soit C une matrice orthogonale dont la dernière ligne est $(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})$. Nous considérons les vecteurs

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}. \quad (27.275)$$

et ensuite nous notons

$$U = Ct = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}. \quad (27.276)$$

Étant donné que C est orthogonale, nous avons $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^k \beta_i^2$ et

$$\Phi_{(\beta_1, \dots, \beta_k)} = E(e^{i\langle u, \beta \rangle}) = E(e^{i\langle t, \alpha \rangle}) = \Phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(t_1, \dots, t_k). \quad (27.277)$$

Nous pouvons récrire l'argument de l'exponentielle (27.274) de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^k t_j^2 = \sum_j u_j^2 \quad (27.278a)$$

$$\sum_{j=1}^k t_j \sqrt{p_j} = (Ct)_k, \quad (27.278b)$$

Nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{(\beta_1, \dots, \beta_k)}(t_1, \dots, t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}(u_1, \dots, u_k) \quad (27.279a)$$

$$= \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} u_j^2 \right) \quad (27.279b)$$

$$= \Phi_{(Z_1, \dots, Z_{k-1}, 0)}(u_1, \dots, u_k) \quad (27.279c)$$

où les Z_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de distribution normale centrée réduite. Nous avons donc montré que

$$(\beta_1, \dots, \beta_k) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Z_1, \dots, Z_{k-1}, 0). \quad (27.280)$$

Étant donné que l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est continue, nous avons aussi

$$\|(\beta_1, \dots, \beta_k)\|^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \|(Z_1, \dots, Z_{k-1}, 0)\|^2, \quad (27.281)$$

et par conséquent

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{j=1}^{k-1} Z_j^2 \sim \chi^2(k-1). \quad (27.282)$$

D'après la définition (27.263) nous avons

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - p_j)^2}{np_j}. \quad (27.283)$$

□

Chapitre 28

Chaînes de Markov à temps discret

Mets tes deux pieds en canard, c'est la chaîne de Markov qui se prépare.

28.1 Généralités

Les chaînes de Markov interviennent pour la description des systèmes dont l'évolution future ne dépend que de l'état présent.

Définition 28.1.

Soit E un ensemble au plus dénombrable et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Une **chaîne de Markov** à valeurs dans E est une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires telles que pour tout $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$,

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \quad (28.1)$$

Pour une chaîne de Markov, il n'est pas important de savoir l'historique pour prédire la futur : X_{n+1} est seulement déterminé par X_n .

Remarque 28.2.

Il existe une théorie des chaînes de Markov à temps continu ou avec E non dénombrable, mais ce n'est pas au programme.

Nous notons

$$p_n(x, y) = P(X_{n+1} = y | X_n = x) \quad (28.2)$$

la **probabilité de transition** de la chaîne à l'instant n . Si cette probabilité ne dépend pas de n , nous disons que la chaîne de Markov est **homogène**, et nous notons $p(x, y)$ au lieu de $p_n(x, y)$. Nous notons Q la matrice (éventuellement infinie) de transition

$$Q_{xy} = p(x, y). \quad (28.3)$$

Nous avons

$$\sum_{y \in E} p(x, y) = 1 \quad (28.4)$$

parce que c'est la somme de toutes les transitions possibles en partant de x . Notons aussi que $p(x, y) \geq 0$.

Définition 28.3.

Une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls et donc la somme de toutes les lignes sont 1 est une **matrice stochastique**.

Notons que l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé dans l'ensemble des matrices.

Lemme 28.4.

Si U est une matrice stochastique¹, alors il existe une chaîne de Markov dont la matrice de transition est U .

Remarque 28.5.

La somme $\sum_{x \in E} p(x, y)$ ne vaut pas spécialement 1. Si les états x_1 et x_2 arrivent tous les deux en y de façon certaine, alors nous avons $\sum_x p(x, y) \geq 2$. Il n'y a donc pas de limites aux sommes des colonnes.

Exemple 28.6

Nous considérons une fourmi qui se déplace dans un appartement à trois pièces A, B, C . Supposons qu'à chaque minute, elle a une probabilité $1/3$ de rester dans la pièce et une probabilité $2/3$ de se déplacer. Le plan de l'appartement est

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \quad (28.5)$$

De la pièce A est donc uniquement possible d'aller vers la pièce B ; de la B il est possible d'aller en A et en C et de la C il est uniquement possible d'aller en B .

La matrice de transition de cette chaîne de Markov est

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (28.6)$$

△

Exemple 28.7

Si N_t est un processus de Poisson, alors les variables aléatoires $X_n = N_n$ forment une chaîne de Markov. △

28.2 Chaînes de Markov sur un ensemble fini

Une chaîne de Markov est **finie** si l'ensemble E dans lequel elle prend ses valeurs est fini.

Proposition 28.8 ([302]).

Si (X_n) est une chaîne de Markov irréductible sur un ensemble fini, alors pour tout ensemble $A \subset E$ nous avons

$$P(\tau_A < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau_A \leq n) = 1 \quad (28.7)$$

où $\tau_A = \min\{k \text{ tel que } X_k \in A\}$.

Les proposition à venir vont montrer que

- (1) Toute matrice stochastique admet un état stationnaire, proposition 28.9.
- (2) Si la chaîne de Markov est irréductible, alors il y a unicité de l'état stationnaire, proposition 28.10. Mais attention : cela ne veut pas encore dire que la chaîne converge effectivement vers cet état.
- (3) Si la chaîne est irréductible et apériodique, alors il y a convergence en loi vers l'unique loi invariante, théorème 28.13.

Proposition 28.9 ([303]).

Toute matrice stochastique admet un état stationnaire.

1. Définition 28.3.

Proposition 28.10 ([303]).

Soit une chaîne de Markov irréductible finie. Alors il existe une unique loi stationnaire π et de plus nous avons $\pi_i > 0$ pour tout état i de E .

Définition 28.11.

Une chaîne de Markov finie est **régulière** si il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que P^n a uniquement des éléments strictement positifs.

Théorème 28.12 ([302]).

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière sur un ensemble E de cardinal N . Alors il existe des nombres $\pi_1, \dots, \pi_N$ tels que

$$(1) \pi_i > 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, N$$

$$(2) \pi_1 + \dots + \pi_N = 1$$

$$(3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} \quad (28.8)$$

De plus le vecteur $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ est l'unique solution de

$$\pi P = \pi. \quad (28.9)$$

Démonstration. Si la chaîne n'a qu'un seul état c'est évident parce que la probabilité de transition est toujours 1 ; fin de l'histoire.

Hypothèse Sinon nous supposons que P n'a que des éléments positifs, quitte à considérer P^n au lieu de P . Nous notons d le plus petit élément de P ; il vérifie $d \leq \frac{1}{2}$ parce que la somme des éléments d'une ligne de la matrice P doit être égale à 1.

Les suites min et max Soit x un vecteur quelconque (de composantes positives). Nous notons $m_0 = \min\{x_i\}$ et $M_0 = \max\{x_i\}$. Étant donné que les éléments du vecteur Px sont des moyennes pondérées des éléments de x , si nous posons

$$m_k = \min\{(P^k x)_i\}_{i=1, \dots, N} \quad (28.10a)$$

$$M_k = \max\{(P^k x)_i\}_{i=1, \dots, N}, \quad (28.10b)$$

la suite (m_k) est croissante et la suite (M_k) est décroissante.

Stricte croissance et décroissance Si $M_{k+1} = M_k$, alors toutes les composantes de $P^k x$ sont égales à M_k et le théorème est prouvé. Cela est encore une propriété de la moyenne. Même remarque pour la suite (m_k) .

Nous pouvons donc supposer que la suite (m_k) est strictement croissante et que la suite (M_k) est strictement décroissante. Elles sont toutes les deux bornées dans $[m_0, M_0]$. Le lemme 5.75 nous donne la convergence.

Égalité des limites Vu que les éléments de $P^k x$ ne sont pas tous les mêmes et s'étalent de m_k à M_k , pour majorer M_{k+1} nous mettons le plus petit coefficient possible (c'est à dire d) devant m_k et nous supposons que toutes les autres composantes sont M_k ; nous avons alors

$$M_{k+1} \leq dm_k + (1-d)M_k \quad (28.11)$$

parce que tous les autres coefficients de la ligne contenant le d (dans P^k) sont plus petits ou égaux à $1-d$. De la même façon nous avons la minoration

$$m_{k+1} \geq dM_k + (1-d)m_k. \quad (28.12)$$

En faisant la différence, et en nous souvenant que $0 < 1-2d < 1$,

$$M_{k+1} - m_k \leq (1-2d)(M_k - m_k), \quad (28.13)$$

ce qui signifie que

$$M_{k+1} - m_k \leq (1 - 2d)^k (M_0 - m_0), \quad (28.14)$$

et donc que les deux limites sont égales.

Conclusion pour la limite Pour tout vecteur x , la suite $P^k x$ tend vers un vecteur dont toutes les composantes sont égales. En particulier pour le vecteur e_i de la base canonique,

$$P^k e_i \rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_1 \end{pmatrix}. \quad (28.15)$$

Mais $P^k e_i$ est la i^{e} colonne de la matrice P^k . Cela prouve la convergence annoncée $P^k \rightarrow \Pi$.

Réglons rapidement le cas des deux autres allégations du théorème. D'abord les matrices P^k sont toutes des matrices stochastiques; et l'ensemble des matrices stochastiques est fermé, donc la convergence se fait à l'intérieur de l'ensemble des matrices stochastiques. Cela prouve que $\pi_1 + \dots + \pi_N = 1$.

Ensuite la suite (m_k) étant strictement croissante et m_0 étant égal à 0 dans le cas de e_i nous avons toujours $\pi_i > 0$ (strictement). $\square$

Théorème 28.13 ([303]).

Si (X_n) est une chaîne de Markov finie, irréductible et apériodique de loi stationnaire π , alors

(1) La suite de matrices stochastiques P^k converge vers la matrice

$$P^k \rightarrow \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (28.16)$$

(2) Nous avons convergence des variables aléatoires au sens où

$$P(X_k = \mu P^k) \rightarrow \pi. \quad (28.17)$$

28.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées valant -1 avec une probabilité p et 1 avec une probabilité $(1 - p)$. La loi est

$$Y_n \sim p\delta_{-1} + (1 - p)\delta_1. \quad (28.18)$$

Nous considérons la variable aléatoire

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n Y_i \quad (28.19)$$

où X_0 est une variable aléatoire indépendante des Y_i à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous vérifions à présent que X_n est une chaîne de Markov avec comme espace d'états $E = \mathbb{Z}$. Nous devons montrer que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \quad (28.20)$$

Pour ce faire nous allons exprimer tout cela en termes des Y_i au lieu des X_i . D'abord étant donné que nous avons égalité des événements

$$\{X_{n+1} = x_{n+1}\} \cap \{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\} = \{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \cap \{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\}, \quad (28.21)$$

nous pouvons, en vertu du principe (26.76), remplacer $X_{n+1} = x_{n+1}$ par $Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ dans le membre de gauche de (28.20). Nous avons donc déjà

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(\underbrace{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n}_A | \underbrace{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0}_B). \quad (28.22)$$

L'événement B est égal à l'événement

$$\{X_0 = x_0, Y_1 = x_1 - x_0, Y_2 = x_2 - x_1, \dots, Y_n = x_n - x_{n-1}\}, \quad (28.23)$$

qui n'est autre que l'ensemble

$$X_0^{-1}(x_0) \cap Y_1^{-1}(x_1 - x_0) \cap \dots \cap Y_n^{-1}(x_n - x_{n-1}) \quad (28.24)$$

qui est dans la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_0, (Y_i)_{i=1, \dots, n}$. Le point délicat du raisonnement est de montrer que les événements A et B donnés par

$$A = \{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \quad (28.25a)$$

$$B = \{X_0 = x_0\} \cap \bigcap_{i=1}^n \{Y_i = x_i - x_{i-1}\} \quad (28.25b)$$

sont indépendants. Nous ne pouvons pas montrer directement que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ parce que cela est la formule que nous voulons utiliser pour montrer que la chaîne est de Markov. Nous passons donc par les tribus :

$$A \in \sigma(Y_{n+1}) \quad (28.26a)$$

$$B \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n). \quad (28.26b)$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires X_0 et Y_i pour conclure que les deux tribus des équations (28.26) sont indépendantes. Les événements A et B sont par conséquent indépendants.

L'événement A est indépendant de l'événement $\{X_n = x_n\}$. Nous avons donc successivement

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \quad (28.27a)$$

$$= P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | Y_i = x_i - x_{i-1}, X_0 = x_0) \quad (28.27b)$$

$$= P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n) \quad (28.27c)$$

$$= P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n | X_n = x_n) \quad (28.27d)$$

$$= P(Y_{n+1} = x_{n+1} - X_n | X_n = x_n) \quad (28.27e)$$

$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \quad (28.27f)$$

Justifications :

— (28.27c) parce que les tribus $\sigma(Y_{n+1})$ et $\sigma(Y_i, X_0)$ sont indépendantes.

— (28.27d) Nous avons

$$\{X_n = x_n\} \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n) \quad (28.28)$$

tandis que

$$\{Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} \in \sigma(Y_{n+1}); \quad (28.29)$$

ce sont donc deux événements issus de tribus indépendantes. Donc conditionner ou non l'événement $Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ à l'événement $X_n = x_n$ ne change rien.

— (28.27e) est encore l'utilisation du fait que $P(A|B) = P(K|B)$ dès que $A \cap B = K \cap B$.

La chaîne est par conséquent de Markov.

La matrice de transition de cette chaîne de Markov est une matrice infinie «dans tous les sens» :

$$p(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x - 1 \\ (1 - p) & \text{si } y = x + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (28.30)$$

Remarque 28.14.

La plupart du temps lorsqu'il faut démontrer qu'une chaîne est de Markov, il faut suivre la procédure que nous venons de suivre pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

- Écrire tout en fonction des incréments.
- Dire que les incréments conditionnés sont indépendants des incréments qui conditionnent (via les tribus engendrées).
- Écrire que la probabilité cherchée est égale à l'événement conditionné dans lequel on a juste remplacé l'incrément par sa valeur.
- Conditionner à nouveau par rapport au dernier incrément qui est indépendant.
- Changer la valeur du dernier incrément par la variable aléatoire.

Dans ce raisonnement nous utilisons deux fois le fait que $P(A|B) = P(K|B)$ si $A \cap B = K \cap B$.

28.3.1 Chaînes de Markov homogènes**Proposition 28.15.**

Voici quelques propriétés des chaînes de Markov homogènes.

- (1) La probabilité d'une trajectoire donnée est

$$P(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = p(x_{n-1}, x_n) \dots p(x_0, x_1) P(X_0 = x_0). \quad (28.31)$$

- (2) La probabilité de transition «en n coups» est donnée par la puissance n ème de la matrice de transition :

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0) = Q_{x_0, x_n}^n. \quad (28.32)$$

- (3) Si l'espace des états E est fini, l'espérance d'une fonction bornée $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ de l'état est donnée par

$$E(f(X_{n+1}) | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = E(f(X_{n+1}) | X_n = x_n) \quad (28.33a)$$

$$= \sum_{y \in E} f(y) p(x_n, y). j \quad (28.33b)$$

Démonstration. (1) Étant donné que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, nous avons

$$P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) P(X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0). \quad (28.34)$$

Par la propriété de Markov, le premier facteur est

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = p(x_{n-1}, x_n). \quad (28.35)$$

Le reste est une récurrence sur n .

- (2) Montrons avec $n = 2$. En utilisant les divers points du théorème 26.28, nous avons

$$P(X_2 = x_2 | X_0 = x_0) = \sum_{y \in E} P(X_2 = x_2, X_1 = y | X_0 = x_0) \quad (28.36a)$$

$$= \sum_{y \in E} P(X_2 = x_2 | X_1 = y, X_0 = x_0) P(X_1 = y | X_0 = x_0) \quad (28.36b)$$

$$= \sum_{y \in E} P(X_2 = x_2 | X_1 = y) P(X_1 = y | X_0 = x_0) \quad (28.36c)$$

$$= \sum_{y \in E} p(x_2, y) p(y, x_0) \quad (28.36d)$$

$$= Q_{x_2, x_0}^2. \quad (28.36e)$$

Bien entendu ici la notion de produit matriciel doit être comprise de façon formelle lorsque E est infini.

Remarque 28.16.

Nous avons utilisé l'homogénéité de la chaîne de Markov au moment d'écrire l'expression (28.36d). En principe nous aurions dû écrire $p_2(y, x_2)p_1(x_0, y)$.

□

28.3.2 Graphe de transition

Le **graphe de transition** d'une chaîne de Markov est le graphe dont les sommets sont les éléments de l'espace des états de la chaîne et dont les sommets sont reliés par des arrêtes pondérées par la probabilité de transition correspondante.

Définition 28.17.

Une chaîne de Markov est **irréductible** si pour tout $x, y \in E$, il existe n tel que $p^n(x, y) > 0$ où

$$p^n(x, y) = P(X_n = y | X_0 = x). \quad (28.37)$$

Le nombre n peut dépendre de x et y .

Lemme 28.18.

Une chaîne de Markov homogène est irréductible si et seulement si son graphe de transition est connexe.

Démonstration. Pour chaque couple $(x, y) \in E^2$ nous avons

$$\begin{aligned} p^n(x, y) &= \sum_{z_i \in E} P(X_n = y, X_{n-1} = z_{n-1}, \dots, X_1 = z_1, X_0 = x) \\ &= \sum_{z_i} p(z_{n-1}, y) p(z_{n-2}, z_{n-1}) \dots p(z_1, z_2) p(x, z_1). \end{aligned} \quad (28.38)$$

La positivité d'un des termes de la somme signifie que le graphe est connexe tandis que la positivité de $p^n(x, y)$ signifie que la chaîne est irréductible. □

28.3.3 Chaîne de Markov définie par récurrence**28.3.3.1 Le cas général****Proposition 28.19.**

Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E , un ensemble au plus dénombrable. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées indépendantes de X_0 .

Soit (X_n) la suite de variables aléatoires à valeurs dans E définie par récurrence selon la formule

$$X_{n+1} = G(X_n, Y_{n+1}) \quad (28.39)$$

où $G: E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ est une fonction mesurable. Alors (X_n) est une chaîne de Markov.

Démonstration. Soient $x_0, \dots, x_{n+1}$ des éléments de E . Nous devons calculer la valeur de

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0). \quad (28.40)$$

Commençons par préciser les espaces sur lesquels nos variable aléatoires sont définies. Nous avons

$$X_0: \Omega_0 \rightarrow E \quad (28.41)$$

et

$$Y_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}. \quad (28.42)$$

La variable aléatoire X_1 est donnée par

$$\begin{aligned} X_1: \Omega_0 \times \Omega &\rightarrow E \\ (\omega_0, \omega_1) &\mapsto G(X_0(\omega_0), Y_1(\omega_1)). \end{aligned} \quad (28.43)$$

La variable aléatoire X_2 est

$$\begin{aligned} X_2: \Omega_0 \times \Omega^2 &\rightarrow E \\ (\omega_0, \omega_1, \omega_2) &\mapsto G(X_1(\omega_0, \omega_1), Y_2(\omega_2)) \\ &= G\left(G(X_0(\omega_0), \omega_1), Y_2(\omega_2)\right) \end{aligned} \quad (28.44)$$

et ainsi de suite.

Considérons maintenant l'événement

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} \subset \Omega_0 \times \Omega. \quad (28.45)$$

Il est donné explicitement par

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} = \{(\omega_0, \omega_1) \text{ tel que } G(X_0(\omega_0), Y_1(\omega_1)) = x_1, X_0(\omega_0) = x_0\} \quad (28.46a)$$

$$= \{(\omega_0, \omega_1) \text{ tel que } G(x_0, Y_1(\omega_1)) = x_1, X_0(\omega_0) = x_0\} \quad (28.46b)$$

$$= \{\omega_0 \in \Omega_0 \text{ tel que } X_0(\omega_0) = x_0\} \times \{\omega_1 \in \Omega \text{ tel que } G(x_0, Y_1(\omega_1)) = x_1\}. \quad (28.46c)$$

Le premier terme du produit cartésien est dans $\sigma(X_0)$, tandis que le second est dans $\sigma(Y_1)$. Étant donné la définition des tribus produit (définition 7.139) nous avons

$$\{X_1 = x_1, X_0 = x_0\} \in \sigma(X_0, Y_1). \quad (28.47)$$

Ce raisonnement se généralise immédiatement et nous trouvons que

$$\{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\} \in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n). \quad (28.48)$$

Nous sommes donc à calculer

$$\diamond = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \quad (28.49a)$$

$$= P\left(\underbrace{G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1}}_{\in \sigma(Y_{n+1})} \mid \underbrace{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0}_{\in \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n)}\right). \quad (28.49b)$$

Les tribus $\sigma(Y_{n+1})$ et $\sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$ étant indépendantes nous avons

$$\diamond = P(G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1}) \quad (28.50a)$$

$$= P(G(x_n, Y_{n+1}) = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (28.50b)$$

$$= P(G(X_n, Y_{n+1}) = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (28.50c)$$

$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). \quad (28.50d)$$

Pour (28.50b) nous avons utilisé le fait que $\sigma(Y_{n+1})$ est indépendante de $\sigma(X_n)$. Nous avons prouvé que la chaîne était de Markov. $\square$

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov définie dans la proposition 28.19 sont

$$P(X_1 = y | X_0 = x) = P(G(X_0, Y_1) = y | X_0 = x) = P(G(x_0, Y_1) = y). \quad (28.51)$$

28.3.3.2 Exemple : la file de réparation de machines à laver

Nous considérons un magasin de réparation d'électroménager. Durant le jour n , un nombre aléatoire Z_n de machines en panne arrivent au magasin. Une machine est réparée chaque jour (aucune si le magasin est vide). Nous supposons que les Z_n soient indépendantes et identiquement distribuées, et nous posons X_n , le nombre de machines en magasin le jour n .

La loi d'avancement de X_n est

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Z_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0 \\ Z_n & \text{si } X_n = 0. \end{cases} \quad (28.52)$$

Cela est une chaîne de Markov en vertu de la proposition 28.19. Ici la fonction est

$$G(x, y) = x + y - \mathbb{1}_{x \neq 0}. \quad (28.53)$$

Les probabilités de transitions sont

$$p(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y - 2 \\ P(Z = 0) & \text{si } x = y - 1 \\ P(Z = k) & \text{si } x = y + k - 1 \end{cases} \quad (28.54)$$

pour $x \neq 0$.

Exercice 1

Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}. \quad (28.55)$$

Calculer $P(X_3 = 1 | X_0 = 1)$ et $P(X_7 = 0 | X_4 = 0)$.

Déterminer, si il en existe, une loi stationnaire vers laquelle converge la chaîne.

Correction de l'exercice 1

Nous avons

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.344 & 0.251 & 0.405 \\ 0.283 & 0.307 & 0.41 \\ 0.287 & 0.248 & 0.465 \end{pmatrix}. \quad (28.56)$$

La probabilité d'aller de l'état 1 à l'état 1 en trois étapes est donc 0.307. La chaîne étant de Markov, sans mémoire, les probabilités entre les temps 4 et 7 sont les mêmes qu'entre 0 et 3. Nous avons alors

$$P(X_7 = 0 | X_4 = 0) = 0.344. \quad (28.57)$$

La chaîne est irréductible et n'a pas d'états absorbants.

28.4 Classification des états

Sauf mention expresse du contraire, nous considérons toujours une chaîne de Markov homogène.

Définition 28.20.

Un état $x \in E$ est **absorbant** pour la chaîne (X_n) si $p(x, x) = 1$.

Il n'est pas spécialement impossible d'arriver sur un état absorbant, mais il est impossible d'en sortir.

Si $x \in E$, nous notons

$$T(x) = \inf\{k \geq 1 \text{ tel que } X_k = x\}, \quad (28.58)$$

le **premier temps d'atteinte** de l'état x . Si $X_0 = x$, alors $T(x)$ est le **temps de retour** en x .

Si $p \in \mathbb{N}$ nous notons

$$T_p(x) = \inf\{k \geq 1 \text{ tel que } X_{k+p} = x\}. \quad (28.59)$$

C'est le temps mis pour atteindre x à partir de l'instant p .

Proposition 28.21.

La loi de la variable aléatoire $[T_p(x)|X_p = x]$ est la même que celle de la variable aléatoire $[T(x)|X_0 = x]$.

Démonstration. Nous devons montrer que

$$P(T_p(x) = k|X_p = x) = P(T(x) = k|X_0 = x). \quad (28.60)$$

Cela est intuitivement évident du fait qu'une chaîne de Markov soit un processus sans mémoire. Afin de prouver, nous allons sommer sur tous les états intermédiaires possibles :

$$P(T_p(x) = k|X_0 = x) = P(X_{p+k} = x, X_{p+k-1} \neq x, \dots, X_{p+1} \neq x|X_p = x) \quad (28.61a)$$

$$= \sum_{z_i \neq x} P(X_{p+k} = x, X_{p+k-1} = z_{k-1}, \dots, X_{p+1} = z_1|X_p = x) \quad (28.61b)$$

$$= \sum_{z_i} P(X_{p+k} = x, X_{p+k-i} = z_i|X_{p+1} = z_1, X_p = x) \underbrace{P(X_{p+1} = z_1|X_p = x)}_{=p(x, z_1)} \quad (28.61c)$$

$$= \sum_{z_i} P(X_{p+k} = x, X_{p+k-i} = z_i|X_{p+2} = z_2, X_{p+1} = z_1, X_p = x) \quad (28.61d)$$

$$\underbrace{P(X_{p+2} = z_2|X_{p+1} = z_1, X_p = x)}_{P(X_{p+2}=z_2|X_{p+1}=z_1)=p(z_1, z_2)} p(x, z_1) \quad (28.61e)$$

$$= \dots \quad (28.61f)$$

$$= \sum_{z_i} p(x, z_1)p(z_1, z_2) \dots p(z_{k-1}, z_{k-1})p(z_{k-1}, x). \quad (28.61g)$$

À ce point ci, nous avons éliminé toute référence à p grâce à l'homogénéité de la chaîne. Nous pouvons refaire le calcul à l'envers pour reconstituer l'expression de départ sans le p :

$$\sum_{z_i} p(x, z_1)p(z_1, z_2) \dots p(z_{k-1}, z_{k-1})p(z_{k-1}, x) \quad (28.62a)$$

$$= P(x_k = x, X_{k-1} \neq x, \dots, X_1 \neq x|X_0 = x) \quad (28.62b)$$

$$= P(T(x) = k), \quad (28.62c)$$

ce qu'il fallait obtenir. $\square$

Définition 28.22.

Un état x est **récurrent** si $P(T(x) = \infty|X_0 = x) = 0$, c'est à dire si la probabilité de ne jamais retourner en x lorsqu'on y est passé est nulle. L'état x est **transient** ou **transitoire** dans le cas contraire.

Si x est un état récurrent, et si $E(T(x)|X_0 = x) < \infty$, nous disons que x est **récurrent positif**. Si $E(T(x)|X_0 = x) = \infty$ alors nous disons que est **récurrent nul**.

Nous introduisons une variable aléatoire qui compte le nombre de fois que la chaîne de Markov passe par l'état x :

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}}. \quad (28.63)$$

C'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 28.23.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes à dire que x est récurrent :

$$(1) P(N_x < \infty|X_0 = x) = 0$$

$$(2) E(N_x|X_0 = x) = \infty.$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes à dire que x est transient :

$$(1) P(N_x < \infty|X_0 = x) = 1$$

(2) $E(N_x|X_0 = x) < \infty$.

Démonstration. En tant que événements, nous avons l'égalité

$$N_x < \infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{X_n = x, X_{n+k} \neq x \forall k \geq 1\}}_{F_n}. \quad (28.64)$$

Nous avons donc

$$P(N_x < \infty | X_0 = x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(F_n | X_0 = x), \quad (28.65)$$

et

$$P(F_n | X_0 = x) = P(X_{n+k} \neq x, \forall k \geq 1, X_n = x | X_0 = x) \quad (28.66a)$$

$$= P(X_{n+k} \neq x, k \geq 1 | X_n = x, X_0 = x) P(X_n = x | X_0 = x) \quad (28.66b)$$

$$= P(X_{n+k} \neq x, k \geq 1 | X_n = x) P(X_n = x | X_0 = x) \quad (28.66c)$$

$$= P(X_k \neq x, k \geq 1 | X_0 = x) P(X_n = x | X_0 = x) \quad (28.66d)$$

$$= P(T(x) = \infty | X_0 = x) P(X_n = x | X_0 = x) \quad (28.66e)$$

Justifications :

(1) Pour (28.66c), nous utilisons le fait que la chaîne soit «sans mémoire».

(2) Pour (28.66d), nous utilisons le fait que la chaîne soit homogène.

(3) Pour (28.66e), l'événement $X_k \neq x$ pour tout $k \geq 1$ est exactement l'événement $T(x) = \infty$.

En nous servant de la proposition 13.83 (théorème de Fubini et mesure de comptage), nous permutons l'espérance et la somme dans l'expression

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = x | X_0 = x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{X_n=x\}} | X_0 = x) \quad (28.67a)$$

$$= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} | X_0 = x\right) \quad (28.67b)$$

$$= E(N_x | X_0 = x). \quad (28.67c)$$

Voyons ce passage plus en détail. D'abord, en général nous avons

$$E(Y | X = x_0) = \int_{\{X=x_0\}} Y(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X=x_0\}}(\omega) Y(\omega) dP(\omega). \quad (28.68)$$

Dans notre cas,

$$E(\mathbb{1}_{\{X_n=x\}} | X_0 = x) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X_0=x}(\omega) \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}(\omega) dP(\omega). \quad (28.69)$$

La fonction qui correspond à la proposition 13.83 est

$$f(n, \omega) = f_n(\omega) = \delta_{X_0(\omega), x} \delta_{X_n(\omega), x}, \quad (28.70)$$

qui est bien une fonction positive et mesurable.

Nous reprenons à présent le calcul (28.65) en remplaçant les éléments par leurs valeurs que nous avons calculées :

$$P(N_x < \infty | X_0 = x) = P(T(x) = \infty | X_0 = x) E(N_x | X_0 = x). \quad (28.71)$$

Si x est récurrent, nous avons $P(T(x) = \infty | X_0 = x) = 0$, mais la relation (28.71) ne permet pas de conclure que le membre de gauche est nul parce qu'il reste la possibilité que $E(N_x | X_0 = x) = \infty$. Nous devons donc faire un pas en arrière et écrire cette espérance comme la limite des sommes partielles :

$$P(N_x < \infty | X_0 = x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N P(T(x) = \infty | X_0 = x) P(X_n = x | X_0 = x) = 0 \quad (28.72)$$

parce que tous les termes de la suite des sommes partielles sont nuls. Nous avons donc bien que $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 0$. Il s'ensuit immédiatement que $E(N_x | X_0 = x) = 1$.

Nous devons maintenant démontrer l'implication inverse. Supposons que $P(N_x < \infty | X_0 = x) = 0$. Dans ce cas nous avons immédiatement $P(N_x = \infty | X_0 = x) = 1$ et $E(N_x | X_0 = x) = \infty$. L'équation (28.71) nous indique alors que

$$P(T(x) = \infty | X_0 = x) = 0, \quad (28.73)$$

c'est à dire que x est récurrent. $\square$

28.4.1 Chaînes irréductibles

Proposition 28.24.

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible.

- (1) Un état x est récurrent si et seulement si tous les états sont récurrents.
- (2) Un état x est transient si et seulement si tous les états sont transients.

Démonstration. Soient x et y des états de la chaîne de Markov. Nous devons tester la valeur de $P(X_n = y | X_0 = y)$. Afin d'exploiter l'hypothèse d'irréductibilité, nous considérons $r, s \in \mathbb{N}$ tels que

$$p^r(x, y) > 0 \quad (28.74a)$$

$$p^s(y, x) > 0 \quad (28.74b)$$

et nous calculons majorons en passant par quelques intermédiaires :

$$P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) \geq P(X_{n+r+s} = y, X_{n+s} = x, X_s = x | X_0 = y) \quad (28.75a)$$

$$= P(X_{n+r+s} = y | X_{n+s} = x, X_s = x, X_0 = y) \quad (28.75b)$$

$$P(X_{n+s} = x | X_s = x, X_0 = y) P(X_s = x | X_0 = y).$$

Les deux premiers facteurs se calculent en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité de la chaîne. Pour le premier,

$$P(X_{n+s} = x | X_s = x, X_0 = y) = P(X_{n+s} = x | X_s = x) = P(X_n = x | X_0 = x). \quad (28.76)$$

Nous avons donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) \geq p^r(x, y) p^s(y, x) \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_n = x | X_0 = x). \quad (28.77)$$

En réutilisant Fubini comme dans l'équation (28.67), nous avons

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) \geq K E(N_x | X_0 = x) \quad (28.78)$$

où K est une constante strictement positive, par hypothèse d'irréductibilité de la chaîne de Markov.

Si x est un état récurrent, alors le membre de gauche est infini par la proposition (28.23) et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_{n+r+s} = y | X_0 = y) = \infty. \quad (28.79)$$

Aux $r + s$ premiers termes près (qui ne changent pas la somme), nous avons

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_n = y | X_0 = y) = \infty, \quad (28.80)$$

ce qui signifie que y est récurrent. $\square$

Nous rappelons que $T(x)$ est le temps que première atteinte de l'état x . Nous notons

$$\pi(x) = \frac{1}{E(T(x)|X_0 = x)}. \quad (28.81)$$

Étant donné que $T(x)$ est un entier positif ou nul nous avons $E(T(x)|X_0 = x) \in [1, \infty]$ et donc $\pi(x) \in [0, 1]$.

Si x est un état transient, alors $T(x) = \infty$ lorsque $X_0 = x$ et donc $E(T(x)|X_0 = x) = 0$ et $\pi(x) = 0$. Si x est récurrent par contre, $P(T(x) < \infty | X_0 = x) = 1$ et il n'y a pas de garanties sur la valeur de $E(T(x)|X_0 = x)$.

Corollaire 28.25.

Un état récurrent est récurrent positif si et seulement si $\pi(x) > 0$. Un état récurrent est récurrent nul si et seulement si $\pi(x) = 0$.

Démonstration. C'est la formule (28.81). □

Proposition 28.26.

Soit (X_n) est une chaîne de Markov irréductible.

(1) *Si x est un état récurrent, alors $T(x) < \infty$ presque sûrement.*

(2) *Nous avons une égalité entre les lois*

$$\mathcal{L}(X_{k+T(x)} | T(x) < \infty) = \mathcal{L}(X_k | X_0 = x). \quad (28.82)$$

28.4.2 Nombre de visites

La fonction

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \quad (28.83)$$

est la **fréquence empirique** de la chaîne de Markov.

Soit x un état récurrent, c'est à dire que $P(T(x) < \infty | X_0 = x) = 1$. Nous classons les visites de la façon suivante :

$$T_1(x) = T(x) = \inf\{k \geq 1 \text{ tel que } X_k = x\} \quad (28.84a)$$

$$T_2(x) = \inf\{k \geq 1 \text{ tel que } X_{T_1(x)+k} = x\} \quad (28.84b)$$

$$\vdots \quad (28.84c)$$

$$T_n(x) = \inf\{k \geq 1 \text{ tel que } X_{T_{n-1}(x)+k} = x\} \quad (28.84d)$$

La variable aléatoire T_i représente le temps entre la visite numéro $i - 1$ et la visite numéro i (si $X_0 \neq x$, sinon il faut décaler). Nous définissons l'instant la n ème visite numéro n :

$$S_n = \sum_{k=1}^n T_k(x). \quad (28.85)$$

Lemme 28.27.

Les variables aléatoires T_i sont indépendantes.

Démonstration. Nous choisissons n des T_i et nous calculons la probabilité

$$\spadesuit = P(T_{i_1} = k_1, T_{i_2} = k_2, \dots, T_{i_n} = k_n) \quad (28.86)$$

où nous supposons $i_1 > i_2 > \dots > i_n$. Nous décomposons cette probabilité en sommant sur toute les histoires de la chaîne de Markov compatibles avec les nombres k_i donnés :

$$\spadesuit = \sum_{\substack{\{z_j\} \\ \text{compatibles}}} P(X_j = z_j, j = 1, \dots, N). \quad (28.87)$$

Notons qu'ici, le numéro du dernier terme de la somme n'est pas certain parce que tous les T_i ne sont pas fixés. Nous l'avons noté N , mais en réalité il est différent d'un terme à l'autre de la somme. Il est certain que $z_N = x$ et $z_{N-k_1} = x$ et si $N - k_1 < j < N$, alors $z_j \neq x$. Cela est simplement le fait que nous demandions aux z_i de respecter les conditions données par les k_i . Nous avons

$$\spadesuit = \sum_{\{z_j\}} P(X_N = x, X_j = z_j, N - k_1 < j < N | X_j = z_j, j \leq N - k_1) P(X_j = z_j, j < N - k_1) \quad (28.88a)$$

$$= \sum_{\{z_j\}} P(X_N = x, X_j = z_j, N - k_1 < j < N | X_{N-k_1} = x) P(X_j = z_j, j < N - k_1) \quad (28.88b)$$

$$(28.88c)$$

Le premier facteur est $P(T_{i_1} = k_1)$ tandis que le second facteur est précisément $P(T_j = k_j, j > 1)$. Nous avons donc montré que

$$P(T_{i_1} = k_1, T_{i_2} = k_2, \dots, T_{i_n} = k_n) = P(T_{i_1} = k_1) P(T_j = k_j, j > 1), \quad (28.89)$$

et donc les T_i sont indépendants. $\square$

Proposition 28.28.

Si (X_n) est une chaîne de Markov irréductible et si $x \in E$ alors

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \quad (28.90)$$

presque sûrement.

Démonstration. Étant donné que la chaîne est irréductible, les états sont soit tous transients soit tous récurrents par la proposition 28.24. Nous commençons par considérer que x est transient.

En comparant la définition (28.63) de N_x et le membre de droite de (28.90), nous avons pour chaque n l'inégalité

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \leq \frac{1}{n} E(N_x). \quad (28.91)$$

Dans le cas d'un élément transient, nous avons $\pi(x) = 0$, donc il serait bon de montrer que $E(N_x) < \infty$, de sorte que prendre la limite $n \rightarrow \infty$ dans (28.91) donne zéro.

Nous décomposons le calcul en deux morceaux :

$$E(N_x) = E(N_x | T(x) = \infty) P(T(x) = \infty) + E(N_x | T(x) < \infty) P(T(x) < \infty). \quad (28.92)$$

Le fait que le premier terme soit fini découle immédiatement du fait que $T(x) = \infty$ implique $X_k \neq x$ pour tout $k \geq 1$. Dans ce cas l'espérance de N_x est évidemment finie.

Pour le second terme nous avons

$$E(N_x | T(x) < \infty) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} | T(x) < \infty\right) \quad (28.93a)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E(\mathbb{1}_{\{X_k=x\}} | T(x) < \infty). \quad (28.93b)$$

Pour inverser la somme et l'espérance, nous avons utilisé le théorème de Fubini-Tonelli qui est encore valable pour des fonctions qui prennent la valeur ∞ . Le fait d'inverser ne signifie pas que ni la somme ni l'intégrale soit finie. D'ailleurs c'est exactement ce que nous sommes en train de déterminer.

Étant donné que nous voulons seulement savoir si cette somme est finie ou non, nous pouvons nous restreindre à la somme depuis $k = 1$ ou oublier le premier terme. D'autre par nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{j+T(x)}=x\}} \quad (28.94)$$

parce que les $T(x)$ premiers termes sont par définition nuls. Nous regardons donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} E(\mathbb{1}_{X_{j+T(x)}=x} | T(x) < \infty) = \sum_j P(X_{j+T(x)} = x | T(x) < \infty) \quad (28.95a)$$

$$= \sum_j P(X_j = x | X_0 = x) \quad (28.95b)$$

$$= \sum_j E(\mathbb{1}_{\{X_j=x\}} | X_0 = x) \quad (28.95c)$$

$$= E\left(\sum_j \mathbb{1}_{X_j=x} | X_0 = x\right) \quad (28.95d)$$

$$= E(N_x | X_0 = x) \quad (28.95e)$$

$$< \infty \quad \text{parce que } x \text{ est transiet.} \quad (28.95f)$$

L'équation (28.95b) provient de la proposition 28.26 et plus précisément de l'égalité entre les lois (28.82). Nous avons terminé la preuve dans le cas où x est transiet.

Nous passons maintenant au cas où x est récurrent, c'est à dire $P(T(x) < \infty | X_0 = x) = 1$. Les variables aléatoires T_i définies en (28.84) pour $i \geq 2$ sont indépendantes et identiquement distribuées et

$$\mathcal{L}(T_k(x)) \sim \mathcal{L}(T(X) | X_0 = x). \quad (28.96)$$

La loi des grands nombres nous indique que

$$\frac{S_n}{n} = \frac{T_1(x)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n T_k(x) \xrightarrow{p.s.} E(T_2(x)) \quad (28.97a)$$

$$= E(T(x) | X_0 = x). \quad (28.97b)$$

Remarque 28.29.

La loi des grands nombres est encore vraie sans l'hypothèse de variables aléatoires dans L^1 pourvu qu'elles soient positives. Alors dans la conclusion de la loi nous devons accepter la possibilité que l'espérance soit infinie.

Nous posons pour $m \in \mathbb{N}$

$$n(m) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \quad (28.98)$$

qui est le nombre de visites de x avant l'instant m . Nous avons évidemment $n(m) \leq m$. Mais S_n est l'instant de la n ème visite, par conséquent $S_{n(m)}$ est l'instant de la dernière visite avant le moment m . Pour tout m nous avons les inégalités

$$S_{n(m)} \leq m < S_{n(m)+1}. \quad (28.99)$$

Nous divisons par $n(m)$ et nous effectuons la limite $m \rightarrow \infty$:

$$\frac{S_{n(m)}}{n(m)} \leq \frac{m}{n(m)} \leq \frac{S_{n(m)} + 1}{n(m)} \quad (28.100)$$

En ce qui concerne la limite de $n(m)$, nous utilisons la définition (28.98) :

$$n(m) \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} = \quad (28.101)$$

heur...

$$\lim_{m \rightarrow \infty} n(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \xrightarrow{p.s.} \infty \quad (28.102)$$

par la proposition (28.23). Plus précisément, la limite vaut N_x qui vaut presque sûrement ∞ dans le cas où x est récurrent. Par ailleurs la loi des grands nombres (28.97) nous enseigne en particulier que

$$\frac{S_{n(m)}}{n(m)} \xrightarrow{p.s.} E(T(x)|X_0 = x). \quad (28.103)$$

Le terme de droite dans (28.100) se traite de façon usuelle :

$$\frac{S_{n(m)+1}}{n(m)} = \frac{S_{n(m)+1}}{n(m)+1} \frac{n(m)+1}{n(m)}. \quad (28.104)$$

Le dernier facteur tend vers 1 et le tout a pour limite $E(T(x)|X_0 = x)$. Par conséquent nous avons

$$\frac{m}{n(m)} \xrightarrow{p.s.} E(T(x)|X_0 = x) \quad (28.105)$$

et

$$\frac{n(m)}{m} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{\{X_j=x\}} \rightarrow \frac{1}{E(T(x)|X_0 = x)} = \pi(x). \quad (28.106)$$

□

Lemme 28.30.

Soit (X_k) une chaîne de Markov dont l'espace des états est noté E . Pour chaque $x \in E$ nous notons

$$T(x) = \inf\{k \geq 1 \text{ tel que } X_k = x\} \quad (28.107)$$

et

$$T_p(x) = \inf\{k \geq 1 \text{ tel que } X_{k+p} = x\} \quad (28.108)$$

Alors nous avons

$$P(T_p(x) = k | X_p = y) = P(T(x) = k | X_0 = y). \quad (28.109)$$

La proposition suivante nous permet de parler de chaîne de Markov **récence positive**.

Proposition 28.31.

Soit (x_n) une chaîne de Markov irréductible.

- (1) Un état x est transient si et seulement si tous les états sont transients.
- (2) Un état est récurrent positif si et seulement si tous les états sont récurrents positifs.

Démonstration. Nous rappelons (proposition 28.28) que si la chaîne est irréductible

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[X_k=x]} \quad (28.110)$$

Notons aussi que

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{X_k=x} = \begin{cases} 0 & \text{si } N < T(x) \\ \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x} & \text{si } N > T(x) \end{cases} \quad (28.111)$$

où dans la seconde ligne nous avons effectué le changement de variable de sommation $k' = k + T(x)$. Dans la limite (28.110) nous sommes toujours dans le cas où N est assez grand. Nous pouvons donc écrire

$$\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x}. \quad (28.112)$$

Nous pouvons aussi écrire

$$\frac{1}{N - T(x)} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x} = \frac{N}{N - T(x)} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x}. \quad (28.113)$$

Dans cette dernière égalité le membre de droite tend vers $\pi(x)$ et nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N - T(x)} \sum_{k=0}^{N-T(x)} \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x} = \pi(x) \quad (28.114)$$

ou encore

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x} = \pi(x) \quad (28.115)$$

Étant donné que $\pi(x)$ est une constante nous avons évidemment $E(\pi(x)) = \pi(x)$. Nous pouvons cependant considérer les variables aléatoires

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x} \quad (28.116)$$

et remarquer que $Z_n \xrightarrow{p.s.} \pi(x)$ avec $0 \leq Z_n \leq 1$. Le théorème de la convergence dominée (7.134) nous permet d'inverser la limite et l'espérance et écrire

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\mathbb{1}_{X_{k+T(x)}=x}) \quad (28.117a)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_{k+T(x)} = x). \quad (28.117b)$$

Par le lemme 28.30 nous avons

$$P(X_{k+T(x)} = x) = P(X_k = k | X_0 = x) \quad (28.118)$$

et $\pi(x)$ prend la forme

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_k = x | X_0 = x). \quad (28.119)$$

Soit maintenant un état x positif récurrent et y , un autre état. Par définition 28.22 et par corollaire 28.25 nous avons $\pi(x) > 0$. Nous devons prouver que $\pi(y) > 0$.

Étant donné que la chaîne est irréductible il existe r et s tels que

$$\begin{cases} p^r(x, y) = P(X_r = y | X_0 = x) > 0 \\ p^s(x, y) = P(X_s = x | X_0 = y) > 0 \end{cases} \quad (28.120a)$$

$$\quad (28.120b)$$

Nous reprenons l'équation (28.77) multipliée par $1/N$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(X_{r+s+n}=y | X_0=y) \geq \underbrace{p^r(x, y)p^s(y, x)}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(X_n = x | X_0 = x)}_{\rightarrow \pi(x)} \quad (28.121)$$

et nous prenons la limite lorsque $N \rightarrow \infty$. À $r + s$ termes près, nous trouvons à gauche l'expression (28.119) de $\pi(y)$. Par conséquent

$$\pi(y) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^N P(X_{r+s+n} = y | X_0 = y) \geq \alpha \pi(x) \quad (28.122)$$

où α est une constante positive. Le nombre $\pi(x)$ étant strictement positif par hypothèse nous avons montré que $\pi(y) > 0$, c'est à dire que y est récurrent positif. $\square$

28.5 Mesure invariante

Définition 28.32.

Une mesure de probabilité μ sur l'espace des états E d'une chaîne de Markov est **invariante** si pour tout $x \in E$

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} p(y, x) \mu(y). \quad (28.123)$$

Remarque 28.33.

Une mesure invariante est une mesure de probabilité et nous noterons par abus $\mu(x)$ pour $\mu(\{x\})$. Si $A \subset E$ nous avons

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(x). \quad (28.124)$$

Remarque 28.34.

Une loi invariante associée à une chaîne de Markov est une loi associée à la matrice de transition de la chaîne, mais pas à la loi de X_0 . Par conséquent nous pouvons tester si μ est une mesure invariante pour une certaine chaîne de Markov (X_k) en considérant la chaîne (Y_k) avec $Y_k = X_k$ pour $k > 0$ et Y_0 arbitraire.

L'adjectif *invariant* provient du lemme suivant.

Lemme 28.35.

Soit (X_n) une chaîne de Markov telle que $X_0 \sim \mu$ où μ est une mesure invariante sur l'espace des états. Alors $X_k \sim \mu$ pour tout k .

Démonstration. Par hypothèse, $P(X_0 = x) = \mu(x)$. Ensuite nous avons

$$P(X_1 = y) = \sum_{x \in E} P(X_1 = y | X_0 = x) P(X_0 = x) \quad (28.125a)$$

$$= \sum_x p(x, y) \mu(x) \quad (28.125b)$$

$$= \mu(y). \quad (28.125c)$$

Par conséquent X_1 suit également la loi μ . Par récurrence tous les états suivent cette même loi. $\square$

Si les états d'une chaîne de Markov ont comme loi une mesure invariante, alors nous disons que la chaîne est **stationnaire**.

Remarque 28.36.

Pour une chaîne de Markov stationnaire de loi invariante μ nous avons

$$\mu(x) = \sum_y p(y, x) \mu(y) \quad (28.126)$$

et si l'ensemble E est fini cette équation signifie

$$\mu = Q\mu \quad (28.127)$$

où Q est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

Théorème 28.37 (Théorème ergodique).

Une chaîne de Markov irréductible est positive récurrente si et seulement si elle accepte une mesure invariante. Cette mesure est alors unique et vérifie $\mu = Q\mu$ où Q est la matrice de transition.

Démonstration. Nous allons seulement prouver le théorème ergodique dans le cas où E est fini. Soit (X_n) une chaîne de Markov récurrente positive; nous avons $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Nous allons montrer que π est une mesure invariante.

Nous commençons par montrer que

$$\sum_{x \in E} \pi(x) = 1. \quad (28.128)$$

Pour cela nous reprenons la propriété de chaîne irréductible pour écrire

$$\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{X_k=x} \quad (28.129)$$

Étant donné que E est fini nous pouvons sommer sur $x \in E$ et permuter la somme avec la limite :

$$\sum_{x \in E} \pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \underbrace{\sum_{x \in E} \mathbb{1}_{X_k=x}}_{=1}. \quad (28.130)$$

Nous nous retrouvons donc avec $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} N = 1$. La fonction π définit donc bien une mesure de probabilité sur E .

Nous montrons à présent que cette mesure est invariante, c'est à dire que

$$\pi(x) = \sum_{y \in E} p(y, x) \pi(y). \quad (28.131)$$

Pour cela nous utilisons encore le théorème de la convergence dominée pour permuter la limite et l'intégrale dans

$$\pi(x) = E(\pi(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \underbrace{E(\mathbb{1}_{X_k=x})}_{P(X_k=x)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(X_{k+1} = x). \quad (28.132)$$

La dernière égalité découle du fait que en divisant par N et en faisant tendre N vers l'infini, le fait d'enlever un terme à la somme ne change pas la valeur de la limite. Nous pouvons substituer dans (28.132) la valeur

$$P(X_{k+1} = x) = \sum_{y \in E} p(y, x) P(X_k = y). \quad (28.133)$$

Nous avons alors

$$\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{y \in E} p(y, x) P(X_k = y) \quad (28.134a)$$

$$= \sum_{y \in E} p(y, x) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(X_k = y) \quad (28.134b)$$

$$= \sum_{y \in E} p(y, x) \pi(y), \quad (28.134c)$$

ce qui signifie que π est une mesure invariante. Notons que nous avons encore utilisé le fait que E soit fini pour permuter avec la limite.

Il nous reste à montrer l'unicité de la mesure invariante sur la chaîne de Markov. Soit μ une mesure invariante pour la chaîne de Markov (X_k) . Comme indiqué dans la remarque 28.34 nous pouvons supposer que X_0 suit la loi μ . Par le lemme 28.35 nous avons $P(X_k = x) = \mu(x)$ pour tout k . Par conséquent

$$\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(X_k = x) = \mu(x). \quad (28.135)$$

□

Théorème 28.38 (loi des grands nombres pour les chaîne de Markov).

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible acceptant une mesure invariante. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dans $L^1(E, \mu)$. Alors nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k) \xrightarrow{p.s.} \sum_{x \in E} f(x) \mu(x). \quad (28.136)$$

En ce qui concerne les notations, l'hypothèse $f \in L^1(E, \mu)$ signifie

$$\sum_{x \in E} |f(x)| \mu(x) = \int_E |f(x)| d\mu(x) < \infty. \quad (28.137)$$

Démonstration. Nous prouvons le théorème dans le cas où E est fini. Si nous écrivons

$$f(X_k) = \sum_{y \in E} f(y) \mathbb{1}_{X_k=y}, \quad (28.138)$$

alors

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_k) = \sum_{y \in E} f(y) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{X_k=y}. \quad (28.139)$$

Étant donné que E est fini nous pouvons permuter les sommes et prendre la limite $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k f(X_k) = \sum_{y \in E} f(y) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{X_k=y} = \sum_{y \in E} f(y) \pi(y). \quad (28.140)$$

□

28.6 Convergence vers l'équilibre

Nous voudrions savoir sous quelles conditions la variable aléatoire X_n converge en loi vers quelque chose lorsque $n \rightarrow \infty$. Une telle loi limite doit dépendre de la loi initiale² comme le montre l'exemple de la chaîne de Markov

$$1 \curvearrowright A \xleftarrow{1/2} C \xrightarrow{1/2} B \curvearrowleft 1 \quad (28.141)$$

Si $X_0 = C$, alors la loi limite est

$$\frac{1}{2}(\delta_A + \delta_B). \quad (28.142)$$

Si par contre $X_0 = B$, la loi limite est δ_B . Notons que la chaîne de Markov proposée ici est irréductible.

Notons qu'il n'y a pas toujours de lois limite comme le montre l'exemple

$$A \xrightarrow{1} B \xleftarrow{1} A \quad (28.143)$$

avec $X_0 = A$. La loi en est

$$X_k = \begin{cases} \delta_A & \text{si } k \text{ est pair} \\ \delta_B & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \quad (28.144)$$

Lemme 28.39.

Si nous avons une loi limite

$$P(X_n = x) \rightarrow l(x), \quad (28.145)$$

et que la chaîne est irréductible, alors nous avons $l = \pi$.

2. Lorsque la loi limite ne dépend pas de la loi initiale, nous disons que la chaîne de Markov est ergodique, nous y reviendrons.

Démonstration. D'après la proposition 28.28 nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_k = x) \rightarrow \pi(x). \quad (28.146)$$

Par le lemme 6.171 sur la moyenne de Cesaro et l'hypothèse (28.145), nous avons aussi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_k = x) \rightarrow l(x). \quad (28.147)$$

Du coup $\pi(x) = l(x)$. □

Lemme 28.40 ([303]).

Si π est une loi stationnaire et si x est un état transient, alors $\pi(x) = 0$.

Ce lemme (qui peut être prouvé rigoureusement) est principalement dû au fait que la chaîne de Markov ne visite un état transitoire qu'un nombre fini de fois par la proposition 28.23(1).

Définition 28.41.

Un état $x \in E$ est **apériodique** si

$$\text{pgcd}\{n \geq 1 \text{ tel que } p^n(x, x) > 0\} = 1. \quad (28.148)$$

Mettons que tous les n tels que $p^n(x, x) > 0$ ont 2 comme diviseur. L'état n'est alors pas apériodique, mais on voit que si $X_0 = x$, alors les états impairs ne peuvent pas être sur x . Cela est une forme de périodicité.

Si un état est apériodique, il existe p et q premiers entre eux tels que $p^p(x, x)$ et $p^q(x, x)$ sont non nuls. En particulier pour tout $n \in p\mathbb{N} + q\mathbb{N}$, $P(X_n = x) \neq 0$. Par conséquent la proposition 2.26 nous indique qu'à partir d'un certain moment tous les X_k pourraient être x .

L'état C de la chaîne de Markov suivante est apériodique :



En effet $p^3(C, C) \neq 0$ par le chemin $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ tandis que $p^5(C, C) \neq 0$ également par le chemin $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$. Or $\text{pgcd}\{3, 5\} = 1$.

Proposition 28.42 ([303]).

Soit (X_n) , une chaîne de Markov irréductible. Un état x est apériodique si et seulement si il existe N tel que

$$p^k(x, x) = P(X_k = x | X_0 = x) > 0 \quad (28.150)$$

pour tout $k \geq N$.

La proposition suivante va nous permettre de parler de **chaîne apériodique**.

Proposition 28.43.

Si une chaîne de Markov est irréductible, alors un état est apériodique si et seulement si tous les états sont apériodiques.

Démonstration. Soit x un état apériodique de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En vertu de la proposition 28.42 il existe N_x tel que $p^k(x, x) \neq 0$ pour tout $k \geq N_x$. Soit $y \in E$. Étant donné que la chaîne est irréductible, il existe r et s tels que $p^r(x, y) > 0$ et $p^s(y, x) > 0$. Nous avons

$$p^{k+r+s}(y, y) = P(X_{k+r+s} = y | X_0 = y) \geq p^s(y, x) P(X_k = x | X_0 = x) p^r(x, y). \quad (28.151)$$

Si k est assez grand, cette quantité est strictement positive. Donc il suffit de prendre $N_y = N_x + r + s$ pour savoir que y est également apériodique. □

Exemple 28.44

Quelle est la différence entre une chaîne irréductible et une chaîne apériodique ? Une chaîne est irréductible lorsque aucune sous-chaîne ne peut piéger le système. Pour toute paire d'états $x, y \in E$, il existe un n tel qu'il soit possible d'aller de x à y en n pas. Une chaîne est apériodique lorsqu'après un temps suffisamment long, *tous* les états soient possibles en même temps.

Un exemple de chaîne irréductible non apériodique :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \xleftarrow{\quad} & \\ & 1 & \end{array} \quad (28.152)$$

Cette chaîne est irréductible parce que le graphe est connexe, par contre il n'est pas apériodique parce que si $X_0 = A$ il n'est pas possible d'être dans l'état A après un nombre impair de pas.

Plus formellement, $p^n(A, A) = 1$ dès que n est pair ; le PGCD de la définition 28.41 n'est donc certainement pas 1. $\triangle$

Si E est fini et si la chaîne de Markov est irréductible, alors en posant $N = \max_{x \in E} N(x)$, la matrice P^k a des éléments non nuls sur toute la diagonale pour tout $k > N$. Ces éléments diagonaux ne sont autre que les $p^k(x, x)$.

Théorème 28.45 (Convergence en loi des chaîne de Markov).

Si (X_n) est

- (1) irréductible,
- (2) récurrente positive,
- (3) apériodique,

alors X_n converge en loi vers l'unique probabilité invariante π vérifiant

$$\pi(x) = \sum_{y \in E} p(y, x) \pi(y) = \frac{1}{E(T(x) | X_0 = x)}. \quad (28.153)$$

Cette convergence est indépendante de la loi de X_0 et on a

$$P(X_n = x | X_0 = y) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \pi(x). \quad (28.154)$$

28.7 Processus de Galton-Watson

Nous considérons une maladie et notons Z_n le nombre de malades à l'instant n . Nous posons $Z_0 = 1$ et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (28.155)$$

où $\xi_i^{(n)}$ est le nombre de personnes contaminées par le malade i à l'instant n . Nous supposons que ces variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées et admettent un moment d'ordre 1.

L'équation de propagation 28.155 signifie que nous supposons qu'une personne malade à l'instant n n'est plus malade à l'instant $n+1$. Par ailleurs les hypothèses d'indépendance signifient qu'à chaque instant, le nombre de personnes contaminées par le malade i est indépendant du nombre de personnes contaminées par le malade j . De plus la façon dont la contamination se passe à l'instant n est indépendant de la façon dont la contamination se passe à l'instant m . Ces hypothèses sont raisonnables tant que le nombre de personnes non contaminées est grand. À partir du moment où presque tout le monde est malade, l'approximation de Galton-Watson ne fonctionne plus.

Nous notons ξ la loi parente des $\xi_i^{(n)}$. Ensuite nous considérons

$$G(s) = E(s^\xi) \quad (28.156a)$$

$$m = E(\xi) \quad (28.156b)$$

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}). \quad (28.156c)$$

Par le théorème de transfert (proposition 26.47) avec $f(t) = s^t$. Ce que nous avons est

$$G_n(s) = E(f(Z_n)) = \int_{\mathbb{R}} s^x dP_{Z_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k) \quad (28.157)$$

où l'intégrale s'est transformée en somme parce que la loi de Z_n est discrète : dP_{Z_n} est une somme de masses de Dirac. En particulier nous avons

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k) \quad (28.158a)$$

$$G(0) = P(Z_n = 0) \quad (28.158b)$$

et

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0). \quad (28.159)$$

D'où l'intérêt d'étudier G_n .

Lemme 28.46.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s \in [0, 1]$, nous avons

$$G_n(s) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G(s)}_{n \text{ fois}}. \quad (28.160)$$

Démonstration. Pour $n = 1$, nous avons $Z_1 = \xi_1^{(1)}$ et donc

$$G_1(s) = E(s^{\xi}) = G(s), \quad (28.161)$$

comme il se doit.

Si $n \neq 1$ nous écrivons

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}) \quad (28.162a)$$

$$= E\left(s^{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i^{(n-1)}}\right) \quad (28.162b)$$

$$= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}} s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n-1)}}\right). \quad (28.162c)$$

À ce niveau, nous voulons permuter la somme et l'espérance. Étant donné que le lemme est facile à vérifier pour $s = 1$, nous supposons $s < 1$. Du coup

$$s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n-1)}} < 1 \quad (28.163)$$

et ce qui se trouve dans l'espérance est majoré par

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{Z_{n-1}=k} = 1. \quad (28.164)$$

La fonction constante 1 est intégrable sur Ω (ici nous utilisons à fond le fait que l'espace Ω soit un espace de probabilité) et nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue 16.17 pour permuter la somme et l'intégrale. Nous continuons donc le calcul (28.162) :

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}} s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n-1)}}\right). \quad (28.165)$$

La tribu engendrée par la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}}$ est une fonction des variable aléatoires $\xi_i^{(m)}$ avec $m \leq n-2$ tandis que la variable aléatoire $s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n-1)}}$ est une fonction des variable aléatoires

$\xi_i^{(n-1)}$. Par conséquent le lemme de regroupement 26.15 nous dit que ces variables aléatoires sont indépendantes, donc

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{E(\mathbb{1}_{\{Z_{n-1}=k\}})}_{=P(Z_{n-1}=k)} E(s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n-1)}}). \quad (28.166)$$

Nous avons utilisé le fait que l'espérance d'une fonction indicatrice est la probabilité de l'événement.

En ce qui concerne la puissance de s , les événements ξ_i^{n-1} sont indépendants et suivent tous la même loi ξ , donc

$$s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n-1)}} = \prod_{i=1}^k s^{\xi_i^{(n-1)}} \quad (28.167)$$

et

$$E\left(\prod_{i=1}^k s^{\xi_i}\right) = E(s^{\xi})^k = G(s)^k. \quad (28.168)$$

En mettant tout bout à bout,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z_{n-1} = k) G(s)^k = G_{n-1}(G(s)). \quad (28.169)$$

□

Théorème 28.47.

La probabilité d'extinction η est donnée par

$$\eta = P\left(\bigcup_{n \geq 1} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0). \quad (28.170)$$

Ce nombre est la plus petite solution positive de l'équation $G(s) = s$.

De plus la classification des cas est comme suit.

(1) Si $P(\xi = 0) = 0$ alors $\eta = 0$.

(2) Si $P(\xi = 0) \neq 0$ alors

(a) si $m \leq 1$ alors $\eta = 1$,

(b) si $m > 1$ alors $\eta \in]0, 1[$.

Le cas $m < 1$ est dit **sous-critique**, le cas $m = 1$ est dit **critique**. Le cas $m > 1$ est dit **sur-critique**.

Démonstration. Commençons par prouver que G est une fonction continue. En utilisant la théorie de transfert comme pour l'équation (28.157) nous trouvons que

$$G(s) = E(s^{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad (28.171)$$

où nous avons noté $p_k = P(\xi = k)$. Si $r < 1$, alors la suite $p_k r^k$ est bornée, donc le critère d'Abel (16.23) nous indique que la série (28.171) converge absolument et la théorie générale des séries entières conclut que la fonction G est en particulier dérivable terme à terme pour tout $s \in]-1, 1[$.

Le probabilité d'extinction est un point fixe de G En utilisant la continuité de G en 0 nous passons à la limite dans $G_{n+1}(0) = G(G_n(0))$ et nous obtenons

$$\eta = G(\eta), \quad (28.172)$$

ce qui signifie que la probabilité d'extinction est un point fixe de G .

η est le plus petit point fixe de G Nous démontrons maintenant que η est plus précisément le plus petit point fixe de G sur $[0, 1]$. Nous allons effectuer cette partie en décomposant selon les valeurs de p_0 et de p_1 .

Au vu de l'écriture (28.171), si $p_1 = 1$ alors $G(s) = s$ pour tout $s \in [0, 1]$. Mais dans ce cas nous savons par ailleurs que l'extinction est impossible. Zéro est bien la plus petite solution de $G(s) = s$.

Supposons maintenant que $p_1 < 1$ et $p_0 + p_1 = 1$. Alors $G(s) = p_0 + p_1 s$ et $s = 1$ est l'unique solution. Mais vu que nous savons que η est solution, c'est que $\eta = 1$ et l'extinction est certaine.

Nous passons au cas général : $p_0 + p_1 < 1$. D'abord nous remarquons que $s = 1$ est solution parce que

$$G(1) = p_0 + p_1 + \dots = 1. \quad (28.173)$$

Remarquons aussi que dans ce cas $s = 0$ n'est plus solution.

La fonction G est strictement convexe sur $[0, 1]$ (parce que $G'' > 0$). Cela se voit en effectuant deux dérivations termes à termes (le rayon de convergence de la dérivée est le même que celui de la fonction). Cette stricte convexité entraîne que l'équation $G(s) = s$ a au maximum une autre solution que $s = 1$. Nous nommons s_0 la plus petite solution dans $[0, 1]$. Étant donné que G est croissante on a

$$G(0) \leq G(s_0) = s_0. \quad (28.174)$$

En appliquant G à cette équation nous obtenons $G(G(s_0)) \leq G(s_0) = s_0$ et en appliquant n fois,

$$G_n(0) \leq s_0. \quad (28.175)$$

En passant à la limite, $\eta \leq s_0$ mais η étant solution, nous avons $\eta = s_0$. Nous avons donc prouvé que la probabilité d'extinction η est la plus petite solution de $G(s) = s$.

Classification des cas Nous devons encore discuter les cas. Si $P(\xi = 0) = 0$, alors $p_0 = 0$ et $G(0) = 0$, ce qui signifie que $s_0 = \eta = 0$ et l'extinction est impossible.

Nous passons au cas $p_0 \neq 0$. Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $m = p_1 < 1$ et nous avons déjà vu que dans le cas $p_0 + p_1 = 1$, la probabilité d'extinction est $\eta = 1$.

Il nous reste à traiter le cas $p_0 + p_1 < 1$. Encore une fois, la courbe G est strictement convexe sur $[0, 1]$ et elle est en particulier plus grande que sa tangente en $s = 1$, c'est à dire

$$G(s) > G'(1)(s - 1) + G(1). \quad (28.176)$$

Nous savons que $G(1) = 1$. En ce qui concerne $G'(1)$, nous dérivons encore terme à termes :

$$G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}, \quad (28.177)$$

donc

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E(\xi) = m. \quad (28.178)$$

Ce que nous avons donc est

$$G(s) > 1 + m(s - 1). \quad (28.179)$$

Nous nous particularisons au cas sous-critique ($m \leq 1$). En nous rappelant que $s - 1 < 0$,

$$G(s) > 1 + (s - 1) = s, \quad (28.180)$$

donc $s = 1$ est la plus petite solution et effectivement nous avons déjà vu que $\eta = 1$ dans ce cas.

Si $m > 1$, alors on a

$$G(s) > 1 + m(s - 1). \quad (28.181)$$

Mais dire $m > 1$ revient à dire $G'(1) > 1$ et donc dans un voisinage de $s = 1$ on a

$$\frac{G(s) - G(1)}{s - 1} > 1, \quad (28.182)$$

ce qui implique que

$$G(s) < s - 1 + G(1) = s. \quad (28.183)$$

Nous avons donc $G(s) < s$ dans un voisinage de 1. Mais $G(0) - 0 = p_0 > 0$, donc la fonction $f(s) = G(s) - s$ est positive en 0 et négative proche de $s = 1$. Le théorème de la valeur intermédiaire nous indique alors qu'il existe un $s \in]0, 1[$ tel que $f(s) = 0$, c'est à dire tel que $G(s) = s$.

□

Chapitre 29

Martingales

29.1 Convergence de martingales

Définition 29.1.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu, une **filtration** de $\mathcal{A}$ est une suite croissante de sous-tribus $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_{i+1} \subseteq \mathcal{A}$.

Nous disons qu'une suite de variables aléatoires (X_n) est **adaptée** à une filtration $(\mathcal{F}_n)$ si X_i est $\mathcal{F}_i$ -mesurable pour tout i .

Ces définitions impliquent immédiatement que si (X_n) est adapté à $(\mathcal{F}_n)$ alors X_n est $\mathcal{F}_k$ -mesurable pour $k \geq n$.

Définition 29.2.

Une **martingale** adaptée à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires $M_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

- (1) M_n est $\mathcal{B}_n$ -mesurable,
- (2) $E(M_{n+1} | \mathcal{B}_n) = M_n$.

Le processus M_n est une **sur-martingale** si $E(M_{n+1} | \mathcal{B}_n) \leq M_n$, et c'est une **sous-martingale** si $E(M_{n+1} | \mathcal{B}_n) \geq M_n$.

Exemple 29.3

Si $M \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration, nous pouvons considérer la martingale $M_n = E(M | \mathcal{B}_n)$. $\triangle$

Exemple 29.4

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées. On pose

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad (29.1)$$

et la filtration $\mathcal{B}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Pour montrer que cela est une martingale, nous commençons par remarquer que

$$E(X_{n+1} | \mathcal{B}_n) = E(X_{n+1}) = 0 \quad (29.2)$$

par indépendance des tribus $\mathcal{B}_n$ et $\sigma(X_{n+1})$. Ici c'est le lemme 26.33 qui joue.

Ensuite nous argumentons que $E(X_1 + \dots + X_n | \mathcal{B}_n) = X_1 + \dots + X_n$. En effet d'une part $X_1 + \dots + X_n$ est $\mathcal{B}_n$ -mesurable et évidemment la condition intégrale de l'espérance conditionnelle est satisfaite.

Plus généralement si X est une variable aléatoire et si $\sigma(X) \subset \mathcal{B}$ alors $E(X | \mathcal{B}) = X$. $\triangle$

Lemme 29.5.

Soit (M_n) une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et $n \geq k$. Alors

$$E(M_n | \mathcal{F}_k) = M_k \quad (29.3a)$$

$$E(M_k | \mathcal{F}_n) = M_k. \quad (29.3b)$$

Démonstration. La seconde relation revient seulement à dire que M_k est $\mathcal{F}_n$ -mesurable, ce qui est évident parce que $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$.

Nous prouvons la première par récurrence (à l'envers) sur k . D'abord si $k = n$, l'égalité $E(M_n|\mathcal{F}_n) = M_n$. Nous supposons maintenant que $E(M_n|\mathcal{F}_k) = M_k$, et nous prouvons que $E(M_n|\mathcal{F}_{k-1}) = M_{k-1}$. Si $B_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$, nous avons

$$\int_{B_{k-1}} M_{k-1} = \int_{B_{k-1}} M_k = \int_{B_{k-1}} M_n. \quad (29.4)$$

La première égalité est la définition d'une martingale, et la seconde est l'hypothèse de récurrence. $\square$

Théorème 29.6 ([304, 305]).

Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale bornée dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire telle que

$$\alpha = \sup_{n \geq 0} E(M_n^2) < \infty. \quad (29.5)$$

Alors la suite M_n converge dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Nous écrivons M_n en somme télescopique

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \Delta_k \quad (29.6)$$

où $\Delta_k = M_k - M_{k-1}$. Nous commençons par montrer que les incréments sont orthogonaux au sens où $E(\Delta_n \Delta_k) = 0$. Pour $n > k$, la variable aléatoire $E(\Delta_n \Delta_k | \mathcal{F}_{n-1})$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable telle que

$$\int_{B_{n-1}} E(\Delta_n \Delta_k | \mathcal{F}_{n-1}) = \int_{B_{n-1}} \Delta_n \Delta_k \quad (29.7)$$

pour tout $B_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$. En particulier avec $B_{n-1} = \Omega$ nous trouvons

$$E(E(\Delta_n \Delta_k | \mathcal{F}_{n-1})) = E(\Delta_n \Delta_k) \quad (29.8)$$

par la définition de l'espérance (26.51). Par conséquent, en utilisant le lemme 29.5 nous avons ¹

$$E(\Delta_n \Delta_k) = E(E(\Delta_n \Delta_k | \mathcal{F}_{n-1})) = E(\Delta_k E(\Delta_n | \mathcal{F}_{n-1})) = 0 \quad (29.9)$$

parce que $E(\Delta_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - E(M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

Utilisant l'orthogonalité des incréments, nous avons

$$E(M_n^2) = E(M_0^2) + \sum_{k=1}^n E(\Delta_k^2). \quad (29.10)$$

En prenant le supremum (par rapport à n des deux côtés),

$$E(M_0^2) + \sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k^2) = \alpha < \infty. \quad (29.11)$$

Cela prouve que la suite $\sum_{k=1}^n \Delta_k$ converge dans $L^2(\Omega)$. Nous en déduisons immédiatement que (M_n) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ parce que si $k, l > n$, nous avons (en utilisant encore l'orthogonalité des incréments)

$$E(|M_k - M_l|^2) = \sum_{i=k+1}^l E(\Delta_i^2) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} E(\Delta_i^2), \quad (29.12)$$

qui tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. $\square$

1. À ce niveau je crois qu'il y a une faute dans [305] qui conditionne par rapport à $\mathcal{F}_n$.

Le théorème suivant complète la conclusion du théorème 29.6.

Théorème 29.7 ([305]).

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale bornée dans L^2 . Alors (M_n) converge dans $L^2(\Omega)$ et presque sûrement vers une même variable aléatoire M_∞ qui vérifie

$$M_n = E(M_\infty | \mathcal{F}_n). \quad (29.13)$$

Notons en particulier que la variable aléatoire M_∞ est presque sûrement finie parce qu'en vertu de (29.13) nous avons

$$\int_{\Omega} M_\infty = \int_{\Omega} M_n < \infty. \quad (29.14)$$

Exemple 29.8

Soient des variables aléatoires indépendantes $V_k \sim \mathcal{E}(2^k \lambda)$ et la variable aléatoire somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n V_k. \quad (29.15)$$

Nous allons montrer que $S_n \xrightarrow{p.s.} X$ où X est une variable aléatoire presque sûrement finie. Nous posons

$$M_n = S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \lambda} \quad (29.16)$$

Cela est une martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(V_1, \dots, V_n)$ en vertu de l'exemple 29.4. Nous montrons à présent qu'elle est bornée dans $L^2(\Omega)$ au sens où $\sum_{n \geq 1} E(M_n^2) < \infty$. Nous avons

$$E(M_n^2) = E\left(\left[S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \lambda}\right]^2\right) = E\left(\left[\sum_{k=1}^n \left(V_k - \frac{1}{2^k \lambda}\right)\right]^2\right). \quad (29.17)$$

La variable aléatoire $V_k - 1/2^k \lambda$ est une variable aléatoire centrée de variance $1/(2^k \lambda)^2$ (voir proposition 26.81). Étant donné que M_n est centrée, $\text{Var}(M_n) = E(M_n^2)$ et nous avons

$$E(M_n^2) = \sum_{k=1}^n \text{Var}\left(V_k - \frac{1}{2^k \lambda}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2^k \lambda)^2}, \quad (29.18)$$

cette dernière somme étant bornée par $l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k \lambda)^2}$, nous avons

$$E(M_n^2) \leq l \quad (29.19)$$

avec l indépendant de n . C'est pour cela que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans $L^2(\Omega)$. Par le théorème 29.7 nous avons $M_n \rightarrow M_\infty$ et en faisant $n \rightarrow \infty$ dans

$$S_n = M_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \lambda}, \quad (29.20)$$

nous trouvons

$$S_n \rightarrow M_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \lambda} = M_\infty + \frac{1}{\lambda} \quad (29.21)$$

qui est presque sûrement finie. △

29.2 Temps d'arrêt et martingale terminée

Définition 29.9.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité filtré. Une application $T: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ est un **temps d'arrêt** adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Le temps d'arrêt T est **borné** si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T(\omega) \leq k$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Lemme 29.10.

Si T est un temps d'arrêt presque sûrement fini, alors²

- $T \wedge n \xrightarrow{p.s.} T$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} E(T \wedge n) = E(T)$.

Démonstration. Vu que T est presque sûrement finie, il suffit de prouver que

$$(T \wedge n)(\omega) \rightarrow T(\omega) \quad (29.22)$$

pour tout ω tel que $T(\omega) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit donc $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = k$ et $n > k$. Nous avons

$$(T \wedge n)(\omega) = T(\omega) \wedge n = k = T(\omega). \quad (29.23)$$

En ce qui concerne la seconde assertion, la suite de variables aléatoires $X_x = T \wedge n$ est croissante et positive, donc le théorème de la convergence monotone 7.129 montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(T \wedge n) = E(T). \quad (29.24)$$

□

Remarque 29.11.

Notons la différence subtile entre $S_T(\omega)$ et $(S_T)(\omega)$. La première est la variable aléatoire

$$\omega' \mapsto S_{T(\omega')}(\omega) \quad (29.25)$$

et la seconde est le nombre $S_{T(\omega)}(\omega)$.

Théorème 29.12 (Théorème d'arrêt borné[305]).

Soit (X_n) une sur-martingale et $S \leq T$, deux temps d'arrêts bornés. Alors

- (1) les variables aléatoires X_S et X_T sont intégrables,
- (2) $E(X_T | \sigma(S)) \leq X_S$ presque sûrement.

Si par contre (X_n) est une martingale alors X_S et X_T sont bornées, et

$$E(X_T | \sigma(S)) = X_S. \quad (29.26)$$

Remarque 29.13.

Un cas particulier intéressant de ce théorème 29.12 est le cas $S = 0$ qui est un temps d'arrêt vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. Si X est n'importe quelle variable aléatoire, la tribu engendrée $\sigma(X)$ est toujours indépendante de la tribu $\{\Omega, \emptyset\}$, donc le résultat $E(X_T | \mathcal{F}_S) = X_S$ donne

$$E(X_T) = X_0. \quad (29.27)$$

Théorème 29.14 (Premier théorème d'arrêt de Doob[306]).

Soit (X_n) une martingale et T un temps d'arrêt; tous deux pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Nous supposons qu'une des trois propriétés suivantes soit vérifiée :

- (1) T est presque sûrement bornée.

2. Dans [1], dans le problème de la ruine du joueur, la seconde assertion est avec une limite sup et non avec une limite normale.

(2) $E(T) < \infty$ et il existe une constante c telle que

$$E(|X_{n+1} - X_n| | \mathcal{F}_n) \leq c \quad (29.28)$$

sur l'événement $\{T \geq n\}$.

(3) Il existe une constante c telle que $|X_{T \wedge n}| \leq c$ presque sûrement³.

Alors X_T est une variable aléatoire presque sûrement bien définie nous avons

$$E(X_T) = E(X_0). \quad (29.29)$$

Si (X_n) est une sur-martingale, alors la conclusion est $E(X_T) \leq E(X_0)$ et si (X_n) est une sous-martingale, la conclusion est $E(X_T) \geq E(X_0)$.

Remarque 29.15.

Sous l'hypothèse (3), il est possible d'avoir $T = \infty$ sur un ensemble de mesure non nulle. Sur cet ensemble, la variable aléatoire X_T doit être définie de façon plus fine.

Problèmes et choses à faire

D'après la page de discussion de l'article sur Wikipédia, il semblerait que la seconde condition soit mal énoncée. Je n'ai pas vérifié.

Définition 29.16.

Nous disons que la martingale $(M_n)_{n \geq 1}$ est **terminée** si il existe $M \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $E(M | \mathcal{A}_n) = M$ pour tout $n > 1$.

Définition 29.17.

Un ensemble $H \subset L^1(\Omega, \mu)$ est **équi-intégrable** si

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sup_{f \in H} \int_{|f| > a} |f(x)| d\mu(x) \right) = 0. \quad (29.30)$$

Notons dans cette définition que vu que $f \in L^1$ nous avons toujours

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|f| > a} |f(x)| d\mu(x) = 0. \quad (29.31)$$

L'équi-intégrabilité donne une sorte d'uniformité en f de cette limite.

Théorème 29.18.

Si (M_n) est une martingale, nous avons équivalence entre

- (1) (M_n) converge dans L^1 ;
- (2) (M_n) est terminée;
- (3) l'ensemble $\{M_n\}_{n \geq 1}$ est équi-intégrable.

Attention : en vertu de la proposition 18.14 et surtout de l'exemple 18.15, la convergence L^1 n'implique pas la convergence presque partout.

Théorème 29.19 (Théorème de Doob[117]).

À propos de convergence de martingales.

- (1) Toute martingale terminée converge presque sûrement et pour la norme L^1 .
- (2) Toute martingale bornée dans L^2 converge presque sûrement et pour la norme L^2 .

Proposition 29.20 ([307]).

Soit (M_n) une martingale et T un temps d'arrêt (pour la même filtration $(\mathcal{B}_n)$). Alors le processus $V_n = M_{n \wedge T}$ est une martingale.

3. Il est d'usage assez classique de noter $a \wedge b$ le minimum de a et b .

Démonstration. Nous décomposons V_n de la façon suivante :

$$V_n = M_{n \wedge T} = M_n \mathbb{1}_{T \geq n} + M_T \mathbb{1}_{T < n} = M_n \mathbb{1}_{T \geq n} + \sum_{k < n} M_k \mathbb{1}_{T=k}. \quad (29.32)$$

Nous avons, grâce au lemme 7.3,

$$\{T \geq n\} = \mathbb{C}\{T < n\} = \mathbb{C}\{T \leq n-1\} \in \mathcal{B}_{n-1} \quad (29.33)$$

et, si $k \leq n$,

$$\{T = k\} = \underbrace{\{T \leq k\}}_{\in \mathcal{B}_k} \setminus \underbrace{\{T \leq k-1\}}_{\in \mathcal{B}_{k-1}} \in \mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_n. \quad (29.34)$$

La forme (29.32) donne donc manifestement la $\mathcal{B}_n$ -mesurabilité de V_n .

En ce qui concerne l'espérance nous devons calculer

$$E(V_{n+1}|\mathcal{B}_n) = E(M_{n+1} \mathbb{1}_{T \geq n+1}|\mathcal{B}_n) + \sum_{k < n+1} E(M_k \mathbb{1}_{T=k}|\mathcal{B}_n) \quad (29.35)$$

où nous avons utilisé la proposition 26.24. Étant donné que $\mathbb{1}_{T \geq n+1}$ et $\mathbb{1}_{T=k}$ sont des variables aléatoires $\mathcal{B}_n$ -mesurables nous pouvons utiliser la proposition 26.36 pour les sortir :

$$E(V_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \mathbb{1}_{T \geq n+1} M_n + \sum_{k \leq n} \mathbb{1}_{T=k} M_k = M_{T \wedge n} = V_n. \quad (29.36)$$

Pour cela nous avons utilisé $E(M_{n+1}|\mathcal{B}_n) = M_n$ (parce que (M_n) est une martingale) et $E(M_k|\mathcal{B}_n) = M_k$ parce que M_k est $\mathcal{B}_n$ -mesurable. $\square$

Définition 29.21.

Si (X_n) est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et si T est un temps d'arrêt $\mathcal{F}_n$ -mesurable alors le **processus arrêté** à l'instant T est le processus $Y_n = X_{n \wedge T}$.

Nous avons déjà vu par la proposition 29.20 que si (X_n) est une martingale alors son processus arrêté est encore une martingale.

29.3 Décomposition de martingales

Définition 29.22 (Processus croissant prévisible[305]).

Un processus X_n adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$ est un processus **croissant prévisible** si

- (1) $A_0 = 0$
- (2) $A_n \leq A_{n+1}$; c'est cette condition qui correspond à «croissant»,
- (3) A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$ -mesurable ; c'est cette condition qui correspond à «prévisible».

Proposition 29.23 (Décomposition de Doob pour une sous-martingale[305]).

Toute sous-martingale (X_n) s'écrit de façon unique sous la forme

$$X_n = M_n + A_n \quad (29.37)$$

où (M_n) est une martingale et (A_n) est un processus croissant prévisible.

Démonstration. Nous considérons le processus

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n). \end{cases} \quad (29.38a) \quad (29.38b)$$

Nous vérifions que cela est un processus croissant prévisible. D'abord $E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - E(X_n|\mathcal{F}_n)$. Le second terme est égal à X_n parce que cette variable aléatoire est $\mathcal{F}_n$ -mesurable tandis que (X_n) étant une sous-martingale nous avons $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$. Nous avons donc bien $A_{n+1} \geq A_n$ et le processus (A_n) est croissant.

En ce qui concerne la prévisibilité nous devons prouver que A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$ -mesurable. D'une part A_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable et d'autre part par définition de l'espérance conditionnelle, la variable aléatoire $E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n)$ est également $\mathcal{F}_n$ -mesurable.

Nous posons alors $M_n = X_n - A_n$ et nous devons prouver que cela est une martingale. Nous avons

$$E(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) - E(A_{n+1} - A_n | \mathcal{F}_n). \quad (29.39)$$

Le second terme vaut

$$E(A_{n+1} - A_n | \mathcal{F}_n) = E\left(E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_n\right) = E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \quad (29.40)$$

par la proposition 26.31. Le processus (M_n) est donc une martingale. La preuve de l'existence d'une décomposition (29.37) est achevée.

Nous passons maintenant à l'unicité en posant $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$. Nous avons $A_0 = A'_0 = 0$ et $A'_n = X_n - M'_n$, donc

$$A'_{n+1} - A'_n = X_{n+1} - X_n + M'_{n+1} - M'_n = X_{n+1} - X_n - (M'_{n+1} - M'_n). \quad (29.41)$$

Nous appliquons $E(\cdot | \mathcal{F}_n)$ des deux côtés de cette égalité :

$$\underbrace{E(A'_{n+1} - A'_n | \mathcal{F}_n)}_{=A'_{n+1}-A'_n} = E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) - \underbrace{E(M'_{n+1} - M'_n | \mathcal{F}_n)}_{=0}. \quad (29.42)$$

Nous avons utilisé le fait que (M_n) étant une martingale, $E(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) = 0$, et idem avec (M'_n) . Donc

$$A'_{n+1} - A'_n = E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = E(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) + E(A_{n+1} - A_n | \mathcal{F}_n) = A_{n+1} - A_n. \quad (29.43)$$

Nous avons donc montré que $A_{n+1} - A_n = A'_{n+1} - A'_n$ et donc que $A_n = A'_n$ pour tout n . Nous en déduisons immédiatement que $M_n = M'_n$ pour tout n et l'unicité de la décomposition. $\square$

Lemme 29.24.

Si (X_n) est une martingale de carré intégrable adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ alors

- (1) Le processus (X_n^2) est une sous-martingale.
- (2) Si $X_n^2 = M_n + A_n$ est la décomposition de Doob, alors

$$A_n = \sum_{i=1}^n \left(E(X_i^2 | \mathcal{A}_{i-1}) - X_{i-1}^2 \right) = \sum_{i=1}^n E\left((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{A}_{i-1} \right). \quad (29.44)$$

Démonstration. Pour la première assertion, nous utilisons l'inégalité de Jensen 26.42 :

$$E(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \geq \left(E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \right)^2 = X_{n-1}^2 \quad (29.45)$$

parce que $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ du fait que (X_n) soit une martingale.

En ce qui concerne la seconde assertion, nous nous souvenons que le processus prévisible de la décomposition de Doob d'une sous-martingale est donné par la récurrence (29.38) que nous recopions ici :

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1}^2 - X_n^2 | \mathcal{F}_n) \end{cases} \quad (29.46a)$$

$$\quad (29.46b)$$

Vu que X_n^2 est $\mathcal{F}_n$ -mesurable, il peut sortir de l'espérance :

$$A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - X_n^2 \quad (29.47)$$

et donc

$$A_n = \sum_{i=1}^n \left(E(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}^2 \right). \quad (29.48)$$

Pour obtenir la dernière partie de (29.44) nous travaillons un peu :

$$E((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = E(X_i^2 + X_{i-1}^2 - 2X_i X_{i-1} | \mathcal{F}_{i-1}) \quad (29.49a)$$

$$= E(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2E(X_i X_{i-1} | \mathcal{F}_{i-1}) \quad (29.49b)$$

$$= E(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2X_{i-1}E(X_i | \mathcal{F}_{i-1}) \quad (29.49c)$$

$$= E(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) + X_{i-1}^2 - 2X_{i-1}X_i \quad (29.49d)$$

où nous avons utilisé la proposition 26.36 pour obtenir (29.49c). $\square$

29.4 Problème de la ruine du joueur

Nous considérons un joueur compulsif qui joue à un jeu très simple⁴ : il joue à pile ou face contre la banque avec une pièce truquée. Si pile sort, la banque donne 1 au joueur et si c'est face, c'est le joueur qui donne 1 à la banque. Nous nommons a la fortune initiale du joueur, b celle de la banque et p la probabilité d'obtenir pile.

Nous supposons que le jeu se poursuit jusqu'à la ruine du joueur ou de la banque. La modélisation est comme suit : nous considérons (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi

$$Y_n \sim p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}. \quad (29.50)$$

C'est le résultat financier pour le joueur du n^e lancé. La fortune du joueur au bout de n lancers est la variable aléatoire

$$S_n = a + \sum_{j=1}^n Y_j. \quad (29.51)$$

Nous notons $Y_0 = a$.

Nous considérons la filtration

$$\mathcal{A}_n = \sigma(S_i \text{ tel que } 0 \leq i \leq n) = \sigma(Y_i \text{ tel que } 0 \leq i \leq n), \quad (29.52)$$

et le temps d'arrêt du jeu :

$$T = \inf\{n \geq 1 \text{ tel que } S_n \in \{0, a+b\}\}; \quad (29.53)$$

c'est le temps qu'il faut pour que tout l'argent appartienne soit au joueur soit à la banque.

Nous voulons étudier les paramètres suivants :

- (1) $\rho = P(S_T = a+b)$, c'est à dire la probabilité que ce soit le joueur qui gagne contre la banque.
- (2) $P(T < \infty)$, c'est à dire la probabilité que le jeu se finisse.
- (3) $E(T)$, la durée moyenne du jeu.

Lemme 29.25.

Le processus S_n du problème de la ruine du joueur est vérifié

$$E(S_n | \mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q. \quad (29.54)$$

De plus le processus S_n est

- (1) *une martingale si $p = q = \frac{1}{2}$,*
- (2) *une sous-martingale si $p > q$.*

4. Le gros des choses dites à propos de la ruine du joueur provient de [1].

Démonstration. Pour $n \geq 1$ nous avons

$$E(S_n | \mathcal{A}_{n-1}) = a + \sum_{j=1}^n E(Y_j | \mathcal{A}_{n-1}) = a + \sum_{j=1}^{n-1} E(Y_j | \mathcal{A}_{n-1}) + E(Y_n | \mathcal{A}_{n-1}). \quad (29.55)$$

Si $j \leq n-1$ alors $Y_j \in m(\mathcal{A}_{n-1})$. Mais nous savons que si X est $\mathcal{F}$ -mesurable, alors $E(X | \mathcal{F}) = X$ (c'est la définition de l'espérance conditionnelle), donc $\sum_{j=1}^{n-1} E(Y_j | \mathcal{A}_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j$.

En ce qui concerne le terme $j = n$ nous utilisons le fait que $\sigma(Y_n)$ soit une tribu indépendante de $\mathcal{A}_{n-1}$; nous avons donc au final pour tout j que $E(Y_j | \mathcal{A}_{n-1}) = p - q$. Nous avons donc

$$E(S_n | \mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q. \quad (29.56)$$

Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors c'est une martingale, et si $p > q$ c'est une sous-martingale. $\square$

Lemme 29.26.

La variable aléatoire T est un temps d'arrêt.

Démonstration. Par définition $T = \inf\{n \geq 1 \text{ tel que } S_n \in \{0, a+b\}\}$. Vu que les variables aléatoires S_i avec $i \leq n$ sont $\mathcal{F}_n$ -mesurables, les ensembles $\{S_k \notin \{0, a+b\}\}$ avec $k \leq n$ sont $\mathcal{F}_n$ -mesurables. Donc les ensembles

$$\{T = n\} = \bigcap_{k \leq n} \{S_k \notin \{0, a+b\}\} \cap \{S_n \in \{0, a+b\}\} \quad (29.57)$$

sont $\mathcal{F}_n$ -mesurables. Nous en concluons que l'ensemble $\{T \leq n\}$ est également mesurable. $\square$

29.4.1 Le cas où la pièce est truquée

Nous supposons être dans le cas $p > q$.

29.4.1.1 Introduction d'une martingale

Considérons le processus

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_n = A_{n-1} + E(S_n - S_{n-1} | \mathcal{A}_{n-1}). \end{cases} \quad (29.58a) \quad (29.58b)$$

Vu que $E(S_n | \mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} + p - q$ (lemme 29.25) et que $E(S_{n-1} | \mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1}$ (parce que S_{n-1} est dans la tribu de $\mathcal{A}_{n-1}$), nous avons $A_n = A_{n-1} + (p - q)$ et donc

$$A_n = n(p - q). \quad (29.59)$$

Ce processus (A_n) est croissant et prévisible. Nous introduisons le processus

$$M_n = S_n - A_n \quad (29.60)$$

et nous montrons que c'est une martingale⁵. Nous conditionnons la définition (29.60) par rapport à $\mathcal{A}_{n-1}$:

$$E(M_n | \mathcal{A}_{n-1}) = E(S_n | \mathcal{A}_{n-1}) - \underbrace{E(A_n | \mathcal{A}_{n-1})}_{=A_n} \quad (29.61a)$$

$$= A_n - A_{n-1} + E(S_{n-1} | \mathcal{A}_{n-1}) - A_n \quad (29.61b)$$

$$= E(S_{n-1} | \mathcal{A}_{n-1}) - A_{n-1}. \quad (29.61c)$$

Mais S_{n-1} est $\mathcal{A}_{n-1}$ -mesurable, donc $E(S_{n-1} | \mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1}$ et

$$E(M_n | \mathcal{A}_{n-1}) = S_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}, \quad (29.62)$$

ce qui signifie que (M_n) est une martingale.

5. Ceci est un peu le contraire de la décomposition de Doob.

29.4.1.2 Finitude du temps d'arrêt

Nous montrons maintenant, en étudiant $M_{T \wedge n}$ que T est intégrable et nous prouvons que $P(T = \infty) = 0$.

Nous voulons maintenant étudier la variable aléatoire $M_{T \wedge n}$ où nous rappelons que le lemme 29.26 nous indique que T est un temps d'arrêt. Le temps d'arrêt $T \wedge n$ est borné (par n évidemment) et nous pouvons donc lui appliquer le théorème d'arrêt 29.14 pour dire que

$$E(M_{T \wedge n}) = E(M_0). \quad (29.63)$$

Le membre de droite est simple parce que $M_0 = S_0 - A_0 = S_0 = a$ parce que c'est l'argent de départ du joueur. Pour l'autre :

$$E(M_{T \wedge n}) = E(S_{T \wedge n}) - E(A_{T \wedge n}). \quad (29.64)$$

D'une part, $E(A_{T \wedge n}) = E((T \wedge n)(p - q))$ et d'autre part, $E(S_{T \wedge n}) \leq a + b$ parce que S_T vaut zéro ou $a + b$ (avec des probabilités encore inconnues⁶). En combinant avec ce qui était dit juste au dessus et remarquant que $(p - q)E(T \wedge n) \geq 0$ nous pouvons écrire

$$0 \leq (p - q)E(T \wedge n) \leq b. \quad (29.65)$$

La suite de variables aléatoires $T \wedge n$ est donc croissante, positive et intégrable⁷ et donc nous avons du travail pour le théorème de la convergence monotone 7.129. La variable aléatoire T est alors mesurable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(T \wedge n) = E(T). \quad (29.66)$$

Notons que nous n'avons pas encore prouvé que $E(T) < \infty$, mais en passant à la limite dans (29.65) nous écrivons

$$0 \leq (p - q)E(T) \leq b. \quad (29.67)$$

Maintenant nous avons prouvé que T est intégrable et même L^1 . Par conséquent

$$P(T = \infty) = 0. \quad (29.68)$$

Le jeu se termine donc presque certainement après un temps fini.

29.4.1.3 Temps moyen de jeu

Le lemme 29.10 nous indique que $S_{T \wedge n} \xrightarrow{p.s.} S_T$.

Nous avons les bornes $0 \leq S_{T \wedge n} \leq a + b$ et comme $a + b$ est intégrable, $S_{T \wedge n}$ l'est aussi et nous pouvons parler de $E(S_{T \wedge n})$. Repartons de (29.64) :

$$a = E(M_0) = E(M_{T \wedge n}) = E(S_{T \wedge n}) - E(A_{T \wedge n}) = E(S_{T \wedge n}) - (p - q)E(T \wedge n). \quad (29.69)$$

La variable aléatoire $S_{T \wedge n}$ est majorée par $a + b$ indépendamment de n ; donc le théorème de la convergence dominée 7.134 donne $\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_{T \wedge n}) = E(S_T)$. En ce qui concerne le second terme, la convergence dominée ne fonctionne pas parce que $T \wedge n$ n'est pas a priori majoré par quelque chose d'indépendant de n , mais le théorème de la convergence monotone donne $\lim_{n \rightarrow \infty} E(T \wedge n) = E(T)$. Au final en passant à la limite dans (29.69) nous avons

$$a = E(S_T) - (p - q)E(T). \quad (29.70)$$

Étant donné que $T > 0$ et $p - q > 0$ nous pouvons récrire cela sous la forme

$$0 \leq (p - q)E(T) = E(S_T) - a. \quad (29.71)$$

6. Mais on y travaille.

7. Je rappelle que les constantes sont des fonctions intégrables sur Ω . Oui, je sais, quand on est habitué à faire de l'analyse sur $\mathbb{R}^n$ c'est un truc qu'on perd toujours un peu de vue.

Par définition de T nous avons aussi

$$E(S_T) = (a + b)P(S_T = a + b) + 0 \cdot P(S_T = 0) = \rho(a + b). \quad (29.72)$$

Nous déduisons

$$E(T) = \frac{(a + b)\rho - a}{p - q}. \quad (29.73)$$

Ne crions pas victoire trop vite : nous n'avons pas encore d'expression de $\rho = P(S_T = a + b)$. Le temps moyen de jeu n'est donc pas encore tout à fait connu.

29.4.1.4 Probabilité de victoire du joueur

Nous avons besoin d'exprimer ρ en termes de a , b et p . Pour cela nous introduisons la variable aléatoire⁸

$$U_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n}. \quad (29.74)$$

Nous commençons par prouver que c'est une martingale en calculant

$$E(U_n | \mathcal{A}_{n-1}) = E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n} | \mathcal{A}_{n-1}\right) \quad (29.75)$$

Nous utilisons la proposition 26.36. Dans notre cas, S_{n-1} et Y_n sont des variables aléatoires $\mathcal{A}_n$ -mesurables ; la variable aléatoire Y_n est même $\mathcal{A}_{n-1}$ -mesurable et sort donc du conditionnement ; nous avons donc

$$E(U_n | \mathcal{A}_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right) \quad (29.76)$$

Nous allons utiliser le théorème de transfert 26.47 :

$$E(s^{Y_n}) = \int_{\Omega} s^{Y_n(\omega)} dP(\omega) = \int_{Y_n=1} s dP(\omega) + \int_{Y_n=-1} \frac{1}{s} dP(\omega). \quad (29.77)$$

Mais nous savons que $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = -1) = 1 - p = q$, donc

$$E(s^{Y_n}) = ps + \frac{1-p}{s} \quad (29.78)$$

et

$$E\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{Y_n}\right) = p + q = 1. \quad (29.79)$$

Donc

$$E(U_n | \mathcal{A}_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} = U_{n-1}, \quad (29.80)$$

ce qui prouve que (U_n) est une martingale.

Par définition nous avons toujours $S_n \geq 0$ tant que $n \leq T^9$, donc $U_{T \wedge n} \in [0, 1]$. Il est donc évident que si $a \geq 1$ nous avons

$$\int_{|U_{T \wedge n}| > a} |U_{T \wedge n}| dP = 0 \quad (29.81)$$

parce que le domaine d'intégration est vide. Donc les variables aléatoires $V_n = U_{T \wedge n}$ sont équi-intégrables¹⁰ et le théorème 29.18 montre que la martingale (V_n) est terminée ; par ricochet¹¹ le théorème de Doob 29.19 montre qu'il existe une variable aléatoire X telle que $V_n \xrightarrow{p.s.} X$. Nous

8. Nous dirons un mot sur ce choix dans le «petit complément» plus bas

9. Pour $n > T$ le jeu est terminé, donc on ne se pose pas la question.

10. Définition 29.17.

11. Nous rappelons que la convergence L^1 n'implique pas la convergence presque partout.

allons prouver que $X = U_T$ presque partout. Nous savions déjà (voir l'équation (29.22) et ses alentours) que

$$S_{n \wedge T} \xrightarrow{p.s.} S_T. \quad (29.82)$$

Nous avons alors (au sens du presque sûrement) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{T \wedge n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{T \wedge n}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_T} = U_T. \quad (29.83)$$

Donc par unicité de la limite presque partout nous avons $X = U_T$ presque partout. Par le théorème de transfert 26.47 nous évaluons

$$E(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^0 P(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} P(S_T = a+b) = (1-\rho) + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} \rho. \quad (29.84)$$

La remarque 29.13 nous permet de dire que

$$E(U_{T \wedge n}) = U_0. \quad (29.85)$$

Mais par définition

$$U_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_0} = \left(\frac{q}{p}\right)^a, \quad (29.86)$$

donc nous avons

$$E(U_{T \wedge n}) = \left(\frac{q}{p}\right)^a. \quad (29.87)$$

Nous voudrions passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans cette équation. Pour permuter la limite et l'espérance, il faut utiliser le théorème de la convergence dominée 7.134. Vu que nous avons choisi $q > p$, nous avons $q/p > 1$ et donc $U_{T \wedge n} \leq (q/p)^{a+b}$, ce qui montre que la fonction $\omega \mapsto (U_{T \wedge n})(\omega)$ est majorée par une constante (qui est une fonction intégrable). Nous pouvons donc permuter la limite et l'espérance :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(U_{T \wedge n}) = E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} U_{T \wedge n}\right). \quad (29.88)$$

Mais nous avons déjà montré que $U_{T \wedge n} \xrightarrow{p.s.} U_T$. Donc

$$E(U_T) = \left(\frac{q}{p}\right)^a. \quad (29.89)$$

En égalisant avec l'expression (29.84) de $E(U_T)$ nous trouvons

$$\rho = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} \quad (29.90)$$

et ensuite nous trouvons $E(T)$ en remettant ce ρ dans l'expression (29.73) donnée plus haut.

29.4.2 Le cas où la pièce est non truquée

Maintenant $p = q = 1/2$.

29.4.2.1 Probabilité de gagner

Le lemme 29.25 nous indique alors que (S_n) est une martingale et le lemme 29.24 nous permet de dire que (S_n^2) est alors une sous-martingale. Le processus croissant prévisible de (S_n^2) est donné par (29.38) qui en adaptant les notations est

$$\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_n = B_{n-1} + E\left((S_n - S_{n-1})^2 | \mathcal{A}_{n-1}\right). \end{cases} \quad (29.91a)$$

$$\quad (29.91b)$$

Nous avons toujours $S_n - S_{n-1} = \pm 1$ parce que soit le joueur gagne soit le joueur perd, mais de toutes façons sa fortune varie de 1 à chaque étape du jeu. Donc (29.91b) nous donne $B_n = B_{n-1} + 1$ et

$$B_n = n. \quad (29.92)$$

Cela nous dit que la variable aléatoire

$$S_n^2 - B_n = S_n^2 - n \quad (29.93)$$

est une martingale (une sur-martingale moins son processus prévisible croissant). Nous lui appliquons le théorème d'arrêt 29.12 avec les temps d'arrêt 0 et $T \wedge n$:

$$E(S_{T \wedge n}^2 - T \wedge n | \mathcal{F}_0) = S_0^2 - 0 \quad (29.94)$$

où $\mathcal{F}_0$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire 0, c'est à dire $\{\Omega, \emptyset\}$. Cette tribu est indépendante de toute autre tribu et nous pouvons donc supprimer le conditionnement dans (29.94). Nous avons aussi $S_0 = a$ par définition. Avec tout ça nous avons la majoration

$$E(T \wedge n) = E(S_{T \wedge n}^2) - a^2 \leq (a+b)^2 - a^2 \quad (29.95)$$

parce que S_k est toujours positif et entre 0 et $a+b$. En utilisant le lemme 29.10 et en passant à la limite,

$$E(T) \leq (a+b)^2 - a^2. \quad (29.96)$$

En particulier, $T \in L^1(\Omega)$ et $P(T < \infty) = 1$.

En suivant exactement les mêmes étapes que dans le lemme 29.10 nous avons aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{T \wedge n} = S_T \quad (29.97)$$

presque partout. De plus nous savons que

$$0 \leq S_{T \wedge n}^2 \leq (a+b)^2, \quad (29.98)$$

et nous pouvons donc utiliser le théorème de la convergence dominée 7.134 pour dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_{T \wedge n}^2) = E(S_T^2). \quad (29.99)$$

Nous montrons à présent que $S_{T \wedge n} \xrightarrow{L^2} S_T$. Pour cela nous devons évaluer la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |S_{T \wedge n} - S_T|^2. \quad (29.100)$$

La fonction $|S_{T \wedge n} - S_T|^2$ est majorée par $(a+b)^2$ et nous pouvons à nouveau appliquer la convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|S_{T \wedge n} - S_T|^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |S_{T(\omega) \wedge n}(\omega) - S_T(\omega)|^2 dP(\omega) = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} |S_{T \wedge n} - S_T|^2 = 0. \quad (29.101)$$

La même chose en n'écrivant pas les carrés montre que l'on a aussi $S_{T \wedge n} \xrightarrow{L^1} S_T$.

Il n'y a pas que $n \mapsto S_n^2 - n$ qui est une martingale. Il y a aussi (S_n) lui-même (lemme 29.25). Nous pouvons lui appliquer le théorème d'arrêt 29.12 pour les temps d'arrêts $T \wedge n$ et 0 :

$$E(S_{T \wedge n}) = E(S_0) = a. \quad (29.102)$$

En passant à la limite, $E(S_T) = a$. L'espérance $E(S_T)$ peut par ailleurs être calculée comme

$$E(S_T) = 0 \cdot P(S_T = 0) + (a+b)P(S_T = a+b). \quad (29.103)$$

En égalisant les valeurs (29.102) et (29.103) de $E(S_T)$ nous trouvons

$$\rho = \frac{a}{a+b}. \quad (29.104)$$

Cette formule est assez logique : la probabilité que le joueur gagne est égale à la proportion d'argent en jeu qu'il a amené.

29.4.2.2 Temps moyen de jeu

Nous calculons maintenant l'espérance $E(T)$ du temps de jeu (sans compter les pauses ni les jours de fermeture du casino¹²).

Nous recopions la première égalité de (29.95) sous la forme

$$a^2 = E(S_{T \wedge n}^2 - T \wedge n) \quad (29.105)$$

et nous passons à la limite¹³ en sachant que $E(S_T^2) = \rho(a+b)^2$:

$$a^2 = \rho(a+b)^2 - E(T). \quad (29.106)$$

En reprenant la valeur (29.104) de ρ ,

$$E(T) = ab. \quad (29.107)$$

Et là, on voit que si le joueur amène 1000 euros contre une banque qui en a un million, et si ils jouent toutes les secondes, on en a pour 32 ans de jeu en moyenne.

Voilà. C'est fini pour la ruine du joueur.

29.4.3 Un petit complément

Nous avons introduit lors de l'équation (29.74) la variable aléatoire $U_n = (p/q)^{S_n}$. Sans aller jusqu'à motiver complètement ce choix, nous nous proposons maintenant de voir que parmi les variables aléatoires $U_n = s^{S_n}$, le choix $s = p/q$ est le seul qui donne une martingale.

Soit donc $U_n = s^{S_n}$ et exprimons le fait que ce soit une martingale. Nous avons

$$E(U_n | \mathcal{A}_{n-1}) = E(s^{S_{n-1}} s^{Y_n} | \mathcal{A}_{n-1}) \quad (29.108a)$$

$$= s^{S_{n-1}} E(s^{Y_n} | \mathcal{A}_{n-1}) \quad (29.108b)$$

$$= s^{S_{n-1}} E(s^{Y_n}). \quad (29.108c)$$

Le passage à (29.108b) se justifie en disant que $s^{S_{n-1}}$ est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{A}_{n-1}$ -mesurable, et en invoquant proposition 26.36. La variable aléatoire Y_n vaut 1 avec probabilité p et -1 avec probabilité q ; donc l'espérance est vite vue :

$$E(s^{Y_n}) = ps + q\frac{1}{s} \quad (29.109)$$

et nous avons

$$E(U_n | \mathcal{A}_{n-1}) = \left(ps + q\frac{1}{s}\right) s^{S_{n-1}} = \left(ps + \frac{q}{s}\right) U_{n-1}. \quad (29.110)$$

Pour que (U_n) soit une martingale il faut (et il suffit) que

$$ps + \frac{q}{s} = 1. \quad (29.111)$$

Les solutions de cette équation sont $s \in \{1, \frac{p}{q}\}$. C'est évidemment $s = p/q$ qui donne une martingale non triviale. Attention pour être complet, il faut se demander ce qu'il se passe si $s = 0$ séparément parce que manifestement l'équation (29.111) ne traite pas ce cas. Encore une fois, en repartant du début, $s = 0$ ne se révèle pas être une martingale très excitante.

Bref, nous devons poser

$$U_n = \left(\frac{p}{q}\right)^{S_n} \quad (29.112)$$

pour avoir une martingale.

12. Le joueur est un *vrai* joueur compulsif.

13. Comme il est dit dans La Grande Illusion, à quoi sert un n ? À passer à la limite.

Chapitre 30

Processus de Poisson

30.1 Processus de Poisson

Définition 30.1.

Une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t \geq 0}$ est un **processus de Poisson** d'intensité λ si il existe une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ telles que

$$N_t = \sup\{n \geq 0 \text{ tel que } \sum_{k=1}^n T_k \leq t\}. \quad (30.1)$$

Si nous posons $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, alors nous avons une expression plus pratique pour N_t :

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}. \quad (30.2)$$

Nous avons par la proposition 26.87 vu que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est une fonction (pas du tout strictement) croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cette fonction part de 0 et fait un saut de taille 1 après des intervalles de temps $T_1(\omega)$, $T_2(\omega)$, etc. Elle est continue à droite.

Nous avons les égalités d'événements suivantes qui sont pratiques :

$$\{s < S_n \leq t\} = \{N_t \geq n > N_s\} \quad (30.3a)$$

$$\{N_t = n\} = \{S_n \leq t \leq S_{n+1}\}. \quad (30.3b)$$

Théorème 30.2.

Les variables aléatoires $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si elles vérifient les trois propriétés suivantes.

Accroissements indépendants Pour tout choix $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ sont indépendantes.

Accroissements stationnaires Si $0 < s < t$ et $h > 0$ alors

$$N_{t+h} - N_{s+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_t - N_s, \quad (30.4)$$

c'est à dire que les accroissements décalés suivent les mêmes lois.

Poisson Pour tout t nous avons $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Une conséquence des accroissements stationnaires est que $N_t - N_s \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_{t-s} - N_0 = N_{t-s}$ parce que $N_0 = 0$.

Proposition 30.3.

Si (N_t) est un processus de Poisson d'intensité λ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = +\infty \quad (30.5)$$

presque sûrement. De plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \quad (30.6)$$

presque sûrement.

La relation (30.6) est appelée **loi des grands nombres**.

Démonstration. Par définition nous savons que

$$N_t = \sup\{n \geq 0 \text{ tel que } S_n \leq t\}. \quad (30.7)$$

Évidemment la fonction $t \mapsto N_t$ est croissante, donc la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_t(\omega) \quad (30.8)$$

existe dans $[0, \infty]$. Nous pouvons nous restreindre à $t \in \mathbb{N}$ et considérer $L(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(\omega)$. Par somme télescopique avec $N_0 = 0$,

$$\frac{N_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1})}{n}. \quad (30.9)$$

Étant donné que le processus est de Poisson, les variables aléatoires $(N_k - N_{k-1})_{k=1, \dots, n}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de $N_1 - N_0$, c'est à dire la loi de N_1 . Encore par le fait que N_t soit de Poisson nous savons que $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$. La loi des grands nombres (26.68) appliquée aux variables aléatoires $N_k - N_{k-1}$ nous dit que

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E(N_1) = \lambda > 0. \quad (30.10)$$

Du coup $N_n \rightarrow \infty$ et $L(\omega) = \infty$.

Nous démontrons maintenant la loi des grands nombres pour les processus de Poisson. Étant donné que pour les entiers $N_n/n \rightarrow \lambda$, pour les réels, si la limite existe, ça ne peut pas être autre chose. Si nous notons $\bar{t}$ la partie entière de $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_t - N_{\bar{t}}}{t} + \frac{N_{\bar{t}}}{t}. \quad (30.11)$$

Le second terme est relativement simple à traiter :

$$\frac{N_{\bar{t}}}{t} = \underbrace{\frac{N_{\bar{t}}}{\bar{t}}}_{\rightarrow \lambda} \cdot \underbrace{\frac{\bar{t}}{t}}_{\rightarrow 1}. \quad (30.12)$$

où nous avons utilisé le premier point, $\bar{t}$ étant entier. Pour le premier terme nous savons que $t \mapsto N_t$ est croissante et donc que

$$\frac{N_t - N_{\bar{t}}}{t} \leq \frac{N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}}}{t} = \frac{N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}}}{\bar{t} + 1} \frac{\bar{t} + 1}{t}. \quad (30.13)$$

Le second facteur tend vers 1 lorsque $t \rightarrow \infty$. Le premier s'écrit

$$\frac{N_n - N_{n-1}}{n} \quad (30.14)$$

et tend vers zéro en tant que terme général de la série (30.9) qui converge. $\square$

Proposition 30.4.

La variable aléatoire N_t/t est un estimateur sans biais de λ . De plus il converge vers λ en moyenne quadratique.

Démonstration. Vu que $N_t/t \rightarrow \lambda$ presque sûrement, la variable aléatoire N_t/t est un estimateur de λ . Le fait qu'il soit sans biais a été fait dans l'exemple 27.25.

D'autre part nous avons (voir théorème 26.80)

$$\text{Var}\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{t^2} \text{Var}(N_t) = \frac{\lambda}{t}. \quad (30.15)$$

En appliquant la formule $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ à $X = N_t/t$ nous trouvons

$$E\left(\frac{N_t^2}{t^2}\right) = \frac{\lambda}{t} + \lambda^2. \quad (30.16)$$

Cela montre que $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{L^2} \lambda$. □

Pour le théorème central limite d'un processus de Poisson, nous visons un résultat du style de

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_i X_i - mn}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (30.17)$$

Nous écrivons le théorème central limite pour le nombre de sauts que le processus de Poisson a connu en un temps t . Le rôle de la moyenne empirique est joué par N_t . Nous considérons avoir fait *une seule expérience* qui a duré un temps t . Donc le rôle de n est joué par 1 (et non t comme on pourrait le croire). Pour le reste, le nombre de succès en un temps t d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt , en vertu de ce qui est raconté au point 26.5.8. C'est cela qui motive l'énoncé suivant.

Théorème 30.5 (Théorème central limite pour les processus de Poisson).

Si $(N_t)_{t>0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ , alors nous avons

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (30.18)$$

Remarque 30.6.

Avant de nous lancer dans la démonstration, remarquons que si nous nous limitons à $t \in \mathbb{N}$, alors nous avons

$$\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} = \frac{\sum_{k=1}^n (N_k - N_{k-1}) - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \quad (30.19)$$

or par définition nous avons les égalités de lois

$$N_k - N_{k-1} \sim N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad (30.20)$$

donc

$$\frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} = \frac{\frac{1}{n} S_n - \lambda}{\frac{\sqrt{\lambda n}}{n}} = \frac{\frac{1}{n} S_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}/\sqrt{n}}, \quad (30.21)$$

ce qui est exactement le théorème central limite pour une suite de lois de Poisson¹.

Démonstration. Nous écrivons $\bar{t}$ la partie entière de $\bar{t}$ et nous décomposons :

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \underbrace{\frac{N_t - N_{\bar{t}}}{\sqrt{\lambda t}}}_A + \underbrace{\frac{N_{\bar{t}} - \lambda \bar{t}}{\sqrt{\lambda t}}}_B + \underbrace{\frac{\lambda \bar{t} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}}_C. \quad (30.22)$$

En ce qui concerne le terme B , nous avons

$$B = \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \frac{N_{\bar{t}} - \lambda \bar{t}}{\sqrt{\lambda \bar{t}}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1). \quad (30.23)$$

1. Au fait près que nous devrions encore montrer que S_n est de carré intégrable.

Notons que nous utilisons le fait que si $a_n \rightarrow 1$ (en tant que suite de nombre) et si $X_n \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ (limite en loi), alors $a_n X_n \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ en loi.

Le terme C est également facile parce que $\lambda\bar{t} - \lambda t$ est majoré en norme par λ . Du coup

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}} \leq C \leq \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}}. \quad (30.24)$$

Donc $\lim_{t \rightarrow \infty} C = 0$.

Reste à travailler sur A . Vu que $t \mapsto N_t$ est croissante, la différence $N_t - N_{\bar{t}}$ est positive. Soit $\eta > 0$, nous avons

$$P(|A| > \eta) = P(N_t - N_{\bar{t}} > \sqrt{\lambda t} \eta) \leq P(N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}} \geq \sqrt{\lambda t} \eta) = P(N_1 \geq \eta \sqrt{\lambda t}) \quad (30.25)$$

parce que nous savons que $N_{\bar{t}+1} - N_{\bar{t}} \sim N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$. En vertu des propriétés de la loi de Poisson,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(N_1 \geq \eta \sqrt{\lambda t}) = 0. \quad (30.26)$$

En effet si Z est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ nous avons

$$P(Z > l) = \sum_{k=l}^{\infty} P(Z = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}. \quad (30.27)$$

Nous reconnaissons la queue de série de e^λ , qui tend donc vers zéro lorsque $l \rightarrow \infty$. Nous avons donc prouvé que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(|A| > \eta) = 0, \quad (30.28)$$

c'est à dire la convergence en probabilité de A vers zéro.

Nous avons montré que

$$B + C \xrightarrow{\mathcal{L}} U \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (30.29a)$$

$$A \xrightarrow{P} 0. \quad (30.29b)$$

Le lemme de Slutsky (26.59) nous avons une convergence du couple

$$(A, B + C) \xrightarrow{\mathcal{L}} (0, U). \quad (30.30)$$

Utilisant le corollaire 26.61, nous trouvons la convergence en loi

$$A + (B + C) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 + U, \quad (30.31)$$

ce qu'il fallait. □

30.2 Quelques trucs sur la simulation

Le théorème ergodique dit que

$$\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{X_k=x}. \quad (30.32)$$

C'est avec cela qu'on calcule $\pi(x)$ à partir d'une simulation de chaîne de Markov.

30.2.1 Le théorème central limite pour Markov

Théorème 30.7 (Version allégée).

Si (X_n) est irréductible et positive récurrente, alors pour toute fonction f ,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{k=1}^N -N \int f d\pi \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (30.33)$$

où σ^2 dépend de la fonction f et de la chaîne de Markov.

Ici, $\int f d\pi = \sum_{x \in E} f(x) \pi(x)$.

Nous allons simuler la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum f(X_k) - N \sum_{x \in E} f(x) \pi(x) \right] \quad (30.34)$$

et puis on va mettre sa réalisation dans un histogramme. Dans le cas où on prend $f(i) = \mathbb{1}_{i=i_0}$, il y a de la simplification dans l'intégrale qui devient

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{X_k=i_0} - N \pi(i_0) \right]. \quad (30.35)$$

30.2.2 Feuille 5

On pose

$$D_n = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|. \quad (30.36)$$

On en génère un milliers de fois D_n , on note $D_n^{(k)}$ ces réalisations, et on regarde ce que vaut

$$\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \mathbb{1}_{D_n^{(k)} \geq c}. \quad (30.37)$$

Cela nous donne une approximation de

$$P(\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \geq c). \quad (30.38)$$

Note que chacun des $D_n^{(k)}$ demande de créer un nouveau vecteur Y_i de lois qu'on veut regarder. Par exemple de loi exponentielle.

30.2.3 Feuille 6

Pour créer une fonction qui renvoie i avec probabilité p_i pour $i = 1, 2, 3$, on peut faire

$$U \sim \mathcal{U}[0, 1] \quad (30.39)$$

et puis on a

$$P(U < p_0) = p_0 \quad (30.40a)$$

$$P(p_0 < U < p_0 + p_1) = p_1 \quad (30.40b)$$

$$P(p_0 + p_1 < U < p_2) = p_2. \quad (30.40c)$$

Une façon de faire une loi uniforme $[0, 1]$ est de faire `rand`

30.2.4 Feuille 7

L'échantillon est $(Y_1, \dots, Y_n)$ et nous écrivons le vecteur

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (30.41)$$

où $Y \sim \mathcal{N}(X\beta, \sigma^2 \text{Id})$ et $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \text{Id})$. Nous utilisons le principe de maximum de vraisemblance. Soit $(y_1, \dots, y_n)$ un échantillon et

$$P_\theta(y_1, \dots, y_n) = \prod_i \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - X_i^t \beta}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (30.42)$$

L'astuce est de faire que $y_i - X_i^t \beta$ est la i ème composante du vecteur $Y - X\beta$ et donc la somme qui est dans l'exponentielle devient la norme de $Y - X\beta$:

$$f_\theta(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2} \|Y - X\beta\|^2 \right]. \quad (30.43)$$

On passe au logarithme et on dérive par rapport à σ^2 . Attention : la variable est σ^2 , donc la dérivée de σ^2 est 1 et non 2σ . Bref, on trouve

$$\sigma^2 = \frac{1}{2n} \|U + X\beta\|. \quad (30.44)$$

30.2.5 Simuler des lois conditionnelles

Nous voulons générer des couples (X, Y) tels que Y prend les valeurs 0 ou 1 et tels que

$$\begin{cases} P(X|Y=0) \sim \mathcal{E}(\lambda_0) \\ P(X|Y=1) \sim \mathcal{E}(\lambda_1). \end{cases} \quad \begin{matrix} (30.45a) \\ (30.45b) \end{matrix}$$

Le plus simple est de générer une liste

$$(X_1, 0) \quad (X_4, 1) \quad (30.46a)$$

$$(X_2, 0) \quad (X_5, 1) \quad (30.46b)$$

$$(X_3, 0) \quad (X_6, 1) \quad (30.46c)$$

avec $X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$ et $X_4, X_5, X_6 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$.

Avec cette méthode cependant la liste est triée et en plus on a autant de 1 que de 0. On peut faire un peu plus technologique pour corriger cela. Pour créer un couple, on commence par $Y \sim \mathcal{B}(p)$ et puis suivant que $Y = 0$ ou $y = 1$, on génère $X \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$ ou $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$.

Chapitre 31

Utilisation dans les autres sciences

Dans ce chapitre nous donnons des applications de divers théorèmes dans les autres sciences que la mathématique.

31.1 Démystification du MRUA

31.1.1 Preuve de la formule

Nous sommes maintenant en mesure de donner une démonstration complète de la formule du MRUA :

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0. \quad (31.1)$$

Au niveau de la physique, nous considérons un mobile qui se déplace avec une accélération constante a . Nous notons par v_0 sa vitesse initiale et par x_0 sa position initiale.

Nous savons que, pour tout mouvement, si $x(t)$ est la position en fonction du temps, et si $v(t)$ et $a(t)$ représentent la vitesse et l'accélération en fonction du temps, alors

$$v(t) = x'(t) \quad \text{et} \quad a(t) = v'(t) = x''(t). \quad (31.2)$$

Afin de trouver $x(t)$ en connaissant $a(t)$, il « suffit » donc de prendre deux fois la primitive. Essayons ça dans le cas facile du MRUA où $a(t) = a$ est constante.

La vitesse $v(t)$ doit être une primitive de la constante a . Il est facile de voir que $v(t) = at$ est une primitive de a . Par le corollaire 11.103(bis),

$$v(t) = at + C_1 \quad (31.3)$$

pour une certaine constante C_1 . Afin de fixer C_1 , il faut faire appel à la physique : d'après la formule (31.3), la vitesse initiale est $v(0) = C_1$. Donc il faut identifier C_1 à la vitesse initiale : $C_1 = v_0$. Nous avons donc déjà obtenu que

$$v(t) = at + v_0. \quad (31.4)$$

Afin de trouver $x(t)$, il faut trouver une primitive de $v(t)$. Il n'est pas très difficile de voir que $at^2/2 + v_0t$ fonctionne, donc il existe une constante C_2 telle que

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + C_2. \quad (31.5)$$

Encore une fois, regardons la condition initiale : la formule donne comme position initiale $x(0) = C_2$, et donc nous devons identifier C_2 avec la position initiale x_0 . En définitive, nous avons bien

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0. \quad (31.6)$$

Cette formule est donc maintenant *démontrée* à partir de la seule définition de la vitesse comme dérivée de la position et de l'accélération comme dérivée de la vitesse.

Remarquons cependant que la preuve complète fut *très* longue. En effet, nous avons utilisé les règles de dérivation 11.74 et 11.71, pour la démonstration desquels, les résultats 11.60 et 11.59 ont été utiles. Mais nous avons surtout utilisé le corollaire 11.103(bis) qui repose sur le théorème de Rolle 11.98, qui lui-même demande le théorème de Borel-Lebesgue 11.94 dans lequel la notion d'ensemble compact a été cruciale.

31.1.2 Interprétation graphique

La distance parcourue $x(t)$ en un temps t est la primitive de la vitesse. Nous avons, par ailleurs, que l'opération inverse de la dérivée donnait la surface. Pour reprendre les mêmes notations, nous notons $S_v(t)$ la surface contenue en dessous de la fonction v entre 0 et x . Nous ne serions donc pas étonné que

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0 \quad (31.7)$$

soit la surface en dessous de la fonction $v(t) = at + v_0$. Nous voyons que la surface totale sous la fonction $v(t) = at + v_0$ est exactement

$$S_v(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t. \quad (31.8)$$

Cela est un bon début, mais hélas nous ne retrouvons pas le terme « $+x_0$ » de la formule (31.7). Cela n'est pas tout à fait étonnant parce que nous savons que la surface sous une fonction était *une* primitive de la fonction, mais nous n'avons pas dit *laquelle*. D'après le fameux corollaire 11.103(bis), la primitive n'est définie qu'à une constante près. Ici, c'est la constante x_0 qu'on a perdue en chemin.

Nous parlerons plus en détail du lien entre les surfaces et les primitives dans la section dédiée à l'intégration.

31.2 Relativité en mécanique newtonienne

31.2.1 Relativité du mouvement

Prenons quelqu'un qui cours le cent mètres en onze secondes. Par rapport à un spectateur dans les gradins, il se sera déplacé de cent mètres. Mais si je cours à côté de lui de telle façon à avoir parcouru 80 mètres le temps qu'il en fasse cent, alors par rapport à moi l'athlète ne se sera déplacé que de 20 mètres. Par contre, par rapport à mon chronomètre, il aura également mit onze secondes : ce n'est pas parce que je cours que mon chronomètre s'affole !

Entre moi et les spectateurs, on a donc une loi de transformation

$$x' = x - vt \quad t' = t. \quad (31.9)$$

C'est à dire que la distance x' qu'aura parcouru l'athlète par rapport à moi vaut la distance x parcourue par le spectateur moins la vitesse que j'ai courue moi-même, c'est à dire moins vt .

31.2.2 Bob et Alice

Formalisons le concept de changement de repères. Pour cela, prenons deux amoureux, Bob et Alice¹. Mettons que Bob reste assis sur un banc pendant qu'Alice cours en ligne droite à une vitesse v . Tout deux déclenchent leur chronomètre quand Alice passe devant Bob. À tout moment, Bob et Alice ont leur repères de temps et d'espace. Par exemple si après un temps t , Alice voit une peau de banane à 1 mètre devant elle, elle va dire « Il y a une peau de banane à un mètre . », tandis que Bob va dire « Il y a une peau de banane à $(1 + vt)$ mètres ».

Plus généralement, si il se passe quelque chose à la position x au temps t pour Bob, ce quelque chose se passera au temps $t' = t$ à l'endroit $x' = x - vt$ pour Alice parce qu'en un temps t , elle aura déjà avancé d'une distance vt .

Ça c'est ce dont tout le monde était persuadé depuis Galilée jusqu'au début du vingtième siècle.

1. C'est plus poétique que dire « soit A et B , deux observateurs ».

31.3 Invariance de la vitesse de la lumière

31.3.1 Champ de gravitation et électrique

Nous savons que la force de gravitation s'écrit :

$$F_{grav} = G \frac{mm'}{r^2},$$

tandis que la force électrique entre deux charges q et q' est donnée par

$$F_{elec} = k \frac{qq'}{r^2}. \quad (31.10)$$

Nous avons aussi fait remarquer que dans le cas de la gravitation, la force a l'air d'être instantanée, et que cela posait quelques problèmes conceptuels. La force électrique a apparemment le même problème. Une différence entre les deux est qu'une charge électrique c'est tout petit et qu'on peut expérimenter à souhait, tandis que pour avoir une masse dont on peut mesurer le champ de gravitation correctement, il faut quelque chose grand comme la Terre².

31.3.1.1 Finitude de la vitesse de propagation de la force électrique

Si un micro est placé juste à côté de ton oreille, et qu'il commence à faire biiiiip, tu l'entends directement. Quand il s'arrête, tu ne l'entends plus. Si le micro est placé à 600 m de toi, tu ne commenceras à l'entendre que deux secondes après le commencement du son, et tu continueras à l'entendre deux secondes après qu'il ait fini.

Eh bien, pour la force électrique, on a pu mesurer que c'est la même chose (sauf que ça va beaucoup plus vite). Si on place une charge quelque part, on ne ressent la force (31.10) qu'après qu'elle ait eut le temps d'arriver. Si on déplace la charge électrique, on continue à ressentir la même force pendant un certain temps : il faut que la modification du champ électrique ait le temps d'arriver. Exactement comme quand on fait des remous quelque part dans un étang : il faut du temps que les remous arrivent plus loin.

On a pu faire des dizaines d'expériences de ce type avec l'électricité, le magnétisme et la lumière ; et les résultats sont clairs : il faut du temps pour que ça se déplace. Tout cela provoque des ondes électromagnétiques qui se déplacent à une vitesse finie. On peut produire de telles ondes avec n'importe quel courant électrique alternatif.

31.3.1.2 Pourquoi pas la gravitation ?

La gravitation telle que donnée par Newton pose le même problème de vitesse de propagation que l'électricité. Est-ce qu'en réalité la gravitation se propage également à une vitesse finie ?

Avec la gravitation c'est beaucoup plus compliqué parce qu'elle est beaucoup plus faible, et donc c'est beaucoup plus difficile à détecter. D'après la théorie d'Einstein de la gravitation, la gravitation devrait également produire des ondes gravitationnelles. Seulement, si un simple courant électrique suffit pour mesurer une onde électromagnétique, afin de mesurer une onde gravitationnelle, il faudrait un déplacement de masse de l'ampleur d'une étoile qui explose. Or ça, on ne sait pas produire dans un laboratoire. Les physiciens sont donc pour l'instant (2009) en train d'attendre qu'une étoile explose pas trop loin d'ici afin d'être capable de mesurer une onde gravitationnelle.

L'existence de ces ondes de gravitation ne fait aucun doute dans la tête d'aucun physicien parce qu'elles sont une conséquence logique (et mathématique) de la théorie de la relativité générale, laquelle a déjà eut beaucoup de confirmations expérimentales. Mais comme on est dans le cadre d'une science expérimentale, il faut être patient et attendre d'en avoir effectivement observée une avant de dire avec certitude que ça existe.

2. Une autre différence fondamentale est qu'il existe des charges électriques négatives, mais pas de masses négatives ; de ce fait on ne peut pas construire d'isolant gravitationnel, contrairement aux isolants électriques qui existent. Cela augmente encore la difficulté de faire des expériences avec la gravitation.

31.3.2 Support du champ : pas d'éther

Nous avons dit qu'une onde électromagnétique se propage comme une onde sonore (quoique beaucoup plus vite). Une question se pose alors. En effet, une onde sonore est matérialisée par de l'air qui vibre. Qu'est-ce qui vibre pour une onde électromagnétique ?

Étant donné que les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide (c'est pour ça que la radio fonctionne dans l'espace), la question est problématique. Les physiciens ont donc supposé que tout l'univers était rempli d'un fluide invisible appelé **l'éther**. L'électromagnétisme consiste en une vibration de l'éther, exactement comme l'acoustique consiste en une vibration de l'air.

En fait, vérifier cette hypothèse n'est pas très compliqué. En effet il n'y a aucune raison que l'éther suive la Terre dans son mouvement. Or la Terre se déplace à environ 30 km/s autour du Soleil. Donc les ondes électromagnétiques doivent se propager plus vite dans le sens du mouvement de la Terre que dans le sens perpendiculaire. Tout comme le son se propage plus vite dans le sens du vent.

La célèbre expérience de Michelson-Morley a mesuré cet effet ... et ce fut la consternation : il n'y a aucun effet ! Or, la lumière se déplace à 300.000 km/s ; une variation de 30 km/s devrait être détectable !

Mais rien ! On a recommencé les expériences dans tout les sens, à tous les mois de l'année, à tous les endroits de la Terre. On n'a pas observé un poil de variation de la vitesse de la lumière. Et ça, ça pose un gros problème à la physique.

31.3.3 Le problème

Si je joue au football dans un train qui avance à 100 km/h et que je lance une balle à 20 km/h, quelqu'un au sol mesura la vitesse de la balle soit à 120 km/h soit à 80 km/h d'après que l'on ait shooté vers l'avant ou l'arrière du train. Cela paraît logique. Mais ce qu'on vient de voir c'est que ça ne marche pas avec la lumière.

Si un train avance à 100.000 km/s et qu'on y allume une lampe de poche, la lumière avancera à 300.000 km/s par rapport au train et 400.000 km/s par rapport au sol. Non ! Justement pas ! La lumière avancera quand même à 300.000 km/s par rapport au sol.

Là encore, on a fait des dizaines d'expériences partout, sur Terre, dans des avions, dans l'espace avec des atomes, des lampes de poche et des horloges atomique, et dans tous les sens, le sens de déplacement de la Terre, le sens inverse, le sens perpendiculaire, vers le haut, vers le bas : rien ! Personne n'a jamais observé un rayon de lumière se déplacer à une autre vitesse que 300.000 km/s.

Le problème est que le principe d'addition des vitesses est faux pour la lumière. Puisque l'expérience nous force, nous devons faire avec.

Loi numéro 1.

La réalité est que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels. On note c cette vitesse. C'est une constante fondamentale de la Nature.

Étant donné que c'est une loi expérimentale, nous n'en pouvons rien. C'est la nature qui est comme ça. En particulier tu ne peux pas en vouloir à ton prof de physique d'avoir inventé une théorie compliquée. Ce n'est pas lui qui l'a inventée et ce n'est pas de sa faute.

31.4 Conséquences

C'est maintenant que les choses vraiment graves commencent (cela soit dit sans vouloir te faire peur). Afin d'un peu simplifier les choses, nous n'allons étudier que les mouvements en une dimension, c'est à dire sur une droite.

31.4.1 Ligne d'univers

Un événement a une coordonnée (t, x) . Si je pose un objet juste à mes pieds (disons en $x = 0$), ses coordonnées seront à tout moment $(t, 0)$. Il est bon de voir cette coordonnée comme l'équation

paramétrique d'une droite horizontale dans le plan des coordonnées t et x . Plus généralement quand un mobile effectue un mouvement $x(t)$, on appelle la **ligne d'univers** du mobile la ligne (pas forcément droite) $(t, x(t))$. Dans le premier exemple, on avait $x(t) = 0$ pour tout t .

Le cas d'un mobile se déplaçant à vitesse constante v donne comme ligne d'univers la droite³ $(t, x_0 + vt)$, et un objet qui se déplace selon un MRUA a comme ligne d'univers

$$(t, x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}).$$

31.4.2 Transformations de Lorentz

Reprenons les amours scientifiques de Bob et Alice, mais cette-fois, analysons celles-ci en tenant compte du fait que la vitesse de la lumière soit invariante. Maintenant, si Bob voit se passer quelque chose au temps t à l'endroit x , on va dire qu'Alice voit cette chose au temps t' à la position x' , et on va chercher (t', x') en fonction de (t, x) .

Posé en termes mathématiques, le problème s'énonce ainsi : trouver les fonctions f et g telles que les formules

$$t' = f(t, x) \quad (31.11a)$$

$$x' = g(t, x) \quad (31.11b)$$

donnent les coordonnées vues par Alice pour un événement vu par Bob à l'instant t au point x . Une première étape importante est franchie par la proposition suivante⁴.

Proposition 31.1.

Les fonctions f et g contenues dans les transformations (31.11) sont nécessairement linéaires (affines), c'est à dire qu'elles doivent s'écrire sous la forme

$$t' = \alpha t + \beta x + p$$

$$x' = \gamma t + \delta x + q$$

pour certaines fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p$ et q de la vitesse d'Alice relativement à Bob.

Démonstration. Pendant qu'Alice court et que Bob la regarde, Ève tente de lancer une pierre sur Alice (Ève est jalouse). Bob et Alice regardent deux événements. Le premier est la pierre qui quitte la main de Ève, et le second est la pierre qui percute le sol. Pour Bob, le jet s'est passée au temps t_0 au point x_0 , et la pierre touche le sol un petit peu plus tard, au temps $t_0 + \Delta t$ et un peu plus loin, au point $x_0 + \Delta x$. Bob écrit donc ceci sur sa feuille de papier :

$$E_1 = (t_0, x_0)$$

$$E_2 = (t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x),$$

tandis qu'Alice, en observant les mêmes deux événements, aura noté

$$E'_1 = (f(t_0, x_0), g(t_0, x_0))$$

$$E'_2 = (f(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x), g(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)).$$

Bob et Alice se demandent combien de temps la pierre est restée en l'air et quelle distance elle a parcourue. Par le principe général d'homogénéité, les deux seules quantités pertinentes (qui ont un sens physique) pour Bob sont $(t_0 + \Delta t) - t_0$ et $(x_0 + \Delta x) - x_0$, c'est à dire Δt et Δx . En effet, si Bob avait choisi de s'asseoir autre part et si Alice avait commencé à courir un peu plus tard, ça n'aurait rien changé à la longueur du jet de Ève.

D'une façon ou d'une autre, il doit exister une façon de déduire les mesures de Alice en connaissant celles de Bob ; je ne connais pas avec quelles formules, mais ces formules ne peuvent contenir que Δt , Δx et v parce que ce sont les seules quantités qui définissent tous les événements.

3. bon exercice de révision de ton cours de math de vérifier que c'est une droite.

4. dont je te suggère fortement de ne pas lire la preuve si tu ne veux pas que ton cerveau éclate.

Cela dit, Alice va caractériser le mouvement de la pierre avec la différence des coordonnées entre le jet et la chute sur le sol mesurées par elle-même. En d'autres termes, pour Alice ce qui compte c'est la différence entre E'_1 et E'_2 , soit

$$(f(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x), g(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)) - (f(t_0, x_0), g(t_0, x_0)). \quad (31.12)$$

Mais nous venons de signaler que ce qu'Alice mesurait devait pouvoir être exprimé en termes de Δt et Δx . Nous concluons que la différence (31.12) ne dépend en fait pas de x et t mais seulement de Δt et Δx .

Prenons maintenant une notation plus compacte et notons $X = (t, x)$, $\Delta X = (\Delta t, \Delta x)$ puis $F = (f, g)$. Avec ça, l'expression (31.12) se note $F(X + \Delta X) - F(X)$. Comme mentionné, cette expression ne dépend que de Δx . En particulier, elle ne dépend pas de X .

Maintenant tu vas comprendre pourquoi on apprend les dérivées dans ton cours de math. Comme $F(X + \Delta X) - F(X)$ ne dépend pas de X , le rapport $(F(X + \Delta X) - F(X))/\Delta X$ non plus. La limite de ce rapport quand ΔX tend vers zéro non plus :

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X} \quad (31.13)$$

ne dépend pas de X . Tu reconnais là la dérivée de F au point X . En d'autres termes, $F'(X)$ est constante, elle ne dépend pas de X . Disons donc que $F'(X) = a$. Tu connais beaucoup de fonctions dont la dérivée est constante ? Non ? En effet, il n'y en a pas beaucoup. Les fonctions qui vérifient $F'(X) = a$ signifie sont toutes de la forme

$$F(X) = aX + b.$$

À ce niveau, il convient de re-déballer les notations compactes : si $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $b = (p, q)$ on trouve

$$f(t, x) = \alpha t + \beta x + p \quad (31.14a)$$

$$g(t, x) = \gamma t + \delta x + q, \quad (31.14b)$$

comme annoncé. □

Nous savons que lorsque $(t, x) = (0, 0)$, alors $(t', x') = (0, 0)$. En effet, Bob et Alice ont lancés leurs chronos en même temps au moment où ils étaient au même endroit. En mettant $(t, x) = (0, 0)$ dans les équations (31.14), on trouve $(t', x') = (p, q)$, et donc $p = q = 0$. Ça fait une chose de réglée ; on se retrouve avec

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x \\ x' = \gamma t + \delta x. \end{cases} \quad (31.15a)$$

$$\quad (31.15b)$$

Quelles sont les contraintes à vérifier pour que ces transformations décrivent correctement la physique que l'on cherche à écrire ?

- (1) Il faut que les transformations décrivent correctement que Alice avance à une vitesse v par rapport à Bob,
- (2) dans le même ordre d'idée, il faut que l'on trouve que Bob avance à la vitesse $-v$ par rapport à Alice,
- (3) il faut que si Alice et Bob observent un rayon lumineux, ce rayon aille à la vitesse c par rapport à Alice et à la même vitesse c par rapport à Bob,
- (4) enfin, il faut avoir le principe de relativité, c'est à dire que comme les équations (31.15) disent ce que Alice voit en fonction de ce que Bob voit, on demande que les équations qui disent ce que Bob voit en fonction de ce que Alice voit soient les mêmes. En d'autres termes, il faut que les transformations et les transformations inverses soient les mêmes au changement près du signe de v .

Étudions une à une ce que chacune de ses contraintes impose. Rappelons que (t, x) et (t', x') sont les coordonnées que Bob et Alice mettent sur le même événement. Par exemple sur l'événement qui consiste à ce que Ève, par jalousie envers Bob, jette une peau de banane sous les pieds d'Alice. Cet événement a lieu à un certain moment, à un certain endroit. C'est ce moment et cet endroit qui sont notés (t, x) et (t', x') .

- (1) Les coordonnées (t, x) et (t', x') peuvent décrire n'importe quoi. Regardons les coordonnées de Alice qui cours. Pour Alice, cela correspond à $(t', x') = (t', 0)$ parce que si x' désigne la position de Alice par rapport à Alice, alors x' est toujours nul. Pour Bob par contre, Alice ne reste pas en place, mais se déplace à une vitesse v . C'est à dire que si (t, x) sont les coordonnées de Alice pour Bob, alors $x/t = v$. Écrivons les équations (31.15) en tenant compte de tout ça : avec $x' = 0$, la seconde équation donne

$$0 = \gamma t + \delta x, \quad (31.16)$$

d'où on déduit que $x/t = -\gamma/\delta$. En imposant que cela soit v , on trouve $\gamma = -v\delta$, et on ré-écrit les transformations en tenant compte de ça :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x \\ x' = -v\delta t + \delta x. \end{cases} \quad (31.17a)$$

$$(31.17b)$$

Nous voilà débarrassé d'un paramètre.

- (2) Maintenant, on regarde ce qu'il se passe quand (t, x) et (t', x') décrivent les positions de Bob. On a que $(t, x) = (t, 0)$ parce que selon Bob, Bob est au repos. Les équations deviennent :

$$t' = \alpha t \quad x' = -v\delta t. \quad (31.18)$$

La vitesse de Bob par rapport à Alice est $-v$, donc on exige que $x'/t' = -v$, c'est à dire que

$$\frac{-v\delta t}{\alpha t} = -v,$$

ce qui implique que $\delta = \alpha$. On avance encore un peu. Écrivons à nouveau les lois de transformation en en tenant compte :

$$\begin{cases} t' = \alpha t + \beta x \\ x' = -v\alpha t + \alpha x. \end{cases} \quad (31.19a)$$

$$(31.19b)$$

- (3) Si maintenant Bob et Alice regardent un même rayon de lumière (comme c'est romanesque!), on a que (t, x) et (t', x') expriment les coordonnées d'un rayon lumineux expriment les coordonnées d'un rayon lumineux. Le fait que Bob regarde un rayon lumineux fait que $x = ct$, et donc que les coordonnées du rayon lumineux, observé par Alice sont :

$$t' = \alpha t + \beta ct \quad x' = -\alpha vt + \alpha ct. \quad (31.20)$$

L'invariance de la vitesse de la lumière exige que Alice mesure une vitesse c pour le rayon de lumière, c'est à dire $x' = ct'$. On exige donc que

$$-\alpha vt + \alpha ct = c\alpha t + \beta c^2 t,$$

ce qui implique que

$$\beta = -\frac{\alpha v}{c^2}.$$

Une fois de plus, l'avant-dernière, on ré-écrit les lois de transformations en tenant compte de ce fait ; mais cette fois, on fait l'effort d'écrire aussi les transformations inverses :

$$t' = \alpha t - \frac{\alpha v}{c^2} x \quad t = \frac{1}{\Delta} (\alpha t' + \frac{\alpha v}{c^2} x') \quad (31.21)$$

$$x' = -\alpha vt + \alpha x \quad x = \frac{1}{\Delta} (\alpha vt' + \alpha x') \quad (31.22)$$

où $\Delta = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 v^2}{c^2}$ que tu noteras au passage être toujours positif, et nul uniquement quand $v = c$.

- (4) Maintenant il reste à imposer le principe de relativité. Les transformations (31.21) montrent comment Alice voit le monde (c'est à dire (t', x')) en fonction de la façon dont Bob voit le monde (c'est à dire (t, x)). On se demande donc quelle seraient, pour Bob, les coordonnées (t, x) d'un point vu en (t', x') par Alice. Cela signifie que l'on impose que les deux systèmes (31.21) soient en réalité les mêmes, à un changement de signe près.

Attention : il *a priori* faux de dire qu'en changeant le signe de v dans $\alpha v/c^2$, j'obtiens $-\alpha v/c^2$ parce que α est une fonction de v . En réalité, il faut noter $\alpha(v)v/c^2$ et donc le changement de signe de v donne $-\alpha(-v)v/c^2$. Ceci étant clair, on peut un petit peu calculer.

Commençons par égaliser le coefficient de x dans t' à celui de x' dans t , en changeant le signe de v :

$$\frac{\alpha(-v)v}{c^2} = \frac{\alpha(v)v}{c^2},$$

et donc $\alpha(v) = \alpha(-v)$. Ça c'est une bonne nouvelle. Égalisons maintenant le coefficient de t dans t' à celui de t' dans t en changeant le signe de v :

$$\alpha(-v) = \frac{\alpha(v)}{\Delta(v)} = \frac{\alpha(v)}{\alpha(v)^2(1 - \frac{v^2}{c^2})}.$$

Comme $\alpha(-v) = \alpha(v)$, on en déduit que

$$\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (31.23)$$

Maintenant qu'on a tout, on peut écrire les transformations de Lorentz. On met donc l'expression (31.23) dans les lois de transformations (31.21) :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) & t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) & x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (vt' + x'). \end{aligned} \quad (31.24)$$

Tu remarqueras que $\Delta = 1$; si tu ne sais pas ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, ça n'a pas d'importance. Mais si tu sais ce qu'est le déterminant d'une application linéaire, alors ce $\Delta = 1$ est crucial !

Afin d'avoir des équations un peu plus courtes, à partir de maintenant nous allons noter

$$\gamma(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

31.4.3 Conditions d'existence

Comme tu vois une racine carrée et un dénominateur dans ces formules, tu dois te demander quelles sont les conditions d'existence. Étant donné que $v < c$, on a que $v^2/c^2 \leq 1$ et en particulier, $v^2/c^2 = 1$ si et seulement si $v = c$.

Ce qui se trouve dans la racine carrée ne pose donc jamais de problèmes parce que ce n'est jamais négatif.

Le dénominateur est par contre plus problématique : quand $v = c$ il n'y a plus rien qui fonctionne. Quelle est la physique de ce problème ? Pour le comprendre, il faut se souvenir ce que représente v . Nous avons dit que v est la vitesse à laquelle Alice court. Ce que la condition d'existence nous enseigne, c'est que personne ne peut courir à la vitesse de la lumière. C'est une vitesse que l'on ne peut pas atteindre.

Dit en termes plus savants, on ne peut pas choisir un repère qui se déplace à la vitesse de la lumière.

La question qui se pose alors est « ah bon, on ne peut pas atteindre la vitesse de la lumière ! Et la lumière, comment elle fait ? ». Bonne question, merci de l'avoir posée. Hélas la réponse sort du cadre de ce cours.

Loi numéro 2.

Aucun objet ne peut atteindre la vitesse de la lumière.

Loi numéro 3.

Tu ne dois pas te demander pourquoi la lumière elle-même se déplace à la vitesse de la lumière malgré la loi numéro 2.

31.4.4 La notion d'intervalle

Un **événement** est quelque chose qui se passe à un endroit à un certain moment. C'est donc caractérisé par le moment et le lieu. Comme on travaille à une dimension, c'est un couple de réels (t, x) .

Regardons un rayon de lumière. Un événement est le fait d'allumer une lampe de poche, et un autre est le fait que la lumière arrive sur l'objet qu'on éclaire. Appelons-les (t_1, x_1) et (t_2, x_2) . Comme d'habitude, on note $\Delta t = t_2 - t_1$ et $\Delta x = x_2 - x_1$. Comme le rayon de lumière va à la vitesse c , on a $c = \Delta x / \Delta t$, ou encore

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0.$$

Pour cette raison, on va dire que l'**intervalle** entre deux événements (t_1, x_1) et (t_2, x_2) vaut en général

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2. \quad (31.25)$$

Par invariance de la vitesse de la lumière, si un intervalle est nul pour un observateur, il sera nul pour tous les observateurs.

31.4.4.1 En mécanique newtonienne

Affin de voir un peu mieux l'enjeu de l'invariance de l'intervalle, regardons un exemple chiffré. Si par exemple je me déplace de 10 m en 5 s, mon intervalle mesuré par une personne extérieure est

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = (300.000.000)^2 \cdot (5)^2 - (10)^2 = 2,25 \cdot 10^{18} \text{ m}.$$

Si je fais le calcul pour moi, j'ai que $\Delta x' = 0$ parce que je ne me déplace pas, et $\Delta t' = 5$ parce que je me suis déplacé en 5 secondes. Le truc est que à côté de $(300.000.000)^2$, l'intervalle spatial Δx ne pèse pas grand chose. Ça ne change presque rien qu'il soit de 5 mètres ou de zéro. Ça ne change pas grand chose, mais ça change quand même ! Entre moi qui calcule ou une personne extérieure, l'intervalle change de 100 sur un nombre de la grandeur de 200.000.000.000.000.000 !

Reprenons plus clairement le raisonnement. D'après la mécanique classique, l'intervalle mesuré par deux personnes est différent, mais très peu différent. Inutile de dire que du temps de Newton, on n'avait pas les moyens techniques de mesurer si cet intervalle est effectivement différent ou bien si il est en réalité égal. C'est un peu comme si on te mettait un spot dans les yeux et qu'on te demandait si c'est un spot de 1000 W ou de 1001 W. Bonne chance pour le dire !

31.4.4.2 En mécanique relativiste

Maintenant qu'on a des moyens techniques nettement plus poussés que Newton, on a pu mesurer que l'intervalle est égal. L'intervalle est un invariant. Cela n'est pas un nouveau principe physique parce qu'il découle des transformations de Lorentz.

31.4.5 Le cône de lumière d'un point

Il est intéressant de dessiner dans le plan (t, x) l'ensemble des points atteints par le rayon lumineux. Le point (t, x) est atteint si $c^2 t^2 - x^2 = 0$, ou encore si $x = \pm ct$. Cela forme deux droites dans le plan tracé par les coordonnées t et x . Ces deux droites forment ce qu'on appelle le **cône de lumière** du point $(0, 0)$.

31.4.6 Contraction des longueurs

Bob prend un morceau de bois qu'il mesure de longueur l et le dépose devant lui. À l'instant t (de Bob), les deux extrémités sont aux coordonnées $e_1 = (t, 0)$ et $e_2 = (t, l)$.

Afin de savoir quelle est la longueur de ce même morceau de bois pour Alice, il faut qu'elle mesure les deux extrémités en même temps (pour elle), et qu'elle fasse la différence. Comme Bob et Alice déclenchent leurs chronomètres en même temps, le plus simple est de faire la mesure à cet instant.

Pour Bob, c'est clair : les coordonnées des deux extrémités sont $e_1 = (0, 0)$ et $e_2 = (0, l)$. La longueur du bois est l . Pour savoir quelle est la longueur mesurée par Alice, on utilise les transformations de Lorentz qui donnent les coordonnées e'_1 et e'_2 relatives à Alice. On trouve $e'_1 = (0, 0)$ et

$$e'_2 = \left(\frac{-vl/c^2}{\gamma(v)}, \frac{l}{\gamma(v)} \right). \quad (31.26)$$

En d'autres termes, on a $x_1 = 0$ et $x_2 = l/\gamma(v)$, ce qui fait que la longueur observée par Alice est $l' = x_2 - x_1 = l/\gamma(v)$.

Eh bien ce résultat est faux. Si tu vois pourquoi sans lire la suite, tu es très fort.

Pour mesurer la longueur d'un objet, il faut mesurer la position des deux bouts *en même temps* puis faire la différence entre les deux. Effectivement, e_1 et e_2 sont en même temps pour Bob, et donc Bob peut mesurer la longueur de son bout de bois en faisant la différence $x_2 - x_1$. Mais comme le montre les coordonnées (31.26), les événements e'_1 et e'_2 ne se passent pas en même temps pour Alice ! Eh oui : $t'_1 = 0$ et $t'_2 = -vl/c^2\gamma(v)$; c'est pas la même chose.

Il faut donc trouver un événement qui pour Alice correspond à l'extrémité du bout de bois au temps $t' = 0$. Comme l'événement général qui correspond au bout du bois pour Bob est (t, l) , l'événement général est pour Alice

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}l}{\gamma(v)} \quad x' = \frac{l - vt}{\gamma(v)}. \quad (31.27)$$

Afin d'avoir $t' = 0$, il faut $t = vl/c^2$. En mettant cette valeur de t dans x' , on trouve

$$x' = \frac{l - v \left(\frac{vl}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l\gamma(v).$$

Et là, c'est la bonne formule. Si un objet a une longueur l dans le référentiel où il est au repos, il aura une longueur

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (31.28)$$

dans un référentiel qui se déplace à la vitesse v par rapport à l'objet.

31.4.7 Dilatation des intervalles de temps

Encore un petit effort et promis, je te donne une application concrète que tu connais des bizarreries de la relativité. Mais en attendant, regarde bien ta montre, tu ne va pas en croire tes yeux !

Reprenons Bob et Alice. On se rappelle que Bob et Alice avaient déclenchés leurs chronomètres en même temps quand Alice était passée devant Bob. Un peu plus tard, Alice regarde sa montre qui indique un temps t . Et elle se demande si Bob a aussi à ce moment une montre qui indique un temps t .

Ce serait dingue que non hein ! ? ! En effet, si je synchronise ma montre avec quelqu'un et que je pars faire un tour, ma montre ne sera pas tout d'un coup désynchronisée. Oui, mais Alice, elle cours presque à la vitesse de la lumière ... et à ces vitesses-là, on a déjà vu des choses incroyables. Calculons donc pour en avoir le cœur net.

Le fait qu'Alice regarde sa montre est un événement qui se passe pour Alice aux coordonnées $(t', 0)$ (le zéro c'est parce que par rapport à elle-même, Alice est toujours au repos). À quelles coordonnées (t, x) pour Bob correspond cet événement ?

L'équation de t en fonction de t' et x' dans les transformations de Lorentz (31.24) prise avec $x' = 0$ donnent

$$t = \frac{t'}{\gamma(v)}.$$

Et si, juste pour le plaisir, on faisait l'inverse ? Bob regarde sa montre, il voit un temps t et sa coordonnée spatiale est $x = 0$. À quel temps d'Alice cela correspond ? Mettons $x = 0$ dans la transformation de Lorentz de t' en fonction de t et x . Ce qu'on obtient c'est

$$t' = \frac{t}{\gamma(v)}.$$

N'est-ce pas génial ? C'est la même ! Évidemment, ça ne pouvait pas être autre chose : le principe de relativité demande qu'on ne puisse pas faire la différence entre Alice qui cours vers la droite avec Bob assis et Alice assise avec Bob qui cours vers la gauche. C'est exactement pour ça que dans une gare, quand le train d'à côté démarre, il t'arrive de croire que c'est ton train qui démarre : tu ne peux pas faire la différence, c'est un principe physique.

31.4.8 Invariance de l'intervalle

Dans deux secondes, je vais te montrer comment une utilisation intelligente des exponentielles permet de trouver un résultat très fort en relativité. Quoi ? Les exponentielles, les mêmes qu'au cours de math ? Eh oui : la même exponentielle que celle qu'on t'a introduit avec des populations de bactéries qui se multiplient, cette même exponentielle qui a la miraculeuse propriété d'être égale à sa propre dérivée.

Mais n'anticipons pas.

Nous avons déjà signalé que si la quantité $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ était nulle pour un observateur, alors elle était nulle pour tous les observateurs. Supposons deux événements A et B observés par Alice et Bob. Bob les note aux coordonnées (t_a, x_a) , et (t_b, x_b) tandis qu'Alice les note en (t'_a, x'_a) et (t'_b, x'_b) .

L'intervalle entre les deux événements mesuré par Bob sera

$$s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2,$$

tandis que ce même intervalle mesuré par Alice sera

$$s'^2 = c^2(t'_b - t'_a)^2 - (x'_b - x'_a)^2.$$

On peut bien entendu remplacer dans la première équation les t_a , t_b , x_a et x_b par leurs valeurs en termes de t'_a , t'_b , x'_a et x'_b données par les transformations de Lorentz. Tu paries que les trois quart des termes dans le calcul se simplifient et qu'il restera exactement s'^2 ? Je te dis que oui, et je te conseille de me croire sur parole, sinon tu vas devoir lire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} s^2 = c^2(t_b - t_a)^2 - (x_b - x_a)^2 &= c^2 \left(\frac{1}{\gamma(v)}(t'_b + \frac{v}{c^2}x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(t'_a + \frac{v}{c^2}x'_a) \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{\gamma(v)}(vt'_b + x'_b) - \frac{1}{\gamma(v)}(vt'_a + x'_a) \right)^2. \end{aligned}$$

Jusqu'ici, on n'a fait que remplacer les choses par leurs valeurs données par les transformations de Lorentz. Maintenant on regroupe à l'intérieur de chaque parenthèse les termes de façon à faire

apparaître $\Delta x'$ et $\Delta t'$:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2} \left((t'_b - t'_a) + \frac{v}{c^2} (x'_b - x'_a) \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2} \left((x'_b - x'_a) + v(t'_b - t'_a) \right)^2 \\ &= \frac{c^2}{\gamma(v)^2} \left((\Delta t')^2 + 2\frac{v}{c^2} \Delta t' \Delta x' + \frac{v^2}{c^4} (\Delta x')^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma(v)^2} \left((\Delta x')^2 + 2v \Delta x' \Delta t' + v^2 (\Delta t')^2 \right). \end{aligned}$$

Là, on a utilisé le produit remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, et on a systématiquement renommé tous les intervalles avec la notation Δ pour être plus compact. Maintenant, on va regrouper tous les termes contenant $(\Delta t')^2$ ensemble, tous ceux qui contiennent $\Delta t' \Delta x'$ ensemble et ceux qui contiennent $(\Delta x')^2$ ensemble. Autre manière de le dire, on met les Δ en évidence comme on peut. On trouve ceci :

$$\begin{aligned} (\Delta t')^2 \left(\frac{c^2}{\gamma(v)^2} - \frac{v^2}{\gamma(v)^2} \right) &+ \Delta t' \Delta x' \left(\frac{2vc^2}{\gamma(v)^2 c^2} - \frac{2v}{\gamma(v)^2} \right) \\ &+ (\Delta x')^2 \left(\frac{c^2 v^2}{c^4 \gamma(v)^2} - \frac{1}{\gamma(v)^2} \right). \end{aligned}$$

À partir de là, je te laisse vérifier (en utilisant le fait que $\gamma(v)^2 = 1 - v^2/c^2$) que les coefficients se simplifient beaucoup et valent finalement respectivement c^2 , 0 et -1 comme il se doit. Avec tout ça, nous avons montré le résultat très important suivant :

L'intervalle entre deux événements est invariant sous les changements de repères d'inertie, c'est à dire que la valeur mesurée par n'importe qui qui se déplace en MRU sera toujours la même.

Pourquoi cela est tellement important ? À cause de Pythagore et d'une petite démonstration à coups d'exponentielles⁵.

31.4.8.1 Rappel de trigonométrie hyperbolique

Les fonctions de trigonométrie hyperboliques sont :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (31.29)$$

Elles ont pas mal de propriétés en commun avec les sinus cosinus et normaux. D'abord, leurs dérivées sont faciles à calculer :

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

où tu noteras qu'il n'y a pas de signe moins qui apparaît, contrairement au cas de la trigonométrie normale. Une autre propriété qui ressemble fort à une propriété de la trigonométrie est :

Proposition 31.2.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad (31.30)$$

avec un signe moins comme différence avec la trigonométrie.

5. oui oui tout ton cours de math va finir par y passer.

Démonstration. La preuve revient simplement à calculer en utilisant le produit remarquable de $(a + b)^2$. D'abord, on a :

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

où l'on a utilisé le fait que $(e^x)^2 = e^{2x}$ et que $e^x e^{-x} = 1$. Il te reste à faire la même chose pour $\sinh^2(x)$, la réponse est :

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}).$$

En faisant la différence entre les deux, il reste 1. □

Une propriété qui est par contre très différente entre la trigonométrie plane et la trigonométrie hyperbolique, c'est la périodicité. Les fonctions usuelles $\cos$ et $\sin$ sont périodiques. Pas les fonctions hyperboliques.

Proposition 31.3.

La fonction $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

Démonstration. Il faut démontrer que sinus hyperbolique est injective et surjective. Calculons d'abord les limites. Comme tu sais que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, tu vois facilement que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty. \qquad (31.31)$$

Par ailleurs, la fonction sinus hyperbolique est continue et respecte donc le théorème de la valeur intermédiaire⁶ 11.50. Soit $y \in \mathbb{R}$ et voyons si il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x) = y$. Les deux limites indiquent qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x_1) < y$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x_2) > y$. Le théorème de la valeur intermédiaire conclut qu'il existe un x entre x_1 et x_2 tel que $\sinh(x) = y$. Cela prouve la surjectivité.

Pour l'injectivité, on va utiliser le théorème de Rolle et une petite preuve par l'absurde. Supposons que $\sinh(x_1) = \sinh(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$. Dans ce cas, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un x entre x_1 et x_2 tel que $\sinh'(x) = 0$. La dérivée de sinus hyperbolique étant cosinus hyperbolique, il faut se demander il existe un x tel que $\cosh(x) = 0$. Étant donné que $e^x > 0$ pour tout x , en fait le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais. □

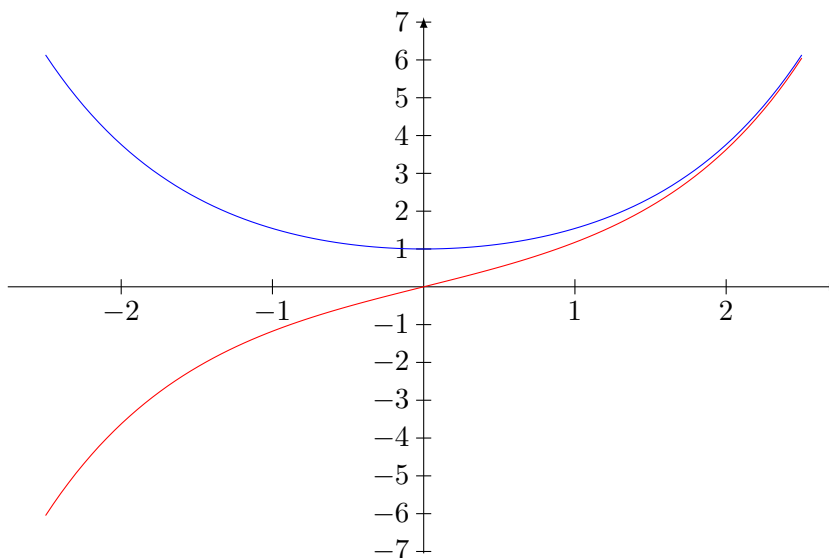


FIGURE 31.1 – En rouge, la fonction $x \mapsto \sinh(x)$ et en bleu, la fonction $x \mapsto \cosh(x)$.

6. Je t'avais dit que tout tons cours de math allait y passer hein.

Un très bon exercice serait de faire un étude complète des fonctions cosinus et sinus hyperbolique. Leur graphes sont donnés à la figure 31.1

Un corollaire de la surjectivité de $\sinh$ sur $\mathbb{R}$ est que si je prends n'importe quel deux nombres dont la différence des carrés vaut 1, alors ces carrés sont représentables avec des fonctions hyperboliques :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2 - y^2 = 1, \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 = \cosh(\xi) \text{ et } y^2 = \sinh(\xi).$$

La **tangente hyperbolique** est définie par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \quad (31.32)$$

Un bon exercice est de prouver les deux relations suivantes :

$$\sinh(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}} \quad \cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(x)}}. \quad (31.33)$$

31.4.8.2 Les transformations de Lorentz (bis)

Nous avons prouvé qu'en relativité, l'intervalle est un invariant. Pour cela, nous avons utilisé les transformations de Lorentz démontrées à partir de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière. Eh bien, oublions un instant que la vitesse de la lumière soit invariante, et posons à la place comme hypothèse que l'intervalle soit invariant. C'est à dire que si Bob mesure un événement aux coordonnées (t, x) et Alice en (t', x') , alors $c^2 t^2 - x^2 = c^2 (t')^2 - (x')^2$.

Théorème 31.4.

Les transformations de Lorentz sont les seules qui laissent l'intervalle invariant.

Démonstration. Toute la partie comme quoi les transformations doivent être linéaires reste parce que cette partie ne demandait pas l'invariance de la vitesse de la lumière.

Nous cherchons donc les transformations entre Alice et Bob sous la forme

$$\begin{aligned} t' &= \alpha t + \beta x \\ x' &= \gamma t + \delta x \end{aligned}$$

telles que $c^2 (t')^2 - (x')^2 = c^2 t^2 - x^2$. Lorsque Alice passe devant Bob, ils déclenchent tout deux leurs chronomètre et leurs axes. C'est à dire que si à ce moment un événement se trouve à droite pour Alice, il est aussi à droite pour Bob. On doit donc avoir, quand $t = t' = 0$, que $x > 0$ implique $x' > 0$. Cela donne la contrainte que $\delta > 0$. D'autre part, comme leurs chronomètres vont dans le même sens (ils choisissent tout les deux de *compter* le temps et non *décompter*), on a que $\alpha > 0$.

En développant l'expression de $(s')^2$ en termes de t et x , on trouve la condition d'invariance de l'intervalle sous la forme :

$$c^2(\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta tx + \beta^2 x^2) - (\gamma^2 t^2 + 2\gamma\delta tx + \delta^2 x^2) = c^2 t^2 - x^2, \quad (31.34)$$

qui doit être valable pour tout t et pour tout x . En $t = 0$ on trouve la condition

$$\delta^2 - c^2 \beta^2 = 1. \quad (31.35)$$

Cela implique qu'il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\delta^2 = \cosh^2(\xi)$ et $c^2 \beta^2 = \sinh(\xi)$. La première équation donne $\delta = \cosh(\xi)$ (il faut rejeter $\delta = -\cosh(\xi)$ parce qu'on a demandé que $\delta > 0$). Pour la seconde, on trouve $c\beta = \sinh(\xi)$ où l'on peut oublier la possibilité $c\beta = -\sinh(\xi)$ parce que cela revient juste à renommer $\xi \rightarrow -\xi$ (la fonction sinus hyperbolique est impaire). Bref, il existe un ξ tel que

$$\begin{aligned} \delta &= \cosh(\xi) \\ \beta &= \frac{\sinh(\xi)}{c} \end{aligned} \quad (31.36)$$

En mettant maintenant $x = 0$ dans la condition (31.34), on trouve la condition

$$\alpha^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} = 1.$$

Pour les mêmes raisons qu'avant, il existe un $\eta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}\alpha &= \cosh(\eta) \\ \gamma &= c \sinh(\eta).\end{aligned}\tag{31.37}$$

Rien qu'en regardant deux cas très particuliers, on a déjà bien avancé, non ? Remettons maintenant les valeurs (31.36) et (31.37) dans la condition (31.34). En utilisant l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, et en séparant les termes en t^2 , x^2 et tx pour satisfaire la condition, il faut

$$\cosh(\eta) \sinh(\xi) = \sinh(\eta) \cosh(\xi)\tag{31.38}$$

parce que les termes en t^2 et x^2 donnent exactement $c^2 t^2 - x^2$ et qu'il faut que le terme en tx s'annule. Mettons la condition (31.38) au carré, et substituons $\cosh^2(\eta) = 1 + \sinh^2(\eta)$ et $\cosh^2(\xi) = 1 + \sinh^2(\xi)$, il reste

$$\sinh^2 \xi = \sinh^2 \eta,$$

ce qui signifie $\sinh \xi = \pm \sinh \eta$, ou encore $\xi = \pm \eta$. On voit que $\xi = -\eta$ ne fonctionne pas dans (31.38), donc on reste avec $\xi = \eta$ et les transformations prennent la forme

$$\begin{aligned}t' &= \cosh(\xi)t + \frac{\sinh(\xi)}{c}x \\ x' &= c \sinh(\xi)t + \cosh(\xi)x.\end{aligned}\tag{31.39}$$

Ce que nous avons prouvé, c'est qu'il existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que les transformations entre Alice et Bob aient cette forme. Il faut trouver ce que vaut ξ en fonction de la vitesse v à laquelle Alice court.

Pour ce faire, étudions le mouvement d'Alice. Bob la voit aux coordonnées (t, vt) , ce qui correspond à

$$x' = c \sinh(\xi)t + \cosh(\xi)vt$$

pour Alice. Mais ces coordonnées sont celles de Alice elle-même, donc $x' = 0$, ce qui donne⁷ $vt = -c \sinh(\xi)t / \cosh(\xi)$, ou encore

$$\tanh(\xi) = -\frac{v}{c}\tag{31.40}$$

En utilisant les relations (31.33), on trouve

$$\cosh(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \sinh(\xi) = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{31.41}$$

En remettant ces valeurs dans les transformations (31.39), on trouve

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\gamma(v)}\tag{31.42}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\gamma(v)},\tag{31.43}$$

exactement les transformations de Lorentz !

□

Ce résultat est important pour une raison assez simple : maintenant, la théorie de la relativité est indépendante de toute considérations sur la lumière. En effet, ce que nous venons de prouver, c'est que si il existe une vitesse c telle que $c^2 t^2 - x^2 = c^2 (t')^2 - (x')^2$, alors (t, x) et (t', x') sont liés par les transformations de Lorentz.

⁷. Conditions d'existence : $\cosh(\xi) \neq 0$; heureusement, nous avons vu que le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais.

31.4.9 Vitesse limite

Afin de nous passer de l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière, nous avons prouvé que l'hypothèse d'invariance de l'intervalle était suffisante. Mais il faut avouer que cette hypothèse n'est pas très intuitive. Nous allons montrer maintenant que l'existence d'une vitesse limite est une troisième hypothèse qui peut être utilisée comme alternative aux deux premières.

31.5 Applications

Une première application sympa est le logiciel⁸ *lightspeed*. Si tu es sous Ubuntu-Linux, installe juste le paquet nommé *lightspeed*, et régales-toi ! Tu verras c'est marrant. Si tu utilise des fenêtres, je laisse faire l'adage « Windows c'est facile ».

31.5.1 Le GPS

Pour qu'un système GPS puisse te localiser, en gros, il t'envoie un signal, tu lui réponds et il mesure le temps qu'il a fallu à la lumière pour faire l'aller-retour. Déjà, tu remarques que cela n'est possible que grâce au fait que la vitesse de la lumière soit finie. Sinon, le GPS ne fonctionnerait pas. Mais il y a mieux.

Comme pour te localiser il faut plusieurs satellites en plus de ton appareil, il faut que les horloges internes de tout ce petit monde soient bien synchronisées, sinon pour mesurer des intervalles de temps et calculer des distances, c'est mal parti. Eh mais un satellite, ça bouge assez vite (surtout que les mesures doivent être très précises), et en plus ça ne fait même pas un MRU, vu que ça tourne en rond. Comme tu vois tout le travail qu'il a fallu faire pour trouver les transformations de Lorentz d'un MRU, tu t'imagines le travail pour un mouvement circulaire ! Eh bien ce travail a été fait, et le résultat est que si on en tient pas compte, les contractions temporelles liées à la relativité sont suffisamment grandes pour complètement dérégler le GPS.

31.5.2 Les ondes électromagnétiques

Tu te souviens qu'au début du chapitre, nous avons dit que le problème qui a amené la relativité était la propagation du champ électrique. Maintenant que nous avons déjà vu une partie des conséquences du problème, il est temps de se rendre compte que les champs électriques et magnétiques sont les objets les plus soumis aux bizarreries relativistes du monde : elles se propagent à la vitesse de la lumière. Regarde un coup autour de toi ; tout ce qui est champ électromagnétique a besoin de la relativité pour être bien compris : GSM, lumière, four à micro-onde, radio, wifi, fibre optique, ...

Si un jour un ingénieur te dit qu'il n'y a pas besoin de connaître la relativité pour inventer la radio (c'est vrai : la radio a été inventée avant la relativité), ni pour construire une fibre optique, dis lui en pensant à moi qu'il utilise tout le temps les équations de Maxwell⁹, et que ces équations sont relativistes.

Bref, soit convaincu que tu vis dans un monde relativiste et que les transformations de Lorentz te suivent à chacun de tes pas.

31.6 Mécanique relativiste

Cela est bien beau, mais la dilatation du temps, et les contractions de longueurs doivent bien avoir des répercussions sur la cinématique et la dynamique des objets. Est-ce que le théorème de l'énergie cinétique est encore valable ? est-ce que les lois de Newton tiennent encore la route ?

8. jeu de mot sur « application » ! ah ah !

9. C'est sous ce nom là qu'on nome l'ensemble des équations de l'électromagnétisme comme la loi de l'induction.

31.6.1 Des problèmes, toujours des problèmes

Attardons-nous un peu pour faire quelques commentaires sur cette citation du chevalier Pégase dans les chevaliers du zodiaque :

Ses coups vont à la vitesse de la lumière et pourtant je les vois distinctement arriver.

Est-ce possible ? Nous avons vu qu'il y avait des dénominateurs qui s'annulent quand des objets se déplacent plus vite que la lumière ; or pour voir venir un rayon de lumière qui vient vers soi, il faudrait que le rayon émette de la lumière devant elle. Ça semble un peu mal parti pour respecter les lois de la relativité, non ?

Cela pose en tout cas une question qu'il faudra résoudre. On *entend* venir une ambulance parce qu'elle émet du son qui avance plus vite qu'elle. Pas de problèmes avec ça. Mais quid de la *voir* venir ?

On peut voir venir un tram parce qu'il émet de la lumière ; cette lumière allant plus vite que le tram, elle arrive à nos yeux avant le tram lui-même. Cela est très bien. Mettons que le tram avance à 50 km/h ; pour le conducteur, la lumière de son phare avant avance devant lui à la vitesse c . Par conséquent pour un observateur au sol, cette même lumière devrait avancer à la vitesse $c + 50$. Encore une fois, on a un problème d'invariance de la vitesse de la lumière ; mais comme c'est de la lumière, on est habitué à ce que des trucs bizarres arrivent. On ne sera pas étonné que $c + 50 = c$ d'une manière ou d'une autre¹⁰. Pire. Si un vaisseau spatial avance à la vitesse 200000 km/s et qu'il envoie en reconnaissance un vaisseau devant lui à la vitesse de 150000 km/s, le vaisseau de reconnaissance ira à la vitesse 150000 km/s par rapport au vaisseau principal. Et par rapport au sol, il ira à la vitesse $150000 + 200000 = 350000$ km/s, ce qui est impossible. Il faudra trouver quelque chose pour que ça se passe bien.

Un autre problème maintenant.

Prenons une masse m que l'on soumet à une force constante F . Par la loi de Newton, $a = F/m$ est constante et la vitesse après un temps t vaut $v = Ft/m$. Pas de bol, ça devient plus grand que la vitesse de la lumière à partir du temps $t = cm/F$. Ça est un problème hein ? Il faut trouver un truc pour qu'avec une force constante, l'accélération diminue.

31.6.2 Loi d'addition des vitesses

Si Bob observe un objet se déplacer à la vitesse V , alors Alice devrait l'observer bouger à la vitesse $V - v$. Tout comme si une vache voit passer un train à 90 km/h, alors le vélo qui avance à 25 km/h le voit passer à 65 km/h.

Maintenant, tu es habitué à ce que rien ne se passe comme d'habitude, donc tu te doutes bien qu'en réalité la bonne formule ne va pas être $V - v$.

Bob observe l'objet aux coordonnées (t, Vt) , ce qui fait pour Alice :

$$\left(\frac{t - \frac{v}{c^2} Vt}{\gamma(v)}, \frac{Vt - vt}{\gamma(v)} \right).$$

En divisant le x' d'Alice par le t' d'Alice, on trouve la vitesse mesurée par Alice :

$$V' = \frac{(V - v)t}{\gamma(v)} \frac{\gamma(v)}{t(1 - \frac{vV}{c^2})} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

La loi de transformation des vitesses relativiste est donc

$$V' = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}. \quad (31.44)$$

Qu'en est-il de notre $c + 50 = c$? Disons que Bob lance un bisou à Alice pendant qu'elle arrive vers lui. Le bisou arrive à la vitesse de la lumière (càd $V = c$) tandis que Alice s'approche de Bob

10. et je ne te cache pas que c'est ce qui va arriver.

à la vitesse 50 m/s (càd $v = 50$). Donc la vitesse à laquelle Alice devrait voir arriver le bisou est bien $c + 50$. En utilisant la formule d'addition relativiste des vitesses (31.44), nous trouvons

$$V' = \frac{c - 50}{1 - \frac{50c}{c^2}} = \frac{c - 50}{1 - \frac{50}{c}} = \frac{c(c - 50)}{c - 50} = c.$$

Donc effectivement en relativité quand on additionne des vitesses il faut penser à la règle du « $c + 50 = c$ ».

31.6.3 L'action d'une force

L'équation fondamentale de la mécanique classique est

$$F = ma.$$

Or tu n'es pas sans savoir que l'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps. Nous noterions donc $F = mx''(t)$. Le problème est évidemment que si F est constante, on trouve $v = Ft/m$ qui dépasse toujours la vitesse c quand t est assez grand. Il faudra donc modifier la loi $F = ma$. Pour cela, posons-nous des questions sur la dérivée $x'(t)$. On dérive par rapport au temps ; oui mais nous avons vu que le temps n'est pas le même pour tout le monde. Introduisons donc la notation

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (31.45)$$

qui ne signifie rien d'autre que nous dérivons x par rapport à t et non par rapport au temps t' de quelqu'un d'autre. Dans le cadre de la relativité, ce que signifie l'équation (31.45) est que v est la dérivée de x par rapport à t . Dans le cas où x et t sont les coordonnées de la position d'Alice mesurées par Bob, cela signifie qu'on dérive la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Bob*.

Ce que dit la relativité est que cette quantité v ne peut pas varier proportionnellement à la force sous peine de dépasser la vitesse de la lumière. La subtilité est de modifier la loi de Newton en disant que la quantité qui varie sous l'action d'une force n'est plus $dx/dt = v$, mais

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

c'est à dire la dérivée de la position *mesurée par Bob* par rapport au temps *mesuré par Alice* ! La loi de Newton $v = Ft/m$ devient donc

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ft}{m}. \quad (31.46)$$

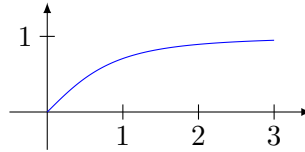
Est-ce que cela résout le problème ? Pour le savoir, regardons la vitesse acquise par le mobile de masse m soumis à la force F pendant un temps t . Il faut résoudre l'équation (31.46) par rapport à v et voir si cela reste bien toujours inférieur à c . On commence par mettre la racine à droite et à élever toute l'équation au carré :

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{F^2 t^2}{m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ v^2 \left(1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2} \right) &= \frac{F^2 t^2}{m^2} \\ v &= \frac{\sqrt{F^2 t^2 / m^2}}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2}}}, \end{aligned}$$

et donc finalement

$$v(t) = \frac{Ft}{m \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2}}}. \quad (31.47)$$

Tu dois remarquer que si F et t ne sont pas trop grands, l'expression $F^2 t^2 / c^2 m^2$ est minuscule parce que c est énorme. Si on fait l'approximation $F^2 t^2 / c^2 m^2 = 0$ dans cette expression, on retrouve $v = Ft/m$. Cela montre qu'à moins de faire des expériences avec de très grandes forces pendant énormément de temps, on ne peut pas voir la différence entre la mécanique de Newton et la mécanique relativiste.



Sur le graphe suivant, la vitesse en fonction du temps lorsqu'une particule de masse $m = 1$ est soumise à une force constante. Pour les besoins du graphique, nous avons mis à 1 la vitesse c . Tu vois que quand la vitesse n'est pas très grande, le graphique est presque celui d'une droite ; et à partir d'un certain moment, la courbe s'infléchit pour tendre vers 1 sans l'atteindre.

Remarque que si on maintient une accélération constante égale à celle de la gravité terrestre pendant deux heures, on arrive déjà sur la Lune, à une vitesse de 75 km/s, c'est à dire encore rien par rapport à la vitesse de la lumière ! Cela pour te dire que la formule (31.47) a l'air d'être très différente de la formule classique $v = Ft/m$, mais en réalité tant qu'on n'atteint pas des forces énormes, elle ressemble très fort.

Vérifions maintenant que la formule (31.47) n'est pas en contradiction avec l'impossibilité de dépasser la vitesse de la lumière. Pour cela, regardons ce qu'il se passe si on applique une force constante F sur un objet de masse m pendant un temps très long. C'est à dire : calculons la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t).$$

Tu vois tout de suite qu'on est sur un cas $\frac{\infty}{\infty}$, ce qui t'oblige à utiliser la règle de l'Hospital. On peut cependant un peu réfléchir et deviner la réponse sans passer par des math trop compliquées.

En effet, quand t est vraiment énorme, l'expression $\frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}$ devient très grande, et le 1 qui se trouve à côté ne vaut plus grand chose, on peut le négliger.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ft}{m \sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{c^2 m^2}}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ft}{m \sqrt{\frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}}} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Ft}{m \frac{Ft}{cm}} \\ &= c. \end{aligned} \tag{31.48}$$

Tout est bien : on arrive au maximum à la vitesse de la lumière, mais il faut un temps infini pour y parvenir. Conclusion : il n'est pas possible d'accélérer un objet jusqu'à atteindre la vitesse de la lumière.

31.6.4 Équivalence entre la masse et l'énergie

Le moment est venu de montrer ce que signifie la fameuse formule $E = mc^2$.

31.7 Principe de correspondance

Nous ne sommes pas parvenu à démontrer la formule (31.46) de la mécanique relativiste qui montre comme un objet accélère sous l'effet d'une force constante. Nous avons juste montré qu'il fallait modifier la loi $v = Ft/m$ et nous avons prit la première modification qui nous soit tombée sous la main, à savoir qu'il faut dériver la position par rapport au temps de l'objet qu'on observe plutôt que par rapport au temps de l'observateur.

En fait, il est possible de prouver rigoureusement ¹¹ la formule

$$\frac{Ft}{m} = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Mais il n'y a pas moyen de trouver la valeur de la constante α . Tout ce qu'il y a moyen de trouver avec l'hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière est l'existence d'une constante telle que cette formule soit vraie.

Afin de fixer la constante α , il faut faire intervenir un principe physique supplémentaire, le **principe de correspondance**

Loi numéro 4.

Lorsque la vitesse d'une particule est faible, les équations doivent être en première approximation les mêmes que celles de la mécanique classique.

Que signifie *en première approximation* ? Tu sais qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ peut être approximée (pour des petits x) par la formule

$$f(x) \simeq f(0) + xf'(0).$$

Nous voudrions donc que Ft/m soit en première approximation égal à v . Nous devons étudier la fonction

$$f(v) = \frac{\alpha v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Voir ce que vaut cette fonction en première approximation lorsque v est petit est un exercice de dérivation. En utilisant la règle de dérivation des fractions, on trouve que

$$f'(v) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\alpha v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

et donc que $f'(0) = \alpha$. Bien entendu, $f(0) = 0$. En première approximation, nous trouvons donc

$$f(v) \simeq \alpha v \tag{31.49}$$

qui doit être égal à la quantité non relativiste v . Nous en déduisons qu'il faut fixer $\alpha = 1$, et on tombe sur la formule relativiste proposée plus haut

$$\frac{Ft}{m} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'utilisation cruciale du principe de correspondance a une répercussion énorme sur notre vision de la physique. En effet, la relativité d'Einstein ne parvient pas à *remplacer* la mécanique de Newton. On a besoin d'invoquer la mécanique de Newton pour fixer la théorie. On peut écrire l'axiome suivant :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \text{Einstein} = \text{Newton}. \tag{31.50}$$

Cela n'est pas une propriété de la théorie d'Einstein, mais un de ses axiomes !

La relativité ne fait donc pas table rase des principes physiques de la mécanique newtonienne : elle les complète et les contient.

11. Mais il n'existe pas de démonstrations simples à ma connaissance.

Chapitre 32

Exemples avec Sage

Ce chapitre est un fourre-tout de choses que l'on peut faire avec Sage.

Certains exemples utilisent ce module qui sert à automatiser certaines tâches : `outilsINGE.py`

```
1 # -*- coding: utf8 -*-
2 from sage.all import *
3
4 """
5 This module provides _pragmatic_ tools for solving exercise for
6 a first year in general mathematics.
7 """
8
9 # TODO : trouver une bonne traduction pour "point de selle."
10
11 def automatedVar(symbol,n):
12     """ If symbol = "x" and n=4, return the string 'x1,x2,x3,x4' ←
13         """
14     s = ",".join([ symbol+str(i) for i in range(1,n+1)])
15     return s
16
17 class SolveLinearSystem(object):
18     """
19     Solve Ax=v and print it in a nice way
20
21     Example :
22
23     A=matrix([ [1,-2,3,-2,0],[3,-7,-2,4,0],[4,3,5,2,0] ])
24     v=vector((0,0,0,0,0))
25     print SolveLinearSystem(A,v)
26     """
27     def __init__(self,A,v):
28         self.matrix = A
29         self.vector = v
30         self.nvars = A.ncols()
31         s = automatedVar("x",self.nvars)
32         self.xx=var(s)
33     def equations(self):
34         """Return the equations corresponding to the
35             self.matrix and self.vector as a list of equations←
36             """
37         X=matrix([self.xx[i] for i in range(0,self.nvars) ]).←
```

```

        transpose()
36 eqs=[]
37 for i in range(0,self.matrix.nrows()):
38     exp = (self.matrix*X)[i][0]==self.vector[i]
39     eqs.append(exp)
40     return eqs
41 def solutions(self):
42     return solve(self.equations(),self.xx)
43 def latex(self):
44     """Return the LaTeX's code of the system."""
45     a=[]
46     a.append(r"""
47
48         \item
49         $
50         \left\{
51         \begin{array}{ll}
52     """)
53     for eq in self.equations():
54         a.append("          "+str(eq).replace("x","x_").replace("*"↵
55         ,").replace("==","=")+"\\\\ \n")
56     a.append(r"""
57         \end{array}
58         \right.
59         $
60         """)
61     return "".join(a)
62 def __str__(self):
63     a = []
64     a.append("The given matrix corresponds to the system")
65     for eq in self.equations():
66         a.append(str(eq))
67     a.append("And the solutions are")
68     a.append(str(self.solutions()))
69     return "\n".join(a)
70 def QuadraticMap(A,v):
71     """
72     Return the result of the quadratic form associated
73     with A applied on the vector v, that is the number
74      $\sum_{i,j} A_{ij} v_i v_j$ 
75     using the summation convention.
76     """
77     n = A.nrows()
78     if not A.is_symmetric():
79         print "Warning : Given matrix is not symmetric"
80     if not A.is_square():
81         raise TypeError,"Error : The matrix A is not square"
82     if not v.degree()==n :
83         raise TypeError,"The size do not agree"
84     return sum([ A[i,j]*v[i]*v[j] for i in range(n) for j in range(↵
85         n) ] ).simplify_full()

```



```

86 class SymmetricMatrix(object):
87     """
88     Provide informations about the matrix A assuming it is symmetric↵
89     """
90     def __init__(self,A):
91         if not A.is_square():
92             print "Error : A symmetric matrix must be square"
93             raise TypeError
94         self.matrix = A
95         self.degree = A.nrows()
96         self.matrix.set_immutable()
97     def primary_principal_submatrix(self,n):
98         """
99         Return the primary principal submatrix of order n, that is the↵
100             matrix obtained
101             by removing the n last lines and columns from self↵
102             .
103         """
104         taille=self.degree-n
105         v=[]
106         for i in range(0,taille):
107             v.append(self.matrix[i][0:taille])
108         return matrix(v)
109     def principal_minors(self):
110         """
111         Return the list of principal minors. The principal minor of ↵
112             order k is
113             the determinant of the primary principal matrix of↵
114             order k.
115         """
116         a=[]
117         for i in range(self.degree):
118             a.append(self.primary_principal_submatrix(i).determinant())
119         return a
120     def genre_list(self):
121         """
122         Return the genius of the matrix as a list of booleans in the ↵
123             order
124             positive defined, negative defined;
125             semidefinite positive, semidefinite negative, ↵
126             indefinite.
127         """
128         defpos = True
129         defneg = True
130         semidefpos = True
131         semidefneg = True
132         indefinie=True
133         mineurs = self.principal_minors()
134         for i in range(len(mineurs)):
135             m = mineurs[i]
136             if m == 0:

```

```

132         defneg=False
133         defpos=False
134     if m < 0:
135         defpos=False
136         semidefpos=False
137         if i%2==0:
138             defneg=False
139     if m > 0:
140         semidefneg=False
141         if i%2==1:
142             defneg=False
143     if 0 not in mineurs:
144         semidefneg=False
145         semidefpos=False
146     if (defpos==True)or(defneg==True)or(semidefpos==True)or(←
        semidefneg==True):indefinie=False
147     return [defpos,defneg,semidefpos,semidefneg,indefinie]
148 def __str__(self):
149     return str(self.matrix)
150
151 class QuadraticForm(SymmetricMatrix):
152     """
153     From a symmetric matrix A, provide informations concerning the ←
        associated quadratic form.
154     """
155     def __init__(self,A):
156         SymmetricMatrix.__init__(self,A)
157         if not A.is_symmetric():
158             print "Warning : matrix is not symmetric"
159     def evaluate(self,v):
160         """
161         Return the value of the quadratic form on the vector v.
162         """
163         return QuadraticMap(self.matrix,v)
164     def diagonalizing_martrix(self):
165         """
166         Return the matrix B such that B^tAB is diagonal.
167         """
168         # The transposition is because, in the matrix B, the ←
            eigenvectors have
169         # to be read as column while Sage's matrix constructor takes ←
            rows.
170         return matrix(self.orthonormal_basis()).transpose()
171     def new_variables(self):
172         """
173         Give the change of variables needed to put the quadratic form ←
            under its normal form
174         X=BY
175         where X are the "old" variables
176         """
177         variables = var(automatedVar("y",self.degree))
178         Y = vector(variables)
179         return self.diagonalizing_martrix()*Y

```

```

180 def eigenmatrix_left(self):
181     return self.matrix.eigenmatrix_left()
182 def eigenvectors(self):
183     """
184     Return a list of eigenvectors of the matrix.
185
186     As the matrix is symmetric, that list has to be a basis.
187     """
188     D,P = self.eigenmatrix_left()
189     return [P[i] for i in range(P.nrows())]
190 def eigenvalues(self):
191     """
192     Return a list of eigenvalues of the matrix in the same order ←
193     as the list of eigenvectors given in
194     self.eigenvectors()
195     """
196     D,P = self.eigenmatrix_left()
197     return [ D[i,i] for i in range(D.nrows()) ]
198 def orthonormal_basis(self):
199     """
200     Return a basis of eigenvectors normalised to 1 as a list.
201     """
202     M,mu = matrix(self.eigenvectors()).gram_schmidt()
203     return [ v/v.norm() for v in M ]
204 def verification(self):
205     """
206     return the value of the quadratic form on the vector ←
207     new_variables()
208     """
209     return self.evaluate(self.new_variables())
210
211 def __str__(self):
212     a = []
213     a.append("Hi guy; I'm the quadratic form associated with the ←
214     matix")
215     a.append(str(self.matrix))
216     a.append("My eigenvalues and eigenvectors are : ")
217     veps = self.eigenvectors()
218     vaps = self.eigenvalues()
219     for i in range(len(veps)):
220         a.append("%s -> %s"%(str(vaps[i]),str(veps[i])))
221     a.append("I've the following orthonormal basis of eigenvectors←
222     :")
223     for v in self.orthonormal_basis():
224         a.append(str(v))
225     a.append("A matrix B such that B^tAB is diagonal is ")
226     a.append(str(self.diagonalizing_martrix()))
227     a.append("I'm quite pretty in the following variables ...")
228     for i in range(self.degree):
229         a.append("x%s = %s"%(str(i+1),str(self.new_variables()[i]))←
230         )
231     a.append("Look at me when I wear my cool variables")
232     a.append(str(self.verification()))

```

```

228     return "\n".join(a)
229
230 class Extrema(object):
231     """
232     From a function f, provides the informations for the study of ↵
233     the extrema :
234     partial derivative
235     critical points
236     Hessian matrix at the critical points
237     Genius of the Hessian and conclusion as local min/max
238
239     Dear student : remember that this class does not furnish any ↵
240     informations
241     concerning *global* extrema. The latter have to be found
242     among the critical points OR on the border of the domain.
243     """
244     def __init__(self,f):
245         var('x,y')
246         self.fun = f
247         self.gx=self.fun.diff(x).full_simplify()
248         self.gy=self.fun.diff(y).full_simplify()
249         self.gxx=self.gx.diff(x).simplify_full()
250         self.gxy=self.gx.diff(y).full_simplify()
251         self.gyy=self.gy.diff(y).full_simplify()
252         self.cp = solve( [self.gx(x,y)==0,self.gy(x,y)==0],[x,y] )
253     def critical_points(self):
254         """
255         Return the critical points as a list of tuples (x,y)
256         """
257         a = []
258         for pt in self.cp :
259             try :
260                 px = SR(pt[0].rhs())
261                 py = SR(pt[1].rhs())
262                 a.append((px,py))
263             except TypeError :
264                 a.append(" I'm not able to solve these equations.")
265         return a
266     def hessienne(self,a,b):
267         return matrix(SR,2,2,[self.gxx(a,b),self.gxy(a,b),self.gxy(a,↵
268         b),self.gyy(a,b)])
269     def __str__(self):
270         a = []
271         a.append ("The function :")
272         a.append(str(self.fun))
273         a.append ("Derivative x and y :")
274         a.append(str(self.gx))
275         a.append(str(self.gy))
276         a.append ("Hessian matrix :")
277         a.append(str(self.hessienne(x,y)))
278         a.append ("Critical points :")
279         for pt in self.critical_points() :
280             a.append(str(pt))

```

```

278     for pt in self.critical_points():
279         try :
280             px = pt[0]
281             py = pt[1]
282             a.append("At (%s,%s), the Hessian is"%(str(px),str(py)))
283             try :
284                 Hess = SymmetricMatrix(self.hessienne(px,py))
285                 for l in Hess.matrix:
286                     a.append(" "+str(l))
287                 a.append(" Primary principal minors are %s"%str(Hess.←
                    principal_minors()))
288                 l = Hess.genre_list()
289                 if l[0]==True:
290                     a.append(" Hessian positive defined")
291                     a.append(" local minimum")
292                 if l[1]==True:
293                     a.append(" Hessian negative defined")
294                     a.append(" local maximum")
295                 if l[2]==True:
296                     a.append(" Hessian positive semidéfinite")
297                     a.append(" I don't conclude")
298                 if l[3]==True:
299                     a.append(" Hessian negative semidefinite")
300                     a.append(" I don't conclude")
301                 if l[4]==True:
302                     a.append(" Undefined Hessian")
303                     a.append(" «selle» point")
304             except RuntimeError,data :
305                 a.append(" "+str(data))
306         except TypeError :
307             a.append(" I'm not able to solve these equations.")
308     return "\n".join(a)

```

outilsINGE.py

Exemple 32.1

Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x) \cos(x)}{x} \quad (32.1)$$

```

var('x')
f(x)=sin(x)*cos(x)/x
limit(f(x),x=oo)

```

La première ligne déclare que la lettre x désignera une variable. Pour la troisième ligne, notez que l'infini est écrit par deux petits « o ». △

Exemple 32.2

Quelques limites et graphes avec Sage.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$.

Pour effectuer cet exercice avec Sage, il faut taper les lignes suivantes :

```
sage: var('x,a,b')
```

```
(x, a, b)
sage: f(x)=sin(a*x)/sin(b*x)
sage: limit( f(x),x=0 )
a/b
```

Noter qu'il faut déclarer les variables x , a et b .

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-2}$$

```
sage: f(x)=(sqrt(x**2+1))/(x-2)
sage: limit(f(x),x=oo)
1
sage: limit(f(x),x=-oo)
-1
```

Noter la commande pour la racine carré : `sqrt`. Étant donné que cette fonction diverge en $x = 2$, si nous voulons la tracer, il faut procéder en deux fois :

```
sage: plot(f,(-100,1.9))
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
sage: plot(f,(2.1,100))
Launched png viewer for Graphics object consisting of 1 graphics primitive
```

La première ligne trace de -100 à 1.9 et la seconde de 2.1 à 100 . Ces graphiques vous permettent déjà de voir les limites. Attention : ils ne sont pas des *preuves* ! Mais ils sont de sérieux indices qui peuvent vous inspirer dans vos calculs.

△

Exemple 32.3

Calculer les dérivées partielles $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_x^2 f$, $\partial_{xy}^2 f$, $\partial_{yx}^2 f$ et $\partial_y^2 f$ des fonctions suivantes.

(1) $2x^3 + 3x^2y - 2y^2$	(3) $\tan(x/y)$
(2) $\ln(xy^2)$	(4) $\frac{xy^2}{x+y}$

Le script Sage suivant (`exoDV002.sage`) résout l'exercice :

```
1 # -*- coding: utf8 -*-
2
3 def LesCalculs(f):
4     print "Pour la fonction %s"%str(f)
5     print "d_x",f.diff(x).simplify_full()
6     print "d_y",f.diff(y).simplify_full()
7     print "d^2_x",f.diff(x).diff(x).simplify_full()
8     print "d_xd_y",f.diff(x).diff(y).simplify_full()
9     print "d_yd_x",f.diff(y).diff(x).simplify_full()
10    print "d^2_y",f.diff(y).diff(y).simplify_full()
11    print ""
12
13 def exercice_DV002():
14     var('x,y')
15     fa(x,y)=2*x**3+3*x**2*y-2*y**2
```

```

16 fb(x,y)=ln(x*y**2)
17 fc(x,y)=tan(x/y)
18 fd(x,y)=x*y**2/(x+y)
19 LesCalculs(fa)
20 LesCalculs(fb)
21 LesCalculs(fc)
22 LesCalculs(fd)

```

exoDV002.sage

La sortie est :

Pour la fonction $(x, y) \mapsto 2x^3 + 3x^2y - 2y^2$

$d_x(x, y) \mapsto 6x^2 + 6xy$

$d_y(x, y) \mapsto 3x^2 - 4y$

$d^2_x(x, y) \mapsto 12x + 6y$

$d_{xd_y}(x, y) \mapsto 6x$

$d_{yd_x}(x, y) \mapsto 6x$

$d^2_y(x, y) \mapsto -4$

Pour la fonction $(x, y) \mapsto \log(xy^2)$

$d_x(x, y) \mapsto 1/x$

$d_y(x, y) \mapsto 2/y$

$d^2_x(x, y) \mapsto -1/x^2$

$d_{xd_y}(x, y) \mapsto 0$

$d_{yd_x}(x, y) \mapsto 0$

$d^2_y(x, y) \mapsto -2/y^2$

Pour la fonction $(x, y) \mapsto \tan(x/y)$

$d_x(x, y) \mapsto 1/(y \cos(x/y)^2)$

$d_y(x, y) \mapsto -x/(y^2 \cos(x/y)^2)$

$d^2_x(x, y) \mapsto 2 \sin(x/y)/(y^2 \cos(x/y)^3)$

$d_{xd_y}(x, y) \mapsto -(2x \sin(x/y) + y \cos(x/y))/(y^3 \cos(x/y)^3)$

$d_{yd_x}(x, y) \mapsto -(2x \sin(x/y) + y \cos(x/y))/(y^3 \cos(x/y)^3)$

$d^2_y(x, y) \mapsto 2(x^2 \sin(x/y) + xy \cos(x/y))/(y^4 \cos(x/y)^3)$

Pour la fonction $(x, y) \mapsto xy^2/(x + y)$

$d_x(x, y) \mapsto y^3/(x^2 + 2xy + y^2)$

$d_y(x, y) \mapsto (2x^2y + xy^2)/(x^2 + 2xy + y^2)$

$d^2_x(x, y) \mapsto -2y^3/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$

$d_{xd_y}(x, y) \mapsto (3xy^2 + y^3)/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$

$d_{yd_x}(x, y) \mapsto (3xy^2 + y^3)/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$

$d^2_y(x, y) \mapsto 2x^3/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$

△

Exemple 32.4

Résoudre les systèmes suivants.

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
(3) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} & (9) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases} \\
(4) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} & (10) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \\
(5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} & (11) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\
(6) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} & (12) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \\
(7) \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} & (13) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \\
(8) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} & (14) \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}
\end{array}$$

Nous résolvons les systèmes en utilisant Sage avec le script suivant.

```

1 # -*- coding: utf8 -*-
2 """
3 Ce script Sage résout un certain nombre
4 de systèmes d'équations linéaires du cours INGE1121
5 """
6
7 import outilsINGE
8
9 def exercice_1_1_bcdefhi():
10     # Exercice 1.1.b (INGE1121)
11     A=matrix([ [1,-2,3,-2,0],[3,-7,-2,4,0],[4,3,5,2,0] ])
12     v=vector((0,0,0,0,0))
13     print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
14     # Exercice 1.1.c (INGE1121)
15     A=matrix([ [2,1,-2,3],[3,2,-1,3],[3,3,3,-3] ])
16     v=vector((0,4,9))
17     print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
18     # Exercice 1.1.d (INGE1121)
19     A=matrix([ [1,2,-3],[2,5,2],[3,-1,-4] ])
20     v=vector((0,0,0))
21     print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
22     # Exercice 1.1.e (INGE1121)
23     A=matrix([ [1,2,-1],[2,5,2],[1,4,7],[1,3,3] ])
24     v=vector((0,0,0,0))
25     print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
26     # Exercice 1.1.f (INGE1121)
27     A=matrix([ [1,1,1,1],[1,1,1,-1],[1,1,-1,1],[1,-1,1,1] ])
28     v=vector((0,4,-4,2))
29     print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)

```



```

30 # Exercice 1.1.h (INGE1121)
31 A=matrix([ [1,3,3],[1,3,4],[1,4,3] ])
32 v=vector((1,0,3))
33 print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
34 # Exercice 1.1.i (INGE1121)
35 A=matrix([ [1,-3,2],[-3,3,-1],[2,-1,0] ])
36 v=vector((-6,17,3))
37 print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)

```

ex011.sage

Le résultat est le suivant :

The given matrix corresponds to the system

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 == 0$$

$$3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 == 0$$

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 == 0$$

And the solutions are

```

[
[x1 == -23/16*r19, x2 == -5/16*r19, x3 == 15/16*r19, x4 == r19, x5 == r18]
]

```

The given matrix corresponds to the system

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 == 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 == 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 == 9$$

And the solutions are

```

[
[x1 == 3*r20 - 7, x2 == -4*r20 + 11, x3 == r20, x4 == 1]
]

```

The given matrix corresponds to the system

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 == 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 == 0$$

$$3x_1 - x_2 - 4x_3 == 0$$

And the solutions are

```

[
[x1 == 0, x2 == 0, x3 == 0]
]

```

The given matrix corresponds to the system

$$x_1 + 2x_2 - x_3 == 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 == 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 == 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 == 0$$

And the solutions are

```

[
[x1 == 9*r21, x2 == -4*r21, x3 == r21]
]

```

The given matrix corresponds to the system

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 == 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 == 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 == -4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 == 2$$

And the solutions are

```

[
[x1 == 1, x2 == -1, x3 == 2, x4 == -2]
]

```

The given matrix corresponds to the system

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 == 1$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 == 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 == 3$$

And the solutions are

```
[
[x1 == -2, x2 == 2, x3 == -1]
]
```

The given matrix corresponds to the system

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 == -6$$

$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 == 17$$

$$2x_1 - x_2 == 3$$

And the solutions are

```
[
[x1 == 37, x2 == 71, x3 == 85]
]
```

△

Exemple 32.5

Pour chacun des systèmes suivants $A \cdot X = B$,

(1) Résoudre le système par échelonnement,

(2) Calculer A^{-1} ,

(3) Vérifier votre réponse en calculant $A^{-1}B$. Qu'êtes-vous censé obtenir ?

Les énoncés sont

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (32.2)$$

Nous utilisons Sage pour fournir la réponse. Le code suivant résout le système et donne l'inverse de la matrice :

```
1 # -*- coding: utf8 -*-
2
3 import outilsINGE
4
5 def exercise_1_3():
6     A=matrix([[2,1,-2],[3,2,2],[5,4,3]])
7     v=vector((10,1,4))
8     print outilsINGE.SolveLinearSystem(A,v)
9     print "Matrice inverse :"
10    print A.inverse()
```

exo13.sage

La sortie est ici :

The given matrix corresponds to the system

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 == 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 == 1$$

```

5*x1 + 4*x2 + 3*x3 == 4
And the solutions are
[
[x1 == 1, x2 == 2, x3 == -3]
]
Matrice inverse :
[ 2/7 11/7 -6/7]
[ -1/7 -16/7 10/7]
[ -2/7 3/7 -1/7]

```

△

Exemple 32.6

Sachant que $(-1, 0, 1, 0)$ est un vecteur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (32.3)$$

- (1) Diagonaliser A au moyen d'une matrice orthogonale
- (2) Écrire la forme quadratique $X^t A X$ sous forme d'une somme pondérée de carrés.

Calculons Av afin de savoir la valeur propre associée au vecteur donné :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32.4)$$

La valeur propre est donc 3. Nous savons donc que $(\lambda - 3)$ pourra être factorisé dans le polynôme caractéristique.

Pour le reste de l'exercice c'est standard et c'est résolu de la façon suivante :

```

1 # -*- coding: utf8 -*-
2
3 import outilsINGE
4
5 def exercice_6_5():
6     A=matrix(QQ,4,4,[2,1,-1,1,1,0,1,1,-1,1,2,1,1,1,1,0])
7     x=outilsINGE.QuadraticForm(A)
8     print x

```

exo65.sage

qui retourne

```

Hi guy; I'm the quadratic form associated with the matix
[ 2  1 -1  1]
[ 1  0  1  1]
[-1  1  2  1]
[ 1  1  1  0]
My eigenvalues and eigenvectors are :
3 -> (1, 0, -1, 0)

```

```

3 -> (0, 1, 2, 1)
-1 -> (1, 0, 1, -2)
-1 -> (0, 1, 0, -1)
I've the following orthonormal basis of eigenvectors :
(1/2*sqrt(2), 0, -1/2*sqrt(2), 0)
(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)
(1/6*sqrt(6), 0, 1/6*sqrt(6), -1/3*sqrt(6))
(-1/2*sqrt(1/3), 3/2*sqrt(1/3), -1/2*sqrt(1/3), -1/2*sqrt(1/3))
A matrix B such that B^tAB is diagonal is
[ 1/2*sqrt(2)      1/2      1/6*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
[      0          1/2          0      3/2*sqrt(1/3)]
[ -1/2*sqrt(2)     1/2      1/6*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
[      0          1/2     -1/3*sqrt(6) -1/2*sqrt(1/3)]
I'm quite pretty in the following variables ...
x1 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 + 1/2*sqrt(2)*y1 + 1/6*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
x2 = 3/2*sqrt(1/3)*y4 + 1/2*y2
x3 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 - 1/2*sqrt(2)*y1 + 1/6*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
x4 = -1/2*sqrt(1/3)*y4 - 1/3*sqrt(6)*y3 + 1/2*y2
Look at me when I wear my cool variables
3*y1^2 + 3*y2^2 - y3^2 - y4^2

```

△

Exemple 32.7

Rechercher les extrema des fonctions suivantes

- (1) $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$
- (2) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
- (3) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$

Les corrigés sont créés par le script Sage `exo101.sage`

```

# -*- coding: utf8 -*-

import outilsINGE

def exercise_10_1_A():
    var('x,y')
    f(x,y)=2-sqrt(x**2+y**2)
    print outilsINGE.Extrema(f)
def exercise_10_1_B():
    var('x,y')
    f(x,y)=x**3+3*x*y**2-15*x-12*y
    print outilsINGE.Extrema(f)
def exercise_10_1_C():
    var('x,y')
    f(x,y)=x**3/3+4*y**3/3-x**2-3*x-4*y-3
    print outilsINGE.Extrema(f)

```

Des réponses :

- (1) The function :
 $(x, y) \mapsto -\sqrt{x^2 + y^2} + 2$

```

Derivative x and y :
(x, y) |--> -x/sqrt(x^2 + y^2)
(x, y) |--> -y/sqrt(x^2 + y^2)
Hessian matrix :
[-sqrt(x^2 + y^2)*y^2/(x^4 + 2*x^2*y^2 + y^4)      x*y/(x^2 + y^2)^
[      x*y/(x^2 + y^2)^(3/2) -sqrt(x^2 + y^2)*x^2/(x^4 + 2*x^2*y^2 +
Critical points :
(0, 0)
At (0,0), the Hessian is
power::eval(): division by zero

```

Ici nous voyons que Sage a du mal à calculer la matrice Hessienne en $(0,0)$. En effet, nous tombons sur une division par zéro. Pour résoudre l'exercice, il faut se rendre compte que la fonction $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est toujours positive et est nulle seulement au point $(0,0)$. Donc f est toujours plus petite ou égale à deux tandis que $f(0,0) = 2$. Le point est donc un maximum global.

- (2) The function :
- ```

(x, y) |--> x^3 + 3*x*y^2 - 15*x - 12*y
Derivative x and y :
(x, y) |--> 3*x^2 + 3*y^2 - 15
(x, y) |--> 6*x*y - 12
Hessian matrix :
[6*x 6*y]
[6*y 6*x]
Critical points :
(2, 1)
(1, 2)
(-1, -2)
(-2, -1)
At (2,1), the Hessian is
(12, 6)
(6, 12)
Primary principal minors are [108, 12]
Hessian positive defined
local minimum
At (1,2), the Hessian is
(6, 12)
(12, 6)
Primary principal minors are [-108, 6]
Undefinite Hessian
«selle» point
At (-1,-2), the Hessian is
(-6, -12)
(-12, -6)
Primary principal minors are [-108, -6]
Undefinite Hessian
«selle» point
At (-2,-1), the Hessian is
(-12, -6)
(-6, -12)
Primary principal minors are [108, -12]
Hessian negative defined
local maximum

```

- (3) The function :

```

(x, y) |--> 1/3*x^3 - x^2 + 4/3*y^3 - 3*x - 4*y - 3
Derivative x and y :
(x, y) |--> x^2 - 2*x - 3
(x, y) |--> 4*y^2 - 4
Hessian matrix :
[2*x - 2 0]
[0 8*y]
Critical points :
(3, 1)
(-1, 1)
(3, -1)
(-1, -1)
At (3,1), the Hessian is
(4, 0)
(0, 8)
Primary principal minors are [32, 4]
Hessian positive defined
local minimum
At (-1,1), the Hessian is
(-4, 0)
(0, 8)
Primary principal minors are [-32, -4]
Undefinite Hessian
«selle» point
At (3,-1), the Hessian is
(4, 0)
(0, -8)
Primary principal minors are [-32, 4]
Undefinite Hessian
«selle» point
At (-1,-1), the Hessian is
(-4, 0)
(0, -8)
Primary principal minors are [32, -4]
Hessian negative defined
local maximum

```

△

### Exemple 32.8

Déterminer les valeurs extrêmes et les points de selle des fonctions suivantes.

- (1)  $f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y$ .                      (3)  $f(x, y) = e^x \sin(y)$ .  
 (2)  $f(x, y) = e^{x^2+xy}$ .

Certains corrigés de cet exercice ont été réalisés par Sage. Le script utilisé est `exo103.sage`

```

1 # -*- coding: utf8 -*-
2
3 import outilsINGE
4

```

```

5 def exercise_10_3_A():
6 var('x,y')
7 f(x,y)=x**2+4*x+y**2-2*y
8 print outilsINGE.Extrema(f)
9
10 def exercise_10_3_H():
11 var('x,y')
12 f(x,y)=exp(x**2+x*y)
13 print outilsINGE.Extrema(f)
14
15 def exercise_10_3_Q():
16 var('x,y')
17 f(x,y)=exp(x)*sin(y)
18 print outilsINGE.Extrema(f)

```

exo103.sage

Des réponses :

(1) The function :

$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 4x - 2y$

Derivative x and y :

$(x, y) \mapsto 2x + 4$

$(x, y) \mapsto 2y - 2$

Hessian matrix :

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Critical points :

$(-2, 1)$

At  $(-2,1)$ , the Hessian is

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Primary principal minors are  $[4, 2]$

Hessian positive defined

local minimum

(2) The function :

$(x, y) \mapsto e^{(x^2 + xy)}$

Derivative x and y :

$(x, y) \mapsto (2xe^{(x^2)} + ye^{(x^2)})e^{(xy)}$

$(x, y) \mapsto xe^{(x^2 + xy)}$

Hessian matrix :

$\begin{bmatrix} (4xye^{(x^2)} + y^2e^{(x^2)} + 2(2x^2 + 1)e^{(x^2)})e^{(xy)} & (x^2y)e^{(x^2 + xy)} \\ (x^2y)e^{(x^2 + xy)} & (2x^2 + 1)e^{(x^2 + xy)} \end{bmatrix}$

Critical points :

$(0, 0)$

At  $(0,0)$ , the Hessian is

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Primary principal minors are  $[-1, 2]$

Undefinite Hessian

«selle» point

(3) The function :

$(x, y) \mapsto e^x \sin(y)$

Derivative x and y :

```

(x, y) |--> e^x*sin(y)
(x, y) |--> e^x*cos(y)
Hessian matrix :
[e^x*sin(y) e^x*cos(y)]
[e^x*cos(y) -e^x*sin(y)]
Critical points :
 I'm not able to solve these equations.
 I'm not able to solve these equations.
At (,I), the Hessian is
 I'm not able to solve these equations.
At (,I), the Hessian is
 I'm not able to solve these equations.

```

Ici, Sage n'est pas capable de résoudre les équations qui annulent le jacobien. Les équations à résoudre sont pourtant faciles :

$$\begin{cases} e^x \cos(y) = 0 \\ e^x \sin(y) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (32.5a) \\ (32.5b) \end{matrix}$$

Étant donné que l'exponentielle ne s'annule jamais, il faudrait avoir en même temps  $\cos(y) = 0$  et  $\sin(y) = 0$ , ce qui est impossible. La fonction n'a donc aucun extrema local.

△

### Exemple 32.9

Considérons la fonction

$$f(x, y) = xy^2 e^{-(x^2+y^2)/4}. \quad (32.6)$$

- (1) Montrer qu'il y a une infinité de points critiques.
- (2) Déterminer leur nature.

Voici la fonction Sage qui fournit les informations :

```

1 # -*- coding: utf8 -*-
2
3 import outilsINGE
4
5 def exercise_10_4():
6 var('x,y')
7 f(x,y)=x*y**2*exp(-(x**2+y**2)/4)
8 print outilsINGE.Extrema(f)

```

exo104.sage

La sortie est

The function :

```
(x, y) |--> x*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
```

Derivative x and y :

```
(x, y) |--> -1/2*(x^2 - 2)*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
```

```
(x, y) |--> -1/2*(x*y^3 - 4*x*y)*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2)
```

Hessian matrix :

```
[
 1/4*(x^3 - 6*x)*y^2*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2) 1/4*((x^2 - 2)*y^3 - 4*(x^2 - 2)*y
1/4*((x^2 - 2)*y^3 - 4*(x^2 - 2)*y)*e^(-1/4*x^2 - 1/4*y^2) 1/4*(x*y^4 - 10*x*y^2 + 8*x
```



```

Critical points :
(r17, 0)
(-sqrt(2), -2)
(sqrt(2), -2)
(-sqrt(2), 2)
(sqrt(2), 2)
At (r17,0), the Hessian is
(0, 0)
(0, 2*r17*e^(-1/4*r17^2))
Primary principal minors are [0, 0]
Hessian positive semidéfinite
I don't conclude
Hessian negative semidefinite
I don't conclude
At (-sqrt(2),-2), the Hessian is
(4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
(0, 4*sqrt(2)*e^(-3/2))
Primary principal minors are [32*e^(-3), 4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
Hessian positive defined
local minimum
At (sqrt(2),-2), the Hessian is
(-4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
(0, -4*sqrt(2)*e^(-3/2))
Primary principal minors are [32*e^(-3), -4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
Hessian negative defined
local maximum
At (-sqrt(2),2), the Hessian is
(4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
(0, 4*sqrt(2)*e^(-3/2))
Primary principal minors are [32*e^(-3), 4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
Hessian positive defined
local minimum
At (sqrt(2),2), the Hessian is
(-4*sqrt(2)*e^(-3/2), 0)
(0, -4*sqrt(2)*e^(-3/2))
Primary principal minors are [32*e^(-3), -4*sqrt(2)*e^(-3/2)]
Hessian negative defined
local maximum

```

Notez la présence de  $r1$  comme paramètres dans les solutions. Tous les points avec  $y = 0$  sont des points critiques. Cependant, Sage<sup>1</sup> ne parvient pas à conclure la nature de ces points  $(x, 0)$ .

Notons que le nombre  $f(x, y)$  a toujours le signe de  $x$  parce que  $y^2$  et l'exponentielle sont positives. Toujours? En tout cas lorsque  $x \neq 0$ . Prenons un point  $(a, 0)$  avec  $a > 0$ . Dans un voisinage de ce point, nous avons  $f(x, y) > 0$  parce que si  $a > 0$ , alors  $x > 0$  dans un voisinage de  $a$ . Le point  $(a, 0)$  est un minimum local parce que  $0 = f(a, 0) \leq f(x, y)$  pour tout  $(x, y)$  dans un voisinage de  $(a, 0)$ .

De la même façon, les points  $(a, 0)$  avec  $a < 0$  sont des maxima locaux parce que dans un voisinage, la fonction est négative.

Le point  $(0, 0)$  n'est ni maximum ni minimum local. C'est un point de selle.

△

---

1. ou, plus précisément, le programme que j'ai écrit avec Sage.

**Exemple 32.10**

Dériver les fonctions suivantes.

(1)  $\sin(\ln(x))$

(2)  $\frac{\sin x}{x}$ ;

(3)  $e^{x^2}$

(4)  $\cos(x)^{\sin(x)}$

Le programme suivant par Sage résout l'exercice :

```

1 #!/usr/bin/sage -python
2 # -*- coding: utf8 -*-
3
4 from sage.all import *
5
6 var('x')
7 f=sin(ln(x))
8 print f.diff(x)
9 f=sin(x)/x
10 print f.diff(x)
11 f=exp(x**2)
12 print f.diff(x)
13 f=cos(x)**(sin(x))
14 print f.diff(x)

```

corrDerive\_\_0002.sage

Le résultat est :

```

cos(log(x))/x
cos(x)/x - sin(x)/x^2
2*x*e^(x^2)
(log(cos(x))*cos(x) - sin(x)^2/cos(x))*cos(x)^sin(x)

```

△

**Exemple 32.11**

Donner une approximation de  $\ln(1.0001)$ .

```

| Sage Version 4.5.3, Release Date: 2010-09-04 |
Type notebook() for the GUI, and license() for information.
sage: numerical_approx(ln(1.0001))
0.0000999950003332973

```

△

# Annexe A

## GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

<http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

### Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

### APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical

connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version :

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled “History”, Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled “History” in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the “History” section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled “Acknowledgements” or “Dedications”, Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original

documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

## COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

## FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

## RELICENSING

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

## ADDENDUM : How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.



If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with ... Texts.” line with this :

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.



# Bibliographie

- [1] Arnaud Girand. Développements pour l'agrégation externe de mathématiques. 18 août 2012. URL [http://perso.univ-rennes1.fr/arnaud.girand/pdf/dvp\\_agreg/dvp.pdf](http://perso.univ-rennes1.fr/arnaud.girand/pdf/dvp_agreg/dvp.pdf).
- [2] Pierre Monmarché. Développements. 18 mai 2011. URL <http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/~pmonm570/fichiers/1-total.pdf>.
- [3] Richard Zekri. Analyse de fourier. 15 septembre 2009. URL <http://lumimath.univ-mrs.fr/infoetudiant/ANALYSEDEFOURIERMASTER2009.pdf>.
- [4] Sylvie Benzoni. Distributions tempérées. 13 novembre 2013. URL <http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/Agreg/Distributions.pdf>.
- [5] Jerome E. Marsden and Tudor S. Ratiu. Manifolds, tensor analysis and applications. 2002. URL [http://www.math.psu.edu/petrinin/papers/scans-scans/MD\\_Geometryandtopology/MDdg\\_Differentialgeometry/Marsden,Ratiu,Abraham.Manifolds,Tensoranalysis,andApplications\(draft2003-01-05\)\(Springe.pdf](http://www.math.psu.edu/petrinin/papers/scans-scans/MD_Geometryandtopology/MDdg_Differentialgeometry/Marsden,Ratiu,Abraham.Manifolds,Tensoranalysis,andApplications(draft2003-01-05)(Springe.pdf).
- [6] Rémi Peyre and Frédéric Simon. Travaux dirigés de probabilités. 2009. URL <http://www.normalesup.org/~rpeyre/pro/enseignement/td09pbas-e.pdf>.
- [7] Philippe Briand. Probabilités de base. 2005-2006. [http://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/proba/g12\\_cours.pdf](http://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/proba/g12_cours.pdf).
- [8] Laurent Claessens. Invention personnelle , lire avec prudence et merci de me dire si c'est correct.
- [9] Wikipédia. Axiome du choix — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Axiome\\_du\\_choix&oldid=116151439](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Axiome_du_choix&oldid=116151439). [En ligne; Page disponible le 9-septembre-2015].
- [10] Daniel Daigle. Cardinalité. URL <http://mysite.science.uottawa.ca/asavag2/mat2762/cardinal.pdf>.
- [11] Christine Laurent-Thiébaud. Axiomatique des nombres. URL <http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ax/ax.pdf>.
- [12] Patrice Tauvel. *Cours d'algèbre*. Dunod, 1999. ISBN 2-10-005490-3.
- [13] Frédéric Paulin. Topologie, analyse et calcul différentiel. 2008-2009. [http://www.math-question-center.com/publications-pdf/cours\\_d\\_analyse+topologie\\_et\\_calcul\\_differntiel\\_Frederic\\_Paulin.pdf](http://www.math-question-center.com/publications-pdf/cours_d_analyse+topologie_et_calcul_differntiel_Frederic_Paulin.pdf).
- [14] Peter Hendrikus Kropholler. Groups rings and fields. 2004-2005. <http://www.maths.gla.ac.uk/~phk/ulearning.pdf>.
- [15] Anonyme. Théorie des groupes. 2008. <http://theoriedesgroupes.perso.sfr.fr/cours/theoriePDF.pdf>.
- [16] Mongi Amorri. Théorème de bezout, théorème de gauss. [http://lux.lyceefrancais-brasilianet/documents/cours/ts/bezout\\_gauss.pdf](http://lux.lyceefrancais-brasilianet/documents/cours/ts/bezout_gauss.pdf).

- [17] Gilles Costantini. pgcd et ppcm dans  $\mathbb{Z}$ , théorème de Bezout, applications. .  
[http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg\\_fichiers/bezout.pdf](http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/bezout.pdf).
- [18] Wikipédia. Lemme d'euclide — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lemme\\_d%27Euclide&oldid=112046247](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lemme_d%27Euclide&oldid=112046247). [En ligne; Page disponible le 28-juin-2015].
- [19] title = Algèbre générale et algèbre linéaire year = 6 mars 2015 url = "http://www.math.univ-paris-diderot.fr/\_media/formations/prepa/agreginterne/polycopiealgebre.pdf" Skandalis, Georges.
- [20] Alexei Panchichkine. Algèbre2. 2004-2005.  
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/05ens1.pdf>.
- [21] François Combes. *Algèbre et géométrie*. Bréal, 2003. ISBN 2-84291-202-0.
- [22] Niels Borne. Fiche numéro 2 : morphismes, sous-groupe distingué, quotient. 2009-2012.  
[http://math.univ-lille1.fr/~borne/Enseignement/TD2\\_M308.pdf](http://math.univ-lille1.fr/~borne/Enseignement/TD2_M308.pdf).
- [23] Pierre Lissy. Théorème de Jordan-Hölder. 6 avril 2010.  
<http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/JordanHolder.pdf>.
- [24] Kioshi Igusa. Notes on Jordan-Hölder.  
<http://people.brandeis.edu/~igusa/Math30/JHolder.pdf>.
- [25] Muriel Galley. Groupes résolubles. 24 mai 2012. URL <http://matthieu.gendulphe.com/Galley.pdf>.
- [26] Fabrice Castel. Groupes finis. 2009-2012.  
[http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Groupes\\_finis.pdf](http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Groupes_finis.pdf).
- [27] Wikipédia. Permutation — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Permutation&oldid=89805226>. [En ligne; Page disponible le 24-juin-2013].
- [28] Christophe Mourougane. Théorie des groupes et géométrie. 2009-2010.  
<http://perso.univ-rennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2009-10/THGG/poly.groupes.pdf>.
- [29] O. Teytaud, C. Antonini, J.-B. Bardet, J.-F. Quint, M. De Crisenoy, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, and A. Chateau. Les mathématiques pour l'Agrégation. 21 mai 2002.  
<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/agreg.zip>.
- [30] Wikipédia. Théorème fondamental de l'arithmétique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_fondamental\\_de\\_l%27arithm%C3%A9tique&oldid=110036012](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_fondamental_de_l%27arithm%C3%A9tique&oldid=110036012). [En ligne; Page disponible le 26-juin-2015].
- [31] Marc Sage. Sons, fréquences, harmoniques, tons : le compromis du piano. .  
<http://www.normalesup.org/~sage/Musique/Harmonie.pdf>.
- [32] Anonyme. sans titre.  
<http://www.ac-grenoble.fr/champo/IMG/arithmetique.pdf>.
- [33] Christian Squarcini. Anneaux factoriels. . URL [http://squarcini.christian.perso.sfr.fr/AgregInterne/Anneauxcorps/3\\_2.pdf](http://squarcini.christian.perso.sfr.fr/AgregInterne/Anneauxcorps/3_2.pdf).
- [34] Danny-Jack Mercier. Anneaux factoriels. 5 octobre 2003.  
<http://megamaths.perso.neuf.fr/cours/ari/cann0001.pdf>.

- [35] Sébastien Pellerin. Développements d'algèbre pour l'oral de l'agrégation. .  
<http://www.sebastien-pellerin.fr/zfiles/agreg/devalgebre.pdf>.
- [36] Wikipédia. Triplet pythagoricien — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Triplet\\_pythagoricien&oldid=114628048](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Triplet_pythagoricien&oldid=114628048). [En ligne; Page disponible le 24-juin-2015].
- [37] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Le théorème de wedderburn. . URL <http://www.les-mathematiques.net/d/a/w/node5.php>.
- [38] Wikipédia. Algèbre sur un corps — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Alg%C3%A8bre\\_sur\\_un\\_corps&oldid=98992040](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Alg%C3%A8bre_sur_un_corps&oldid=98992040). [En ligne; Page disponible le 6-mars-2014].
- [39] Sylvain Duchet. Congruence dans  $\mathbb{Z}$ , anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , applications.  
<http://epsilon.2000.free.fr/Csup/congruences.pdf>.
- [40] Pierre Bernard. Entiers algébriques et racines de l'unité. 7 janvier 2012. URL <http://allken-bernard.org/pierre/weblog/?p=2061>.
- [41] Wikipédia. Extension de corps — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Extension\\_de\\_corps&oldid=89826304](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Extension_de_corps&oldid=89826304). [En ligne; Page disponible le 1-mai-2013].
- [42] Mortajine Abdellatif. Les extensions de corps. 2012-2013. URL <http://www.iecn.u-nancy.fr/~mortajin/chap3-L3-S5.pdf>.
- [43] Patrick Polo. Extensions normales, séparables, galoisiennes. corps fini. 2007-2008.  
<http://www.math.jussieu.fr/~polo/M1/ATG07chVIII.pdf>.
- [44] Olivier Dodane. Le théorème de zéros de Hilbert. 8 octobre 2007.  
<http://www.math.ens.fr/~debarre/nullstellensatz.pdf>.
- [45] Patrick Polo. Polynômes symétriques et résolutions d'équations. 13 décembre 2004.  
<http://www.math.jussieu.fr/~polo/M1/ATGch9.pdf>.
- [46] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. Sur c tout est connexe! URL <http://objagr.gforge.inria.fr/documents/files/connexite-polynome.pdf>.
- [47] Wikipédia. Polynôme cyclotomique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Polyn%C3%B4me\\_cyclotomique&oldid=93751495](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Polyn%C3%B4me_cyclotomique&oldid=93751495). [En ligne; Page disponible le 25-juin-2013].
- [48] Adam Parusinski. Théorème de Dirichlet (version faible). 2010-2011.  
<http://math.unice.fr/~parus/AGREG/Dev/dirichlet.pdf>.
- [49] Michel Merle. corps finis. 2005-2006.  
[http://www-math.unice.fr/~merle/Complements/corps\\_finis.pdf](http://www-math.unice.fr/~merle/Complements/corps_finis.pdf).
- [50] Gabriel Peyré. Corps finis. 2007.  
[www.h-k.fr/publications/objectif-agregation](http://www.h-k.fr/publications/objectif-agregation)  
<http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/objectif-agregation/documents/files/corps-fini.pdf>.
- [51] François Rodier. Corps finis.  
<http://iml.univ-mrs.fr/~rodier/Cours/RappelCorpsfinis.pdf>.
- [52] Stephane Vento. La loi de réciprocité quadratique. 2005.  
<http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/nourdin/LeSiteDeLAgregatif/vento2.pdf>.

- [53] Wikipédia. Fonction de möbius — wikipédia, l'encyclopédie libre, mai 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction\\_de\\_M%C3%B6bius&oldid=91236321](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_de_M%C3%B6bius&oldid=91236321). [En ligne ; Page disponible le 1-mai-2013].
- [54] Wikipédia. Corps fini — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Corps\\_fini&oldid=92489466](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Corps_fini&oldid=92489466). [En ligne ; Page disponible le 1-mai-2013].
- [55] Wikipédia. Nombre constructible — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre\\_constructible&oldid=103130793](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_constructible&oldid=103130793). [En ligne ; Page disponible le 13-mai-2014].
- [56] Tracés usuels «à la règle et au compas». 2012-2013. URL [http://dokeos3.u-cergy.fr/dokeos20/courses/EEMEM2CRPE/scorm/2012\\_2013SCORMEEMEUE3EC2M2P1\\_SCORM/page\\_04.htm](http://dokeos3.u-cergy.fr/dokeos20/courses/EEMEM2CRPE/scorm/2012_2013SCORMEEMEUE3EC2M2P1_SCORM/page_04.htm).
- [57] Wikipédia. Théorème de wantzel — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Wantzel&oldid=103220511](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Wantzel&oldid=103220511). [En ligne ; Page disponible le 13-mai-2014].
- [58] Wikipédia. Nombre de fermat — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre\\_de\\_Fermat&oldid=103080861](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_de_Fermat&oldid=103080861). [En ligne ; Page disponible le 18-juin-2014].
- [59] El Hage. Équation générale de degré  $n$ . <http://les.mathematiques.free.fr/pdf/gal10.pdf>.
- [60] Florian Morel Chevillet. Résolubilité par radicaux des équations algébriques. 31 mai 2012. URL <http://matthieu.gendulphe.com/MorelChevillet.pdf>.
- [61] Guillaume Carlier. Analyse fonctionnelle. 2009-20010. URL <https://www.ceremade.dauphine.fr/~carlier/poly2010.pdf>.
- [62] Wikipédia. Suite de cauchy — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Suite\\_de\\_Cauchy&oldid=98046451](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Suite_de_Cauchy&oldid=98046451). [En ligne ; Page disponible le 11-mars-2014].
- [63] Wikipédia. Espace séparé — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace\\_s%C3%A9par%C3%A9&oldid=97013072](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace_s%C3%A9par%C3%A9&oldid=97013072). [En ligne ; Page disponible le 27-septembre-2013].
- [64] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Généralités. . URL <http://www.les-mathematiques.net/a/a/b/node19.php>.
- [65] Emmanuel Vieillard Baron. Sous-espaces compacts. 2001. URL <http://www.les-mathematiques.net/a/t/c/node5.php>.
- [66] Wikipédia. Théorème de borel-lebesgue — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Borel-Lebesgue&oldid=96560796](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Borel-Lebesgue&oldid=96560796). [En ligne ; Page disponible le 11-mars-2014].
- [67] Wikipédia. Continuité — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Continuit%C3%A9&oldid=96548980>. [En ligne ; Page disponible le 17-septembre-2013].
- [68] Wikipédia. Théorème des fermés emboîtés — Wikipédia, l'encyclopédie libre, 2012. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_des\\_ferm%C3%A9s\\_emboît%C3%A9s&oldid=85987870](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_des_ferm%C3%A9s_emboît%C3%A9s&oldid=85987870). [En ligne ; Page disponible le 1-avril-2013].

- [69] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Complété d'un espace métrique. . URL <http://www.les-mathematiques.net/a/a/b/node26.php>.
- [70] Zied Ammari. Analyse fonctionnelle : Pré-requis. <http://perso.univ-rennes1.fr/zied.ammari/other/pdf/chapitre1.pdf>.
- [71] Wikipédia. Connexité (mathématiques) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Connexit%C3%A9\\_\(math%C3%A9matiques\)&oldid=123744973](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Connexit%C3%A9_(math%C3%A9matiques)&oldid=123744973). [En ligne ; Page disponible le 26-avril-2016].
- [72] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Connexité. . URL <http://www.les-mathematiques.net/a/a/b/node23.php>.
- [73] Bill Casselman. Cauchy's criterion for convergence. 2000. <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m220-00/cauchy.pdf>.
- [74] Jean Saint Raymond. Semi-normes. URL <http://www.math.jussieu.fr/~raymond/preprints/seminormes.pdf>.
- [75] Stéphane Mischler. Semi-norme et introduction aux evtls. Février 2007. URL <https://www.ceremade.dauphine.fr/~mischler/Enseignements/AFAENS/Chap1evtlcs.pdf>.
- [76] Wikipédia. Semi-norme — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Semi-norme&oldid=89981857>. [En ligne ; Page disponible le 22-septembre-2013].
- [77] Wikipédia. Théorème de baire — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Baire&oldid=95077621](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Baire&oldid=95077621). [En ligne ; Page disponible le 4-août-2013].
- [78] Daniel Ferrand. Étendre le corps. Juillet 2007. URL <http://webusers.imj-prg.fr/~daniel.ferrand/ExtCorps.pdf>.
- [79] Marc Sage. Dualité en dimension finie. 24 octobre 2005. <http://www.normalesup.org/~sage/Cours/DualDimFinie.pdf>.
- [80] Emmanuel Vieillard Baron. Déterminant d'une matrice, d'une application linéaire. 2001. <http://www.les-mathematiques.net/b/e/d/node5.php>.
- [81] Robert Rolland. Le théorème de Müntz-szász. . [http://megamaths.perso.neuf.fr/rr/fichexo\\_201.pdf](http://megamaths.perso.neuf.fr/rr/fichexo_201.pdf).
- [82] Wikipédia. Résultant — wikipédia, l'encyclopédie libre, Mai 2013. URL <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=R%C3%A9sultant&oldid=90109864>. [En ligne ; Page disponible le 24-mai-2013].
- [83] Éric Brunelle. Norme matricielle. <http://www.dms.umontreal.ca/~math1600/6Supplement/Normematricielle-1.pdf>.
- [84] Gallouët!Thierry. Norme et conditionnement d'une matrice. URL <https://www.i2m.univ-amu.fr/~gallouet/licence.d/anum.d/anum-tg2.pdf>.
- [85] William F. Trench. Introduction to real analysis. 2010. [http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH\\_REAL\\_ANALYSIS.PDF](http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH_REAL_ANALYSIS.PDF).
- [86] Wikipédia. Formule de stirling — wikipédia, l'encyclopédie libre, Mai 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Formule\\_de\\_Stirling&oldid=93224272](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Formule_de_Stirling&oldid=93224272). [En ligne ; Page disponible le 20-mai-2013].

- [87] H. Jerome Keisler. *Elementary calculus, an infinitesimal approach*. 2010.  
<http://www.math.wisc.edu/~keisler/keislercalc-810.pdf>.
- [88] Wikipédia. Suite arithmético-géométrique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Suite\\_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique&oldid=88168841](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Suite_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique&oldid=88168841). [En ligne ; Page disponible le 16-juin-2013].
- [89] David Wilkins. *Normed vector spaces and functional analysis*. 1997-2001. URL <http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/212/212PtIII.pdf>.
- [90] Gabriel Nagy. *Operator theory in Hilbert spaces*. URL <https://www.math.ksu.edu/~nagy/real-an/2-07-op-th.pdf>.
- [91] Gilles Costantini. *Espaces vectoriels de dimension infinie, normes usuelles, équivalence de normes*. . URL [http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg\\_fichiers/evn.pdf](http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/evn.pdf).
- [92] Christian Squarcini. *Applications linéaires*. . URL [http://squarcini.christian.perso.sfr.fr/AggregInterne/Topo/4\\_3.pdf](http://squarcini.christian.perso.sfr.fr/AggregInterne/Topo/4_3.pdf).
- [93] F. Laudenbach. *Calcul différentiel et intégral*. les Éd. de l'École polytechnique, 2000. ISBN 9782730207249. URL <http://books.google.fr/books?id=Ws9A7ZoRJNEC>.
- [94] Rached Mneimé. *Réduction des endomorphismes*. Calvage et Mounet, 2006. ISBN 2-916352-01-5.
- [95] Matthieu Romagny. *Endomorphismes cycliques*. 2012. URL [https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/dvt/endom\\_cycliques.pdf](https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/dvt/endom_cycliques.pdf).
- [96] Jean-Etienne Rombaldi. *Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. applications*. . <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AggregInterne/Oral1/110.pdf>.
- [97] Callus. URL <http://math.stackexchange.com/questions/1829332/prove-that-if-v-is-finite-dimensional-then-v-is-even-dimensional>.
- [98] Henry C. King. *Unitary diagonalization of matrices*. <http://www-users.math.umd.edu/~hck/Normal.pdf>.
- [99] G Donald Allen. *Lectures on linear algebras*. 2004. [http://www.math.tamu.edu/~dallen/m640\\_03c/readings.htm](http://www.math.tamu.edu/~dallen/m640_03c/readings.htm).
- [100] Wikipedia. *Spectral theorem* — wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Spectral\\_theorem&oldid=575488135](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Spectral_theorem&oldid=575488135). [Online ; accessed 21-October-2013].
- [101] *theorem for normal triangular matrices*. URL <http://planetmath.org/theoremfornormaltriangularmatrices>.
- [102] Maxime Pouvreau. *Pseudo-réduction simultanée*. 2013-2014. URL <http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Pseudored.pdf>.
- [103] Robert Rollan. *Produit tensoriel d'espaces vectoriels*. URL <http://robert.rolland.acrypta.com/telechargements/algebre/tensor.pdf>.
- [104] Marc Sage. *Algèbre multilinéaire*. . URL <http://www.normalesup.org/~sage/Cours/ProdTens.pdf>.
- [105] Ministère de l'éducation nationale. *Rapport de jury de concours – agrégation de mathématiques, concours externe*. 2011. <http://agreg.org/Rapports/rapport2011provisoire.pdf>.



- [106] Hervé Carrieu, Maurice Fadel, Etienne Fieux, Patrice Lassère, and Frédéric Rodriguez. Autour des matrices de Frobenius ou compagnon. 2007.  
<http://www.math.univ-toulouse.fr/~lassere/pdf/vfcomp.pdf>.
- [107] Grégory Vial. Autour du théorème des invariants de similitude. Octobre 2005.  
<http://w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/gregory.vial/files/cplts/ivs.pdf>.
- [108] Arnaud Moncet. Invariants de similitude.  
<http://blogperso.univ-rennes1.fr/arnaud.moncet/public/IVS.pdf>.
- [109] Commutant d'un endomorphisme. . URL <http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Commutant.pdf>.
- [110] Bernard Alken. Dans un commentaire de «dimension du commutant d'une matrice». 2009. URL <http://www.mathoman.com/index.php/1538-dimension-du-commutant-d-une-matrice>.
- [111] La taverne de l'Irlandais. De la réduction des endomorphismes. 2001. URL <http://tanopah.jo.free.fr/epilogues/reduction.pdf>.
- [112] Wikipédia. Trigonalisation — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Trigonalisation&oldid=109085753>. [En ligne; Page disponible le 22-décembre-2014].
- [113] David Delaunay. Nilpotence. 10 juillet 2014. URL <http://mp.cpgedupuydelome.fr/pdf/Réductiondesendomorphismes-Nilpotence.pdf>.
- [114] Wikipédia. Théorème de burnside (problème de 1902) — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Burnside\\_\(probl%C3%A8me\\_de\\_1902\)&oldid=98510166](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Burnside_(probl%C3%A8me_de_1902)&oldid=98510166). [En ligne; Page disponible le 2-novembre-2015].
- [115] Wikipédia. Forme quadratique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Forme\\_quadratique&oldid=103591878](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Forme_quadratique&oldid=103591878). [En ligne; Page disponible le 7-mai-2014].
- [116] Christian Squarcini. Dégénérescence. 2005. URL [http://squarcini.christian.perso.sfr.fr/AgregInterne/Algebrelinaire/2\\_2.pdf](http://squarcini.christian.perso.sfr.fr/AgregInterne/Algebrelinaire/2_2.pdf).
- [117] Daniel Li. Notions fondamentales de la théorie des probabilités. .  
<http://labomathlens.free.fr/Liens/ProbaM1/PROBA01.pdf>.
- [118] Daniel Saada. Tribu de borel et tribu de baire d'un espace topologique. 2009. URL [http://www.daniel-saada.eu/fichiers/16-Tribus\\_de\\_Baire.pdf](http://www.daniel-saada.eu/fichiers/16-Tribus_de_Baire.pdf).
- [119] Daniel Li. Construction de la mesure de lebesgue. 28 janvier 2008. URL <http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/Lebesgue.pdf>.
- [120] ProofWiki. Outer measure of limit of increasing sequence of sets — proofwiki,, 2012. URL [http://www.proofwiki.org/w/index.php?title=Outer\\_Measure\\_of\\_Limit\\_of\\_Increasing\\_Sequence\\_of\\_Sets&oldid=85952](http://www.proofwiki.org/w/index.php?title=Outer_Measure_of_Limit_of_Increasing_Sequence_of_Sets&oldid=85952). [Online; accessed 2-February-2014].
- [121] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Quelques résultats d'unicité. . URL <http://www.les-mathematiques.net/a/i/d/node1.php#T42>.
- [122] C. Antonini, JF. Quint, P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Chateau, and O. Teytaud. Ensembles négligeables et complétion de tribus. . URL <http://www.les-mathematiques.net/a/i/c/node1.php>.

- [123] Wikipédia. Complétion d'une mesure — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Compl%C3%A9tion\\_d%27une\\_mesure&oldid=89819650](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Compl%C3%A9tion_d%27une_mesure&oldid=89819650). [En ligne ; Page disponible le 27-mars-2014].
- [124] Daniel Li. Tribus et mesures. 24 mars 2011. <http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/tribus.pdf>.
- [125] Gerald Teschl. Topics in real and functional analysis. 2013. URL <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf>.
- [126] Emmanuel Vieillard Baron. Les fonctions mesurables. 2001. URL <http://www.les-mathematiques.net/a/i/b/node1.php>.
- [127] Wikipédia. Fonction étagée — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction\\_%C3%A9tag%C3%A9e&oldid=104836104](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_%C3%A9tag%C3%A9e&oldid=104836104). [En ligne ; Page disponible le 6-septembre-2015].
- [128] B. Mauray. Intégration jusqu'au théorème de Lebesgue. 2006. URL [www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/Textes/Lebesgue.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/Textes/Lebesgue.pdf).
- [129] Gilles Dubois. URL [http://dubois.gilles.pagesperso-orange.fr/analyse\\_reelle/intl limites.html](http://dubois.gilles.pagesperso-orange.fr/analyse_reelle/intl limites.html).
- [130] Daniel Choï. Mathématiques pour la mécanique. 2008. <http://www.meca.unicaen.fr/Enseignement/Document/CoursChoi/mathmeca.pdf>.
- [131] Daniel Li. Construction de l'intégrale de lebesgue. 10 février 2011. URL <http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/construc-integ.pdf>.
- [132] Daniel Li. Intégration sur un espace produit. 29 mars 2011. URL <http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/Fubini.pdf>.
- [133] B. Mauray. Préparation à l'agrégation, analyse. 2011. <http://www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/index.html>.
- [134] Thierry Gallouët and Raphaële Herbin. Mesure, intégration, probabilités. 2012. <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/licence.d/mes-int-pro.pdf>.
- [135] Wikipédia. Ensemble de vitali — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble\\_de\\_Vitali&oldid=100925109](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Vitali&oldid=100925109). [En ligne ; Page disponible le 9-septembre-2015].
- [136] John Hunter. Measure theory. 2011. URL [https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure\\_theory/measure\\_notes.pdf](https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf).
- [137] Bruno Demange. Théorème de changement de variables. 2012. URL <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demange/integration/2012/integration-chap5.pdf>.
- [138] Daniel Li. Changement de variables dans les intégrales sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . 8 juin 2010. URL <http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/Integration/change-v.pdf>.
- [139] Marie-Claude David, Frédéric Haglund, and Daniel Perrin. Géométrie affine. 8 décembre 2003. <http://webens.math.u-psud.fr/~mclld/GAEL/Gael/bar.pdf>.
- [140] Marie-Claude David, Frédéric Haglund, and Daniel Perrin. Géométrie affine. Document de travail pour la préparation au CAPES. Deuxième partit : barycentre. 8 décembre 2003. URL <http://omphale.math.u-psud.fr/~mclld/GAEL/Gael/bar.pdf>.

- [141] Marie-Claude David, Frédéric Haglund, and Daniel Perrin. Géométrie affine. Document de travail pour la préparation au CAPES. Troisième partie : convexité. 8 décembre 2003. URL <http://omphale.math.u-psud.fr/~mclld/GAEL/Gael/conv.pdf>.
- [142] David Cimasoni. Cours de géométrie I, semestre de printemps. Printemps 2014. URL <http://www.unige.ch/math/folks/cimasoni/GeometrieI.pdf>.
- [143] Les quadrilatères. URL <http://ddata.over-blog.com/xxxyyy/4/39/08/01/cinquieme/5eme.parallelogramme.jeu-set-et-maths.mathematiques.pdf>.
- [144] Robert Rolland. Géométrie projective. .  
<http://robert.rolland.acrypta.com/telechargements/geometrie/pr0.pdf>.
- [145] Sébastien Pellerin. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré. .  
[http://dynamaths.free.fr/docs/lecons/developpement\\_algebre\\_6.pdf](http://dynamaths.free.fr/docs/lecons/developpement_algebre_6.pdf).
- [146] Alexandre Alessandri. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré. 2011-2012.  
[http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Dvt\\_psl2.pdf](http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Dvt_psl2.pdf).
- [147] Wikipédia. Opérations sur les dérivées — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Op%C3%A9rations\\_sur\\_les\\_d%C3%A9riv%C3%A9es&oldid=99099598](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Op%C3%A9rations_sur_les_d%C3%A9riv%C3%A9es&oldid=99099598). [En ligne ; Page disponible le 10-avril-2016].
- [148] Adrien Fontaine. Développement : théorème de Sarkiowski. 8 octobre 2013. URL <http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/~afontain/dvptthmdesarkowski.pdf>.
- [149] C. Schomblond. *Électrodynamique classique*. 2003–2004. Notes du cours d'électromagnétisme de deuxième année en physique à l'université libre de Bruxelles.  
<http://homepages.ulb.ac.be/~cschomb/notes.html>.
- [150] Livio Flaminio. Éléments de géométrie différentielle. 29 octobre 2009. URL [http://www.gat.univ-lille1.fr/~flaminio/M403/2009-2010/cours\\_geo\\_top.pdf](http://www.gat.univ-lille1.fr/~flaminio/M403/2009-2010/cours_geo_top.pdf).
- [151]
- [152] Giuseppe De Marco. *Analisi due*. 1999.
- [153] Wikipédia. Fonction convexe — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction\\_convexe&oldid=94429550](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_convexe&oldid=94429550). [En ligne ; Page disponible le 8-août-2013].
- [154] Wikipédia. Fonction convexe — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction\\_convexe&oldid=98971686](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_convexe&oldid=98971686). [En ligne ; Page disponible le 8-février-2014].
- [155] Wikiversité. Fonctions convexes/définition et premières propriétés — wikiversité,, 2013. URL [http://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Fonctions\\_convexes/D%C3%A9finition\\_et\\_premi%C3%A8res\\_propri%C3%A9t%C3%A9s&oldid=381775](http://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Fonctions_convexes/D%C3%A9finition_et_premi%C3%A8res_propri%C3%A9t%C3%A9s&oldid=381775). [En ligne ; accédé le 9-février-2014].
- [156] Wikiversité. Fonctions convexes/fonctions convexes dérivables — wikiversité,, 2013. URL [http://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Fonctions\\_convexes/Fonctions\\_convexes\\_d%C3%A9rivables&oldid=379779](http://fr.wikiversity.org/w/index.php?title=Fonctions_convexes/Fonctions_convexes_d%C3%A9rivables&oldid=379779). [En ligne ; accédé le 9-février-2014].
- [157] Stephen Boyd and Lieven Vandenbergh. Convex optimization. 2004. URL [http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv\\_cvxbook.pdf](http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf).
- [158] Pierre Lecomte. Variétés plongées dans  $\mathbb{R}^m$ . 2007. URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/geom/node107.html>.

- [159] Document 33 : fonctions convexes. . URL <http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.convexe.pdf>.
- [160] Wikipédia. Inégalité arithmético-géométrique — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9\\_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique&oldid=99682278](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_arithm%C3%A9tico-g%C3%A9om%C3%A9trique&oldid=99682278). [En ligne ; Page disponible le 1-juillet-2014].
- [161] Wikipédia. Inégalité de kantorovitch — wikipédia, l'encyclopédie libre, juillet 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9\\_de\\_Kantorovitch&oldid=102417007](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_de_Kantorovitch&oldid=102417007). [En ligne ; Page disponible le 1-juillet-2014].
- [162] Wikipédia. Convergence uniforme — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Convergence\\_uniforme&oldid=95493463](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Convergence_uniforme&oldid=95493463). [En ligne ; Page disponible le 15-octobre-2013].
- [163] F. Poupaud. Analyse fonctionnelle pour la licence. URL <http://math.unice.fr/~rascle/pdf/files/coursanapp/ana-fonc.pdf>.
- [164] Wikipédia. Opérations sur les dérivées — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Op%C3%A9rations\\_sur\\_les\\_d%C3%A9riv%C3%A9es&oldid=99099598](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Op%C3%A9rations_sur_les_d%C3%A9riv%C3%A9es&oldid=99099598). [En ligne ; Page disponible le 28-juillet-2014].
- [165] Rached Mneimé and Frédéric Testard. *Groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986. ISBN 2-7056-6040-2.
- [166] Yoann Gelineau. Générateurs du groupe linéaire. . URL [http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/devagreg/Generateurs\\_Groupe\\_Lineaire.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/devagreg/Generateurs_Groupe_Lineaire.pdf).
- [167] Sandrine Caruso. Générateurs de  $GL_n(K)$  et  $SL_n(K)$ . URL <http://sandrine.toonywood.org/pageperso/agreg/geneSL.pdf>.
- [168] Wikipédia. Théorème de cayley-hamilton — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Cayley-Hamilton&oldid=104470625](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cayley-Hamilton&oldid=104470625). [En ligne ; Page disponible le 10-juin-2014].
- [169] David Monniaux. 9 juin 2014. URL <http://david.monniaux.free.fr/dotclear/index.php/post/2014/06/09/M%C3%A9moire-%C3%A0-effacement-rapide>. David Monniaux esquisse la preuve dans un commentaire à cette note.
- [170] Pierre Lissy. Décomposition polaire. 30 avril 2010. URL <http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/DecPol.pdf>.
- [171] Wikipédia. Décomposition polaire — wikipédia, l'encyclopédie libre, avril 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=D%C3%A9composition\\_polaire&oldid=90240040](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=D%C3%A9composition_polaire&oldid=90240040). [En ligne ; Page disponible le 24-avril-2013].
- [172] Jean-Etienne Rombaldi. Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel. applications. . <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/Ora11/120.pdf>.
- [173] Brice Loustau. Développements d'algèbre pour l'agrégation. 2008. URL <http://brice.loustau.free.fr/deval.pdf>.
- [174] Michel Coste. Sous-groupes compacts du groupe linéaire. 29 septembre 2006. URL <http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/ssgrpecompact.pdf>.
- [175] Transformation laissant invariante une forme quadratique. URL <http://www.ilemaths.net/forum-sujet-500814.html>.

- [176] Christophe Mourougane. Théorie des groupes et géométrie. 2008-2009.  
<http://perso.univ-rennes1.fr/christophe.mourougane/enseignements/2008-9/THGG/poly.groupes.pdf>.
- [177] Groupes diédraux.  
<http://theoriedesgroupes.perso.sfr.fr/cours/Diedraux.pdf>.
- [178] Pierre Lissy. 6 avril 2010. URL <http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/Died.pdf>.
- [179] Pierre Renfer. Roulettes et colliers.  
<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/collier.pdf>.
- [180] Michel Emsalem and Pierre Dèbes. Théorème de sylow.  
<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00023.pdf>.
- [181] Matthieu Romagny. Représentations linéaires des groupes finis. 2010-2011.  
[http://www.math.jussieu.fr/~romagny/agreg/theme/rlgf\\_paysage.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~romagny/agreg/theme/rlgf_paysage.pdf).
- [182] Yao Jianfeng. Statistique et logiciels. 2010.  
<http://perso.univ-rennes1.fr/jian-feng.yao/pedago/statlog/>.
- [183] Daniel Li. Théorème de radon-nikodým et applications. .  
<http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/AF/mesures.pdf>.
- [184] Bruce Driver. Analysis tools with applications. April 10, 2003. URL [http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/240-01-02/Lecture\\_Notes/anal.pdf](http://www.math.ucsd.edu/~bdriver/240-01-02/Lecture_Notes/anal.pdf).
- [185] Alfred Gray. Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica. 1998.  
URL <http://webmath2.unito.it/paginepersonali/sergio.console/CurveSuperfici/>.
- [186] Wikipédia. Intégrale impropre — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Int%C3%A9grale\\_impropre&oldid=103902526](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Int%C3%A9grale_impropre&oldid=103902526). [En ligne; Page disponible le 5-août-2014].
- [187] Philippe Spindel. Éléments de géométrie différentielle pour la mécanique analytique et le gravitation. Novembre 2010.  
[http://portail.umons.ac.be/FR/universite/facultes/fs/services/institut\\_physique/mecanique\\_et\\_gravitation/Documents/Textespédagogiques/geometrie\\_differentielle.pdf](http://portail.umons.ac.be/FR/universite/facultes/fs/services/institut_physique/mecanique_et_gravitation/Documents/Textespédagogiques/geometrie_differentielle.pdf).
- [188] Olivier Casterá. Différentielles totales exactes.  
[http://o.castera.free.fr/pdf/Differentielle\\_totale\\_exacte.pdf](http://o.castera.free.fr/pdf/Differentielle_totale_exacte.pdf).
- [189] Wikipédia. Lemme de hadamard — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lemme\\_de\\_Hadamard&oldid=90659396](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lemme_de_Hadamard&oldid=90659396). [En ligne; Page disponible le 14-juillet-2014].
- [190] Intégration de fractions rationnelles. URL <http://blascheck.franck.free.fr/IMG/pdf/IntegFracRat.pdf>.
- [191] Ophélie Rouby. Théorème de Rothstein-Trager. URL [http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/~oroub842/dvlppts/Rothstein\\_Trager.pdf](http://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/~oroub842/dvlppts/Rothstein_Trager.pdf).
- [192] Frédéric Chyzak. Intégration symbolique des fractions rationnelles. Décembre 2004. URL <http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/profs/Frederic.Chyzak/CF-2004/notes-IntRat.pdf>.
- [193] gb. Cercle circonscrit à une courbe. URL <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,750556,750586>.

- [194] Mohammad Ghomi. Lecture note on differential geometry. 2007. URL <http://people.math.gatech.edu/~ghomi/LectureNotes/LectureNotes5U.pdf>.
- [195] Wikipedia. Convex curve — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Convex\\_curve&oldid=685739052](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Convex_curve&oldid=685739052). [Online; accessed 13-April-2016].
- [196] Wikipédia. Théorème de jordan — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2016. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Jordan&oldid=124990679](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Jordan&oldid=124990679). [En ligne; Page disponible le 6-avril-2016].
- [197] romain Boillaud. Séries de fonctions. 2010-2011. URL <http://www.rblld.fr/cours/chap6.pdf>.
- [198] Gérard Eguether. Ex-séries entières. URL <http://iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/EX.pdf>.
- [199] Georges Skandalis. Analyse, résumés et exercices. 6 mars 2015. URL [https://www.math.univ-paris-diderot.fr/\\_media/formations/prepa/agreginterne/polycopieanalyse.pdf](https://www.math.univ-paris-diderot.fr/_media/formations/prepa/agreginterne/polycopieanalyse.pdf).
- [200] Amroun Nour-Eddine. Cours séries entières. <http://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/Math3/Cours-seriesentieres.pdf>.
- [201] ENS Cachan. Théorème de stabilité de Lyapunov. URL <http://minerve.bretagne.ens-cachan.fr/images/Lyapunov.pdf>.
- [202] Michael Gechele. Théorème de stone-weierstrass. [http://michael.gechele.perso.neuf.fr/Agregation/Theoreme\\_Stone\\_Weierstrass.pdf](http://michael.gechele.perso.neuf.fr/Agregation/Theoreme_Stone_Weierstrass.pdf).
- [203] Primitives et intégrales. URL <http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/new.primitive.pdf>.
- [204] Sébastien Pellerin. Développements d'analyse pour l'oral de l'agrégation. . <http://www.sebastien-pellerin.fr/zfiles/agreg/devanalyse.pdf>.
- [205] Kevin Quirin. Théorème de Müntz. [http://kevin.quirin.free.fr/Trucs/agreg/Dvt\\_Muntz.pdf](http://kevin.quirin.free.fr/Trucs/agreg/Dvt_Muntz.pdf).
- [206] Pierre Lissy. Déterminant de cauchy et application au théorème de Müntz. 5 mai 2010. <http://www.ljll.math.upmc.fr/~lissy/Agreg/developpements/CauchyMuntz.pdf>.
- [207] Benjamin Dadoun. Théorème de Müntz. URL <http://benjamin.dadoun.free.fr/muntz.pdf>.
- [208] Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles. 1991.
- [209] Clémence Minazzo and Kelsey Rider. Théorèmes du point fixe et applications aux équations différentielles. 2006-2007. <http://math.unice.fr/~eaubry/Enseignement/M1/memoire.pdf>.
- [210] Ivan Nourdin. *Leçons d'analyse, probabilités algèbre et géométrie*. Dunod, 2001. ISBN 2-10-005668-9.
- [211] William K Allard. The Brouwer fixed point theorem. 2004. <http://www.math.duke.edu/~wka/math204/fixed.pdf>  
see also <http://www.math.duke.edu/~wka/math204/>.

- [212] Kenneth Kuttler. Topics in analysis. Janvier 2012.  
<http://www.math.byu.edu/~klkuttle/SobolevSpacesB.pdf>  
 Juste un indice : ce document fait 2086 pages ... j'y arriverais, courage!
- [213] Hervé Le Dret. Notes de cours – équations aux dérivées partielles elliptiques. 2010.  
<http://www.ann.jussieu.fr/~ledret/M2Elliptique/chapitre1.pdf>.
- [214] Bachir Bekka. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani : applications à l'existence de mesures de Haar et aux chaînes de Markov. 2005.  
<http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/PointFixe.pdf>.
- [215] Sandrine Caruso. Théorème de Cauchy-Lipschitz. 2009.  
<http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg/cauchy-lipschitz.pdf>  
 Voir aussi la page toute pleine de développement  
<http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg.html>.
- [216] Wikipédia. Théorème d'inversion locale — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL  
[http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_d%27inversion\\_locale&oldid=100975433](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27inversion_locale&oldid=100975433). [En ligne ; Page disponible le 19-février-2014].
- [217] Antoine Chambert-Loir. Introduction aux groupes et algèbres de Lie. 2004-2005. URL  
<http://www.math.u-psud.fr/~chambert/enseignement/2004-05/lie/lie.pdf>.
- [218] Jacques Faraut. Groupes et algèbres de Lie. 2001.  
<http://les-mathematiques.u-strasbg.fr/phorum/download.php/2,5426/GroupesdeLie.ps>  
 This postscript file is actually a mess while a transformation into pdf *via* ps2pdf works well.
- [219] E.P. van den Ban. Lie groups. 2003.  
<http://www.math.uu.nl/people/ban/lecnot.html>.
- [220] Georges Comte. Lemme de Morse. 2009-2010. URL <http://gc83.perso.sfr.fr/Agregation/LemmeMorse.pdf>.
- [221] Louis Fauchier-Magnan. Introduction à la théorie de Morse. URL  
<http://cqfd.epfl.ch/webdav/site/cqfd/shared/projets/igat/IntroductionàlathéoriedeMorse-LouisFauchier-Magnan.pdf>.
- [222] Michel Rascle. Analyse fonctionnelle pour la licence.  
<http://math.unice.fr/~rascle/pdf/files/coursanapp/ana-fonc.pdf>.
- [223] B. Mauray. Analyse fonctionnelle et théorie spectrale (version longue). 2001–2002.  
<http://www.math.jussieu.fr/~maurey/ts012/poly/lths.pdf>.
- [224] Mourad Besbes. Chapitre 5 : espaces métriques complets, espaces de Banach.  
<http://besbes.mourad.free.fr/Enseignement/Topologie/Chapitre5.pdf>.
- [225] Wikipédia. Espace complet — Wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace\\_complet&oldid=91125353](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace_complet&oldid=91125353). [En ligne ; Page disponible le 1-avril-2013].
- [226] Aline Kurtzmann. Espérance conditionnelle.  
<http://www.iecn.u-nancy.fr/~kurtzman/cours/agreg/esperance-conditionnelle.pdf>.
- [227] Wikipédia. Théorème de projection sur un convexe fermé — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_projection\\_sur\\_un\\_convexe\\_ferm%C3%A9&oldid=90246160](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_projection_sur_un_convexe_ferm%C3%A9&oldid=90246160). [En ligne ; Page disponible le 3-mai-2013].

- [228] Daniel Li. Espaces de hilbert. .  
<http://li.perso.math.cnrs.fr/textes/AF/Hilbert.pdf>.
- [229] Michel Merle. Espaces de Hilbert. 2004-2005. URL [http://www-math.unice.fr/~merle/Algebre\\_et\\_geometrie/hilbert.pdf](http://www-math.unice.fr/~merle/Algebre_et_geometrie/hilbert.pdf).
- [230] Christiane Schombfond. *Théorie quantique des champs, QED, QCD*. Notes de cours, en français.  
<http://homepages.ulb.ac.be/~cschomb/intfonc+QED+QCD.pdf>.
- [231] Jonathan Bain. Kochen-Specker and measurement. 2011.  
<http://ls.poly.edu/~jbain/philqm/philqmlectures/08.KS&Measurement.pdf>.
- [232] Michel Kern. Introduction à la méthode des éléments finie. 2004-2005. URL [http://mms2.ensmp.fr/ef\\_paris/formulation/polycop/f\\_coursEF.pdf](http://mms2.ensmp.fr/ef_paris/formulation/polycop/f_coursEF.pdf).
- [233] Wikipédia. Théorème d'Ascoli — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_d%27Ascoli&oldid=92958118](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27Ascoli&oldid=92958118). [En ligne; Page disponible le 11-mai-2013].
- [234] Wikipédia. Théorème de banach-steinhaus — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Banach-Steinhaus&oldid=92377069](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Banach-Steinhaus&oldid=92377069). [En ligne; Page disponible le 31-août-2013].
- [235] B. Maurey. 9 mars 2011.  
<http://www.math.jussieu.fr/~maurey/IntegProba/Cours/CoursIP101-14.pdf>.
- [236] B. Mauray. Convolution, inégalités, approximations et régularisation. 2007. URL [www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/Textes/Convolution.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/Textes/Convolution.pdf).
- [237] Schilling. Minkowsky's inequality for integrals. URL <http://math.ucsd.edu/~lni/math240/suppl-1.pdf>.
- [238] Charles Suquet. Intégration, analyse de fourier, probabilités. 2003-2004.  
<http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/IFP/Cours/cours04/CoursIFP04.html>.
- [239] Wikipédia. Théorème de Riesz-Fischer — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Riesz-Fischer&oldid=90074115](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Riesz-Fischer&oldid=90074115). [En ligne; Page disponible le 3-mai-2013].
- [240] Gilles Leborgne. Introduction à la théorie des distributions. 16 mai 2013. URL <http://www.isima.fr/~leborgne/IsimathDistributions/distrib.pdf>.
- [241] Wikipédia. Espace  $L_p$  — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace\\_Lp&oldid=92618226](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Espace_Lp&oldid=92618226). [En ligne; Page disponible le 10-mai-2013].
- [242] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. ISBN 2-225-77198-7. Théorie et applications.
- [243] MoebiusCorzer Giraudo, Davide. Show smooth functions of compact support are dense in the Schwartz space. 2012. URL <http://math.stackexchange.com/questions/229751/show-smooth-functions-of-compact-support-are-dense-in-the-schwartz-space>.
- [244] B. Maurey. Holomorphie. 7 février 2005.  
<http://www.math.jussieu.fr/~maurey/agreg/Textes/Holomorphe045.pdf>.
- [245] Pascal Dingoyan. Chapitre 5. URL <http://www.math.jussieu.fr/~dingoyan/lescours/lm367-pageweb/lm367-chapitre5.pdf>.



- [246] Philippe Charpentier. Analyse complexe. Septembre 2010.  
[http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement/fichiers-master1/Analyse\\_Complexe.pdf](http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement/fichiers-master1/Analyse_Complexe.pdf).
- [247] Christian Kkein. Séries de laurent, résidus. URL [http://math.u-bourgogne.fr/IMB/klein/Complement\\_dAnalyse\\_files/chap607.pdf](http://math.u-bourgogne.fr/IMB/klein/Complement_dAnalyse_files/chap607.pdf).
- [248] Romain Boillaud. Séries entières.  
<http://www.rblld.fr/cours/chap8.pdf>  
Voir le cours complet à l'adresse  
<http://www.rblld.fr/cours/>.
- [249] David Sirajuddin. Fresnel integrals. 2008.  
[http://itcanbeshown.com/integrals/FresnelIntegrals/fresnel\\_integrals.pdf](http://itcanbeshown.com/integrals/FresnelIntegrals/fresnel_integrals.pdf).
- [250] Jean-Marie Lion. Fonctions holomorphes d'une variable. 5 mai 2004.  
<http://perso.univ-rennes1.fr/jean-marie.lion/coursholo.pdf>.
- [251] Richard Gomez. Séries de Fourier. 10 octobre 2010. URL <http://megamaths.perso.neuf.fr/rg/fourier.pdf>.
- [252] David Delaunay. Séries de Fourier. 8 juin 2012.  
<http://mp.cpgedupuydelome.fr/pdf/SériesdeFourier.pdf>.
- [253] Wikipédia. Théorème de jordan — wikipédia, l'encyclopédie libre, Mai 2013.  
URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Jordan&oldid=92525205](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Jordan&oldid=92525205). [En ligne ; Page disponible le 25-mai-2013].
- [254] B. Maurey. Notes de cours : analyse hilbertienne et de Fourier. 2008-2009.  
<http://www.math.jussieu.fr/~maurey/FourHilb/PolyFH.pdf>.
- [255] Bachir Bekka. Le théorème d'inversion de Fourier du point de vue des distributions. URL <http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Theoreme-Inversion-Fourier.pdf>.
- [256] Erdős László. Fourier transform. 2008. URL <https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lerdos/WS08/QM/four08.pdf>.
- [257] Michel Crouzeix. Compléments d'analyse. URL <https://perso.univ-rennes1.fr/michel.crouzeix/publis/anep.pdf>.
- [258] Daniel Li. Notions sur les distributions. . URL <http://labomathlens.free.fr/Liens/AF/distrib.pdf>.
- [259] Armen Shirikyan. Théorie des distributions et analyse de Fourier. URL <http://shirikyan.u-cergy.fr/m1cours2.pdf>.
- [260] Claude Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Dunod, 2002.
- [261] Sabin Lessard. Cours de processus stochastiques. 2013. URL <http://www.dms.umontreal.ca/~lessards/ProcessusStochastiquesLessard2014.pdf>.
- [262] Peter Young. Singular Fourier transforms and the integral representation of the Dirac delta function. November, 2009.
- [263] Daniel Choï. Méthode des éléments-finis par l'exemple. Avril 2010. URL <http://meca.unicaen.fr/~choi/pdf/cours-mef.pdf>.
- [264] Michael Reiter and Arthur Schuste. Fourier transform and Sobolev spaces. 2008. URL [http://www.mat.univie.ac.at/~stein/lehre/SoSem08/sobolev\\_fourier.pdf](http://www.mat.univie.ac.at/~stein/lehre/SoSem08/sobolev_fourier.pdf).

- [265] Norbert Heuer. Ltcc module computation methods. URL <http://www.ltcc.ac.uk/courses/AppliedComputationalMethods/ACM2007Chap1.pdf> \ etautresfichiersdelamemeserie.
- [266] Arkhnor. Densité des fonctions Cinfy à support compact. 2014. URL <http://www.ilemaths.net/sujet-densite-des-fonctions-c-infty-a-support-compact-587937.html>.
- [267] Gilles Leborgne. Complément : espaces de Sobolev fractionnaires. 2007. URL [http://ws.isima.fr/~leborgne/IsimathDistributions/sobolev\\_frac.pdf](http://ws.isima.fr/~leborgne/IsimathDistributions/sobolev_frac.pdf).
- [268] Richard B. Melrose. Lecture notes for 18.155, fall 2002. 2002. URL <http://www-math.mit.edu/~rbm/18.155-F02/Lecture-notes/node11.html>.
- [269] A. Munnier. Théorie des équations différentielles ordinaires. 2006-2007. URL [http://www.iecn.u-nancy.fr/~munnier/files/cours\\_edo.pdf](http://www.iecn.u-nancy.fr/~munnier/files/cours_edo.pdf).
- [270] Olivier Debarre. Équations différentielles. URL <http://www.math.ens.fr/~debarre/EquaDiff.pdf>.
- [271] Franck Boyer. Équations différentielles ordinaires. 2012. URL [http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/Agreg/cours\\_EDO\\_Agreg\\_FBoyer.pdf](http://www.latp.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/Agreg/cours_EDO_Agreg_FBoyer.pdf).
- [272] Kevin Quirin. Développements. 2011-2012. URL <http://kevin.quirin.free.fr/Trucs/agreg/developpements.pdf>.
- [273] Wikipédia. Équations de lotka-volterra — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%89quations\\_de\\_Lotka-Volterra&oldid=113756354](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%89quations_de_Lotka-Volterra&oldid=113756354). [En ligne ; Page disponible le 5-juillet-2015].
- [274] Gianluca Bontempi. Un cours d'analyse numérique et de matlab. 2009. <http://www.ulb.ac.be/di/map/gbonte/calcul/>.
- [275] Wikipedia. Two's complement — wikipedia, the free encyclopedia, 2016. URL [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Two%27s\\_complement&oldid=706335033](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Two%27s_complement&oldid=706335033). [Online ; accessed 6-April-2016].
- [276] Wikipédia. Ieee 754 — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2015. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=IEEE\\_754&oldid=120234746](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=IEEE_754&oldid=120234746). [En ligne ; Page disponible le 12-avril-2016].
- [277] Comprendre les nombres à virgules flottantes. URL <http://blog.netinfluence.ch/2009/09/24/comprendre-les-nombres-a-virgule-flottante/>.
- [278] Harald Schmidt. IEEE754 converter. URL <http://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html>.
- [279] David Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. 1991. URL [http://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg\\_goldberg.html#11655](http://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg_goldberg.html#11655).
- [280] Emmanuel Frénod. Calcul scientifique. 2011-2012. URL <http://web.univ-ubs.fr/lmam/frenod/IMG/DocEtudiant/MTH1504/calculscientifique.pdf>.
- [281] Michel Granget. Normes matricielles, conditionnement. URL [http://math.univ-angers.fr/~granger/anatum/Chapitre\\_II.pdf](http://math.univ-angers.fr/~granger/anatum/Chapitre_II.pdf).
- [282] Franck Boyer. Agrégation externe de mathématiques. Analyse numérique. 14 octobre 2014. URL [http://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/\\_media/enseignements/agreg/cours\\_an\\_agreg\\_fboyer\\_2014.pdf](http://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/agreg/cours_an_agreg_fboyer_2014.pdf).

- [283] Antoine Chambert-Loir. Autour de la méthode de newton.  
<http://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/2005-06/agreg/newton.pdf>.
- [284] Wikipédia. Vitesse de convergence — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Vitesse\\_de\\_convergence&oldid=110252913](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Vitesse_de_convergence&oldid=110252913). [En ligne ; Page disponible le 22-mai-2016].
- [285] Martin Pinto Campos. Approximations polynomiales de fonctions et et des intégrales. 21 décembre 2006. URL [D'après le cours de Laurence Halpern \http://documents.lamacs.fr/cours/mac1/cours-macs1-pinto1.pdf](http://documents.lamacs.fr/cours/mac1/cours-macs1-pinto1.pdf).
- [286] Ming Yang. Matrix decomposition. URL [http://users.eecs.northwestern.edu/~mya671/files/Matrix\\_YM\\_.pdf](http://users.eecs.northwestern.edu/~mya671/files/Matrix_YM_.pdf).
- [287] Benjamin Ambrosio. Chapitre 3 : Méthodes directes de résolution du système  $Ax = b$ . URL <http://lmah.univ-lehavre.fr/~ambrosio/CoursMN/Chapitre3.pdf>.
- [288] Emmanuel Frénod. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires. URL <http://web.univ-ubs.fr/lmam/frenod/IMG/DocEtudiant/MTH1504/methodes-directes.pdf>.
- [289] Vincent Bansaye. Variables aléatoires, espérance, indépendance.  
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~bansaye/CoursTD2.pdf>.
- [290] Alfio Marazzi. There are 22 chapters in 22 files.  
<http://www.iumsp.ch/Unites/us/Alfio/polybiostat/ch06.pdf>.
- [291] Wikipédia. Inégalité de jensen — wikipédia, l'encyclopédie libre, août 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9\\_de\\_Jensen&oldid=90235295](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_de_Jensen&oldid=90235295). [En ligne ; Page disponible le 9-août-2013].
- [292] Gérard Letac. Calcul des probabilités, Deug 2ième année. juin 2001.  
<http://les.mathematiques.free.fr/pdf/proba.zip>.
- [293] Daniel Saada. Note sur le théorème de transfert pour les variables aléatoires réelles. 18 octobre 2012.  
[http://www.les-mathematiques.net/phorum/file.php?12,file=17435,filename=th\\_du\\_tranfert.pdf](http://www.les-mathematiques.net/phorum/file.php?12,file=17435,filename=th_du_tranfert.pdf).
- [294] Antonin Macé and Thomas Pradeau. Exposé de maîtrise. Estimations de densités de probabilité. 2007. Encadré par Gilles Stoltz.  
<http://www.eleves.ens.fr/home/amace/travaux/exposemaîtrise.pdf>.
- [295] Wikipedia. Continuous mapping theorem — wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Continuous\\_mapping\\_theorem&oldid=545523937](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Continuous_mapping_theorem&oldid=545523937). [Online ; accessed 15-June-2013].
- [296] Wikipédia. Inégalité de markov — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2014. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9\\_de\\_Markov&oldid=100208179](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=In%C3%A9galit%C3%A9_de_Markov&oldid=100208179). [En ligne ; Page disponible le 11-février-2014].
- [297] Charles Suquet. Simulation. 2005-2006.  
<http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/Agr/simul06.pdf>.
- [298] Yoann Gelineau. Vecteurs gaussiens. .  
[http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/files/vecteurs\\_gaussiens.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/files/vecteurs_gaussiens.pdf).
- [299] Wikipédia. Nombre normal — wikipédia, l'encyclopédie libre, avril 2013. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre\\_normal&oldid=89848922](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Nombre_normal&oldid=89848922). [En ligne ; Page disponible le 28-avril-2013].

- [300] Wikipédia. Théorème de glivenko-cantelli — wikipédia, l'encyclopédie libre. URL [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Glivenko-Cantelli&oldid=90841113](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Glivenko-Cantelli&oldid=90841113). [En ligne; Page disponible le 15-juin-2013].
- [301] Vincent Rivoirard and Gilles Stoltz. Estimation de densité de probabilités. URL <http://www.math.ens.fr/statenaction/PDF/Densite-Principal.pdf>.
- [302] Nils Berglund. Chaînes de Markov. Décembre 2007. URL <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/markov.pdf>.
- [303] Arnaud Guyader. Espérance conditionnelle et chaînes de Markov. 200-2008. <http://www.sites.univ-rennes2.fr/laboratoire-statistique/AGUYADER/doc/proba/poly.pdf>.
- [304] Massimiliano Gubinelli. Comportement asymptotique des martingales. 2011-2012. <http://www.ceremade.dauphine.fr/~mgubi/e1112/pd3.pdf>.
- [305] Jean Lacroix and Pierre Priouret. Probabilités approfondies. 2005-2006. <http://www.proba.jussieu.fr/cours/processus.pdf>.
- [306] Wikipedia. Optional stopping theorem — wikipedia, the free encyclopedia, 2013. URL [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Optional\\_stopping\\_theorem&oldid=547547174](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Optional_stopping_theorem&oldid=547547174). [Online; accessed 14-August-2013].
- [307] Nizar Touzi. Martingales en temps discret et chaîne de Markov. Septembre 2009. URL <http://www.cmap.polytechnique.fr/~touzi/MAP432-Poly.pdf>.

# Liste des notations

$N \triangleleft G$  Le sous-groupe  $N$  est normal dans  $G$ , page 85

## Algèbre

$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$  Les applications une fois continument dérivables, page 635

$\mathcal{L}(V, W)$  Ensemble des applications linéaires de  $V$  dans  $W$ , page 272

$\mathbb{K}(A)$  corps contenant  $\mathbb{K}$  et  $A$ , page 161

$\mathbb{K}[A]$  anneau contenant  $\mathbb{K}$  et  $A$ , page 161

$\mathbb{N}_0$  les naturels non nuls :  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , page 71

$\mathcal{M}_{n \times m}$  l'ensemble des matrices  $n \times m$ , page 274

$\nabla f$  gradient de la fonction  $f$ , page 617

$\text{proj}_V$  projection de  $V \times W$  sur  $V$ , page 346

$df_a(u)$  Application de la différentielle de  $f$  sur le vecteur  $u$ , page 607

$f^{(n)}$  La  $n$ -ième dérivée de la fonction  $f$ , page 644

$o(x)$  fonction tendant rapidement vers zéro, page 645

$(p)$  idéal engendré par  $p$ , page 131

$[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$  degré d'une extension de corps, page 161

$\mathbb{F}_p$  lorsque  $p$  est premier, page 151

$\mathbb{F}_{p^n}$  corps fini à  $p^n$  éléments, page 186

$\mathbb{Q}$  corps des fractions sur  $\mathbb{Z}$ , page 151

$\text{Frac}(A)$  Le corps des fractions de l'anneau  $A$ , page 151

$\text{Fun}(X, Y)$  les applications de  $X$  vers  $Y$ , page 117

$S(E)$  Les opérateurs auto-adjoints de  $E$ , page 422

$U_n$  Le groupe des racines  $n^{\text{e}}$  de l'unité., page 119

$\text{res}(P, Q)$  résultat des polynômes  $P$  et  $Q$ , page 293

$\sqrt{A}$  racine d'une matrice hermitienne positive, page 717

$\theta_\alpha(P)$  la multiplicité de  $\alpha$  par rapport à  $P$ , page 145

$A[X]$  tous les polynômes de degré fini à coefficients dans  $A$ , page 141

$A_n[X]$  les polynômes à coefficients dans  $A$  et de degré inférieur à  $n$ , page 141

$B \mid A$   $B$  divise  $A$ , page 143

$C(P)$  matrice compagnon, page 399

$E_\lambda(u)$  Espace propre de  $u$ , page 375

$\text{mat}_{\mathcal{B}}(q)$  matrice de  $q$  dans la base  $\mathcal{B}$ , page 894

$S^+(n, \mathbb{R})$  matrices symétriques semi-définies positives, page 384

$S^{++}(n, \mathbb{R})$  matrices symétriques strictement définies positives, page 384

$U(A)$  ensemble des inversibles, page 117

### Ensembles de matrices

$O(n, \mathbb{R})$  le groupe des matrices orthogonales, page 297

$\Omega(E)$  formes quadratiques non dégénérées, page 1087

$Q(E)$  formes quadratiques réelles sur  $E$ , page 417

$Q^+(E)$  formes quadratiques positives, page 1087

$Q^{++}(E)$  formes quadratiques strictement définies positives, page 1087

$S^+(n, \mathbb{R})$  matrices symétriques définies positives, page 718

$S^{++}(n, \mathbb{R})$  matrices symétriques strictement définies positives, page 718

$S_n^{p,q}(\mathbb{R})$  matrices symétriques réelles de signature  $(p, q)$ , page 1087

$\beta(s)$  Vecteur unitaire de la binormale, page 952

$\gamma \sim g$  Équivalence d'arcs paramétrés, page 943

$\nu(s)$  Vecteur unitaire de la normale principale, page 952

$c(s)$  rayon de courbure, page 952

$t(s)$  Torsion, page 953

### Géométrie

$(x_0 : \dots : x_n)$  coordonnées homogènes dans un espace projectif, page 538

$\text{Conv}(A)$  enveloppe convexe, page 517

$\mathbb{C}[G]$  combinaisons d'éléments de  $G$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , page 773

$\text{PGL}(E)$  groupe projectif, page 537

$B^o$  orthogonal dans le dual, page 278

$P(E)$  l'espace projectif de  $E$ , page 531

$P_1(\mathbb{C})$  sphère de Poincaré, page 544

### Chaînes de Markov

$\pi(x)$  lié au temps de retour, page 1515

### Probabilités et statistique

$\sigma(X)$  La tribu engendrée par la variable aléatoire  $X$ , page 1395

$a \wedge b$   $\min(a, b)$ , page 1533

$K_X$  matrice de covariance d'un vecteur gaussien, page 1439

$m(\mathcal{A})$  Ensemble des fonctions  $\mathcal{A}$ -mesurables, page 454

### Théorie des groupes

$(G/H)_g$  classes à gauche, page 103

$[a]_p$  ensemble des  $a + kp$ , page 96

$[G, G]$  groupe dérivé, page 87

$[g, h]$  commutateur dans un groupe, page 87

$\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$  Le groupe des applications affines bijectives de  $\mathbb{R}^n$ , page 523

$\text{gr}$  groupe engendré, page 85

$\hat{G}$  groupe des caractères de  $G$ , page 769

$\sigma_x$  réflexion par rapport à  $x$ , page 732

$A_n$  groupe alterné, page 109

$D(G)$  groupe dérivé, page 87

$D_n$  groupe diédral, page 744

$G^{ab}$  groupe abélianisé de  $G$ , page 87

$G_x$  stabilisateur de  $x$ , page 102

$N \times_{\phi} H$  produit semi-direct, page 112

$S_n$  le groupe symétrique, page 106

### Topologie et théorie des ensembles

$\complement A$  Le complémentaire de l'ensemble  $A$ , page 70

$\text{Diam}(A)$  Diamètre de la partie  $A$ , page 592

$\partial A$  La frontière de l'ensemble  $A$ , page 320

$A \Delta B$  différence symétrique, page 70

$A^c$  complémentaire de  $A$ , page 70

### Analyse

$\text{Isom}(X)$  Le groupe des isométries de  $X$ , page 222

$\mu \ll \nu$  La mesure  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure  $\nu$ , page 790

$C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$  Fonctions à valeurs dans les distributions., page 1306

$C^{\infty}(I, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$  fonctions à valeurs dans les distributions, page 1251

$(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$  complété de l'espace mesuré  $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$ , page 447

$\mathcal{L}(E, F)$  Les applications linéaires de  $E$  vers  $F$ , page 351

$\mathcal{L}^{(n)}(V, W)$  L'espace des applications  $n$ -linéaires  $V^n \rightarrow W$ , page 641

$L$  Les applications linéaires continues de  $E$  vers  $F$ , page 351

$\mathbb{D}_b$  l'ensemble de écritures décimales en base  $b$ , page 333

$\mathbb{R}$  l'ensemble des réels, page 78

$\mathbb{R}^+$  les réels positifs ou nuls, page 80

$\exp$  exponentielle, page 1019

$\text{GL}(E, F)$  les bijections linéaires et continues, page 309

$\mathcal{H}'$  dual, page 1109

$\liminf a_n$  limite inférieure, page 464

$\limsup a_n$  limite supérieure, page 464

$\mathcal{L}^p$  espace de Lebesgue, sans les classes, page 1126

$\mu \perp \nu$  mesures perpendiculaires, page 790

- $\mu^*$  La mesure extérieure associée à la mesure  $\mu$ , page 442
- $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$  dérivées partielles d'une fonction complexe, page 1165
- $\text{proj}_K(x)$  projection orthogonale de  $x$  sur  $y$ , page 1106
- $\sigma(\mathcal{A})$  tribu engendrée par  $\mathcal{A}$ , page 430
- $\mathcal{D}(\Omega)$  Les fonctions  $C^\infty$  à support compact sur  $\Omega$ , page 1238
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  espace des distributions tempérées, page 1244
- $A^2(\Omega)$  espace de Bergman, page 1196
- $A^\perp$  orthogonal d'une partie, page 1107
- $C_c(I)$  fonctions continues à support compact dans  $I$ , page 1108
- $f \sim g$  fonctions ayant des limites équivalentes, page 561
- $H^1(\Omega)$  espace de Sobolev sur  $\Omega$ , page 1268
- $H^1(I)$  espace de Sobolev, page 1261
- $H^m(M)$  espace de Sobolev, page 1269
- $L^1_{loc}(I)$  fonctions intégrables sur les compacts de  $I$ , page 1262
- $L^p$  espace de Lebesgue avec les classes, page 1127
- $M_i\varphi$  La fonction  $x \mapsto x_i\varphi(x)$ , page 1160
- $S_nf$  somme partielle de série de Fourier, page 1138